ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA

MATICOVÝ POČET

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1978

Publikace obsahuje výklad nejdůležitějších poznatků z maticové algebry, vybraných se zřetelem k různým technickým aplikacím, zvláště k výpočtům mechanických soustav tuhých a pružných těles. Předpokládají se pouze základní znalosti z matematiky, např. znalost vlastností algebraických rovnic (znalost rozkladu na kořenové činitele), pojem determinantu, základní poznatky o derivaci a integraci, řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Kromě základních operací s maticemi (slučování, násobení, inverze) se probírají i teorie vlastních hodnot a vlastních vektorů, teorie podobných matic, otázky řešení soustav lineárních algebraických rovnic, numerická stabilita, maticové polynomy a obecné funkce, maticové metody řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic atd. Do textu jsou zahrnuty i některé speciální teorie a metody, které dokreslují šíři možných aplikací maticové algebry, např. problém ladění mechanických soustav, lineární regrese, teorie nezáporných matic.

Maticový počet se nyní aplikuje v nejrůznějších vědních oborech, kam pronikají číslicové počítače (od mechaniky přes ekonomii a systémové inženýrství až po biologii). Znalost maticové algebry se stává nezbytným předpokladem pro jakoukoli úspěšnou technickou, vědeckou a řídící práci.

Publikace je určena technickým a inženýrským pracovníkům především ve strojním oboru, kteří dosud neměli příležitost seznámit se s maticovou algebrou. Výklad je proto doplněn mnoha názornými příklady, z nichž některé se řeší, u jiných je uveden návod k řešení, a kde je to možné, i kontrolní výsledky.

OBSAH

Str.

Předmluva 7

1. Matice a její definice 9

2. Lineární transformace 11

3. Vzájemné násobení matic 15

4. O různých druzích matic 20

5. Hodnost matice 27

6. Rozdělené matice 29

7. Vlastní hodnoty a vlastní vektory 32

8. Geometrický význam vlastních hodnot a vlastních vektorů 39

9. Podobné matice 44

10. Věta Cayleyho-Hamiltonova 49

11. Numerická stabilita 54

12. Ladění mechanických soustav 60

13. Výpočet extrémní vlastní hodnoty 63

14. Funkce matice 69

15. Řešení diferenciálních rovnic 74

16. O řešitelnosti soustav algebraických lineárních rovnic 83

17. O lineární regresi 89

18. Nezáporné matice 96

Příklady 102

Literatura 125

Předmluva

ČVTS - Dům techniky Praha uspořádal v letech 1973 a 1974 trojdílný seminář Maticové metody v pevnostních výpočtech. Velký zájem o tento seminář a stejnojmenné publikace, které tehdy ČVTS - Dům techniky Praha vydal, svědčí o trvající potřebě dalšího vzdělávání technických a inženýrských pracovníků v maticových metodách výpočtů. To zřejmě souvisí s rozvojem počítačů a s jejich zaváděním do závodů, ústavů i do škol.

Je známo, že maticová symbolika umožňuje velmi přehledné a úsporné zorganizování numerických výpočtů k nejrůznějším účelům. Maticové operace jsou dnes pevnou součástí programového vybavení dokonce i malých stolních počítačů a v omezeném rozsahu i nejnovějších typů programovatelných minikalkulátorů. Znalost maticové algebry se proto stává nezbytným předpokladem k úspěšnému zvládnutí nových výpočetních metod, bez nichž si nelze další technický a hospodářský pokrok vůbec představit.

ČVTS - Dům techniky Praha se proto rozhodl vyhovět zájmu technické veřejnosti a uspořádat nový seminář věnovaný maticovým metodám. Budeme v něm podrobněji probírat základní poznatky maticové algebry. Vzhledem k omezenému rozsahu doprovodíme výklad jen nejnutnějšími příklady. Budou však pečlivě vybrány, aby byly co nejnázornější a ukazovaly různé možnosti použití maticové algebry. Příklady jsou připojeny na konci textu. Zčásti jde o neřešené příklady s návodem nebo s kontrolními výsledky, zčásti jde o příklady řešené. Poskytují příležitost k opakování látky a k získání zkušeností při praktických výpočtech. Úlohy jsou zadány tak, aby se při numerickém řešení vystačilo s ručním počítáním. Kdo však může k výpočtům použít malou kalkulačku, značně si tím práci usnadní.

Poněvadž jde pouze o úvod do teorie matic a jejího užití, vynecháme některé věty a důkazy, které nepovažujeme pro začátečníka za důležité. Tyto mezery si čtenář snadno doplní studiem odborné literatury, bude-li mít zájem. Náš výklad bude spíše induktivní, s cílem vzbudit zájem a pozornost účastníků. Tato publikace nemůže nahradit monografii o teorii matic a ani se o to nesnaží. Poskytne však každému účastníkovi semináře, bude-li mít opravdovou snahu, solidní základy pro praktickou činnost i pro další vzdělávání.

Cyril Höschl

1. MATICE A JEJÍ DEFINICE

V literatuře najdeme různé definice matice, ale málokterá poskytuje o matici nějakou alespoň trochu jasnou představu. Čteme-li například, že je to uspořádaná soustava konečného počtu reálných nebo komplexních čísel sestavených do pravoúhlého schématu - mříže, nebudeme mít z takové definice příliš velký užitek. A přece je taková definice - navzdory své nápadné jednoduchosti - v podstatě správná a úplná. Pokud však neřekneme, co si máme s takovou maticí počít a k čemu slouží, potud naše definice není k ničemu. Jakmile však víme nejen co matice je, ale také k čemu slouží a jak se s ní pracuje, rozšíří se náhle náš obzor. Matematika nám pojednou nabídne o pouhé "obdélníkově uspořádané soustavě čísel" tolik zajímavých a užitečných vět a pouček, že k jejich osvojení budeme muset vynaložit nemalé úsilí.

Začneme však s nejjednoduššími příklady. V tabulce 1 je uveden výkaz počtu pracovníků (mužů - M, žen - Ž) ve třech provozech P1, P2, P3 nějakého závodu ke dni 31. prosince 1976 (tabulka A) a ke dni 31. prosince 1977 (tabulka B). Je zřejmé, že tyto tabulky lze považovat za matice. Protože obsahují reálná čísla, jsou to reálné matice. Většinou se budeme zabývat právě takovými maticemi a jen výjimečně uvedeme i matice, jejichž prvky jsou komplexní čísla.

Tabulka 1

Počet mužů (M) a žen (Ž) pracujících v provozech P1 až P3

Tabulka A

31. 12. 1976	M	Ž
P1	127	13
P2	51	25
P3	14	21

Tabulka B

31. 12. 1977	M	Ž
P1	120	27
P2	67	22
P3	16	23

Tabulku A můžeme zapsat bez vysvětlující legendy takto:

$$A = [A] = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127 & 13 \\ 51 & 25 \\ 14 & 21 \end{bmatrix} . \qquad (1.1)$$

První index v označení a_{ij} prvku tabulky značí řádek (tedy číslo provozu), druhý index sloupec (jde tedy o muže, je-li $j = 1$, nebo o ženy, je-li $j = 2$). Podobně můžeme přepsat do tvaru matice i tabulku B.

Z tabulky 1 A nebo z matice A v rovnici (1.1) můžeme získat různé zajímavé údaje. Zajímá-li nás, kolik je v i-tém provozu pracovníků, stačí sečíst prvky v i-tém řádku ($i = 1, 2, 3$). Chceme-li vědět, kolik mužů pracuje v celém závodě, stačí sečíst první sloupec ($j = 1$).

Budeme-li plánovat růst závodu tak, že by měl počet pracovníků do 31. prosince 1978 rovnoměrně vzrůst např. o 20 % (se zaokrouhlením dolů), dostaneme pro plánovaný stav matici

$$1{,}2\,B \doteq \begin{bmatrix} 144 & 32 \\ 80 & 26 \\ 19 & 27 \end{bmatrix} . \qquad (1.2)$$

Bude tedy účelné, zavedeme-li toto pravidlo o násobení matice konstantou:

<u>matice se násobí konstantou, znásobí-li se všechny její prvky.</u> */

Tedy

$$c\,[A] = c\,[a_{ij}] = [\,c a_{ij}\,] . \qquad (1.3)$$

Chceme-li vědět, kolik přibylo mužů a žen za rok 1977 v jednotlivých provozech, stačí obě matice odečíst podle předpisu

$$B - A = [b_{ij} - a_{ij}] = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 16 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = [c_{ij}] = [C] , \qquad (1.4)$$

Odtud dostaneme pravidlo pro slučování matic:

<u>matice se slučují</u> (sečítají nebo odečítají), <u>sloučí-li se všechny stejnolehlé prvky. Slučovat lze jen matice stejného tvaru</u> (se shodným počtem řádků i sloupců). Podle (1.4) $c_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$.

---

*/ U determinantů se však konstantou násobí jediný řádek (nebo sloupec) Teorie determinantů a teorie matic se v mnohém směru liší. Budeme předpokládat, že čtenář ví, jak je determinant definován, a nebudeme se teorií determinantů zabývat.

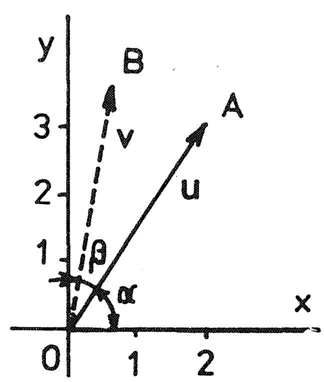
Čtenáře bude jistě zajímat, je-li také nějak definováno vzájemné násobení nebo dělení matic. K tomu náš příklad nepostačuje. Vrátíme se tedy k této otázce později ve třetí a čtvrté kapitole. Dříve však ukážeme, jak lze užitím matic stručně zapsat celou soustavu lineárních rovnic. Ukáže se, že forma zápisu má pro naše další úvahy zásadní důležitost.

2. LINEÁRNÍ TRANSFORMACE

Omezíme se nyní na dvě reálné proměnné x, y. K dalším úvahám tak budeme moci využít geometrické znázornění v rovině. Později své úvahy zobecníme i na větší počet proměnných. Dvojici čísel (x, y) lze znázornit v pravoúhlých přímočarých souřadnicích 0, x, y bodem A (x, y), jehož polohový vektor (rádiusvektor, průvodič) $\vec{u}$ je dán spojnicí $\overrightarrow{0A}$. Složky tohoto vektoru jsou právě čísla x, y, takže platí vektorová rovnice

$$\vec{u} = \overrightarrow{0A} = x\vec{i} + y\vec{j}, \tag{2.1}$$

v níž $\vec{i}$, $\vec{j}$ jsou jednotkové vektory. Složky x, y jsou tedy skalární veličiny (pouhá čísla). Tento pojem nesmíme zaměňovat s vektorovými složkami $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, což jsou ovšem vektory. Přitom $|\vec{u}| = r = \sqrt{x^2+y^2}$.



Obr. 2.1

Na obr. 2.1 je znázorněn vektor $\overrightarrow{0A}$ pro $x = x_A = 2$, $y = y_A = 3$. Ptáme se, jakou operaci musí podstoupit složky x_A, y_A polohového vektoru, aby výsledkem operace bylo např. otočení vektoru o úhel β do polohy $\vec{v} = \overrightarrow{0B}$ na obr. 2.1. Zřejmě musí platit

$$\begin{aligned} x_A &= r\cos\alpha, \\ y_A &= r\sin\alpha, \\ x_B &= r\cos(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta), \\ y_B &= r\sin(\alpha+\beta) = r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic r , α , dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$x_B = (\cos\beta)x_A + (-\sin\beta)y_A,$$
$$y_B = (\sin\beta)x_A + (\cos\beta)y_A. \tag{2.3}$$

Tyto rovnice jsou příkladem lineární operace na vektoru $\vec{u}$ o složkách x_A, y_A. Výsledkem je vektor o složkách x_B , y_B . Arthur CAYLEY (1821 až 1895) navrhl stručnější způsob zápisu takové soustavy. Součinitele soustavy, které označíme a_{ij} , navrhl vyčlenit zvlášť do čtvercové matice

$$[A] = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

a vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ zapsat ve tvaru sloupcových matic

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}, \qquad \{v\} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix}. \tag{2.5}$$

Je tedy $\vec{u} = \{u\}$, $\vec{v} = \{v\}$. Složenými závorkami budeme označovat jednosloupcové matice a budeme jim krátce říkat vektory, ačkoli obecně nemusí mít význam skutečných (fyzikálních) vektorů. Připustíme také, aby měly libovolný, avšak konečný počet prvků.

S použitím (2.4) a (2.5) lze soustavu rovnic (2.3) zapsat jako jedinou rovnici

$$\{v\} = [A]\{u\} \tag{2.6}$$

nebo - vynecháme-li závorky, abychom zápis zjednodušili - také jen takto:

$$v = Au. \tag{2.7}$$

Je-li např. $\beta = 30^\circ$, máme zaokrouhleně

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 \\ 0{,}500 & 0{,}866 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Souřadnice bodu B na obr. 2.1 v tomto zvláštním případě vyjdou

$$\begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 \\ 0{,}500 & 0{,}866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}232 \\ 3{,}598 \end{Bmatrix}. \tag{2.9}$$

Rovnice (2.9) je obsahově totožná s rovnicemi (2.3), liší se jen formou zápisu (a ovšem tím, že jsme dosadili zvláštní čísla). Matice $[A]$ tedy obsahuje uspořádané součinitele dané lineární soustavy algebraických rovnic. Podle Cayleyho můžeme jakoukoli takovou soustavu, např.

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= y_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= y_2, \\ &\cdots \\ &\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &= y_m. \end{aligned} \qquad (2.10)$$

zapsat stručně ve tvaru

$$[A]\{x\} = \{y\}. \qquad (2.11)$$

Nevzniká-li nebezpečí omylu, můžeme závorky vynechávat. V tisku se matice vyznačují buď závorkami, nebo půltučnou sazbou. V rukopisu lze používat také podtrhávání symbolů. V této publikaci budeme používat závorky, avšak kde to bude možné, budeme je vynechávat. Pak budeme psát prostě $Ax = y$ místo (2.11) a budeme tím myslet soustavu rovnic (2.10).

Počet rovnic v soustavě nemusí odpovídat počtu proměnných. Rovnice (2.11) říká, jak se z daného vektoru $\{x\}$ získá působením operátoru $[A]$ transformovaný vektor $\{y\}$. Inverzní transformace přitom může, ale nemusí existovat. Z vlastností soustavy (2.10) je známo, že jednoznačná inverzní transformace existuje tehdy, je-li matice čtvercová a její determinant $|A|$ je různý od nuly.

Je-li matice čtvercová, pak počet řádků (sloupců) udává <u>řád matice</u>. Také u vektoru někdy chápeme počet jeho řádků jako <u>rozměr vektoru</u>. Je-li matice obecně obdélníková, označujeme její tvar a velikost počtem řádků a sloupců. Např. matice $[A]$ v soustavě (2.10), resp. (2.11) má velikost $(m \times n)$. První číslo (m) značí vždy počet řádků, druhé (n) počet sloupců. Je to analogické s označením prvku matice a_{ij} (první index i značí číslo řádku, druhý index j značí číslo sloupce).[x)]

Soustavu (2.10) bychom mohli zapsat také takto:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2.12)$$

Levá strana této rovnice poskytuje návod k vyčíslení součinu matice $[A]$ s vektorem $\{x\}$ (rovnice (2.11))

---

x) V matematické literatuře se nejčastěji mluví o <u>matici typu</u> (m, n).

$$[A]\{x\} = [a_{ij}]\{x_j\} = \begin{Bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{Bmatrix} , \tag{2.13}$$

Má-li mít tento zápis smysl, musí mít matice $[A]$ tolik sloupců, kolik má vektor $\{x\}$ řádků (tj. kolik má prvků). Tento počet je n .

K pochopení dalšího textu je nutné, aby se čtenář s tímto způsobem zápisu důvěrně seznámil. Nesmí mu činit potíže představit si pod jednoduchým zápisem (2.7) nebo (2.11) celou soustavu lineárních rovnic.

Poznámka

K soustavě lineárních rovnic dospíváme také při různých způsobech numerického řešení diferenciálních a integrálních rovnic. Např. diferenciální rovnici

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = f(x) \tag{2.14}$$

můžeme přibližně nahradit soustavou diferenčních rovnic pro ekvidistantní hodnoty argumentu ($x_{i+1} = x_i + h$, h = konst)

$$x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2} = f(x_i) . \tag{2.15}$$

V této rovnici je i přirozené číslo, které nabývá postupně hodnot i = 2, 3, ..., n-2, jestliže hodnoty x_0 , resp. x_n příslušejí počátku, resp. konci definičního intervalu. Soustavu rovnic (2.15) můžeme pak přepsat do tvaru (2.11).

Soustava rovnic (2.10) připomíná Fredholmovu integrální rovnici prvního druhu

$$\int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt = y(s). \tag{2.16}$$

Stačí vztáhnout proměnnou s k indexu i , proměnnou t k indexu j a uvědomit si souvislost mezi integrací a sečítáním. */

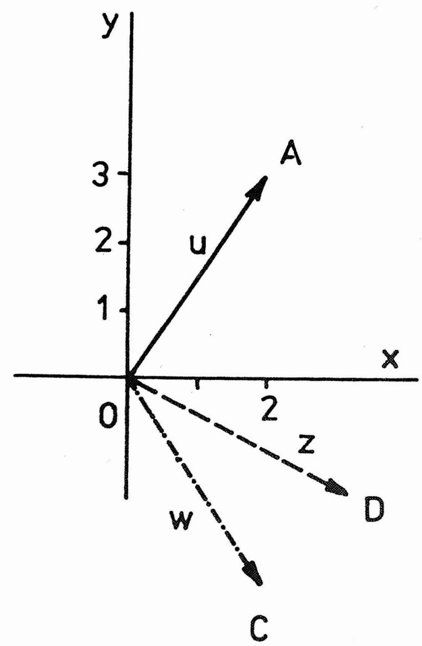
*/ Větší význam má Fredholmova rovnice druhého druhu, v níž neznámá funkce x vystupuje ještě mimo integrand

$$x(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt = y(s) .$$

Klesá-li krok h užitý k řešení (2.14) k nule, roste při daném definičním intervalu počet rovnic (2.15) do nekonečna, a to i tehdy, je-li interval konečný. Maticový zápis (2.11) však můžeme použít jenom pro vektory a matice konečných dimenzí.

3. VZÁJEMNÉ NÁSOBENÍ MATIC

Má-li mít pravidlo pro násobení matic praktický význam, musí vycházet z praktických potřeb. Ve druhé kapitole jsme poznali význam matice jako operátoru, který transformuje daný vektor v jiný vektor. K pravidlu o násobení matic dospějeme nejsnáze rozborem vlastností této transformace.



Obr. 3.1

Způsobů, jakými můžeme lineárně (tj. užitím lineárních rovnic) transformovat např. polohový vektor $\vec{u} = \vec{OA} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ (obr. 3.1) je ovšem nekonečně mnoho. Např. matice

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

transformuje vektor $\vec{u} = \vec{OA}$ do polohy $\vec{w} = \vec{OC}$, která je zrcadlovým obrazem vektoru $\vec{u}$ k ose x.

Představme si, že bychom nyní vektor $\vec{OC}$ pootočili o úhel $\beta = 30°$ do polohy $\vec{z} = \vec{OD}$. Jak bychom získali souřadnice bodu D (tj. složky vektoru $\vec{z}$)? Za operací

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

by zřejmě následovala operace s maticí (2.4), resp. (2.8)

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 \\ 0,500 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,232 \\ -2,598 \end{Bmatrix} . \tag{3.3}$$

Zapišme tyto operace obecně. S přihlédnutím k rovnici (2.13) dostaneme

$$\begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_{11} x_A + b_{12} y_A \\ b_{21} x_A + b_{22} y_A \end{Bmatrix} , \tag{3.4}$$

$$\begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} x_C + a_{12} y_C \\ a_{21} x_C + a_{22} y_C \end{Bmatrix} . \tag{3.5}$$

Dosazením z rovnice (3.4) do (3.5) a jednoduchou úpravou získáme

$$\begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) x_A + (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) y_A \\ (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}) x_A + (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) y_A \end{Bmatrix} . \tag{3.6}$$

Poslední rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} x_D \\ y_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} , \tag{3.7}$$

označíme-li

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj} \qquad (i, j = 1, 2) . \tag{3.8}$$

Rovnice (3.7) je totožná s rovnicí (3.3).

Zopakujme nyní postup výpočtu ještě jednou, tentokrát jen v symbolickém zápisu. Zkráceně můžeme rovnice (3.4), resp. (3.5) zapsat jako

$$\begin{gathered} \{w\} = [B]\{u\} , \\ \{z\} = [A]\{w\} = [A][B]\{u\} \end{gathered} \tag{3.9}$$

a rovnici (3.7) jako

$$\{z\} = [C]\{u\} . \tag{3.10}$$

Srovnáním obou posledních rovnic dostaneme

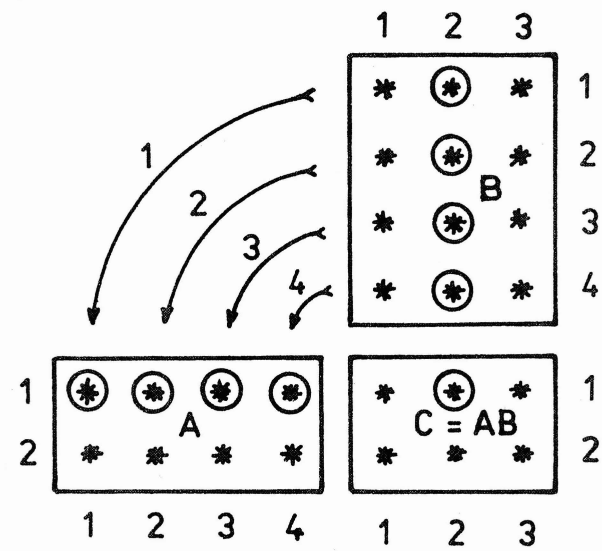
$$[C] = [A][B] . \tag{3.11}$$

Součin dvou matic $[A][B]$ je tedy definován rovnicemi (3.11) a (3.8), ovšem jen pro čtvercové matice (2 x 2). Zobecnění je však snadné. <u>Říkáme, že matice $[C]$ je součinem matic $[A][B]$, je-li</u>

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \, , \tag{3.12}$$

<u>kde n je počet řádků matice $[B]$ a zároveň počet sloupců matice $[A]$. Není-li tento počet stejný, nelze matice násobit.</u>

Matice tedy mohou být obecně obdélníkové, má-li levá matice tolik sloupců, kolik má pravá řádků. Z příkladu na obr. 3.2 je nejlépe vidět, jak se při násobení postupuje. Je na něm schéma pro výpočet součinu matic podle (3.11), přičemž prvky matice jsou nahrazeny obecně hvězdičkami. Čísla vně rámečků znamenají pořadová čísla řádků, resp. sloupců. Chceme-li např. určit prvek c_{12}, který je v matici $[C]$ v prvním řádku a v druhém sloupci, vezmeme druhý sloupec matice $[B]$ a překlopíme jej na první řádek matice $[A]$ (ovšem jen ve svých představách).



