

Electromagnétisme des milieux continus

— OPTIQUE —

**Licence de Physique, Institut Galilée
Université Paris-Nord**

2000 / 2001

P. Kužel

Table des matières

1. Introduction.....	1
Spectre électromagnétique.....	1
Rappels sur la théorie du champ électromagnétique	3
A. <i>Equations Maxwell</i>	3
B. <i>Energie du champ électromagnétique, vecteur de Poynting</i>	5
C. <i>Formalisme complexe, décomposition spectrale des champs</i>	6
2. Milieux isotropes, homogènes, linéaires.....	9
Equation d'onde, ondes planes monochromatiques et leurs superpositions	9
A. <i>Propagation dans le vide</i>	9
B. <i>Propagation à travers la matière (absorbante ou non-absorbante)</i>	12
C. <i>Vitesse de groupe</i>	15
D. <i>Dispersion de la vitesse de groupe</i>	17
Théorie élémentaire de la dispersion	23
A. <i>Dispersion dans les milieux non-conducteurs (résonance diélectrique)</i>	23
<i>Dispersion dans les matériaux conducteurs (modèle de Drude)</i>	28
3. Polarisation.....	31
Lumière polarisée	31
<i>Sphère de Poincaré</i>	34
<i>Vecteurs de Jones</i>	35
Lumière non-polarisée et partiellement polarisée	38
4. Milieux inhomogènes et stratifiés	41
Théorie eikonale: approximation de l'optique géométrique	41
A. <i>Passage des équations Maxwell à l'optique géométrique</i>	42
B. <i>Propriétés de l'eikonale</i>	44
C. <i>Propriétés des rayons</i>	46
D. <i>Applications</i>	47
Propagation au voisinage d'une interface: équations de Fresnel	50
A. <i>Equations de Fresnel</i>	52
B. <i>Réflexion totale</i>	57
C. <i>Réflexion sur un milieu absorbant</i>	60
Théorie des structures en multicouches.....	63
A. <i>Réflexivité et transmissivité d'une structure avec deux interfaces</i>	63
B. <i>Matrices de transfert</i>	64
C. <i>Applications</i>	68
Guides d'onde optiques.....	76

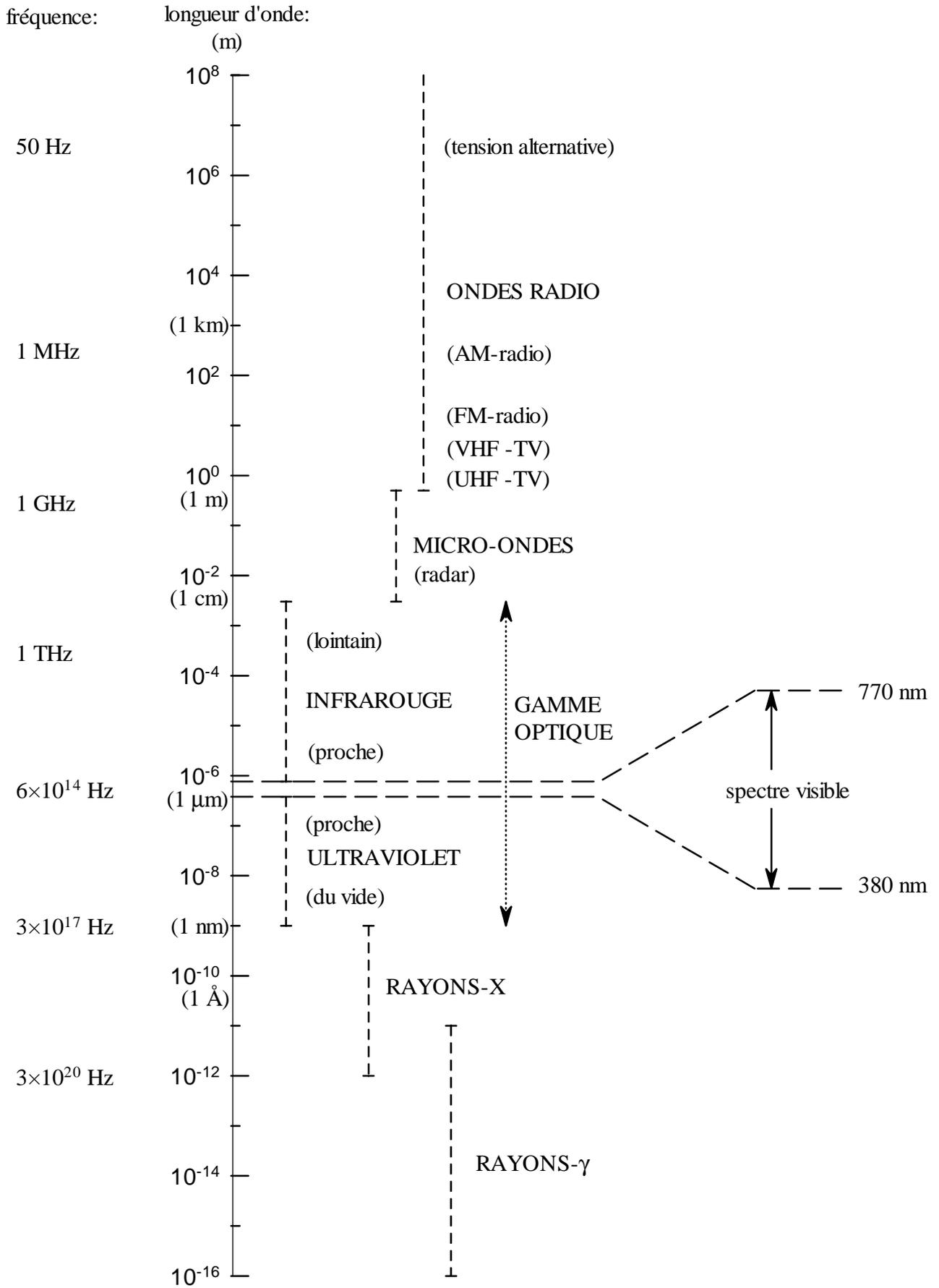
A. Guide d'onde planaire homogène.....	76
Atténuation, dispersion.....	79
5. Milieux anisotropes.....	82
Propagation des ondes planes	84
A. Cas isotrope.....	88
B. Cas uniaxe	88
C. Cas biaxe.....	90
Vitesse de phase, vitesse de groupe	91
E. Réfraction double à l'interface.....	92
Ellipsoïde des indices	94
Eléments optiques biréfringents	96
A. Polariseurs	96
B. Lames retardatrices de phase	99
Activité optique	100
6. Réponse non-locale	103
Causalité, relations Kramers-Kronig	103
Dispersion spatiale, activité optique.....	107
7. Milieux non-linéaires	111
Effet électro-optique linéaire (de Pockels)	112
A. Déformation de l'ellipsoïde des indices.	113
B. Symétrie du tenseur de Pockels.....	114
C. Exemple d'application.....	115
Effets optiques du second ordre: mélanges à trois ondes	117
A. Mélange à trois ondes	117
B. Génération de la seconde harmonique.....	119
C. Synchronisation de phase.....	122
D. Mélanges de fréquences, génération paramétrique	124
Effets non-linéaires du troisième ordre	124
A. Effet électro-optique quadratique (de Kerr)	125
B. Mélanges à quatre ondes.....	125
Effets magnéto-optiques	127
Annexe A: Propagation des rayons dans un milieu à symétrie cylindrique.....	131
Rayons circulaires hélicoïdaux.	132
Rayons méridiens.....	134
Annexe B: Notions de base sur les tenseurs.	136
Changements de base.....	136
Définition et propriétés d'un tenseur.....	138
Définition.....	138

<i>Comportement d'un tenseur dans un changement de base.....</i>	<i>138</i>
Réduction d'un tenseur par des considération de symétrie.....	139
<i>Symétrie intrinsèque (cas de la permittivité diélectrique).....</i>	<i>139</i>
<i>Réduction du nombre de composantes indépendantes imposée par le milieu cristallin.</i>	<i>140</i>
Annexe C: Transformée de Fourier.....	144

1. Introduction

Spectre électromagnétique

Le champ électromagnétique qui se propage dans l'espace peut être monochromatique, c.-à-d. caractérisé par une seule fréquence ν , pulsation ω ($\omega = 2\pi\nu$) ou longueur d'onde λ ($\lambda = c/\nu$), ou polychromatique, s'il transporte plusieurs fréquences (longueurs d'onde) soit discrètes soit en continuum. La distribution de l'énergie entre ces composantes s'appelle le spectre du rayonnement. Différentes gammes du spectre électromagnétique sont désignées par des noms particuliers (ondes radio, micro-ondes, ondes optiques, etc.): l'irradiation et la détection du champ électromagnétique dans les différentes gammes spectrales sont souvent liées à des processus physiques bien différents. Un aperçu de tout le spectre électromagnétique utilisé ou accessible est donné sur le schéma à la page suivante. Le rayonnement appartenant à l'intervalle étroit entre 380 nm et 770 nm est capable de produire des sensations visuelles dans l'oeil humain et s'appelle "lumière". Cette région est bornée des deux côtés par un rayonnement invisible: ultraviolet (côté faible longueur d'onde) et infrarouge (côté grande longueur d'onde). Les trois gammes forment ensemble le spectre optique auquel on s'intéressera en particulier dans le cadre de ce cours.



Rappels sur la théorie du champ électromagnétique

A. Equations Maxwell

La propagation de la lumière est régie par les équations Maxwell (EM): le champ électromagnétique dans l'espace est décrit par les vecteurs de champ électrique (\mathbf{E}) et magnétique (\mathbf{H}); pour tenir compte de l'interaction avec la matière il convient d'introduire un second couple de vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{B} (inductions électrique et magnétique). Ces quatre vecteurs sont reliés par les équations Maxwell (système MKS):

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1a)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1d)$$

où \mathbf{j} (densité de courant électrique) et ρ (densité de charges électriques libres) jouent le rôle des sources du champ électromagnétique. Ces quatre équations représentent les lois fondamentales de l'électricité et du magnétisme: leur sens devient bien claire lorsqu'elles sont réécrites sous forme d'intégrales:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2a)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{J} \quad (1.2b)$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (1.2c)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.2d)$$

Equation (1.2a) exprime la loi de Faraday de l'induction électromagnétique, équation (1.2b) exprime la loi d'Ampère généralisée qui décrit l'induction du champ magnétique par un déplacement des charges; l'équation (1.2c) est équivalente à la loi de Coulomb et l'équation (1.2d) postule l'absence des monopôles magnétiques.

En optique nous sommes souvent amenés à la situation où la lumière se propage à travers l'interface entre deux milieux différents. Dans ce cas il est utile de réécrire les EM afin d'obtenir des conditions aux limites qui expriment la continuité ou la discontinuité des composantes normales (indice n) et tangentielles (indice t) des vecteurs de champs:

$$\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0 \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{j}_s \quad (1.3b)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (1.3c)$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (1.3d)$$

On rencontre souvent des problèmes où la densité surfacique du courant électrique \mathbf{j}_s et la densité surfacique des charges libres σ sont nulles: dans ces cas les équations (1.3a-d) expriment la continuité des composantes tangentielles de \mathbf{E} et \mathbf{H} et des composantes normales de \mathbf{D} et \mathbf{B} à l'interface entre les milieux 1 et 2.

Aux EM s'ajoutent les relations constitutives qui caractérisent les propriétés électromagnétiques de la matière par l'intermédiaire de la permittivité diélectrique ϵ et de la perméabilité magnétique μ :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \end{aligned} \quad (1.4)$$

où \mathbf{P} est le vecteur de la polarisation et \mathbf{M} est le vecteur de l'aimantation; ϵ_0 et μ_0 sont la permittivité et la perméabilité du vide. Le plus souvent, on s'intéresse en optique aux matériaux non-magnétiques où $\mu = \mu_0$. La permittivité diélectrique reste alors la seule quantité qui détermine les propriétés optiques des matériaux; ainsi on peut classer les matériaux (ou les phénomènes à étudier) selon plusieurs critères:

- anisotrope (ϵ est un tenseur du rang 2) — isotrope (ϵ est un scalaire)
- inhomogène ($\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$) — homogène (ϵ ne dépend pas de \mathbf{r})
- absorbant (ϵ est complexe) — non-absorbant (ϵ est réel)
- dispersif ($\epsilon = \epsilon(\omega)$)¹ — sans dispersion (ϵ ne dépend pas de ω)
- non-linéaire (ϵ dépend des champs \mathbf{E} ou \mathbf{H}) — linéaire (ϵ ne dépend pas des champs)

¹ On comprend intuitivement, ainsi que nous l'avons évoqué plus haut, que le champ électromagnétique peut être décomposé en composantes spectrales dont les amplitudes s'écrivent: $\mathbf{E}(\omega)$, $\mathbf{D}(\omega)$, etc. Dans le cas d'un milieu dispersif où $\epsilon = \epsilon(\omega)$, l'équation (1.4) doit être comprise comme une relation entre ces composantes spectrales:

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (1.4bis)$$

Les raisons plus profondes de la dispersion seront discutées en détail dans les chapitres 3 et 7 de ce mémoire.

On introduit souvent en parallèle à la permittivité diélectrique un paramètre connu sous le nom de la susceptibilité diélectrique χ :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (1.5)$$

Il s'en suit des équations (1.4) et (1.5) que la relation entre ϵ et χ s'écrit:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi). \quad (1.6)$$

B. Energie du champ électromagnétique, vecteur de Poynting

Le changement de l'énergie électromagnétique emmagasiné dans un certain volume V doit être égal au flux de l'énergie qui entre dans V réduit du travail que le champ exerce sur les particules chargées dans V . Une charge ponctuelle est soumise à la force de Lorentz $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$, il s'en suit que le travail exercé par les champs par unité de temps vaut $q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ (le champ magnétique ne produit pas de travail car sa force est toujours perpendiculaire à la vitesse \mathbf{v}). Dans le cas d'une distribution continue des charges et du courant, le travail du champ par unité de temps s'écrit: $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ (énergie dissipée par la chaleur de Joule). La loi de conservation de l'énergie électromagnétique découle ensuite de (1.1b):

$$(\nabla \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

et de (1.1a):

$$(\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = 0.$$

En tenant compte de l'identité

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H})$$

on obtient la loi de conservation de l'énergie électromagnétique:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (1.7)$$

avec:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}. \quad (1.9)$$

Pour un milieu linéaire et non-dispersif l'équation (1.8) s'intègre facilement et on obtient:

$$U = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.10)$$

U est la densité d'énergie et \mathbf{S} , appelé vecteur de Poynting, s'interprète comme le flux de l'énergie électromagnétique. La dimension de \mathbf{S} est $Jm^{-2}s^{-1}$ et son module représente la puissance du rayonnement qui passe par une unité de surface dans la direction de \mathbf{S} .

C. Formalisme complexe, décomposition spectrale des champs

En optique nous rencontrons le rayonnement monochromatique ou polychromatique. Le rayonnement monochromatique ne contiennent qu'une seule composante spectrale et, par conséquent, les champs subissent une variation temporelle harmonique:

$$a(t) = |A| \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.11)$$

où ω est la pulsation de l'onde et α est sa phase. La fonction $a(t)$ représente symboliquement l'un des vecteurs du champ électromagnétique et $|A|$ est l'amplitude de son oscillation. Il convient de représenter cette onde sous forme complexe. Eq. (1.11) s'écrit ensuite:

$$a(t) = \text{Re}\{Ae^{i\omega t}\} = Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t}, \text{ où } A = |A|e^{i\alpha} \quad (1.12)$$

En effet, pour rendre les calculs ultérieurs plus simples, nous allons souvent écrire

$$a(t) = Ae^{i\omega t} \quad (1.13)$$

à la place de (1.11). Ceci n'est pas strictement correct, mais il faut avoir à l'esprit que c'est la partie réelle de cette expression qui nous intéresse et qui a un sens physique. Cette représentation complexe ne présente aucun problème tant que les opérations mathématiques linéaires sont concernées (combinaisons linéaires, transformé de Fourier etc.). Cependant, on est parfois amené à calculer des quantités physiques qui dépendent d'une puissance plus élevée des champs — ces cas exigent une plus grande attention et seront toujours signalés dans le cadre de ce cours avant d'être abordés.

Comme les EM (1.1) et les relations constitutives (1.4) sont linéaires en champs² on peut appliquer le principe de superposition à ses solutions. En particulier, on peut décrire le rayonnement polychromatique comme combinaisons linéaires des composantes spectrales. Il peut contenir plusieurs composantes spectrales discrètes du type (1.11):

$$a(t) = \sum_k |A_k| \cos(\omega_k t + \alpha_k) \quad (1.14)$$

ou, dans le cas le plus général, il peut porter un continuum de composantes spectrales caractérisées par leurs amplitudes $|A(\omega)|$ et phases $\alpha(\omega)$:

$$a(t) = \int_0^{\infty} |A(\omega)| \cos(\omega t + \alpha(\omega)) d\omega. \quad (1.15)$$

On peut alors adopter le formalisme des fonctions complexes tout comme pour l'équation (1.13):

$$a(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \text{ où } A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\alpha(\omega)}. \quad (1.13\text{bis})$$

Bien entendu, ce n'est que la partie réelle de $a(t)$ qui a un sens physique. Nous pouvons alors écrire les EM séparément pour toutes les composantes spectrales de pulsation ω :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + i\omega \mathbf{B} = 0 \quad (1.16a)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} - i\omega \mathbf{D} = \mathbf{j} \quad (1.16b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.16c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.16d)$$

et, après les avoir résolues, appliquer l'expression (1.13bis) pour trouver les solutions polychromatiques.

Les exemples les plus fréquemment utilisés des quantités qui dépendent de façon non-linéaire des vecteurs de champs sont la densité d'énergie et le vecteur de Poynting (fonctions quadratiques en vecteurs de champs). Il s'agit des quantités très importantes parce

² On note que pour les matériaux non-linéaires $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ et, par conséquent, tout le système d'équations Maxwell devient non-linéaire. Le principe de superposition exprimé par les relations (1.15) et (1.13bis) ne sera alors plus valable. L'optique non-linéaire constitue toute une discipline à part entière et sera brièvement introduite dans le dernier chapitre de ce mémoire.

qu'elles sont directement mesurables. Plus précisément, les détecteurs de la lumière ne sont pas suffisamment rapides pour pouvoir suivre les oscillations à des fréquences optiques ($\omega \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$) et ne peuvent mesurer que des valeurs moyennes sur un grand nombre de périodes de l'onde. La valeur moyenne d'un produit de deux fonctions harmoniques s'écrit:

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |A| \cos(\omega t + \alpha) |B| \cos(\omega t + \beta) dt = \frac{1}{2} |AB| \cos(\alpha - \beta)$$

où $T = 2\pi/\omega$ est la période du signal. En introduisant les amplitudes complexes A et B de façon analogue à l'équation (1.12), on peut écrire:

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{AB^*\}$$

Par conséquent la valeur moyenne du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie s'écrivent dans le formalisme complexe:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*\} \quad (1.17)$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} \text{Re}\{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*\}. \quad (1.18)$$

2. Milieux isotropes, homogènes, linéaires

Equation d'onde, ondes planes monochromatiques et leurs superpositions

A. Propagation dans le vide

Les équations de Maxwell constituent une série d'équations différentielles couplées; il convient donc d'en déduire les équations séparées pour chacun des vecteurs du champ. Dans le vide: $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Nous appliquons l'opérateur rotationnel à l'équation (1.1a) et l'opérateur $\partial/\partial t$ à (1.1b); en comparant les deux équations résultantes nous obtenons:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

et, par conséquent, l'équation d'onde pour le champ électrique s'écrit:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.2a)$$

De façon similaire on trouve pour le champ magnétique:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2b)$$

où

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Ces équations sont vérifiées par exemple par les ondes monochromatiques planes:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (2.3b)$$

dont la pulsation ω et le vecteur d'onde \mathbf{k} sont reliés par

$$|\mathbf{k}| \equiv k = \frac{\omega}{c}$$

Le front de l'onde est perpendiculaire à \mathbf{k} et il se déplace le long de \mathbf{k} avec la vitesse c . L'application des EM à (2.3a,b) donne la condition de transversalité des champs du rayonnement et une relation entre les amplitudes:

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k} \quad (2.4a)$$

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \equiv \eta_0, \quad \frac{E_0}{B_0} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \equiv c \quad (2.4b)$$

où $\eta_0 \approx 377 \Omega$ est appelé l'impédance du vide. Il s'en suit que \mathbf{H}_0 (ou \mathbf{B}_0) est complètement déterminé par \mathbf{k} et \mathbf{E}_0 qui seuls suffisent pour caractériser l'état du champ:

$$\mathbf{H}_0 = \eta_0^{-1} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{E}_0), \quad \mathbf{B}_0 = c^{-1} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{E}_0) \quad (2.5)$$

où $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ est le vecteur unitaire parallèle à \mathbf{k} .

Les solutions indépendantes des équations d'onde (2.2a,b) sont appelées les modes du rayonnement électromagnétique³. Elles doivent former une base complète dans l'espace de

³ Les ondes planes ne représentent pas le seul système possible de solutions des équations (2.2a,b); c'est un système de modes souvent utilisé parce que leurs combinaisons linéaires correspondent à la transformée de

toutes les solutions: n'importe quelle solution des équations (2.2a,b) peut être décomposées en une superposition linéaire des fonctions du type (2.3a,b):

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \iiint \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = \iiint \mathbf{H}_0(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k}. \quad (2.6b)$$

Les amplitudes \mathbf{E}_0 et \mathbf{H}_0 ont donc la signification des composantes spectrales (composantes de Fourier) d'un état particulier du rayonnement. Lorsque, par exemple, nous avons une impulsion du rayonnement électromagnétique qui se propage suivant l'axe z ($k_x = k_y = 0$) on peut la décomposer en utilisant la transformée de Fourier à une dimension:

$$\mathbf{E}(t, z) = \int \mathbf{E}_0(\omega) e^{i(\omega t - k z)} d\omega \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{H}(t, z) = \int \mathbf{H}_0(\omega) e^{i(\omega t - k z)} d\omega \quad (2.7b)$$

Formellement, cette impulsion peut être caractérisée par une pulsation centrale ω_0 , un vecteur d'onde central $k_0 = \omega_0/c$ et une fonction $\mathbf{E}_1(t)$ décrivant son enveloppe:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, z) &= \mathbf{E}_1(t, z) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int \mathbf{E}_0(\omega) e^{i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)z)} d\omega = \\ &= e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int \mathbf{E}_0(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t - z/c)} d\omega = \mathbf{E}_1(t - z/c) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Cela signifie que l'enveloppe aussi bien que la phase de l'impulsion se propagent avec la vitesse de la lumière c .

De façon générale, nous pouvons toujours chercher les solutions des équations d'onde sous forme d'ondes planes et la transformée de Fourier nous permettra de retrouver toutes les formes de solutions.

Revenons aux EM: lorsque nous cherchons les solutions des EM sous forme des ondes planes, nous pouvons directement remplacer l'opérateur $\nabla \wedge$ par $-i\mathbf{k} \wedge$, $\nabla \cdot$ par $-i\mathbf{k} \cdot$ et $\partial/\partial t$ par $i\omega$. Ainsi nous retrouvons les EM sous forme:

$$-i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} + i\omega \mathbf{B} = 0 \quad (2.9a)$$

$$-i\mathbf{k} \wedge \mathbf{H} - i\omega \mathbf{D} = \mathbf{j} \quad (2.9b)$$

$$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.9c)$$

$$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.9d)$$

Fourier (voir expression (2.7a,b)). Les ondes planes sont illimitées dans l'espace; dans la physique des lasers on utilise souvent un autre système de modes (faisceaux Gaussiens) qui sont caractérisés par un diamètre et qui conviennent mieux pour la descriptions des faisceaux laser. D'autres systèmes de solutions sont encore utilisés par exemple lorsque des conditions aux limites spécifiques sont imposées (fibres optiques).

Les équations (2.9c,d) signifient qu'en l'absence de charges libres le rayonnement électromagnétique (vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{B}) est toujours transverse.

B. Propagation à travers la matière (absorbante ou non-absorbante)

Nous allons considérer un milieu diélectrique ($\epsilon \neq \epsilon_0$) et non magnétique ($\mu = \mu_0$). Le courant des charges libres est lié au champ électrique et doit satisfaire la loi de Ohm:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} , \quad (2.10)$$

où σ est la conductivité du milieu. L'équation (1.16b) pour la composante spectrale ω peut ensuite être réécrite sous la forme:

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = i\omega \left(\epsilon - \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} . \quad (2.11)$$

Il est évident que les effets du courant des charges libres peuvent être simplement inclus dans un paramètre complexe $\hat{\epsilon} = \epsilon - i\sigma/\omega$ qui tiendra compte aussi bien des effets diélectriques (charges liées) que des effets ohmiques (charges libres) du matériau. Examinons maintenant l'équation (1.1c):

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho .$$

On peut la réécrire sous forme:

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\epsilon - i\sigma/\omega) \mathbf{E} + i/\omega \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \nabla \cdot (\hat{\epsilon} \mathbf{E}) - \nabla \cdot \mathbf{j}/(i\omega) = \rho .$$

Compte tenu de l'équation de continuité (conservation des charges électriques) $\nabla \cdot \mathbf{j} = -i\omega \rho$ on trouve:

$$\nabla \cdot (\hat{\epsilon} \mathbf{E}) = 0 .$$

Nous pouvons donc, sans perdre le caractère général des solutions, omettre la densité de courant dans la seconde EM et la densité des charges libres dans la troisième EM, en postulant que tous les effets liés aux charges libres sont décrits par une permittivité complexe ϵ (le chapeau sera omis pour simplifier la notation). Soulignons enfin que ce traitement n'est valable que pour des composantes spectrales (modes harmoniques: $\mathbf{E}, \mathbf{H} \propto e^{i\omega t}$) où nous pouvons remplacer la dérivée temporelle $\partial/\partial t$ par une multiplication de $i\omega$.

En suivant la même procédure que pour le rayonnement dans le vide, on obtient les

équations d'onde:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.12)$$

ou encore après avoir introduit les solutions sous forme des ondes planes:

$$\left(k^2 - \epsilon \mu_0 \omega^2 \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.13)$$

On peut définir l'indice de réfraction complexe $N = n - i\kappa$:

$$N^2 = \epsilon \mu_0 c^2, \quad (2.14)$$

la relation de dispersion s'écrit ensuite:

$$k = k' - ik'' = \frac{\omega}{c} N, \quad (2.15)$$

avec la partie réelle et imaginaire $k' = \frac{\omega}{c} n$, $k'' = \frac{\omega}{c} \kappa$. On introduit la permittivité relative ϵ_r (connue aussi sous le nom de la constante diélectrique):

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \quad \epsilon_r = \epsilon'_r - i\epsilon''_r;$$

compte tenu de (2.14) les relations entre l'indice de réfraction et la constante diélectrique s'écrivent:

$$\begin{aligned} \epsilon'_r &= n^2 - \kappa^2, & \epsilon''_r &= 2n\kappa, \\ n &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\epsilon'^2_r + \epsilon''^2_r} + \epsilon'_r \right)}, & \kappa &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\epsilon'^2_r + \epsilon''^2_r} - \epsilon'_r \right)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La partie réelle k' et imaginaire k'' du vecteur d'onde sont des vecteurs qui peuvent avoir des directions différentes. Elles dépendent des conditions aux limites: la direction de la partie réelle est perpendiculaire à la surface de la phase constante et celle de la partie imaginaire est perpendiculaire à la surface de l'amplitude constante de l'onde. Les conditions aux limites peuvent être établies par exemple au bord d'un échantillon absorbant. On discutera ce problème plus en détail lors du traitement de la propagation à travers les interfaces. Admettons intuitivement pour l'instant que dans le cas le plus courant où l'onde

électromagnétique se propage dans l'échantillon perpendiculairement à la surface d'entrée, \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' seront parallèles. On démontre alors que les champs sont transverses:

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k}. \quad (2.17a)$$

Dans le cas général, on peut définir l'impédance du milieu η et on trouve à partir des EM:

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \equiv \eta, \quad (\eta = \eta_0/N) \quad (2.17b)$$

$$\mathbf{H}_0 = \eta^{-1} (\mathbf{s} \wedge \mathbf{E}_0), \quad \mathbf{B}_0 = N/c (\mathbf{s} \wedge \mathbf{E}_0) \quad (2.17c)$$

On trouve alors que la direction et le module de \mathbf{H}_0 sont complètement déterminés par les propriétés du milieu (par l'intermédiaire de ϵ ou η) et par les vecteurs \mathbf{k} et \mathbf{E}_0 .

Maintenant nous allons calculer le vecteur de Poynting, c.-à-d. l'intensité du rayonnement, qui se propage dans le milieu:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^* \};$$

or à partir de (2.9a) ou (2.17c):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu_0} (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}).$$

On trouve:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2\omega \mu_0} \text{Re} \{ \mathbf{E} \wedge (\mathbf{k}^* \wedge \mathbf{E}^*) \} = \frac{1}{2\omega \mu_0} \text{Re} \{ \mathbf{k}^* (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) - \underbrace{(\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}^*}_0 \} = \\ &= \frac{1}{2\omega \mu_0} \text{Re} \{ (\mathbf{k}' - i\mathbf{k}'') (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) e^{-2k'' \cdot \mathbf{r}} \} = \frac{\mathbf{k}'}{2\omega \mu_0} |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2k'' \cdot \mathbf{r}} \end{aligned}$$

En particulier, pour une propagation suivant z :

$$|\mathbf{S}| = (2\omega \mu_0)^{-1} n \frac{\omega}{c} |\mathbf{E}_0|^2 e^{-2\omega \kappa z/c} = \frac{n}{2\eta_0} |\mathbf{E}_0|^2 e^{-\alpha z} \quad (2.18)$$

où le coefficient d'absorption α est défini par la relation suivante ($1/\alpha$ a le sens de la profondeur de pénétration de l'onde électromagnétique):

$$\alpha(\omega) = \frac{2\omega\kappa}{c} \left(= \frac{4\pi\kappa}{\lambda} \right). \quad (2.19)$$

L'énergie se propage suivant la direction de la partie réelle du vecteur d'onde et, pour un matériau absorbant, elle décroît exponentiellement avec son épaisseur.

C. Vitesse de groupe

Imaginons une impulsion laser $E(t, z)$ qui se propage suivant l'axe z dans un milieu non-absorbant. Si la variation de l'amplitude de l'impulsion est suffisamment lente, ce qui signifie que sa largeur spectrale est nettement inférieure à sa fréquence moyenne, nous parlons d'une onde quasi-monochromatique.

Le milieu est caractérisé par la relation de dispersion (2.15); pour la partie réelle on a:

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega). \quad (2.20)$$

Comme l'indice de réfraction n peut dépendre de ω , k va aussi dépendre de ω ; et vice-versa, ω peut dépendre de k de façon assez compliquée. Notre impulsion est donné par une combinaison linéaire des modes propres:

$$E(t, z) = \int E_0(k) e^{i(\omega(k)t - kz)} dk, \quad (2.21)$$

elle est caractérisée par sa fréquence centrale (moyenne) ω_0 et le vecteur d'onde correspondant k_0 . Typiquement, $E_0(k)$ a un maximum à k_0 et possède des valeurs non-nulles dans un voisinage étroit Δk de k_0 ($\Delta k \ll k_0$, onde quasi-monochromatique). Si nous ne connaissons pas exactement la variation de n en fonction de ω , nous pouvons développer $\omega(k)$ en série de Taylor:

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 (k - k_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 (k - k_0)^2 \dots \quad (2.22)$$

Pour simplifier l'écriture nous allons désigner le coefficient $(d\omega/dk)_0$ par v_g et le coefficient $(d^2\omega/dk^2)_0$ par β . Remarquons que v_g a la dimension d'une vitesse et nous l'appellerons vitesse de groupe; on démontrera que c'est un paramètre très important pour décrire la propagation de l'impulsion. L'équation (2.22) s'écrit ensuite⁴:

⁴ Notons que l'impulsion $E(t, z)$ aurait pu être aussi bien décomposée en composantes spectrales de ω ; on obtiendrait alors une expression similaire à (2.21):

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k - k_0) + \beta/2(k - k_0)^2 \dots \quad (2.23)$$

Dans un premier temps nous supposons que le spectre de l'impulsion est suffisamment étroit et que la variation de $\omega(k)$ est lente afin de pouvoir négliger les termes non-linéaires du développement (2.23):

$$\begin{aligned} E(t, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} e^{i(v_g(k - k_0)t - (k - k_0)z)} dk = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(k) e^{i(v_g t - z)(k - k_0)} dk \\ E(t, z) &= e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} E_1(z - v_g t) = \underbrace{e^{-ik_0(z - vt)}}_{(A)} \underbrace{E_1(z - v_g t)}_{(B)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

où le terme (A) décrit l'oscillation du champ avec la fréquence centrale: le front d'onde de cette oscillation se déplace avec la vitesse de phase

$$v = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(\omega)}, \quad (2.25)$$

et le terme (B) désigne l'enveloppe de l'impulsion qui ne se déforme pas lors de la propagation et qui se déplace avec la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}. \quad (2.26)$$

Cette dernière formule a été dérivée à partir de la relation de dispersion (2.20):

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad / \quad d/dk$$

$$E(t, z) = \int E_0(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega \quad (2.21bis)$$

avec un développement limité de $k(\omega)$

$$k(\omega) = k_0 + (dk/d\omega)_0 (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} (d^2k/d\omega^2)_0 (\omega - \omega_0)^2 \dots, \quad (2.22bis)$$

qui, compte tenu de (2.23), s'écrirait:

$$k(\omega) = k_0 + v_g^{-1}(\omega - \omega_0) - \beta/(2v_g^3) (\omega - \omega_0)^2 \dots \quad (2.23bis)$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \frac{n(\omega)}{c} \frac{d\omega}{dk}$$

$$1 = \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} v_g + \frac{n}{c} v_g$$

$$v_g = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega}.$$

Il s'en suit de l'équation (2.18) et (2.24) que

$$\left| \langle \mathcal{S}(z - v_g t) \rangle \right| \propto \left| \mathbf{E}_1(z - v_g t) \right|^2$$

et donc que l'énergie de l'impulsion se propage également avec la vitesse de groupe v_g . Pour les régions de la dispersion normale, $dn/d\omega > 0$ et la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de phase (à comparer les expressions (2.25) et (2.26)). Dans les régions de la dispersion anormale $dn/d\omega$ est négatif: la vitesse de groupe est alors supérieure à la vitesse de phase. La vitesse de groupe peut même parfois dépasser c : cela arrive dans le domaine de la dispersion anormale si la variation de $n(\omega)$ est très abrupte. Ceci implique que la variation de $\omega(k)$ est aussi très rapide, que notre approximation linéaire n'est pas valable, et qu'il faut tenir compte des termes d'ordre plus élevé du développement (2.23). On verra par la suite que ces termes mènent à un étalement rapide de l'impulsion dans le temps (ou dans l'espace). D'autre part, les régions spectrales de grande dispersion anormale sont accompagnées d'un grand accroissement de l'absorption (voir le modèle de Lorentz pour la dispersion d'un diélectrique) et l'impulsion optique se trouve très fortement atténuée à l'échelle de quelques fractions de λ . On peut alors montrer que la théorie de la relativité n'est pas contredite.

D. Dispersion de la vitesse de groupe

Nous avons avancé que le terme quadratique du développement limité (2.23) mène à l'étalement d'une impulsion dans le temps. Cet effet est connu sous le nom de la dispersion de la vitesse de groupe et devient important surtout pour des impulsions ultra-brèves. Ceci est dû au fait que ces impulsions, dont la durée est plus brève qu'une fraction de picoseconde, ont un spectre assez large (typiquement $\Delta k/k > 0.01$) et le terme non-linéaire $\beta(k - k_0)^2$ peut produire un effet observable après le passage par un matériau dispersif suffisamment épais. Il est évident que la dispersion de la vitesse de groupe doit être soigneusement évaluée par exemple dans les résonateurs des lasers femtosecondes — où les impulsions doivent parcourir tous les éléments dispersifs un grand nombre de fois et rester toujours ultra-brèves — ou dans les fibres optiques — où l'information est codée dans des trains d'impulsions optiques qui doivent parcourir des milliers de kilomètres et pourtant rester "lisibles": la dispersion de la vitesse de groupe limite ainsi la cadence des impulsions. L'objectif du calcul suivant est

d'évaluer l'étalement d'une impulsion lié à la dispersion de la vitesse de groupe.

a) *Traitement intuitif*

Le coefficient du second ordre du développement limité (2.22bis) peut être relié à la dispersion de la vitesse de groupe $dv_g/d\omega$ de façon suivante:

$$\frac{d^2k}{d\omega^2} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dk}{d\omega} \right) = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{1}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega} \quad (2.27)$$

L'expression (2.22bis) s'écrit alors:

$$k(\omega) = k_0 + \frac{1}{v_g} (\omega - \omega_0) - \frac{1}{2v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega} (\omega - \omega_0)^2 \dots \quad (2.28)$$

En comparant l'expression (2.28) avec (2.23bis), on obtient:

$$\beta = v_g \frac{dv_g}{d\omega}.$$

Considérons une impulsion dont la largeur spectrale est égale à $\Delta\omega$; la dispersion de la vitesse de groupe non nulle a pour conséquence que les composantes spectrales provenant des deux extrémités du spectre se propagent avec des vitesses différentes. Cette différence est égale à

$$\Delta v_g = \frac{dv_g}{d\omega} \Delta\omega$$

L'estimation de l'étalement de l'impulsion après un parcours d'une longueur L peut alors s'écrire:

$$\Delta\tau = \frac{L}{v_g^2} |\Delta v_g| = \frac{L}{v_g^2} \left| \frac{dv_g}{d\omega} \right| \Delta\omega \left(= L \frac{d^2k}{d\omega^2} \Delta\omega \right) \approx \frac{4 \ln 2}{v_g^2} \left| \frac{dv_g}{d\omega} \right| \frac{L}{\tau_0}, \quad (2.29)$$

où nous avons supposé que la longueur τ_0 de l'impulsion est liée à sa largeur spectrale par la relation $\tau_0 = 4 \ln 2 / \Delta\omega$ (cette relation implique que l'impulsion provient d'une source de lumière cohérente et que sa forme peut être approchée par une gaussienne).