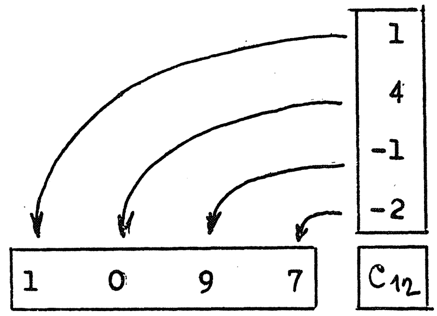
Obr. 3.2

Překlopení vyznačují šipky. Stejnolehlé zakroužkované prvky pak mezi sebou znásobíme a výsledky sečteme. Je-li např. dáno

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = C = AB$$

myslíme si



a vypočítáme prvek c_{12} jako součet

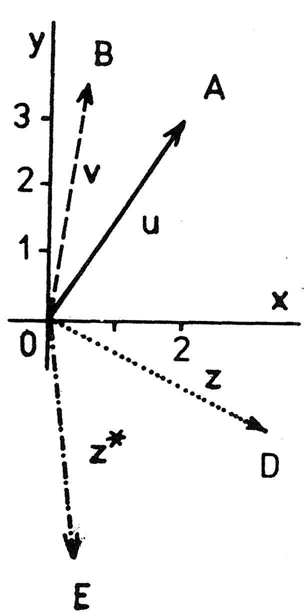
$$c_{12} = 1.1 + 0.4 - 9.1 - 7.2 = 1 + 0 - 9 - 14 = -22.$$

Celkem dostaneme

$$[C] = \begin{bmatrix} 25 & -22 & 87 \\ 16 & 23 & 71 \end{bmatrix}.$$

To je tedy v uvedeném případě součin $[A][B]$. Kdybychom obrátili pořadí činitelů a chtěli určit součin $[B][A]$, nebyl by definován, neboť počet řádků matice $[A]$ není stejný jako počet sloupců matice $[B]$ $(2 \neq 3)$. Obecně platí toto pravidlo:

má-li matice $[A]$ velikost $(p \times q)$ a matice $[B]$ velikost $(q \times r)$, má součin $[A][B]$ velikost $(p \times r)$. První číslo v závorce udává počet řádků, druhé počet sloupců.



Obr. 3.3

Snadno se přesvědčíme, že pravidlo (2.12) pro násobení matice $[A]$ vektorem $\{x\}$ souhlasí s pravidlem (3.12), má-li matice $[B]$ jediný sloupec. Stačí, přiřadíme-li x_i k prvku b_{i1}. Prvky vektoru $\{x\}$ bychom sice mohli – aby shoda byla úplná – také považovat za dvouindexové veličiny a značit je x_{i1}, ale je zvykem značit prvky vektorů jen jedním indexem.

Kdybychom obrátili pořadí transformací na obr. 3.1, kdybychom tedy nejprve vektor $\overrightarrow{OA}$ pootočili o 30 ° a pak našli jeho zrcadlový obraz k ose x, dostali bychom vektor $\overrightarrow{OE}$ (obr. 3.3), který by se lišil od vektoru $\overrightarrow{OD}$. Vyjde

$$\overrightarrow{OE} = \{z^*\} = \begin{Bmatrix} x_E \\ y_E \end{Bmatrix} = [B][A]\{u\} \qquad (3.13)$$

a po dosazení

$$\begin{Bmatrix} x_E \\ y_E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 \\ 0{,}500 & 0{,}866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 \\ -0{,}500 & -0{,}866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}232 \\ -3{,}598 \end{Bmatrix}. \tag{3.14}$$

Je tedy v našem případě

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}500 \\ 0{,}500 & -0{,}866 \end{bmatrix}, [B][A] = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 \\ -0{,}500 & -0{,}866 \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Oba součiny se zřejmě liší. Násobení matic není obecně komutativní (pořadí činitelů nelze zaměnit), a to ani u čtvercových matic. */ Násobení matic je však asociativní, tj.

$$([A][B])[C] = [A]([B][C]). \tag{3.16}$$

Lze tedy úhrnem říci, že pro sečítání a odčítání a pro násobení matic platí pravidla, na jaká jsme zvyklí z "obyčejné" algebry s tou výjimkou, že pořadí činitelů nelze zaměnit. Např. v rovnici

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD \;. \tag{3.17}$$

nelze psát CA místo AC apod.

Transformace, které jsme až dosud v příkladech ukázali, nezměnily délku výsledného vektoru. Obecně by to tak nemuselo být. Např. transformace

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \{u\} = \{w^*\} \tag{3.18}$$

změní vektor $\{u\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$ o délce $\sqrt{13}$ na vektor $w^* = \begin{Bmatrix} 1 \\ -15 \end{Bmatrix}$ o délce $\sqrt{226}$.

Pro determinant součinu čtvercových matic A , B platí vztah

$$|AB| = |A| . |B| . \tag{3.19}$$

Doporučujeme čtenáři, aby se o tom přesvědčil na příkladech, které si sám zvolí.

---

*/ Komutativní jsou pouze matice, které mají společné vlastní vektory (viz kap. 7).

4. O RŮZNÝCH DRUZÍCH MATIC

Čtenáře, který by dokázal soustředěně sledovat výklad až sem, bude nyní velice zajímat, je-li nějak definováno dělení matic. Bude zklamán, doví-li se, že není. */ Uvažujme např. o maticové rovnici (2.11), totiž $Ax = y$ (ve zkráceném zápisu bez závorek). Její řešení nelze napsat jako $x = y/A$, neboť takový zápis by neměl smysl. Soustava (2.11) však přesto může mít (za určitých předpokladů) řešení x . Jak je budeme značit a jak je budeme počítat? Než na tuto otázku odpovíme, zavedeme některé nové pojmy, které budeme potřebovat.

Diagonální matice je čtvercová matice, která má všechny prvky mimo hlavní diagonálu nulové. Hlavní diagonála je úhlopříčka, která se táhne zleva nahoře vpravo dolů. Je tedy $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. O tom, jaké jsou prvky a_{ii} , se neříká nic. Na hlavní diagonále mohou být čísla nenulová i nulová.

Jednotková matice je pak zvláštním případem diagonální matice, má na hlavní diagonále pouze jedničky. Platí-li pro dvě čtvercové matice, že jejich součin je právě jednotková matice $[I]$, tj.

$$[A][B] = [I] \tag{4.1}$$

je $[A]$ inverzní maticí k $[B]$ a naopak. Pak píšeme, že

$$[A] = [B]^{-1}, \qquad \text{popř.} \quad [B] = [A]^{-1}. \tag{4.2}$$

Je tedy

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]. \tag{4.3}$$

Z rovnice (3.19) a (4.1) vychází, že součin determinantů $|A|.|B| = 1$, takže žádný z determinantů $|A|$, $|B|$ se nemůže rovnat nule.

Uvedeme příklad součinu dvou vzájemně inverzních matic

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

---

*/ V literatuře bývá někdy násobení inverzní maticí nazýváno "dělení". Zde však budeme tyto pojmy rozlišovat.

Můžeme se přesvědčit, že každá z uvedených matic má determinant rovnající se jedné, takže rovnice (3.19) je splněna. Známe-li k dané matici $[A]$ příslušnou inverzní matici $[A]^{-1}$, můžeme snadno vypočítat řešení soustavy rovnic

$$[A]\{x\} = \{y\} . \tag{4.5}$$

Násobíme tuto rovnici zleva maticí $[A]^{-1}$, takže budeme mít

$$[A]^{-1}[A]\{x\} = [I]\{x\} = [A]^{-1}\{y\} . \tag{4.6}$$

Protože násobením jednotkovou maticí se nic nezmění, $[I]\{x\} = \{x\}$, vyjde

$$\{x\} = [A]^{-1}\{y\} . \tag{4.7}$$

Násobení inverzní maticí tedy nahrazuje obvyklé "dělení". Např. soustava rovnic

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

má řešení, které můžeme napsat s přihlédnutím ke (4.4) takto:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} . \tag{4.9}$$

Vidíme, že inverzní matici v rovnici (4.9) dostaneme ze čtvercové matice v rovnici (4.8) jednoduše řešením lineární soustavy rovnic (4.8) (jakýmkoli způsobem). Má-li být soustava (4.8) řešitelná, musí být determinant čtvercové matice různý od nuly. Taková matice je <u>regulární</u>. Je-li determinant matice nulový, je matice <u>singulární</u>. K singulární matici neexistuje inverzní matice.

Při násobení matic se může vyskytnout neobvyklý výsledek. Uvedeme příklad nulového součinu dvou nenulových matic

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{4.10}$$

Na pravé straně je <u>nulová matice</u>, jejíž všechny prvky se rovnají nule, na levé straně jsou nenulové matice. To je jistě překvapující výsledek.

Překvapení bude menší, řekneme-li, že nenulové matice v rovnici (4.10) jsou singulární.

Je-li ve čtvercové matici $a_{ij} = a_{ji}$, je matice souměrná. Zaměníme-li v matici řádky a sloupce, dostaneme matici transponovanou. Je tedy

$$[A] = [a_{ij}], \qquad [A]^T = [a_{ji}]. \tag{4.11}$$

Pro souměrnou matici platí, že $[A]^T = [A]$. Transpozicí vektoru dostaneme jednořádkovou matici. Snadno se přesvědčíme dosazením, že transpozicí součinu se mění pořadí činitelů, takže */

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T. \tag{4.12}$$

Je-li $\{x\} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$, dává součin

$$\{x\}^T\{x\} = [x_1\ x_2\ x_3]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}. \tag{4.13}$$

Na pravé straně této rovnice je jednoprvková matice (má jen jeden řádek a jeden sloupec), je to tedy skalár. Ten má v tomto případě význam kvadrátu "délky" vektoru $\{x\}$. O délce mluvíme v přeneseném slova smyslu, protože nemusí jít o skutečnou délku (může jít např. o vektor síly nebo o jinou fyzikální veličinu nebo o soustavu nepojmenovaných čísel; vektor také může mít více než tři prvky). Přesněji bychom mohli říci, že $\|x\|^2 = \{x\}^T\{x\}$ je čtvercem normy $\|x\|$ vektoru $\{x\}$. O normách matic budeme hovořit v 11. kapitole.

Ptejme se, za jakých okolností se daný vektor $\{x\}$ transformuje operátorem $[A]$ do vektoru $\{y\}$ o stejné normě (tj. jakou operací se "délka" vektoru nemění). Nejprve rozepíšeme součin

$$\{y\}^T\{y\} = ([A]\{x\})^T[A]\{x\} = \{x\}^T[A]^T[A]\{x\}. \tag{4.14}$$

Chceme-li, aby $\{y\}^T\{y\} = \{x\}^T\{x\}$, musí být

$$[A]^T[A] = I \tag{4.15}$$

---

*/ Z rovnice (3.12) totiž vyjde

$$c_{ij}^T = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^T a_{kj}^T.$$

čili

$$[A]^T = [A]^{-1}. \tag{4.16}$$

Reálná matice, u níž se shodují transponovaná a inverzní matice, se nazývá ortogonální matice. Násobíme-li ji vektorem, způsobí jeho ortogonální transformaci. Nazývá se tak proto, že se při ní zachovává pravý úhel mezi kolmými vektory. Ortogonální transformace je užší pojem než lineární transformace. Např. transformace (3.18) je sice lineární, ale není ortogonální (mění pravé úhly). Ortogonální byla např. matice (2.8); pro ni platí - až na zaokrouhlovací chyby - vztah (4.15), neboť

$$\begin{bmatrix} 0,866 & -0,500 \\ 0,500 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,866 & 0,500 \\ -0,500 & 0,866 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Ortogonální transformace tedy zachovávají normu vektorů. Svírají-li dva vektory před ortogonální transformací nějaký orientovaný úhel, svírají po ní úhel, který se může od předchozího lišit pouze znaménkem.

Pojem úhlu mezi vektory musíme ještě objasnit. Pro vektory v třírozměrném euklidovském prostoru máme přímou geometrickou představu. Úhel φ mezi vektory $\vec{a} = \{a\}$, $\vec{b} = \{b\}$ můžeme vypočítat z definice skalárního součinu

$$\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| . \cos\varphi, \tag{4.18}$$

čili

$$\{a\}^T \{b\} = \sqrt{\{a\}^T \{a\}} \cdot \sqrt{\{b\}^T \{b\}} \cdot \cos\varphi . \tag{4.19}$$

Odtud (již bez složených závorek)

$$\cos\varphi = \frac{a^T b}{\sqrt{a^T a} \sqrt{b^T b}} . \tag{4.20}$$

Tutéž definici i tentýž vzorec použijeme také pro vektory z prostoru o větším počtu dimenzí než tři. Jde pak o úhel v přeneseném smyslu slova, pro který nemáme přímou geometrickou představu. Takové zobecnění je zcela nenásilné a užitečné, jak jsme se ostatně již mohli přesvědčit.

Součin matic lze podle (4.12) transponovat vždy. Podobný vztah platí i o inverzi součinu, totiž

$$([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}. \tag{4.21}$$

Tento vztah má však význam jen tehdy, jsou-li matice $[A]$, $[B]$ čtvercové a regulární.

U matic, jejichž prvky jsou komplexní čísla, nahrazujeme pojem transponované matice $[A]^T$ pojmem hermiteovsky sdružené matice $[A]^H$. Je to transponovaná matice, u které však zároveň zaměníme všechny prvky za komplexně sdružená čísla. */ Např.

$$\begin{bmatrix} 2 + 3i & 4 \\ -7i & 3 + 5i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 2 - 3i & 7i \\ 4 & 3 - 5i \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Stejné pravidlo přijmeme i pro hermiteovsky sdružené vektory. Norma komplexního vektoru $\|x\|$ pak vyjde reálná

$$\|x\| = \sqrt{\{x\}^H \{x\}} . \tag{4.23}$$

Platí-li pro komplexní matici vztah

$$[A]^H = [A]^{-1}, \tag{4.24}$$

který je obdobou vztahu (4.16), nazývá se taková matice unitární.

Má-li matice nenulové prvky jen na hlavní diagonále a pod ní, je to dolní trojúhelníková matice. Obdobně je definována i horní trojúhelníková matice. Jsou-li nenulové prvky soustředěny jen ve víceméně úzkém pásu kolem hlavní diagonály, jde o pásovou matici. Rozlišení těchto druhů matic má význam při numerických výpočtech. Paměť počítače se ušetří, neukládají-li se prvky z nulových polí trojúhelníkových a pásových matic. U souměrných matic se paměť ušetří tím, že se ukládá jen jejich trojúhelníková část. Rozklad matice do součinu dolní a horní trojúhelníkové matice se využívá mj. v Choleského metodě výpočtu inverzní matice.

---

*/ Charles HERMITE (1822 až 1901), francouzský matematik.

Existují samozřejmě i mocniny čtvercových matic, např.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad [A]^2 = [A][A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix},$$

$$[A]^3 = [A]^2[A] = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 19 & 27 \end{bmatrix} \quad \text{atd.} \tag{4.25}$$

Z důvodů, které vyložíme v 10. kapitole, platí pro tuto matici, že

$$[A]^2 = 5[A] - 6[I]. \tag{4.26}$$

Skutečně platí, že

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

takže podle (4.26)

$$[A]^3 = 5[A]^2 - 6[A] \tag{4.27}$$

a po dosazení za $[A]^2$ z rovnice (4.26)

$$[A]^3 = 19[A] - 30[I]. \tag{4.28}$$

Ponecháváme čtenáři, aby se o tom přesvědčil. Tímto rekurentním způsobem bychom nyní mohli počítat i mocniny vyšších stupňů.

Budeme jistě překvapeni zjištěním, že existují matice, které nejsou jednotkové, ale přesto splňují podmínku

$$[A]^k = [A] \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.29}$$

Takové matice se nazývají idempotentní. Je to např. matice

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ -3 & -6 & -9 \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

Platí-li pro nějakou nenulovou čtvercovou matici, že

$$[A]^n = [0] \tag{4.31}$$

(n je přirozené číslo), je to matice nilpotentní. Např. pro matici

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.32)$$

platí, že $[A]^3 = [0]$ a samozřejmě všechny vyšší mocniny než druhá jsou nulové.

Připojíme ještě poznámku k výpočtu inverzní matice. Řešíme-li soustavu $[A]\{x\} = \{y\}$ Cramerovým pravidlem, dojdeme k tomuto postupu sestavení inverzní matice:

1. prvky dané matice nahradíme jim příslušnými minory, */
2. u minoru M_{ij} změníme znaménko, je-li $i + j$ liché číslo. Tak vzniknou doplňky $(-1)^{i+j} M_{ij} = A_{ij}$,
3. vzniklou matici transponujeme a dělíme determinantem původní matice.

Postup ukážeme na příkladu matice

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix} . \qquad (4.33)$$

Např. k prvku $a_{12} = 2$ je příslušný minor

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 12 = 24 \qquad (4.34)$$

a doplněk $A_{12} = -M_{12} = -24$ (neboť $1 + 2 = 3$ = liché číslo).
Podobně vypočítáme

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3 ,$$

$$A_{32} = -M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 ,$$

$$A_{23} = -M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{atd.}$$

---

*/ Minor je determinant matice, která vznikne z původní matice vynecháním sloupce a řádku s daným prvkem.

Matice sestavená z doplňků je

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} -3 & -24 & 22 \\ 6 & 3 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} . \qquad (4.35)$$

Dělíme ji determinantem $|A| = 15$ a transponujeme. Dostaneme

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{22}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} . \qquad (4.36)$$

Tento postup výpočtu inverzní matice dává pro matici druhého řádu vzorec

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} . \qquad (4.37)$$

Pro matice vyššího než asi třetího nebo čtvrtého řádu se tato metoda výpočtu inverzní matice nehodí, protože existují efektivnější metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic, a tedy i efektivnější metody výpočtu inverzní matice. Nebudeme je však probírat. Čtenář je nalezne v kterékoli učebnici numerické matematiky.

5. HODNOST MATICE

Pro klasifikaci soustav lineárních algebraických rovnic a k posouzení některých vlastností matice zavedeme pojem hodnosti matice. Říkáme, že matice $[A]$ tvaru $(m \times n)$ má hodnost r, rovnají-li se všechny její determinanty vyššího než r-tého stupně nule a alespoň jeden determinant r-tého stupně je různý od nuly. */

*/ Je zvykem značit hodnost r podle angl. "rank", resp. ruského "rang".

Protože absolutní hodnota determinantu se nezmění, změníme-li pořadí řádků (nebo sloupců), ani přičteme-li k libovolnému řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců), jsou tyto úpravy dovoleny i při určování hodnosti matice. Abychom nemusili počítat determimanty, což je u velkých matic vždy pracné, upravujeme matici tak dlouho, až máme všechny prvky pod hlavní diagonálou nulové. Objeví-li se přitom v některém řádku (nebo sloupci) samé nuly, vynecháme jej. Pokračujeme tak dlouho, až jsou na hlavní diagonále jen nenulové prvky. Počet řádků takto upravené matice se pak rovná hodnosti původní matice.

Např. matici

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

upravíme tak, že druhý řádek nahradíme rozdílem druhého řádku a pětinásobku prvního řádku. Podobně třetí řádek nahradíme rozdílem třetího a dvojnásobku prvního řádku. Tím dostaneme v prvním sloupci na druhém a třetím řádku nuly. Vyjde

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & -16 & -22 \\ 0 & 5 & -8 & -11 \end{bmatrix} . \tag{5.2}$$

Nyní odečteme od druhého řádku dvojnásobek třetího. V druhém řádku tak dostaneme samé nuly, takže druhý řádek vynecháme. Zbývá

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -8 & -11 \end{bmatrix} . \tag{5.3}$$

Hodnost původní matice je stejná jako této upravené matice. Rovná se dvěma. Hlavní diagonálu zde tvoří číslice 1, 5.

Uvedeme ještě jiný příklad, totiž matici

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} . \tag{5.4}$$

Nejprve odečteme od dvojnásobku třetího řádku pětinásobek prvního řádku a takto vzniklou kombinací nahradíme třetí řádek

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} . \qquad (5.5)$$

Pak sloučíme jedenáctinásobek druhého řádku s třetím řádkem; dostaneme nulový řádek, který vynecháme. Zbude

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (5.6)$$

Matice (5.4) má proto hodnost dvě.

Je zřejmé, že nulovou hodnost má pouze nulová matice. Je-li matice obdélníková ($m \times n$), rovná se hodnost maximálně menšímu z obou čísel m, n.

Má-li čtvercová matice ($n \times n$) hodnost $r < n$, má nulitu $n - r$. Nulita matice udává stupeň její degenerace. Je-li $n = r$, je matice regulární.

6. ROZDĚLENÉ MATICE

Matice lze rozdělit na menší celky - submatice - a počítat s nimi, jako by šlo o prvky matice. Ukážeme to na příkladu. Je dána soustava rovnic v maticovém zápisu

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 3 \\ -5 \\ \hline -6 \\ 5 \\ 5 \end{array}\right\} . \qquad (6.1)$$

Soustavu rozdělíme, jak je naznačeno čárkovanými čarami.

Dostaneme ve zkráceném zápisu

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u \\ \hline v \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} a \\ \hline b \end{array}\right\} . \tag{6.2}$$

Zde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \text{atd.}$$

Zajímáme-li se jen o první dvě neznámé, můžeme další tři vyloučit, a to tak, že vyloučíme celý vektor $\{v\}$. Rozepíšeme-li (6.2), máme (bez závorek)

$$\begin{aligned} Au + Bv &= a, \\ Cu + Dv &= b. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Je samozřejmé, že rozdělení matic a vektorů v rovnici (6.1) musí být takové, aby se rozpisem (6.3) neporušilo pravidlo o násobení, tj. levý činitel musí mít vždy tolik sloupců, kolik má pravý činitel řádků.
Za předpokladu, že D je regulární matice, dostaneme podle druhé z rovnic (6.3)

$$v = D^{-1}(b - Cu). \tag{6.4}$$

Dosazením do první rovnice dostáváme

$$Au + BD^{-1}b - BD^{-1}Cu = a. \tag{6.5}$$

Odtud

$$u = (A - BD^{-1}C)^{-1}(a - BD^{-1}b). \tag{6.6}$$

Uspořádáme-li součiny matic obdobně jako na obr. 3.2, bude

$$\begin{array}{ccc} & \overset{D^{-1}}{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}} & \overset{C}{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \\ \underset{B}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}} & \underset{BD^{-1}}{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 14 & 16 & 0 \\ 8 & -8 & 6 \end{bmatrix}} & \underset{BD^{-1}C}{\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 58 & -28 \\ 16 & -16 \end{bmatrix}} . \end{array} \tag{6.7}$$

Dále dostaneme

$$A - BD^{-1}C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -23 & 17 \\ -8 & 11 \end{bmatrix},$$

$$a - BD^{-1}b = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 11 \\ 14 \end{Bmatrix} \tag{6.8}$$

a konečně podle (6.6)

$$u = -\frac{3}{117}\begin{bmatrix} 11 & -17 \\ 8 & -23 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 11 \\ 14 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{117}\begin{Bmatrix} -117 \\ -234 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}. \tag{6.9}$$

Kdybychom chtěli dodatečně vypočítat vektor v , stačí dosadit do rovnice (6.4); vyjde

$$v = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} -6 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6+1 \\ 5-1 \\ 5-0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}. \tag{6.10}$$

Tak jsme dostali řešení celé soustavy rovnic (6.1), aniž jsme invertovali matici (5 x 5). Rozdělením se tedy můžeme vyhnout nutnosti invertovat velkou matici.