On peut évaluer le terme $d^2k/d\omega^2$:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{1}{c} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right),$$

où nous avons utilisé la relation $d\omega/\omega = -d\lambda/\lambda$; on obtient ensuite:

$$\frac{d^2k}{d\omega^2} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\lambda}{\omega} \frac{d}{d\lambda} \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) = \frac{\lambda^2}{c\omega} \frac{d^2n}{d\lambda^2}.$$

L'équation (2.29) s'écrit ensuite simplement:

$$\Delta\tau = L \frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \Delta\lambda. \quad (2.30)$$

b) *Traitement rigoureux*

Nous partons de la décomposition de l'impulsion en composantes spectrales:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)z)} d\omega \\ &= e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)(t - z/v_g)} e^{i\beta z / (2v_g^3) (\omega - \omega_0)^2} d\omega \end{aligned}$$

Nous définissons:

$$\tau = t - z/v_g, \quad \xi = \beta z / (2v_g^3),$$

pour obtenir

$$\mathbf{E}(t, z) = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0(\omega + \omega_0) e^{i\tau\omega} e^{i\xi\omega^2} d\omega.$$

La transformée de Fourier de la convolution de deux fonctions est égale au produit des deux transformées de Fourier respectives (voir Annexe C):

$$FT(f * g) = 2\pi FT(f) \cdot FT(g).$$

On pose dans notre cas:

$$FT(f) = \mathbf{E}_0(\omega + \omega_0), \quad f = \mathbf{E}_1(\tau) = \mathbf{E}_1(t - z/v_g) \quad (\text{voir expressions (2.8) et (2.24)});$$

$$FT(g) = e^{i\xi\omega^2}.$$

Calcul de g :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} e^{i\xi\omega^2} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(\omega^2 + \tau\omega/\xi)} d\omega = e^{-i\frac{\tau^2}{4\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(\omega + \tau/(2\xi))^2} d\omega = \\ &= e^{-i\frac{\tau^2}{4\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y^2} dy = \sqrt{\frac{i\pi}{\xi}} e^{-i\frac{\tau^2}{4\xi}} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ valable si $\text{Re}\{\alpha\} \geq 0$. On obtient alors:

$$E(t, z) = \frac{e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}}{2\pi} \sqrt{\frac{i\pi}{\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\tau') e^{-i\frac{(\tau' - \tau)^2}{4\xi}} d\tau';$$

on remarque que l'enveloppe de l'impulsion dépend non seulement de $\tau = t - z/v_g$ mais aussi explicitement de z par l'intermédiaire de $\xi = \beta z / (2v_g^3)$; ceci rend compte du changement de son profil. Afin de pouvoir mener le calcul jusqu'au bout nous allons supposer une forme spécifique de l'impulsion:

$$E_1(t, z=0) = A e^{-\alpha t^2};$$

l'impulsion pénètre dans le matériau dispersif dans le plan $z=0$, sa longueur (distance temporelle entre les moments où l'intensité instantanée est égale à la moitié de l'intensité maximale) est égale à

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\alpha}}.$$

Il s'agit de calculer la longueur de l'impulsion $\tau(L)$ après son parcours sur la distance L dans le matériau.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau'^2} e^{-i\frac{(\tau' - \tau)^2}{4\xi}} d\tau' &= e^{-i\frac{\tau^2}{4\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\alpha + \frac{i}{4\xi}\right) \tau'^2 + \frac{i}{2\xi} \tau \tau'} d\tau' = \\ &= e^{-i\frac{\tau^2}{4\xi}} e^{-\frac{\tau^2}{4\xi(4\xi\alpha + i)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\alpha + \frac{i}{4\xi}\right) \left(\tau' - \frac{i\tau}{4\xi\alpha + i}\right)^2} d\tau' = e^{-i\frac{\tau^2}{4\xi}} e^{-\frac{\tau^2}{4\xi(4\xi\alpha + i)}} \sqrt{\frac{4\pi\xi}{4\xi\alpha + i}} = \\ &= \sqrt{\frac{4\pi\xi}{4\xi\alpha + i}} e^{-\frac{\alpha\tau^2}{(4\xi\alpha)^2 + 1}} e^{-i\frac{\alpha\tau^2 4\xi\alpha}{(4\xi\alpha)^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$E(t, z) = A e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \frac{1}{\sqrt{1 - i\delta}} e^{-\frac{\alpha\tau^2(1+i\delta)}{(\delta^2+1)}}, \quad \delta = 4\xi\alpha = \frac{2\beta z}{v_g^3} \alpha. \quad (2.31)$$

La longueur de l'impulsion à la sortie du milieu dispersif ($z = L$) est ensuite égale à :

$$\tau(L) = \tau_0 \sqrt{1 + \delta^2} = \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{4 \ln 2 L}{v_g^2 \tau_0^2} \frac{dv_g}{d\omega} \right)^2}. \quad (2.32)$$

Lorsque la distance L est très grande, on peut négliger la longueur initiale de l'impulsion et écrire :

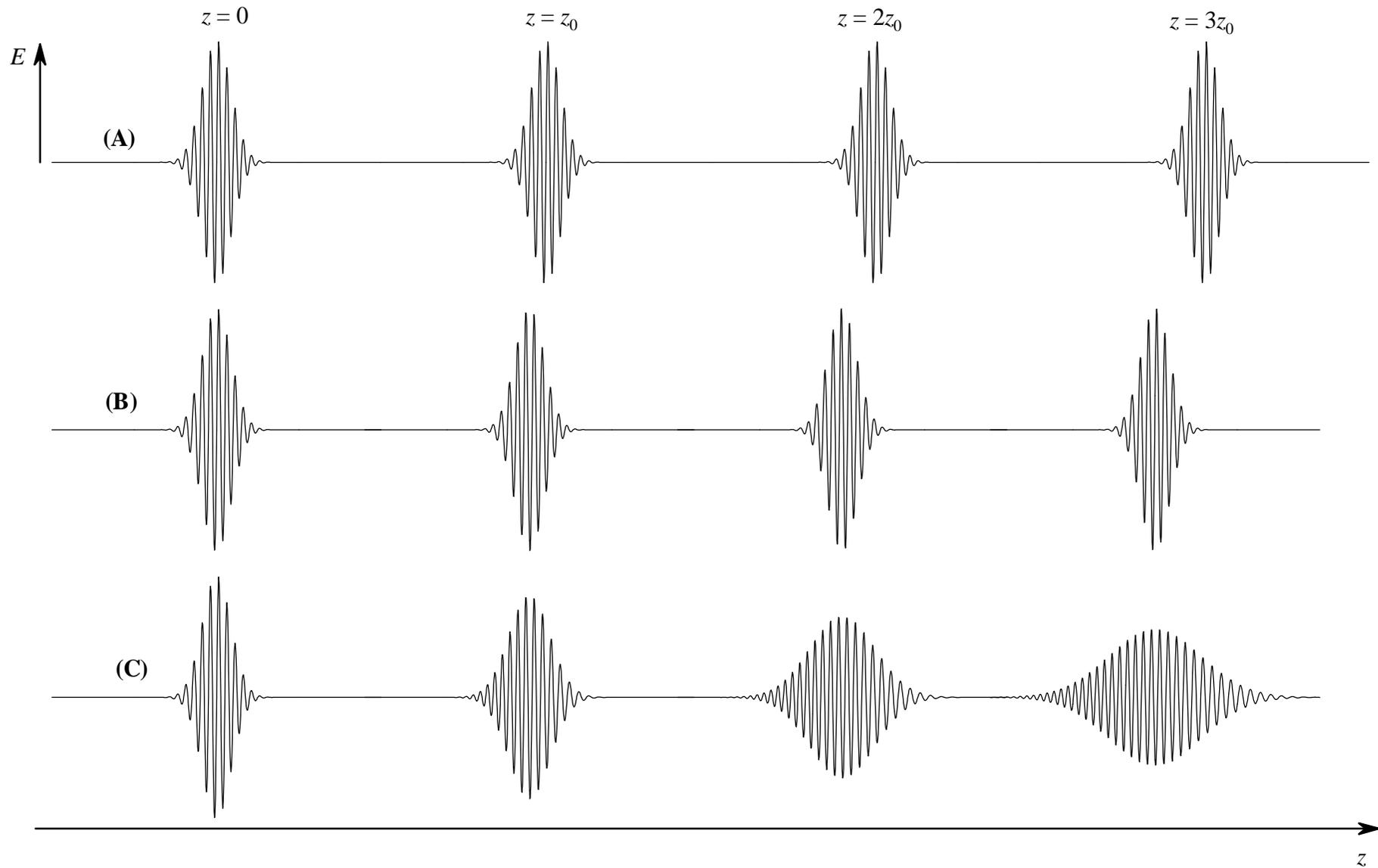
$$\tau(L) = \frac{4 \ln 2}{v_g^2} \left| \frac{dv_g}{d\omega} \right| \frac{L}{\tau_0}; \quad (2.33)$$

cette dernière expression est alors identique à l'équation (2.29). L'expression (2.31) permet d'évaluer la variation de la phase $\Phi(z, t)$ et notamment de la fréquence $\omega(z, t)$ le long de l'impulsion :

$$\omega(z, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \omega_0 + \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\alpha\tau^2\delta}{1+\delta^2} \right) = \omega_0 - \frac{2\alpha(t - z/v_g)\delta}{1+\delta^2} \quad (2.34)$$

La fréquence "locale" varie de façon linéaire autour de la fréquence moyenne ω_0 ; cet effet (appelé "chirp" dans la littérature anglo-saxonne) est lié au fait que les différentes composantes spectrales se propagent avec des vitesses (de groupe) différentes. Dans le cas d'une dispersion de groupe positive ($d^2k/d\omega^2 > 0$) la partie arrière de l'impulsion aura une plus grande fréquence que la partie avant.

La propagation d'une impulsion ultra-brève dans le vide et dans des milieux dispersifs est illustrée sur la page suivante. Si la longueur d'onde centrale de cette impulsion était voisine de 800 nm (longueur d'onde habituelle des impulsions émises par des lasers femtosecondes Ti:Saphir) la longueur de l'impulsion τ_0 correspondant au nombre de cycles sur la figure serait d'environ 10^{-14} s.



Propagation d'une impulsion ultra-brève (A) dans le vide, (B) dans un milieu sans dispersion de la vitesse de groupe, (C) dans un milieu avec une dispersion de la vitesse de groupe non nulle.

Théorie élémentaire de la dispersion

Lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un milieu elle interagit avec les particules chargées du milieu. Les charges sont accélérées par les forces du champ électrique et magnétique du rayonnement. Comme le rayonnement possède un caractère oscillatoire, le mouvement des charges sera également oscillatoire: ainsi les particules chargées deviennent les sources d'un rayonnement électromagnétique secondaire. Le champ totale à l'intérieur du matériau est ensuite donné par la superposition de l'onde source et des ondes émises par les charges. L'effet de la somme de toutes les contributions microscopiques peut être prise en compte par un ensemble de paramètres macroscopiques: constantes optiques telles que l'indice de réfraction n , l'indice d'absorption κ etc., que nous avons introduites au cours des paragraphes précédents. Le but de cette section est de déterminer de quelle manière ces paramètres dépendent de la fréquence dans les milieux conducteurs et non-conducteurs, c.-à-d. on étudiera les origines microscopiques de la dispersion.

A. Dispersion dans les milieux non-conducteurs (résonance diélectrique)

Dans un premier temps on s'intéressera au matériaux isolants qui ne possèdent pas de charges libres. L'application d'un champ électrique à un tel milieu aura pour conséquence un déplacement des charges liés (charges de polarisation), les charges positives étant déplacées dans la direction du champ électrique, les charges négatives dans la direction opposée. Ce déplacement de charges se traduit par l'apparition des moments dipolaires \mathbf{p} au niveau atomique ou moléculaire.

On peut considérer par exemple le déplacement \mathbf{r} d'un électron par rapport au noyau auquel il est élastiquement lié: $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$, où e est la charge élémentaire. Un tel électron doit obéir à l'équation du mouvement donnée par la loi de Newton:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\gamma\dot{\mathbf{r}} - k\mathbf{r} + \mathbf{f} . \tag{2.35}$$

L'électron est retenu autour de sa position d'équilibre par une force de rappel harmonique $-k\mathbf{r}$; le terme $m\gamma\dot{\mathbf{r}}$ rend compte des effets dissipatifs (pertes d'énergie liées à l'irradiation du champ électromagnétique et à l'interaction avec les atomes voisins), m est la masse de l'électron (les noyaux qui sont beaucoup plus lourds peuvent être considérés statiques). \mathbf{f} est la force de Lorentz exercée par le champ électromagnétique appliqué:

$$f = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{E})/c) \approx -e\mathbf{E} \quad (2.36)$$

où nous avons utilisé la relation (2.5) et le fait que, dans l'approximation non-relativiste, la vitesse de l'électron \mathbf{v} est nettement inférieure à la vitesse de la lumière: la force exercée par le champ magnétique est alors négligeable devant celle liée au champ électrique. La polarisation du milieu est donnée par la somme de tous les moments dipolaires élémentaires:

$$\mathbf{P} = -Ner, \quad (2.37)$$

où N est le nombre de dipôles élémentaires par unité de volume. L'équation (2.35) devient ensuite:

$$\dot{\mathbf{P}} + \gamma\dot{\mathbf{P}} + \frac{k}{m}\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E}_{loc}. \quad (2.38)$$

Le champ \mathbf{E}_{loc} représente le champ électrique local — c.-à-d. le champ ressenti par le dipôle — qui est donné par la superposition du champ appliqué \mathbf{E} (onde incidente) et du champ de polarisation du milieu qui entoure le dipôle. On montre dans le cours standard de l'électricité et magnétisme que

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} + \mathbf{E}. \quad (2.39)$$

On trouve après avoir substitué (2.39) dans (2.38):

$$\dot{\mathbf{P}} + \gamma\dot{\mathbf{P}} + \omega_0^2\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E}. \quad (2.40)$$

Il s'agit donc d'une équation de l'oscillateur harmonique amorti et en régime forcé. Sa fréquence de résonance ω_0 est donnée par:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0}}, \quad (2.41)$$

(l'effet du champ local se résume donc en renormalisation de la fréquence propre de l'oscillateur) et elle se situe typiquement dans la gamme spectrale optique ou ultraviolette. L'oscillateur est soumis à un champ électrique extérieur qui peut être décomposé en composantes spectrales $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ (ondes harmoniques). On trouve facilement pour la composante ω :

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E} \quad (2.42)$$

Compte tenu des relations (1.4) la permittivité diélectrique est égale à:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \right) \quad (2.43)$$

Avant d'aborder la discussion de cette expression on indiquera d'autres exemples de systèmes qui mènent aux résultats analogues. On peut considérer par exemple un déplacement relatif (vibrations) des anions et cations dans des cristaux ioniques: la variable r de l'équation (2.35) aura le sens de la distance entre les deux ions: $r = r_+ - r_-$; m sera la masse réduite: $m^{-1} = m_+^{-1} + m_-^{-1}$. La fréquence de résonance qui est proportionnelle à $m^{-1/2}$ sera alors plus faible que la fréquence propre de l'électron: typiquement, le domaine infrarouge est concerné. La discussion n'est pas restreinte aux cristaux ioniques, même dans des cristaux isolants ou semiconducteurs à liaisons covalentes il existe des vibrations des groupes d'atomes (dites vibrations polaires) qui sont accompagnées des réarrangements de la densité de charges (et donc connectées à un moment dipolaire) et qui peuvent être décrites par des équations du type (2.40).

Pour conclure, il existe deux sortes de contributions à la permittivité diélectrique du type (2.43) dans les matériaux non-conducteurs: (i) contribution électronique et (ii) contribution liée à des vibration des noyaux atomiques ou du réseau cristallin. Les deux contributions sont caractérisées par une fréquence de résonance ω_0 (domaine visible ou ultraviolet pour les électrons et infrarouge pour les noyaux) et par un amortissement γ .

L'équation (2.43) prédit l'allure de la dispersion de la permittivité d'un matériau non-conducteur. On peut alors calculer la variation de l'indice de réfraction n et de l'indice d'absorption κ en fonction de la fréquence [l'équation (2.14) et (2.16)] et décrire les gammes spectrales de transparence et des bandes d'absorption des matériaux. Afin d'étudier les courbes de dispersion en détail on réécrit la constante diélectrique donnée par l'équation (2.43) sous deux forme différentes équivalentes:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{(\varepsilon_{stat} - 1) \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (2.44a)$$

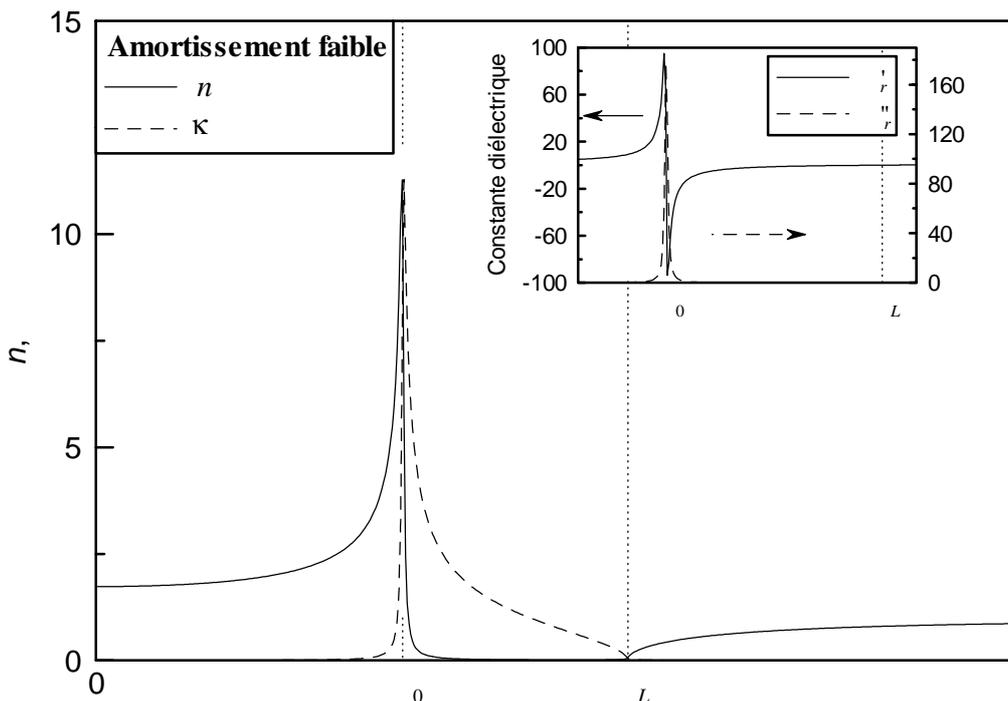
$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (2.44b)$$

où $\epsilon_{stat} = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega_0^2}$ est la valeur statique de la constante diélectrique ($\omega=0$) et $\omega_L = \omega_0\sqrt{\epsilon_{stat}}$. On étudiera le cas du faible amortissement, c.-à-d. $\omega_0 \gg \gamma$. La partie imaginaire de la constante diélectrique est alors presque toujours négligeable ou pratiquement nulle sauf dans un voisinage étroit de ω_0 (on peut négliger ϵ_r'' à l'extérieur de l'intervalle $\omega_0 \pm 2\gamma$). On obtient alors 4 intervalles spectraux, chacun caractérisé par un comportement optique différent (voir également figures ci-dessous et page suivante). Pour les intervalles (1), (3) et (4) l'expression (2.44b) peut être approchée par:

$$\epsilon_r' \approx 1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \epsilon_r'' \approx 0. \quad (2.44c)$$

On trouve alors:

- (1) $0 \leq \omega \leq \omega_0 - 2\gamma$: $\epsilon_r'(0) = \epsilon_{stat}$, $\epsilon_r'(\omega)$ augmente avec la fréquence; ϵ_r'' est négligeable. $n = \sqrt{\epsilon_r'}$, $\kappa = 0$. On se trouve dans le domaine de la dispersion normale, c.-à-d. $n(\omega)$ est une fonction croissante. La polarisation est en phase avec le champ électrique et possède une faible amplitude.
- (2) $\omega_0 - 2\gamma \leq \omega \leq \omega_0 + 2\gamma$: Aussi bien la partie réelle que la partie imaginaire de ϵ_r sont non nulles: ϵ_r'' présente un pic, alors que ϵ_r' décroît rapidement en fonction de la fréquence. On se trouve dans le domaine de la dispersion anormale: n décroît et κ augmente avec ω . L'amplitude de la polarisation augmente considérablement au voisinage de la résonance: l'interaction entre le champ et la matière est forte, l'énergie électromagnétique est absorbée par le milieu. La phase de la polarisation varie rapidement de 0 à π en passant par $\pi/2$ à la



résonance.

- (3) $\omega_0 + 2\gamma \leq \omega \leq \omega_L$: ϵ_r'' est négligeable et ϵ_r' est négatif et s'approche progressivement de 0. Les équations (2.16) donnent alors $n = 0$, $\kappa = \sqrt{\epsilon_r'}$. On verra plus tard que c'est le domaine spectral où le matériau est caractérisé par une très grande réflectivité. La polarisation est en opposition de phase avec le champ électrique et son amplitude décroît lorsqu'on s'approche de ω_L . $\epsilon_r'(\omega_L) = 0$, par conséquent, la troisième EM, c.-à-d. $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0$, qui postule que le champ électromagnétique est transverse, admet pour cette fréquence particulière une composante longitudinale non nulle du champ électrique \mathbf{E}_L . Ce champ électrique est lié à la polarisation du milieu:

$$\mathbf{E}_L(\omega_L) = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}(\omega_L),$$

alors que les autres vecteurs du champ sont nuls: $\mathbf{D} = \mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$. Il ne s'agit donc pas d'un champ électromagnétique qui pourrait se propager librement dans l'espace mais d'un champ électrique qui suit les oscillations de la polarisation longitudinale du milieu: on parle alors d'une fréquence de résonance longitudinale ω_L .

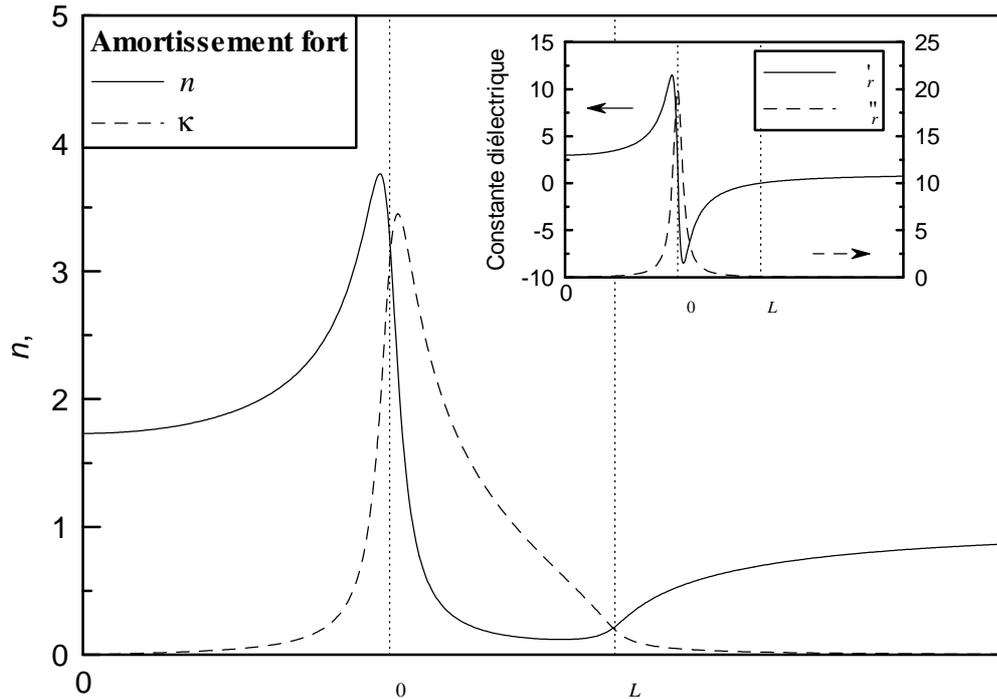
- (4) $\omega \geq \omega_L$: ϵ_r'' est négligeable et ϵ_r' est positif et croissant. On retrouve le domaine de la dispersion normale avec $\kappa = 0$; $n(\omega)$ croît et s'approche de 1. La polarisation est en opposition de phase, elle n'arrive plus à suivre les oscillations trop rapides du champ électromagnétique et son amplitude tend progressivement vers zéro. De façon générale, un mécanisme à dynamique lente ne peut plus contribuer à la polarisation à des fréquences plus élevées: la matière devient alors complètement transparente et s'approche du vide au-dessus de toutes les résonances.

A titre de comparaison on montre le comportement de la constante diélectrique et des indices de réfraction et d'absorption pour un amortissement plus grand ($\gamma < \omega_0$) — voir page suivante.

Dans un matériau réel il existe plusieurs résonances liées aussi bien aux vibrations du réseau cristallin (basses fréquences) qu'aux mouvements électroniques (hautes fréquences). La courbe de dispersion montre alors une suite de résonances similaires à celle que l'on vient d'étudier. On écrit:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 + \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j} \right),$$

où ω_j et γ_j sont la fréquence et l'amortissement de la j-ième résonance et le coefficient f_j s'appelle force de l'oscillateur. Si le matériau possède une résonance dans le domaine visible, il devient opaque (si la bande d'absorption couvre toute la gamme) ou coloré (si une partie du spectre visible est transmise). Les matériaux transparents comme des verres isolants possèdent



des résonances dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet mais non pas dans le visible.

B. Dispersion dans les matériaux conducteurs (modèle de Drude)

Les matériaux conducteurs (métaux) sont caractérisés par l'existence des électrons libres qui ne sont pas localisés près des noyaux. Alors que les électrons liés existent toujours la contribution des électrons libres est largement prédominante et détermine l'allure de la constante diélectrique et les propriétés optiques des métaux. Les électrons libres sont accélérés par un champ électromagnétique et freinés par un frottement fluide; par contre, ils ne sont soumis à aucune force de rappel. L'équation (2.35) devient alors:

$$m\dot{\mathbf{r}} = -m\gamma\dot{\mathbf{r}} - e\mathbf{E} . \quad (2.45)$$

Pour les électrons libres on préfère de raisonner en termes du courant électrique:

$$\mathbf{j} = -Ne\mathbf{v} = -Ne\dot{\mathbf{r}} . \quad (2.46)$$

où N est le nombre d'électrons par unité de volume. L'équation (2.45) s'écrit ensuite:

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \gamma\mathbf{j} = \left(\frac{Ne^2}{m} \right) \mathbf{E} . \quad (2.47)$$

La solution pour les composantes harmoniques $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ prend la forme suivante:

$$\mathbf{j} = \left(\frac{Ne^2/m}{\gamma + i\omega} \right) \mathbf{E}.$$

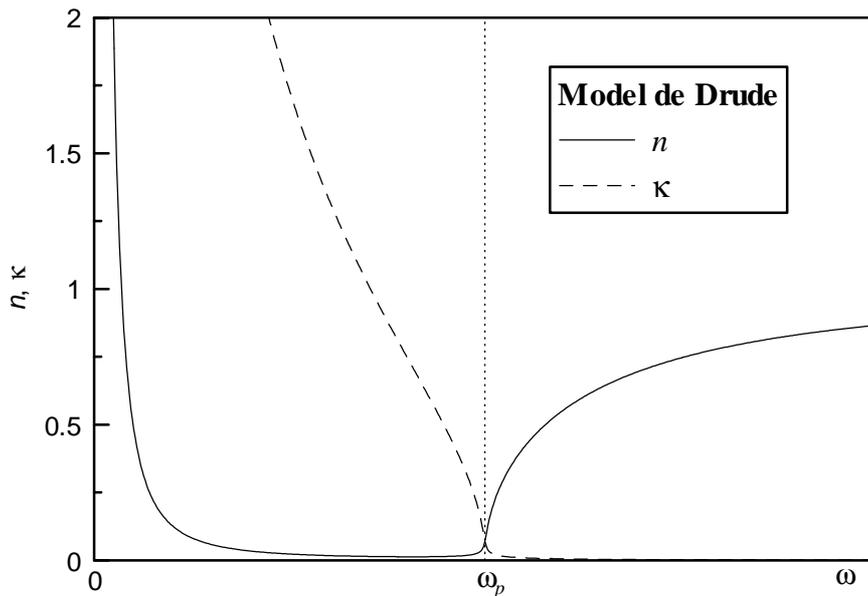
Cette relation permet de définir la conductivité électrique complexe:

$$\sigma = \frac{Ne^2/m}{\gamma + i\omega} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega/\gamma}, \quad (2.48)$$

ou, en tenant compte de l'équivalence entre la permittivité et la conductivité: $\varepsilon = \varepsilon_0 - i\sigma/\omega$, introduite en début du paragraphe 2.B⁵, on exprime la dispersion de la permittivité due au charges libres:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{i\omega\gamma - \omega^2} \right) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{i\omega\gamma - \omega^2} \right) \quad (2.49)$$

Cette expression est tout à fait analogue à l'expression (2.43) avec $\omega_0 = 0$: cette dernière condition rend compte de l'absence de la force de rappel pour les électrons libres. On a introduit la fréquence de plasma ω_p qui est analogue à la fréquence ω_L introduite dans l'expression (2.44b). Il s'agit de la fréquence résonante des oscillations longitudinales des électrons libres: sa valeur est critique pour la détermination du comportement optique d'un conducteur, elle se situe dans le domaine ultraviolet pour la plupart des métaux. D'habitude la condition $\gamma \ll \omega_p$ est très bien vérifiée (γ étant typiquement de l'ordre de 10^{13} s^{-1} et donc dans



⁵ Notez que le terme ε_0 a pour origine l'absence des charges de polarisation qu'on a postulé au début de ce paragraphe.

le domaine de l'infrarouge lointain); on distingue alors trois domaines spectraux similaires aux intervalles 2–4 de la dispersion reliée aux charges de polarisation (voir paragraphe précédent):

$$\varepsilon_r = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \right] - i \left[\frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \right] = [n^2 - \kappa^2] - i[2n\kappa]$$

- (2) $\omega < 2\gamma$: ε_r' et ε_r'' sont très grands l'un négatif, l'autre positif; ε_r'' tend très rapidement vers zéro. Par conséquent n et κ sont grands, $\kappa > n$ et n décroît rapidement.
- (3) $\gamma \ll \omega < \omega_p$: ε_r'' est négligeable, ε_r' est négatif. n est alors voisin de zéro, κ reste important mais décroît avec la fréquence. On se trouve dans la région de la grande réflectivité (éclat métallique).
- (4) $\omega > \omega_p$: ε_r'' est négligeable, ε_r' change de signe à ω_p et devient positif. La conséquence directe est un accroissement de n et une diminution de κ au voisinage de la fréquence de plasma. Les charges n'arrivent plus à suivre les oscillations rapides du champ électromagnétique et le matériau conducteur devient transparent.

3. Polarisation

Jusqu'à maintenant nous ne nous sommes pas occupés de la polarisation de la lumière, c.-à-d. de la direction du vecteur du champ électrique [la direction du champ magnétique est ensuite déterminée sans ambiguïté, voir (2.17a,b)]. Or la majorité des applications optiques concerne la lumière polarisée. Par exemple, la propagation de la lumière dans les milieux anisotropes dépend de façon cruciale de sa polarisation.

L'état de polarisation du rayonnement est par convention décrit par le vecteur du champ électrique: la plupart des matériaux optiques est non-magnétique et l'interaction entre la lumière et la matière concerne surtout le champ électrique. Avant d'étudier ces interactions et les effets physiques qui en dépendent il convient de connaître les caractéristiques des ondes polarisées.

Lumière polarisée

Considérons les ondes monochromatiques planes qui se propagent suivant l'axe z :

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\{\mathcal{A} e^{i(\omega t - kz)}\}; \quad (3.1)$$

le vecteur du champ électrique doit être compris dans le plan xy . Les composantes E_x et E_y du

champ sont indépendantes; la somme vectorielle de ces deux vecteurs doit être calculée. Dans des cas spéciaux les deux composantes peuvent osciller en phase ou en opposition de phase et la somme vectorielle conduira à la polarisation linéaire; mais dans le cas général une polarisation elliptique est obtenue. Les équations générales pour E_x et E_y s'écrivent:

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) \\ E_y &= A_y \cos(\omega t - kz + \delta_y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{A_x} \cos \delta_y - \frac{E_y}{A_y} \cos \delta_x &= \cos(\omega t - kz + \delta_x) \cos \delta_y - \cos(\omega t - kz + \delta_y) \cos \delta_x \\ \frac{E_x}{A_x} \sin \delta_y - \frac{E_y}{A_y} \sin \delta_x &= \cos(\omega t - kz + \delta_x) \sin \delta_y - \cos(\omega t - kz + \delta_y) \sin \delta_x \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{A_x} \cos \delta_y - \frac{E_y}{A_y} \cos \delta_x &= -\sin(\omega t - kz) \sin(\delta_y - \delta_x) \\ \frac{E_x}{A_x} \sin \delta_y - \frac{E_y}{A_y} \sin \delta_x &= \cos(\omega t - kz) \sin(\delta_y - \delta_x) \end{aligned}$$

On élève les deux équations au carré et on les somme:

$$\left(\frac{E_x}{A_x} \cos \delta_y - \frac{E_y}{A_y} \cos \delta_x \right)^2 + \left(\frac{E_x}{A_x} \sin \delta_y - \frac{E_y}{A_y} \sin \delta_x \right)^2 = \sin^2(\delta_y - \delta_x);$$

cette expression se simplifie et prend la forme suivante:

$$\left(\frac{E_x}{A_x} \right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{A_x A_y} \cos \delta + \left(\frac{E_y}{A_y} \right)^2 = \sin^2 \delta, \quad (3.3)$$

avec $\delta = \delta_y - \delta_x$. L'équation (3.3) décrit une ellipse, la polarisation elliptique correspond donc à l'état général de la lumière polarisée. Les axes principaux de l'ellipse forment un système d'axes tourné d'un angle ψ par rapport au système xy :

$$\begin{aligned} E_a &= E_x \cos \psi + E_y \sin \psi & E_x &= E_a \cos \psi - E_b \sin \psi \\ E_b &= -E_x \sin \psi + E_y \cos \psi & E_y &= E_a \sin \psi + E_b \cos \psi \end{aligned}$$

On introduit cette transformation dans (3.3); la nouvelle équation se diagonalise quand le terme avec $E_a E_b$ en facteur s'annule, c.-à-d.:

$$2E_a E_b \left(-\frac{\sin \psi \cos \psi}{A_x^2} + \frac{\sin \psi \cos \psi}{A_y^2} - \frac{\cos^2 \psi - \sin^2 \psi}{A_x A_y} \cos \delta \right) = 0;$$

cette équation permet de déterminer l'angle ψ :

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2A_x A_y \cos \delta}{A_x^2 - A_y^2}. \quad (3.4)$$

L'équation (3.3) s'écrit ensuite:

$$\left(\frac{E_a}{a} \right)^2 + \left(\frac{E_b}{b} \right)^2 = 1 \quad (3.5)$$

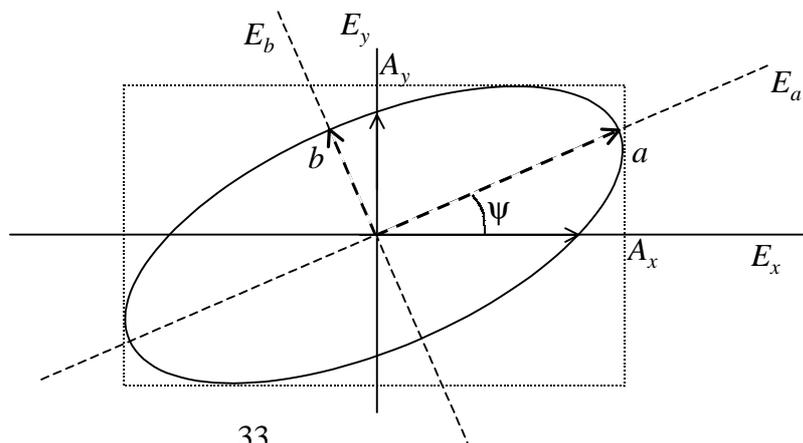
Les paramètres a et b sont les amplitudes des nouveaux modes propres:

$$\begin{aligned} E_a &= a \cos(\omega t - kz) \\ E_b &= \pm b \sin(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (3.6)$$

et on peut montrer qu'elles s'expriment:

$$\begin{aligned} a^2 &= A_x^2 \cos^2 \psi + A_y^2 \sin^2 \psi + 2A_x A_y \sin \psi \cos \psi \cos \delta \\ b^2 &= A_x^2 \sin^2 \psi + A_y^2 \cos^2 \psi - 2A_x A_y \sin \psi \cos \psi \cos \delta \end{aligned} \quad (3.7)$$

Les relations entre les composantes E_x , E_y et E_a , E_b de la polarisation sont illustrées sur la figure ci-contre. La lumière a une polarisation linéaire si le déplacement de la pointe du vecteur \mathbf{E} est



rectiligne: cette ligne forme un angle ψ avec la direction x du système d'axes du laboratoire. Cela se produit lorsque

$$\delta = \delta_y - \delta_x = m\pi \quad (m = 0, 1),$$

dans ce cas l'équation (3.3) dégénère vers l'équation d'une droite, le rapport des composants du champ électrique est constant

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{A_y}{A_x}$$

et le paramètre b (l'axe court de l'ellipse) s'annule. Si la pointe de \mathbf{E} décrit un cercle on parle de la polarisation circulaire; on obtient cet état de polarisation lorsque

$$\delta = \delta_y - \delta_x = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad A_y = A_x.$$

La révolution de la polarisation est dite lévogyre (gauche) si $\delta = -\pi/2$, c.-à-d. $\sin\delta < 0$: dans ce cas la pointe du vecteur \mathbf{E} tourne contre le sens d'une montre lorsqu'on regarde l'onde qui s'approche d'en face; dans le cas contraire il s'agit d'une polarisation dextrogyre (droite)⁶.

Dans le cas général on obtient la polarisation elliptique: la pointe du vecteur \mathbf{E} décrit une ellipse. On introduit un angle χ dont la tangente est égale à l'ellipticité de l'ellipse de polarisation:

$$\text{tg } \chi = \pm \frac{b}{a} \tag{3.8}$$

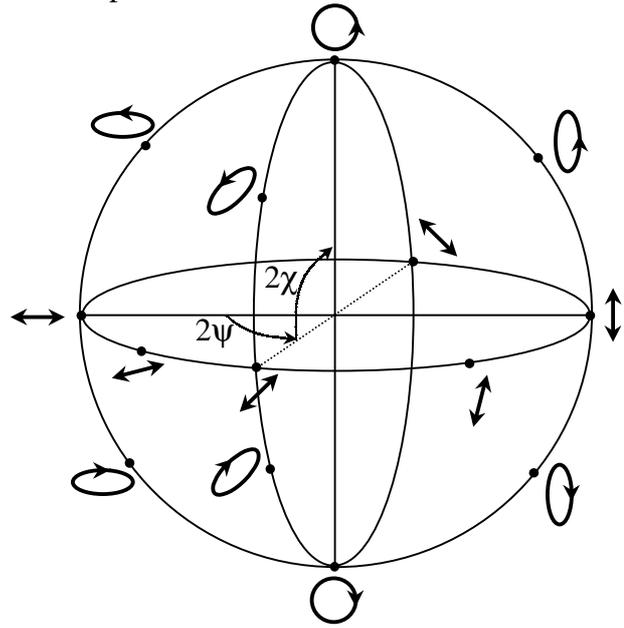
$\text{tg } \chi$ est pris positif si la rotation de \mathbf{E} est lévogyre et négatif dans le cas contraire.

Sphère de Poincaré

Nous caractérisons chaque état de polarisation de la lumière polarisée par une ellipse dont le grand axe est repéré par l'angle ψ ($0 \leq \psi < \pi$; voir l'expression (3.4)) et dont l'aplatissement est donné par la tangente de l'angle χ [$-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$; voir l'expression (3.8)]; le sens de parcours de l'ellipse (polarisation dextrogyre ou lévogyre) étant donné par le signe de χ . Il existe plusieurs représentations graphiques des états de polarisation: représentation dans un

⁶ Dans la littérature on peut malheureusement retrouver les deux conventions possibles pour la dénomination de la polarisation gauche et droite: il est donc nécessaire de spécifier à chaque fois la convention utilisée avant d'aborder le problème de l'état de polarisation.

plan complexe, représentation sur la surface d'une sphère... Nous allons considérer cette dernière représentation qui s'appelle sphère de Poincaré (voir figure ci-contre). Le rayon de la sphère est égal à l'intensité du rayonnement ($a^2 + b^2$); l'état de polarisation (ψ, χ) est représenté sur la surface de la sphère par un point de longitude 2ψ et de latitude 2χ . Ainsi l'équateur est le lieu des états de la lumière polarisée rectilignement: la polarisation horizontale ($\psi = 0$) évolue de façon continue vers la polarisation verticale ($\psi = \pi/2$) lorsqu'on se déplace le long l'équateur. Le pôle nord (resp. sud) représente la lumière circulaire lévogyre (resp. dextrogyre). Le passage de la lumière à travers les éléments optiques est ensuite décrit par une rotation d'un point représentant la polarisation actuelle sur la sphère et sera discuté plus tard à la suite de l'introduction des milieux anisotropes.



Vecteurs de Jones

Le formalisme de vecteurs de Jones est un autre moyen de la description de l'état de polarisation des ondes planes polarisées. Une onde plane est dans cette représentation exprimée en termes des amplitudes complexes (comparer avec (3.1) et (3.2)) qui définissent le vecteur de Jones:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Il s'agit d'un vecteur complexe dans un espace abstrait qui n'est pas directement relié à notre espace réel. Pour obtenir par exemple la composante x du champ électrique il est nécessaire d'effectuer l'opération

$$E_x(t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{J}_x e^{i\omega t} \right\}.$$

Si on ne s'intéresse qu'à l'état de polarisation de l'onde il convient d'utiliser les vecteurs de Jones normalisés à l'unité:

$$\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{J} = J_x^* J_x + J_y^* J_y = 1.$$

Notez que la multiplication par l'unité complexe d'un vecteur de Jones change la phase initiale de l'onde électromagnétique mais ne change par l'état de polarisation: le vecteur \mathbf{J} décrit le même état que le vecteur $e^{i\delta}\mathbf{J}$.

La polarisation linéaire suivant x ou y est exprimée par:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (3.10)$$

la polarisation linéaire suivant une direction générale formant l'angle ψ avec l'axe x s'écrit:

$$\mathbf{J}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Les polarisations circulaires sont données par:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Enfin, la polarisation elliptique exprimée dans le système d'axes propres de l'ellipse s'écrit:

$$\mathbf{J}(\psi=0, \chi) = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

où le signe de χ détermine le sens de la rotation ("+" pour la rotation gauche, "-" pour la rotation droite). La polarisation elliptique exprimée dans le système d'axes général et caractérisée par les paramètres ψ et χ est ensuite donnée par:

$$\mathbf{J}(\psi, \chi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \chi + i \sin \psi \sin \chi \\ \sin \psi \cos \chi - i \cos \psi \sin \chi \end{pmatrix}.$$

Les éléments optiques sont caractérisés par des matrices 2×2 et le passage de la lumière par un tel élément est pris en compte par une multiplication du vecteur de Jones de l'état de polarisation initial par la matrice de l'élément optique:

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{J}_0$$

A titre indicatif nous donnerons ici les matrices de quelques éléments optiques de base, le principe et la réalisation de ces éléments seront traités en détail plus tard.

- *Polariseur (polarisant suivant x ou y):*

$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *Polariseur général (direction de polarisation forme un angle ψ avec l'axe x):*

$$\mathbf{P}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{pmatrix}$$

- *Lame retardatrice de phase (permet d'introduire un déphasage δ entre les composantes x et y); Compensateur = lame retardatrice de phase ajustable (δ est variable):*

$$\mathbf{C}_{\delta,x} = \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\delta,y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

- *Lame demi-onde (lame retardatrice de phase avec $\delta = \pi$):*

Considérons son influence à l'état de polarisation d'un faisceau polarisé rectilignement à 45° par rapport à l'axe x. A la sortie on obtient une polarisation rectiligne orthogonale (tourné de 90°):

$$\mathbf{C}_{\pi,x} \cdot \mathbf{J}(45^\circ) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- *Lame quart-d'onde (lame retardatrice de phase avec $\delta = \pi/2$):*

Permet de préparer la polarisation circulaire à partir de la polarisation linéaire à 45° :

$$\mathbf{C}_{\pi/2,x} \cdot \mathbf{J}(45^\circ) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

- *Milieu optiquement actif (tourne la polarisation rectiligne d'un angle θ constant):*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

La sphère de Poincaré et le formalisme des vecteurs de Jones sont des outils assez puissants pour déterminer l'état de polarisation d'une onde (de polarisation arbitraire au départ) après le passage par les éléments optiques (polariseurs, compensateurs et d'autres

éléments biréfringents); nous y reviendrons après avoir étudié la propagation de la lumière dans les milieux anisotropes.