Transponujeme-li rozdělenou matici, musíme transponovat nejen matici, ale též každou submatici. Např.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^T = \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array}\right]. \tag{6.11}$$

7. VLASTNÍ HODNOTY A VLASTNÍ VEKTORY

Ukázali jsme, že čtvercovou matici $[A]$ lze považovat za operátor, který transformuje daný vektor $\{x\}$ v jiný vektor $\{y\}$ (ve stejném prostoru). Tato transformace je popsána rovnicí

$$[A]\{x\} = \{y\} . \tag{7.1}$$

Položme si otázku, existuje-li nějaký vektor $\{x\}$, který by se tímto předpisem transformoval ve vektor $\lambda\{x\}$ téhož směru (λ = konst). Zřejmě by musilo pro takový vektor platit, že

$$[A]\{x\} = \lambda\{x\} . \tag{7.2}$$

To je však homogenní soustava lineárních rovnic

$$([A] - \lambda[I])\{x\} = \{0\} , \tag{7.3}$$

která má řešení $\{x\} = \{0\}$. Toto řešení neobsahuje žádnou cennou informaci a nezajímá nás. Nenulová řešení však můžeme dostat jen tehdy, nejsou-li rovnice (7.3) všechny nezávislé, tj. je-li matice v kulaté závorce singulární. Její determinant se pak musí rovnat nule, takže

$$|[A] - \lambda[I]| = 0 . \tag{7.4}$$

Anulováním determinantu dostaneme algebraickou rovnici pro vlastní hodnoty λ , pro něž má soustava rovnic (7.3) netriviální řešení. Ke každé vlastní hodnotě existuje zpravidla (ale ne vždy) jeden normovaný vlastní vektor $\{x\}$, který splňuje nejen (7.3), ale i normalizační podmínku

$$\{x\}^T\{x\} = 1 . \tag{7.5}$$

Normalizační podmínka vyloučí mnohoznačnost, která je dána tím, že každý násobek vlastního vektoru je opět vlastní vektor [znásobíme-li vlastní vektor libovolnou konstantou, bude (7.3) pořád platit] .

Uvedeme příklad. Najdeme vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{7.6}$$

Rovnice (7.4) dá

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) - (-1).2 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 . \tag{7.7}$$

Tato rovnice má dva kořeny, totiž $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Pro první z nich dá (7.3)

$$2x_1 + 2x_2 = 0,$$
$$-x_1 - x_2 = 0.$$

Tyto rovnice jsou lineárně závislé, můžeme proto jednu z nich vynechat. Řešení je pak $x_1 = c$, $x_2 = -c$ pro jakoukoli konstantu c. Normalizační podmínka (7.5) požaduje, aby $x_1^2 + x_2^2 = 1$, takže $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Normovaný vlastní vektor tedy je

$$\{x\}_{\lambda=\lambda_1} = \{u\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{Bmatrix} \doteq \begin{Bmatrix} 0,707 \\ -0,707 \end{Bmatrix} . \tag{7.8}$$

Podobně najdeme i druhý vlastní vektor pro $\lambda_2 = 3$. Vyjde

$$\{x\}_{\lambda=\lambda_2} = \{v\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix} \doteq \begin{Bmatrix} 0,894 \\ -0,447 \end{Bmatrix} . \tag{7.9}$$

Vektory (7.8) a (7.9) jsou normované. Kdybychom se spokojili s nenormovanými vektory, mohli jsme místo (7.8) napsat vlastní vektor $[1 \quad -1]^T$ a místo (7.9) třeba $[2 \quad -1]^T$ nebo libovolný jiný násobek.

Čtvercová matice ($n \times n$) má charakteristickou rovnici (7.4) n-tého stupně. Protože je to algebraická rovnice, má vždy n kořenů (reálných nebo komplexních). Některé z nich mohou být násobné. Taková matice může, ale nemusí mít n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Např. matice

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

má vlastní hodnoty $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, k nimž přísluší jediný normovaný vlastní vektor

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{Bmatrix} . \tag{7.11}$$

Je to tedy tzv. <u>defektní matice</u>, neboť počet lineárně nezávislých vlastních vektorů je menší než řád matice. Později ukážeme, že souměrná či hermiteovská matice nemůže být defektní.

Naproti tomu matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

má také dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, ale přesto má dva nezávislé normované vlastní vektory

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \{v\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{7.13}$$

Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k určité násobné vlastní hodnotě λ_p je zřejmě dán nulitou matice $([A] - \lambda_p [I])$.

Protože každá lineární kombinace vlastních vektorů příslušných k téže násobné vlastní hodnotě je opět vlastním vektorem, má matice (7.12) nekonečně mnoho vlastních vektorů. Můžeme však z nich vybrat určitý počet lineárně nezávislých vektorů, tvořících vektorovou bázi, a všechny ostatní vlastní vektory vynechat, neboť jsou odvozeny lineární kombinací zvolené vektorové báze a nepřinášejí z matematického hlediska žádnou novou informaci. Způsob výběru bázových vektorů není ovšem jediný. Např. vektory (7.13) bychom mohli nahradit těmito dvěma bázovými vektory */

$$\{\tilde{u}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{Bmatrix}, \qquad \{\tilde{v}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{Bmatrix}. \tag{7.14}$$

Závorky vyznačující matice a vektory budeme nyní pro stručnost vynechávat. Uvedeme důležitou větu o vlastních vektorech. <u>Jsou-li všechny kořeny charakteristické rovnice (7.4) navzájem různé, jsou všechny normované vlastní vektory lineárně nezávislé.</u> To dokážeme sporem. Budeme předpokládat jejich lineární závislost, což znamená, že existuje vztah

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0, \tag{7.15}$$

---

*/ Zřejmě $\tilde{u} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(u+v)$, $\tilde{v} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-u+v)$. Protože u, v příslušejí k téže vlastní hodnotě $\lambda_1 = \lambda_2$, jsou $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ rovněž vlastní vektory.

v němž u_i je normovaný vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), c_1 až c_n jsou konstanty, které se zároveň všechny nerovnají nule. Obě strany poslední rovnice nyní znásobíme součinem

$$P = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) \ldots (A - \lambda_n I) . \tag{7.16}$$

Protože $(A - \lambda_i I) u_i = A u_i - \lambda u_i = 0$ [$u_i = x$, když $\lambda = \lambda_i$ v rovnici (7.2)], odpadnou na levé straně rovnice (7.15) všechny členy až na první. Na pravé straně je nula. Dostaneme tedy $c_1 P u_1 = 0$. Přitom P je čtvercová regulární matice a součin $P u_1$ je vektor různý od nuly (λ_1 je podle předpokladu jednoduchý kořen charakteristické rovnice). Proto $c_1 = 0$ je v rozporu s předpokladem. Vektory u_1 , u_2 , ..., u_n jsou tedy lineárně nezávislé, neboť (7.15) neplatí.

Je-li matice $[A]$ obecně nesouměrná, může mít i komplexní vlastní hodnoty; o jejích vlastních vektorech toho nemůžeme mnoho říci. Jde-li však o souměrnou nebo hermiteovskou matici, můžeme snadno dokázat, že její vlastní hodnoty jsou vždy reálné. Abychom to ukázali, utvoříme nejprve kvadratickou formu matice $[A]$ s libovolným vektorem $\{x\}$

$$Q = x^H A x . \tag{7.17}$$

Zde x je obecně komplexní vektor, A souměrná nebo hermiteovská matice. Q je jednoprvková matice (1×1) , tedy číslo, neboť matice v součinu na pravé straně mají rozměry $(1 \times n)(n \times n)(n \times 1)$. Číslo k němu komplexně sdružené je Q^H , takže

$$Q^H = (x^H A x)^H = x^H A^H x . \tag{7.18}$$

Protože A je hermiteovská matice, je $A^H = A$ a $Q^H = Q$. Takže číslo Q je nutně reálné. Pro normovaný vlastní vektor platí vztah

$$A u = \lambda u . \tag{7.19}$$

Násobíme-li tuto rovnici zleva hermiteovsky sdruženým vektorem u^H , vyjde

$$u^H A u = \lambda u^H u . \tag{7.20}$$

Protože $Q = u^H A u$ a norma $\sqrt{u^H u} = 1$, je $\lambda = Q$ = reálné číslo.

Nadále budeme předpokládat, že matice je souměrná (a tedy reálná). Jsou-li vlastní čísla všechna navzájem různá, jsou vlastní vektory souměrné matice ortogonální. Abychom to dokázali, vybereme dvě vlastní hodnoty λ_i , λ_k a k nim příslušné vlastní vektory u_i , u_k . Pak

$$A u_i = \lambda_i u_i ,$$
$$A u_k = \lambda_k u_k . \quad (7.21)$$

Druhou rovnici budeme transponovat; dostaneme

$$u_k^T A^T = u_k^T A = \lambda_k u_k^T . \quad (7.22)$$

První z rovnic (7.21) násobíme zleva transponovaným vektorem u_k^T . Vyjde

$$u_k^T A u_i = \lambda_i u_k^T u_i . \quad (7.23)$$

Levou stranu upravíme s použitím (7.22)

$$\lambda_k u_k^T u_i = \lambda_i u_k^T u_i . \quad (7.24)$$

Je tedy

$$(\lambda_k - \lambda_i) u_k^T u_i = 0 . \quad (7.25)$$

Protože $\lambda_k \neq \lambda_i$, je

$$u_k^T u_i = 0, \qquad \text{pro} \quad i \neq k . \quad (7.26)$$

To je však podmínka ortogonality (skalární součin vektorů u_k , u_i je nulový).

Stejná věta platí i o hermiteovských maticích. Stačí v důkazu nahradit symbol T pro transpozici symbolem H pro hermiteovskou transpozici (při ní se kromě výměny řádků za sloupce a naopak mění čísla v komplexně sdružená čísla). Podmínka ortogonality (7.26) se pak nahradí obecnějším tvarem $u_k^H u_i = 0$ pro $i \neq k$ (vektory u_k , u_i jsou unitární).

Je-li tedy matice $[A]$ souměrná typu $(n \times n)$, má n reálných vlastních hodnot. Jsou-li všechny navzájem různé, přísluší k nim n normovaných vlastních vektorů, které jsou navzájem ortogonální. Lze ukázat, že i tehdy, jsou-li vlastní hodnoty násobné, lze vlastní vektory ortogonalizovat (vybrat vzájemně kolmé a lineárně nezávislé vlastní vektory), takže vždy existuje ortogonální vektorová báze s plným počtem n vlastních vektorů. */ Souměrné matice mají tedy významné matematické vlastnosti.

---

*/ Výběr ortogonálních vektorů jsme ukázali u matice (7.12). Výběr nebyl jednoznačný, asi jako není jednoznačnou úloha vybrat v kružnici dva vzájemně kolmé průměry.

Úlohy z dynamiky soustav těles vedou často k soustavě rovnic v maticovém tvaru

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F(t)\}. \qquad (7.27)$$

Zde $[M]$ je matice hmotnosti, $[K]$ matice tuhosti, $\{q\}$ značí vektor zobecněných souřadnic a $\{F\}$ vektor budicích sil. Matice hmotnosti a matice tuhosti jsou souměrné. Hledáme-li vlastní kmity, dosadíme $\{q\} = \{x\} e^{i\omega t}$, $\{F\} = \{0\}$ a dostaneme

$$\omega^2 [M]\{x\} = [K]\{x\}. \qquad (7.28)$$

Je-li matice tuhosti $[K]$ regulární, stačí dosadit

$$[K]^{-1}[M] = [A], \qquad \frac{1}{\omega^2} = \lambda \qquad (7.29)$$

a vyjde rovnice ve tvaru (7.2). Máme-li regulární matici hmotnosti, můžeme dosadit

$$[M]^{-1}[K] = [A], \qquad \omega^2 = \lambda \qquad (7.30)$$

a vyjde týž základní tvar. Oba tyto postupy jsou nevýhodné v tom, že vedou obecně k nesouměrné matici $[A]$. Obecně totiž */

$$(K^{-1}M)^T = M^T K^{-T} = M K^{-1} \neq K^{-1} M. \qquad (7.31)$$

Proto je výhodné rozložit matici $[M]$ na součin trojúhelníkových matic (za předpokladu, že $[M]$ je regulární)

$$[M] = [H]^T [H] \qquad (7.32)$$

$[H]^T$ je dolní, $[H]$ horní trojúhelníková matice. Způsob tohoto rozkladu je v literatuře znám jako Choleského metoda. Místo rovnice (7.28) bude nyní

$$\omega^2 H^T H x = K x. \qquad (7.33)$$

Dosadíme novou proměnnou

$$H x = y \qquad (7.34)$$

---

*/ Pro souměrnou matici platí, že $A^T = A$, což matice $(K^{-1}M)$ podle (7.31) nesplňuje.

a dostaneme

$$\omega^2 H^T y = K H^{-1} y . \tag{7.35}$$

Konečně znásobíme obě strany rovnice zleva maticí H^{-T} a dostaneme

$$\omega^2 y = H^{-T} K H^{-1} y . \tag{7.36}$$

S označením

$$\begin{aligned} H^{-T} K H^{-1} &= A \\ \omega^2 &= \lambda \end{aligned} \tag{7.37}$$

získáme opět známý tvar

$$A y = \lambda y , \tag{7.38}$$

v němž A je souměrná matice.

Z rovnic (7.30), popř. (7.37) je vidět, že reálnou hodnotu vlastní kruhové frekvence ω můžeme dostat jen tehdy, je-li také vlastní hodnota λ matice $[A]$. reálná a nezáporná. Tak tomu bude, když kvadratická forma $x^T A x$ této matice bude pro jakýkoli (reálný) vektor x nezáporná. Říkáme pak, že je pozitivně semidefinitní. Podrobněji o tom budeme hovořit v osmé kapitole.

8. GEOMETRICKÝ VÝZNAM VLASTNÍCH HODNOT A VLASTNÍCH VEKTORŮ

Rozepišme kvadratickou formu např. pro matici druhého řádu. Dostaneme

$$Q = [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 . \tag{8.1}$$

Je zřejmé, že z koeficientů a_{12} , a_{21} se zde uplatní jen jejich součet. Tuto mnohoznačnost vyloučíme předpokladem, že $a_{12}=a_{21}$, tj. že <u>matice $[A]$ je souměrná</u>. Pak bude k dané kvadratické formě příslušet jen jedna matice, jejíž prvky lze jednoznačně sestavit z činitelů této formy.

V dalším výkladu se tedy omezíme na kvadratickou formu tvořenou se souměrnou maticí. Prvky vektoru $\{x\}$ mohou být jakákoli reálná čísla, nemohou se však zároveň všechny rovnat nule (to by znamenalo vymizení kvadratické formy). Na příkladu kvadratické formy (8.1) (v níž $a_{12}=a_{21}$, se můžeme přesvědčit, že kvadratická forma může být pro jakékoli $\{x\}$ vždy kladná, tj. <u>pozitivně definitní</u> (např. $x_1^2+x_2^2$), kladná nebo nulová, tj. <u>pozitivně semidefinitní</u> (např. $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$), vždy záporná, tj. <u>negativně definitní</u> (např. $-x_1^2-x_2^2$), záporná nebo nulová, tj. negativně <u>semidefinitní</u> (např. $-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2$) nebo nelze nic takového tvrdit a kvadratická forma je <u>indefinitní</u> (např. x_1x_2).
Toto třídění má velký význam v úlohách o vlastních hodnotách.
Matice pozitivně definitní má všechny vlastní hodnoty kladné.

Je-li souměrná matice pozitivně definitní, má všechny hlavní subdeterminanty kladné, tj.

$$|a_{11}|>0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

Tyto subdeterminanty tvoříme postupně z levého horního rohu podél diagonály. Poslední z nich má velikost $n \times n$, jde-li o matici n-tého řádu.

Vraťme se nyní ke kvadratické formě (8.1). Zvolme vektor $\{x\}$ tak, aby $Q=1$. Rovnice

$$Q(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 1 \tag{8.2}$$

představuje v souřadnicích x_1 , x_2 kuželosečku se středem v počátku. V maticovém tvaru

$$Q(x) = x^T A x = 1 . \tag{8.3}$$

Budeme nyní zkoumat vlastnosti této kuželosečky ve vztahu k vlastním hodnotám a vlastním vektorům matice A .

Úlohu o vlastních hodnotách a vektorech vyjadřuje rovnice

$$Ax = \lambda x . \tag{8.4}$$

Vektor $\{x\}$ představuje bod na kuželosečce (8.2). Rovnice (8.4) říká, že tento vektor - je-li vlastním vektorem - má směr normály ke kuželosečce v tomto bodě. Derivací rovnice (8.2) totiž dostaneme

$$\frac{\partial Q}{\partial \{x\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 \\ 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 \end{Bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \qquad (8.5)$$

čili - vynecháme-li závorky, označující matice -

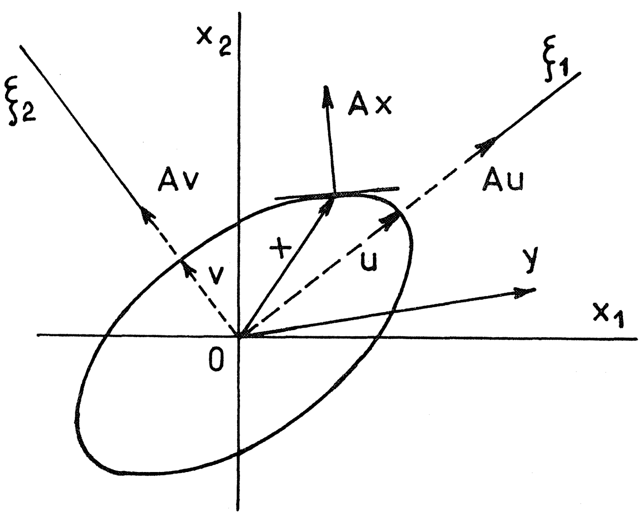
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2Ax\,. \qquad (8.6)$$

Je-li $Q = 1$, je $dQ = 0$. Odtud

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}dx_2 = 0\,. \qquad (8.7)$$

Směrnice tečny ke kuželosečce je $k_t = \frac{dx_2}{dx_1}$ a směrnice normály

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\partial Q/\partial x_2}{\partial Q/\partial x_1}\,. \qquad (8.8)$$



Obr. 8.1

To je však směrnice vektoru (8.5), resp. (8.6). Vektor Ax má proto směr normály ke kuželosečce (8.2) v bodě $x = [x_1, x_2]^T$, obr. 8.1. Je-li $x = u$, resp. $x = v$, je $Au = \lambda_1 u$, resp. $Av = \lambda_2 v$. To jsou hlavní vektory [tentokrát nejsou normovány, protože pro jejich složky musí platit rovnice (8.2) a nikoli (7.5)]. Znásobíme-li tuto rovnici zleva vektorem u^T, resp. v^T, budeme mít

$$u^T A u = \lambda_1 u^T u\,, \qquad (8.9)$$
$$v^T A v = \lambda_2 v^T v\,,$$

S použitím (8.3) odtud vyjde

$$\lambda_1 = \frac{1}{u^T u} = \frac{1}{\|u\|^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{v^T v} = \frac{1}{\|v\|^2}. \tag{8.10}$$

Protože $\|u\|$, resp. $\|v\|$ je délkou poloosy kuželosečky (8.3), rovnají se vlastní hodnoty souměrné matice převráceným hodnotám kvadrátů délek poloos příslušné kvadriky $x^T A x = 1$.

Pozitivně definitní matice má všechny vlastní hodnoty kladné, takže poloosy její kvadriky jsou reálné. Negativně definitní matice má všechny poloosy imaginární.

Jde-li o dvě proměnné, je kvadrikou $x^T A x = 1$ kuželosečka. Máme-li tři proměnné, dostaneme plochu druhého stupně. Pro čtyři a více proměnných už nemáme přímou geometrickou interpretaci; představu o vlastnostech kvadratické "nadplochy" získáváme jenom zobecněním zkušeností z třírozměrného prostoru.

V třírozměrném prostoru je kvadrikou příslušnou k souměrné pozitivně definitní matici elipsoid. Má-li matice dvojnásobnou vlastní hodnotu, je to rotační elipsoid. Má-li jen jednu trojnásobnou vlastní hodnotu, je to koule. V každém z těchto případů lze najít (nebo vybrat) ortogonální vektorovou bázi s plným počtem tří bázových vektorů.

Nyní se vrátíme k matici druhého řádu. Kvadratická forma (8.2) představuje tedy kuželosečku, jejíž hlavní osy spadají do směrů vlastních vektorů dané matice. S přihlédnutím k obr. 8.1 nás napadne, že by mohlo být výhodné, kdybychom transformovali rovnici (8.3) k osám ξ_1, ξ_2. Ukážeme, jakou zvláštní úlohu přitom sehrají vlastní vektory

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \qquad \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \tag{8.11}$$

Jsou ortogonální, takže $u^T v = v^T u = 0$. Sestavíme je do tzv. <u>modální matice</u> (fundamentální matice)

$$U = [u \,\vdots\, v] = \begin{bmatrix} u_1 & \vdots & v_1 \\ u_2 & \vdots & v_2 \end{bmatrix}. \tag{8.12}$$

Budou-li tyto vektory normované, bude $u^T u = v^T v = 1$ a

$$U^T U = \begin{bmatrix} u^T \\ \hline v^T \end{bmatrix} [u \,\vdots\, v] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] = I. \tag{8.13}$$

Matice U je pak ortogonální, neboť $U^T = U^{-1}$. Do rovnice (8.4) zavedeme transformaci

$$x = U\xi \tag{8.14}$$

a dostaneme

$$AU\xi = \lambda U\xi . \tag{8.15}$$

Tuto rovnici znásobíme zleva maticí $U^T = U^{-1}$. Vyjde

$$\Lambda \xi = \lambda \xi ; \tag{8.16}$$

přičemž

$$\Lambda = U^T A U . \tag{8.17}$$

Obráceně platí, že

$$A = U \Lambda U^T . \tag{8.18}$$

Rovnici (8.17) rozepíšeme takto:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} u^T \\ v^T \end{bmatrix} [A] [u \ v] = \begin{bmatrix} u^T \\ v^T \end{bmatrix} [(\lambda_1 u)(\lambda_2 v)] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} .$$

Matice Λ je tedy diagonální. Transformace (8.14) vede k transformaci matice A podle (8.17) na diagonální tvar. Kvadratická forma (8.3) se změní na tvar

$$\xi^T U^T A U \xi = 1 . \tag{8.19}$$

S přihlédnutím k (8.17) lze poslední vztah upravit na

$$\xi^T \Lambda \xi = 1 . \tag{8.20}$$

To je standardní tvar rovnice kuželosečky, z níž vymizel člen obsahující součin $\xi_1 \xi_2$; kvadrika má nyní rovnici

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 = 1 \tag{8.21}$$

vztaženou k hlavním osám ξ_1 , ξ_2 (obr. 8.1).

Existuje ještě jiný způsob geometrické interpretace úlohy o vlastních hodnotách a o vlastních vektorech matic. Zvolíme-li na obr. 8.1 libovolný vektor y , můžeme jej vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů u , v

$$y = \eta_1 u + \eta_2 v. \tag{8.22}$$

Konstanty η_1 , η_2 můžeme považovat za skalární složky vektoru y . Znásobíme-li rovnici (8.22) zleva maticí A, dostaneme

$$Ay = \eta_1 Au + \eta_2 Av = \eta_1 \lambda_1 u + \eta_2 \lambda_2 v. \tag{8.23}$$

Matice A tedy transformuje vektor y tak, jako by se složky η_1 , η_2 "roztáhly" na $\lambda_1 \eta_1$, $\lambda_2 \eta_2$. */

Diagonalizace matic má velký význam v matematické analýze. I nesouměrnou matici lze diagonalizovat, pokud má plný počet vlastních vektorů. V tom případě však není modální matice ortogonální (ani unitární), takže místo (8.17) a (8.18) nastoupí vztahy

$$\Lambda = U^{-1} A U, \tag{8.24}$$

$$A = U \Lambda U^{-1}. \tag{8.25}$$

Vlastní vektory není nutno v tom případě normovat.

Naše úvahy se až dosud týkaly souměrných matic druhého řádu. Lze je snadno zobecnit i na souměrné matice vyšších řádů. Je-li tento řád vyšší než třetí, můžeme získat geometrickou představu už jen nepřímo, s použitím analogie.

Je-li matice hermiteovská, je modální matice unitární a vztahy (8.17), (8.18) se nahradí obdobnými výrazy

$$\Lambda = U^H A U, \tag{8.26}$$

$$A = U \Lambda U^H. \tag{8.27}$$

Doporučujeme čtenáři, aby si tyto rozklady matic nacvičil na příkladech, které si sám zvolí.

---

*/ Obdobně bychom mohli tvrdit, že se složky η_1 , η_2 nezměnily, ale roztáhla se vektorová báze na $\lambda_1 u$, $\lambda_2 v$. Pro tuto interpretaci není podstatné, je-li matice A souměrná. Stačí, má-li plný počet vlastních vektorů.

Čtvercová matice A transformuje vektor x ve vektor y podle vztahu

$$Ax = y. \tag{9.1}$$

Přejděme nyní k jiným souřadnicím lineární transformací souřadnic

$$x = T\xi, \qquad y = T\eta. \tag{9.2}$$

Zde T je čtvercová regulární matice stejného řádu jako A. Musí být regulární, aby existovala zpětná transformace $\xi = T^{-1}x$, $\eta = T^{-1}y$, a musí být stejného řádu jako A, neboť jinak by nemohlo platit pravidlo o násobení matic (vektory x, ξ mají stejný počet prvků). Dosazením (9.2) do (9.1) vyjde

$$AT\xi = T\eta. \tag{9.3}$$

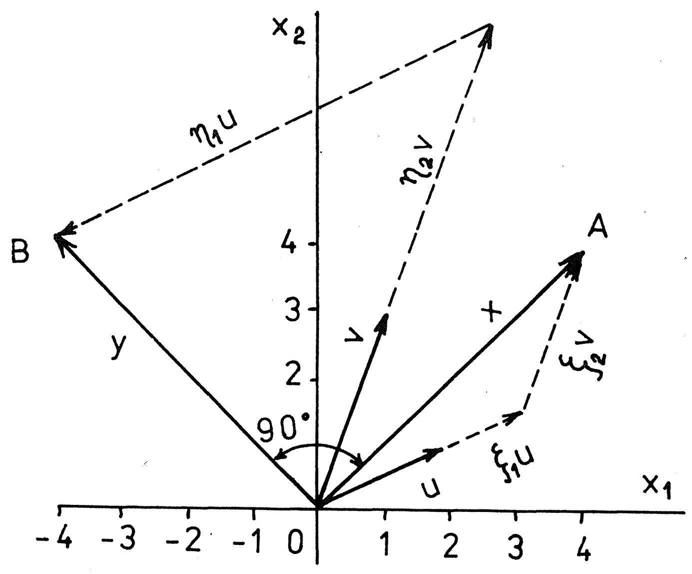
Násobením zleva inverzní maticí T^{-1} dostaneme

$$B\xi = \eta, \tag{9.4}$$

kde

$$B = T^{-1}AT. \tag{9.5}$$

Matice A a B představují - pokud jsou vázány vztahem (9.5) - stejnou lineární transformaci (v různých soustavách souřadnic).
Matice, které jsou vázány vztahem (9.5), se nazývají podobné matice.



Obr. 9.1

Uvedeme příklad.
Matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

transformuje libovolný vektor x ($\overrightarrow{OA}$ na obr. 9.1) do stejně dlouhého, ale o 90° otočeného vektoru y ($\overrightarrow{OB}$). Pro vektor x zvolme bázi

$$u = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad v = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}, \tag{9.7}$$

Takže budeme mít (obr. 9.1)

$$x = \xi_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \xi_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}. \tag{9.8}$$

Tuto rovnici lze zapsat jako

$$x = T\xi, \tag{9.9}$$

označíme-li

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}.$$

Pro vektor y bude obdobně

$$y = \eta_1 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \eta_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{9.10}$$

čili

$$y = T\eta. \tag{9.11}$$

Podobná matice

$$B = T^{-1}AT = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.12}$$

pak popisuje transformaci složek ξ vektoru $\overrightarrow{OA}$ do složek η otočeného vektoru $\overrightarrow{OB}$

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \tag{9.13}$$

vztažených k vektorové bázi u , v . Na obr. 9.1 bylo

$x = \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \end{Bmatrix}$, takže

$$\xi = \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} 8 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad \eta = \frac{1}{5}\begin{Bmatrix} -16 \\ 12 \end{Bmatrix}. \tag{9.14}$$

Podobné matice tedy popisují stejnou lineární transformaci. Vlastní hodnoty souvisejí s vlastnostmi této transformace, takže podobné matice mají stejné vlastní hodnoty se stejnou násobností. Opak nemusí platit, neboť např. matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

nejsou podobné, ačkoli mají obě $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

O tom, že se matice B (9.15) nepodobá jednotkové matici A, přesvědčíme se tím, že nalezneme obecný vzorec pro podobné matice k jednotkové matici

$$T^{-1} A T = T^{-1} I T = T^{-1} T = I. \tag{9.16}$$

K jednotkové matici je podobná zase jen jednotková matice, což matice B není.

Čtvercová matice A $(n \times n)$ je podobná k diagonální matici tehdy a jen tehdy, má-li n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Zvláště platí, že A je podobná k diagonální matici, má-li navzájem různé vlastní hodnoty. Diagonální matice podobná k čtvercové matici A se nazývá kanonický tvar matice A.

Uvedem opět příklad. Nechť je dána posloupnost dvou proměnných u, v algoritmem

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= -7 u_k + 4 v_k, \\ v_{k+1} &= -8 u_k + v_k. \end{aligned} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{9.17}$$

Označíme-li

$$x_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9.18}$$

budeme moci rovnici (9.17) zapsat ve tvaru

$$x_{k+1} = A x_k. \tag{9.19}$$

Matice A má vlastní hodnoty $\lambda_1 = -3 + 4i$, $\lambda_2 = -3 - 4i$ a vlastní vektory

$$u = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 + i \end{Bmatrix}, \qquad v = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 - i \end{Bmatrix}. \tag{9.20}$$

Pomocí modální matice $U = [u \,\vdots\, v]$ můžeme matici A diagonalizovat. Vektory u, v nejsou ortogonální a matice U není unitární, neboť matice A není hermiteovská. Proto používáme vzorec (8.24) a nikoli snad (8.26). Dostaneme

$$\Lambda = U^{-1}AU = -\frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1-i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3+4i & 0 \\ 0 & -3-4i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{9.21}$$

Pak tedy lze užít substituci

$$x_k = Uy_k, \qquad x_{k+1} = Uy_{k+1}, \qquad y_k = \begin{Bmatrix} r_k \\ s_k \end{Bmatrix}, \tag{9.22}$$

abychom místo rovnice (9.19) dostali

$$y_{k+1} = \Lambda y_k. \tag{9.23}$$

Rozepíšeme-li poslední rovnici, budeme mít

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \lambda_1 r_k = (-3+4i)r_k = (-3+4i)^{k+1} r_0, \\ s_{k+1} &= \lambda_2 s_k = (-3-4i)s_k = (-3-4i)^{k+1} s_0. \end{aligned} \tag{9.24}$$

V těchto rovnicích jsou proměnné separovány. Zpětnou transformací

$$\begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r_k \\ s_k \end{Bmatrix} \tag{9.25}$$

vyjde

$$\begin{aligned} u_k &= (-3+4i)^k r_0 + (-3-4i)^k s_0, \\ v_k &= (1+i)(-3+4i)^k r_0 + (1-i)(-3-4i)^k s_0. \end{aligned} \tag{9.26}$$

Jsou-li dány počáteční hodnoty u_0, v_0, dostaneme r_0, s_0 řešením rovnic (9.26) pro $k = 0$, totiž soustavy

$$\begin{aligned} u_0 &= r_0 + s_0, \\ v_0 &= (1+i)r_0 + (1-i)s_0. \end{aligned} \tag{9.27}$$

Diagonalizace matice A umožnila v tomto případě separaci proměnných, takže jsme mohli získat uzavřené řešení (9.26). Je zřejmé, že pro matematickou analýzu má diagonalizace matic velký význam.

Mají-li podobné matice stejné vlastní hodnoty, musí mít i stejný charakteristický mnohočlen

$$|A - \lambda I| = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n). \tag{9.28}$$

Z vlastností činitelů tohoto mnohočlenu lze odvodit, že součet prvků na hlavní diagonále (tzv. stopa matice) je u podobných matic stejný, tzn.

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n . \tag{9.29}$$

Zavedeme-li pro stopu matice označení tr (trace), získá poslední rovnice tvar

$$tr A = tr \Lambda . \tag{9.30}$$

Dále platí rovnost determinantů

$$|A| = |\Lambda| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \tag{9.31}$$

Uvedli jsme již, že lze diagonalizovat každou matici, která má plný počet vlastních vektorů. Nelze tedy převést každou matici na diagonální tvar. Např. matice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \tag{9.32}$$

má vlastní hodnoty $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$ a pouze jeden vlastní vektor $[1 \quad 0]^T$. Kdyby existovala nějaká modální matice U taková, aby $U^{-1} A U = \Lambda$, musilo by také platit, že $AU = U\Lambda$ a konečně

$$A = U \Lambda U^{-1}. \tag{9.33}$$

Dosadíme-li však za Λ do rovnice (9.33), vyjde rozporná "rovnice"

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} U^{-1} = 7 U I U^{-1} = 7I = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} , \tag{9,34}$$

která nemůže platit.

Pro takové matice platí <u>Jordanova věta</u>: má-li matice A $(n \times n)$ různé vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ s násobnostmi $m_1, m_2, \dots, m_s$, pak charakteristický determinant má tvar

$$|\lambda I - A| = \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{m_j} , \tag{9.35}$$

Matice A je v tom případě podobná s rozdělenou maticí

$$J = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \Lambda_s \end{bmatrix}, \tag{9.36}$$

kde Λ_i má velikost $(m_i \times m_i)$ a má tvar

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & * & \lambda_i \end{bmatrix}. \tag{9.37}$$

Hvězdičky pod hlavní diagonálou značí buď 0 nebo 1. Matice (9.36) má <u>Jordanův kanonický tvar</u>.

Symbolem $\prod$ v rovnici (9.35) jsme označili násobení. Rozepíšeme-li pravou stranu této rovnice, dostaneme

$$\prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots\cdots (\lambda - \lambda_s) \,. \tag{9.38}$$

10. VĚTA CAYLEYHO - HAMILTONOVA

Charakteristický polynom matice A má tvar determinantu $|A - \lambda I|$. Lze jej upravit na součin kořenových činitelů, takže rovnice (7.4) má pak tvar

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \,. \tag{10.1}$$

Vlastní hodnoty λ_1 , λ_2 , ..., λ_n mohou, ale nemusí být čísla navzájem různá. Rovnici (10.1) můžeme zapsat zkráceně jako

$$P(\lambda) = 0, \tag{10.2}$$

značí-li P algebraický operátor, který z proměnné λ vytvoří charakteristický polynom

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i). \tag{10.3}$$

Od polynomu $|A - \lambda I|$ se liší jen u matic lichých řádů, a to znaménkem. Analogicky k tomu definujeme maticový polynom

$$P(A) = \prod_{i=1}^{n} (A - \lambda_i I) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \ldots (A - \lambda_n I). \tag{10.4}$$

Pro vlastní vektory u_i platí rovnice

$$A u_i = \lambda_i u_i . \tag{10.5}$$

Násobíme-li tedy (10.4) zprava vlastním vektorem u_i , bude nejprve $(A - \lambda_n I) u_i = (\lambda_i - \lambda_n) u_i$, pak $(A - \lambda_{n-1} I) u_i = (\lambda_i - \lambda_{n-1}) u_i$ atd., takže postupným násobením zprava dostaneme celý polynom (10.3) s hodnotou $\lambda = \lambda_i$. Je tedy

$$P(A) u_i = P(\lambda_i) u_i . \tag{10.6}$$

Protože však λ_i je kořenem rovnice (10.2), máme na pravé straně nulu. Proto

$$P(A) = 0 . \tag{10.7}$$

To je známá <u>Cayleyho-Hamiltonova věta:</u> každá matice splňuje svou charakteristickou rovnici. */

Např. matice

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.8}$$

---

*/ Wiliam Rowan HAMILTON (1805 až 1865), irský matematik a fyzik.

má charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 4 \\ -8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0 . \tag{10.9}$$

Skutečně platí, že

$$A^2 + 6A + 25I = 0, \tag{10.10}$$

neboť

$$\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 17 & -24 \\ 48 & -31 \end{bmatrix}$$

a dále

$$\begin{bmatrix} 17 & -24 \\ 48 & -31 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} + 25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Platí-li pro tuto matici rovnice (10.10), lze každou její mocninu vyšší než první vyjádřit pomocí nižších mocnin (v tomto případě nulté a první). Např.

$$A^2 = -6A - 25I,$$

$$A^3 = -6A^2 - 25A = 11A + 150I \quad \text{atd.}$$

To jsme již použili ve čtvrté kapitole.

Platí-li pro každou čtvercovou matici rovnice (10.7), jsou lineárně nezávislé jenom nižší mocniny matice (až do určitého stupně). To je zásadní rozdíl proti algebře s jednoduchou proměnnou, jejíž všechny mocniny jsou lineárně nezávislé.

Je-li některý kořen charakteristické rovnice násobný, změní se rovnice (10.7) podle toho, jde-li o matici defektní nebo ne. Má-li matice A ($n \times n$) plný počet vlastních vektorů, avšak jen $k < n$ navzájem různých vlastních hodnot, platí rovnice

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_k I) = 0 . \tag{10.11}$$

U defektní matice musí být některý z činitelů (nebo několik činitelů) ve vyšší než první mocnině.

Např. matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad (\lambda_1 = \lambda_2 = 4) \tag{10.12}$$

má dva nezávislé vlastní vektory (7.13) a platí pro ni identita

$$A - 4I = 0. \tag{10.13}$$

Zato defektní matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad (\lambda_1 = \lambda_2 = 4) \tag{10.14}$$

má jediný vlastní vektor (7.11), a proto rovnici (10.13) nesplňuje, ačkoli má s maticí (10.12) stejný charakteristický polynom. Splňuje však rovnici

$$(A - 4I)^2 = 0, \tag{10.15}$$

neboť

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10.16}$$

Poslední rovnice je zároveň zajímavým důkazem, že čtverec matice se může rovnat nule, ale matice sama je nenulová (je však singulární).

Větu Cayleyho-Hamiltonovu můžeme využít i k výpočtu záporných mocnic matice. Znásobíme-li např. rovnici (10.10) inverzní maticí A^{-1}, vypočteme odtud pro matici (10.8)

$$A^{-1} = -\frac{1}{25}(A + 6I) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & -7 \end{bmatrix},$$

$$A^{-2} = -\frac{1}{25}(I + 6A^{-1}) = \frac{1}{625}\begin{bmatrix} -31 & 24 \\ -48 & 17 \end{bmatrix} \quad \text{atd.}$$

Chceme-li určit vysokou mocninu matice A, kterou lze diagonalizovat, můžeme použít vhodnou transformaci. Ukážeme to na příkladu matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\lambda_1 = 5, \; \lambda_2 = -2). \tag{10.17}$$

Užitím modální matice

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{10.18}$$

dostaneme

$$\Lambda = U^{-1} A U = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{10.19}$$

Chceme-li nyní vypočítat n -tou mocninu matice A , použijeme vzorec

$$(U \Lambda U^{-1})^n = U \Lambda U^{-1} U \Lambda U^{-1} \dots U \Lambda U^{-1} = U \Lambda I \Lambda \dots U^{-1} = U \Lambda^n U^{-1} \tag{10.20}$$

Vypočteme např. desátou mocninu. Dostaneme

$$\Lambda^{10} = \begin{bmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & (-2)^{10} \end{bmatrix} \tag{10.21}$$

a zpětnou transformací

$$A^{10} = (U \Lambda U^{-1})^{10} = U \Lambda^{10} U^{-1} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3\,(5^{10}) + 2^{12} & 4\,(5^{10}) - 2^{12} \\ 3\,(5^{10}) - 3\,(2^{10}) & 4\,(5^{10}) + 3\,(2^{10}) \end{bmatrix}. \tag{10.22}$$

Pro velké exponenty je tento postup výhodnější než opakované použití Cayleyho-Hamiltonova vzorce.

Stejný postup lze použít i pro výpočet součtů nekonečných řad typu

$$S = I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots \tag{10.23}$$

Takové úlohy se vyskytují v ekonomii. Místo součtu S hledáme součet mocnin podobných diagonálních matic

$$T = I + \Lambda + \Lambda^2 + \dots + \Lambda^n + \dots \tag{10.24}$$

Tento součet obsahuje na diagonále řady, které lze sečíst, jsou-li vlastní hodnoty uvnitř jednotkového kruhu $|\lambda| < 1$ (jinak by součet neměl limitu). Na diagonále v i-tém řádku je totiž

$$1 + \lambda_i + \lambda_i^2 + \dots + \lambda_i^n + \dots = \frac{1}{1-\lambda_i} \qquad (|\lambda_i| < 1) . \tag{10.25}$$

Matici T tedy můžeme snadno určit. Zpětnou transformací přejdeme k proměnné S. Dostaneme

$$S = U T U^{-1} . \tag{10.26}$$

Podmínka konvergence $A^n \to 0$ pro $n \to \infty$ může být zřejmě splněna jen tehdy, leží-li vlastní hodnoty matice uvnitř jednotkového kruhu. To je důležité i pro některé iterační metody výpočtů v numerické matematice, pokud využívají vlastností mocnin podobných matic.

11. NUMERICKÁ STABILITA

Vlivem zaokrouhlovacích chyb, popř. vlivem nepřesnosti měření počítáme nejčastěji s neúplnými čísly nebo s čísly ne zcela přesnými. Způsobí-li malá změna velikosti vstupních dat malou změnu výstupních hodnot, pak nepřesnosti vstupních dat neznehodnocují výpočet. Zmenšíme-li chyby na vstupu a zjistíme-li přitom, že se úměrně k tomu zmenšují i chyby na výstupu, můžeme výpočet považovat za stabilní. Tak tomu však vždy nebývá. Chyby mohou narůst tak, že výsledek výpočtu je k ničemu, ačkoli jsme použili teoreticky bezvadné výpočtové metody. V dalším textu uvedeme příklady, kdy vlivem malých změn vstupních hodnot nastává kvalitativní změna výsledku nebo jeho podstatné znehodnocení. Uvedeme však také metody, kterými lze přibližně určit změny na výstupu ze známých změn na vstupu, jsou-li tyto změny malé, a to bez opakování celého výpočtu. Konkrétně se budeme zabývat změnou vlastních hodnot a vlastních vektorů, vyvolanou pozměněním původní matice. To má význam pro "dolaďování" kmitajících mechanických soustav různými konstrukčními změnami (viz 12. kapitolu).

Ukážeme nejprve nestabilitu Jordanova kanonického tvaru. Předpokládejme, že ε je malé kladné číslo $(0 < \varepsilon \ll 1)$ a U nějaká regulární matice velikosti (2 x 2). Má-li matice A tvar

$$A = [U] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} [U]^{-1} , \tag{11.1}$$

přísluší jí Jordanův kanonický tvar

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{11.2}$$

Je-li však $\varepsilon = 0$, vyjde

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{11.3}$$

Vidíme, že spojité změně matice A při $\varepsilon \to 0$ odpovídá nespojitá změna kanonického tvaru matice.

S numerickou nestabilitou se setkáváme i při řešení soustav lineárních rovnic

$$A x = b . \tag{11.4}$$

Řešíme-li takovou soustavu, nedostaneme zpravidla přesné řešení, neboť koeficienty soustavy a_{ij} nebo prvky b_i vektoru b bývají neúplná čísla, vzniklá měřením, nebo nepřesná, vzniklá zaokrouhlováním. Potom však neřešíme soustavu (11.4), ale nějakou jinou

$$(A + \delta A)\, y = (b + \delta b) , \tag{11.5}$$

kde δA, popř. δb představují odchylku od přesných hodnot A, popř. b. Řešení rovnice (11.4) je

$$x = A^{-1} b , \tag{11.6}$$

avšak rovnice (11.5) dá

$$y = (A + \delta A)^{-1} (b + \delta b) . \tag{11.7}$$

Jak bychom mohli posoudit chybu tohoto výsledku? Relativní velikost této chyby vyjádříme poměrem norem $\| x - y \| / \| x \|$.

Nejprve vypočteme rozdíl obou vektorů (přesného x a "chybného" y)

$$
\begin{aligned}
x - y &= x - (A+\delta A)^{-1}(b+\delta b) = x - (A+\delta A)^{-1}(Ax+\delta b) = \\
&= (A+\delta A)^{-1}\{(A+\delta A)x - (Ax+\delta b)\} = \\
&= (A+\delta A)^{-1}\{\delta A x - \delta b\} .
\end{aligned}
\tag{11.8}
$$

Vzniká otázka, jak vypočteme normu vektoru

$$
\| x - y \| = \sqrt{(x^T - y^T)(x - y)} \quad , \tag{11.9}
$$

máme-li tento vektor vyjádřen obecně rovnicí (11.8). K tomu bude třeba posoudit nejen vektory, ale i čtvercové matice A , δA , jež vstupují do pravé strany rovnice (11.8). Musíme tedy najít nějaké "měřítko velikosti" pro tyto matice, což není snadné, neboť matice $(n \times n)$ má obecně n^2 prvků (tzn. n^2 obecně různých čísel). Jinak řečeno, musíme celé matici přisoudit nějaké reálné nezáporné číslo, které by podle určitých kritérií či pravidel vyjadřovalo globálně velikost všech prvků zastoupených v matici, tedy "velikost" matice. Tomuto číslu budeme říkat <u>norma matice</u>. Dokážeme-li určit tuto normu, budeme mít naději, že z rovnice (11.8) dostaneme užitečný výsledek.

Co tedy budeme považovat za normu matice A ? Bude to číslo, které podle nějakého pravidla k matici přiřadíme, a to tak, aby vyhovělo těmto požadavkům:

1. $\| A \| \geqq 0 .$

Norma tedy musí být nezáporná (podobně jako hmotnost tělesa).

2. $\| c A \| = |c| . \| A \|$ (c je libovolné číslo).

Zvětšíme-li matici c -krát, chceme, aby se i norma zvětšila c -krát. Zvolíme-li $c = 0$, dostaneme nulovou normu pro nulovou matici. To je v souladu s přirozeným požadavkem, aby nulová norma příslušela pouze nulové matici.

3. $\| A + B \| \leqq \| A \| + \| B \| .$

To je trojúhelníková nerovnost. V trojúhelníku je každá strana vždy menší než součet protějších stran, nanejvýš se mu může rovnat, zdegeneruje-li trojúhelník v úsečku. Tento poznatek nyní zobecňujeme i na normu obecné matice, tedy na normu, která nemá význam délky úsečky.

4. $\| A B \| \leqq \| A \| . \| B \| .$

To je Schwarzova nerovnost. Její význam ještě vysvětlíme.