Lumière non-polarisée et partiellement polarisée

Contrairement aux lasers, les sources naturelles de la lumière (sources thermiques comme ampoule ou soleil) émettent en générale la lumière non-polarisée qui, après avoir subi des réflexions sur des surfaces ou après avoir été diffusée sur les inhomogénéités, peut devenir partiellement polarisée. Il est donc important de décrire ces états de polarisation de la lumière. Une description rigoureuse de ce problème nécessite l'introduction des matrices de polarisation. Ce traitement dépasse le cadre de ce cours, nous nous bornerons à une discussion plus intuitive qui permettra d'entrevoir comment la lumière partiellement polarisée est représentée et qui permettra de définir le degré de polarisation de la lumière.

Considérons l'onde électromagnétique de forme analogue à celle des expressions (3.1) et (3.2):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(t) &= \mathbf{A}(t)e^{i(\omega t - kz)} \\
 E_x(t) &= A_x(t)e^{i(\omega t - kz)} \\
 E_y(t) &= A_y(t)e^{i(\omega t - kz + \delta)}
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

La seule différence par rapport à (3.1) est que l'amplitude de l'onde varie en fonction du temps (l'onde n'est pas monochromatique); les composantes $A_x(t)$ et $A_y(t)$ sont complexes et δ est un coefficient constant ($0 \leq \delta < 2\pi$) dont la signification s'éclaircira plus tard. La projection du vecteur \mathbf{E} dans une direction θ réalisée expérimentalement à l'aide d'un polariseur s'écrit:

$$E(t, \theta) = \left[A_x(t) \cos \theta + A_y(t) \sin \theta e^{i\delta} \right] e^{i(\omega t - kz)}.$$

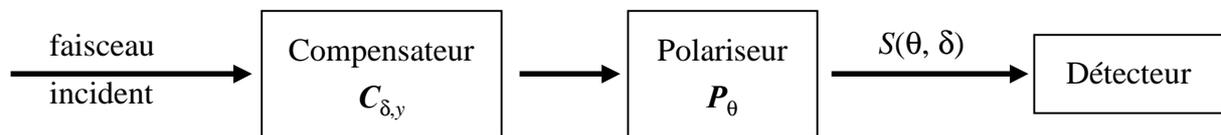
L'intensité lumineuse transmise par le polariseur est ensuite proportionnelle à:

$$\begin{aligned}
 \langle S(\theta, \delta) \rangle \propto \langle E(t, \theta) E^*(t, \theta) \rangle &= \langle A_x(t) A_x^*(t) \rangle \cos^2 \theta + \langle A_y(t) A_y^*(t) \rangle \sin^2 \theta + \\
 &\left[\langle A_x(t) A_y^*(t) \rangle e^{-i\delta} + \langle A_y(t) A_x^*(t) \rangle e^{i\delta} \right] \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la valeur moyenne temporelle. L'état de polarisation de la lumière dépend

essentiellement des valeurs moyennes des termes croisés. Si la variation temporelle des amplitudes A_x et A_y est corrélée ces valeurs moyennes seront en général non-nulles⁷; si par contre cette variation temporelle est non-corrélée (il existe des variations de l'amplitude et des sauts de phase fréquents et aléatoires) les valeurs moyennes seront nulles. La polarisation de l'onde est dans ce cas localement elliptique, c.-à-d. elle est elliptique et caractérisé par les paramètres (ψ, χ) pendant un moment très bref, puis, suite à une variation de l'amplitude ou à un changement de phase de l'une des composantes A_x, A_y , la polarisation, toujours elliptique, pourra être caractérisée par un ensemble de paramètres complètement différent. L'ellipse de la polarisation sera donc différente à chaque instant. La valeur moyenne qui, seule, est mesurable tiendra compte de tous ces états aléatoires de polarisation elliptique.

Pour pouvoir définir un degré de polarisation de la lumière, imaginons l'arrangement expérimental suivant:



Le faisceau incident de l'intensité totale S , partiellement polarisé dans le cas général, passe d'abord par un compensateur qui lui attribue un déplacement de phase δ introduit formellement dans l'expression (3.14). Ensuite, le faisceau passe par un polariseur qui n'en transmet que la partie parallèle à la direction de θ . L'intensité mesurée par le détecteur est alors égale à celle donnée par l'expression (3.15). Dans l'expérience on fait varier les deux paramètres: δ et θ . Pour chaque valeur de δ on cherche un maximum et un minimum de l'intensité en tournant le polariseur de 180° ; pour une valeur spécifique de δ on trouve les valeurs du maximum S_{max} et du minimum S_{min} de l'intensité. Le degré de polarisation P est ensuite défini:

$$P = \frac{S_{max} - S_{min}}{S_{max} + S_{min}}.$$

Examinons deux cas spéciaux:

(i) *Lumière complètement polarisée:*

La polarisation du faisceau incident est elliptique dans le cas général. Il existe nécessairement une valeur de phase δ_0 pour laquelle les composantes $E_x(t)$ et $E_y(t)$ oscillent en phase à la sortie du compensateur, c.-à-d. la polarisation du faisceau à l'entrée du polariseur est rectiligne. Il existe alors une orientation du polariseur où l'extinction est totale ($S_{min} = 0$), pour

⁷ La somme des valeurs moyennes des termes croisés est nulle dans le cas de la polarisation circulaire même s'il existe une corrélation entre les deux composantes.

l'orientation perpendiculaire on obtient $S_{max} = S$. Il en résulte que

$$P = 1.$$

(ii) *Lumière non-polarisée*

Le signal mesuré par le détecteur ne dépend ni de δ ni de θ et vaut $S_{max} = S_{min} = S/2$,

$$P = 0.$$

Il est possible de démontrer que la lumière partiellement polarisée peut être décomposée de façon univoque à la partie polarisée (intensité S_P) et non-polarisée (intensité S_{NP}) et que le degré de polarisation s'écrit ensuite:

$$P = \frac{S_P}{S_P + S_{NP}} = \frac{S_P}{S}.$$

Revenons à la sphère de Poincaré: un état de polarisation de la lumière partiellement polarisée est représenté par un point à l'intérieure de la sphère: sa position est déterminée par les paramètres de la partie polarisée (rayon S_P , angles ψ et χ); le centre de la sphère représente alors la lumière non-polarisée.

4. Milieux inhomogènes et stratifiés

Théorie eikonale: approximation de l'optique géométrique

La fréquence de la lumière est de l'ordre de 10^{14} – 10^{15} Hz; sa longueur d'onde est de l'ordre de 10^{-6} – 10^{-7} m. Puisque la longueur d'onde est très petite par rapport aux dimensions que nous rencontrons habituellement, la première approximation de la théorie électromagnétique qui peut venir à l'esprit consiste à négliger cette longueur d'onde, c.-à-d. à supposer qu'elle est infiniment petite. En effet, les aspects ondulatoires du champ électromagnétique (interférences, diffraction) se manifestent fortement si les dimensions caractéristiques des inhomogénéités ou obstacles que la lumière rencontre lors de sa propagation sont comparables avec la longueur d'onde. En tendant la longueur d'onde vers zéro le caractère ondulatoire de la lumière disparaît et par conséquent cette approche néglige a priori tous les effets de diffraction. En revanche, nous pouvons établir ce qu'on appelle l'optique géométrique: elle permet d'introduire la notion d'un faisceau optique limité dans l'espace dont le caractère est pourtant très proche de celui des ondes planes (qui sont illimitées dans l'espace). Les lois de l'optique géométrique sont alors exprimées en termes de la géométrie des trajectoires des rayons optiques.

Les principes de l'optique géométrique ne seront pas applicables (*i*) lorsque l'indice de réfraction varie à l'échelle de la longueur d'onde du rayonnement (petites ouvertures,

réseaux de diffraction...), (ii) près du foyer lorsque le faisceau lumineux est focalisé à des dimensions comparable à la longueur d'onde, (iii) tout près des interfaces (onde évanescente reliée à la réflexion totale).

L'approche eikonale permet d'introduire la notion d'un faisceau optique à partir des EM et, ainsi, il permet de déceler la relation entre la théorie électromagnétique exprimée par les EM et l'optique géométrique. La théorie eikonale est ensuite capable de prédire les trajectoires des faisceaux lumineux qui se propagent dans un milieu avec l'indice de réfraction lentement variable.

A. Passage des équations Maxwell à l'optique géométrique

Nous commençons la discussion de l'approximation à partir des EM. Elles mènent trivialement à l'équation (2.1) qui donne l'équation d'onde sous forme:

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{E} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

Nous supposons que le champ électrique s'exprime:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (4.2)$$

où ω et \mathbf{k} sont la pulsation et le vecteur d'onde moyens de l'onde électromagnétique, si bien que $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ varie lentement en fonction de \mathbf{r} et t . Par une variation lente nous entendons que

$$|\nabla \mathbf{E}_0| \ll |\mathbf{k} \mathbf{E}_0|, \quad (4.3a)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right| \ll |\omega \mathbf{E}_0|. \quad (4.3b)$$

Cela signifie que la variation de l'enveloppe du champ électrique du rayonnement doit être négligeable devant sa valeur à l'échelle de la longueur d'onde moyenne $\lambda = 2\pi/k$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial E_0(x)}{\partial x} \right| / \frac{2\pi}{\lambda} E_0(x) &\approx \left| \frac{E_0(x+\lambda) - E_0(x)}{\lambda} \right| / \frac{2\pi}{\lambda} E_0(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{E_0(x+\lambda) - E_0(x)}{E_0(x)} \right| \ll 1 \end{aligned}, \quad (4.4)$$

cette condition sera remplie généralement si le faisceau n'est pas étroitement focalisé et si son amplitude ne s'estompe pas à l'échelle de la longueur d'onde. Il s'agit donc d'une formulation mathématique des conditions (ii) et (iii) énoncées dans le paragraphe précédent sur la validité

de l'approximation géométrique.

Le second terme de l'équation (4.1) s'écrit:

$$-\nabla\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \left(\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \right) = \nabla\nabla \ln \epsilon \cdot \mathbf{E} + \nabla \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon},$$

où nous avons utilisé l'EM (1.1c):

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \nabla \epsilon \cdot \mathbf{E} + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E},$$

d'où

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{E}.$$

L'équation (4.1) s'écrit ensuite:

$$\overset{\textcircled{1}}{\nabla \cdot \nabla \mathbf{E}} + \overset{\textcircled{2}}{\nabla\nabla \ln \epsilon \cdot \mathbf{E}} + \overset{\textcircled{3}}{\nabla \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon}} = \overset{\textcircled{4}}{\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}} \quad (4.5)$$

L'ordre de grandeur des termes $\textcircled{1}$ et $\textcircled{4}$ est $k^2 E_0$. On calcule le rapport entre les termes $\textcircled{3}$ et $\textcircled{4}$:

$$\begin{aligned} \left| \left[\frac{kE_0}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x} \right] / \left[k^2 E_0 \right] \right| &\approx \left| \frac{1}{k\epsilon} \frac{\epsilon(x+\lambda) - \epsilon(x)}{\lambda} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\epsilon(x+\lambda) - \epsilon(x)}{\epsilon(x)} \right| \ll 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Cette relation est vérifiée si la variation de la permittivité à l'échelle de la longueur d'onde est nettement inférieure à sa valeur: condition (i) de la limite géométrique de l'optique. Ensuite, on a le droit de négliger les termes $\textcircled{2}$ et $\textcircled{3}$ de l'équation d'onde. La condition de la validité de l'optique géométrique qui englobe aussi bien la relation (4.4) que la relation (4.6) s'écrit alors:

$$\lambda \rightarrow 0,$$

La longueur d'onde doit être très inférieure à toutes les dimensions caractéristiques qu'on peut rencontrer. Il suffit donc de ne garder que les termes d'ordre le plus élevé en k dans l'équation d'onde (4.5).

L'expression (4.2) représente une onde plane; nous allons généraliser cette expression

pour tenir compte du fait que, à cause d'une variation lente de l'indice de réfraction, le front d'onde peut être courbe:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega t - k \varphi(\mathbf{r}))}. \quad (4.7)$$

La fonction $\varphi(\mathbf{r})$ s'appelle l'eikonale; la relation $\varphi(\mathbf{r}) = C^{TE}$ détermine les surfaces de phase constante et, par conséquent, l'eikonale décrit la courbure du front d'onde. Les directions perpendiculaires à la surfaces de phase constante seront alors les directions de propagation des rayons lumineux. La magnitude de $\varphi(\mathbf{r})$ est de l'ordre de la distance r , ou plus précisément de l'ordre de nr (où n est l'indice de réfraction), à cause du facteur multiplicatif de $k = \omega/c$. Par conséquent les dérivées spatiales de $\varphi(\mathbf{r})$ sont de l'ordre de grandeur de n .

On substitue la forme (4.7) dans l'équation (4.5) et on ne garde que les termes les plus élevés en k . Les termes ② et ③ ne contribuent donc pas et on trouve:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \mathbf{E} &\approx -ik \nabla \cdot (\nabla \varphi) \mathbf{E} \approx -ik (\nabla \varphi) \cdot \nabla \mathbf{E} \approx -k^2 (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) \mathbf{E} = -k^2 (\nabla \varphi)^2 \mathbf{E}, \\ \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &\approx -\omega^2 \frac{n^2}{c^2} \mathbf{E} = -k^2 n^2 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

L'équation (4.5) devient alors:

$$(\nabla \varphi)^2 = n^2 \quad (4.8)$$

et s'appelle équation de l'eikonale. C'est l'équation fondamentale de l'optique géométrique.

B. Propriétés de l'eikonale

Les EM dans l'approximation de l'optique géométrique s'écrivent:

$$\nabla \varphi \wedge \mathbf{H}_0 + \frac{n^2}{\eta_0} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (4.9a)$$

$$\nabla \varphi \wedge \mathbf{E}_0 - \eta_0 \mathbf{H}_0 = 0 \quad (4.9b)$$

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad (4.9c)$$

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{H}_0 = 0 \quad (4.9d)$$

Le vecteur $\nabla \varphi$ est donc perpendiculaire à \mathbf{E}_0 et à \mathbf{H}_0 . On cherche les expressions pour la densité d'énergie électromagnétique et pour le vecteur de Poynting. La densité d'énergie U s'écrit (1.18):

$$U = \frac{1}{4} \operatorname{Re}\{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*\} = \frac{\epsilon_0}{2} n^2 |\mathbf{E}_0|^2, \quad (4.10)$$

où nous avons utilisé l'équation (4.9b) pour exprimer la partie magnétique de l'énergie:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{4} \operatorname{Re}\{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*\} = \frac{\mu_0}{4} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0^* = \frac{\mu_0}{4\eta_0^2} (\nabla\varphi \wedge \mathbf{E}_0) \cdot (\nabla\varphi \wedge \mathbf{E}_0^*) = \\ &= -\frac{\epsilon_0}{4} \mathbf{E}_0^* \cdot [\nabla\varphi \wedge (\nabla\varphi \wedge \mathbf{E}_0)] = -\frac{\epsilon_0}{4} \mathbf{E}_0^* \cdot \left[\underbrace{\nabla\varphi(\nabla\varphi \cdot \mathbf{E}_0)}_0 - \mathbf{E}_0 \underbrace{(\nabla\varphi)^2}_{n^2} \right] = \frac{\epsilon_0}{4} n^2 |\mathbf{E}_0|^2 \end{aligned}$$

Le vecteur de Poynting est ensuite égal à:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*\} = \frac{1}{2\eta_0} \mathbf{E}_0 \wedge (\nabla\varphi \wedge \mathbf{E}_0^*) = \frac{1}{2\eta_0} \nabla\varphi |\mathbf{E}_0|^2 = \frac{U}{\epsilon_0 n^2 \eta_0} \nabla\varphi = \\ &= \frac{c}{n} U \frac{\nabla\varphi}{n} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dans l'approximation de l'optique géométrique l'énergie électromagnétique se propage à la vitesse $v = c/n$ dans la direction $\mathbf{s} = \nabla\varphi/n$. On définit alors des rayons lumineux comme des trajectoires orthogonales à la surface $\varphi(\mathbf{r}) = C^{TE}$ dans chaque point \mathbf{r} , la tangente d'une telle trajectoire est toujours parallèle à \mathbf{s} ; on appelle \mathbf{s} le vecteur de rayon. Le changement de l'eikonale le long d'une trajectoire s'écrit:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{s} = n, \quad (4.12)$$

donc la distance optique entre deux points P_1 et P_2 est égale à la différence des valeurs de l'eikonale en ces deux points:

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{P_1}^{P_2} d\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1). \quad (4.13)$$

Comme la densité d'énergie (4.10) ne dépend pas de temps dans l'optique géométrique, la loi de conservation de l'énergie électromagnétique s'écrit:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \nabla \cdot (I\mathbf{s}) = 0,$$

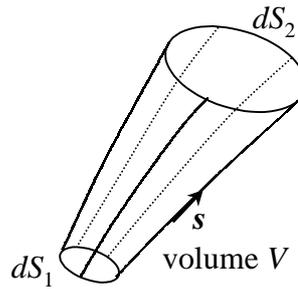
où $I = |\mathbf{S}|$ est l'intensité d'un rayon. On intègre cette expression à l'intérieur d'un volume

contenant un ensemble de rayons (faisceau optique) et on obtient:

$$\iiint_V \nabla \cdot (I \mathbf{s}) dV = \iint_S I \mathbf{s} \cdot d\mathbf{S} = I_1 dS_1 - I_2 dS_2 = 0,$$

et par conséquent

$$I_1 dS_1 = I_2 dS_2 \quad (4.14)$$



le long d'un faisceau: conservation de la puissance (voir figure ci-contre).

Application: une source de lumière ponctuelle isotrope placée à l'origine d'un système d'axes va irradier le rayonnement de la même intensité I_0 dans toutes les directions. Par symétrie, le front d'onde du rayonnement sera sphérique et son eikonale sera égal à $\varphi(\mathbf{r}) = n r$ (et donc $\nabla\varphi = n\mathbf{r}/r$). La puissance irradiée dans tout l'espace sera égale à

$$P = 4\pi r^2 I(r)$$

Pour satisfaire l'équation (4.14), l'intensité doit décroître avec le carré de la distance:

$$I(r) = \frac{I_0}{r^2}.$$

C. Propriétés des rayons

Afin d'étudier les trajectoires des rayons, l'équation de l'eikonale donnée sous forme (4.8) ou (4.12) peut être réécrite:

$$\frac{d}{ds}(n\mathbf{s}) = \frac{d}{ds}(\nabla\varphi) = \mathbf{s} \cdot \nabla(\nabla\varphi) = \frac{(\nabla\varphi)}{n} \cdot \nabla(\nabla\varphi) = \frac{1}{2n} \nabla(\nabla\varphi)^2 = \frac{1}{2n} \nabla n^2$$

et finalement

$$\frac{d}{ds}(n\mathbf{s}) = \nabla n. \quad (4.15)$$

Cette une équation différentielle qui détermine directement la trajectoire des rayons à partir du profil de l'indice de réfraction. Elle signifie que, lors d'un déplacement infinitésimal le long de la trajectoire s du rayon, le vecteur de rayon s a tendance à se retourner dans la direction du gradient de l'indice de réfraction. Il en découle que les rayons lumineux cherchent toujours à

se propager dans la direction de l'indice plus élevé.

D. Applications

Milieu homogène

Pour un milieu homogène ($\nabla n = 0$), on trouve:

$$ns = \mathbf{a} ,$$

où \mathbf{a} est un vecteur constant pour un rayon donné, la trajectoire de propagation est alors rectiligne. Compte tenu du fait que $s = dr/ds$ l'équation de la trajectoire du rayon s'écrit:

$$\mathbf{r} = s \frac{\mathbf{a}}{n} + \mathbf{b} .$$

Symétrie cylindrique, approximation paraxiale

C'est un cas important car il trouve son application dans les fibres optiques. On appelle R la distance radiale entre un point par lequel le rayon passe et l'axe z , ensuite $n = n(R)$. On part de l'équation (4.15) pour la trajectoire des rayons. L'approximation paraxiale est valable pour les rayons qui forment un angle très faible avec l'axe z , elle permet de remplacer la dérivé d/ds par d/dz :

$$\frac{d}{ds}(ns) = \frac{d}{dz} \left(n \frac{dr}{dz} \right) = n \frac{d^2 R}{dz^2} .$$

$$\nabla n = \nabla_R n = \frac{R}{R} \frac{dn}{dR}$$

On trouve l'équation différentielle:

$$\frac{d^2 R}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dR} .$$

La solution de cette équation dépend du profil radial de l'indice de réfraction; une discussion plus détaillée de ce problème est présentée dans l'annexe A.

Symétrie sphérique

Un autre cas qui vaut une attention particulière est le cas d'un milieu dont l'indice de

réfraction possède une symétrie sphérique $n = n(r)$; un bon exemple d'un tel milieu est l'atmosphère terrestre; le calcul qui suit peut servir à la détermination des trajectoires des rayons solaires arrivant sur la surface de la Terre.

$$\frac{d}{ds}(ns) = \nabla n \quad / \mathbf{r} \wedge$$

$$\mathbf{r} \wedge \frac{d}{ds}(ns) = \frac{d}{ds}(n \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) - n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \wedge \mathbf{s} = \frac{d}{ds}(n \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) - \underbrace{n \mathbf{s} \wedge \mathbf{s}}_0$$

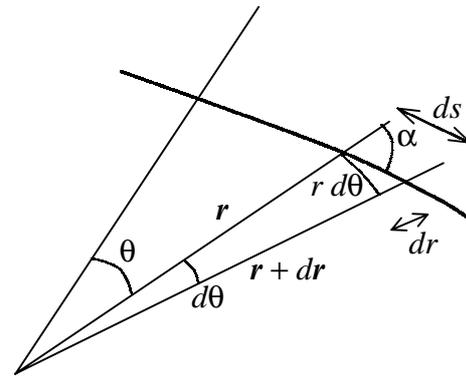
$$\mathbf{r} \wedge \nabla n = \mathbf{r} \wedge \frac{1}{r} \frac{dn}{dr} \mathbf{r} = 0.$$

On obtient enfin

$$\frac{d}{ds}(n \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) = 0$$

et donc

$$r n(r) \sin \alpha = p,$$



où p est une constante. Or

$$\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}, \quad p = r^2 n(r) / \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{p} \sqrt{r^2 n^2(r) - p^2}$$

Et on obtient finalement l'intégrale:

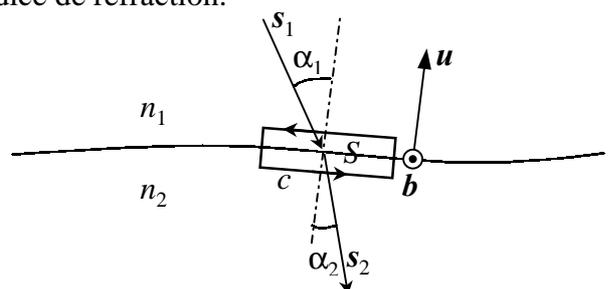
$$\theta(r) = p \int \frac{dr}{r \sqrt{n^2(r) r^2 - p^2}},$$

qui peut être calculé pour un profil particulier de l'indice de réfraction.

Lois de réflexion et de réfraction

On utilisera l'identité

$$\nabla \wedge (ns) = \nabla \wedge (\nabla \phi) = 0.$$



On l'écrira sous forme d'intégrale (voir figure ci-contre):

$$\iint_S \nabla \wedge (n\mathbf{s}) dS = \oint_c n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (4.16)$$

où la surface S est délimitée par la trajectoire rectangulaire c fermée. Le rectangle passe à travers l'interface entre deux milieux d'indices de réfraction différents n_1 et n_2 . Les deux côtés du rectangle coupés par l'interface sont infinitésimement petits. L'intégrale (4.16) se réduit à:

$$n_1 \mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + n_2 \mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 = 0,$$

où

$$d\mathbf{l}_1 = \mathbf{b} \wedge \mathbf{u} dl \quad d\mathbf{l}_2 = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{u} dl.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} n_1 \mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{u}) &= n_2 \mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{u}) \\ n_1 \mathbf{u} \wedge \mathbf{s}_1 &= n_2 \mathbf{u} \wedge \mathbf{s}_2. \end{aligned}$$

Cas de la réfraction:

$$n_1 \sin(\pi + \alpha_1) = n_2 \sin(\pi + \alpha_2),$$

d'où lois de Snell-Descartes:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Cas de la réflexion ($n_1 = n_2$):

$$\sin(\pi + \alpha_1) = \sin(-\alpha_2),$$

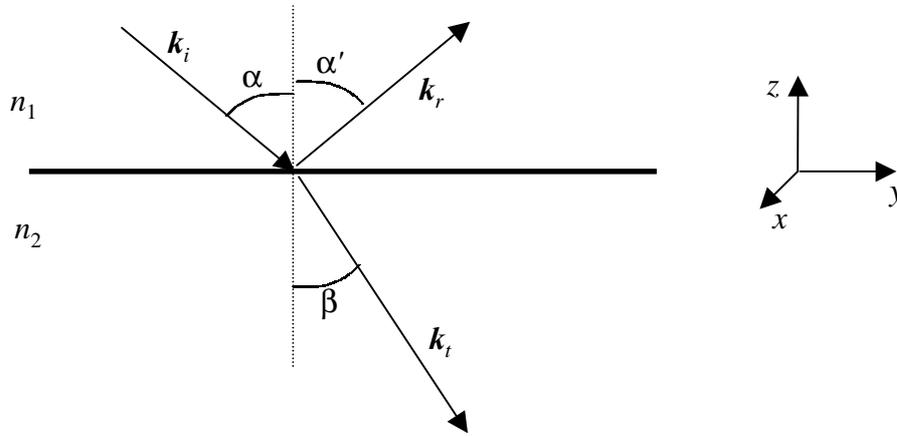
d'où

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Propagation au voisinage d'une interface: équations de Fresnel

Dans cette section on étudiera comment se comporte une onde monochromatique plane incidente sur une interface entre deux milieux homogènes et isotropes. On démontrera qu'une partie de l'onde est réfléchie et que l'autre partie pénètre dans le second milieu. On trouvera les équations pour les directions de propagation (équation de Snell-Descartes) et pour les amplitudes des ondes réfléchie et transmise (équations de Fresnel).

Les deux milieux sont caractérisés par les indices de réfraction n_1 et n_2 réels (dans un premier temps nous supposons que les deux milieux sont non-absorbants), l'interface se situe



dans le plan $z = 0$ (voir figure ci-contre). Le plan qui contient le vecteur d'onde \mathbf{k}_i du faisceau incident et la normale à l'interface s'appelle le plan d'incidence: dans notre cas l'axe

x est normal au plan d'incidence ($k_{x,i} = 0$). Le vecteur d'onde \mathbf{k}_i forme un angle α avec la normale. Nous allons supposer que trois ondes (incidente: indice i , réfléchie: indice r et transmise: indice t) suffisent pour vérifier les conditions de continuité à l'interface. Le champ électrique de ces trois ondes s'écrit:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \quad (4.17b)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} \quad (4.17c)$$

Les composantes tangentielles du champ électrique doivent être continues à l'interface (voir éq. (1.3)):

$$\mathbf{E}_{i,\parallel} + \mathbf{E}_{r,\parallel} = \mathbf{E}_{t,\parallel} \quad (4.18)$$

L'équation (4.18) doit être valable quel que soit le temps t et pour tous les points de l'interface $z = 0$. Les arguments des fonctions exponentielles doivent alors être identiques:

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}, \quad (4.19)$$

où $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ et $k_i = k_r = n_1 \omega/c$, $k_t = n_2 \omega/c$. Ceci a pour conséquence:

$$k_{y,i} = k_{y,r} = k_{y,t} \quad (4.20)$$

et donc

$$\alpha = \alpha' \quad (4.21a)$$

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta. \quad (4.21b)$$

La dernière équation (loi de Snell-Descartes) a été démontrée dans la section précédente dans le cadre de l'optique géométrique. Les composantes tangentielles du vecteur d'onde se conservent; maintenant nous allons évaluer les composantes normales:

$$k_{z,i} = -\sqrt{k_i^2 - k_{y,i}^2} = -n_1 \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -n_1 \frac{\omega}{c} \cos \alpha, \quad (4.22a)$$

$$k_{z,r} = \sqrt{k_r^2 - k_{y,r}^2} = n_1 \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = n_1 \frac{\omega}{c} \cos \alpha, \quad (4.22b)$$

$$k_{z,t} = -\sqrt{k_t^2 - k_{y,t}^2} = -n_1 \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \quad \left(= -n_2 \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -n_2 \frac{\omega}{c} \cos \beta \right), \quad (4.22c)$$

avec $n = n_2/n_1$. Les composantes $k_{z,i} = -k_{z,r}$ sont réelles, par contre la composante $k_{z,t}$ peut être aussi bien réelle qu'imaginaire pure:

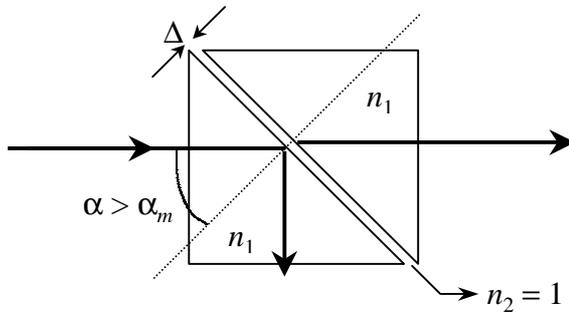
- (i) $k_{z,t}$ est réel, $n > \sin \alpha$ (vérifié toujours si $n_2 > n_1$); la lumière se propage dans le milieu 2 sous un angle β ;
- (ii) $k_{z,t}$ est nul, $n = \sin \alpha_m$ ($\alpha_m \dots$ angle critique); la lumière se propage dans le milieu 2 parallèlement à l'interface, l'énergie électromagnétique pénètre en profondeur dans ce milieu.
- (iii) $k_{z,t}$ est purement imaginaire, $n < \sin \alpha$; on définit une profondeur de pénétration:

$$h = \frac{c}{2n_1 \omega \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}} \quad (4.23)$$

dont la valeur est de l'ordre de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ du rayonnement; on obtient finalement pour le champ dans le milieu 2 ($z < 0$):

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{-\frac{|z|}{2h}} e^{i(\omega t - k_{y,t} y)}, \quad S \propto e^{-\frac{|z|}{h}}.$$

L'onde E_t est évanescente dans le milieu 2: exponentiellement décroissante avec une profondeur de pénétration h . Ceci est interprété comme la réflexion totale sur l'interface. Mais soulignons que, contrairement à ce que l'on trouve dans le cadre de l'optique géométrique, le champ électromagnétique pénètre dans le milieu 2. Pour le démontrer expérimentalement on réalise le schéma ci-dessous. Si le second prisme est



suffisamment loin du premier on observe une réflexion totale. On approche alors les deux prismes en diminuant leur distance de séparation Δ . L'énergie électromagnétique pénètre dans le second prisme avec une intensité proportionnelle à $\exp(-\Delta/h)$: lorsque Δ devient comparable ou

inférieur à la profondeur de pénétration on peut observer un faisceau lumineux à la sortie du second prisme. Ce phénomène est utilisé par exemple pour réaliser des cubes séparateurs où le rapport des intensités du faisceau réfléchi et transmis est contrôlé par l'espacement entre les deux prismes du cube.

A. Equations de Fresnel

Revenons à l'équation (4.18) ou plus généralement aux équations (1.3). Il reste à comparer les amplitudes des ondes incidente, réfléchie et transmise. Comme il a été montré dans le paragraphe précédent, les vecteurs d'onde des trois ondes s'écrivent:

$$\mathbf{k}_{0,i} = \frac{\omega n_1}{c} (0, \sin \alpha, -\cos \alpha) \quad (4.24a)$$

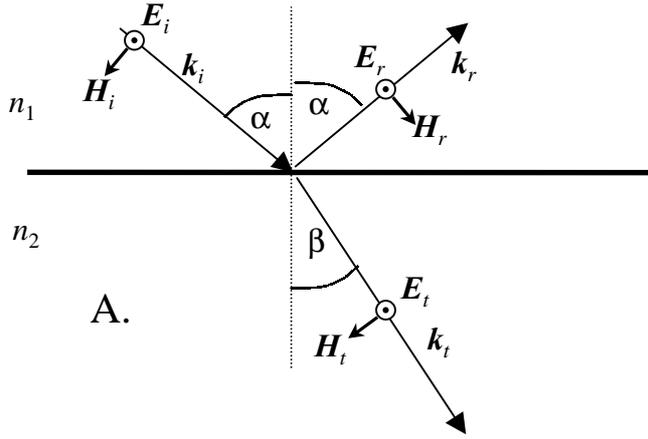
$$\mathbf{k}_{0,r} = \frac{\omega n_1}{c} (0, \sin \alpha, \cos \alpha) \quad (4.24b)$$

$$\mathbf{k}_{0,t} = \frac{\omega n_2}{c} (0, \sin \beta, -\cos \beta) \quad (4.24c)$$

On résoudra le problème pour deux polarisations perpendiculaires:

- Polarisation transversale électrique (TE), où \mathbf{E} est perpendiculaire au plan d'incidence (voir Figure A ci-dessous); cette polarisation est souvent appelée polarisation s dans la littérature anglo-saxonne.
- Polarisation transversale magnétique (TM), où \mathbf{H} est perpendiculaire au plan d'incidence, \mathbf{E} est compris dans le plan d'incidence (voir Figure B ci-dessous); appelée aussi polarisation p .

Tous les autres états de polarisation peuvent être décomposés en ces deux composantes.



(a) Polarisation TE (\perp)

Les composantes non-nulles du champ électrique s'écrivent (figure ci-contre):

$$\begin{aligned} E_i &= (E_i, 0, 0), \\ E_r &= (E_r, 0, 0), \\ E_t &= (E_t, 0, 0). \end{aligned}$$

Le champ magnétique (incident, réfléchi et transmis) est ensuite déterminé par la

relation (2.17c). Les composantes du champ magnétique s'écrivent alors:

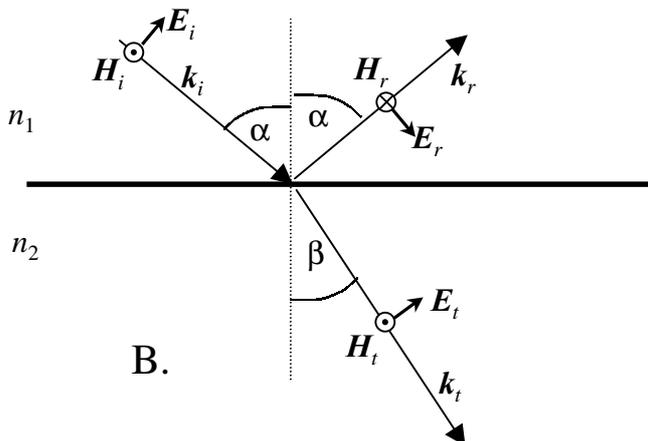
$$\begin{aligned} H_i &= n_1/\eta_0 (0, -E_i \cos \alpha, -E_i \sin \alpha), \\ H_r &= n_1/\eta_0 (0, E_r \cos \alpha, -E_r \sin \alpha), \\ H_t &= n_2/\eta_0 (0, -E_t \cos \beta, -E_t \sin \beta). \end{aligned}$$

Les relations de continuité (1.3a,b,d) donnent ensuite 2 équations indépendantes pour les composantes E_i , E_r et E_t :

$$\begin{aligned} E_i + E_r &= E_t \\ (E_i - E_r) n_1 \cos \alpha &= E_t n_2 \cos \beta \end{aligned} \quad (4.25)$$

On définit les coefficients de réflexion $r = E_r/E_i$ et de transmission $t = E_t/E_i$. Le système d'équations (4.25) conduit ensuite aux équations pour ces deux coefficients (équations de Fresnel pour la polarisation TE):

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \quad t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \quad (4.26)$$



(b) Polarisation TM (\parallel)

Les composantes non-nulles du champ électrique et magnétique s'écrivent:

$$\begin{aligned} E_i &= (0, E_i \cos \alpha, E_i \sin \alpha), \\ E_r &= (0, E_r \cos \alpha, -E_r \sin \alpha), \\ E_t &= (0, E_t \cos \beta, E_t \sin \beta), \\ H_i &= n_1/\eta_0 (E_i, 0, 0), \\ H_r &= n_1/\eta_0 (-E_r, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_t = n_2/\eta_0 (E_t, 0, 0).$$

Les relations de continuité (1.3a,b,c) donnent ensuite 2 équations indépendantes pour les composantes E_i , E_r et E_t :

$$\begin{aligned} (E_i + E_r)\cos\alpha &= E_t \cos\beta \\ (E_i - E_r)n_1 &= E_t n_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Le système d'équations (4.27) conduit aux équations de Fresnel pour la polarisation TM. Les coefficients r et t s'écrivent::

$$r_{//} = \frac{n_1 \cos\beta - n_2 \cos\alpha}{n_1 \cos\beta + n_2 \cos\alpha} \quad t_{//} = \frac{2n_1 \cos\alpha}{n_1 \cos\beta + n_2 \cos\alpha} \quad (4.28)$$

Dans ce qui suit nous allons désigner les coefficients de réflexion et de transmission par r_{\perp} (ou r_s) et t_{\perp} (ou t_s) pour la polarisation TE et par $r_{//}$ (ou r_p) et $t_{//}$ (ou t_p) pour la polarisation TM. Compte tenu de la lois de Snell-Descartes (4.21b) les équations de Fresnel peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$r_{\perp} \equiv r_s = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (4.29a)$$

$$t_{\perp} \equiv t_s = \frac{2 \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (4.29b)$$

$$r_{//} \equiv r_p = -\frac{\text{tg}(\alpha - \beta)}{\text{tg}(\alpha + \beta)} \quad (4.29c)$$

$$t_{//} \equiv t_p = \frac{2 \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)} \quad (4.29d)$$

On introduit la réflectivité R (la transmissivité T) comme un rapport entre la puissance optique réfléchie (ou transmise) et la puissance incidente:

$$\begin{aligned} R_{\perp, //} &= \frac{S_r \cos\alpha}{S_i \cos\alpha} = \frac{E_r^2}{E_i^2} = r_{\perp, //}^2 \\ T_{\perp, //} &= \frac{S_t \cos\beta}{S_i \cos\alpha} = \frac{n_2 \cos\beta E_t^2}{n_1 \cos\alpha E_i^2} = \frac{n_2 \cos\beta}{n_1 \cos\alpha} t_{\perp, //}^2 \end{aligned}$$

$R + T = 1$. Pour une incidence normale ($\alpha = 0$),

$$r_{\perp} = r_{//} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2,$$

c.-à-d. la réflectivité de chacune des surfaces d'une lame de verre ($n = 1.5$) dans le vide est égale à 4% à peu près.

On discutera maintenant la variation des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de l'angle d'incidence. Un exemple de cette variation pour l'interface vide – verre est montré ci-dessous. Pour chacune des deux polarisations on distingue alors deux cas: la réflexion sur un milieu optiquement plus dense ($n_2 > n_1$, $\alpha > \beta$) et la réflexion sur un milieu optiquement moins dense ($n_2 < n_1$, $\alpha < \beta$).

(a) Polarisation TE

- *Réflexion sur un milieu optiquement plus dense ($\alpha > \beta$)*
 r_{\perp} est négatif: la phase de l'onde réfléchie se trouve modifiée de π .
- *Réflexion sur un milieu optiquement moins dense ($\alpha < \beta$)*
 r_{\perp} est positif: la phase de l'onde réfléchie ne change pas
 Il existe un angle critique α_m ($\sin \alpha_m = n_2/n_1$); pour $\alpha > \alpha_m$ l'onde électromagnétique est totalement réfléchie

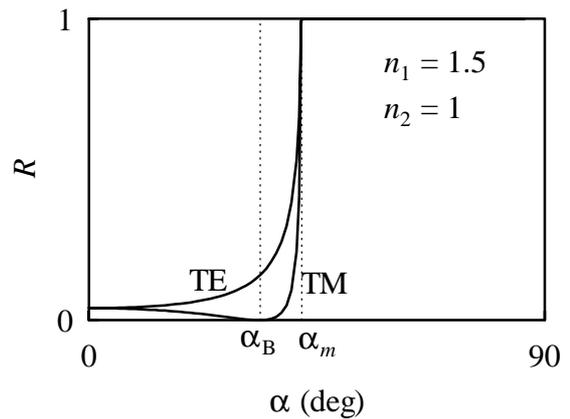
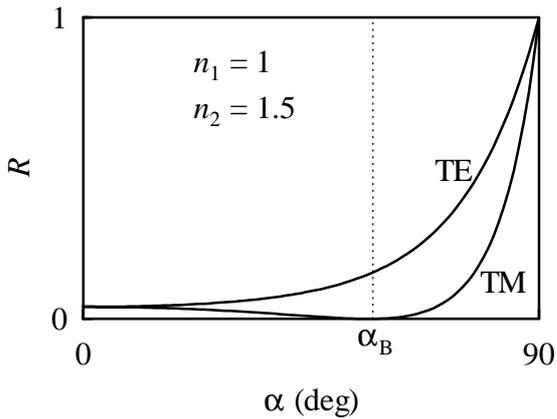
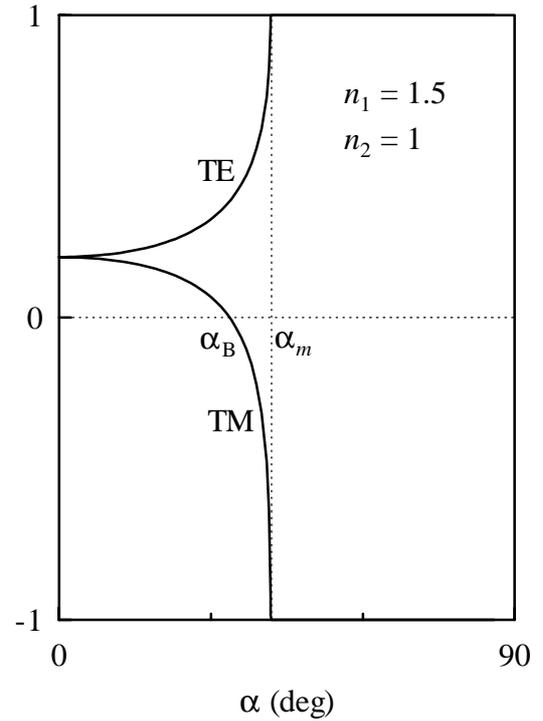
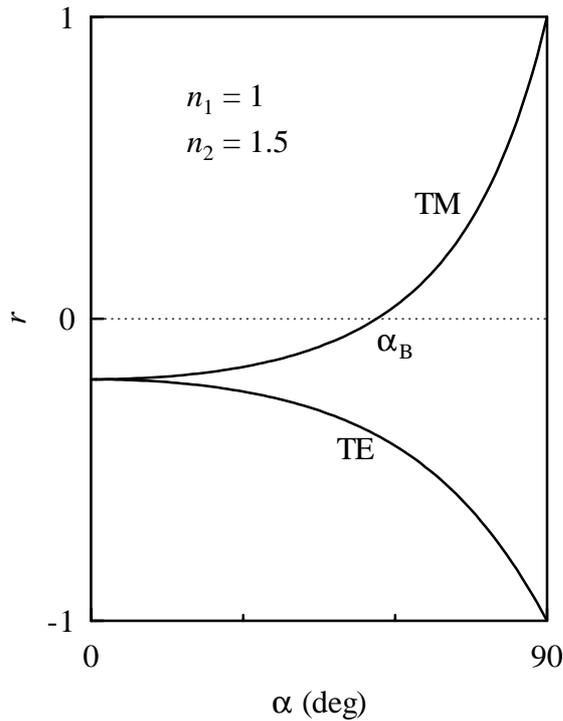
(b) Polarisation TM

Il existe un angle d'incidence α_B (angle de Brewster) pour lequel l'intensité de l'onde réfléchie s'annule; on trouve à partir de (4.29) que $r_{//}$ s'annule si $\text{tg}(\alpha + \beta) \rightarrow \infty$, donc $\alpha + \beta = \pi/2$. Prenant en compte la lois de Snell-Descartes (4.21b) on trouve:

$$\text{tg } \alpha_B = n_2/n_1 \quad (4.30)$$

La lumière réfléchie sous l'angle de Brewster ne contient que la polarisation TE est devient donc linéairement polarisée. Cependant, cette manière d'obtenir la lumière polarisée est peu efficace, car pour $\alpha = \alpha_B$ et pour $n = 1.5$ on obtient $R_{\perp} = 0.2$ seulement (20% de la polarisation TE). Par contre, ce phénomène est largement utilisé dans les résonateurs des lasers où on place les différents éléments optiques à transmission sous angle de Brewster par rapport au faisceau: dans cet arrangement la polarisation TM ne subit pas de pertes et elle est amplifiée beaucoup plus que la polarisation TE (qui est partiellement réfléchie sur ces éléments). Ceci permet d'obtenir un faisceau linéairement polarisé à la sortie du laser.