Zavedeme-li pro reálný vektor normu

$$\|x\| = \sqrt{x^T x}\,, \tag{11.10}$$

bude platit nerovnost

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = x^T x + 2\|x\|.\|y\| + y^T y \geqq 0\,. \tag{11.11}$$

Z požadavku nezápornosti normy dostaneme

$$\|x \pm y\|^2 = x^T x \pm 2 y^T x + y^T y \geqq 0\,. \tag{11.12}$$

Podle třetího požadavku musí být

$$\|x\| + \|y\| \geqq \|x \pm y\| \tag{11.13}$$

a proto levá strana (11.11) bude větší než levá strana nebo se bude rovnat levé straně (11.12). Odtud

$$|y^T x| \leqq \|x\|.\|y\| \tag{11.14}$$

Schwarzova nerovnost je zobecněním tohoto poznatku.

Způsob, jakým můžeme vyhovět požadavkům 1. až 4., není jediný. Jedním příkladem normy může být <u>euklidovská norma reálné matice</u>

$$\|A\| = \sqrt{\sum \sum a_{ij}^2}\,, \tag{11.15}$$

která vznikla zobecněním normy reálného vektoru

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum x_i^2}\,. \tag{11.16}$$

Jiným příkladem je <u>spektrální norma</u>

$$\|A\| = \max \sqrt{\lambda_i (A^T A)}\,, \tag{11.17}$$

kde $\lambda_i (A^T A)$ značí i-tou vlastní hodnotu matice $(A^T A)$.

Trojúhelníkovou a Schwarzovu nerovnost nyní použijeme pro vztah (11.8). Bude

$$\|x - y\| \leqq \|(A + \delta A)^{-1}\| (\|\delta A\|.\|x\| + \|\delta b\|)\,. \tag{11.18}$$

Ze vztahu (11.4) vyjde obdobně $\|A\|.\|x\| \geq \|b\|$ čili

$$\|x\| \geq \|A\|^{-1}.\|b\|. \tag{11.19}$$

Dělením vztahu (11.18) normou $\|x\|$ dostaneme poměr

$$\frac{\|x-y\|}{\|x\|} \leq \|(A+\delta A)^{-1}\|\left(\|\delta A\| + \frac{\|\delta b\|}{\|x\|}\right). \tag{11.20}$$

Vzhledem k platnosti (11.19) můžeme jmenovatel $\|x\|$ na pravé straně nahradit menším nebo nanejvýš rovnajícím se, rovněž kladným číslem $\|A^{-1}\|.\|b\|$, takže

$$\frac{\|x-y\|}{\|x\|} \leq \frac{\|(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A\|^{-1}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right). \tag{11.21}$$

V matematice se dokazuje Banachova věta, podle které – pro $\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ –

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|.\|\delta A\|}. \tag{11.22}$$

Proto

$$\frac{\|x-y\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|.\|A\|}{1-\|A^{-1}\|.\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right). \tag{11.23}$$

Když $\|\delta A\| \ll \|A\|$, budeme moci přibližně zanedbat ve jmenovateli na pravé straně součin $\|A^{-1}\|.\|\delta A\|$ proti jedné. Bude pak

$$\frac{\|x-y\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\|.\|A\|\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right). \tag{11.24}$$

V kulaté závorce na pravé straně je relativní velikost chyb vstupních údajů, na levé straně je relativní chyba na výstupu. Součin

$$K(A) = \|A^{-1}\|.\|A\| \tag{11.25}$$

se nazývá <u>kondiční číslo matice</u> A a udává maximální možnou míru zvětšení vstupních chyb při řešení soustavy (11.4). Je-li toto číslo velké, mohou - ale nemusí - být výsledky výpočtu velmi znehodnoceny zvětšením vstupních nepřesností.

Použije-li se spektrální norma matice (11.17), je kondiční číslo matice dáno poměrem odmocnin největší a nejmenší vlastní hodnoty matice A^TA, tedy

$$K(A) = \sqrt{\frac{\lambda(A^TA)_{max}}{\lambda(A^TA)_{min}}} . \tag{11.26}$$

Je-li matice souměrná, je $A^TA = A^2$. Poslední rovnici lze v tom případě zjednodušit na tvar

$$K(A) = \frac{|\lambda(A)|_{max}}{|\lambda(A)|_{min}} . \tag{11.27}$$

Abychom se přesvědčili, jak vážné chyby mohou vzniknout, nedbáme-li špatné podmíněnosti matice soustavy lineárních algebraických rovnic, uvedeme příklad. Čtenář se snadno přesvědčí, že soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 0{,}780\, x_1 + 0{,}563\, x_2 &= 0{,}217 \\ 0{,}913\, x_1 + 0{,}659\, x_2 &= 0{,}254 \end{aligned} \tag{11.28}$$

vyhovuje téměř přesně řešení

$$x_1 = 0{,}341, \qquad x_2 = -0{,}087. \tag{11.29}$$

Přesné řešení je však zcela rozdílné, totiž

$$x_1 = 1 , \qquad x_2 = -1 . \tag{11.30}$$

Matice

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0{,}780 & 0{,}913 \\ 0{,}563 & 0{,}659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}780 & 0{,}563 \\ 0{,}913 & 0{,}659 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}441969 & 1{,}040807 \\ 1{,}040807 & 0{,}75125 \end{bmatrix} \tag{11.31}$$

má vlastní hodnoty $\lambda_1 \doteq 2{,}193$, $\lambda_2 \doteq 0{,}456.10^{-12}$. Kondiční číslo je tedy $K(A) \doteq 2{,}19.10^6$.

Aplikujeme-li Schwarzovu nerovnost na identitu $A^{-1}A = I$, snadno dokážeme, že kondiční číslo $K(A)$ je v mezích

$$1 \leq K(A) < \infty . \tag{11.32}$$

Je-li $K(A) = \infty$, je matice singulární a soustavu nelze řešit.

Nyní se budeme zabývat nesnadnou otázkou, jak se změní vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů u mechanické soustavy, uskutečníme-li na ní nějakou malou konstrukční změnu (změníme některou hmotu nebo tuhost některého členu). Formulujeme-li úlohu pomocí matic, zní naše otázka takto: jak se změní vlastní hodnoty λ_i a vlastní vektory u_i matice A $(n \times n)$, změní-li se tato matice o δA ?

Zřejmě bude platit, že

$$(A + \delta A)(u_i + \delta u_i) = (\lambda_i + \delta\lambda_i)(u_i + \delta u_i), \tag{12.1}$$

$$A u_i = \lambda_i u_i . \tag{12.2}$$

Jsou-li "poruchy" δA , δu_i , $\delta\lambda_i$ malé, dostaneme vztah

$$A\,\delta u_i + \delta A\, u_i = \lambda_i \delta u_i + \delta\lambda_i\, u_i . \tag{12.3}$$

V této rovnici známe A , δA , u_i , λ_i , hledáme $\delta\lambda_i$, δu_i (i = 1, 2, ..., n).

Je samozřejmé, že pro δA = 0 musí být $\delta\lambda_i$ = 0. Rovnici

$$A(u_i + \delta u_i) = \lambda_i (u_i + \delta u_i) \tag{12.4}$$

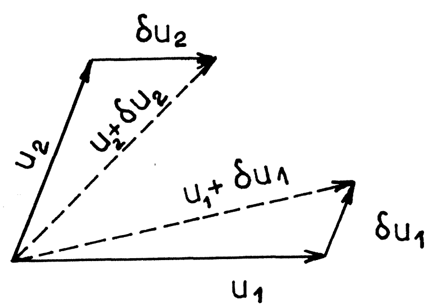
bude vyhovovat každé δu_i , které bude násobkem u_i . Proto musíme výběr δu_i nějak omezit, abychom vyloučili tuto mnohoznačnost. Nové změněné vlastní vektory zvolíme tak, aby žádný přírůstek δu_i , vyjádřený ve složkách původních vlastních vektorů u_j podle vztahu

$$\delta u_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} u_j \tag{12.5}$$

neobsahoval složku, která by byla násobkem původního vlastního vektoru u_i . Stačí zvolíme-li

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i = j . \tag{12.6}$$

Příklad takto pozměněných vektorů je na obr. 12.1.



Obr. 12.1

Místo hodnot δu_i budeme tedy určovat hodnoty složek ω_{ij} , které vymizí, když δA = 0.

Budeme předpokládat, že matice A má všechny vlastní hodnoty navzájem různé, a to λ_1, λ_2, ..., λ_n. K nim příslušejí vlastní vektory u_1, u_2, ..., u_n. K hermiteovsky sdružené matici A^H jsou vlastní hodnoty komplexně sdružené $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, ..., $\bar{\lambda}_n$. Vlastní vektory matice A^H nechť jsou v_1, v_2, ..., v_n. Je-li tomu tak, platí definiční vztahy

$$A u = \lambda u, \tag{12.7}$$

$$A^H v = \bar{\lambda} v. \tag{12.8}$$

Násobíme-li první rovnici zleva vektorem v^H, dostaneme

$$v^H A u = \lambda v^H u. \tag{12.9}$$

Nyní tuto rovnici hermiteovsky transponujeme. Vyjde

$$u^H A^H v = \bar{\lambda} u^H v. \tag{12.10}$$

To je však stejná rovnice, jakou dostaneme násobením rovnice (12.8) zleva vektorem u^H. To potvrzuje správnost předpokladu, že vlastní hodnoty λ, $\bar{\lambda}$ úloh (12.7) a (12.8) jsou komplexně sdružené, což vyznačujeme pruhem.

Dosadíme-li do rovnice (12.7) konkrétně $A u_i = \lambda_i u_i$, vyjde (12.10) ve tvaru

$$u_i^H A^H v_j = \bar{\lambda}_i u_i^H v_j. \tag{12.11}$$

Začneme-li však s rovnicí (12.8) $A^H v_j = \bar{\lambda}_j v_j$ a násobíme ji zleva vektorem u_i^H, budeme mít

$$u_i^H A^H v_j = \bar{\lambda}_j u_i^H v_j. \tag{12.12}$$

Odečtením obou posledních rovnic dostaneme

$$(\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j) u_i^H v_j = 0. \tag{12.13}$$

Protože $\bar{\lambda}_i \neq \bar{\lambda}_j$ (podle předpokladu), musí být

$$u_i^H v_j = 0 \qquad (i \neq j), \tag{12.14}$$

tj. vektor u_i splňuje podmínku (12.14) se všemi vektory v_j s výjimkou v_i. */

*/ Vektory u_i, v_j $(i \neq j)$ jsou tedy unitární.

Podle (12.5) a (12.6) se změna vlastního vektoru δu_i skládá z vektorových složek úměrných vektorům u_j s výjimkou u_i, takže podle (12.14) musí být

$$\delta u_i^H v_i = v_i^H \delta u_i = 0. \qquad (12.15)$$

Znásobíme-li tedy rovnici (12.3) zleva vektorem v_i^H, vymizí všechny členy obsahující δu_i; zbývá

$$v_i^H \delta A u_i = \delta \lambda_i v_i^H u_i \qquad (12.16)$$

Odtud přímo vypočteme

$$\delta \lambda_i = \frac{v_i^H \delta A u_i}{v_i^H u_i}. \qquad (12.17)$$

V čitateli je bilineární forma utvořená se čtvercovou maticí δA, ve jmenovateli skalární součin vektorů v_i, u_i.

Nyní znásobíme rovnici (12.3) zleva vektorem v_j^H. Podle (12.14) $v_j^H u_i = u_i^H v_j = 0$, takže odpadne poslední člen. Zbývá

$$v_j^H A \delta u_i + v_j^H \delta A u_i = \lambda_i v_j^H \delta u_i. \qquad (12.18)$$

Hermiteovskou transpozicí (12.8) dostaneme, že

$$v_j^H A = \lambda_j v_j^H, \qquad (12.19)$$

takže rovnice (12.18) získá tvar

$$\lambda_j v_j^H \delta u_i + v_j^H \delta A u_i = \lambda_i v_j^H \delta u_i \qquad (12.20)$$

Podmínka (12.5) a (12.6) dává vzhledem k (12.14)

$$v_j^H \delta u_i = v_j^H \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} u_j \right) = \omega_{ij} v_j^H u_j. \qquad (12.21)$$

Z rovnice (12.20) tedy vyjde pro $i \neq j$

$$\omega_{ij} = \frac{v_j^H \delta A u_i}{(\lambda_i - \lambda_j) v_j^H u_j}. \qquad (12.22)$$

Je-li $i = j$, platí (12.6).

Rovnice (12.17) a (12.22) tedy přinášejí odpověď na danou otázku. Změní-li se matice A o δA, změní se vlastní hodnoty λ_i o $\delta\lambda_i$ podle (12.17) a vlastní vektory u_i o δu_i podle (12.5), přičemž koeficienty ω_{ij} určíme podle (12.22). Předpokládá se však, že tyto změny jsou malé, neboť jinak by neplatila linearizovaná rovnice (12.3).

Použitím těchto rovnic můžeme určit změny vlastních hodnot a vlastních vektorů, vyvolané konstrukčním zásahem, a to mnohem snáze a rychleji, než kdybychom znovu řešili celou úlohu o vlastních hodnotách a vlastních vektorech a vše znovu přepočítávali. Význam této úspory je samozřejmě tím větší, čím větší je řád matice, tj. čím větší je počet stupňů volnosti řešené mechanické soustavy.

13. VÝPOČET EXTRÉMNÍ VLASTNÍ HODNOTY

Často nás zajímá jen největší nebo nejmenší vlastní hodnota, takže je zbytečné řešit celou úlohu. Zde může být velmi užitečný Rayleighův princip, který stručně vyložíme. */

Předpokládejme, že matice A je hermiteovská (je-li reálná, je pak souměrná) a že všechny vlastní hodnoty, o nichž jsme dokázali, že musí být reálné, jsou uspořádány podle velikosti

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n . \tag{13.1}$$

Úloha o vlastních hodnotách je definována rovnicí

$$A u_i = \lambda_i u_i \tag{13.2}$$

($i = 1, 2, \ldots, n$). Pro vlastní vektory platí vztahy

$$u_j^H u_i = u_i^H u_j = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j , \\ 0 & \text{pro } i \neq j . \end{cases} \tag{13.3}$$

---

*/ John William Strutt baron RAYLEIGH, od roku 1873 lord Rayleigh, (1842 až 1919), profesor experimentální fyziky na univerzitě v Cambridge, Maxwellův nástupce.

Tyto podmínky vyjadřují známý poznatek, že vlastní vektory souměrné matice tvoří ortogonální soustavu. Vynásobíme-li rovnici (13.2) zleva vektorem u_i^H , dostaneme

$$u_i^H A u_i = \lambda_i u_i^H u_i = \lambda_i \tag{13.4}$$

Vlastní hodnota je tedy dána hodnotou kvadratické formy $u_i^H A u_i$ pro normovaný vlastní vektor u_i . Pro všechny vlastní vektory platí normalizační podmínka

$$\|u\| = u^H u = 1 . \tag{13.5}$$

Protože λ_1 je největší vlastní hodnota, je to také největší hodnota kvadratické formy $u^H A u$ pro vektory vyplňující kouli $\|u\| = 1$, takže

$$\lambda_1 = \max_{\|u\|=1} \left(u^H A u \right) . \tag{13.6}$$

Podobně bychom mohli ukázat, že λ_n je minimem této kvadratické formy. Pro nenormované reálné vektory bude platit, že

$$\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} . \tag{13.7}$$

Zlomek na pravé straně této rovnice se nazývá Rayleighův kvocient (podíl). Rovnice (13.7) vyjadřuje Rayleighův princip. Podle něho se největší vlastní hodnota rovná maximální hodnotě Rayleighova kvocientu, utvořeného s libovolným nenulovým vektorem. Vektor, jemuž přísluší tato maximální hodnota, je vlastním vektorem dané matice.

Odhadneme-li vlastní vektor x , dostaneme hodnotu Rayleighova kvocientu menší než je vlastní hodnota λ_1 (rovnost by platila, kdybychom náhodou uhádli právě vlastní vektor příslušný k této vlastní hodnotě, což se zpravidla nestane). Rozdíl však nebývá velký, dovedeme-li vlastní vektor alespoň trochu přibližně odhadnout. Pak můžeme hodnotu Rayleighova kvocientu brát jako odhad největší vlastní hodnoty. Ze dvou odhadů je lepší ten, který dává větší vlastní hodnotu. Ten se využívá k ohraničení velikosti λ_1 .

Uvedeme příklad. Matice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{13.8}$$

má vlastní hodnoty $\lambda_1 = 4 + \sqrt{2} \doteq 5,414$, $\lambda_2 = 4 - \sqrt{2} \doteq 2.586$.
Zvolíme-li vektor $x = [2 \quad 1]^T$, dostaneme podle (13.7) odhad

$$\lambda_1 \geq \frac{[2 \quad 1] \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}}{[2 \quad 1] \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{27}{5} = 5,4 . \tag{13.9}$$

Pro vektor $x = [1 \quad 1]^T$ dostaneme jiný odhad

$$\lambda_1 \geq \frac{[1 \quad 1] \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{[1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{10}{2} = 5,0 . \tag{13.10}$$

Odhad (13.9) je tedy lepší. Přesná hodnota λ_1 je jen asi o 0,26 % větší než hranice (13.9). Přesnost obou odhadů je překvapující, neboť oba použité vektory se navzájem značně liší; správná hodnota vlastního vektoru je $x \doteq [2,414 \quad 1]^T$.

Ukážeme, že stejný postup lze užít i pro hermiteovskou matici, např.

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 3i \\ -3i & 2 \end{bmatrix} . \tag{13.11}$$

Tato matice má vlastní hodnoty $\lambda_1 = 3 + \sqrt{10}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{10}$. Proto pro všechna komplexní čísla x_1, x_2 (s výjimkou 0, 0) platí nerovnost

$$\frac{4|x_1|^2 + 3i(\bar{x}_1 x_2 - \bar{x}_2 x_1) + 2|x_2|^2}{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leq 3 + \sqrt{10} . \tag{13.12}$$

Pro matici, která není hermiteovská, nelze Rayleighův princip použít. Např. matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 94 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{13.13}$$

má vlastní hodnoty $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, avšak

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{x_1^2 + 94 x_1 x_2 + 2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \tag{13.14}$$

dá např. pro $x_1 = x_2 = 1$ hodnotu $\frac{97}{2} > \lambda_1$ v rozporu s Rayleigho principem.

Ukážeme ještě iterační metodu pro vyhledání největší absolutní vlastní hodnoty a příslušného vlastního vektoru. Budeme předpokládat, že matice A je souměrná (hermiteovská) a že její vlastní hodnoty splňují nerovnost

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| . \tag{13.15}$$

Pro úlohu o vlastních hodnotách a o vlastních vektorech

$$A u = \lambda u \tag{13.16}$$

zvolíme nultou aproximaci $u \cong v_0$, pak první $v_1 = A v_0$, druhou $v_2 = A v_1$, atd., až pro k-tou aproximaci bude

$$v_k = A^k v_0 . \tag{13.17}$$

Budeme zkoumat posloupnost těchto aproximací. Nultou aproximaci vyjádříme jako lineární kombinaci vlastních vektorů

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \tag{13.18}$$

Potom však

$$v_1 = A v_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i A u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i u_i \tag{13.19}$$

Podobně

$$v_2 = A v_1 = A^2 v_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^2 u_i \tag{13.20}$$

a obecně

$$v_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k u_i . \tag{13.21}$$

V této řadě vytkneme první člen

$$v_k = c_1 \lambda_1^k \left[u_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{c_i}{c_1}\right)\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k u_i \right] . \tag{13.22}$$

Je-li $|\lambda_i| < |\lambda_1|$, bude druhý výraz (vyznačený součet) v hranaté závorce limitovat k nule. Hodnota λ_1 však může být násobná. Rozepsáním rovnice (13.22) lze dokázat, že i tehdy metoda konverguje. Pro dostatečně velké k tedy bude

$$\begin{aligned} v_k &\cong c_1 \lambda_1^k u_1 , \\ v_{k+1} &\cong c_1 \lambda_1^{k+1} u_1 . \end{aligned} \tag{13.23}$$

Je zřejmé, že při dostatečně velkém k bude $v_{k+1} \approx \lambda_1 v_k$, takže vlastní hodnotu λ_1 dostaneme jako poměr stejnolehlých prvků vektorů v_{k+1} a v_k nebo - v absolutní hodnotě - jako poměr norem

$$|\lambda_1| \cong \frac{\| v_{k+1} \|}{\| v_k \|} . \tag{13.24}$$

Vektory v_k přitom limitují k vlastnímu vektoru u_1 .

Např. pro matici (13.8) a pro počáteční vektor $v_0 = [1 \quad 1]^T$ bude

k	$[A]\{v_k\} = \{v_{k+1}\}$	odhad λ_1	$\dfrac{\|v_{k+1}\|}{\|v_k\|}$	odhad $\{u_1\}$
$k = 0$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \end{Bmatrix}$	6,000 4,000	5,099	$\begin{Bmatrix} 0{,}832 \\ 0{,}555 \end{Bmatrix}$
$k = 1$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34 \\ 18 \end{Bmatrix}$	5,667 4,500	5,335	$\begin{Bmatrix} 0{,}884 \\ 0{,}468 \end{Bmatrix}$
$k = 2$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 34 \\ 18 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 188 \\ 88 \end{Bmatrix}$	5,529 4,889	5,396	$\begin{Bmatrix} 0{,}906 \\ 0{,}424 \end{Bmatrix}$
$k = 3$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 188 \\ 88 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1028 \\ 452 \end{Bmatrix}$	5,468 5,136	5,410	$\begin{Bmatrix} 0{,}915 \\ 0{,}402 \end{Bmatrix}$
$k = 4$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1028 \\ 452 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5592 \\ 2384 \end{Bmatrix}$	5,440 5,274	5,413	$\begin{Bmatrix} 0{,}920 \\ 0{,}392 \end{Bmatrix}$

Přesné hodnoty jsou - po zaokrouhlení -

$$\lambda_1 \doteq 5{,}414, \qquad u_1 \doteq \begin{Bmatrix} 0{,}924 \\ 0{,}383 \end{Bmatrix}.$$

Je zřejmé, že odhad (13.24) dal lepší výsledky než poměr stejnolehlých prvků obou vektorů. Výpočet normy vektoru je však pracný (vyžaduje umocňování a odmocňování). Proto se v praxi spokojujeme s výpočtem vlastní hodnoty pomocí poměru prvků obou po sobě jdoucích vektorů, užíváme však k tomu prvek s největší absolutní hodnotou.

Stejným postupem můžeme dostat vlastní hodnotu λ_n (s nejmenší absolutní hodnotou), pokud $\lambda_n \neq 0$. Není-li matice A singulární (a to není, nemá-li žádnou nulovou vlastní hodnotu), můžeme formulovat novou úlohu s použitím inverzní matice

$$A^{-1} u = \mu u \tag{13.25}$$

s vlastními hodnotami

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i} \tag{13.26}$$

$$|\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \dots \leq |\mu_n|. \tag{13.27}$$

Iterační proces dá nyní hodnotu μ_n a podle (13.26) i λ_n.

Kdybychom chtěli obdobně dostat i jiné vlastní hodnoty, musili bychom řešení vždy znovu korigovat podmínkami ortogonality hledaného vlastního vektoru ke všem vlastním vektorům, k nimž náleží vlastní hodnota absolutně větší než hledaná. Tím by se postup poněkud zkomplikoval. Bez této ortogonalizace by se výpočet "pokazil" vlivem zaokrouhlovacích chyb a začal by znovu konvergovat k vlastní hodnotě již předtím nalezené. Různé metody numerického výpočtu vlastních hodnot a vlastních vektorů nalezne čtenář v odborné literatuře.

14. FUNKCE MATICE

Analogicky funkcím reálné proměnné můžeme uvažovat i o funkcích reálných matic. Má-li funkce $f(x)$ potřebné derivace, lze ji v okolí nějakého bodu x_0 rozvést v Taylorovu řadu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots , \qquad (14.1)$$

Např. exponenciální funkce e^x dá v okolí bodu $x = 0$ řadu

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots , \qquad (14.2)$$

Exponenciální funkci matice A budeme definovat obdobnou řadou

$$e^A = I + \frac{1}{1!} A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots , \qquad (14.3)$$

Mezi řadami (14.2) a (14.3) je však podstatný rozdíl. Řada (14.2) má nekonečně mnoho lineárně nezávislých členů a teprve součet všech těchto členů konverguje k exponenciální funkci. Řada (14.3) má však jen omezený počet lineárně nezávislých členů, neboť pro mocniny matice platí Cayleyho-Hamiltonova věta (kapitola 10). Je-li matice n-tého řádu, může mít řada (14.3) nejvýš n nezávislých členů, ostatní členy s vyššími mocninami lze vyjádřit jako lineární kombinaci nižších mocnin. Zredukujeme-li takto počet členů v řadě (14.3), zbude

$$e^A = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_{n-1} A^{n-1}. \qquad (14.4)$$

Koeficienty c_0 až c_{n-1} jsou nyní jiné než u stejných mocnin v řadě (14.3), neboť vznikly sloučením nekonečně mnoha členů, což odpovídá opakovanému užití Cayleyho-Hamiltonovy věty pro všechny mocniny s exponentem vyšším než $n-1$. Tyto koeficienty zatím neznáme. Řada (14.3) se liší od řady (14.4) o členy, které bychom mohli seřadit do součtu $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [P(A)]^k$. Přitom $P(A) = 0$ podle (10.6).

Uvědomíme-li si, že lineární vazba mezi mocninami matice $P(A) = 0$ je v podstatě charakteristickým polynomem, který dává nulu pro jakoukoli vlastní hodnotu λ_i, takže $P(\lambda_i) = 0$, je zřejmé, že jak Cayleyho-Hamiltonova věta - tedy rovnice (10.6) -, tak rovnice (14.3) budou splněny, dosadíme-li za A^k umocněnou některou vlastní hodnotu λ_i^k a za jednotkovou matici I prostě jednotku 1. Potom však musí být splněna i rovnice (14.4). Jsou-li všechny vlastní hodnoty navzájem různé, stačí jednu po druhé dosadit do rovnice (14.4). Vznikne tak soustava n rovnic pro stejný počet neznámých součinitelů c_0, c_1, ..., c_{n-1}.

Tyto rovnice jsou

$$e^{\lambda_i} = c_0 + c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_i^2 + \dots + c_{n-1} \lambda_i^{n-1} \qquad (14.5)$$

(i = 1, 2, ..., n).

Zopakujme úvahu ještě jednou. Rovnici (14.4) zapíšeme zkráceně

$$f(A) = Q(A). \qquad (14.4a)$$

Cayleyho-Hamiltonova věta dává identitu $P(A) = 0$. Rovnici (14.3) uspořádáme do tvaru součtu

$$f(A) = Q(A) + \alpha_1 P(A) + \alpha_2 P^2(A) + \dots \qquad (14.3a)$$

Protože $P(\lambda)$ je charakteristickým polynomem, je $P(\lambda_i) = 0$. Potom z rovnice (14.3a)

$$f(\lambda_i) = Q(\lambda_i), \qquad (14.5a)$$

což je rovnice (14.5).

Např. pro matici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad (14.6)$$

máme charakteristický polynom $P(\lambda) = (4 - \lambda)(-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ a jeho anulováním dostaneme rovnici, z které vypočteme $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Tyto hodnoty postupně dosadíme do rovnice

$$e^A = c_0 I + c_1 A \qquad (14.7)$$

za matici A, přičemž jednotkovou matici I nahradíme 1. Pak

$$\begin{aligned} e^3 &= c_0 + 3c_1, \\ e &= c_0 + c_1. \end{aligned} \qquad (14.8)$$

Z této soustavy vypočteme

$$\begin{aligned} c_0 &= -\tfrac{1}{2} e^3 + \tfrac{2}{3} e \doteq -5{,}9, \\ c_1 &= \tfrac{1}{2} e^3 - \tfrac{1}{2} e \doteq 8{,}6, \end{aligned} \qquad (14.9)$$

takže

$$e^{A} = \begin{bmatrix} -5,9 & 0 \\ 0 & -5,9 \end{bmatrix} + 8,6 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,5 & 8,6 \\ -25,8 & -5,9 \end{bmatrix} . \qquad (14.10)$$

Je zřejmé, že takto odvozená mocninná řada má smysl, konvergují-li všechny Taylorovy řady $f(\lambda_i)$ (i = 1, 2, ..., n). Uvedeme ještě jiný příklad. Vypočítáme funkci

$$\sin A = c_0 I + c_1 A \qquad (14.11)$$

pro matici druhého řádu

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (14.12)$$

s vlastními hodnotami $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$. Ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \sin 6 &= c_0 + 6 c_1 \\ \sin 1 &= c_0 + c_1 \end{aligned} \qquad (14.13)$$

vyjde

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{6 \sin 1 - \sin 6}{5} \doteq 1,0657 \\ c_1 &= \frac{\sin 6 - \sin 1}{5} \doteq -0,2242 . \end{aligned} \qquad (14.14)$$

Proto

$$\sin A \doteq 1,0657 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0,2242 \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0,0553 & -0,8968 \\ -0,2242 & 0,6173 \end{bmatrix} . \qquad (14.15)$$

Postup, který jsme ukázali, selže, bude-li některá vlastní hodnota několikanásobná. Soustava rovnic (14.5) v tom případě nedá všechny neznámé konstanty, neboť některé rovnice se budou opakovat a nepřinesou novou informaci. Představme si třeba, že právě první vlastní hodnota bude trojnásobná, takže $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Charakteristický polynom má v takovém případě tvar

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^3(\lambda-\lambda_4)(\lambda-\lambda_5)\dots(\lambda-\lambda_n) . \quad (14.16)$$

Dosadíme-li sem $\lambda = \lambda_1$, vymizí zřejmě nejen $P(\lambda_1)$, ale i jeho první a druhá derivace, takže

$$P(\lambda_1) = 0, \qquad P'(\lambda_1) = 0, \qquad P''(\lambda_1) = 0 . \quad (14.17)$$

Soustavu rovnic (14.5a) pro $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 4, 5, \dots, n$ tedy doplníme rovnicemi

$$\begin{aligned} f'(\lambda_1) &= Q'(\lambda_1), \\ f''(\lambda_1) &= Q''(\lambda_1). \end{aligned} \quad (14.18)$$

Jako příklad vypočteme exponenciální funkci matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (14.19)$$

která má vlastní hodnoty vesměs nulové, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Zřejmě bude

$$e^A = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 . \quad (14.20)$$

Dále budeme mít

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= e^{\lambda_1} = c_0 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_1^2 = Q(\lambda_1), \\ f'(\lambda_1) &= e^{\lambda_1} = \qquad c_1 + 2c_2\lambda_1 = Q'(\lambda_1), \\ f''(\lambda_1) &= e^{\lambda_1} = \qquad\qquad 2c_2 = Q''(\lambda_1). \end{aligned} \quad (14.21)$$

Rovnice (14.5) a (14.18) tedy dají pro $\lambda_1 = 0$

$$\begin{aligned} 1 &= c_0 , \\ 1 &= c_1 , \\ 1 &= 2c_2 . \end{aligned}$$

Celkem

$$e^A = I + A + \frac{1}{2} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (14.22)$$

Snadno se přesvědčíme, že $e^{\Theta} = I$, je-li Θ nulová matice stejného řádu jako jednotková matice I.

Pro matici (14.19) nyní určíme funkci sin A. Opět budeme mít v polynomu (13.4a) jen tři nezávislé členy, takže

$$\sin A = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2. \tag{14.23}$$

Tentokrát však budou určující rovnice

$$\begin{aligned} \sin 0 &= Q(0) \\ \cos 0 &= Q'(0) \\ -\sin 0 &= Q''(0) \end{aligned} \qquad \text{čili} \qquad \begin{aligned} 0 &= c_0, \\ 1 &= c_1, \\ 0 &= 2c_2. \end{aligned}$$

V tomto případě tedy bude

$$\sin A = A. \tag{14.24}$$

Zobecněním zkušeností z oboru funkcí reálné proměnné se nám podařilo definovat obdobné funkce i pro matice. Uvidíme, že tyto funkce lze využít při řešení soustav diferenciálních rovnic, takže nejde jen o formální úpravy nebo o nějakou abstraktní matematickou hříčku. Protože však matice je mnohem složitější útvar než jednoduché číslo, bude mít definovaná funkce matice mnohá omezení. Na některá z nich jsme již upozornili (uvedli jsme požadavek konvergence Taylorových řad pro všechny vlastní hodnoty matice, dále poznatek o konečném počtu lineárně nezávislých členů v maticových polynomech). Upozorníme ještě na jednu důležitou okolnost. Pomocí maticového polynomu lze vyjádřit jenom takové funkce, které toto vyjádření dovolují. Ukážeme to na příkladu. Určíme odmocninu matice (14.12). Zřejmě bude

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= c_0 I + c_1 A, \\ \sqrt{6} &= c_0 + 6c_1, \\ \sqrt{1} &= c_0 + c_1 \end{aligned} \tag{14.25}$$

a tedy $c_0 = \dfrac{6-\sqrt{6}}{5}$, $c_1 = \dfrac{\sqrt{6}-1}{5}$,

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{6}-1}{5}\left(\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) \doteq \begin{bmatrix} 2{,}16 & 1{,}16 \\ 0{,}29 & 1{,}29 \end{bmatrix}. \tag{14.26}$$

Skutečně, umocníme-li tuto matici, dostaneme původní matici. Budeme-li postupovat stejně i tehdy, kdy matice má násobnou některou vlastní hodnotu, vypočteme - není-li tato hodnota právě nulová - odmocninu i v tomto případě (s použitím derivace) zcela jednoznačně. Avšak v tom je právě skryto omezení, na které chceme upozornit. Vypočteme-li např. takto odmocninu z jednotkové matice, vyjde nám

$$\sqrt{I} = I. \tag{14.27}$$

To je jistě správný výsledek. Jenže odmocnina z jednotkové matice má nekonečně mnoho řešení. Můžeme se přesvědčit, že každá matice tvaru

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{1-a^2}{a} \\ a & -a \end{bmatrix} \tag{14.28}$$

splňuje podmínku $A^2 = I$. Řešení $\sqrt{I} = A$ podle (14.28) však nelze vyjádřit polynomem s jednotkovou maticí (matice A by musila být násobkem jednotkové matice, což není).

15. ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Obyčejnou diferenciální rovnici vyššího řádu můžeme vždy vhodnými substitucemi převést na soustavu lineárních diferenciálních rovnic, kterou pak lze řešit maticovou metodou. Postup ukážeme na příkladech.

Pro neznámou funkci $u = u(t)$ nechť např. platí rovnice

$$\frac{d^4u}{dt^4} + e^t \frac{du}{dt} - tu = \cos \omega t . \tag{15.1}$$

Dosadíme-li

$$x_1 = u, \qquad x_2 = \frac{du}{dt},$$
$$x_3 = \frac{d^2u}{dt^2}, \qquad x_4 = \frac{d^3u}{dt^3}, \tag{15.2}$$

dostaneme místo (15.1) ekvivalentní soustavu rovnic

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3\,,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4\,, \tag{15.3}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = tx_1 - e^t x_2 + \cos\omega t\,.$$

Tuto soustavu lze zapsat v maticovém tvaru

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \tag{15.4}$$

označíme-li

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix},\quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ t & -e^t & 0 & 0 \end{bmatrix},\qquad f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos\omega t \end{Bmatrix}.$$

Podobně můžeme upravit i soustavu diferenciálních rovnic vyšších řádů. Např. pro dvě funkce $u(t)$, $v(t)$ nechť platí, že

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + (\cos\omega t)\frac{dv}{dt} + u &= t\,, \\ \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \qquad\qquad + v &= e^{\alpha t}. \end{aligned} \tag{15.5}$$

Z této soustavy vypočteme $\frac{d^2u}{dt^2}$ a $\frac{dv}{dt}$, takže dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} &= -u + (\cos\omega t)v + (\cos\omega t)\frac{du}{dt} + t - (\cos\omega t)e^{\alpha t}, \\ \frac{dv}{dt} &= -v - \frac{du}{dt} + e^{\alpha t}. \end{aligned} \tag{15.6}$$

Nyní dosadíme

$$x_1 = u\,,\qquad x_2 = \frac{du}{dt}\,,\qquad x_3 = v. \tag{15.7}$$

Po úpravě vyjde opět rovnice (15.4), v níž však

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},\quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & \cos\omega t & \cos\omega t \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},\quad f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ t - (\cos\omega t)e^{\alpha t} \\ e^{\alpha t} \end{Bmatrix}.$$

Náš úkol nyní je najít účelný způsob řešení soustavy rovnic (15.4). Připomeňme si nejprve, jak se řeší obyčejné lineární diferenciální rovnice tvaru

$$\dot{x} = f(t)x + g(t). \tag{15.8}$$

Nejjednodušší je, zvolíme-li substituci $x(t) = u(t) \cdot v(t)$. Pak $\dot{x} = \dot{u}v + u\dot{v}$, takže

$$\dot{u}v + u\dot{v} = fuv + g. \tag{15.9}$$

Protože jsme zavedli místo jedné funkce dvě, můžeme jednu podmínku volit; budeme požadovat, aby platilo

$$\dot{u} = f(t) \cdot u, \tag{15.10}$$

a tedy

$$u = \exp \int f(t)\,dt. \tag{15.11}$$

Z rovnice (15.9) zbývá

$$u\dot{v} = g(t), \tag{15.12}$$

takže

$$v = \int \frac{1}{u} g(t)\,dt + konst. \tag{15.13}$$

Nyní se pokusíme obdobně řešit i maticovou rovnici (15.4). Zkusíme dosadit

$$x(t) = Y(t)\,z(t), \tag{15.14}$$

kde $Y(t)$ je čtvercová matice, $z(t)$ vektor. Připomeneme-li si, že $x_i = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} z_j$, nahlédneme, že pro derivaci platí

$$\dot{x} = \dot{Y}z + Y\dot{z}. \tag{15.15}$$

Derivaci podle t jsme označili tečkou. Po dosazení do (15.4) vyjde

$$\dot{Y}z + Y\dot{z} = AYz + f. \tag{15.16}$$

Budeme požadovat, aby

$$\dot{Y} = AY. \tag{15.17}$$

Z rovnice (15.16) pak zbude pouze

$$Y\dot{z} = f \, . \tag{15.18}$$

Pro čtvercovou matici $Y(t)$ zvolíme počáteční podmínku $Y(0) = I$. Tuto matici lze tedy invertovat přinejmenším pro $t = 0$. Bude-li $Y^{-1}(t)$ existovat i pro $t > 0$ a bude-li obsahovat spojité funkce, můžeme z rovnice (15.18) vypočítat

$$\dot{z} = Y^{-1} f \, . \tag{15.19}$$

Je-li také funkce $f(t)$ spojitá, lze tuto rovnici integrovat

$$z(t) = z(0) + \int_0^t Y^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau \, . \tag{15.20}$$

Jde o integraci vektoru; rozumí se, že integrujeme každý prvek (řádek) tohoto vektoru. Výsledek (15.20) nyní dosadíme do (15.14)

$$x(t) = Y(t)\, z(0) + Y(t) \int_0^t Y^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau \, . \tag{15.21}$$

Vektor $x(t)$ zřejmě splňuje počáteční podmínku

$$x(0) = z(0) , \tag{15.22}$$

neboť $Y(0) = I$.

Řešme např. soustavu rovnic

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ e^{-t^2} \end{Bmatrix} . \tag{15.23}$$

V tomto případě snadno najdeme, že rovnice (15.17) s maticí

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{15.24}$$

má řešení

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} . \tag{15.25}$$

Její inverze je

$$Y^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} . \tag{15.26}$$

Znásobíme-li matice

$$Y(t)\,Y^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{bmatrix} , \tag{15.27}$$

získáme velmi zvláštní, neobvyklý vztah

$$Y(t)\,Y^{-1}(\tau) = Y(t-\tau) . \tag{15.28}$$

Ten platí vždy, když matice A nezávisí na t. Pokusíme se toto tvrzení dokázat. Zavedeme označení

$$X(t) = Y(t-\tau) \qquad (\tau = \tau_0 = \text{konst}). \tag{15.29}$$

Jestliže pro původní funkci $Y(t)$ platily podmínky

$$\frac{dY}{dt} = AY, \qquad Y(0) = I, \qquad A = \text{konst}, \tag{15.30}$$

pak pro novou funkci $X(t)$ podle (15.29) budou platit vztahy

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad X(\tau) = I, \qquad A = \text{konst}. \tag{15.31}$$

Označme levou stranu identity (15.28) L a pravou P

$$\begin{aligned} L &= Y(t)\,Y^{-1}(\tau), \\ P &= Y(t-\tau) = X(t). \end{aligned} \tag{15.32}$$

Dosazením se lze přesvědčit, že oba tyto výrazy splňují (15.31), že totiž

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= AL, \qquad L(\tau) = I, \\ \frac{dP}{dt} &= AP, \qquad P(\tau) = I, \end{aligned} \tag{15.33}$$

Zadání (15.31) však musí vést k jednoznačnému řešení, takže musí být $L \equiv P$, což je rovnice (15.28).

Je-li tedy matice A konstantní, má řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \qquad (15.34)$$

tvar

$$x(t) = Y(t)\, z(0) + \int_0^t Y(t-\tau) f(\tau)\, d\tau . \qquad (15.35)$$

Čtvercová matice $Y(t)$ přitom vyhovuje diferenciální rovnici $\frac{dY}{dt} = AY$ s počáteční podmínkou $Y(0) = I$. Známe-li toto fundamentální řešení homogenní soustavy, dostaneme z rovnice (15.35) řešení nehomogenní soustavy (15.34) pro jakoukoli spojitou funkci $f(t)$. Není-li matice A konstantní, má řešení rovnice (15.4) tvar (15.21). Vektor $z(0)$ se přitom rovná počátečním hodnotám $x(0)$.

Přesvědčili jsme se, že pro řešení lineárních diferenciálních rovnic má velký význam nalezení fundamentální soustavy funkcí, které vyhovují homogenní úloze typu (15.30). Zaměříme se nyní na řešení této úlohy.

Máme soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami

$$\frac{dY}{dt} = AY, \qquad Y(0) = I, \qquad A = \text{konst.} \qquad (15.36)$$

Matice mají velikost $n \times n$. Je-li $n = 1$, tj. jde-li o jednu proměnnou, má soustava (15.36) tvar $\dot{y} = ay$ a řešení $y = e^{at}$. Toto řešení vyhovuje počáteční podmínce $y(0) = 1$. V maticovém tvaru

$$Y = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k . \qquad (15.37)$$

Toto řešení lze nyní použít obecně i pro matice řádu $n > 1$. Řada (15.37) bude rovnoměrně a absolutně konvergovat k řešení $Y(t)$ úlohy (15.36) pro kterýkoli konečný interval $t \in \langle a, b \rangle$.

Známe-li (15.37), můžeme napsat řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = A\, x(t), \qquad x(0) \text{ dáno} \qquad (15.38)$$

ve tvaru

$$x(t) = Y(t)\, x(0) = e^{At} x(0) . \qquad (15.39)$$

Jde o rovnici (15.21), v níž $f(\tau) = 0$.

Uvedeme opět příklad. Je dána soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \qquad (15.40)$$

s počátečními hodnotami $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$, $x_3(0)=-1$, $x_4(0)=1$.
Pro matici

$$At = \begin{bmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \qquad (15.41)$$

která má všechny vlastní hodnoty nulové, vypočteme podle pravidel vyložených ve 14. kapitole exponenciální funkci

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \frac{1}{3}t^3 \\ 0 & 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (15.42)$$

Podle (15.39) vyjde řešení dané úlohy ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \frac{1}{3}t^3 \\ 0 & 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 \\ 1 - 2t + t^2 \\ -1 + t \\ 1 \end{Bmatrix} . \qquad (15.43)$$

Řešení (15.39) čtenáře jistě udivuje jednoduchostí a elegancí, ale nedává mu téměř žádnou informaci o svých vlastnostech (je-li řešení periodické nebo ne, má-li nějakou limitu pro $t \to \infty$ apod.). Kdybychom měli jen jednu rovnici pro jednu proměnnou ($n=1$), měla by rovnice (15.38) tvar

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad (15.44)$$

s partikulárním řešením

$$x = e^{\lambda t} . c , \qquad c \neq 0 . \tag{15.45}$$

Lze se přesvědčit, že dosazením (15.45) do (15.44) dostaneme (po krácení činitelem $e^{\lambda t} \neq 0$) charakteristickou rovnici

$$\lambda c = a c . \tag{15.46}$$

Máme-li nyní soustavu

$$\frac{dx}{dt} = A x \tag{15.47}$$

s partikulárním řešením

$$x = e^{\lambda t} . c , \tag{15.48}$$

budeme mít "charakteristickou rovnici"

$$\lambda c = A c , \tag{15.49}$$

v níž c značí vektor počátečních podmínek pro dané partikulární řešení (15.48). Zřejmě to musí být vlastní vektor matice A a parametr λ musí být její vlastní hodnota.

Např. pro soustavu

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{15.50}$$

najdeme vlastní hodnoty čtvercové matice $\lambda_1 = - 3 + 4 i$, $\lambda_2 = - 3 - 4 i$ a jim příslušné vlastní vektory

$$c_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+i \end{Bmatrix} , \qquad c_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1-i \end{Bmatrix} . \tag{15.51}$$

Příslušná partikulární řešení jsou

$$x_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+i \end{Bmatrix} e^{(-3+4i)t} , \qquad x_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1-i \end{Bmatrix} e^{(-3-4i)t} \tag{15.52}$$

Jsou-li nyní dány nějaké počáteční podmínky, např. $x(0) = \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \end{Bmatrix}$, zvolíme řešení $x(t)$ ve tvaru lineární kombinace partikulárních řešení

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \tag{15.53}$$

a konstanty α_1 , α_2 určíme tak, aby platilo $x(0) = \alpha_1 x_1(0) + \alpha_2 x_2(0)$, čili

$$\begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \alpha_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+i \end{Bmatrix} + \alpha_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1-i \end{Bmatrix} . \tag{15.54}$$

Odtud $\alpha_1 = 1 + 2i$, $\alpha_2 = 1 - 2i$. Dosazením do (15.53) a úpravou na reálný tvar (pomocí Eulerových vzorců) dostaneme

$$x(t) = 2e^{-3t} \begin{Bmatrix} \cos 4t - 2\sin 4t \\ -\cos 4t - 3\sin 4t \end{Bmatrix} . \tag{15.55}$$

Vlastnosti partikulárního řešení (15.48) poznáme ihned z vypočtených vlastních hodnot λ (reálné či komplexní, s kladnou, nulovou nebo zápornou reálnou částí).

Budeme nyní zkoumat, jaký význam má matice $U(t)$ sestavená z partikulárních řešení (15.48)

$$U(t) = [e^{\lambda_1 t} c_1 \,\vdots\, e^{\lambda_2 t} c_2] = [c_1 \,\vdots\, c_2] \left[\begin{array}{c|c} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \hline 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(-3+4i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-3-4i)t} \end{bmatrix} . \tag{15.56}$$

Zřejmě

$$U(0) = [c_1 \,\vdots\, c_2], \tag{15.57}$$

takže

$$Y(t) = U(t) . U^{-1}(0) \tag{15.58}$$

má počáteční hodnotu $Y(0) = I$ a vyhovuje přitom rovnici

$$\frac{dY}{dt} = AY . \tag{15.59}$$

$Y(t)$ podle (15.58) je tedy maticí fundamentálních řešení daného problému.