- *Réflexion sur un milieu optiquement plus dense ($\alpha > \beta$)*
 $r_{//}$ est négatif pour $\alpha < \alpha_B$: la phase de l'onde réfléchie change de π .
 $r_{//}$ est positif pour $\alpha > \alpha_B$: la phase de l'onde réfléchie ne change pas.



- *Réflexion sur un milieu optiquement moins dense ($\alpha < \beta$)*
 $r_{//}$ est positif pour $\alpha < \alpha_B$: la phase de l'onde réfléchie ne change pas
 $r_{//}$ est négatif pour $\alpha_B < \alpha < \alpha_m$: la phase de l'onde réfléchie change de π .
 Il existe un angle critique $\alpha_m > \alpha_B$ ($\sin \alpha_m = n_2/n_1$); pour $\alpha > \alpha_m$ le faisceau incident est totalement réfléchi.

(c) Lumière non-polarisée

Pour la lumière naturelle non-polarisée toutes les composantes de la polarisation ont la même intensité:

$$S_r = R S_i = R_{\perp} S_{i,\perp} + R_{//} S_{i,//} = \frac{1}{2} S_i (R_{\perp} + R_{//}).$$

La réflectivité est alors égale à:

$$R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{//}). \quad (4.31)$$

Comme les deux coefficients de réflectivité R_{\perp} et $R_{//}$ sont différents pour un angle d'incidence non nul, les intensités des deux polarisations du faisceau réfléchi seront également différentes. La lumière réfléchie est alors partiellement polarisée.

B. Réflexion totale

La réflexion totale peut se produire sur un milieu optiquement moins dense si l'angle d'incidence est supérieur à α_m . Pour $\alpha > \alpha_m$ on ne trouve pas de valeur réelle de l'angle de réfraction β satisfaisant la loi de Snell-Descartes (4.21). Le paramètre β devient alors complexe et il est donné par l'expression (4.22c):

$$k_{z,t} = \mp i n_1 \frac{\omega}{c} \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2} = -n_2 \frac{\omega}{c} \cos \beta \quad (4.32)$$

où $n = n_2/n_1 < 1$. Le champ doit décroître exponentiellement pour $z < 0$, ainsi on détermine le signe correct de l'unité imaginaire $\sqrt{-1} = \pm i$ dans l'expression (4.32):

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{y})} e^{-i k_{t,z} z} = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{y})} e^{\mp \frac{z}{2h}}, \quad (4.33)$$

où la profondeur de pénétration h a été introduite par la relation (4.23). Le signe "-" dans les équations (4.32) et (4.33) ne convient pas, parce qu'il conduirait à un champ exponentiellement croissant dans le milieu 2. Le paramètre β est donc déterminé par:

$$\cos \beta = -i \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{n} \quad (4.34)$$

Pour étudier la réflexion totale il convient donc de remplacer $\cos \beta$ dans les équations de Fresnel (4.26) et (4.28) par l'expression (4.34). On trouve:

$$r_{\perp} = \frac{\cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\cos \alpha - i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}, \quad (4.35a)$$

$$r_{//} = -\frac{n^2 \cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{n^2 \cos \alpha - i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}. \quad (4.35b)$$

Les deux expressions prennent alors la forme suivante:

$$r_j = \pm \frac{|r_j| e^{i\delta_j/2}}{|r_j| e^{-i\delta_j/2}} = \pm e^{i\delta_j}, \quad (4.36)$$

où l'indice j désigne \perp ou \parallel ; on prend le signe plus pour la polarisation \perp et le signe moins pour la polarisation \parallel . L'onde totalement réfléchie subit alors un changement de phase δ_{\perp} dans le cas TE et $\delta_{\parallel} - \pi$ dans le cas TM, avec

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\delta_{\perp}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\cos \alpha} \quad (4.37a)$$

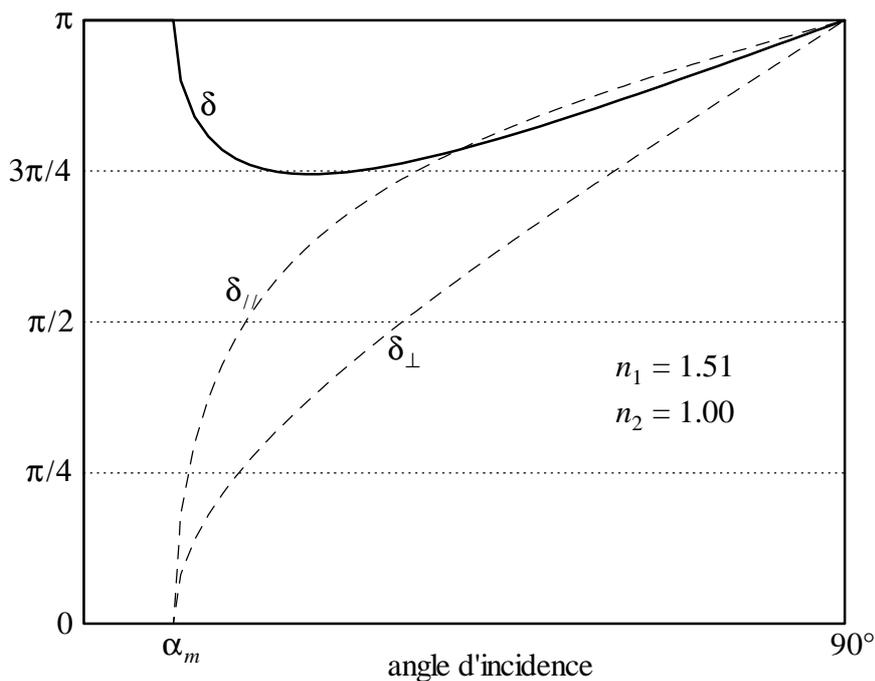
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\delta_{\parallel}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{n^2 \cos \alpha} \quad (4.37b)$$

A la suite d'une réflexion totale les deux ondes subiront un déphasage respectif δ :

$$\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel} + \pi. \quad (4.38)$$

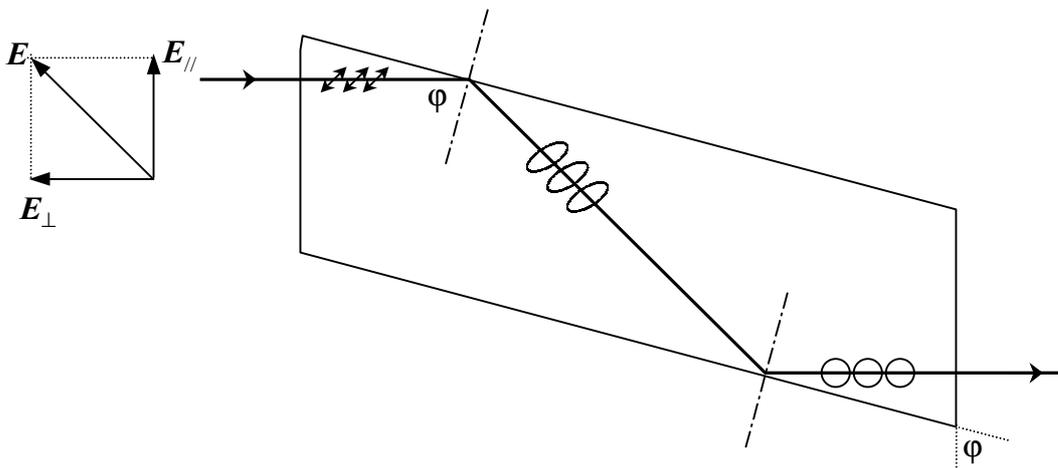
On montre facilement que:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\delta_{\perp}}{2} - \frac{\delta_{\parallel}}{2}\right) = -\frac{\cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\sin^2 \alpha}. \quad (4.39)$$



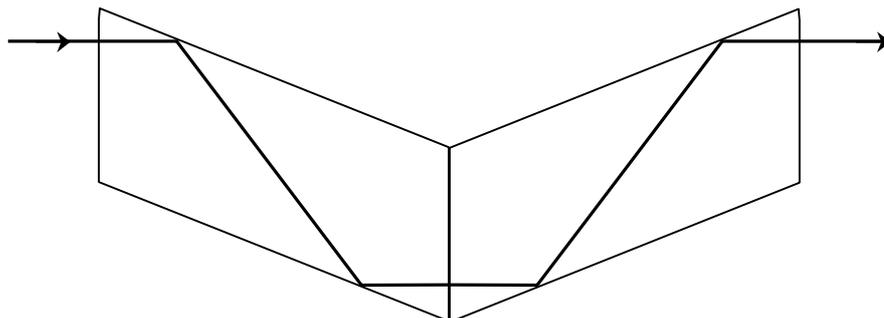
Les relations (4.37a,b), (4.38) et (4.39) sont illustrées sur la figure ci-dessus pour le verre ($n_1 = 1.51$, $n_2 = 1$). Le déphasage δ vaut π pour α_m et 90° et présente un extremum entre ces deux angles.

Un faisceau dont la polarisation est rectiligne et forme un angle général avec le plan d'incidence acquiert alors une polarisation elliptique lors d'une réflexion totale. Ce phénomène est utilisé par exemple dans le prisme de Fresnel qui sert à obtenir une polarisation circulaire à partir d'une polarisation linéaire et vice versa. Imaginons un prisme d'indice de réfraction n et de forme similaire à celle montré sur la figure ci-dessous. Un faisceau linéairement polarisé à l'entrée subira deux réflexions totales à l'intérieur du prisme. On choisit l'angle φ du prisme pour obtenir une polarisation elliptique avec un déphasage de $3\pi/4$ après une première réflexion interne. Le déphasage après la seconde réflexion sera alors $3\pi/2$. Si, de plus, les composantes $E_{//}$ et E_{\perp} ont la même amplitude (le plan de polarisation initiale forme 45° avec le plan d'incidence) on obtient une polarisation circulaire à la sortie du prisme. (Pour $n = 1.51$, on obtient deux solutions: $\varphi = 48^\circ 37'$ et $\varphi = 54^\circ 37'$).



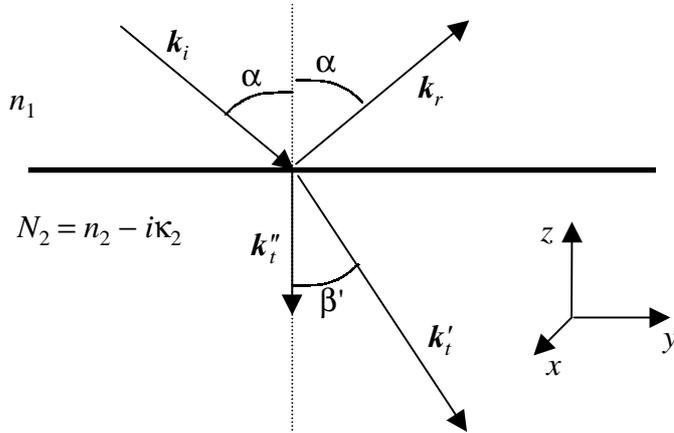
Le même raisonnement peut être utilisé pour le changement de polarisation dans le sens inverse: si l'on dispose d'une polarisation circulaire à l'entrée on obtient une polarisation rectiligne à la sortie (le plan de polarisation formera alors 45° avec le plan d'incidence).

Un montage contenant 2 prismes de Fresnel en contact optique (voir figure ci-dessous) permet de faire subir au faisceau incident 4 réflexions internes totales; par conséquent, le déphasage entre $E_{//}$ et E_{\perp} à la sortie du prisme est égal à $-\pi$.



C. Réflexion sur un milieu absorbant

On considère l'interface entre un milieu diélectrique non-absorbant d'indice de réfraction n_1 réel (ou le vide où $n_1 = 1$) et un milieu diélectrique absorbant ou un métal caractérisé par un indice de réfraction complexe ($N_2 = n_2 - i\kappa_2$). Nous pouvons très bien



appliquer les raisonnements que nous avons développé pour obtenir les équations de Fresnel (conditions de continuité des composantes tangentielles et normales à l'interface). La seule différence étant que le vecteur d'onde du faisceau réfracté k_t devient complexe, ou plus précisément, afin de satisfaire les

équations de continuité (4.19) et (4.20), seule sa composante normale à l'interface devient complexe:

$$k_t = k_t' - ik_t'',$$

où les vecteurs k_t' et k_t'' n'ont pas la même direction (voir figure ci-dessus):

$$k_t = \frac{\omega}{c} \left(0, \quad n_1 \sin \alpha, \quad -\sqrt{N_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} \right). \quad (4.40)$$

Nous pouvons formellement introduire un angle β complexe (qui n'aura pas une signification géométrique simple comme dans le cas d'une interface entre deux milieux non-absorbants) par:

$$\sin \beta = \frac{n_1}{N_2} \sin \alpha = \frac{n_1}{n_2 - i\kappa_2} \sin \alpha \quad (4.41)$$

On exprime alors la fonction $\cos \beta$ (qui est également complexe) à l'aide de (4.41):

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\sqrt{N_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha}}{N_2} \quad (4.42)$$

La relation (4.40) s'écrit alors [à comparer avec (4.24c)]:

$$\mathbf{k}_t = \frac{\omega N_2}{c} (0, \sin \beta, -\cos \beta), \quad (4.43)$$

Tout le calcul du paragraphe précédent peut être alors reproduit et on obtient les équations de Fresnel formellement identiques à (4.26), (4.28) et (4.29) avec un paramètre β complexe. Par exemple, les équations de Fresnel sous forme (4.26) et (4.28) s'écrivent:

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \alpha - N_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta}, \quad (4.44a)$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta}, \quad (4.44b)$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \beta - N_2 \cos \alpha}{n_1 \cos \beta + N_2 \cos \alpha}, \quad (4.44c)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \beta + N_2 \cos \alpha}. \quad (4.44d)$$

On remarque les différences suivantes par rapport au cas non-absorbant.

(i) Suite à l'absorption il y a un déplacement de phase:

Comme β et N_2 sont complexes, les coefficients de réflexion r_{\perp} et r_{\parallel} sont complexes pour n'importe quel angle d'incidence. Cela signifie qu'il y a un déphasage entre \mathbf{E}_i et \mathbf{E}_r qui dépend de l'angle d'incidence.

(ii) L'absorption augmente la réflectivité:

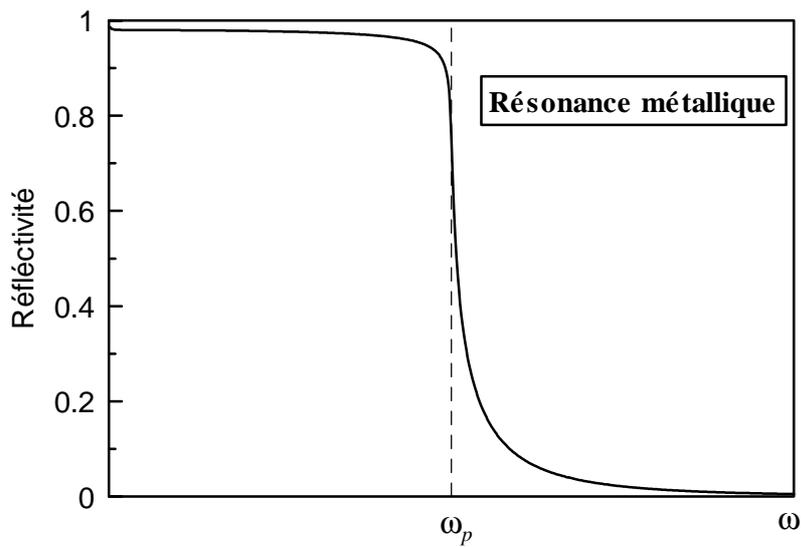
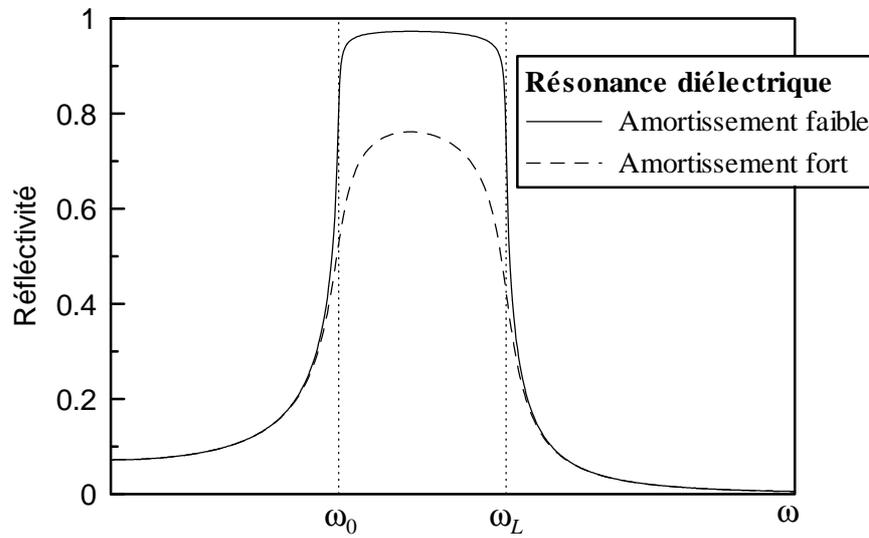
Considérons l'incidence normale; la réflectivité sur l'interface vide – matériau absorbant sera égale à

$$R = \left| \frac{N-1}{N+1} \right|^2 = \left(\frac{n-i\kappa-1}{n-i\kappa+1} \right) \left(\frac{n+i\kappa-1}{n+i\kappa+1} \right) = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} > \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}.$$

La réflectivité devient grande, et peut parfois s'approcher de l'unité ($R \rightarrow 1$), dans deux cas particuliers: (a) l'indice d'absorption est grand, $\kappa \gg 1$: c.-à-d. au voisinage d'une résonance diélectrique ou en basses fréquences dans un métal; il s'en suit qu'un milieu très absorbant n'absorbe pas beaucoup d'énergie électromagnétique car presque toute l'intensité est réfléchi sur la surface! (b) l'indice de réfraction est voisin de zéro, $n \rightarrow 0$: cette situation se produit dans l'intervalle spectral entre la résonance transverse ω_0 et la résonance longitudinale ω_L dans un diélectrique ou en dessous de la fréquence de plasma ω_p dans un métal. Comme la fréquence de plasma se situe dans le domaine ultraviolet pour beaucoup de métaux, on peut utiliser des métaux comme excellents miroirs dans le domaine de la lumière visible (miroirs en aluminium, en argent ou en or).

Les figures suivantes montrent l'allure de la réflectivité en fonction de la fréquence

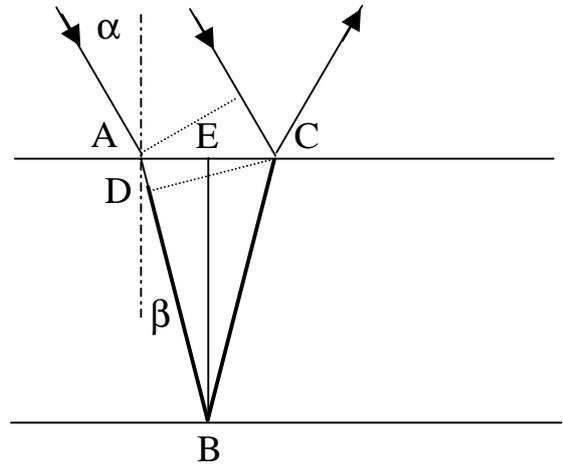
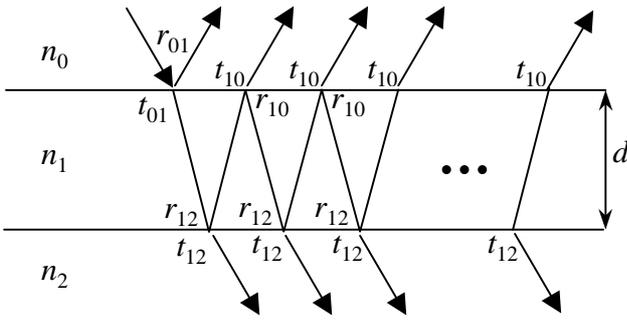
au voisinage d'une résonance diélectrique et d'une résonance métallique. Les courbes dans ces figures ont été calculés pour l'indice de réfraction donné par l'équation (2.44b) dans le cas de la résonance diélectrique et (2.49) dans le cas de la résonance métallique.



Théorie des structures en multicouches

A. Réflectivité et transmissivité d'une structure avec deux interfaces

On considère une lame d'épaisseur d et d'indice de réfraction n_1 réel entre deux milieux avec des indices de réfraction n_0 (souvent le vide: $n_0 = 1$) et n_2 (souvent le vide ou un matériau utilisable dans les éléments optiques). Un calcul rigoureux des coefficients d'absorption et de transmission de cette structure consisterait à écrire les conditions de continuité pour les deux interfaces: ce traitement permettrait alors de déterminer le champ électromagnétique dans tous les trois milieux (voir paragraphe suivant). Néanmoins, étant données les équations de Fresnel pour une seule interface, on peut développer une approche semi-géométrique dont le principe est schématiquement illustré sur la figure ci-dessous.



Différence des chemins optiques:

$$\Delta L n_1$$

$$\Delta L = ABC - AD$$

$$ABC = 2d / \cos\beta$$

$$AD = AC \sin\beta = 2 AE \sin\beta =$$

$$= 2d \sin\beta \operatorname{tg}\beta$$

$$\Delta L n_1 = 2dn_1 \cos\beta$$

Changement de phase:

$$e^- \equiv e^{-2i\omega n_1 d \cos\beta / c}$$

Suivant cette figure le coefficient de transmission de la structure est égal à:

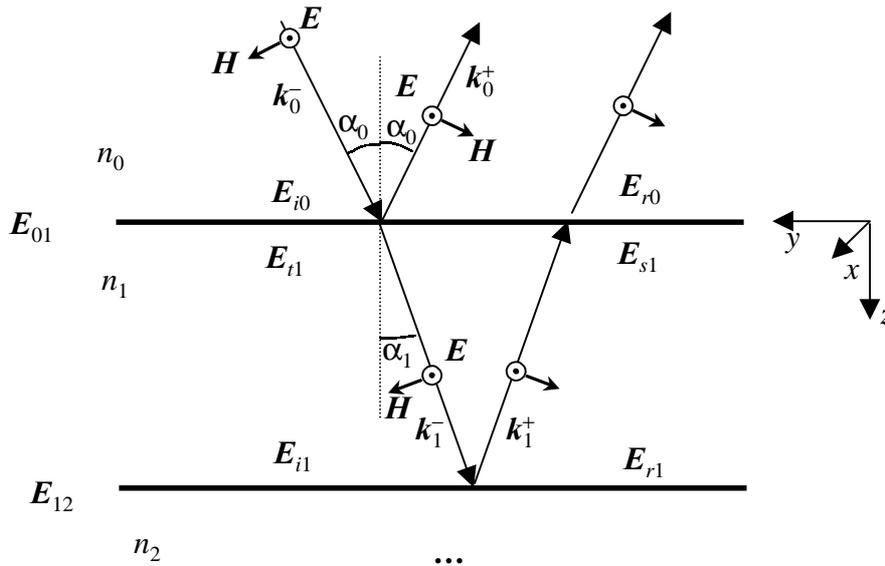
$$\begin{aligned} t &= t_{01}t_{12} + t_{01}t_{12}r_{12}r_{10}e^- + t_{01}t_{12}(r_{12}r_{10}e^-)^2 + t_{01}t_{12}(r_{12}r_{10}e^-)^3 + \dots = \\ &= t_{01}t_{12} \sum_{k=0}^{\infty} (e^- r_{10}r_{12})^k = \frac{t_{01}t_{12}}{1 - r_{10}r_{12}e^{-2i\omega n_1 d \cos\beta / c}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

De la même façon le coefficient de réflexion peut être obtenu:

$$\begin{aligned}
r &= r_{01} + t_{01}t_{10}r_{12}e^{-} + t_{01}t_{10}r_{12}e^{-} r_{10}r_{12}e^{-} + t_{01}t_{10}r_{12}e^{-} (r_{10}r_{12}e^{-})^2 \dots = \\
&= -r_{10} + t_{01}t_{10}r_{12}e^{-} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-} r_{10}r_{12})^k = \frac{r_{12}e^{-2i\omega n_1 d \cos\beta/c} - r_{10}}{1 - r_{10}r_{12}e^{-2i\omega n_1 d \cos\beta/c}} \quad (4.46)
\end{aligned}$$

B. Matrices de transfert

Le traitement géométrique introduit dans le paragraphe précédent est relativement simple et mène très rapidement aux résultats pour une structure avec deux interfaces (une lame ou une couche sur un substrat). Cependant, ce calcul devient fastidieux lorsqu'on doit calculer la réflectivité et la transmissivité d'une structure plus compliquée contenant un empilement de couches. C'est pourquoi on introduit un formalisme de matrices de transfert qui permet de déterminer les propriétés optiques de n'importe quelle structure isotrope. Les quantités utilisées pour le calcul sont illustrées sur la figure suivante:



Il s'agit d'un schéma pour la polarisation TE (voir aussi page 53), le calcul pour la polarisation TM s'effectuera de façon analogue. Sur la figure ci-dessus k_i représente le vecteur d'onde dans la i -ème couche (deux directions du vecteur d'onde sont possibles dans chaque couche: celle avec k_z négatif désignée par le signe "-" et celle avec k_z positif désignée par le signe "+"). On fixe les coordonnées x et y et on se déplace suivant z à travers la structure en couches afin d'énumérer tous les champs rentrant dans le calcul. E_{i0} est le champ électrique de l'onde incidente (qui se propage avec k_0^-) près de l'interface 0-1; E_{r0} est le champ total qui se propage dans le milieu 0 près de l'interface 0-1 avec k_0^+ (c.-à-d. qui s'éloigne de l'interface): il s'agit d'une somme de toutes les contributions possibles provenant des réflexions sur toutes les interfaces de la structure. Ainsi E_{t1} (resp. E_{s1}) est le champ électrique total avec le vecteur d'onde k_1^- (resp. k_1^+) dans le milieu 1 au voisinage de l'interface 0-1, E_{i1} (resp. E_{r1}) est le

champ électrique total avec le vecteur d'onde \mathbf{k}_1^- (resp. \mathbf{k}_1^+) dans le milieu 1 au voisinage de l'interface 1-2. On peut alors continuer pour les interfaces suivantes et définir le champ de cette façon pour n'importe quel nombre de couches. On introduit la même notation également pour le champ magnétique \mathbf{H} . Les composantes tangentielle des champs électrique et magnétique sont continues sur toutes les interfaces mais par contre elles varient à travers les couches. On désigne par E_{01}, E_{12}, \dots (H_{01}, H_{12}, \dots) les composantes tangentielles du champ électrique (magnétique) aux interfaces. On cherche une équation qui relie les champs sur les deux interfaces d'une même couche: par exemple, pour la couche 1 on écrit:

$$\begin{aligned} E_{01} &= E_{t1} + E_{s1} & E_{12} &= E_{i1} + E_{r1} \\ \eta_0 H_{01} &= (E_{t1} - E_{s1})\gamma & \eta_0 H_{12} &= (E_{i1} - E_{r1})\gamma \end{aligned} \quad (4.47)$$

où η_0 est l'impédance du vide et où

$$\gamma = n_1 \cos \alpha_1. \quad (4.48)$$

Or, E_{i1} diffère de E_{t1} uniquement par une différence de phase suite à la propagation à travers la couche:

$$E_{i1} = E_{t1} e^{-i\delta}, \quad \delta = d_1 k_{z1} = d_1 k \cos \alpha_1 = \frac{\omega}{c} n_1 d_1 \cos \alpha_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 d_1 \cos \alpha_1;$$

rappelons, qu'on compare les champs qui sont susceptibles d'interférer ensemble (c.-à-d. les champs avec les mêmes coordonnées x et y), d'où la contribution à la différence de phase du vecteur d'onde effectif suivant z : $k_{z1} = k \cos \alpha_1$. De la même façon:

$$E_{s1} = E_{r1} e^{+i\delta}.$$

Cela mène au système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} E_{01} &= E_{t1} + E_{s1} & E_{12} &= E_{i1} e^{-i\delta} + E_{s1} e^{i\delta} \\ \eta_0 H_{01} &= (E_{t1} - E_{s1})\gamma & \eta_0 H_{12} &= (E_{i1} e^{-i\delta} - E_{s1} e^{i\delta})\gamma \end{aligned} \quad (4.49)$$

On obtient après avoir éliminé E_{t1} et E_{s1} :

$$\begin{aligned} E_{01} &= \cos \delta E_{12} + \frac{i \sin \delta}{\gamma} (\eta_0 H_{12}) \\ \eta_0 H_{01} &= i\gamma \sin \delta E_{12} + \cos \delta (\eta_0 H_{12}) \end{aligned}$$

Cette équation s'écrit sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} E_{01} \\ \eta_0 H_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \frac{i \sin \delta}{\gamma} \\ i\gamma \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{12} \\ \eta_0 H_{12} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

La matrice 2×2 est appelée matrice de transfert de la couche, elle dépend de l'indice de réfraction (n_j), de l'épaisseur (d_j) et de l'angle (α_j); elle s'écrit:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta_j & \frac{i \sin \delta_j}{\gamma_j} \\ i\gamma_j \sin \delta_j & \cos \delta_j \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Il est évident que si la structure est composée de N couches, chaque couche aura sa propre matrice de transfert individuelle M_1, \dots, M_N est on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} E_{01} \\ \eta_0 H_{01} \end{pmatrix} = M_1 M_2 \dots M_N \begin{pmatrix} E_{N,N+1} \\ \eta_0 H_{N,N+1} \end{pmatrix}; \quad (4.52)$$

la matrice de transfert totale de la structure est donnée par le produit de toutes les matrices individuelles des couches. Elle relie les composantes tangentielles du champ électromagnétique de la première interface à celles de la dernière interface. Or les champs à la première interface s'écrivent:

$$\begin{aligned} E_{01} &= E_{i0} + E_{r0} \\ \eta_0 H_{01} &= (E_{i0} - E_{r0})\gamma_0 \end{aligned}$$

comme la structure est illuminée uniquement d'en haut (par la première interface), le champ près de la dernière interface ne contiendra que la composante transmise par toute la structure (E_t):

$$\begin{aligned} E_{N,N+1} &= E_{t,N+1} \equiv E_t \\ \eta_0 H_{N,N+1} &= \gamma_{N+1} E_{t,N+1} \equiv \gamma_t E_t \end{aligned}$$

L'équation (4.52) s'écrit ensuite:

$$\begin{pmatrix} E_{i0} + E_{r0} \\ (E_{i0} - E_{r0})\gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t \\ \gamma_t E_t \end{pmatrix}; \quad (4.53)$$

on introduit les coefficients de réflexion r et de transmission t :

$$r = E_{r0}/E_{i0} \quad t = E_t/E_{i0} .$$

La solution de (4.53) s'écrit:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 \gamma_t m_{12} - m_{21} - \gamma_t m_{22}}{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 \gamma_t m_{12} + m_{21} + \gamma_t m_{22}} \\ t &= \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 m_{11} + \gamma_0 \gamma_t m_{12} + m_{21} + \gamma_t m_{22}} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Cette équation permet d'évaluer les propriétés de transmission et de réflexion de n'importe quel empilement de couches isotropes sur un substrat. Rappelons que:

$$\begin{aligned} \text{polarisation TE:} \quad & \gamma_j = n_j \cos \alpha_j & \delta_j &= \omega n_j d_j \cos \alpha_j / c \\ \text{polarisation TM:} \quad & \gamma_j = n_j / \cos \alpha_j & \delta_j &= \omega n_j d_j \cos \alpha_j / c \\ \text{incidence normale:} \quad & \gamma_j = n_j & \delta_j &= \omega n_j d_j / c \end{aligned}$$

pour toutes les couches.

Soulignons que le formalisme est tout à fait applicable pour les couches en matériaux absorbants: si, par exemple, la j -ième couche est absorbante on remplace l'indice n_j réel par un indice complexe $N_j = n_j - i\kappa_j$; l'angle α_j devient également complexe, il est donné par [voir (4.42)]:

$$\cos \alpha_j = \frac{\sqrt{N_j^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha_0}}{N_j},$$

où les paramètres n_0 et α_0 caractérisent le demi-espace d'incidence sur la structure stratifiée.

Le formalisme des matrices de transfert peut être utilisé également dans le cas d'une réflexion totale sur une ou plusieurs couches et permet ainsi d'évaluer quelle partie de l'énergie électromagnétique est susceptible de traverser le système grâce à l'onde évanescente. Par exemple le cube séparateur montré sur le schéma page 52 peut être traité par cette méthode. Si le faisceau subit une réflexion totale sur la j -ième couche, l'angle α_j est donné par l'expression analogue à l'équation (4.34):

$$\cos \alpha_j = -i \frac{\sqrt{n_0 \sin^2 \alpha_0 - n_j^2}}{n_j}.$$

Par conséquent δ_j et γ_j deviennent purement imaginaires; on pose: $\Delta_j = i\delta_j$ et $\Gamma_j = i\gamma_j$, où Δ_j

et Γ_j sont des coefficients réels. On démontre facilement que la matrice de transfert de cette j -ième couche s'écrit ensuite:

$$\begin{pmatrix} \text{ch } \Delta_j & i \frac{\text{sh } \Delta_j}{\Gamma_j} \\ -i\Gamma_j \text{sh } \Delta_j & \text{ch } \Delta_j \end{pmatrix}.$$

C. Applications

Une lame dans le vide (étalon Fabry-Pérot)

On calcule les coefficients $T = tt^*$ et $R = rr^*$ à partir de (4.45) et (4.46), avec $n_0 = n_2 = 1$, $r_{10} = r_{12}$, $R_{10} = r_{10}r_{10}^*$, $t_{10} = t_{01}$, $T_{01} = t_{01}t_{01}^*$, $T_{10} = t_{10}t_{10}^*$:

$$T = \frac{T_{01}T_{10}}{(1 - R_{10})^2 + 4R_{10} \sin^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{4R_{10}}{(1 - R_{10})^2} \sin^2 \varphi}, \quad (4.55)$$

$$R = 1 - T$$

où $\varphi = \omega n_1 d \cos \beta / c$. La fonction de transmission (4.55) s'appelle fonction d'Airy; elle est périodique en fonction de la pulsation ω et de l'épaisseur de la lame d (voir figure ci-dessous). La fonction présente des maxima ($T_{\max} = 1$) pour les longueurs d'onde λ ($\lambda = 2\pi c/\omega$) du rayonnement qui satisfont la condition:

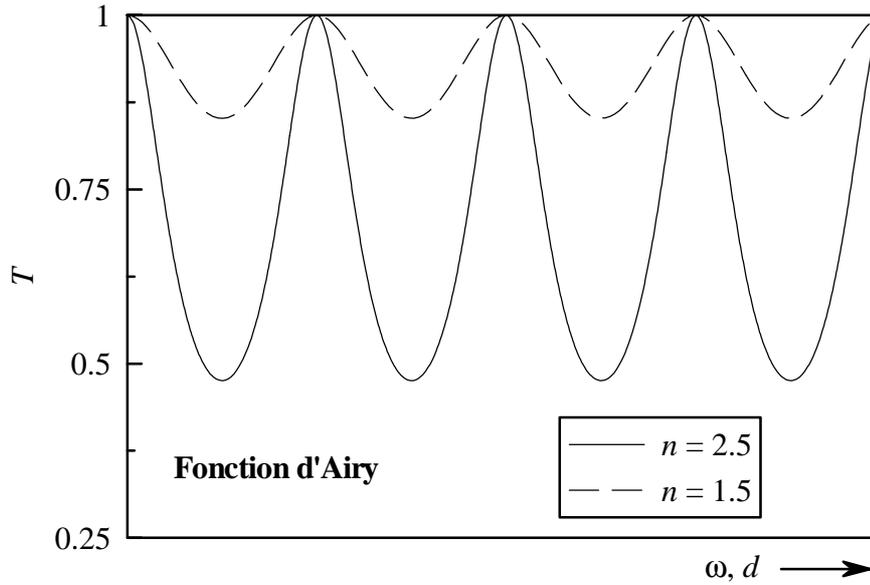
$$\begin{aligned} \varphi &= m\pi, \\ 2n_1 d \cos \beta &= m\lambda, \end{aligned}$$

c.-à-d.

$$\Delta l + \lambda/2 = (2m + 1)\lambda/2.$$

Δl est la différence des chemins optiques entre le faisceau réfléchi sur la face avant et le faisceau réfléchi sur la face arrière — voir figure page 63; le terme $\lambda/2$ rend compte du changement de phase lors de la réflexion sur la première face (réflexion sur un milieu optiquement plus dense). La dernière équation veut donc simplement dire que le faisceau réfléchi directement sur la face avant est en opposition de phase avec le faisceau réfléchi sur la face arrière (on a donc une transmission maximale et réflexion minimale).

La condition pour les minima de T s'écrit:



$$\begin{aligned} \varphi &= (2m-1)\pi/2, \\ 2n_1 d \cos \beta &= (2m-1)\lambda/2, \\ \Delta l + \lambda/2 &= m\lambda, \end{aligned}$$

ici, encore une fois, le terme $\lambda/2$ du premier membre rend compte du changement de phase lors de la réflexion sur la première face; la dernière équation signifie que le faisceau réfléchi sur la face avant est en phase avec celui réfléchi sur la face arrière (transmission minimale, réflexion maximale). La transmission minimale est égale à:

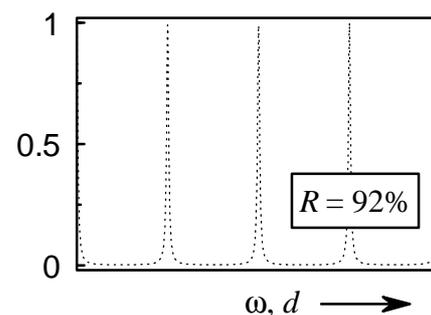
$$T_{\min} = \left(\frac{1 - R_{10}}{1 + R_{10}} \right)^2. \quad (4.56)$$

Le contraste entre T_{\max} et T_{\min} est d'autant plus grand que la réflectivité R_{10} est grande.

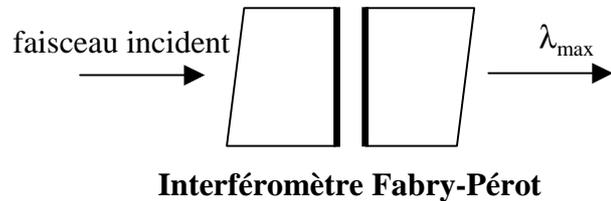
Comme on le verra par la suite, des surfaces avec une réflectivité choisie et bien définie peuvent être préparées à l'aide des traitements spécifiques (dépôts de couches minces diélectriques). Un tel revêtement optique peut notamment servir à augmenter le coefficient de réflexion R_{10} de l'expression (4.55) et, par conséquent, à augmenter le contraste entre les minima et les maxima de la fonction de transmission:

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \left(\frac{1 + R_{10}}{1 - R_{10}} \right)^2 \quad (4.57)$$

Par exemple, la fonction de transmission d'un étalon Fabry-Pérot avec la réflectivité des surfaces $R_{10} = 0.92$ est montré sur la figure ci-contre.