V našem případě vyjde

$$Y(t) = U(t)\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 1-i & i \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-3t}\begin{bmatrix} (\cos 4t - \sin 4t) & \sin 4t \\ -2\sin 4t & (\cos 4t + \sin 4t) \end{bmatrix}. \qquad (15.60)$$

Obecně budeme mít

$$Y(t) = U(0)\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} U^{-1}(0). \qquad (15.61)$$

Matice $U(0)$ obsahuje pouze vlastní vektory c_1, c_2, ..., c_n.

V této kapitole jsme poznali, jak těsně souvisejí vlastní hodnoty a vlastní vektory matice s úlohou řešit soustavu lineárních diferenciálních rovnic.

16. O ŘEŠITELNOSTI SOUSTAV ALGEBRAICKÝCH LINEÁRNÍCH ROVNIC

Je dána soustava lineárních algebraických rovnic

$$Ax = b. \qquad (16.1)$$

Matice A může, ale nemusí být čtvercová. Např. soustava rovnic

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 6 \\ 22 \\ 18 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16.2}$$

má řešení

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{16.3}$$

a není tedy "přeurčená". Kdybychom však na pravé straně změnili nějaký prvek (kdybychom např. napsali 19 místo 18), rovnice by si odporovaly a soustava (16.2) by neměla řešení, přestala by být konzistentní (její rovnice by nebyly ve vzájemném souladu).

Konzistence je zřejmě vlastnost celé soustavy, nikoli snad jen matice A . Řešení (16.3) dostaneme, vybereme-li z (16.2) kterékoli dvě rovnice a řešíme je. Zbývající tři rovnice pak nesmí získanému řešení odporovat, má-li mít celá soustava smysl.

Snadno se přesvědčíme, že jen dva řádky z matice A jsou lineárně nezávislé. Vyberme např. první dva

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{16.4}$$

Zbývající část matice

$$A^{**} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{16.5}$$

obsahuje řádky, jež jsou lineárními kombinacemi řádků matice (16.4). Tato závislost je vyjádřena vztahem

$$A^{**} = C A^*, \tag{16.6}$$

neboli

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 10 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16.7}$$

Soustavu (16.2) lze tedy napsat ve tvaru

$$\left[\frac{A^*}{CA^*}\right]\{x\} = \left\{\frac{b^*}{b^{**}}\right\}, \tag{16.8}$$

kde

$$\{b^*\} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 6 \end{Bmatrix}, \qquad \{b^{**}\} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 18 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{16.9}$$

Z rovnice (16.8) vyjde

$$A^* x = b^*, \qquad A^{**} x = b^{**} \tag{16.10}$$

a odtud

$$b^{**} = C\, b^*. \tag{16.11}$$

Tato rovnice má stejný tvar jako (16.6). To znamená, že stejná lineární závislost, jaká existuje mezi řádky matice A, musí existovat také mezi příslušnými prvky vektoru b pravé strany, má-li být soustava rovnic konzistentní.

Může se stát, že matice A má sice čtvercový tvar, ale přesto nedává jednoznačné řešení (její determinant je nulový, hodnost matice je menší než její řád). Taková soustava je neúplná ("nedourčená") a má nekonečně mnoho řešení. Např. soustava rovnic

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 5 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 14 \\ 6 \\ \hline 22 \end{array}\right\} \tag{16.12}$$

má nulový determinant. Snadno se přesvědčíme, že soustava je konzistentní, neboť třetí řádek v matici A dostaneme jako rozdíl dvojnásobku prvního řádku a druhého řádku a zároveň také platí, že $22 = 2 \cdot 14 - 6$. Soustavu rozdělíme, jak naznačeno. Zkráceně můžeme rozdělenou soustavu označit

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} y \\ \hline z \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} a \\ \hline b \end{array}\right\}. \tag{16.13}$$

Po rozepsání

$$\begin{aligned} A y + B z &= a, \\ C y + D z &= b. \end{aligned} \qquad (16.14)$$

Protože $|A| \neq 0$, můžeme z první rovnice (16.14) vypočítat

$$y = A^{-1}(a - B z) \qquad (16.15)$$

a z druhé

$$z = D^{-1}(b - C y) . \qquad (16.16)$$

Konkrétně dostaneme pro soustavu (16.12) z rovnice (16.15)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} 14 \\ 6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} z \right) = \begin{Bmatrix} 4 - 2z \\ 2 + z \end{Bmatrix} \qquad (16.17)$$

a z rovnice (16.16)

$$z = 1. \left(22 - \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 - 2z \\ 2 + z \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= 22 - 12 - 10 + 6z - 5z = z . \qquad (16.18)$$

Tato identita je důsledkem konzistence soustavy. Výsledné řešení tedy je

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} y \\ \hline z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 - 2z \\ 2 + z \\ z \end{Bmatrix} . \qquad (16.19)$$

Zde z vystupuje jako parametr, který může nabývat jakékoli hodnoty, takže soustava (16.12) má nekonečně mnoho řešení.

Shrneme-li tyto poznatky, shledáme, že pouze konzistentní soustava lineárních rovnic je řešitelná. Řešení však nemusí být jediné (ať je počet rovnic jakýkoli). Např. soustava (16.2) měla více rovnic než neznámých, ale byla konzistentní a měla jediné řešení. Soustava (16.12) měla stejný počet rovnic jako neznámých, ale nebyla úplná, takže měla nekonečně mnoho řešení.

Konzistenci a úplnost soustavy můžeme nejsnáze posoudit u soustavy se souměrnou (popř. hermiteovskou) maticí. Tehdy totiž existuje tolik lineárně nezávislých vlastních vektorů u_i , jaký je řád matice

(i = 1, 2, ..., n). Tyto vlastní vektory lze normovat a utvořit z nich modální matici $U = [u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n]$, o které víme, že je ortogonální. Soustavu

$$Ax = b \tag{16.20}$$

můžeme pak transformovat substitucí

$$x = U\xi , \qquad b = U\beta \tag{16.21}$$

na tvar

$$AU\xi = U\beta \tag{16.22}$$

a vynásobením transponovanou maticí U^T na diagonální tvar

$$\Lambda\xi = \beta . \tag{16.23}$$

Je-li matice hermiteovská, nahradíme transpozici (T) hermiteovskou transpozicí (H).

V rovnici (16.23) je $\Lambda = U^TAU$ diagonální matice, která má na diagonále vlastní hodnoty matice A. Soustava (16.20) se touto transformací rozpadne na soustavu rovnic se separovanými proměnnými

$$\lambda_i \xi_i = \beta_i . \tag{16.24}$$

Vlastní hodnoty jsou reálné, neboť matice A je podle předpokladu souměrná, resp. hermiteovská. Z rovnice (16.24) vypočteme

$$\xi_i = \frac{1}{\lambda_i}\beta_i . \tag{16.25}$$

Ihned vidíme, že soustava (16.20) je jednoznačně řešitelná jen tehdy, má-li $\lambda_i \neq 0$ pro všechna i. Je-li však některá vlastní hodnota nulová, např. $\lambda_k = 0$, musí být nulová i hodnota β_k. Kdyby tomu tak nebylo, nemohli bychom soustavu (16.24) řešit, z k-té rovnice bychom nemohli vypočítat ξ_k. Je-li $\beta_k = 0$, bude k-tá rovnice v soustavě (16.24) splněna pro jakoukoli hodnotu ξ_k. Řešení tedy bude možné, ale nebude jednoznačné.

Podle (16.21) platí, že

$$\beta = U^{-1}b = U^Tb = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \{b\} , \tag{16.26}$$

proto

$$\beta_k = [u_k]^T \{b\} = u_k^T b = 0 \tag{16.27}$$

To znamená, že vektor b pravé strany soustavy (16.20) musí být ortogonální k vlastnímu vektoru u_k matice soustavy, který přísluší k nulové vlastní hodnotě $\lambda_k = 0$. Protože $A u_i = \lambda_i u_i$, je pro $\lambda = \lambda_k$ zároveň $A u_k = 0$.

Soustava (16.20) bude tedy řešitelná, bude-li vektor pravé strany ortogonální ke každému netriviálnímu řešení homogenní soustavy $Ax = 0$. Přitom víme, že existuje tolik lineárně nezávislých řešení takové homogenní soustavy, kolik je nulových vlastních hodnot matice A.

K řešení nehomogenní soustavy (16.20) můžeme přidat libovolnou lineární kombinaci nezávislých řešení homogenní soustavy. Jsou-li některé vlastní hodnoty matice A nulové, má soustava (16.20) nekonečně mnoho řešení; obecné řešení obsahuje tolik volných parametrů, kolik je nulových vlastních hodnot.

Je-li matice A nesouměrná, můžeme soustavu rovnic $Ax = b$ převést na soustavu se souměrnou maticí tím, že ji doplníme řešením adjungované soustavy $A^T y = c$. Dostaneme

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} y \\ \hline x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} b \\ \hline c \end{array}\right\} . \tag{16.28}$$

Matice této soustavy je souměrná, takže pro ni platí dříve odvozené poznatky. Podrobnosti klasifikace soustavy lineárních rovnic s použitím (16.28) jsme uvedli v publikaci Maticové metody v pevnostních výpočtech, III. část, kterou vydal ČVTS - Dům techniky Praha roku 1974.

Nakonec ještě poznámku k rovnici (16.25). Pomůže nám pochopit význam kondičního čísla (11.22). Vektor neznámých x můžeme podle (16.21) vyjádřit ve vektorové bázi u_1, u_2, ..., u_n. Dostaneme

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \dots + \xi_n u_n . \tag{16.29}$$

Složky ξ_i vektoru x jsou dány rovnicí (16.25). Vektor x je podle posledního vztahu jakýmsi váženým průměrem normovaných vlastních vektorů u_i, přičemž "váha" ξ_i je nepřímo úměrná vlastní hodnotě λ_i. Zaokrouhlovací chyby vzrostou, bude-li poměr největší a nejmenší váhy v absolutní hodnotě mnohem větší než jednička, neboť pak budeme k velkým číslům přičítat čísla velmi malá. To však vede k závěru, že je nežádoucí, aby kondiční číslo (11.22) bylo podstatně větší než jedna. K tomuto závěru jsme došli jiným způsobem v kapitole 11.

Chceme určit neznámou funkci $y(t)$, popisující nějaký fyzikální děj. Z fyzikálních úvah nebo z rozboru experimentálních dat usoudíme, že tuto funkci by bylo možno vyjádřit ve funkční bázi $f_j(t)$ (j = = 1, 2, ..., k) pomocí skalárních složek x_j:

$$y(t) = x_0 + x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + \dots + x_k f_k(t) . \qquad (17.1)$$

Funkce f_1 až f_k známe, součinitele x_0 až x_k chceme zpětně určit z experimentů. Taková úloha se nazývá regrese; protože na pravé straně (17.1) máme neznámé součinitele x_j v lineární kombinaci, jde o lineární regresi. */

Kdybychom měli tolik měření, kolik je v rovnici (17.1) neznámých součinitelů, vedla by naše úloha k prostému řešení lineární algebraické soustavy. Naše měření jsou však zatížena chybami, proto jich uskutečníme mnoho, abychom je mohli objektivněji posoudit. Pro každé t_i (i = = 1, 2, ..., n) tak dostaneme $y_i = y(t_i)$, přičemž $n > k+1$. Dosazením do (17.1) dostaneme soustavu n lineárních rovnic o $k+1$ neznámých

$$\begin{aligned} y_1 &= x_0 + x_1 f_1(t_1) + x_2 f_2(t_1) + \dots + x_k f_k(t_1) \\ y_2 &= x_0 + x_1 f_1(t_2) + x_2 f_2(t_2) + \dots + x_k f_k(t_2) \qquad (17.2) \\ &\text{- - - - - - - - - - -} \\ y_n &= x_0 + x_1 f_1(t_n) + x_2 f_2(t_n) + \dots + x_k f_k(t_n) . \end{aligned}$$

V maticovém tvaru zapíšeme tuto soustavu takto:

$$y = A x . \qquad 17.3)$$

---

*/ Regressus (lat.) = zpětný běh; ten, kdo se vrací po vlastní stopě, kdo se dal na ústup.

Přitom $x = [x_0 \mid x_1 \dots x_n]^T = [x_0 \mid z]$. Z vektoru x jsme naznačenou svislou čarou oddělili první prvek x_0 , neboť matice A obsahuje v prvním sloupci pouze jedničky. To nás totiž přivádí k myšlence, abychom matici A rozdělili

$$A = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_k(t_1) \\ 1 & f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_k(t_2) \\ \vdots & & \dots\dots & & \\ 1 & f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_k(t_n) \end{array}\right] = [h \mid B] . \quad (17.4)$$

Vektor h obsahuje tedy pouze jedničky a má velikost $(n \times 1)$. Submatice B obsahuje prvky $b_{ij} = f_j(t_i)$ a má tvar $(n \times k)$. Matice A je obdélníková a má tvar $(n \times (k+1))$. Toto rozdělení matice A bude velmi užitečné později, až budeme zkoumat matematické vlastnosti řešení, které nalezneme. Prozatím můžeme na ně zapomenout a brát rovnici (17.3), tak, jak je psána.

Rovnice (17.1) je <u>teoretická regresní funkce</u> (její graf je teoretická regresní křivka). Jsme přesvědčeni, že by měla přesně platit. Ve světě experimentů však nic není přesné. Proto jsme uskutečnili mnoho měření, abychom vyloučili nahodilé chyby, pokud by to bylo vůbec možné, nebo abychom je alespoň minimalizovali a nějak odhadli. Tím jsme však získali pro neznámé součinitele x_0 až x_k přeurčenou soustavu (17.2), kterou nelze řešit (není to konzistentní soustava). Naše přesvědčení o správnosti rovnice (17.1) nás však vede k závěru, že soustava (17.2) musí nějaké řešení mít. Skutečnost, že tato soustava není konzistentní, budeme považovat za důsledek nepřesnosti našich měření, nikoli za důkaz neplatnosti rovnice (17.1). Klademe si pak otázku, můžeme-li hledané řešení přece jen najít nebo alespoň je nějak odhadnout a zároveň stanovit směrodatnou chybu takového odhadu.

Konzistentní soustavu rovnic bychom získali nejjednodušeji tak, že bychom ze soustavy (17.2) vybrali pouze $k+1$ lineárně nezávislých rovnic. Cítíme však, že pro takový výběr nemáme žádné objektivní kritérium, jsou-li všechna naše měření uskutečněna stejně svědomitě a za jinak nezměněných okolností. Budeme proto hledat jiný způsob.

Kdyby vztah (17.1) opravdu platil a naše měření byla přesná, musela by soustava (17.2) přesně platit. Pak by ovšem byla konzistentní. Jejím anulováním bychom dostali $Ax - y = 0$. Ve skutečnosti jsou naše měření zatížena náhodnými chybami, takže na pravé straně nebude nulový vektor, ale nějaký reziduální (zbytkový) vektor chyb $r = [r_1\ r_2 \cdots r_n]^T$. Bude tedy platit, že

$$Ax - y = r. \tag{17.5}$$

Odhad součinitelů x nyní zvolíme tak aby norma $\|r\| = \sqrt{r^T r}$ tohoto vektoru byla minimální. Tuto geniální metodu navrhl K. F. GAUSS (1777 až 1855) a nezávisle na něm také A. M. LEGENDRE (1752 až 1834). Tak se nám podaří získat konzistentní soustavu rovnic pro neznámé prvky vektoru x, aniž zavrhneme kteroukoli naměřenou hodnotu. Všechna měření, jimž přikládáme stejnou váhu, budou zastoupena stejně, takže navržená metoda je zcela objektivní.

Než přistoupíme k výpočtu minima normy $\|r\|$, uvedeme ještě maticovou formu zápisu, kterou přitom použijeme. Předpokládejme, že je dána nějaká skalární funkce $f(x)$ vektoru x, např. norma tohoto vektoru nebo jeho kvadratická forma utvořená s nějakou konstantní maticí, jeho skalární součin s jiným vektorem atd. Chceme nyní tuto funkci derivovat postupně podle prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektoru x a výsledky sestavit opět do vektoru. Zapíšeme to takto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{Bmatrix}. \tag{17.6}$$

Rozepsáním se můžeme snadno přesvědčit, že pro derivaci kvadratické formy $f(x) = x^T A x$ utvořené se souměrnou maticí A platí vzorec */

$$\frac{\partial (x^T A x)}{\partial x} = 2Ax \tag{17.7}$$

a pro derivaci skalárního součinu $f(x) = x^T a$ (a je konstantní vektor)

$$\frac{\partial (x^T a)}{\partial x} = a. \tag{17.8}$$

Pro čtverec normy $\|r\|^2 = r^T r$ máme

$$\|r\|^2 = (x^T A^T - y^T)(Ax - y) = x^T A^T A x - 2x^T A^T y + y^T y. \tag{17.9}$$

---

*/ Srovnej s rovnicemi (8.2) a (8.5).

Přitom jsme použili poznatek, že skalární veličina se transpozicí nezmění, takže $y^T A x = (y^T A x)^T = x^T A^T y$. Výraz (17.9) zderivujeme s použitím pravidel (17.7) a (17.8). Vyjde

$$\frac{\partial \|r\|^2}{\partial x} = 2A^T A x + 2A^T y = 0 . \tag{17.10}$$

Derivaci jsme položili rovnu nule, což je nutná podmínka pro existenci minima. Odtud vypočteme

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y . \tag{17.11}$$

Porovnáme-li takto získaný odhad vektoru x s tvarem rovnice (17.3), shledáme, že výraz

$$G = (A^T A)^{-1} A^T \tag{17.12}$$

se právem nazývá <u>zobecněná inverzní matice</u> (generalizovaná, přirozená).

Připomeňme, že matice A je obecně obdélníková. K řešení (17.11) můžeme dospět formálně ještě jinou úvahou. Soustava n rovnic o $k+1$ neznámých (17.3) představuje vztah mezi n-rozměrnými vektory v $(k+1)$-rozměrném prostoru. Protože $n > k+1$, je tento vztah přeurčený. Promítneme-li však obě strany rovnice (17.3) do $(k+1)$-rozměrného prostoru násobením zleva transponovanou maticí A^T , dostaneme vztah mezi $(k+1)$-rozměrnými průměty vektorů, který už přeurčený není. K takovému promítnutí bychom mohli použít jakoukoli matici o velikosti $((k+1) \times n)$. Zdá se být přirozené, že k tomu použijeme právě matici A^T . Tím alespoň nevneseme do dané úlohy žádný "cizí prvek". Vyjde

$$A^T A x = A^T y . \tag{17.13}$$

Matice $A^T A$ má velikost $((k+1) \times (k+1))$ a lze ji invertovat, takže

$$x = G y , \tag{17.14}$$

kde G je dáno rovnicí (17.12) a má rozměr $((k+1) \times n)$. Obecněji lze zobecněnou inverzní matici G k matici A definovat vztahem

$$A G A = A . \tag{17.15}$$

Definice (17.12) tuto podmínku zřejmě splňuje. Je-li matice A čtvercová a regulární, ztotožní se zobecněná inverzní matice G s obyčejnou inverzní maticí A^{-1} , neboť v tom případě $(A^T A)^{-1} = A^{-1} A^{-T}$ a dále

$$G = A^{-1} A^{-T} A^T = A^{-1} I = A^{-1} . \tag{17.16}$$

Odhad vektoru x , který jsme podle (17.11) právě získali, označíme $\hat{x}$. S jeho pomocí můžeme nyní určit empirickou regresní funkci (empirickou regresní křivku)

$$\hat{y}(t) = \hat{x}_0 + \hat{x}_1 f_1(t) + \dots + \hat{x}_k f_k(t) . \tag{17.17}$$

Dosadíme-li hodnoty $\hat{x}_i$ do soustavy (17.2), vyjde vektor $\hat{y} = A\hat{x}$. Z rovnice (17.5) pak dostaneme pro týž odhad $\hat{x}$ zbytkový vektor r ; vyjde

$$\hat{y} - y = r . \tag{17.18}$$

Pokusme se nyní podrobněji vyšetřit vlastnosti nalezeného řešení. Výraz $A^T A$, který se vyskytuje v rovnici (17.13), má vzhledem k rovnici (17.4) tvar

$$A^T A = \left[\begin{array}{c} h^T \\ \hline B^T \end{array}\right] [\, h \mid B \,] = \left[\begin{array}{c|c} n & h^T B \\ \hline B^T h & B^T B \end{array}\right] . \tag{17.19}$$

Rovnice (17.13) platí pro odhad $\hat{x}$, takže

$$\left[\begin{array}{c|c} n & h^T B \\ \hline B^T h & B^T B \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \hat{x}_0 \\ \hline \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_k \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \dots 1 \\ \hline B^T \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{array}\right\} . \tag{17.20}$$

Abychom mohli rozepsat první řádek, vypočteme nejprve

$$h^T B = [1 \quad 1 \dots 1] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} b_{i1} \quad \sum_{i=1}^{n} b_{i2} \dots \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right] . \tag{17.21}$$

Je to řádková matice, jejíž prvky se rovnají součtům sloupců matice B . První řádek z rovnice (17.20) pak dá

$$n\hat{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} b_{i1}\hat{x}_1 + \dots + \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\hat{x}_k = y_1 + y_2 + \dots + y_n . \tag{17.22}$$

Rozepíšeme-li rovnici (17.17), dostaneme

$$\begin{Bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ 1 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{x}_k \end{Bmatrix} \tag{17.23}$$

Když zde sečteme prvky vektorů na obou stranách, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = n\hat{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} b_{i1}\hat{x}_1 + \dots + \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\hat{x}_k . \tag{17.24}$$

Tento výraz dosadíme za levou stranu (17.22); vyjde

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{17.25}$$

To znamená, že aritmetické průměry

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ \hat{\bar{y}} &= \frac{1}{n}(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \dots + \hat{y}_n) \end{aligned} \tag{17.26}$$

jsou stejné. Z rovnice (17.8) potom plyne, že aritmetický průměr prvků reziduálního vektoru je nulový

$$\bar{r} = \frac{1}{n}(r_1 + r_2 + \dots + r_n) = 0 . \tag{17.27}$$

Připomeňme, že rovnice (17.27) by obecně neplatila, kdybychom v regresní funkci (17.1) vynechali absolutní člen x_0 .

Nadále budeme předpokládat, že rovnice (17.27) platí, takže $\bar{r} = 0$ a $\hat{\bar{y}} = \bar{y}$. Budeme se nyní zabývat otázkou vhodnosti předpokladu (17.1) a zhodnocením chyb odvozeného řešení. Je možno postupovat dvojím způsobem.

První způsob spočívá v tom, že soubor hodnot y_i považujeme za soubor náhodných veličin a hledáme jejich závislost na jiném takovém souboru $\hat{y}_i$. Mírou této statistické závislosti je <u>korelační součinitel</u> R , pro jehož kvadrát platí vzorec

$$R^2 = \frac{[\sum(\hat{y}_i - \hat{\bar{y}})(y_i - \bar{y})]^2}{\sum(\hat{y}_i - \hat{\bar{y}})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2} . \tag{17.28}$$

Připomeňme, že podle předpokladu $\bar{r} = 0$, takže $\hat{\bar{y}} = \bar{y}$. Sčítá se přes $i = 1, 2, \ldots, n$. Platí-li pro každé i, že $\hat{y}_i = y_i$, vyjde $R^2 = 1$. V tom případě je soustava (17.3) konzistentní a odhad $\hat{x}$ je zároveň její přesné řešení. Kdyby veličiny $\hat{y}_i$, y_i byly nezávislé, vyšlo by $R^2 = 0$. Vždy platí nerovnost $0 \leq R^2 \leq 1$. Podle korelačního součinitele můžeme posoudit vhodnost volby bázových funkcí $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_k(t)$ v rovnici (17.1). Čím bližší je tento součinitel jedné, tím lépe vystihuje empirická regresní křivka hledanou funkční závislost.