Des lames Fabry-Pérot sont souvent utilisées dans des résonateurs des lasers où elles servent des filtres spectraux. Des interféromètres Fabry-Pérot sont utilisés en interférométrie de très haute résolution: ils consistent en deux lames séparées par un espacement d . Les faces internes des lames ont été traitées afin d'obtenir une réflectivité R_{10} préchoisie. La distance optique entre les lames nd est variable: on peut faire varier ou bien la pression du gaz entre les lames (donc la valeur de n) ou bien la distance entre elles (à l'aide des cales piézo-électriques). Pour l'incidence normale et pour une distance optique donnée nd les composantes spectrales du voisinage étroit des λ_{\max} sont seules transmises par l'interféromètre:



$$\lambda_{\max} = \frac{2nd}{m}$$

En faisant varier la distance optique on peut donc balayer tout le spectre du rayonnement incident avec une grande résolution spectrale.

Traitement antireflet

Des arrangements expérimentaux optiques sont souvent constitués un grand nombre d'éléments en transmission (lentilles, lames retardatrices, polariseurs, lames séparatrices, prismes etc.). Chacun des éléments introduit alors des pertes d'intensité de l'ordre de quelques pour cent qui sont dues à la réflexion sur les deux surfaces de l'élément (interface vide – matériau optique). On cherche donc à minimiser ces pertes par la déposition d'une ou plusieurs couches diélectriques sur la surface du matériau optique (substrat).

Dans un premier temps on considère une seule couche (n_1) déposée sur un substrat, c.-à-d. $n_0 = 1$ (vide), $n_2 = n_s$ (substrat). Il s'agit de déterminer les paramètres optimaux de la couche (épaisseur d , indice n_1) qui minimisent la réflectivité de l'ensemble sous incidence normale pour une pulsation ω_0 (longueur d'onde λ_0) donnée.

On minimise le coefficient de réflexion r donnée par l'expression (4.46); il suffit d'annuler le numérateur:

$$r_{12} e^{-2i\omega_0 n_1 d / c} = r_{10}.$$

(a) $2n_1 d = m\lambda_0$:

$$r_{12} = r_{10}, \quad \frac{n_1 - n_s}{n_1 + n_s} = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}, \text{ pas de solution}$$

(b) $2n_1d = (2m+1)\lambda_0/2$:

$$r_{12} = -r_{10}, \quad \frac{n_1 - n_s}{n_1 + n_s} = \frac{1 - n_1}{1 + n_1}$$

$$n_1 = \sqrt{n_s}, \quad n_1d = \lambda_0/4.$$

La condition (b) signifie que le faisceau réfléchi sur l'interface 0–1 est en opposition de phase avec le faisceau réfléchi sur l'interface 1–2 ($n_0 < n_1 < n_2$: les deux réflexions sont accompagnées d'un changement de phase de π). Un revêtement parfaitement antiréfléchissant pour λ_0 consiste alors d'un film d'épaisseur $\lambda_0/4$ (couche quart d'onde) et d'indice de réfraction $n_1 = \sqrt{n_s}$.

Le même calcul peut être effectué en termes de la matrice de transfert. Supposons que nous avons déposé sur le substrat une couche d'épaisseur $\lambda_0/4$, c.-à-d. $\delta_1 = \pi/2$. La matrice de transfert s'écrit ensuite:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i/\gamma_1 \\ i\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation (4.54) pour le coefficient de réflexion donne:

$$r = \frac{\gamma_0\gamma_s - \gamma_1^2}{\gamma_0\gamma_s + \gamma_1^2} = \frac{n_s - n_1^2}{n_s + n_1^2}, \quad R = \left(\frac{n_s - n_1^2}{n_s + n_1^2} \right)^2 \quad (4.58)$$

ce qui mène, bien sûr, à la condition $n_1 = \sqrt{n_s}$. Avec le substrat en verre ($n_s = 1.51$) l'indice idéal de la couche serait égal à $n_1 = 1.23$; il est alors difficile de trouver un revêtement solide durable avec un indice de réfraction aussi faible, cependant, un résultat acceptable est obtenu à l'aide d'une couche de MgF_2 avec $n_1 = 1.38$: un tel film donnerait une réflectance de 1.3% (à comparer avec 4.2% du verre non traité). Effectivement, des matériaux qui se prêtent bien à la déposition en couches durables ne sont pas toujours disponibles pour un substrat donné. On peut gagner un degré de liberté supplémentaire avec un revêtement en bicouche où chacun des films a une épaisseur de $\lambda/4$. La matrice de transfert de l'ensemble s'écrit:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i/\gamma_1 \\ i\gamma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i/\gamma_2 \\ i\gamma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_2/\gamma_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_1/\gamma_2 \end{pmatrix}.$$

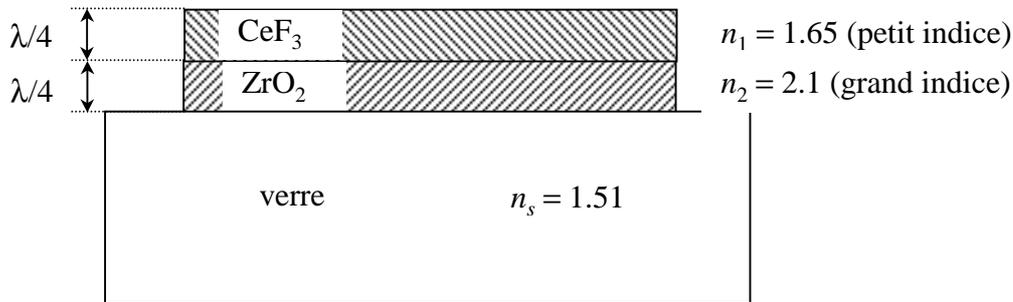
Le coefficient de réflexion est égal à:

$$r = \frac{\gamma_2^2 \gamma_0 - \gamma_s \gamma_1^2}{\gamma_2^2 \gamma_0 + \gamma_s \gamma_1^2} = \frac{n_2^2 - n_s n_1^2}{n_2^2 + n_s n_1^2}, \quad R = \left(\frac{n_2^2 - n_s n_1^2}{n_2^2 + n_s n_1^2} \right)^2. \quad (4.59)$$

La réflectance s'annule lorsque

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{n_s}.$$

Le cas idéal pour le substrat en verre ($n_2/n_1 = 1.23$) est assez bien approché par la combinaison de CeF_3 ($n_1 = 1.65$) et ZrO_2 ($n_2 = 2.1$) montrée sur le schéma ci-dessous; on



trouve $n_2/n_1 = 1.27$ et, suivant (4.59), une réflectance de 0.1%. Les pertes en réflexion sont très faibles pour la longueur d'onde choisie λ_0 , par contre la puissance réfléchie croît assez rapidement lorsqu'on s'éloigne de cette longueur d'onde (voir figure sur la page 74).

Souvent on a besoin d'un traitement antireflet qui couvre une large gamme de fréquences (par exemple toute la région de la lumière visible). Une solution de ce problème consiste à utiliser une couche à $\lambda/4$ en combinaison avec une couche à $\lambda/2$. La couche demi-onde a strictement aucun effet sur la réflectance à la longueur d'onde optimisée:

$$M_{\lambda/2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

la bicouche se comporte alors comme une seule couche quart d'onde, par contre pour les longueurs d'onde voisines la couche demi-onde aide à maintenir R à des valeurs basses (voir exemple pour $n_1 = 1.38$, $n_2 = 1.6$ sur la figure page 74).

Un choix de paramètres encore plus vaste apparaît lorsqu'on prend en compte trois couches: il est ensuite possible de maintenir la réflectance très basse dans une région spectrale assez large. Dans le cas de trois couches $\lambda/4$ - $\lambda/4$ - $\lambda/4$ (voir le schéma suivant) la matrice de transfert s'écrit:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i/\gamma_1 \\ i\gamma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i/\gamma_2 \\ i\gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i/\gamma_3 \\ i\gamma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \gamma_3} \\ -i \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2} & 0 \end{pmatrix},$$

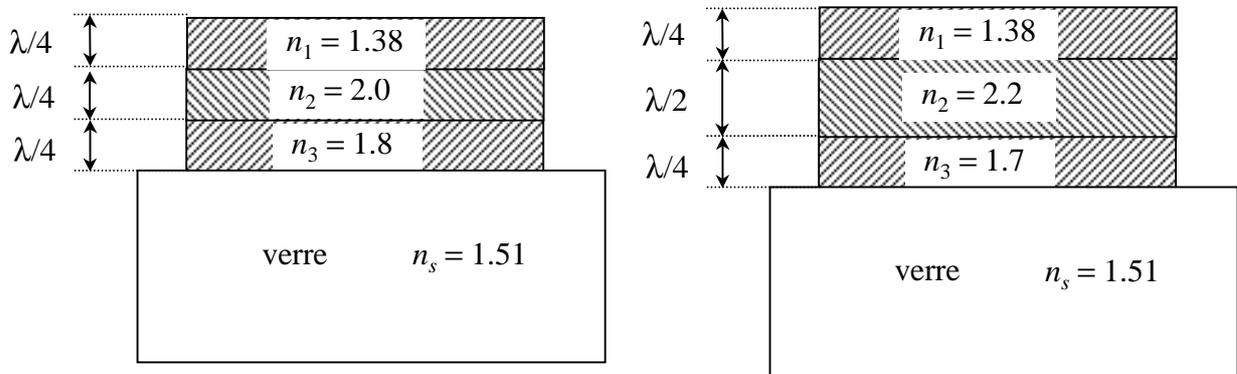
le coefficient de réflexion est égal à

$$r = \frac{\gamma_2^2 \gamma_0 \gamma_s - \gamma_1^2 \gamma_3^2}{\gamma_2^2 \gamma_0 \gamma_s + \gamma_1^2 \gamma_3^2} = \frac{n_2^2 n_s - n_1^2 n_3^2}{n_2^2 n_s + n_1^2 n_3^2}$$

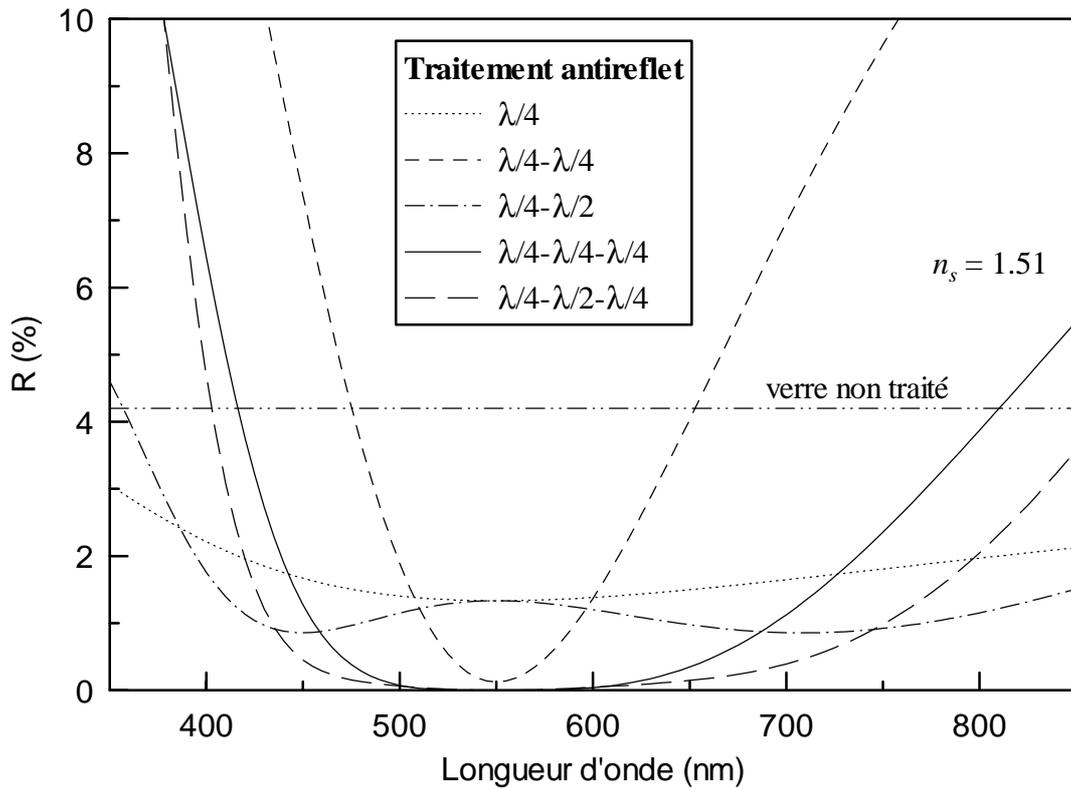
avec la condition du minimum:

$$\frac{n_1 n_3}{n_2} = \sqrt{n_s}.$$

La réflectance se trouve encore un peu améliorée lorsqu'on considère une structure $\lambda/4$ - $\lambda/2$ - $\lambda/4$ (voir le schéma suivant). La couche $\lambda/2$ permet d'étendre l'intervalle de la faible réflectance, par contre, elle n'a aucun effet sur la réflectance à la longueur d'onde optimisée (on obtient la formule pour la réflectance d'une bicouche $\lambda/4$ - $\lambda/4$, $R = 0.1\%$).



La figure ci-dessous (traitement antireflet) résume tous les cas de revêtement antireflet discutés dans cette section. Les courbes ont été calculées à l'aide du formalisme des matrices de transfert: la matrice totale de l'empilement des couches a été obtenue chaque fois par la multiplications des matrices individuelles des couches. La différence de phase δ pour une couche a été exprimée en fonction de la longueur d'onde λ ; l'épaisseur de la couche a été choisie afin de satisfaire la condition $nd = \lambda_0/4$ ou $\lambda_0/2$ pour $\lambda_0 = 550$ nm. Enfin, les éléments de la matrice de l'empilement ont été introduits dans l'équation (4.54) qui a permis de calculer la réflectance totale de la structure.



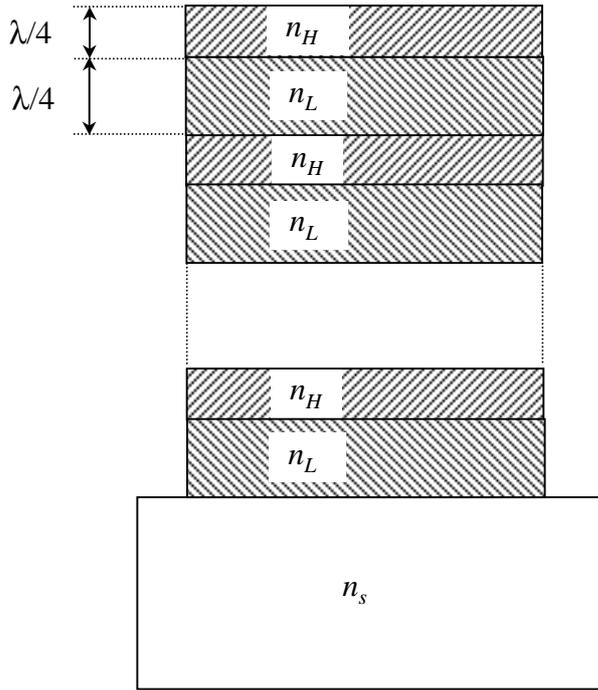
Miroirs diélectriques

Nous avons déjà signalé l'utilisation fréquente en optique des miroirs métalliques: en effet, la réflectivité des métaux s'approche de 1 en dessous de la fréquence de plasma. Dans ce paragraphe, on étudiera la question si un empilement de couches déposées sur un substrat ne pourra pas augmenter la réflectance du diélectrique jusqu'à des valeurs voisines de l'unité. Lors de l'étude des couches antiréfléchissantes nous avons systématiquement trouvé la solution où une couche de faible indice est suivie par une couche de plus grand indice. Les réflexions partielles sur les interfaces sont ensuite en opposition de phase donnant naissance à l'interférence destructive. Afin d'obtenir une grande réflectance il convient d'inverser cet ordre: les réflexions partielles seront ensuite en phase et l'interférence constructive permettra d'augmenter la puissance réfléchi. Nous allons étudier le cas d'un empilement de N bicouches identiques $\lambda/4-\lambda/4$ où le premier film de la bicouche possède un grand indice de réfraction n_H et le second film possède un faible indice n_L comme montré sur le schéma suivant.

La matrice de transfert d'une bicouche pour l'incidence normale s'écrit:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i/\gamma_H \\ i\gamma_H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i/\gamma_L \\ i\gamma_L & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_L/n_H & 0 \\ 0 & -n_H/n_L \end{pmatrix}.$$

Pour N bicouches on obtient:



$$M = \begin{pmatrix} (-n_L/n_H)^N & 0 \\ 0 & (-n_H/n_L)^N \end{pmatrix}$$

Suivant (4.54) le coefficient de réflexion s'exprime ensuite:

$$r = \frac{(-n_L/n_H)^N - n_s(-n_H/n_L)^N}{(-n_L/n_H)^N + n_s(-n_H/n_L)^N}$$

et on trouve pour la réflectance R :

$$R = \left(\frac{(1/n_s)(n_L/n_H)^{2N} - 1}{(1/n_s)(n_L/n_H)^{2N} + 1} \right)^2$$

Il est clair que R s'approche très rapidement de l'unité déjà pour un petit nombre de bicouches lorsque le rapport n_L/n_H est faible. Par exemple pour $n_L = 1.38$ (MgF_2) et $n_H = 2.35$ (ZnS) on obtient $R = 40\%$ pour $N = 1$, $R = 99.56\%$ pour $N = 6$ et $R = 99.95\%$ pour $N = 8$. Le rôle de l'indice de réfraction du substrat devient tout à fait mineur pour un grand nombre de couches. La réflectance est élevée dans une gamme de longueurs d'onde plus ou moins large au voisinage de λ_0 . A l'extérieur de cette bande $R(\lambda)$ présente un caractère oscillatoire avec plusieurs maxima et minima. Si on néglige l'absorption et la diffusion, la transmittance de la structure est égale à:

$$T = 1 - R;$$

on peut alors construire sur le même principe d'autres éléments optiques comme des filtres spectraux.

Une application très récente des revêtements multicouches sont des miroirs diélectriques "chirpés" (chirped mirrors en anglais). Il s'agit d'un empilement de plusieurs dizaines de bicouches n_H-n_L . L'épaisseur optique des films (voisine de $\lambda_0/4$ d'une longueur d'onde centrale) varie légèrement en fonction de la profondeur. Une composante spectrale caractérisée par sa longueur d'onde λ_1 est alors réfléchi lorsqu'elle atteint l'endroit en profondeur où l'épaisseur optique des couches est égale $\lambda_1/4$. Ainsi, différentes composantes spectrales d'une impulsion optique sont réfléchies dans des endroits différents et, par conséquent, elles parcourent des distances optiques différentes. Des miroirs chirpés bien conçus peuvent alors servir à compenser la dispersion de la vitesse de groupe des impulsions

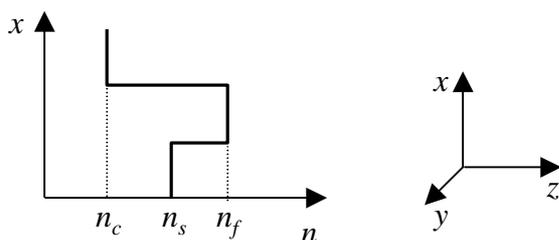
ultra-brèves discutée à la fin du chapitre 2 de ce cours.

Guides d'onde optiques

Des guides d'onde optiques ont connus beaucoup de succès depuis presque deux dizaines d'années grâce à leurs applications en médecine et dans les communications. Un guide d'onde est un diélectrique (couche mince ou fibre) caractérisé par l'indice de réfraction plus élevé que les milieux voisins. On utilise des fibres optiques (avec une symétrie cylindrique) pour envoyer les informations sur longues distances, par contre les guides d'onde plans (sous forme de couches minces) connaissent leurs applications plutôt dans le domaine de l'optique intégrée.

Un guide d'onde permet de conduire un faisceau électromagnétique sans divergence (confiné à la dimension transversale du guide d'onde qui est alors comparable ou supérieure à la longueur d'onde) sur de longues distances grâce à une série de réflexions totales internes. Un traitement rigoureux des guides d'onde consiste à résoudre les EM dans un diélectrique avec des conditions de continuité convenables sur les interfaces: elles sont données par la géométrie du guide d'onde. Dans le cadre de ce cours nous adopterons une approche plus simple et plus intuitive de l'optique géométrique.

A. Guide d'onde planaire homogène



On considère un guide d'onde composé de 3 matériaux comme sur la figure ci-contre. Une couche d'un composé d'indice de réfraction élevé (n_f) est déposée sur un substrat (n_s); n_c correspond à un autre matériau ou au vide. On cherche les modes électromagnétiques qui peuvent se propager dans le guide d'onde

suivant z sans pertes d'énergie dans les directions transversales (suivant x). Des rayons qui se propagent à l'intérieur de la structure doivent subir une suite de réflexions totales internes sur les interfaces $f-c$ et $f-s$. Cela signifie que l'angle d'incidence interne α_f doit satisfaire l'inégalité suivante:

$$\sin \alpha_f > \frac{n_s}{n_f} > \frac{n_c}{n_f}.$$

L'onde qui a été réfléchiée sur l'interface $f-c$ et se dirige vers le substrat s'écrit:

$$E_1 = E_{10} \exp(i\omega t - ikn_f(-x \cos \alpha_f + z \sin \alpha_f)); \quad (4.60)$$

(k est le vecteur d'onde dans le vide); l'onde qui a été réfléchiée sur l'interface $f-s$ et se propage vers le milieu c s'écrit:

$$E_2 = E_{20} \exp(i\omega t - ikn_f(x \cos \alpha_f + z \sin \alpha_f)). \quad (4.61)$$

L'onde E_1 devient E_2 après une réflexion totale sur le substrat et vice versa. On peut alors écrire pour un guide d'onde d'épaisseur h :

$$\begin{aligned} E_1(x=h)e^{-i\delta_c} &= E_2(x=h) \\ E_2(x=0)e^{-i\delta_s} &= E_1(x=0) \end{aligned} \quad (4.62)$$

où δ_c et δ_s désignent les changements de phase de l'onde lors des réflexions totales internes sur les milieux c et s . Ces changements de phase sont définis par les expressions (4.37a,b) pour les polarisations TE et TM:

$$\delta_{\text{TE}} = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\cos \alpha} \right) \quad \delta_{\text{TM}} = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{n^2 \cos \alpha} \right),$$

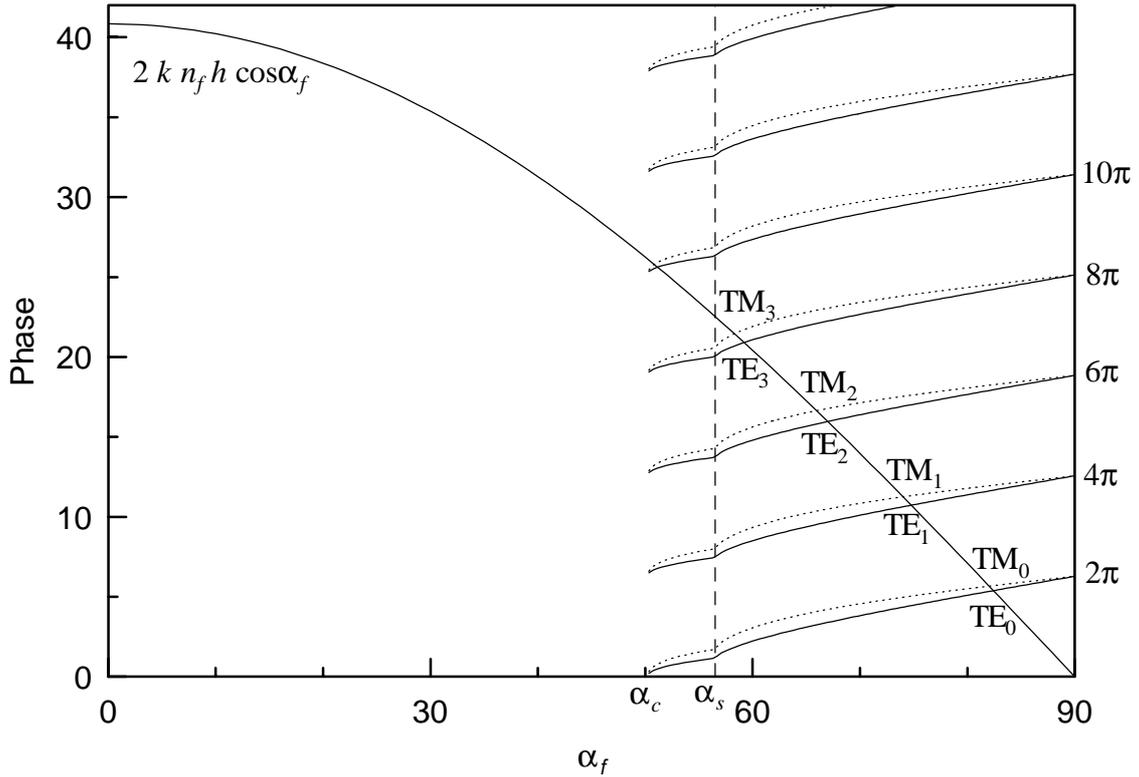
où $n = n_c/n_f$ ou $n = n_s/n_f$. En introduisant (4.60) et (4.61) dans (4.62) on trouve:

$$\exp(-2ikn_f h \cos \alpha_f + i\delta_c + i\delta_s) = 1,$$

et par conséquent

$$2kn_f h \cos \alpha_f = \delta_c + \delta_s + 2\pi m \quad (m \text{ est un entier}).$$

C'est l'équation de dispersion (ou la condition de la résonance transverse) du guide d'onde. Elle peut être résolue numériquement ou graphiquement. Un exemple de la solution graphique est représenté sur la figure ci-dessus. Il est clair que le nombre de modes guidés par le guide d'onde croît lorsque le produit kh augmente. D'autre part, pour un guide d'onde non-



symétrique ($\alpha_s \neq \alpha_c$) et pour un kh suffisamment faible la structure ne peut guider aucun mode. Pour un guide d'onde symétrique, où $\alpha_s = \alpha_c$, il existe toujours au moins un mode guidé.

On introduit la constante de propagation longitudinale β comme une projection du vecteur d'onde dans la direction z :

$$\beta = kn_f \sin \alpha_f = \frac{\omega}{c} n_f \sin \alpha_f (\omega), \quad (4.63)$$

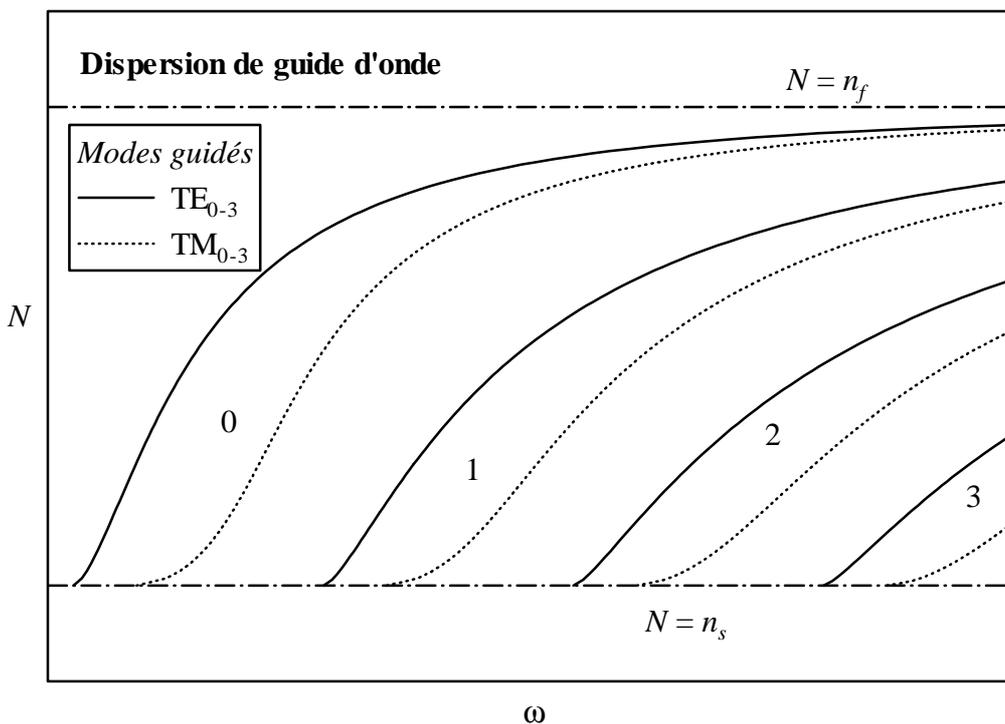
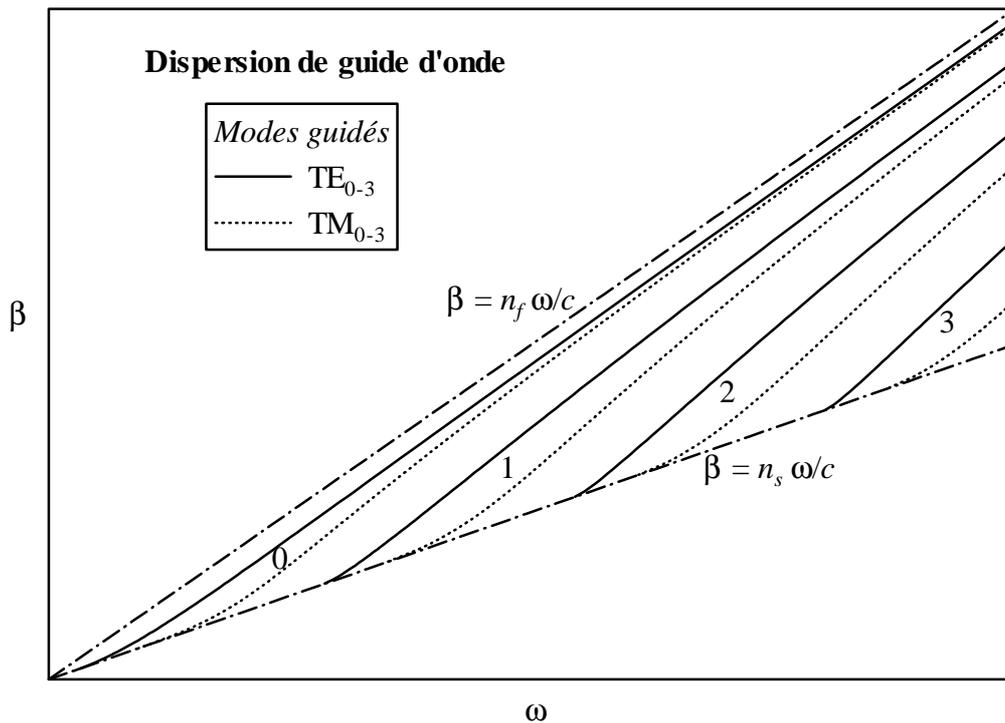
où ω est la pulsation du mode guidé caractérisé par α_f . On introduit également l'indice de réfraction effectif

$$N = \frac{\beta}{k} = n_f \sin \alpha_f. \quad (4.64)$$

Les exemples des courbes de dispersion $\beta(\omega)$ et $N(\omega)$ données par les relation (4.63) et (4.64) sont montrés sur les figures ci-dessous. On remarque l'existence d'une fréquence limite en dessous de laquelle aucun mode ne peut être guidé par la structure⁸. Lorsqu'on augmente la fréquence du rayonnement de nouveaux modes apparaissent: le nombre de modes augmente

⁸ Il n'y a aucune fréquence limite pour un guide d'onde symétrique: un mode guidé existe quelle que soit la fréquence.

avec la fréquence croissante. L'indice de réfraction effectif d'un mode est compris entre n_f et



n_s et s'approche de n_f pour des fréquences élevées.

B. Atténuation, dispersion

Les paramètres tels que la dispersion et l'atténuation déterminent comment un signal est restitué à la sortie d'un guide d'onde. Un signal, typiquement une impulsion courte quasi-

monochromatique, est atténué au fur et à mesure lors de sa propagation le long d'un guide d'onde (d'une fibre). On distingue des mécanismes d'atténuation extrinsèques et intrinsèques. Parmi les mécanismes de pertes extrinsèques on compte (i) les inhomogénéités dont les dimensions sont bien supérieures à la longueur d'onde optique (liées à la fabrication de la fibre), (ii) des irrégularités géométriques (courbures: la condition de réflexion totale peut ne plus être satisfaite), et (iii) des pertes à l'entrée et à la sortie de la fibre (réflexion de Fresnel, ouverture de la fibre etc.). Les pertes intrinsèques sont de deux sortes: (i) pertes dues à l'absorption résiduelle (très faible mais néanmoins perceptible à cause de la longueur de la distance parcourue) du matériau avec lequel la fibre est fabriquée et des impuretés (métaux de transition comme Fe, Cu, Co, Ni, Mn, Cr; hydroxyl OH⁻); (ii) pertes liées à la diffusion de Rayleigh (diffusion sur des inhomogénéités microscopiques dont la dimension est nettement inférieure à la longueur d'onde) qui sont proportionnelles à ω^4 . Avec des fibres en silice on arrive à obtenir des pertes de l'ordre de 0.2 dB/km avec $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$.⁹

La dispersion détermine comment une impulsion s'étale dans le temps au cours de sa propagation dans le guide d'onde. On distingue trois types de dispersion:

1. Dispersion modale: elle est expliquée par le fait que chacun des modes guidés se propage sous un angle α_f différent et, par conséquent, chacun d'eux doit parcourir une distance différente entre l'entrée et la sortie du guide d'onde. Cela se traduit par les valeurs différentes de la constante de propagation β , ainsi que de l'indice de réfraction effectif N [voir éqs. (4.63) et (4.64)].

$$\frac{\Delta\tau_1}{L} = \frac{N_{\max}}{c} - \frac{N_{\min}}{c} \approx \frac{n_f - n_s}{c}$$

L'effet de dispersion modale est habituellement de l'ordre de quelques dizaines de nanosecondes par kilomètre. La solution à ce problème consiste à utiliser des fibres monomodes (c.-à-d. des guides d'onde dont la dimension transversale est suffisamment faible: voir figure sur la page 78) ou à utiliser des fibres à variation radiale continue de l'indice de réfraction (voir l'annexe A).

2. Dispersion matérielle: un élargissement de l'impulsion d'entrée se produit à cause du fait que l'indice de réfraction du guide d'onde varie en fonction de la fréquence [voir la dispersion de la vitesse de groupe à la fin du chapitre 2, notamment formules (2.29) et (2.30)],

⁹ L'atténuation en décibels est définie par la relation:

$$\alpha[\text{dB}] = 10 \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

où I_1 et I_2 sont des intensités du rayonnement mesurées à une distance donnée (1 km en standard).

$$\frac{\Delta\tau_2}{L} = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_f}{d\lambda^2} \Delta\lambda.$$

Toutes les composantes spectrales qui forment l'impulsion ont une vitesse de groupe différente et parcourent la fibre en un temps différent. L'effet de la dispersion matérielle est d'habitude de 1 à 2 ordres de grandeur plus faible que celui de la dispersion modale: il devient significatif seulement lorsque la dispersion modale est évitée (fibres monomodes, fibres à gradient d'indice). Cette dispersion peut être minimisée par utilisation d'une source lumineuse à faible largeur spectrale. Il est également à noter que la dispersion de la vitesse de groupe de la silice passe par zéro à $\lambda = 1.27 \mu\text{m}$.

3. Dispersion de guide d'onde: il s'agit d'un effet géométrique qui dépend des paramètres du guide d'onde. Son origine est bien visible sur la figure précédente intitulée "Dispersion de guide d'onde": l'indice de réfraction effectif N dépend de la fréquence de façon non-linéaire (les courbes de dispersions pour les différents modes ne sont pas des lignes droites). Par analogie avec l'expression (4.40) on peut écrire pour la dispersion de guide d'onde:

$$\frac{\Delta\tau_3}{L} = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 N}{d\lambda^2} \Delta\lambda.$$

Cette dispersion donne des élargissements des impulsions de l'ordre des dizaines de picosecondes par kilomètre. Elle peut compenser la dispersion matérielle au voisinage de $1.27 \mu\text{m}$ pour obtenir une dispersion totale nulle. On peut alors arriver à minimiser la dispersion et l'atténuation en même temps pour $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$.

5. Milieux anisotropes

Il existe un grand nombre de matériaux (cristaux) dont les propriétés optiques dépendent de la direction de propagation. Ils s'appellent milieux optiquement anisotropes et il sont sujets d'un grand nombre de phénomènes optiques (double réfraction, effets de polarisation etc.) qu'on utilise ensuite dans des éléments optiques variés (polariseurs, filtres biréfringents, lames retardatrices, compensateurs).

Dans un milieu isotrope, la polarisation \mathbf{P} et l'induction électrique \mathbf{D} créées par un champ électrique \mathbf{E} sont toujours parallèles à \mathbf{E} et leur magnitude est donnée par un facteur de proportionnalité scalaire qui ne dépend pas non plus de la direction de \mathbf{E} :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}\end{aligned}$$

ε est la permittivité diélectrique, χ est connu sous le nom de la susceptibilité diélectrique.

Ceci n'est plus vrai dans un milieu anisotrope (sauf dans des directions particulières). Comme un cristal est composé d'un réseau régulier de groupes d'atomes qui ont leur propres propriétés de symétrie on peut s'attendre à ce que le cristal se polarise dans une direction plus facilement que dans une autre. La direction, aussi bien que l'amplitude, de la polarisation induite \mathbf{P} dépendront alors de la direction du champ électrique:

$$\begin{aligned}P_x &= \varepsilon_0 (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z), \\ P_y &= \varepsilon_0 (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z), \\ P_z &= \varepsilon_0 (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z).\end{aligned}$$

La matrice 3×3 de χ_{ij} est appelée tenseur de la susceptibilité diélectrique. On écrit en abrégé:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j, \quad (5.1)$$

où la convention de la sommation sur les indices répétés — ici sur l'indice j — est appliquée. L'équation (5.1) signifie en réalité:

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j ;$$

par la suite, nous utiliserons la notation abrégée qui simplifie beaucoup les expressions dans les milieux anisotropes. De façon analogue on peut écrire l'expression pour l'induction électrique D :

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j = \varepsilon_0 (1 + \chi_{ij}) E_j,$$

où ε_{ij} est le tenseur de la permittivité diélectrique (voir l'annexe B pour la définition d'un tenseur). On montre que ε_{ij} est un tenseur symétrique et, par conséquent, qu'il possède au plus 6 composantes indépendantes. Le nombre de composantes indépendantes peut être souvent encore réduit grâce aux propriétés de symétrie du milieu. Les considérations de symétrie menant à la réduction du nombre de composantes indépendantes d'un tenseur sont décrites en détail dans l'annexe B: elles sont illustrées sur l'exemple de la permittivité diélectrique.

Le tenseur ε peut être exprimé dans différents systèmes référentiels, en pratique on utilise une des trois possibilités suivantes: (i) système d'axes cristallographiques (ce système est utilisé surtout pour tabulation de données), (ii) système d'axes principaux diélectriques dans lequel les composantes non-diagonales s'annulent — mise à part les groupes tricliniques et monocliniques, ce système d'axes est identique au système cristallographique — (iii) système d'axes du laboratoire lié à la direction de propagation (on choisit d'habitude la direction de propagation suivant z). Les formes du tenseur diélectrique pour différentes symétries cristallines sont résumées dans le tableau sur la page suivante. On suppose dans ce tableau que l'axe de rotation d'ordre le plus élevé est parallèle à l'axe z cristallographique. On note, par ailleurs, que pour les systèmes cristallins cubique, hexagonal, tétragonal, trigonal et orthorhombique le système d'axes optiques coïncide avec le système d'axes cristallographiques: le tenseur diélectrique est identique dans les deux systèmes.

Symétrie optique	Système cristallographique	Tenseur diélectrique	
		système d'axes optiques	système d'axes cristallographiques
isotrope	cubique	$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix}$	$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix}$
uniaxe	hexagonal tetragonal trigonal	$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$	$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$
biaxe	orthorhombique	$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$	$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$
	monoclinique	$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$	$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$
	triclinique	$\epsilon = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}$	$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$

Comme la direction du vecteur champ électrique \mathbf{E} est différente de la direction de l'induction électrique \mathbf{D} , la direction de propagation de la phase est différente à la direction de propagation de l'énergie électromagnétique: $\mathbf{k} \perp \mathbf{D}$ et $\mathbf{S} \perp \mathbf{E}$, donc \mathbf{k} n'est pas parallèle à \mathbf{S} .

Propagation des ondes planes

On commence par écrire les EM pour les ondes planes [éq. (2.9)]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} &= \omega \mu_0 \mathbf{H} \\
 \mathbf{k} \wedge \mathbf{H} &= -\omega \epsilon \cdot \mathbf{E}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

où ε est le tenseur diélectrique. On suppose que le milieu est non absorbant: ε est réel. On l'exprime dans le système d'axes principaux diélectriques sous sa forme générale:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}.$$

A partir de (5.2) on dérive l'équation d'onde:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (5.3)$$

Le terme $\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) &= \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} (k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z) = \begin{pmatrix} k_x^2 E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z \\ k_x k_y E_x + k_y^2 E_y + k_y k_z E_z \\ k_x k_z E_x + k_y k_z E_y + k_z^2 E_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & k_y^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation d'onde peut ensuite être réécrite sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega^2 n_x^2}{c^2} - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \frac{\omega^2 n_z^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

Pour avoir une solution non-triviale il faut que le déterminant de la matrice de l'équation (5.4) s'annule:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\omega^2 n_x^2}{c^2} - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \frac{\omega^2 n_z^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.5)$$

Les solutions de cette équation sont des valeurs admises de la pulsation ω en fonction du vecteur d'onde \mathbf{k} . Les différentes valeurs de ω correspondent aux différents indices de réfraction effectifs N définis par:

$$N = \frac{kc}{\omega}, \quad (5.6)$$

ou aux différentes vitesses de propagation de phase v :

$$v = \frac{c}{N} = \frac{\omega}{k} \quad (5.7)$$

Les solutions de l'équation (5.5) peuvent être aussi recherchées dans le sens inverse: pour une pulsation ω donnée l'équation (5.5) représente une surface à trois dimensions (appelée surface des normales ou surface des indices) dans l'espace de vecteurs d'onde $\omega(\mathbf{k}) = const$. Pour une direction de propagation \mathbf{s} (avec $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$) on trouve des valeurs possibles de k [ou de N à l'aide de l'équation (5.6)] comme des points d'intersection entre la surface et le prolongement du vecteur \mathbf{s} .

Après avoir développé le déterminant (5.5) on trouve:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega^2 n_x^2}{c^2} - k^2 \right) \left(\frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} - k^2 \right) \left(\frac{\omega^2 n_z^2}{c^2} - k^2 \right) + k_x^2 \left(\frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} - k^2 \right) \left(\frac{\omega^2 n_z^2}{c^2} - k^2 \right) + \\ & k_y^2 \left(\frac{\omega^2 n_x^2}{c^2} - k^2 \right) \left(\frac{\omega^2 n_z^2}{c^2} - k^2 \right) + k_z^2 \left(\frac{\omega^2 n_x^2}{c^2} - k^2 \right) \left(\frac{\omega^2 n_y^2}{c^2} - k^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

On remarque qu'il s'agit d'une équation du troisième degré en ω^2 qui conduit à deux solutions non nulles (deux modes propres) pour un vecteur d'onde \mathbf{k} donné (la troisième solution est triviale: $\omega = 0$). A l'envers: étant données la direction de propagation \mathbf{s} et la pulsation ω , l'équation (5.8) est quadratique en k^2 ; comme solution on trouve deux valeurs possibles de k^2 . Pour une direction de propagation donnée on obtient ainsi deux modes propres avec des valeurs d'indice de réfraction N différentes dans le cas général. Lorsque ces deux solutions

sont introduites dans l'équation (5.4) on trouve deux polarisation propres du champ électrique E . Les modes propres du milieu anisotrope se propagent indépendamment et sans changement de l'état de polarisation. Il existe une direction de propagation particulière pour les cristaux uniaxes (deux directions pour les cristaux biaxes) où les modes propres dégénèrent en une seule valeur N quelle que soit la direction de polarisation de l'onde.

L'équation (5.8) peut être encore simplifiée dans le cas où $\omega n_i \neq kc$ ($i = x, y, z$), c.-à-d. $N \neq n_i$:

$$\frac{k_x^2}{k^2 c^2 - \omega^2 n_x^2} + \frac{k_y^2}{k^2 c^2 - \omega^2 n_y^2} + \frac{k_z^2}{k^2 c^2 - \omega^2 n_z^2} = \frac{1}{c^2}, \quad (5.9)$$

ou en utilisant l'équation (5.6):

$$\frac{s_x^2}{N^2 - n_x^2} + \frac{s_y^2}{N^2 - n_y^2} + \frac{s_z^2}{N^2 - n_z^2} = \frac{1}{N^2}; \quad (5.10)$$

cette dernière équation s'appelle équation de Fresnel. Elle donne deux valeurs de l'indice de réfraction N (vitesse de phase $v = c/N$) pour les deux modes propres.

En revenant maintenant à l'équation (5.4) on détermine les polarisations propres. Les deux premières lignes de (5.4) donnent le système d'équations:

$$\begin{aligned} (n_x^2 - N^2 + s_x^2 N^2) E_x + s_x s_y N^2 E_y &= -s_x s_z N^2 E_z \\ s_x s_y N^2 E_x + (n_y^2 - N^2 + s_y^2 N^2) E_y &= -s_y s_z N^2 E_z \end{aligned}$$

Leurs solutions s'écrivent:

$$E_x = \frac{\frac{s_x s_z N^2}{(N^2 - n_x^2)}}{1 - \frac{s_x^2 N^2}{(N^2 - n_x^2)} - \frac{s_y^2 N^2}{(N^2 - n_y^2)}} E_z, \quad E_y = \frac{\frac{s_y s_z N^2}{(N^2 - n_y^2)}}{1 - \frac{s_x^2 N^2}{(N^2 - n_x^2)} - \frac{s_y^2 N^2}{(N^2 - n_y^2)}} E_z;$$

en utilisant l'équation de Fresnel (5.10) pour simplifier le dénominateur les solutions s'écrivent:

$$E_x = \frac{\frac{s_x}{(N^2 - n_x^2)}}{\frac{s_z}{(N^2 - n_z^2)}} E_z, \quad E_y = \frac{\frac{s_y}{(N^2 - n_y^2)}}{\frac{s_z}{(N^2 - n_z^2)}} E_z.$$

Un choix convenable de E_z permet d'écrire très simplement pour la direction du champ électrique:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{s_x}{N^2 - n_x^2} \\ \frac{s_y}{N^2 - n_y^2} \\ \frac{s_z}{N^2 - n_z^2} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

On constate que la polarisation propre du milieu biréfringent est rectiligne. L'expression (5.11) n'est valable que pour le cas général où $N \neq n_i$ ($i = x, y, z$); si $N = n_i$ il faut revenir à l'équation (5.4) afin d'obtenir la polarisation des modes propres.

On étudiera les solutions des équations (5.8–10) pour les différents cas de la symétrie optique.

A. Cas isotrope

On a $n_x = n_y = n_z \equiv n$ et l'équation (5.8) est réduite à:

$$\left(\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - k^2 \right)^2 \frac{\omega^2 n^2}{c^2} = 0.$$

Cette équation donne deux solutions dégénérées:

$$N = n;$$

la surface des normales est une sphère dont le diamètre est égal à $\omega n/c$.

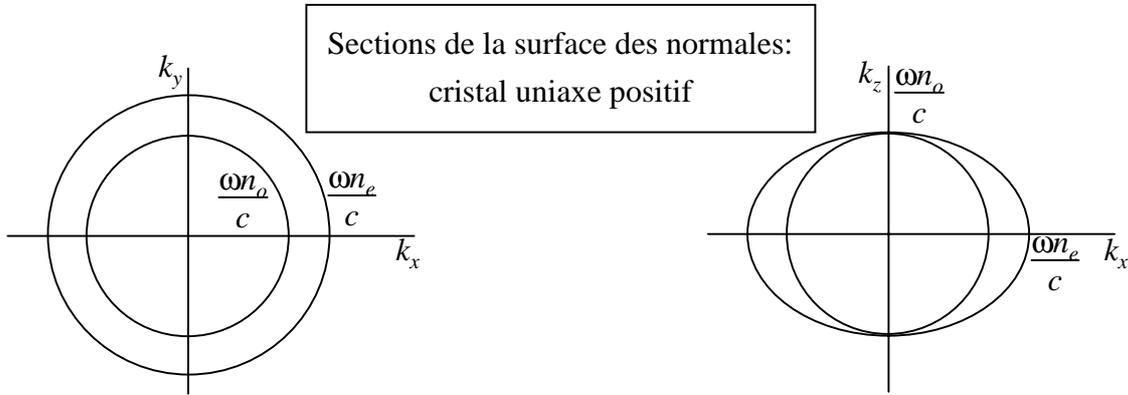
B. Cas uniaxe

On a $n_x = n_y \equiv n_o$ et $n_z \equiv n_e \neq n_o$. n_o s'appelle l'indice de réfraction ordinaire, n_e s'appelle l'indice de réfraction extraordinaire. On parle d'un cristal uniaxe positif si $n_o < n_e$ et d'un

cristal uniaxe négatif si $n_o > n_e$. L'équation (5.8) mène à la formule suivante:

$$\left(\frac{\omega^2 n_o^2}{c^2} - k^2 \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} - \frac{k_z^2}{n_o^2} \right) = 0. \quad (5.12)$$

La surface des normales consiste de deux feuilles: une sphère (première parenthèse) et un ellipsoïde de révolution (seconde parenthèse) dont l'axe est parallèle à l'axe z cristallographique (voir figure ci-dessous). Ainsi, pour la propagation suivant z ($k_x = k_y = 0$) on obtient deux modes dégénérés qui se propagent avec la même vitesse $v = c/n_o$: on parle de la propagation suivant l'axe optique. Lorsque le faisceau se propage dans le plan xy ($k_z = 0$), on obtient un mode ordinaire avec l'indice de réfraction n_o polarisé dans le plan xy



(polarisation perpendiculaire à la direction de propagation) et un mode extraordinaire avec l'indice de réfraction n_e polarisé suivant z . Pour une direction de propagation quelconque formant un angle θ avec l'axe z on trouve un mode ordinaire avec l'indice n_o (polarisé dans le plan xy , $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$) et un mode extraordinaire avec l'indice $n(\theta)$ dont la valeur peut être calculée à partir de (5.12):

$$\frac{s_x^2 + s_y^2}{n_e^2} + \frac{s_z^2}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2 k^2},$$

par conséquent

$$\frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} = \frac{1}{n^2(\theta)}. \quad (5.13)$$

La polarisation de ce dernier mode est obtenu à l'aide de l'équation (5.11).

Le tableau suivant présente une récapitulation des propriétés des modes propres dans les cristaux uniaxes.

Propagation ($z \equiv$ axe optique)	rayon ordinaire	rayon extra-ordinaire
$\mathbf{k} // z$	cas dégénéré (comme milieu isotrope); indice n_o , $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$	
$\mathbf{k} \perp z$	indice n_o , \mathbf{E} dans le plan (xy), $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$	indice n_e , $\mathbf{E} // z$
\mathbf{k} : angle θ avec z		indice $n(\theta)$ donné par (5.13), \mathbf{E} dans le plan ($\mathbf{k}z$), $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} \neq 0$

C. Cas biaxe.

Les trois indices de réfraction principaux sont différents: on pose $n_x < n_y < n_z$. La surface des normales est compliquée (voir figure ci-dessous): les expressions (5.8) et (5.10) ne peuvent être simplifiées dans le cas général. Cependant, nous pouvons encore étudier les intersections de la surface des normales avec les plans xy , xz , et yz . Pour $k_x = 0$ l'équation (5.8) se factorise:

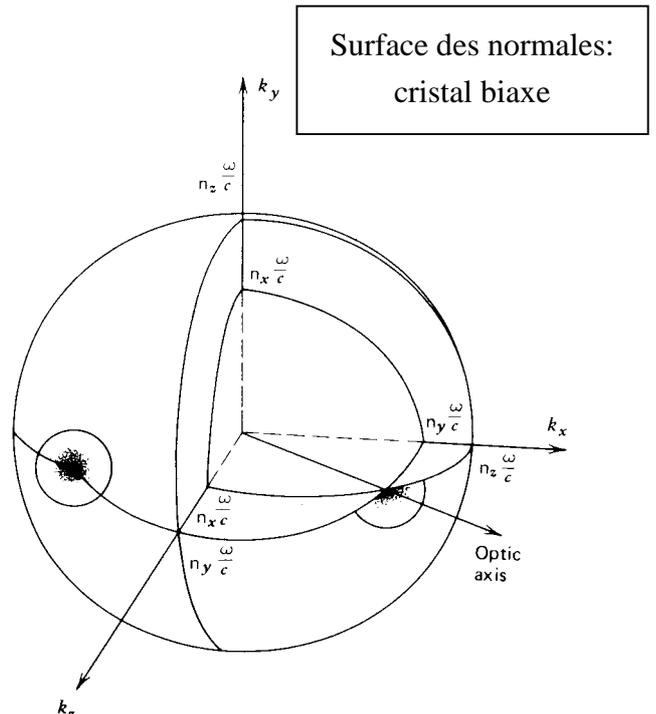
$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_z^2 + k_y^2}{n_x^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_z^2}{n_y^2} - \frac{k_y^2}{n_z^2} \right) = 0$$

et donne un cercle (première parenthèse) et une ellipse (seconde parenthèse). On obtient des expressions tout à fait analogues (un cercle + une ellipse) également pour les deux autres sections:

$$k_y = 0: \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2 + k_z^2}{n_y^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2}{n_z^2} - \frac{k_z^2}{n_x^2} \right) = 0,$$

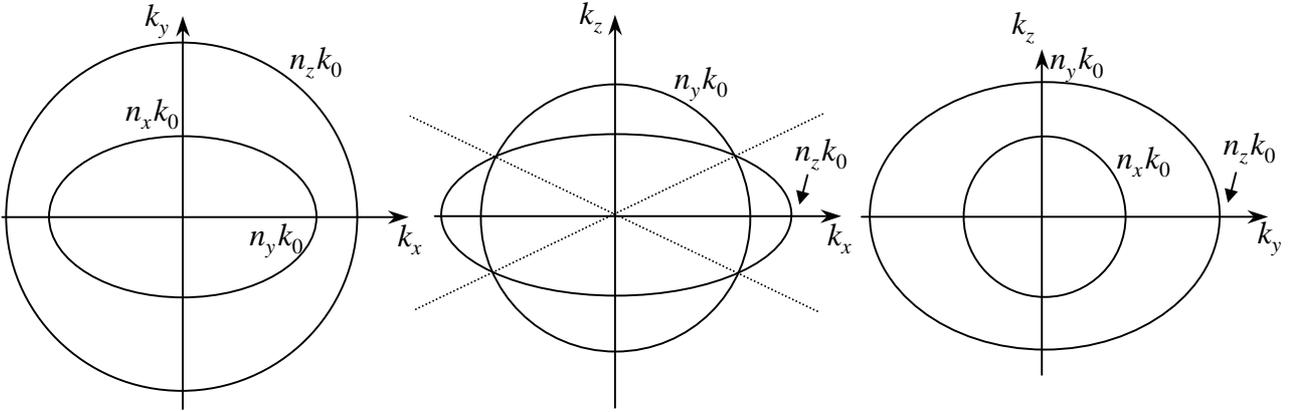
$$k_z = 0: \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{n_z^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2}{n_x^2} - \frac{k_y^2}{n_y^2} \right) = 0.$$

Le résultat est montré sur la figure page suivante. Il existe 2 directions où les deux modes propres sont dégénérés et se propagent avec la même vitesse $v = c/n_y$. On appelle ces 2 directions les axes optiques: elles se trouvent dans la section xz (voir figure page suivante).



Sections de la surface des normales:
cristal biaxe

$$(k_0 = \frac{\omega}{c})$$



D. Vitesse de phase, vitesse de groupe

Nous avons déjà émis que le vecteur d'onde et le vecteur de Poynting ne sont pas parallèles dans un milieu anisotrope. La vitesse de phase d'une onde plane est définie par:

$$\mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \mathbf{s},$$

elle est parallèle au vecteur d'onde \mathbf{k} . La vitesse de groupe d'un paquet d'onde s'écrit:

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}),$$

par définition, c'est un vecteur perpendiculaire à la surface des normales et, par conséquent, n'est pas parallèle au vecteur de la vitesse de phase. La vitesse qui décrit le transport de l'énergie peut être définie de façon suivante:

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{S}}{U},$$

où \mathbf{S} est le vecteur de Poynting et U est la densité d'énergie électromagnétique. Nous allons montrer que $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_g$ dans un milieu anisotrope. On écrit les EM pour un milieu anisotrope (5.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} &= \omega \mu_0 \mathbf{H} & / \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{H} &= -\omega \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} & / \cdot \mathbf{E} \end{aligned} ;$$

on obtient:

$$\frac{(\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}}{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}} = \omega \quad (\text{a})$$

$$\frac{(\mathbf{k} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}} = -\omega \quad (\text{b})$$

et par conséquent

$$\omega^{-1} = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})} \quad (\text{a})$$

$$\omega^{-1} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})} \quad (\text{b})$$

Après avoir sommé (a) et (b) on trouve:

$$\omega = \frac{2\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}} = \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{S}}{U}.$$

En résumé:

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega = \frac{\mathbf{S}}{U} = \mathbf{v}_e.$$

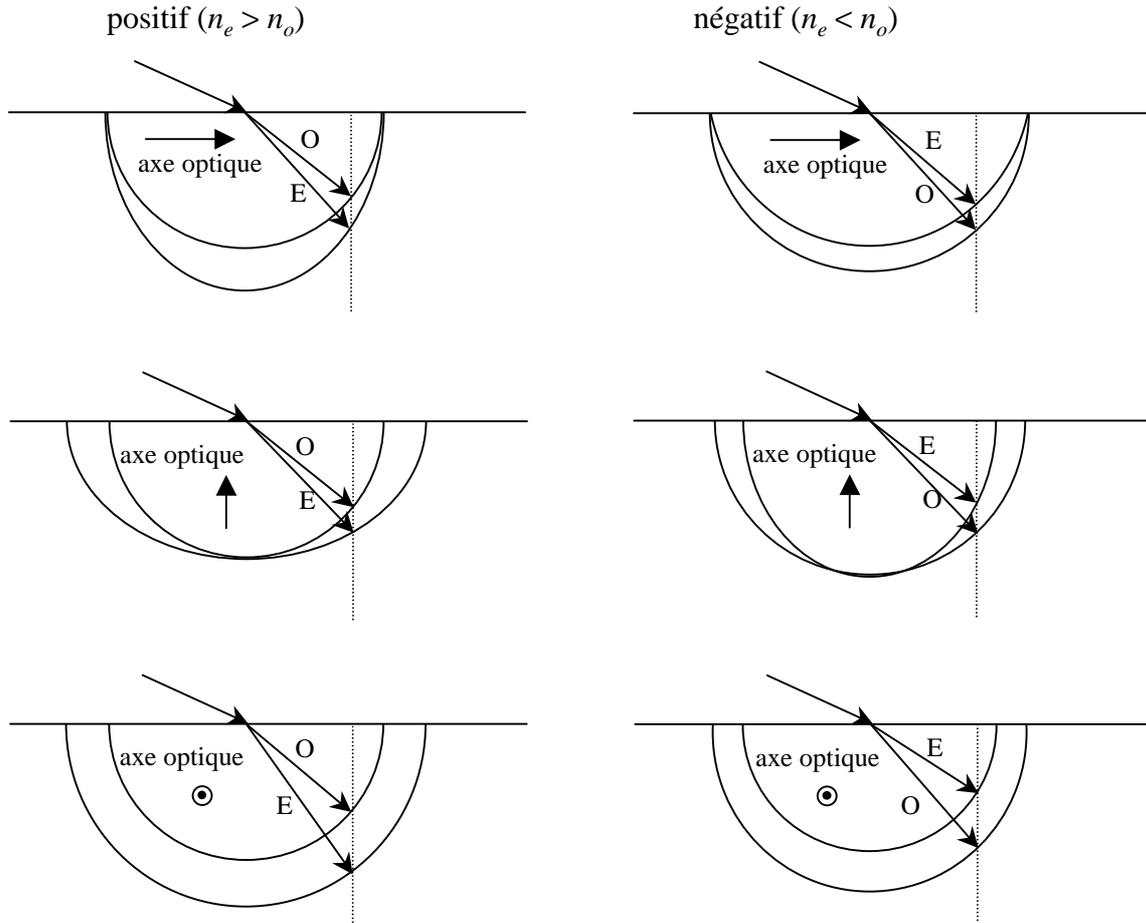
Cette égalité valide le concept de la vitesse de groupe pour les milieux anisotropes. Sa conséquence directe est que l'énergie électromagnétique se propage toujours dans la direction perpendiculaire à la surface des normales.

E. Réfraction double à l'interface

Si une onde plane est incidente sur la surface d'un cristal anisotrope, l'onde réfractée sera une combinaison linéaire de deux modes propres. Pour un cristal uniaxe elle sera une combinaison linéaire de l'onde ordinaire et de l'onde extraordinaire. Nous avons vu dans le chapitre consacré aux formules de Fresnel à l'interface que les vecteurs d'onde incident, réfléchi et réfracté doivent être compris dans le plan d'incidence et que leurs composantes tangentielles doivent être identiques. Ces conditions doivent être vérifiées également pour une interface avec un milieu biréfringent, c.-à-d.:

$$k_i \sin \alpha_i = k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2,$$

Réfraction double: cristaux uniaxes



où k_i est le vecteur d'onde de l'onde incidente et k_1 , k_2 sont les vecteurs d'onde des deux modes réfractés. Cette équation a la forme de la loi de Snell-Descartes à ceci près que les valeurs de k_1 et k_2 ne sont pas constantes: elles dépendent des directions de k_1 et k_2 . Dans le cas d'un milieu uniaxe on peut écrire:

$$n_i \sin \alpha_i = n_o \sin \alpha_1 = n(\alpha_2) \sin \alpha_2 . \quad (5.14)$$

n_i est l'indice de réfraction du milieu d'où vient l'onde incidente, n_o est l'indice de réfraction ordinaire (constant) du milieu biréfringent et n est l'indice de réfraction extraordinaire, lui-même dépendant de l'angle α_2 suivant l'équation (5.13). La détermination de α_1 est donc simple, alors que pour déterminer α_2 il faut soit résoudre l'équation non-linéaire (5.14) soit utiliser la méthode graphique. Cette méthode graphique est illustrée pour un cristal uniaxe sur la figure ci-dessus.

Ellipsoïde des indices

Le concept de l'ellipsoïde des indices (indicatrice) est très souvent utilisé pour déterminer les indices de réfraction et les polarisations des modes propres dans les milieux anisotropes. Il s'agit d'une méthode très puissante, puisqu'elle est très simple d'utilisation.

La partie électrique de la densité d'énergie s'écrit:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j = \frac{1}{2\varepsilon_0} K_{ij} D_i D_j, \text{ avec } K_{ij} = \varepsilon_0 (\varepsilon^{-1})_{ij}. \quad (5.15)$$

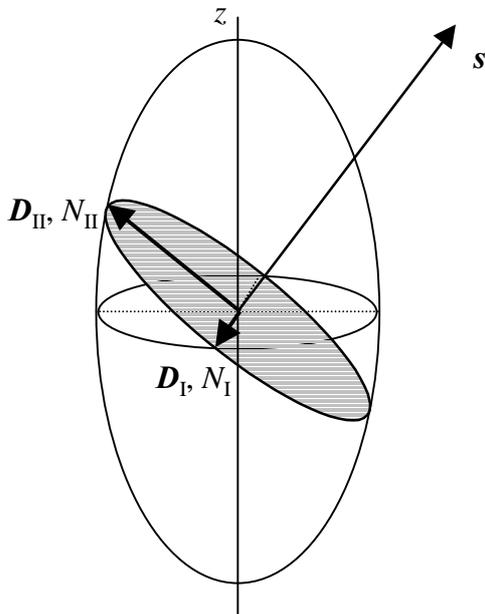
Dans le système d'axes principaux diélectriques le tenseur K_{ij} est diagonal et la surface de l'énergie constante (dans l'espace de \mathbf{D}) s'écrit:

$$\frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2} = 2\varepsilon_0 U_e ;$$

en remplaçant $\mathbf{D}/\sqrt{2\varepsilon_0 U_e}$ par \mathbf{r} ; la dernière équation prend la forme suivante:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1. \quad (5.16)$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde avec les axes principaux parallèles à x , y et z ; les demi-axes de l'ellipsoïde sont égaux à n_x , n_y et n_z . C'est pourquoi on parle de l'ellipsoïde des indices de



réfraction (ou de l'indicatrice optique). Il permet de trouver les indices de réfraction et les directions du vecteur \mathbf{D} associés au deux modes propres pour une direction de propagation \mathbf{s} quelconque. On suit la prescription suivante (voir aussi la figure ci-contre): on prend le plan normal à la direction de propagation \mathbf{s} qui passe par l'origine et on cherche l'intersection de ce plan avec l'ellipsoïde. C'est une ellipse dont les paramètres déterminent les valeurs des indices de réfraction N_I et N_{II} des modes propres: ces valeurs se trouvent égales aux longueurs des demi-axes de l'ellipse. Chacun des axes est en

plus parallèle à la direction du vecteur \mathbf{D} du mode correspondant.

Dans le cas d'un milieu uniaxe, l'indicatrice est un ellipsoïde de révolution et les valeurs N_I et N_{II} sont égales à n_o (indice ordinaire) et $n(\theta)$ [c.-à-d. l'indice extraordinaire donné par l'équation (5.13)].

Dans ce qui suit nous allons justifier cette méthode de détermination des indices de réfraction. On prend l'équation d'onde (5.3) où on remplace \mathbf{E} par $K\mathbf{D}$ [le tenseur K étant défini par l'équation (5.15)]:

$$\mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot K\mathbf{D}) - K\mathbf{D} + \frac{1}{N^2}\mathbf{D} = 0, \quad (5.17)$$

où nous avons introduit \mathbf{s} en utilisant la relation $\mathbf{k} = N(\omega/c)\mathbf{s}$. Comme le vecteur \mathbf{D} est toujours perpendiculaire à la direction de propagation, il convient de choisir le système d'axes du laboratoire (x_1, x_2, x_3) avec l'axe x_3 parallèle à la direction de propagation. On a ensuite:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

En revanche le tenseur K ne sera plus diagonal avec ce système d'axes. Il est facile de vérifier que l'équation (5.17) devient ensuite:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D} = \frac{1}{N^2} \mathbf{D}.$$

Comme la troisième composante de \mathbf{D} est toujours nulle, on peut écrire un système d'équations 2×2 pour les valeurs et vecteurs propres:

$$\begin{pmatrix} K_{11} - 1/N^2 & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} - 1/N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.18)$$

On obtient alors deux valeurs propres $1/N_I^2$ et $1/N_{II}^2$ et deux (mutuellement perpendiculaires) vecteurs propres \mathbf{D}_I et \mathbf{D}_{II} du tenseur K_{ij} . L'ellipsoïde des indices (5.16) s'exprime dans notre nouveau système de coordonnées:

$$K_{ij}x_i x_j = 1, \quad (5.19)$$

où la sommation sur i et j (1, 2, 3) est sous-entendue. Le plan perpendiculaire à la direction de propagation est donné par l'équation $x_3 = 0$. L'intersection de ce plan avec l'ellipsoïde (5.19) est une ellipse dont les coefficients sont déterminés par le tenseur K_{ij} :

$$K_{11}x_1^2 + K_{22}x_2^2 + 2K_{12}x_1x_2 = 1.$$

Les vecteurs propres de la matrice K_{ij} 2×2 sont alors parallèles aux axes principaux de l'ellipse: par conséquent, les vecteurs \mathbf{D}_I et \mathbf{D}_{II} sont parallèles aux axes de cette ellipse. La longueur des demi-axes principaux est déterminée par les valeurs propres de cette matrice K_{ij} : ces valeurs propres sont les indices N_I et N_{II} selon (5.18).

Éléments optiques biréfringents

Les éléments optiques biréfringents sont essentiellement des prismes ou des lames fabriqués des cristaux anisotropes uniaxes qui changent l'état de polarisation du faisceau incident. Pour fabriquer ces éléments on utilise souvent le calcite (CaCO_3) ou le quartz (SiO_2). Le calcite est un cristal uniaxe négatif dont les indices principaux pour $\lambda = 546$ nm valent:

$$n_o = 1.662, \quad n_e = 1.488.$$

La biréfringence étant assez élevée ($n_e - n_o = -0.174$) il s'agit d'un matériau convenable pour les polariseurs. Le quartz est un cristal uniaxe positif et on trouve pour $\lambda = 546$ nm:

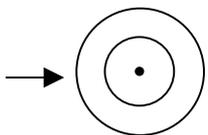
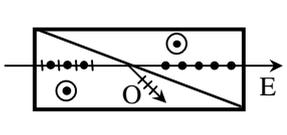
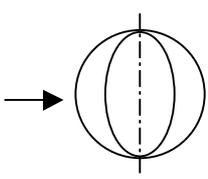
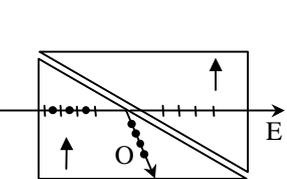
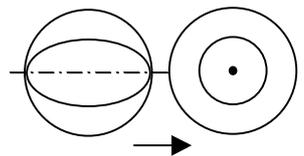
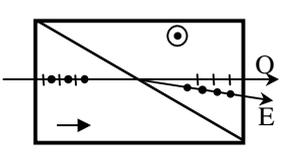
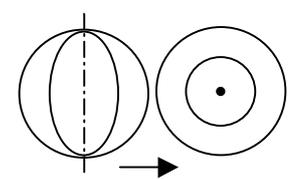
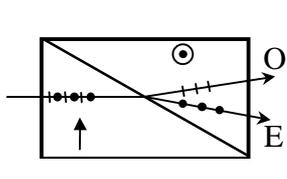
$$n_o = 1.546, \quad n_e = 1.555.$$

Comme sa biréfringence est faible ($n_e - n_o = +0.009$) on l'utilise pour fabriquer des lames retardatrices de phase.

A. Polariseurs

Les polariseurs biréfringents sont habituellement composés de deux prismes en calcite qui sont ou bien cimentés avec le baume du Canada (l'indice de réfraction $n = 1.54$ est intermédiaire entre n_o et n_e) ou bien séparés par une couche d'air. Le tableau ci-dessous présente les polariseurs les plus souvent utilisés. Les polariseurs Glan-Thompson et Glan-Taylor laissent passer la polarisation extraordinaire à travers le polariseur alors que la

polarisation ordinaire subit une réflexion totale sur l'interface calcite/baume ou calcite/air. Les polariseurs Rochon et Wollaston séparent les polarisations ordinaire et extraordinaire grâce à la double réfraction à l'interface: à la sortie chacune des polarisations se propage dans une direction différente.

Nom	surface des normales	forme du polariseur	commentaire
Glan-Thompson			<ul style="list-style-type: none"> ❑ Grand champ de vision angulaire ($\approx 20^\circ$)
Glan-Taylor			<ul style="list-style-type: none"> ❑ Petit champ de vision ($\approx 5^\circ$) ❑ Incidence sur l'interface sous un angle voisin de l'angle de Brewster ❑ Utilisation possible: UV, haute puissance
Rochon			<ul style="list-style-type: none"> ❑ Séparation des faisceaux O et E (typiquement 10°)
Wollaston			<ul style="list-style-type: none"> ❑ Séparation symétrique des faisceaux O et E (typiquement 20°)

Mis à part les polariseurs biréfringents il existe aussi des polariseurs dichroïques qui ont la forme d'une feuille mince. Ces polariseurs sont caractérisés par un coefficient d'absorption fortement anisotrope: une des polarisations est alors absorbée lors d'un passage à travers le polariseur alors que l'autre ne sent que de faibles pertes. L'effet du dichroïsme ne peut survenir que lorsque la fréquence du rayonnement se trouve à l'intérieur d'une bande d'absorption du matériau. Les matériaux anisotropes sont alors souvent biréfringents dans la gamme spectrale de leur transparence et dichroïques dans la gamme d'une forte absorption (par exemple le calcite est biréfringent dans le spectre visible alors qu'il est dichroïque dans certains intervalles du spectre infrarouge).

La matrice de Jones d'un polariseur formant un angle φ avec le système d'axes du laboratoire s'écrit (c.-à-d. la direction de polarisation qui peut passer par le polariseur forme un angle φ avec l'axe x du laboratoire):

$$\begin{pmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{pmatrix},$$

où $c = \cos\varphi$ et $s = \sin\varphi$. On vérifie que la polarisation parallèle passe par le polariseur:

$$\begin{pmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

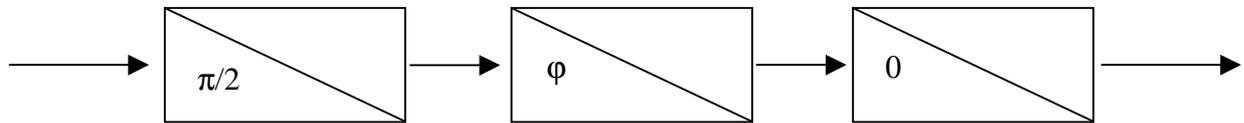
et que la polarisation croisée ne passe pas:

$$\begin{pmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deux polariseurs croisés (angles φ et $\varphi + \pi/2$):

$$\begin{pmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 & -sc \\ -sc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Séquence de 3 polariseurs (un polariseur général φ entre deux polariseurs croisés):



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cs \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On applique cette séquence à un état de polarisation rectiligne (par exemple à la polarisation qui passe par le premier polariseur):

$$\begin{pmatrix} 0 & cs \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cs \\ 0 \end{pmatrix}.$$

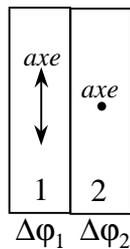
On obtient un maximum d'intensité transmise pour $\varphi = \pi/4$; aucun signal ne passe lorsque $\varphi = 0, \pi/2$.

B. Lames retardatrices de phase

Les lames retardatrices de phase servent à introduire un retard de phase (par une différence de chemin optique) entre deux polarisations rectilignes orthogonales. Elles sont souvent fabriqués de quartz qui a une différence assez faible entre les indices ordinaire et extraordinaire. On écrit pour la lame d'une épaisseur d :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(n_e - n_o)d}{\lambda}$$

Par exemple, pour obtenir une lame quart d'onde ($\Delta\varphi = \pi/2$) on a besoin d'une épaisseur très faible: $d = 15.2 \mu\text{m}$ pour $\lambda = 546.1 \text{ nm}$. On peut alors (i) soit utiliser des lames plus épaisses d'ordre plus élevé ($\Delta\varphi = 5\pi/2, 9\pi/2\dots$) (ii) soit utiliser deux lames en contact optique d'une épaisseur légèrement différente ($15.2 \mu\text{m}$ pour une lame quart d'onde) dont les axes optiques sont perpendiculaires l'un à l'autre (voir figure ci-dessous).

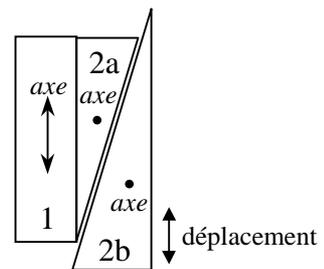


$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi(n_e - n_o)(d_1 - d_2)}{\lambda}$$

Un compensateur permet d'obtenir une variation continue de retard de phase. La figure ci-dessous montre le compensateur de Babinet-Soleil. La lame 2 est divisée en deux parties en biseau: le déplacement latéral d'un coin permet de faire varier l'épaisseur totale de la deuxième lame et, par conséquent le déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux polarisations.

Une lame retardatrice (ou un compensateur) est caractérisée par la valeur du déphasage et par la direction de l'axe optique. Un déphasage δ suivant l'axe x du laboratoire est donné par la matrice de Jones suivante:

$$\begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Un déphasage δ pour une direction formant l'angle φ avec l'axe x d'écrit:

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 e^{i\delta} + s^2 & cs(1 - e^{i\delta}) \\ cs(1 - e^{i\delta}) & s^2 e^{i\delta} + c^2 \end{pmatrix}$$

Lame retardatrice entre 2 polariseurs croisés:

$$\begin{pmatrix} s^2 & -sc \\ -sc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{pmatrix};$$

la lumière ne passe pas par le système pour $\varphi = 0, \pi/2$. Pour $\varphi = \pi/4$ (l'axe optique de la lame est à 45° par rapport aux directions des polariseurs):

$$\begin{pmatrix} s^2 & -sc \\ -sc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = cs \begin{pmatrix} s(e^{i\delta} - 1) \\ c(1 - e^{i\delta}) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} e^{i\delta} - 1 \\ 1 - e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

L'intensité du faisceau après le passage par la structure:

$$I = \frac{1}{8} \left((e^{i\delta} - 1)(e^{-i\delta} - 1) + (1 - e^{i\delta})(1 - e^{-i\delta}) \right) = \frac{1}{2} (1 - \cos \delta). \quad (5.20)$$

Le déphasage δ peut être composé de deux parties: partie fixe (par exemple $\delta_0 = \pi/2$, lame quart d'onde) et partie variable de faible amplitude ($\delta_1 = \Gamma \sin \omega_m t$, $\Gamma \ll 1$):

$$I = \frac{1}{2} (1 - \cos(\delta_0 + \delta_1)) = \frac{1}{2} (1 + \sin(\Gamma \sin \omega_m t)) \approx \frac{1}{2} (1 + \Gamma \sin \omega_m t) \quad (5.21)$$

Cette dernière équation décrit le principe de la modulation de l'amplitude d'un signal optique. La modulation du déphasage δ_1 sera réalisée par l'effet électro-optique (voir chapitre suivant de ce manuscrit).

Activité optique

Il existe des milieux optiques qui causent une rotation du plan de la polarisation de la lumière polarisée rectilignement. Ce phénomène s'appelle activité optique. L'angle de rotation de la polarisation est proportionnel à la longueur du chemin de la lumière dans le milieu. On définit un pouvoir rotatoire ρ comme l'angle de rotation par unité de longueur. Le sens de la rotation est relié à la direction de propagation: si une onde lumineuse traverse un échantillon dans les deux sens (en plaçant un miroir derrière une sortie de l'échantillon) la rotation totale est nulle.

On trouve des substances dextrogyres (tournent la polarisation dans le sens d'une

montre lorsque l'observateur se place en face du faisceau) et lévogyres (tournent la polarisation contre le sens d'une montre). L'activité optique a été observée pour la première fois dans le quartz ($\rho = 26$ degré/mm pour $\lambda = 550$ nm). Les cristaux de quartz peuvent avoir aussi bien la forme dextrogyre que lévogyre.

Sans aborder une discussion détaillée sur les origines de l'activité optique on peut constater qu'elle est liée à la double réfraction circulaire: c'est-à-dire les modes propres du milieu sont des modes à polarisation circulaire droite et gauche. Les indices de réfraction associés à ces modes n_D et n_L sont différents, donc les vitesses de propagation des deux polarisations circulaires sont différentes. Les deux modes propres s'écrivent:

$$\mathbf{D} e^{i(\omega t - k_0 z n_D)} \quad \mathbf{L} e^{i(\omega t - k_0 z n_L)},$$

où \mathbf{D} et \mathbf{L} sont les vecteurs de Jones (3.12) pour la polarisation circulaire et k_0 est le vecteur d'onde des modes dans le vide. Lorsque un faisceau de l'amplitude A et avec une polarisation rectiligne suivant x entre dans un milieu à $z=0$ il peut être représenté comme une combinaison linéaire de ces deux ondes propres:

$$\frac{A}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} (\mathbf{D} + \mathbf{L}).$$

A la distance z du bord de l'échantillon la combinaison linéaire s'écrit:

$$\frac{A}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} (\mathbf{D} e^{-ik_0 z n_D} + \mathbf{L} e^{-ik_0 z n_L}). \quad (5.22)$$

Suivant les expressions (3.10) et (3.12) \mathbf{D} et \mathbf{L} s'écrivent:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \quad \mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{x} - i\mathbf{y}).$$

On peut alors réécrire l'expression (5.22) et on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{2} e^{i\omega t} ((\mathbf{x} + i\mathbf{y}) e^{-ik_0 z n_D} + (\mathbf{x} - i\mathbf{y}) e^{-ik_0 z n_L}) = \\ & = \frac{A}{2} e^{i\omega t} e^{-ik_0 z (n_D + n_L)/2} \left(\mathbf{x} \left(e^{-ik_0 z (n_D - n_L)/2} + e^{ik_0 z (n_D - n_L)/2} \right) + i\mathbf{y} \left(e^{-ik_0 z (n_D - n_L)/2} - e^{ik_0 z (n_D - n_L)/2} \right) \right) = \\ & = A e^{i\omega t - ik_0 z (n_D + n_L)/2} \left(\mathbf{x} \cos k_0 z (n_D - n_L)/2 + \mathbf{y} \sin k_0 z (n_D - n_L)/2 \right) = \\ & = A e^{i\omega t - ik_0 z (n_D + n_L)/2} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation pour une onde polarisée linéairement suivant la direction qui forme l'angle

$$\beta = k_0 z \frac{n_D - n_L}{2} = \pi \frac{z}{\lambda} (n_D - n_L) \quad (5.23)$$

avec l'axe x [voir expression (3.11)]. Il s'agit bien de l'effet que l'on s'est proposé de décrire: le milieu optiquement actif tourne la polarisation d'une onde polarisée linéairement et l'angle de cette rotation est proportionnel à l'épaisseur du matériau. On a démontré que ce phénomène est lié à la réfraction double circulaire. La matrice de Jones associée à un milieu optiquement actif s'écrit alors:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Par exemple le pouvoir rotatoire du quartz pour $\lambda = 546 \text{ nm}$ est de $260^\circ/\text{cm}$; cette valeur conduit à:

$$|n_D - n_L| = 8 \times 10^{-5}.$$

Il est alors évident que la double réfraction circulaire est un effet faible par rapport à la double réfraction linéaire qui est d'habitude de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-1} (par exemple $n_e - n_o = +0.009$ à 546 nm pour le quartz).

6. Réponse non-locale

Causalité, relations Kramers-Kronig

Nous avons vu dans le chapitre 1 de ce manuscrit que l'induction et le champ électrique sont reliés avec un paramètre matériel ϵ (permittivité diélectrique) qui dépend en général de la fréquence. Nous avons donc écrit pour les composantes spectrales:

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad (6.1)$$

On a une relation analogue pour la polarisation \mathbf{P} et la susceptibilité χ :

$$\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega)\mathbf{E}(\omega) \quad (6.2)$$

Nous allons étudier maintenant les relations que l'on obtient dans l'espace du temps où le champ total et la superposition de toutes les composantes spectrales. Prenons par exemple le cas de \mathbf{D} et \mathbf{E} (la relation entre \mathbf{P} et \mathbf{E} peut être traitée de façon analogue):

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Introduisons la fonction de réponse $\tilde{\varepsilon}(t)$ comme la transformé de Fourier de $\varepsilon(\omega)$ [voir définition (C.3)]:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.3a)$$

$$\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.3b)$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(t') e^{-i\omega(t'-t)} dt' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{\varepsilon}(t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega(t'-t)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{\varepsilon}(t') \mathbf{E}(t-t') \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dans l'espace de temps on obtient alors la convolution du champ avec la fonction de réponse:

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \tilde{\varepsilon} * \mathbf{E} \quad \mathbf{P}(t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \tilde{\chi} * \mathbf{E}.$$

Dans le cas d'un milieu sans dispersion: $\varepsilon(\omega)$, $\chi(\omega) = C^{TE}$, les fonctions de réponse ont la forme d'une fonction Dirac:

$$\mathbf{D}(t_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t') \mathbf{E}(t_0 - t') dt' = \varepsilon \mathbf{E}(t_0), \quad \mathbf{P}(t_0) = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}(t_0).$$

La valeur instantanée de $\mathbf{D}(t_0)$ [ou de $\mathbf{P}(t_0)$] ne dépendent que de la valeur de $\mathbf{E}(t_0)$ au même moment t_0 .

Par contre dans le cas d'un matériau dispersif $\mathbf{D}(t_0)$ dépendra en principe de $\mathbf{E}(t \leq t_0)$, c.-à-d. de toutes les valeurs du champ antérieures à l'instant t_0 . Regardons de près la relation (6.4). Elle exprime en fait, que $\mathbf{D}(t_0)$ dépend non seulement des valeurs antérieures de $\mathbf{E}(t \leq t_0)$ mais aussi des valeurs postérieures $\mathbf{E}(t > t_0)$, ce qui serait en contradiction avec le principe de la causalité: l'induction électrique \mathbf{D} et la polarisation \mathbf{P} expriment la réaction de la matière à un champ électrique appliqué et ne peuvent pas dépendre des valeurs futures du champ. Pour tenir compte de la causalité il conviendrait d'écrire au lieu de (6.4):

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dt' \xi(t') \mathbf{E}(t-t'), \quad \mathbf{P}(t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_0^{\infty} dt' \chi(t') \mathbf{E}(t-t'). \quad (6.5)$$

Les relations (6.4) et (6.5) sont équivalentes lorsque $\xi(t < 0) = 0$. La causalité est alors assurée par les fonctions de réponse qui s'annulent pour les temps négatifs. Étudions maintenant quelle est la conséquence de la causalité dans l'espace de fréquences, c.-à-d. quelles conditions ou restrictions supplémentaires la causalité impose-t-elle sur $\varepsilon(\omega)$ et $\chi(\omega)$? On pose:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty}$$

où ε_{∞} représente la réponse instantanée du milieu:

$$\xi(t) = \xi_1(t) + 2\pi\varepsilon_{\infty} \delta(0),$$

avec

$$\xi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon(\omega) - \varepsilon_{\infty}) e^{i\omega t} d\omega.$$

La condition de la causalité [$\xi(t < 0) = \xi_1(t < 0) = 0$] impose:

$$\xi_1(t) = \xi_1(t) \text{sign}(t)$$

et donc

$$\xi(t) = \xi_1(t) \text{sign}(t) + 2\pi\varepsilon_{\infty} \delta(0). \quad (6.6)$$

La transformée de Fourier de la fonction sign est égale à (voir Annexe C):

$$FT(\text{sign } t) = -\frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{\omega}, \quad (6.7)$$

où vp désigne la valeur principale. L'expression (6.6) donne ensuite dans l'espace de Fourier:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega_0) &= (\varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty) * \left(-\frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{\omega} \right) + \varepsilon_\infty = -\frac{i}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty}{\omega_0 - \omega} d\omega + \varepsilon_\infty = \\ &= \varepsilon_\infty - \frac{i}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega)}{\omega_0 - \omega} d\omega\end{aligned}$$

D'où les relations dites Kramers-Kronig pour les parties réelle et imaginaire de la permittivité:

$$\begin{aligned}\varepsilon'(\omega_0) &= \varepsilon_\infty - \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega) d\omega}{\omega_0 - \omega} \\ \varepsilon''(\omega_0) &= \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega) d\omega}{\omega_0 - \omega}\end{aligned}\tag{6.8}$$

Comme la matière devient transparente à des fréquences très élevées, $\varepsilon_\infty = \varepsilon_0$.

La conséquence de la causalité diélectrique est donc une liaison entre la partie réelle et la partie imaginaire de la permittivité (ou de la susceptibilité) diélectrique. Une relation identique entre la partie réelle et imaginaire peut être établie pour n'importe quel paramètre matériel qui relie deux quantités avec une liaison causale: $N = \sqrt{\varepsilon_r}$.

$$\begin{aligned}n(\omega_0) &= 1 - \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa(\omega) d\omega}{\omega_0 - \omega} \\ \kappa(\omega_0) &= \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(\omega) d\omega}{\omega_0 - \omega}\end{aligned}\tag{6.9}$$

La dispersion et l'absorption ne sont donc pas indépendantes (il n'y a pas de dispersion sans absorption et vice versa): si, par exemple, $n(\omega)$ diffère de 1 dans une gamme de fréquence, il y a nécessairement une bande d'absorption quelque part dans le spectre (c.-à-d. $\kappa(\omega) \neq 0$). La relation entre l'absorption et la dispersion est intégrale: on peut calculer le spectre d'absorption si tout le spectre de la dispersion est connu et on peut calculer la dispersion si toute l'absorption est connue. En pratique, grâce au dénominateur des formules (6.8) ou (6.9), il est souvent suffisant de connaître soit la partie réelle soit la partie imaginaire dans une région limitée mais pas très étroite autour de ω_0 pour déterminer la partie complémentaire.

Dispersion spatiale, activité optique

Dans le paragraphe précédent nous avons discuté la réponse non-locale dans le temps. On peut aussi bien imaginer une réponse non-locale dans l'espace, c'est-à-dire que le champ électrique en un point donné peut produire une polarisation (ou induction diélectrique) dans le voisinage proche. On écrit alors dans le cas général:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (6.10a)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^3} \iiint \boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (6.10b)$$

où les fonctions de réponse $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}')$ et $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}')$ ont caractère d'une fonction de Dirac dans l'approximation de la réponse locale. De façon analogue au paragraphe précédent on obtient les relations dans l'espace réciproque (l'espace des vecteurs d'onde). Les relations constitutives générales s'écrivent alors:

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}), \quad (6.11a)$$

$$\mathbf{P}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}). \quad (6.11b)$$

La constante diélectrique et la susceptibilité dépendent donc non seulement de la fréquence (dispersion habituelle) mais aussi de la direction de propagation via \mathbf{k} (dispersion spatiale). La dispersion spatiale reste cependant un effet très faible dont on ne doit tenir compte que pour expliquer des phénomènes assez spéciaux.

Un des effets qui peut être attribué à la dispersion spatiale est l'activité optique. On a vu dans le chapitre 5 que l'activité optique, appelée aussi biréfringence circulaire, constitue un effet faible en comparaison avec la biréfringence ordinaire.

On considère alors que la constante diélectrique dépend du vecteur d'onde: on prends en compte un développement limité à l'ordre le plus bas. Pour un matériau qui ne possède pas de centre de symétrie on obtient donc une relation linéaire:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_0 \sum_{l=1}^3 \gamma_{ijl} k_l, \quad (6.12)$$

où γ_{ijl} est un tenseur du rang 3. On utilise les propriétés de symétrie de la permittivité:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ji}^* \quad (\text{voir Annexe B}), \quad (6.13a)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^*(-\mathbf{k}) \text{ (voir Annexe C),} \quad (6.13b)$$

pour démontrer les relations suivantes:

$$\gamma_{ijl} = i\delta_{ijl}, \text{ (où } \delta \text{ est un tenseur purement réel)} \quad (6.14a)$$

$$\gamma_{iil} = 0, \quad (6.14b)$$

$$\delta_{ijl} = -\delta_{jil}. \quad (6.14c)$$

Nous pouvons définir un tenseur g_{ij} antisymétrique:¹⁰

$$g_{ij} = \delta_{ijl} k_l \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} \\ -g_{12} & 0 & g_{23} \\ -g_{13} & -g_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

On obtient alors:

$$D_i = \varepsilon_{ij}^0 E_j + i\varepsilon_0 g_{ij} E_j. \quad (6.16)$$

Dans le système d'axes optiques principaux introduits dans le chapitre 5 la permittivité ε_{ij}^0 est diagonale; la permittivité totale qui tient compte de l'effet de la dispersion spatiale s'écrit ensuite:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 & i\varepsilon_0 g_{12} & i\varepsilon_0 g_{13} \\ -i\varepsilon_0 g_{12} & \varepsilon_{yy}^0 & i\varepsilon_0 g_{23} \\ -i\varepsilon_0 g_{13} & -i\varepsilon_0 g_{23} & \varepsilon_{zz}^0 \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Le formalisme du chapitre 5 peut être alors gardé sans aucune modification: pour trouver les modes propres on doit résoudre l'équation (5.3)

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon \cdot \mathbf{E} = 0,$$

¹⁰ On introduit parfois le vecteur de giration \mathbf{G} défini:

$$\mathbf{G} = (g_{23} \quad -g_{13} \quad g_{12});$$

ensuite, l'expression pour l'induction électrique compte tenu de la dispersion spatiale s'écrit:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i\varepsilon_0 \mathbf{G} \wedge \mathbf{E}. \quad (6.16bis)$$

où ε est remplacé par la matrice (6.17).

A titre d'exemple on étudiera le cas du quartz qui est un matériau biréfringent uniaxe, et qui, de plus, possède 2 composantes indépendantes non-nulles du tenseur δ :

$$\delta_{123} = -\delta_{213}; \delta_{231} = \delta_{312} = -\delta_{321} = -\delta_{132}.$$

A. Propagation // z (axe optique):

$$g_{12} = \delta_{123}k, g_{13} = 0, g_{23} = 0.$$

On pose $\Delta_3 = g_{12} c^2 / \omega^2$; l'équation d'onde (5.4) devient ensuite:

$$\begin{pmatrix} n_o^2 - n^2 & i\Delta_3 & 0 \\ -i\Delta_3 & n_o^2 - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (6.18)$$

Valeurs propres (indices de réfraction des modes propres):

$$\begin{aligned} (n_o^2 - n^2)^2 - \Delta_3^2 &= 0 \\ n^2 - n_o^2 &= \pm \Delta_3 \\ n_{I,II} &\approx n_o \pm \frac{\Delta_3}{2n_o} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Vecteurs propres (polarisation des modes propres):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Pour la propagation suivant l'axe optique on trouve deux modes propres dont la polarisation est circulaire et dont les indices de réfraction diffèrent très légèrement de la valeur non-perturbée par la dispersion spatiale. (Comparer avec les conclusions du paragraphe Activité optique).

B. Propagation // x (perpendiculaire à l'axe optique):

La biréfringence est non nulle pour cette direction de propagation et devrait ainsi constituer un effet plus important que l'activité optique.

$$g_{23} = \delta_{231}k, g_{13} = 0, g_{12} = 0.$$

On pose $\Delta_1 = g_{23} c^2 / \omega^2$; l'équation d'onde (5.4) devient ensuite:

$$\begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 - n^2 & i\Delta_1 \\ 0 & -i\Delta_1 & n_e^2 - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (6.21)$$

On calcule les valeurs propres:

$$\begin{aligned} (n_e^2 - n^2)(n_o^2 - n^2) &= \Delta_1^2 \\ n^2 &= \frac{(n_o^2 + n_e^2) \pm \sqrt{(n_o^2 - n_e^2)^2 + 4\Delta_1^2}}{2} \end{aligned}$$

Nous avons déjà signalé à la fin du chapitre 5 que l'activité optique est un effet bien plus faible que la biréfringence. On peut donc supposer que $|n_o^2 - n_e^2| \gg \Delta_1$:

$$\begin{aligned} n_I^2 &\approx n_o^2 + \frac{\Delta_1^2}{n_o^2 - n_e^2}, & n_I &\approx n_o + \frac{\Delta_1}{2n_o} \frac{\Delta_1}{n_o^2 - n_e^2} \\ n_{II}^2 &\approx n_e^2 - \frac{\Delta_1^2}{n_o^2 - n_e^2}, & n_{II} &\approx n_e - \frac{\Delta_1}{2n_e} \frac{\Delta_1}{n_o^2 - n_e^2} \end{aligned} \quad (6.22)$$

ce qui est une correction du second ordre. Les vecteurs propres s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i\Delta_1 \\ \frac{1}{n_o^2 - n_e^2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\Delta_1}{n_o^2 - n_e^2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

La polarisation des modes propres est légèrement elliptique, mais presque linéaire. Les deux ellipses qui caractérisent l'état de polarisation ont la même forme, leurs grands axes sont mutuellement perpendiculaires et coïncident avec les directions de polarisation des modes propres non perturbés par l'activité optique. Le sens de rotation de la polarisation est opposé pour les deux ellipses.

7. Milieux non-linéaires

La théorie de l'optique linéaire exposée dans le cadre de ce cours jusqu'à maintenant suppose que le rayonnement qui se propage à travers la matière est décrit par une équation d'onde linéaire. La conséquence directe de cette hypothèse est le principe de superposition: des ondes harmoniques, quelle que soit leur intensité, sont indépendantes et peuvent être additionnées (c.-à-d. elles interfèrent): leurs combinaisons linéaires vérifient l'équation d'onde.

Or, nous savons que, si l'intensité de la lumière devient très grande, la théorie linéaire du champ électromagnétique ne peut plus décrire les phénomènes observés (transformations de la longueur d'onde du rayonnement, les effets électro-optique et magnéto-optique, etc.). Avec la venue des lasers — sources de la lumière très intense et cohérente — on a prouvé expérimentalement que les propriétés optiques des milieux, telles que l'indice de réfraction, dépendent de la magnitude des champs et que le principe de superposition n'est plus valable: les ondes électromagnétiques indépendantes dans l'approximation linéaire interagissent l'une avec l'autre par intermédiaire de l'interaction non-linéaire avec la matière.

Dans n'importe quel système atomique réel la polarisation induite \mathbf{P} du milieu n'est pas exactement proportionnelle au champ électrique, comme nous l'avons supposé jusqu'à maintenant, mais peut être exprimée par une série de Taylor:

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \quad (7.1)$$

Dans cette équation la convention de la sommation sur les indices répétés est appliquée. Nous admettons que le milieu étudié peut être anisotrope et, par conséquent, les coefficients de la série sont des tenseurs. Le premier terme décrit la réponse linéaire du milieu [à comparer avec

l'équation (5.1)]. Le second terme est caractérisé par un tenseur (du rang 3) de la susceptibilité diélectrique du second ordre. Il décrit l'interaction non-linéaire à l'ordre le plus bas et donne lieu à des phénomènes tels que la génération de la seconde harmonique, effet électro-optique linéaire (effet Pockels), etc. Il est évident à partir de la relation (7.1) que $\chi_{ijk}^{(2)}$ est invariant au changement de l'ordre des indices j et k ($\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_{ikj}^{(2)}$). Le troisième terme est caractérisé par un tenseur du rang 4 (susceptibilité diélectrique du troisième ordre). Il est à l'origine des phénomènes non-linéaires d'ordre plus élevé (par exemple l'effet électro-optique quadratique connu sous le nom de l'effet Kerr) qui se manifestent notamment lorsque le tenseur $\chi_{ijk}^{(2)}$ est nul à cause de la symétrie du milieu (par exemple dans les milieux isotropes).

L'équation (7.1) peut être comprise comme une définition d'un tenseur de la permittivité diélectrique dépendant des valeurs des champs:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (1 + \chi_{ij}) + \chi_{ijk}^{(2)} E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_k E_l + \dots, \quad (7.2)$$

Ensuite la relation constitutive (1.4) préserve sa forme:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j = \varepsilon_0 E_i + P_i \quad (7.3)$$

Comme, dans le cas sans absorption, le tenseur de la permittivité diélectrique est symétrique, le tenseur de la susceptibilité diélectrique du second ordre doit également être symétrique en indices i et j : $\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_{jik}^{(2)}$. Il s'en suit que $\chi_{ijk}^{(2)}$ est invariant à une permutation quelconque des indices i, j, k .

Nous allons maintenant examiner l'effet des différents termes non-linéaires.

Effet électro-optique linéaire (de Pockels)

Cet effet permet d'induire ou de modifier la biréfringence d'un milieu à l'aide d'un champ externe très fort appliqué à l'échantillon. C'est un phénomène non-linéaire du premier ordre: le développement limité de la polarisation qui permet de le décrire s'écrit:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} (E_j E_k^S + E_k E_j^S), \quad (7.4)$$

où E est le champ électrique du rayonnement électromagnétique et E^S est un champ électrique externe appliqué au matériau; il s'agit le plus souvent d'un champ statique ou d'un champ

alternatif de fréquence nettement inférieure à la fréquence optique. Le tenseur de la permittivité diélectrique s'écrit alors:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left(1 + \chi_{ij} \right) + 2\chi_{ijk}^{(2)} E_k^S = \varepsilon_{ij}^L + 2\chi_{ijk}^{(2)} E_k^S, \quad (7.5)$$

E_k^S est le champ électrique externe; ε_{ij}^L est la partie linéaire de la permittivité (indépendante du champ appliqué): ce paramètre détermine le comportement du matériau s'il n'est pas soumis au champ externe. On peut alors établir l'équation d'onde similaire à celle donnée par l'équation (2.12):

$$\nabla^2 E_i - \mu_0 \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = \nabla^2 E_i - \mu_0 \left(\varepsilon_{ij}^L - 2\chi_{ijk}^{(2)} E_k^S \right) \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = 0.$$

On voit alors que les modes propres de cette équation sont toujours des ondes harmoniques planes qui possèdent toutes les caractéristiques démontrées précédemment dans le cadre de ce cours; la seule différence par rapport au milieu linéaire est que la permittivité diélectrique se trouve renormalisée. En particulier, un milieu non-biréfringent (par exemple un cristal cubique non-centrosymétrique) peut devenir biréfringent lorsqu'un champ électrique externe est appliqué: on parle alors d'une biréfringence induite par le champ.

A. Déformation de l'ellipsoïde des indices.

Géométriquement l'effet Pockels correspond à une déformation de l'ellipsoïde des indices (5.16). L'introduction de la déformation de l'ellipsoïde des indices est en effet la méthode traditionnellement utilisée pour décrire l'effet Pockels. L'indicatrice optique non-perturbée par le champ électrique externe s'écrit dans le système d'axes principaux:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$

où $1/n_x^2 = K_{11}$, $1/n_y^2 = K_{22}$, $1/n_z^2 = K_{33}$ [le tenseur K_{ij} a été introduit par l'expression (5.15) comme le tenseur inverse à la permittivité diélectrique relative]. De même que la permittivité, le tenseur K_{ij} est aussi modifié par le champ électrique externe:

$$K'_{ij} = K_{ij} + r_{ijk} E_k^S, \quad (7.6)$$

où E^S est le champ électrique appliqué et r_{ijk} est le tenseur de Pockels. L'ellipsoïde des indices sous champ s'écrit ensuite:

$$K'_{11}x^2 + K'_{22}y^2 + K'_{33}z^2 + 2K'_{12}xy + 2K'_{13}xz + 2K'_{23}yz = 1. \quad (7.7)$$

Dans le cas général, la longueur des axes principaux de l'ellipsoïde est modifiée aussi bien que l'orientation de l'ellipsoïde dans l'espace. Cela signifie que les valeurs principales des indices de réfraction sont renormalisées et que la direction des axes optiques a changée.

On peut montrer à partir des relations (7.5) et (7.6) que les coefficients électro-optiques de Pockels et la susceptibilité du second ordre sont reliés dans le système d'axes principaux par la formule:

$$\chi_{ijk}^{(2)} = -\frac{\epsilon_{ii}\epsilon_{jj}}{2\epsilon_0} r_{ijk},$$

où aucune sommation n'est tenue.

B. Symétrie du tenseur de Pockels.

La symétrie du tenseur de Pockels est très importante afin d'évaluer l'effet électro-optique dans des cristaux de symétries variées. On peut mener la discussion sur la même base que celle concernant tenseur de la permittivité dans l'annexe B. On parle (i) de la symétrie intrinsèque liée à la symétrie intrinsèque du tenseur ϵ_{ij} et (ii) de la symétrie extrinsèque liée aux opérations de symétrie du cristal.

(i) Le tenseur diélectrique est hermitien: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$; comme les coefficients du tenseur de Pockels sont réels, il s'en suit que ce tenseur est symétrique en deux premiers indices:

$$r_{ijk} = r_{jik}.$$

Afin d'abrégier la notation il convient d'introduire la contraction d'indices suivant la règle suivante:

indices (ij)	11	22	33	23 ou 32	13 ou 31	12 ou 21
contraction (l)	1	2	3	4	5	6

On introduit alors la matrice r_{lk} 6×3 , où $l = 1 \dots 6$ est l'indice contracté et $k = 1 \dots 3$:

$$r_{1k} = r_{11k}, \quad r_{2k} = r_{22k}, \quad r_{3k} = r_{33k}, \quad r_{4k} = r_{23k} = r_{32k}, \quad r_{5k} = r_{13k} = r_{31k}, \quad r_{6k} = r_{12k} = r_{21k}.$$

$$r_{lk} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix}$$

Cependant, il faut toujours garder à l'esprit que la matrice r_{lk} 6×3 permet de simplifier la notation mais qu'elle ne se possède pas les propriétés de transformation d'un tenseur: pour effectuer les transformations il est absolument nécessaire de revenir au tenseur r_{ijk} du rang 3.

- (ii) La symétrie du milieu étudié permet de réduire encore plus le nombre de composantes indépendantes du tenseur électro-optique: le procédé du calcul est tout à fait similaire à celui présenté dans l'annexe B pour le cas du tenseur de la permittivité diélectrique [l'expression (10B) est à appliquer]. Par exemple pour un milieu cubique non-centrosymétrique (exemples: beaucoup de semi-conducteurs III-V et II-VI, comme GaAs, InP, GaP, CdTe, ZnSe etc.) on n'obtient qu'une seule composante indépendante:

$$r_{63} = r_{52} = r_{41},$$

toutes les autres composantes sont nulles. La matrice r_{lk} aura alors la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix}.$$

C. Exemple d'application

Suivant l'équation (7.7) l'ellipsoïde des indices en présence d'un champ électrique $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ s'écrit pour un cristal cubique non-centrosymétrique:

$$\frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{n^2} + 2r_{41}E_x yz + 2r_{41}E_y xz + 2r_{41}E_z xy = 1. \quad (7.8)$$

Supposons maintenant qu'on applique un champ électrique E suivant l'axe c cristallographique d'un tel échantillon. L'équation (7.8) s'écrira:

$$\frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{n^2} + 2r_{41}E xy = 1 \quad (7.9)$$

L'expression (7.9) se diagonalise après une rotation de 45° dans le plan xy :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \xi) & \eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi) & \xi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \end{aligned} ;$$

on trouve:

$$\frac{\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2}{2n^2} + \frac{\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2}{2n^2} + \frac{z^2}{n^2} + 2r_{41}E(\eta^2 - \xi^2) = 1$$

et après avoir simplifié:

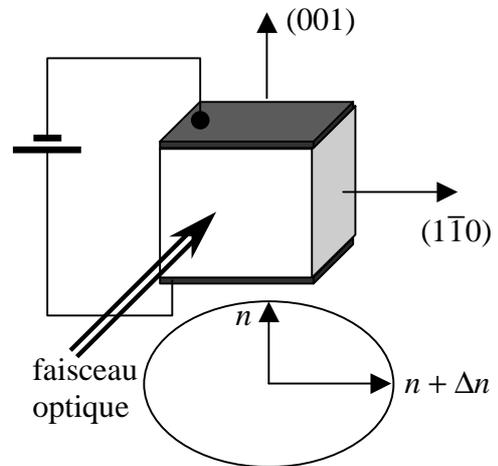
$$\frac{\xi^2(1 - n^2 r_{41}E)}{n^2} + \frac{\eta^2(1 + n^2 r_{41}E)}{n^2} + \frac{z^2}{n^2} = 1.$$

Les indices principaux du nouvel ellipsoïde prennent la forme:

$$\begin{aligned} n_\xi &= \frac{n}{\sqrt{1 - n^2 r_{41}E}} \approx n + \frac{1}{2}n^3 r_{41}E \\ n_\eta &= \frac{n}{\sqrt{1 + n^2 r_{41}E}} \approx n - \frac{1}{2}n^3 r_{41}E, \\ n_z &= n \end{aligned}$$

c.-à-d. qu'en présence du champ électrique suivant c le milieu cubique est devenu biréfringent biaxe.

On s'intéresse à l'échantillon en forme d'un cube taillé comme sur la figure ci-contre: deux faces sont perpendiculaires à l'axe c cristallographique (il s'agit des faces où on dépose les électrodes pour appliquer la tension électrique afin de créer un champ homogène $E//c$), deux faces sont perpendiculaires à la direction η : (110)



(faces d'entrée et de sortie d'un faisceau optique) et deux faces sont perpendiculaires à la direction ξ : $(1\bar{1}0)$.

On reprend l'expérience décrite sur la page 87 qui mène aux expressions (5.20) et (5.21). On a une montage composé de 4 éléments: un polariseur qui laisse passer la lumière polarisée à 45° ($\varphi = 45^\circ$), une lame quart d'onde à $\varphi = 0^\circ$, un cristal électro-optique similaire à celui de la figure ci-dessus et un second polariseur (analyseur) croisé avec le premier ($\varphi = 135^\circ$). L'intensité qu'on mesure à la sortie du montage est ensuite donnée par la formule (5.21):

$$I = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi/2 + \delta_1)) = \frac{1}{2} (1 + \sin \delta_1) \approx \frac{1 + \delta_1}{2},$$

où δ_1 est le déphasage introduit par le cristal électro-optique:

$$\delta_1 = \frac{\pi}{\lambda} n^3 r_{41} L \frac{U}{d};$$

U est la tension appliquée sur le cristal électro-optique, d est son épaisseur ($E = U/d$), L est la longueur du cristal dans la direction de propagation du faisceau et λ est la longueur d'onde du rayonnement. On voit que la modulation de l'intensité du faisceau transmis est pilotée par la tension appliquée: les variations de l'intensité à la sortie suivent les variations de la tension à l'entrée.

Effets optiques du second ordre: mélanges à trois ondes

A. Mélange à trois ondes

Dans le paragraphe précédent nous nous sommes intéressés à un couplage entre le champ statique (ou quasi-statique) et une onde optique. Maintenant nous nous intéresserons à un couplage entre deux champs appartenant à deux ondes optiques:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\omega_1}(t) &= \text{Re}\{\mathbf{E}^{\omega_1} e^{i\omega_1 t}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + (\mathbf{E}^{\omega_1})^* e^{-i\omega_1 t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + c.c.) \\
\mathbf{E}^{\omega_2}(t) &= \text{Re}\{\mathbf{E}^{\omega_2} e^{i\omega_2 t}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{\omega_2} e^{i\omega_2 t} + (\mathbf{E}^{\omega_2})^* e^{-i\omega_2 t}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{\omega_2} e^{i\omega_2 t} + c.c.)
\end{aligned} \tag{7.10}$$

avec le champ électrique totale:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\omega_1}(t) + \mathbf{E}^{\omega_2}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^{\omega_1} e^{i\omega_1 t} + \mathbf{E}^{\omega_2} e^{i\omega_2 t} + c.c.). \tag{7.11}$$

Les deux ondes, indépendantes dans le cadre de l'approximation linéaire, sont couplées par le terme non-linéaire de l'expression pour la polarisation. Quand nous avons introduit la symbolique complexe dans le premier chapitre de ce cours, nous avons souligné le fait qu'elle est applicable pour les opérations linéaires en champs (combinaisons linéaires etc.). Or, dans notre cas, c'est le produit des deux ondes optiques qui intervient dans l'expression pour la polarisation. Afin de pouvoir bénéficier des avantages de la notation complexe on représente la partie réelle du champ comme la somme d'un champ complexe et de son complexe conjugué (*c.c.*).

La partie linéaire de la polarisation \mathbf{P}_L comportera alors des composantes à des fréquences ω_1 et ω_2 :

$$\mathbf{P}_L = \varepsilon_0(\chi(\omega_1) \mathbf{E}^{\omega_1}(t) + \chi(\omega_2) \mathbf{E}^{\omega_2}(t)). \tag{7.12}$$

La partie non-linéaire de la polarisation \mathbf{P}_{NL} présentera des oscillations à des fréquences $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ et $\omega_1 - \omega_2$ et une composante statique:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{NL} = \chi^{(2)} \mathbf{E} \mathbf{E} &= \frac{1}{4} \chi^{(2)} (\mathbf{E}^{\omega_1} \mathbf{E}^{\omega_1} e^{2i\omega_1 t} + \mathbf{E}^{\omega_2} \mathbf{E}^{\omega_2} e^{2i\omega_2 t} + \\
&+ 2\mathbf{E}^{\omega_1} \mathbf{E}^{\omega_2} e^{i(\omega_1+\omega_2)t} + 2\mathbf{E}^{\omega_1} (\mathbf{E}^{\omega_2})^* e^{i(\omega_1-\omega_2)t} +, \\
&+ \mathbf{E}^{\omega_1} (\mathbf{E}^{\omega_1})^* + \mathbf{E}^{\omega_2} (\mathbf{E}^{\omega_2})^* + c.c.)
\end{aligned} \tag{7.13}$$

où nous n'avons pas pris en compte la dispersion de la susceptibilité non-linéaire du second ordre: si cette dispersion est importante, la contribution des différents termes de l'expression précédente est pondérée par les valeurs de $\chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$.

La polarisation \mathbf{P}_{NL} , lorsqu'elle est introduite dans les EM, constitue alors la source d'un rayonnement à des fréquences $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$ et $\omega_1 - \omega_2$: elle est à l'origine d'un transfert de l'énergie entre les composantes spectrales d'origine (ω_1 et ω_2) et ces composantes mixtes. On parle alors d'un mélange à 3 ondes dans le sens que 2 ondes de départ (ω_1 et ω_2) donnent naissance à une troisième onde (ω_3) dont la fréquence est une combinaison simple

des deux autres.

B. Génération de la seconde harmonique

Afin de simplifier les calculs, nous allons considérer uniquement l'effet connu sous le nom de la génération de la seconde harmonique: il provient du couplage entre les composantes spectrales ω_1 et $2\omega_1$ et par conséquent toutes les autres composantes spectrales, susceptibles d'intervenir dans l'expression pour la polarisation non-linéaire, seront omises. Cette situation peut être obtenue formellement en posant $\omega_2 = 2\omega_1$ dans les expressions (7.11) et (7.13). Les parties de la polarisation non-linéaire oscillant sur les fréquences ω_1 et $2\omega_1$ s'écrivent (on omet l'indice 1 pour simplifier l'écriture):

$$P_{i,NL}^\omega = \frac{1}{2} \chi_{ijk}^{(2)} \left(E_j^{2\omega} (E_k^\omega)^* e^{i\omega t} + c.c. \right), \quad (7.14a)$$

$$P_{i,NL}^{2\omega} = \frac{1}{4} \chi_{ijk}^{(2)} \left(E_j^\omega E_k^\omega e^{2i\omega t} + c.c. \right). \quad (7.14b)$$

On introduit ces 2 expressions dans les EM:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}) &= 0 \end{aligned}$$

Elles mènent à l'équation d'onde suivante:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (7.15)$$

où ϵ est le tenseur de la permittivité diélectrique linéaire provenant du terme \mathbf{P}_L . Ce tenseur peut être éventuellement complexe pour tenir compte de l'absorption, cependant, nous allons supposer par la suite que l'absorption est négligeable. Nous allons également supposer que les ondes se propagent suivant l'axe z et que leurs amplitudes ne dépendent pas de x et y . On a

$$\begin{aligned} E_j^\omega(z, t) &= \frac{1}{2} \left(E_j^\omega(z) e^{i(\omega t - k_1 z)} + c.c. \right) \\ E_j^{2\omega}(z, t) &= \frac{1}{2} \left(E_j^{2\omega}(z) e^{i(2\omega t - k_2 z)} + c.c. \right) \end{aligned}$$

où l'indice j se réfère aux axes cartésiennes et peut prendre les valeurs x et y . Notez que si \mathbf{P}_{NL}

s'annule, l'équation (7.15) devient identique à l'équation (2.12) avec comme solution les ondes planes indépendantes (éventuellement amorties si ε comportait des termes imaginaires).

Nous allons supposer que le couplage entre les modes est faible, donc le transfert d'énergie entre les composantes spectrales ω et 2ω est lent. Cela signifie que les amplitudes des champs varient peu en fonction de z :

$$\frac{dE_j^\omega}{dz} k_1 \gg \frac{d^2 E_j^\omega}{dz^2}, \quad \frac{dE_j^{2\omega}}{dz} k_2 \gg \frac{d^2 E_j^{2\omega}}{dz^2}.$$

L'équation (7.15) donne alors 2 équations couplées:

$$\left(\left(\omega^2 n_\omega^2 / c^2 - k_1^2 \right) \frac{E_j^\omega}{2} - ik_1 \frac{dE_j^\omega}{dz} \right) e^{i(\omega t - k_1 z)} + c.c. = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{j,NL}^\omega}{\partial t^2}$$

$$\left(\left((2\omega)^2 n_{2\omega}^2 / c^2 - k_2^2 \right) \frac{E_j^{2\omega}}{2} - ik_2 \frac{dE_j^{2\omega}}{dz} \right) e^{i(2\omega t - k_2 z)} + c.c. = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{j,NL}^{2\omega}}{\partial t^2},$$

où $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ est l'indice de réfraction qui, suite à la dispersion, peut être légèrement différent pour les deux composantes spectrales considérées. En rendant nulles les premiers termes des deux équations on définit les vecteurs d'onde pour les composantes ω et 2ω :

$$k_1 = \frac{\omega n_\omega}{c} \quad k_2 = \frac{2\omega n_{2\omega}}{c}.$$

Par conséquent:

$$ik_1 \frac{dE_j^\omega}{dz} e^{-ik_1 z} = \frac{1}{2} \omega^2 \mu_0 \chi_{jkl}^{(2)} E_k^{2\omega} (E_l^\omega)^* e^{-i(k_2 - k_1)z}$$

$$ik_2 \frac{dE_j^{2\omega}}{dz} e^{-ik_2 z} = \omega^2 \mu_0 \chi_{jkl}^{(2)} E_k^\omega E_l^\omega e^{-2ik_1 z}$$

ou encore

$$\frac{dE_j^\omega}{dz} = -\frac{i\omega\eta_0}{2n_\omega} \chi_{jkl}^{(2)} E_k^{2\omega} (E_l^\omega)^* e^{-i(k_2 - 2k_1)z}$$

$$\frac{dE_j^{2\omega}}{dz} = -\frac{i\omega\eta_0}{2n_{2\omega}} \chi_{jkl}^{(2)} E_k^\omega E_l^\omega e^{-i(2k_1 - k_2)z}$$
(7.16)

Ces deux équations couplées constituent un système complet pour décrire la génération de la

seconde harmonique. Au départ, pour $z = 0$, l'amplitude de la seconde harmonique (l'onde à 2ω) est supposée nulle et toute l'énergie est portée par l'onde fondamentale (ω). Le second membre de la deuxième équation (7.16) est à l'origine d'un accroissement de l'amplitude de la seconde harmonique, alors que le second membre de la première équation tient compte de l'atténuation de l'onde fondamentale due au transfert d'énergie vers la seconde harmonique. Dans une première approximation nous allons supposer que le couplage entre les deux ondes est suffisamment faible si bien que le décroissement de l'amplitude de E^ω est négligeable (approximation du champ constant):

$$\frac{dE_j^\omega}{dz} = 0.$$

La solution de la deuxième équation s'écrit ensuite:

$$E_j^{2\omega}(z) = B - A e^{i\Delta kz}$$

avec

$$\Delta k = k_2 - 2k_1,$$

$$A = \frac{\omega \eta_0 \chi_{jkl}^{(2)} E_k^\omega E_l^\omega}{2 n_{2\omega} \Delta k},$$

et la constante d'intégration B est déterminée à partir de la condition $E_j^{2\omega}(z = 0) = 0$. Pour un cristal non-linéaire de longueur L , on obtient:

$$E_j^{2\omega}(L) = \frac{\omega \eta_0}{2 n_{2\omega}} \frac{1 - e^{i\Delta kL}}{\Delta k} \chi_{jkl}^{(2)} E_k^\omega E_l^\omega.$$

Les composantes du champ de l'onde fondamentale E_k^ω et E_l^ω sont les polarisations propres pour la direction de propagation donnée dans le cristal. Afin de simplifier la sommation, supposons qu'il n'y a qu'une seule composante de polarisation: E^ω . L'intensité de la seconde harmonique s'écrit ensuite:

$$I_{2\omega} = \frac{n_{2\omega}}{2\eta_0} \left| E_j^{2\omega}(L) \right|^2 = \frac{\omega^2 \eta_0}{4 n_{2\omega}} \frac{1 - \cos(\Delta kL)}{\Delta k^2} \left(\chi_{eff}^{(2)} E^\omega E^\omega \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \eta_0^3 \frac{\omega^2 \left(\chi_{eff}^{(2)} \right)^2 L^2}{n_{2\omega} n_\omega^2} I_\omega^2 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} \Delta kL\right)}{\left(\frac{1}{2} \Delta kL\right)^2} \quad (7.17)$$

où $\chi_{eff}^{(2)}$ est le coefficient effectif de la susceptibilité qui rentre dans les expressions pour la polarisation courante.

C. Synchronisation de phase

En examinant l'équation (7.17) on s'aperçoit que la nature de la solution dépend essentiellement de la valeur du facteur $\Delta k = k_2 - 2k_1$. La condition

$$k_2 = 2k_1, \quad (7.18a)$$

ou en d'autres termes

$$n_{2\omega} = n_{\omega} \quad (7.18b)$$

s'appelle condition de synchronisation de phase. Effectivement, si l'onde fondamentale et sa seconde harmonique se propagent à la même vitesse, elles restent toujours en phase et la génération peut se produire de manière très efficace (toutes les contributions sont additionnées). Par contre, si les deux ondes se propagent à des vitesses différentes, elles se retrouvent tantôt en phase et tantôt en opposition de phase. Ceci donne lieu à une suite d'interférences constructives et destructives décrites par l'oscillation du terme en sinus carré dans l'expression (7.17). Deux maxima voisins de cette modulation spatiale sont séparés par la longueur de cohérence:

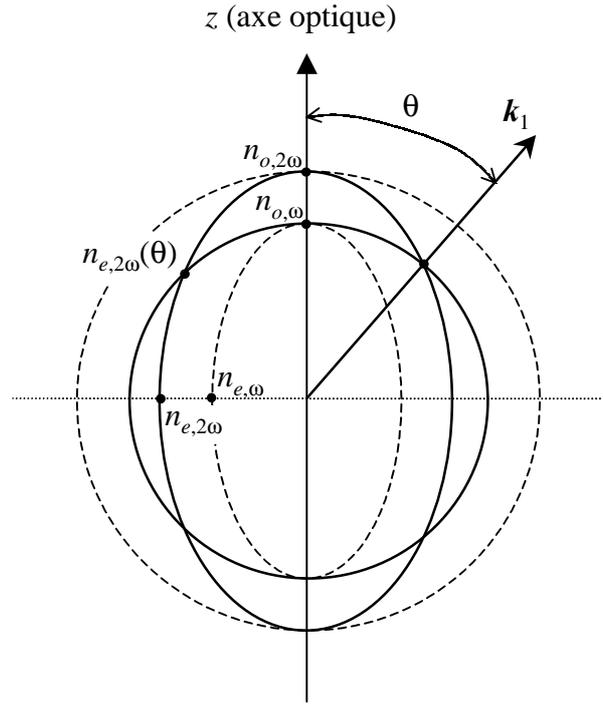
$$l_c = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{k_2 - 2k_1} = \frac{\lambda}{2(n_{2\omega} - n_{\omega})},$$

qui, pour des valeurs typiques de la dispersion ($n_{2\omega} - n_{\omega} \approx 10^{-2}$) est de l'ordre de 100 μm . La longueur de cohérence donne en fait la longueur maximale du cristal qui participe de façon efficace à la génération de la seconde harmonique. Si, par contre, on réussit à remplir la condition de synchronisation de phase, l'expression (7.17) s'écrit

$$I_{2\omega} = \frac{1}{2} \eta_0^3 \frac{\omega^2 (\chi_{eff}^{(2)})^2}{n_{2\omega} n_{\omega}^2} I_{\omega}^2 L^2 \quad (7.19)$$

et toute la longueur du cristal peut être utilisée pour la génération (notons que pour un cristal de 2 cm on obtiendrait un accroissement de l'intensité de l'ordre de 4×10^4 par rapport à l'exemple précédent). On remarque que la condition (7.18b) n'est pas en général vérifiée à cause de la dispersion des matériaux: dans la région de la dispersion normale on a $n_{2\omega} > n_{\omega}$.

Une méthode comment surmonter cette difficulté consiste à prendre l'avantage de la biréfringence des cristaux. Imaginons que l'onde fondamentale possède la polarisation ordinaire et que sa seconde harmonique possède la polarisation extraordinaire dans un cristal uniaxe négatif ($n_e < n_o$): leurs polarisations sont mutuellement perpendiculaires (à noter que ce choix dépend des coefficients $\chi_{ijk}^{(2)}$ disponibles non nuls: par exemple $\chi_{111}^{(2)}$ ne donne que des polarisations parallèles de ω et 2ω). On parle alors de l'interaction oo-e (deux ondes ordinaires à ω sont transformées en une onde extraordinaire à 2ω). Il existe en général une direction (formant l'angle θ avec l'axe optique) où



$$n_{e,2\omega}(\theta) = n_{o,\omega} \quad (7.20)$$

comme c'est indiqué sur la figure ci-contre [notons que pour un cristal uniaxe positif on chercherait la condition $n_{o,2\omega} = n_{e,\omega}(\theta)$]. La valeur de l'indice de réfraction $n_e(\theta)$ est donnée par la formule (5.13); l'équation (7.20) prend alors la forme:

$$\frac{\sin^2 \theta}{n_{e,2\omega}^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_{o,2\omega}^2} = \frac{1}{n_{o,\omega}^2} \quad (7.21)$$

qui a comme solution:

$$\sin^2 \theta = \frac{n_{o,\omega}^{-2} - n_{o,2\omega}^{-2}}{n_{e,2\omega}^{-2} - n_{o,2\omega}^{-2}}. \quad (7.22)$$

Pour préparer un cristal "doubleur de fréquence" il faut d'abord choisir un matériau convenable, c.-à-d. un matériau biréfringent qui possède au moins un coefficient $\chi_{ijk}^{(2)}$ grand et utilisable pour l'interaction oo-e. Ensuite, il faut le tailler pour que la normale aux faces d'entrée et de sortie fasse l'angle θ [donné par (7.22)] avec l'axe optique. Enfin, il faut l'orienter convenablement dans le plan latéral par rapport à la polarisation incidente de l'onde ω .

D. Mélanges de fréquences, génération paramétrique

Revenons au cas général d'une combinaison de fréquences décrite par l'expression pour la polarisation non-linéaire (7.13). Nous avons vu pour le cas particulier de la génération de la seconde harmonique que le transfert d'énergie entre les différentes composantes spectrales ne s'effectue de façon efficace que si la condition de synchronisation de phase est remplie. De façon générale, on peut démontrer que pour une interaction non-linéaire comportant 3 ondes électromagnétiques (ω_1 , ω_2 et $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$) la condition de synchronisation de phase s'écrit:

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (7.23)$$

où \mathbf{k}_i est le vecteur d'onde de la composante ω_i .

La non-linéarité du second ordre peut être également utilisée pour amplifier de faibles signaux: on parle alors de l'amplification paramétrique. Dans la configuration de base on dispose d'un signal faible (ω_1) qu'on souhaite amplifier et d'un faisceau très intense "de pompe" à la fréquence $\omega_3 > \omega_1$. Les deux ondes sont amenées dans un cristal non-linéaire: la composante ω_1 se trouve amplifiée à la sortie du cristal par l'effet similaire à celui qu'on vient de décrire; de plus, une composante spectrale $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ est également créée lors de cette interaction. Il est à souligner que l'effet ne peut se produire que lorsque la condition (7.23) est vérifiée.

On peut ainsi créer des combinaisons de fréquences dont on a besoin à l'aide de l'interaction non-linéaire du second ordre. Pour cela, il faut satisfaire deux conditions: (i) il faut disposer des faisceaux d'entrée suffisamment intenses; (ii) il faut prendre soin de choisir un bon matériau non-linéaire convenablement coupé et une géométrie expérimentale permettant de satisfaire la condition de synchronisation de phase (7.23).

Effets non-linéaires du troisième ordre

Nous allons passer rapidement en revue les effets non-linéaires les plus importants du troisième ordre. Ils sont liés à la partie non-linéaire de la polarisation qui s'écrit de manière suivante [cf. développement (7.1)]:

$$P_{i,NL} = \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l,$$

c.-à-d. la partie non-linéaire de la permittivité diélectrique s'écrit:

$$\varepsilon_{ij}^{NL} = \chi_{ijkl}^{(3)} E_k E_l.$$

A. Effet électro-optique quadratique (de Kerr)

Un effet similaire à l'effet Pockels peut être observé dans un milieu dont la nonlinéarité du troisième ordre est importante: il s'agit de l'effet électro-optique quadratique de Kerr. On applique à un échantillon un champ statique (ou alternatif de basse fréquence) très fort E^S ; la contribution à la permittivité non-linéaire du troisième ordre s'écrit alors:

$$\varepsilon_{ij}^{NL} = 3\chi_{ijkl}^{(3)} E_k^S E_l^S.$$

Evidemment, cet effet peut être traité de façon analogue à l'effet Pockels comme une perturbation de l'ellipsoïde des indices. Il y a trois différences principales avec l'effet Pockels: (i) il s'agit ici d'un effet non-linéaire du troisième ordre (le champ électrique appliqué doit être alors très fort); (ii) il s'agit d'un effet quadratique en champ électrique appliqué, par conséquent la biréfringence induite sera proportionnelle à $\Delta n \sim (E^S)^2$; (iii) l'effet est régi par un tenseur du rang 4 qui a des propriétés de symétrie différentes à celles du tenseur de Pockels: l'effet Kerr sera alors observable surtout dans les matériaux centrosymétriques où le tenseur de Pockels est nul (notamment dans les milieux isotropes, tels que des liquides, etc.).

B. Mélanges à quatre ondes

Tout comme dans le paragraphe destiné à l'étude des mélanges à trois ondes on peut s'attendre ici à des effets purement optiques qui font apparaître des combinaisons de fréquences de quatre ondes et qui sont liés à la contribution de la polarisation non-linéaire du type:

$$\mathbf{P}_{NL}^{\omega_4} = \chi_{ijkl}^{(3)} E_j^{\omega_1} E_k^{\omega_2} E_l^{\omega_3}.$$

Ces effets peuvent être utilisés pour transférer l'énergie entre les quatre ondes impliquées ω_1 , ω_2 , ω_3 et ω_4 , si toutefois les relations suivantes (ou analogues) sont vérifiées:

$$\begin{array}{l} \omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} \omega_4 + \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \\ \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \end{array} \quad \text{etc.}$$

Un cas intéressant est le cas dégénéré où on dispose d'un seul faisceau de puissance très élevée à la fréquence ω et on s'intéresse à la polarisation non-linéaire qui oscille à cette même fréquence ω : c.-à-d. on cherche la réponse à la question quelle est l'influence d'une onde électromagnétique très intense sur elle-même. La polarisation non-linéaire concernée s'écrit:

$$\mathbf{P}_{NL}^{\omega} = 3\chi^{(3)} E^{\omega} E^{\omega} (E^{\omega})^*, \quad (7.24)$$

où nous avons omis les indices pour simplifier les expressions (cela revient à supposer que le faisceau est linéairement polarisé et que c'est un mode propre du milieu). L'onde électromagnétique se propage suivant l'axe z et on suppose que son champ électrique s'écrit:

$$E^{\omega}(z, t) = A(z) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (7.25)$$

On introduit l'expression pour la polarisation (7.24) dans l'équation d'onde (7.15) et on trouve:

$$\left((\omega^2 n^2 / c^2 - k^2) A - 2ik \frac{dA}{dz} \right) e^{i(\omega t - kz)} = -3\mu_0 \omega^2 \chi^{(3)} A^2 A^* e^{i(\omega t - kz)}.$$

Le premier terme de l'expression définit le vecteur d'onde dans l'approximation linéaire:

$$k = \frac{\omega n}{c}.$$

Les termes restants s'écrivent:

$$\frac{dA}{dz} = -i \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\omega}{n} \chi^{(3)} |A|^2 A;$$

Si on suppose que $\chi^{(3)}$ est réel on trouve après l'intégration:

$$A = A_0 \exp\left(-i \frac{3\eta_0 \omega \chi^{(3)}}{2n} |A_0|^2 z\right) = A_0 e^{-ik_1 z}.$$

Le champ électrique (7.25) prend ensuite la forme:

$$E^{\omega}(z, t) = A(z) e^{i(\omega t - kz - k_1 z)};$$

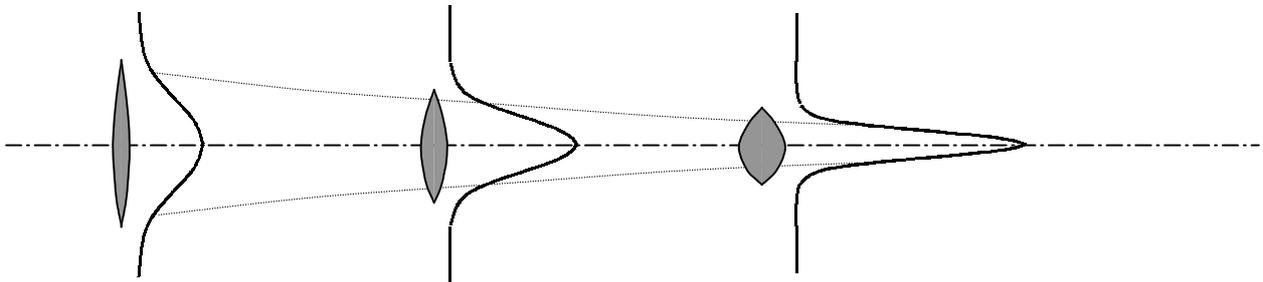
on peut alors redéfinir le vecteur d'onde caractéristique:

$$K = k + k_1 = \frac{\omega}{c} \left(n + \frac{3\chi^{(3)}}{2\varepsilon_0 n} |A_0|^2 \right).$$

L'indice de réfraction effectif du milieu peut ensuite s'écrire:

$$n' = n + n_2 |A_0|^2, \quad (n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{2\varepsilon_0 n})$$

et dépend donc de l'intensité de l'onde E^ω . Un faisceau très intense qui se propage dans un milieu non-linéaire peut alors lui-même induire une lentille optique en gradient d'indice de réfraction. Cette lentille est convergente si $n_2 > 0$, puis une rétro-action positive s'établit: la lentille focalise un petit peu le faisceau, l'intensité du faisceau s'en trouve augmentée, ceci rend la lentille plus forte et le faisceau se focalise davantage etc. Le faisceau se focalise de plus en plus jusqu'à ce que les effets de dispersion compensent la nonlinéarité (formation des solitons) ou jusqu'au seuil d'endommagement du matériau. Ce phénomène est connu sous le nom de l'auto-focalisation.



Effets magnéto-optiques

Jusqu'à maintenant nous avons supposé que la polarisation d'un milieu ne dépend que du champ électrique, que cette dépendance soit linéaire (1.5) ou non-linéaire (7.1). Or il s'avère que la polarisation et, par conséquent, la permittivité diélectrique peut montrer une faible dépendance en champ magnétique appliqué. On a donc en série de Taylor:

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + h_{ijk}^{(2)} B_k E_j + h_{ijkl}^{(3)} B_l B_k E_j \dots \quad (7.26)$$

La partie de la permittivité diélectrique qui dépend du champ magnétique s'écrit alors:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{B}) = h_{ijk}^{(2)} B_k + h_{ijkl}^{(3)} B_l B_k + \dots \quad (7.27).$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, cette dépendance est très faible, il faut donc appliquer un champ magnétique assez fort afin d'induire un effet observable.

L'effet du champ magnétique le plus connu est l'effet magnéto-optique linéaire de Faraday qui est relié au premier terme du développement (7.27). Sans donner la preuve dans ce manuscrit, nous signalons les propriétés de symétrie de la permittivité diélectrique dans un champ magnétique¹¹:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{B}) = \varepsilon_{ji}(-\mathbf{B}) = \varepsilon_{ji}^*(\mathbf{B}) = \varepsilon_{ij}^*(-\mathbf{B}) \quad (7.28)$$

Comme les propriétés de symétrie (7.28) sont analogue aux propriétés (6.13a,b) la forme du tenseur $h_{ijk}^{(2)}$ sera analogue à celle du tenseur γ_{ijk} donné par les formules (6.14a,b,c). Le tenseur $h_{ijk}^{(2)}$ est alors purement imaginaire et antisymétrique en deux premiers indices. On peut donc écrire le tenseur effectif ε_{ij} comme dans le cas de l'activité optique (6.17) sous forme

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 & ig_{12} & ig_{13} \\ -ig_{12} & \varepsilon_{yy}^0 & ig_{23} \\ -ig_{13} & -ig_{23} & \varepsilon_{zz}^0 \end{pmatrix},$$

où les termes non-diagonaux sont imaginaires pures et montrent une dépendance linéaire en champ magnétique.

Étudions les effets du champ magnétique sur un exemple le plus simple: milieu cubique non-centrosymétrique, où il n'y a qu'un seul coefficient indépendant du tenseur $h^{(2)}$:

$$h_{123}^{(2)} = h_{231}^{(2)} = h_{312}^{(2)} = -h_{213}^{(2)} = -h_{321}^{(2)} = -h_{132}^{(2)}.$$

Supposons que la lumière se propage suivant l'axe z .

¹¹ Ces équations sont étroitement liées aux propriétés de symétrie du champ magnétique lors du renversement du temps. Imaginons une particule chargée soumise à un champ électrique. Lorsqu'on renverse le temps, la vitesse de la particule change de signe et la particule va se déplacer dans la direction opposée. Répétons maintenant la même expérience dans un champ magnétique: lorsqu'on change la direction du temps, la vitesse v de la particule devient $-v$ mais la particule n'effectue un mouvement opposé à celui d'origine que si le signe du champ magnétique change en même temps, c'est-à-dire \mathbf{B} devient $-\mathbf{B}$ (cette propriété est donnée par la forme de la force de Lorentz).

A. Effet du champ longitudinal ($B//z$)

L'équation d'onde [voir aussi (6.18)]:

$$\begin{pmatrix} n_0^2 - n^2 & i\Delta B & 0 \\ -i\Delta B & n_0^2 - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (7.29)$$

Valeurs propres (indices de réfraction des modes propres):

$$\begin{aligned} (n_0^2 - n^2)^2 - \Delta^2 B^2 &= 0 \\ n_{I,II} &\approx n_0 \pm \frac{\Delta B}{2n_0}. \end{aligned}$$

Vecteurs propres (polarisation des modes propres):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le champ magnétique longitudinal on trouve deux modes propres dont la polarisation est circulaire et dont les indices de réfraction diffèrent très légèrement de la valeur non-perturbée: cette différence est linéaire en champ magnétique.

Un faisceau incident avec une polarisation linéaire sera décomposé dans le milieu magnéto-optique en deux modes propres avec des polarisations circulaires dont les vitesses de propagation sont différentes. A la sortie du milieu d'une épaisseur d la somme des deux modes donne une polarisation linéaire tournée d'un angle β par rapport à la polarisation incidente:

$$\beta = \pi \frac{d}{\lambda} (n_{II} - n_I) \quad (7.30)$$

Ce résultat est analogue à celui obtenu pour l'activité optique [voir expressions (5.23), (6.19) et (6.20)]. La seule différence (mais très importante) concerne le sens de la rotation du plan de la polarisation lors du changement de la direction de propagation (\mathbf{k} change en $-\mathbf{k}$). Dans le cas de l'activité optique le coefficient Δ_3 change de signe, par contre dans le cas de l'effet Faraday le coefficient Δ n'est pas modifié. Supposons, par exemple, que pour la propagation suivant z l'indice de réfraction pour la polarisation gauche $(1, -i, 0)$ est supérieur à celui pour la polarisation droite $(1, i, 0)$. Le plan de la polarisation linéaire tournera donc à gauche. Pour la propagation suivant $-z$, dans le cas de l'activité optique, le coefficient Δ_3 change de signe

et, par conséquent, l'indice de réfraction pour la polarisation $(1, i, 0)$ [qui correspond maintenant à la polarisation gauche, puisque la direction de propagation a changé de signe] sera plus grand que l'indice pour la polarisation $(1, -i, 0)$. Comme résultat, on obtient une compensation complète de la rotation du plan de polarisation rectiligne pour un aller-retour du faisceau. Concernant l'effet Faraday, le sens de la rotation du plan de polarisation est donné uniquement par la direction du champ magnétique. L'effet est alors cumulatif et la rotation totale qui résulte d'un aller-retour du faisceau est double par rapport à l'expression (7.30).

B. Effet du champ transverse ($B//x$)

L'équation d'onde

$$\begin{pmatrix} n_0^2 - n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 - n^2 & i\Delta B \\ 0 & -i\Delta B & n_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

mène aux résultats suivants:

$$n_I = n_0$$

$$n_{II} \approx n_0 - \frac{\Delta^2 B^2}{2n_0^4}.$$

L'effet est quadratique en champ magnétique, donc extrêmement faible et comparable à l'effet du terme suivant du développement de Taylor (7.27).

L'effet magnéto-optique quadratique lié au dernier terme de l'équation (7.27) s'appelle effet Cotton-Mouton et la symétrie impose qu'il ne constitue qu'une correction à la biréfringence linéaire. Cette correction est, cependant, très faible et dans la plupart des cas non-mesurable.

Annexe A: Propagation des rayons dans un milieu à symétrie cylindrique

On cherchera les solutions de l'équation (4.15) pour les rayons optiques démontrée dans le cadre de la théorie eikonale. On s'intéresse au cas de la symétrie cylindrique de la variation de l'indice de réfraction $n = n(R)$, où R est la distance radiale entre un point sur la trajectoire du rayon et l'axe z . Ce cas est une modélisation simple des fibres optiques à gradient de l'indice de réfraction. On passe aux variables cylindriques:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \varphi \\y &= R \sin \varphi \\z &= z\end{aligned}$$

et on cherche à réécrire l'équation (4.15)

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \tag{A.1}$$

en coordonnées cylindriques:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi \frac{dR}{ds} - R \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\cos \varphi \frac{dR}{ds} - R \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \right) = \\ &= \cos \varphi \frac{d^2R}{ds^2} - 2 \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \frac{dR}{ds} - R \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - R \sin \varphi \frac{d^2\varphi}{ds^2} \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

L'équation (A.1) devient:

$$\cos \varphi \frac{d}{ds} \left(n \frac{dR}{ds} \right) - n \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \frac{dR}{ds} - \sin \varphi \frac{dnR}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - nR \cos \varphi \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - nR \sin \varphi \frac{d^2\varphi}{ds^2} = \cos \varphi \frac{dn}{dR} \quad (\text{A.2a})$$

$$\sin \varphi \frac{d}{ds} \left(n \frac{dR}{ds} \right) + n \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \frac{dR}{ds} + \cos \varphi \frac{dnR}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - nR \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + nR \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{ds^2} = \sin \varphi \frac{dn}{dR} \quad (\text{A.2b})$$

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = 0 \quad (\text{A.2c})$$

Les combinaisons linéaires [(A.2a) $\cos\varphi$ + (A.2b) $\sin\varphi$] et [(A.2b) $\cos\varphi$ - (A.2a) $\sin\varphi$] donnent:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left(n \frac{dR}{ds} \right) - nR \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 &= \frac{dn}{dR} \\ n \frac{d\varphi}{ds} \frac{dR}{ds} + \frac{d(nR)}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + nR \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) &= 0\end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

C'est à partir de ces équations qu'on trouve les trajectoires des rayons. On traitera deux cas spéciaux: rayons circulaires hélicoïdaux (avec $dR/ds = 0$) et rayons méridiens (avec $d\varphi/ds = 0$). La solution générale consiste en rayons hélicoïdaux elliptiques pour lesquels R aussi bien que φ varient en fonction de s .

Rayons circulaires hélicoïdaux.

Comme R et $n(R)$ ne varient pas le long de la trajectoire des rayons, les équations (A.3) donnent:

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -\frac{1}{nR} \frac{dn}{dR}; \quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0; \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0. \quad (\text{A.4})$$

En même temps les deux équations suivantes doivent être vérifiées (voir schéma ci-dessous):

$$R d\varphi = \sin \theta ds \quad (\text{A.5a})$$

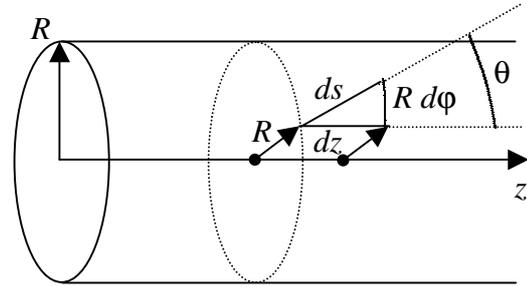
$$dz = \cos \theta ds \quad (\text{A.5b})$$

où θ est l'angle entre la direction de propagation et l'axe de la fibre. On trouve à partir de (A.4) et compte tenu de (A.5a,b):

$$\sin^2 \theta = -\frac{R}{n} \frac{dn}{dR}, \quad (\text{A.6a})$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\sin \theta}{R} s, \quad (\text{A.6b})$$

$$z = z_0 + \cos \theta s, \quad (\text{A.6c})$$



où, comme l'indique l'équation (A.6a), θ ne dépend que de R . Cela signifie que la variation de $\varphi(z)$ est linéaire:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\text{tg } \theta}{R} (z - z_0).$$

Nous cherchons à trouver un profil $n(R)$ qui minimise la dispersion des modes; c'est très important pour les fibres optiques: tous les rayons doivent avoir à parcourir le même chemin optique (c.-à-d. le temps de parcours de la fibre doit être constant pour tous les modes). Les rayons plus éloignés de l'axe de la fibre ont une plus grande distance à parcourir par rapport à ceux qui se propagent très près de l'axe. Pour compenser cette différence, l'indice de réfraction doit progressivement diminuer lorsque R croît. Ensuite, une impulsion optique va traverser la fibre sans modification de son profil temporel (elle ne s'étale pas dans le temps).

Le temps de parcours pour une fibre de longueur L d'un rayon hélicoïdal circulaire qui se propage à la distance R de l'axe s'écrit:

$$t = \frac{L}{\cos \theta} \frac{n(R)}{c}.$$

Le temps t doit être constant (indépendant de R); en utilisant (A.6a) on obtient:

$$\frac{n}{n_0} = \cos \theta = \sqrt{1 + \frac{R}{n} \frac{dn}{dR}},$$

où $n_0 = \frac{ct}{L}$ est l'indice de réfraction le long de l'axe de la fibre ($R = 0$). Il s'en suit que

$$\frac{n(n^2 - n_0^2)}{n_0^2 R} = \frac{dn}{dR}.$$

Cette équation différentielle se résout par la méthode de séparation de variables et on trouve:

$$n(R) = \frac{n_0}{\sqrt{1 + \alpha^2 R^2}},$$

où α est une constante. Dans les cas pratiques la constante α^2 est très petite et on peut écrire un développement limité de la dernière expression:

$$n(R) = n_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} R^2 \right). \quad (\text{A.7})$$

Rayons méridiens.

Comme φ est constant, les équations (A.3) donnent:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{dR}{ds} \right) &= \frac{dn}{dR} \\ \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) &= 0 \end{aligned}.$$

On ne s'intéressera qu'à des rayons paraxiaux qui forment un angle très faible avec l'axe z . Cette approximation permet de remplacer la dérivé d/ds par d/dz . On trouve alors:

$$\frac{d^2 R}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dR}.$$

On introduit le profile $n(R)$ donné par l'équation (A.7) et on obtient à l'ordre le plus bas en α :

$$\frac{d^2 R}{dz^2} = -\alpha^2 R,$$

avec comme solution

$$R = A \sin \alpha z \quad (\text{A.8})$$

si on admet la condition initiale $R(z=0) = 0$. L'approximation paraxiale signifie que $A\alpha \ll 1$. Tous les rayons méridiens (quelle que soit leur amplitude) possèdent donc la même période d'oscillation spatiale et, pour évaluer la dispersion modale, il convient de calculer pour un rayon donné, le temps qui lui est nécessaire pour parcourir la distance d'une période.

$$t = \frac{1}{c} \int n ds = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi/\alpha} n \sqrt{1 + (dR/dz)^2} dz = \frac{n_0}{c} \int_0^{2\pi/\alpha} \left(1 - \frac{A^2 \alpha^2 \sin^2 \alpha z}{2} \right) \sqrt{1 + A^2 \alpha^2 \cos^2 \alpha z} dz$$

La racine carrée peut être développée en série de Taylor; on trouve ensuite:

$$t = \frac{n_0}{c} \int_0^{2\pi/\alpha} \left(1 - \frac{A^2 \alpha^2 \sin^2 \alpha z}{2} + \frac{A^2 \alpha^2 \cos^2 \alpha z}{2} + \dots \right) dz.$$

Tous les termes suivants du développement contiennent les termes en puissances plus élevées en $\sin(\alpha z)$ et $\cos(\alpha z)$. Or tous les termes contenant les fonctions trigonométriques s'annulent lors de l'intégration le long d'une période et il ne reste que

$$t = \frac{n_0}{c} \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{n_0 L}{c}.$$

Conclusion: pour un profil parabolique de l'indice de réfraction la dispersion modale d'une fibre optique est minimisée.

Annexe B: Notions de base sur les tenseurs.

Changements de base.

Considérons un espace vectoriel avec une base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ et une autre base $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$. Les deux systèmes de base sont reliés par une transformation linéaire:

$$\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} \mathbf{e}_i$$

Pour simplifier l'écriture, nous allons utiliser la convention d'Einstein: cette notation implique qu'il y a automatiquement sommation chaque fois qu'un même indice apparaît deux fois. Dans cette notation la relation du changement de base s'écrirait:

$$\boxed{\mathbf{f}_j = A_{ij} \mathbf{e}_i} \tag{B.1}$$

Par exemple dans l'espace à trois dimensions:

$$(\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

De la même façon, tous les vecteurs de la base \mathbf{e}_i peuvent s'exprimer dans la base \mathbf{f}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_j &= A_{ij} \mathbf{e}_i && / \cdot A_{jk}^{-1} \\ \mathbf{f}_j A_{jk}^{-1} &= \mathbf{e}_i \underbrace{A_{ij} A_{jk}^{-1}}_{\delta_{ik}} \\ \boxed{\mathbf{f}_j A_{jk}^{-1} = \mathbf{e}_k} &&& \text{(B.2)} \end{aligned}$$

La décomposition d'un vecteur \mathbf{x} dans la base \mathbf{e}_i s'écrit:

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_i x_i \quad \text{(B.3)}$$

Le vecteur \mathbf{x} est indépendant de la base choisie. On peut le décomposer dans la deuxième base:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}_i x'_i = \mathbf{e}_k A_{ki} x'_i$$

Ceci nous donne la relation entre les composantes x_i et x'_i :

$$\boxed{x_k = A_{ki} x'_i \quad x'_i = A_{ik}^{-1} x_k} \quad \text{(B.4)}$$

Par exemple dans l'espace à trois dimensions:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Désormais nous nous limiterons aux espaces vectoriels où on a défini un produit scalaire (espace de Hilbert). Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ et $\mathbf{y} = y_j \mathbf{e}_j$ est égal:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

Repères orthonormés.

Définition: $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Le produit scalaire s'écrit tout simplement: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i$.

Considérons maintenant un changement de base caractérisé par la matrice de transformation A_{ij} entre deux repères orthonormés \mathbf{e}_i et \mathbf{f}_j :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_j &= A_{ij} \mathbf{e}_i & / \cdot \mathbf{f}_k \\ \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_k &= A_{ij} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_k \\ \delta_{jk} &= A_{ij} A_{lk} \underbrace{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l}_{\delta_{il}} \\ \delta_{jk} &= A_{ij} A_{lk} = A_{ki}^T A_{ij} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \boxed{\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}} & \text{(B.5)}\end{aligned}$$

La matrice \mathbf{A} est une matrice unitaire.

Définition et propriétés d'un tenseur.

Définition.

Considérons une forme bilinéaire sur l'espace produit $E_n \times E_p$ de deux espaces vectoriels:

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = t_{ij} x_i y_j$$

La forme bilinéaire est par définition invariante si on change de base dans l'espace $E_n \times E_p$ et les t_{ij} sont les composantes d'un tenseur de rang 2. On peut généraliser cette définition et introduire les tenseurs de rangs supérieurs à l'aide de formes multilinéaires.

Comportement d'un tenseur dans un changement de base.

Une forme multilinéaire est par définition invariante dans un changement de base $\mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{f}_j$. Nous obtenons par exemple pour une forme bilinéaire (nous utilisons l'équation (B.4) pour transformer les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} en \mathbf{x}' et \mathbf{y}'):

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = t_{ij} x_i y_j = t_{ij} A_{ik}^{-1} x'_k A_{jl}^{-1} y'_l = t_{ij} A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1} x'_k y'_l = t'_{kl} x'_k y'_l$$

Nous avons fait apparaître les composantes du tenseur dans la nouvelle base (t'_{ij}):

$$\boxed{t'_{kl} = A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1} t_{ij} \quad t_{ij} = A_{ki} A_{lj} t'_{kl}} \quad (\text{B.6})$$

En généralisant, pour un tenseur de rang n :

$$\boxed{p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = A_{k_1 i_1} A_{k_2 i_2} \dots A_{k_n i_n} p'_{k_1, k_2, \dots, k_n}} \quad (\text{B.7})$$

Cette équation peut à l'inverse être prise comme la définition d'un tenseur: un tenseur est une matrice dont les composantes se transforment suivant cette règle.

Revenons encore aux tenseurs de rang 2. Dans un système de repères orthonormés, l'équation (6B) se transformera en:

$$\begin{aligned} t'_{kl} &= A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1} t_{ij} = A_{ki} t_{ij} A_{jl}^{-1} \\ t_{ij} &= A_{ki} A_{lj} t'_{kl} = A_{ik}^{-1} t'_{kl} A_{lj} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Nous avons utilisé la relation (B.5) pour la matrice \mathbf{A} .

Réduction d'un tenseur par des considération de symétrie.

La symétrie d'un tenseur intervenant dans l'expression d'une loi physique peut être due soit à la nature même du tenseur, c.-à-d. du phénomène physique qu'il décrit (symétrie intrinsèque) soit à la symétrie propre du milieu.

Symétrie intrinsèque (cas de la permittivité diélectrique).

On écrit la relation constitutive:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j$$

La variation d'énergie par unité de volume d'un matériau diélectrique pour une variation $d\mathbf{D}$ de l'induction électrique est égale:

$$dU = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} = E_j \varepsilon_{jk} dE_k$$

$$\frac{\partial U}{\partial E_k} = E_j \varepsilon_{jk}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial E_k \partial E_j} = \varepsilon_{jk}$$

On peut renverser l'ordre des dérivées et par conséquent $\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{kj}$.

Cette expression peut être généralisée si l'on imagine que la permittivité ε_{ik} est complexe: la partie non-dissipative du tenseur de la permittivité (celle qui n'est pas liée à l'absorption¹²) doit être hermitienne:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^* . \quad (\text{B.9})$$

Réduction du nombre de composantes indépendantes imposée par le milieu cristallin.

Une opération de symétrie ramène le cristal sur lui-même. Elle laisse invariante les propriétés physiques du cristal et donc les tenseurs qui les représentent. Une opération de symétrie est équivalente à un changement de repère. Dans un changement de repère défini par une matrice \mathbf{A} , un tenseur se transforme suivant l'équation (B.7). Si maintenant \mathbf{A} correspond à un opérateur de symétrie les tenseurs p et p' doivent être identiques. C.-à-d.:

$$p_{i_1, i_2 \dots i_n} = A_{k_1 i_1} A_{k_2 i_2} \dots A_{k_n i_n} p_{k_1, k_2 \dots k_n} \quad (\text{B.10})$$

Centre de symétrie, axes d'ordre 2, miroirs:

Dans le système d'axes cristallographiques, toutes les matrices correspondant à ces opérations de symétrie sont diagonales:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

L'équation (B.10) se réduit à:

¹² La partie imaginaire de la permittivité décrit, par exemple, l'activité optique ou l'effet magnéto-optique de Faraday.

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = A_{i_1 i_1} A_{i_2 i_2} \dots A_{i_n i_n} p_{i_1, i_2, \dots, i_n} \quad (\text{B.11})$$

sans aucune sommation. Un cas particulier intéressant est celui où l'opérateur est un centre de symétrie puisque tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à -1 . On a alors:

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = (-1)^n p_{i_1, i_2, \dots, i_n}$$

où n est le rang du tenseur \mathbf{p} . Les composantes des tenseurs de rang pair ne sont nullement affectées par la présence du centre de symétrie; par contre tous les tenseurs de rang impair sont nuls¹³.

Considérons maintenant un axe d'ordre 2 suivant l'axe c cristallographique. La matrice \mathbf{A} s'écrit alors:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve pour un tenseur de rang 2 (permittivité diélectrique):

$$\begin{aligned} \epsilon_{13} = A_{11} A_{33} \epsilon_{13} = -\epsilon_{13} &\quad \Rightarrow \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0 \\ \epsilon_{23} = A_{22} A_{33} \epsilon_{23} = -\epsilon_{23} &\quad \Rightarrow \quad \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = 0 \end{aligned}$$

On trouve le même résultat pour un miroir dont le plan de symétrie est perpendiculaire à l'axe c cristallographique:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Axes d'ordre plus élevé:

Un axe de rotation d'ordre n , parallèle à c est caractérisé par la matrice de transformation:

¹³ Par exemple le tenseur de Pockels qui caractérise l'effet électro-optique linéaire est un tenseur du rang 3. Par conséquent, l'effet Pockels est nul dans les cristaux centrosymétriques.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha = 2k\pi/n$ ($k = 1 \dots n-1$). Etudions en particulier la transformation des éléments ϵ_{11} , ϵ_{22} , et ϵ_{12} du tenseur de la permittivité:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= c^2 \epsilon_{11} + s^2 \epsilon_{22} - 2sc \epsilon_{12} \\ \epsilon_{22} &= s^2 \epsilon_{11} + c^2 \epsilon_{22} + 2sc \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} &= sc \epsilon_{11} - sc \epsilon_{22} + (c^2 - s^2) \epsilon_{12} \end{aligned}$$

où c et s désignent $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$. La deuxième équation est équivalente à la première. La première et la troisième équations donnent:

$$\begin{aligned} (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})s^2 &= -2sc \epsilon_{12} \\ (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})sc &= 2s^2 \epsilon_{12} \end{aligned}$$

pour $\sin \alpha \neq 0$ (c.-à-d. l'axe d'ordre supérieur à 2) les équations ont pour solutions:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22}, \epsilon_{12} = 0.$$

De la même façon les équations pour ϵ_{13} et ϵ_{23} mènent à:

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0.$$

Résumé:

- Le système cristallographique cubique contient 3 axes de rotation d'ordre 4, par conséquent, les cristaux cubiques se comportent en optique comme des milieux isotropes:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

- Les systèmes quadratique, hexagonal et trigonal possèdent un axe de rotation d'ordre supérieur à 2 (parallèle à c). Le tenseur de la permittivité diélectrique a 2 composantes indépendantes et s'écrit:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

- Le système orthorhombique contient plusieurs miroirs et/ou axes d'ordre 2 suivant les axes cristallographiques. Le tenseur de la permittivité diélectrique a 3 composantes indépendantes:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

- Le système monoclinique ne contient qu'un seul axe d'ordre 2 (miroir). Le tenseur de la permittivité diélectrique possède une composante non-diagonale (ε_{12}).

Annexe C: Transformée de Fourier

La transformée de Fourier permet de représenter une quantité physique sous deux formes: dans l'espace directe (par exemple l'espace du temps t) et dans l'espace réciproque (par exemple l'espace des fréquences ν). Soit $f(t)$ une fonction (quantité physique) exprimée dans l'espace du temps et $F(\nu)$ sa représentation dans l'espace réciproque. Cette paire de fonctions est reliée par la transformée de Fourier:

$$FT: \quad F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt, \quad (C.1a)$$

$$\bar{FT}: \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad (C.1b)$$

où FT désigne la transformée de Fourier directe et \bar{FT} désigne la transformée de Fourier inverse. En optique on exprime habituellement le champ électromagnétique en fonction de la fréquence angulaire (pulsation) $\omega = 2\pi\nu$; on définit alors la fonction $F'(\omega) = F(\omega/2\pi) = F(\nu)$ où ν est substitué par $\omega/2\pi$. Les relations (C.1a,b) s'écrivent après la substitution:

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (C.2a)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F'(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (C.2b)$$

On peut également définir une nouvelle fonction $F''(\omega) = F'(\omega)/2\pi$. La relation entre $f(t)$ et

$F''(\omega)$ s'écrit ensuite:

$$F''(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (\text{C.3a})$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F''(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{C.3b})$$

Les formules (C.1–3) représentent les définitions possibles et souvent utilisées de la transformée de Fourier. La définition (C.3b) exprime le principe de superposition des composantes spectrales du champ électrique tel qu'il a été introduit par l'équation (2.7a). $F(v)$ sont alors les composantes spectrales dans l'espace de v , $F''(\omega)$ sont les composantes spectrales dans l'espace de ω .

Dans ce qui suit nous allons démontrer quelques relations utiles qui reposent sur les définitions (C.1). L'ensemble des résultats est présenté dans le tableau à la fin de l'annexe.

Théorème de convolution:

La transformée de Fourier de la convolution est égale au produit des transformées de Fourier des deux fonctions.

$$\begin{aligned} FT(f * g) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-2\pi i v t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t-t') g(t') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t') e^{-2\pi i v t'} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t-t') e^{-2\pi i v (t-t')} = G(v) \cdot F(v) \end{aligned} \quad (\text{C.4a})$$

$$\begin{aligned} \overline{FT}(F * G) &= \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{2\pi i v t} \int_{-\infty}^{\infty} dv' F(v-v') G(v') = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv' G(v') e^{2\pi i v' t} \int_{-\infty}^{\infty} dv F(v-v') e^{2\pi i (v-v') t} = g(t) \cdot f(t) \end{aligned} \quad (\text{C.4b})$$

Propriétés de symétrie:

Soit $f(t)$ une fonction réelle; ensuite $\text{Re}\{F(v)\}$ est une fonction paire et $\text{Im}\{F(v)\}$ est une fonction impaire.

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i v t} dt$$

$$F^*(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i \nu t} dt = F(-\nu).$$

Si $f(t)$ est une fonction réelle symétrique, $F(\nu)$ l'est aussi.

$$F^*(\nu) = F(-\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i \nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = F(\nu).$$

Transformée de $f(t - t_0)$ et de $f(at)$:

$$\begin{aligned} FT(f(t - t_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-2\pi i \nu t} dt = e^{-2\pi i \nu t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-2\pi i \nu (t - t_0)} dt = \\ &= e^{-2\pi i \nu t_0} F(\nu) \end{aligned}$$

$$FT(f(at)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-2\pi i \nu t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-2\pi i \nu t'/a} dt' = \frac{F(\nu/a)}{a}.$$

Transformée de la dérivée:

$$FT\left(\frac{df}{dt}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-2\pi i \nu t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{dt} (e^{-2\pi i \nu t}) dt = 2\pi i \nu F(\nu)$$

Exemples des fonctions:

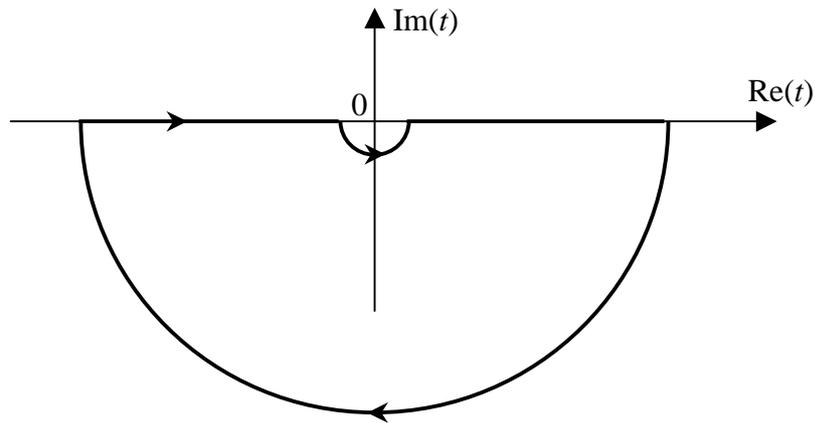
$$FT(\delta(0)) = 1,$$

$$FT(\delta(t_0)) = e^{-2\pi i \nu t_0},$$

$$FT\left(e^{-\alpha t^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-2\pi i \nu t} dt = e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t + \pi i \nu / \alpha)^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{\alpha}},$$

$$FT\left(\text{vp} \frac{1}{t}\right) = \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{t} dt = \dots,$$

où vp désigne la valeur principale. Cette dernière intégrale peut être calculée à l'aide des résidus. Pour $\nu > 0$ on utilise le contour donné sur la figure ci-dessous. L'intégrale sur le grand demi-cercle tend vers zéro puisque $\nu > 0$ et $\text{Im}(t) < 0$. Ensuite:



$$\text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i v t}}{t} dt = -\pi i \text{Res}_{t=0} \left(\frac{e^{-2\pi i v t}}{t} \right) = -\pi i.$$

Pour $v < 0$ on choisit le contour similaire avec le grand demi-cercle dans le demi-plan supérieur: $\text{Im}(t) > 0$. On trouve:

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i v t}}{t} dt = \pi i \text{Res}_{t=0} \left(\frac{e^{-2\pi i v t}}{t} \right) = \pi i$$

On obtient alors:

$$FT \left(\text{vp} \frac{1}{t} \right) = -\pi i \text{sign}(v).$$

De la même façon:

$$\overline{FT} \left(\text{vp} \frac{1}{v} \right) = \pi i \text{sign}(t),$$

$$FT(\text{sign } t) = -\frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{v}.$$

Tableau récapitulatif			
fonction	Transformée de Fourier		
	selon (C.1)	selon (C.2)	selon (C.3)
$f * g$	$F(v) \cdot G(v)$	$F'(\omega) \cdot G'(\omega)$	$2\pi F''(\omega) \cdot G''(\omega)$
$f \cdot g$	$F(v) * G(v)$	$\frac{1}{2\pi} F' * G'(\omega)$	$F'' * G''(\omega)$
df/dt	$2\pi i v F(v)$	$i\omega F'(\omega)$	$i\omega F''(\omega)$
$\delta(t_0)$	$e^{-2\pi i v t_0}$	$e^{-i\omega t_0}$	$e^{-i\omega t_0}/2\pi$
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2 v^2}{\alpha}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
vp $1/t$	$-\pi i \operatorname{sign}(v)$	$-\pi i \operatorname{sign}(\omega)$	$-\frac{i}{2} \operatorname{sign}(\omega)$
$\operatorname{sign} t$	$-\frac{i}{\pi} \operatorname{vp} \frac{1}{v}$	$-2i \operatorname{vp} \frac{1}{\omega}$	$-\frac{i}{\pi} \operatorname{vp} \frac{1}{\omega}$