Podle druhého způsobu považujeme veličiny $\hat{y}_i$ za dané konstanty, které vyjdou z rovnice (17.23). Náhodný charakter přisoudíme "chybám" r_i, takže v rovnici

$$y_i = \hat{y}_i + r_i \tag{17.29}$$

jsou náhodnými veličinami y_i a r_i. Mají-li pak prvky r_i nulovou střední hodnotu podle (17.27), je jejich rozptyl $\sigma^2 = r^T r = \|r\|^2$, rozptyl hodnot y_i se rovná s^2 a jeho odmocnina

$$s = \sqrt{\frac{r^T r}{n-k-1}} \tag{17.30}$$

se nazývá <u>směrodatnou chybou hodnot</u> y_i. Vzorec (17.30) platí za uvedených předpokladů pro případ, že matice A má rozměr $(n \times (k+1))$.

Probereme nejprve jednoduchý příklad. Ve čtyřech provozech, které označíme $P1$, $P2$, $P3$ a $P4$, je k dnešnímu dni rozděleno určité množství nějakého výrobku, které se v čase nemění. Mění se však rozdělení tohoto množství podle daného "harmonogramu". Např. z prvního provozu $P1$ se zašle každý den sedm desetin do provozu $P2$, po jedné desetině do provozů $P3$ a $P4$ a zbytek, tj. jedna desetina, zůstane na místě. Tuto skutečnost popisuje první sloupec matice

$$C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 1 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{18.1}$$

Prvky této matice c_{ij} tedy představují poměrné množství, které je dopravováno každý den z provozu P_j do provozu P_i . Protože počet výrobků je nezáporné číslo, jsou prvky matice c_{ij} nezáporné. Proto je nezáporná i matice C .

Z matice C vyčteme, že třetí a čtvrtý provoz jsou pouhá shromaždiště výrobků, neboť tyto provozy výrobky pouze přijímají, ale nikam je neodesílají. Jsou to tedy sklady.

Předpokládejme, že rozdělení výrobků dnešního dne známe. Je to - v jednotlivých provozech - množství v_1 , v_2 , v_3 , v_4 . Ptáme se, jaké bude rozdělení výrobků zítra? Je zřejmé, že součin $c_{ij} v_j$ představuje množství výrobků, které se dnes dopraví z provozu P_j do provozu P_i . Celkem bude zítra v provozu P_i

$$v_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{4} c_{ij} v_j . \tag{18.2}$$

Tuto soustavu rovnic (i = 1, 2, ..., 4) lze zapsat maticově jako

$$v^{(1)} = C v . \tag{18.3}$$

Pravá strana (18.2) totiž definuje násobení $C v$ podle (2.13). Za n dnů tedy budeme mít

$$v^{(n)} = C^n v . \tag{18.4}$$

Metodami, které jsme popsali v 10. kapitole, vypočteme limitu

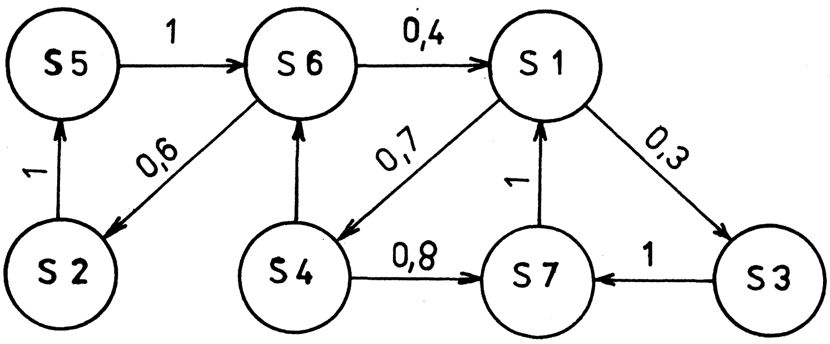
$$\lim_{n \to \infty} C^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/15 & 1/5 & 1 & 0 \\ 11/15 & 4/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{18.5}$$

takže po dlouhé době (teoreticky nekonečné) bude rozdělení výrobků dáno vektorem

$$\lim_{n \to \infty} v^{(n)} = \lim_{n \to \infty} C^n v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4v_1 + 3v_2 + 15v_3}{15} \\ \frac{11v_1 + 12v_2 + 15v_4}{15} \end{bmatrix}. \tag{18.6}$$

Všechny výrobky budou tedy ve skladech $P3$ a $P4$, jak bylo možno očekávat. Poměr jejich množství v těchto skladech bude $(4v_1+3v_2+15v_3) : (11v_1+12v_2+15v_4)$ a celkové množství bude $v_1+v_2+v_3+v_4$, tedy stejné jako na začátku.

Uvedeme ještě jiný příklad. Je dána soustava, která se může vyskytovat jen v jednom ze sedmi stavů $S1$ až $S7$. Přechází náhodně z jednoho stavu do druhého s pravděpodobností vyznačenou na obr. 18.1.



Obr. 18.1

Např. stav $S6$ se může změnit jedině na stav $S1$ s pravděpodobností $p_{61} = 0{,}4$ nebo na stav $S2$ s pravděpodobností $p_{62} = 0{,}6$. Hodnota p_{ij} znamená pravděpodobnost, že se i-tý stav změní na j-tý stav. Tyto pravděpodobnosti tvoří nezápornou matici

$$
P = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc}
0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] . \qquad (18.7)
$$

Rozdělíme-li tuto matici naznačeným způsobem, shledáme, že šest submatic je nulových. Nenulové submatice označíme A, B, C, takže (18.7) bude mít tvar

$$
P = \left[\begin{array}{c|c|c}
0 & A & 0 \\
\hline
0 & 0 & B \\
\hline
C & 0 & 0
\end{array}\right] . \qquad (18.8)
$$

Výchozí stav i tedy přejde do stavu j s pravděpodobností p_{ij}. Protože určitě do některého stavu přejde, musí být $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. To znamená, že součet prvků v i-tém řádku se musí rovnat jedné. Stav j přejde do stavu k s pravděpodobností p_{jk}, takže pravděpodobnost, že stav i se změní na k ve dvou krocích (po dvou změnách), je

$$
\sum_{j=1}^{n} p_{ij} p_{jk} = p_{ik}^{(2)} . \qquad (18.9)
$$

Pravděpodobnosti $p_{ik}^{(2)}$ tvoří matici $P^{(2)} = P^2$. Obecně po N krocích (N změnách stavu) se stav i změní ve stav m s pravděpodobností $p_{im}^{(N)}$, což je prvek matice P^N.

Budeme tedy hledat mocniny matice P. Pomocí (18.8) vypočteme

$$
P^2 = \left[\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & AB \\
\hline
BC & 0 & 0 \\
\hline
0 & CA & 0
\end{array}\right] , \qquad
P^3 = \left[\begin{array}{c|c|c}
ABC & 0 & 0 \\
\hline
0 & BCA & 0 \\
\hline
0 & 0 & CAB
\end{array}\right] . \qquad (18.10)
$$

Třetí mocnina je tedy pásová matice. Postupným násobením vypočteme

$$
ABC = \begin{bmatrix} 0{,}916 & 0{,}084 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} , \quad CAB = \begin{bmatrix} 0{,}656 & 0{,}343 \\ 0{,}14 & 0{,}86 \end{bmatrix} ,
$$

$$BCA = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}264 & 0{,}616 & 0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}28 & 0{,}6 \end{bmatrix} . \tag{18.11}$$

Podle (18.10) bude

$$P^{3n} = \left[\begin{array}{c|c|c} (ABC)^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & (BCA)^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & (CAB)^n \end{array}\right] . \tag{18.12}$$

Hledejme, jaký stav se ustálí pro velká n . Pro matici ABC najdeme vlastní hodnoty $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0{,}516$ a jim příslušné vlastní vektory $u_1 = [1 \quad 1]^T$, $u_2 = [-21 \quad 100]^T$. Bude tedy

$$(ABC)^n = \begin{bmatrix} 1 & -21 \\ 1 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}516^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -21 \\ 1 & 100 \end{bmatrix}^{-1} \tag{18.13}$$

a v limitě pro $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} (ABC)^n = \begin{bmatrix} 1 & -21 \\ 1 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{121} \begin{bmatrix} 100 & 21 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{121} \begin{bmatrix} 100 & 21 \\ 100 & 21 \end{bmatrix} . \tag{18.14}$$

Obdobně vypočteme i ostatní mocniny. Celkem bude

$$\lim_{n \to \infty} P^{3n} = \frac{1}{121} \left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 100 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 30 & 70 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 & 21 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86 & 35 \end{array}\right] , \tag{18.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{3n+1} = \frac{1}{121}\left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 0 & 0 & 30 & 70 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 & 21 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86 & 35 \\ \hline 100 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad (18.16)$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{3n+2} = \frac{1}{121}\left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86 & 35 \\ \hline 100 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 30 & 70 & 21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 & 21 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad (18.17)$$

Byl-li výchozím stavem např. stav $S6$, pak po 1000 změnách bude se matice P^{1000} velmi přibližně rovnat matici (18.16) (n = 333) a soustava bude buď ve stavu $S1$ (s pravděpodobností 100/121), nebo $S2$ (s pravděpodobností 21/121). Po další změně (tisící první) přejde do stavu $S3$ (s pravděpodobností 30/121) nebo $S4$ (s pravděpodobností 70/121) nebo $S5$ (s pravděpodobností 21/121). Po další změně (tisící druhé) bude soustava buď ve stavu $S6$ (s pravděpodobností 86/121), nebo $S7$ (s pravděpodobností 35/121). Pak se tyto stavy a jejich pravděpodobnosti budou periodicky opakovat po každé třetí změně.

Poslední příklad volíme z biologie, abychom naznačili, jak rozmanité jsou aplikace maticové algebry. Předpokládejme, že existuje nějaký živočich, který žije v průměru tři roky. Z počtu x_0 samic ve stáří do jednoho roku jich vstoupí do druhého roku jen polovina (ostatní nepřežijí). Z počtu y_0 samic ve stáří od jednoho do dvou let vstoupí do třetího roku života jen třetina. Samice, která se dožila stáří delšího než dva roky, porodí v průměru šest samičích mláďat. V letošním roce je takových samic z_0. Jaké bude věkové rozdělení samic po uplynutí jednoho roku? Označíme-li hledané počty samic v uvedených třech věkových skupinách x_1, y_1, z_1, bude

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}. \quad (18.18)$$

Tuto rovnici zapíšeme zkráceně

$$\xi_1 = M \xi_0 . \tag{18.19}$$

Po dvou letech zřejmě bude $\xi_2 = M \xi_1 = M^2 \xi_0$ atd., obecně po n letech

$$\xi_n = M^n \xi_0 . \tag{18.20}$$

Ptáme se, za jakých okolností může existovat ustálený počet těchto živočichů. Kdyby se jejich počet neměl měnit, muselo by být

$$M \xi = \xi , \tag{18.21}$$

tzn., že vlastní hodnota matice M by musela být $\lambda = 1$. To skutečně v našem případě je (vyjde totiž $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1,5 - 0,86603\, i$, $\lambda_3 = -1,5 + 0,86603\, i$). K jednotkové vlastní hodnotě přísluší vlastní vektor $u = [\,6 \quad 3 \quad 1\,]^T$, takže počet samic ve stáří do jednoho roku, od jednoho do dvou let a od dvou do tří let by musel být v poměru 6 : 3 : 1.

Většinou tomu tak nebude, takže musíme počítat mocniny matice M a dosazovat do rovnice (18.20). Podle Cayleyho-Hamiltonovy věty je $M^3 = I$ (o tom se můžeme přesvědčit také opakovaným násobením matic M), takže

$$M^4 = M,\ M^5 = M^2,\ M^6 = I,\ M^7 = M^2 \text{ atd.} \tag{18.22}$$

Vývoj tedy bude probíhat periodicky v tříletých cyklech. Umocněním matice M a dosazením do rovnice (18.20) dostaneme pro jednotlivé roky tyto vektory:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6a \\ 3b \\ c \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 6c \\ 3a \\ b \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 6b \\ 3c \\ a \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 6a \\ 3b \\ c \end{Bmatrix} \rightarrow \text{ atd.} \tag{18.23}$$

Zde a , b , c jsou přirozená čísla taková, že $x_0 \doteq 6a$, $y_0 \doteq 3b$, $z_0 \doteq c$. Ustálenému stavu odpovídá případ $a = b = c$. Kdyby se přírodní podmínky změnily natolik, že by se vlastní hodnota λ_1 matice M zvětšila nebo zmenšila, nastalo by buď přemnožování, nebo vymírání druhu. Matici M lze změnit různým způsobem. Vzniká otázka, jaký zásah je nejefektivnější z hlediska žádaného účinku. Metodou, která zde byla vyložena, řešili J. H. Darwin a R. M. Williams problém přemnožení divokých králíků na New Zealandu (1964).

PŘÍKLADY

1. Je dána čtvercová matice A třetího řádu. Jak musí vypadat operátor N, aby se matice $B = NA$ lišila od matice A pouze pořadím prvních dvou řádků?

Odpověď:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

2. Přepište do maticového tvaru výraz

$$a = \sum_{j=2}^{4} \sum_{i=1}^{4} c_{ij} x_i x_j .$$

Odpověď:

$$a = x^T C x$$

kde

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} .$$

3. Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 21 \\ 100 & 21 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 0,916 & 0,084 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} .$$

Vypočtěte součin AB a dokažte, že $AB = A$. Pak ovšem také $AB^2 = AB = A$, takže obecně $AB^n = A$. Přesvědčte se, že tyto vztahy platí, ačkoli B není idempotentní matice.

4. Najděte inverzní matici A^{-1}, je-li

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Odpověď:

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -24 & 3 & 6 \\ 22 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. Je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = A(\beta)$$

Dokažte, že $A^{-1} = A(-\beta)$, $A(-\beta) = A^{T}(\beta)$.

6. Dokažte, že pro souměrné matice A, B platí vztah

$$[(AB)^{T}]^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

7. Je-li matice C odvozena z matice M vztahem

$$C = M(M^{T}M)^{-1}M^{T},$$

platí, že

$$C^{2} = C = C^{T}.$$

Dokažte toto tvrzení.

8. Pro dvě ortogonální matice A, B (stejného řádu) platí vztah

$$(AB)(AB)^{T} = I,$$

tzn., že součin ortogonálních matic je také ortogonální. Přesvědčte se o tom. Jaký geometrický význam má tento poznatek?

9. Jsou dány regulární matice A, B, přičemž $A = \lambda B$, λ je konstanta. Dokažte, že pro determinanty platí

$$|\overset{n}{A}| = \lambda^n |\overset{n}{B}|$$

a pro inverzní matice

$$A^{-1} = \lambda^{-1} B^{-1}.$$

10. Jsou dány dva vektory x, y (každý o *n* prvcích) . Přesvědčte se, že platí vztah

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = |I - xy^T| - 1 .$$

11. Determinant $|A|$ = 0. Pak pro malé ε, $0 < |\varepsilon| \ll 1$, je

$$|A + \varepsilon I| \neq 0 .$$

Dokažte.

12. Platí-li pro součin nenulových matic $AB = 0$, musí být alespoň jedna z těchto matic singulární. Dokažte.

13. Metoda konečných prvků dává pro statické řešení pružných těles a jejich soustav tuto závislost vektoru zobecněných posuvů $\{x\}$ na vektoru zobecněných sil $\{F\}$:

$$[K]\{x\} = \{F\} .$$

Zde $[K]$ je matice tuhosti, je čtvercová a souměrná. Jak se tato matice změní, přejdeme-li k pootočené soustavě souřadnic?

Řešení:

Nové souřadnice $\{\xi\}$ dostaneme ortogonální transformací

$$\{x\} = [Q]\{\xi\}, \qquad \{\xi\} = [Q]^T\{x\}.$$

Platí, že $[Q]^T[Q] = [I]$.

Obdobně se budou transformovat síly $\{F\}$, takže

$$\{F\} = [Q]\{\mathcal{F}\}, \qquad \{\mathcal{F}\} = [Q]^T\{F\}.$$

Příkladem takové transformace může být rovnice (2.6) s transformační maticí (2.4) (pro případ dvou proměnných). Z původní rovnice dostaneme (závorky už vynecháme)

$$KQ\xi = Q\mathcal{F}$$

a odtud

$$Q^TKQ\xi = \mathcal{F}.$$

Tuto rovnici upravíme na standardní tvar

$$\mathcal{K}\xi = \mathcal{F},$$

kde

$$\mathcal{K} = Q^TKQ$$

je hledaná matice tuhosti v nových souřadnicích.

14. Dokažte, že ortogonální matice transformuje vektory tak, že se jejich vzájemné úhly v absolutní hodnotě nemění.

Řešení:

Pro ortogonální matici platí vztah $Q^T = Q^{-1}$. Podle definice skalárního součinu dvou vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí, že

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

kde φ je orientovaný úhel mezi oběma vektory. Je tedy

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} .$$

Obdobně definujeme úhel mezi dvěma vektory x , ξ (n-tého řádu)

$$\cos\varphi = \frac{x^T\xi}{\sqrt{x^Tx}\,\sqrt{\xi^T\xi}} .$$

Ortogonální transformací dostaneme vektory

$$y = Qx, \qquad x = Q^Ty,$$
$$\eta = Q\xi, \qquad \xi = Q^T\eta .$$

Dosazením

$$\cos\varphi = \frac{y^TQQ^T\eta}{\sqrt{y^TQQ^Ty}\,.\sqrt{\eta^TQQ^T\eta}} = \frac{y^T\eta}{\sqrt{y^Ty}\,\sqrt{\eta^T\eta}} .$$

Pravá strana se však rovná $\cos\psi$, je-li ψ úhel mezi vektory y , η . Je tedy $\cos\varphi = \cos\psi$. Oba úhly jsou proto v absolutní hodnotě stejné. K mnohoznačnosti dané rozdílem o plný úhel 360 ° nepřihlížíme.

15. Jakou transformaci vyjadřuje rovnice

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,866 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad ?$$

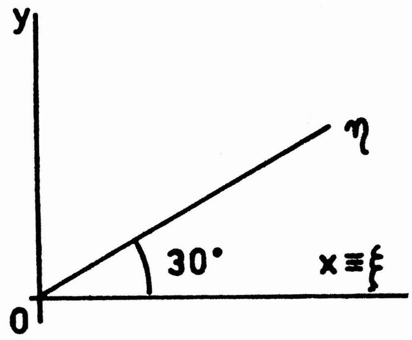
Řešení:

Transformace není ortogonální, neboť součin transponované a původní matice

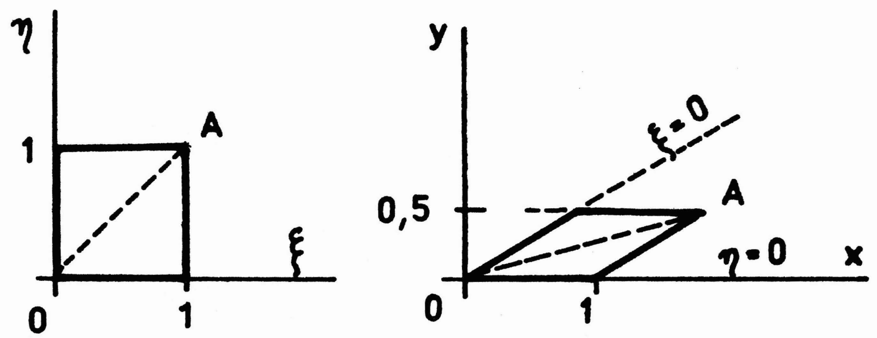
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,866 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,866 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,866 \\ 0,866 & 1 \end{bmatrix}$$

nedá jednotkovou matici. Jde zřejmě o transformaci mezi kartézskou a kosoúhlou soustavou souřadnic, svírají-li osy ξ , η úhel 30 ° (obr. A.1). Tato transformace mění čtverec v rovině ξ , η

o jednotkové straně na kosočtverec v rovině x, y podle obr. A.2. Norma vektoru $\overrightarrow{OA}$ se nezachovává.



Obr. A.1



Obr. A.2

16. Dokažte, že matice

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

je nilpotentní.

17. Určete hodnost matice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpověď: 2.

18. Má-li rozdělená matice tvar

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline 0 & -I \end{array}\right],$$

je vždy $A^2 = I$. Dokažte toto tvrzení.

19. V rovnici popisující závislost zobecněných posuvů $x = [x_1 \; x_2, \dots x_n]^T$ na zobecněných silách $F = [F_1 \; F_2 \; \dots F_n]^T$

$$Kx = F$$

chceme přejít k menší soustavě obsahující posuvy pouze těch bodů, v nichž působí nenulové síly F_i (některé z těchto sil jsou totiž nulové). Jak budeme postupovat?

Úlohu řešte konkrétně pro soustavu

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve uspořádáme soustavu do tvaru

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{aa} & K_{ab} \\ \hline K_{ba} & K_{bb} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} x_a \\ \hline x_b \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} F_a \\ \hline 0 \end{array}\right\}.$$

Proto pořadí prvků 1, 2, 3, 4 změníme na 1, 3, 2, 4.

Místo matice

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

budeme mít matici

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array},$$

takže

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \\ \hline x_2 \\ x_4 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} F_1 \\ F_3 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right\} .$$

Nyní máme matice rozděleny tak, že nulové prvky ve vektoru sil máme zvlášť. Rozepsáním rozdělené soustavy dostaneme

$$K_{aa} x_a + K_{ab} x_b = F_a ,$$
$$K_{ba} x_a + K_{bb} x_b = 0 .$$

Z poslední rovnice vypočteme x_b a dosadíme do předchozí rovnice. Vyjde

$$(K_{aa} - K_{ab} K_{bb}^{-1} K_{ba}) x_a = F_a .$$

Vyčíslením dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} .$$

20. Ze soustavy s rozdělenou maticí

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u \\ \hline v \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} a \\ \hline 0 \end{array}\right\}$$

vylučte vektor v , avšak tak, abyste submatici D neinvertovali (může být singulární). Cílem je získat závislost mezi vektory u , a .

Řešení:

Rozepsáním dané rovnice dostaneme

$$A u + B v = a ,$$
$$C u + D v = 0 .$$

Z první rovnice vypočteme

$$u = A^{-1} (a - B v)$$

a dosadíme do druhé. Vyjde

$$C A^{-1}(a - B v) + D v = 0$$

a odtud

$$v = [C A^{-1} B - D]^{-1} C A^{-1} a .$$

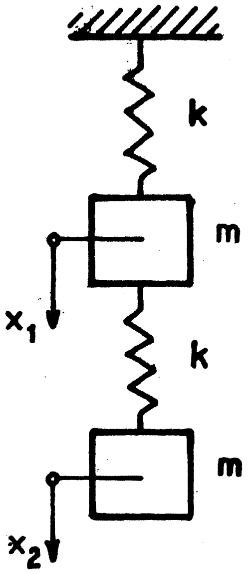
Proto

$$u = A^{-1} a - A^{-1} B [C A^{-1} B - D]^{-1} C A^{-1} a$$

a po úpravě

$$u = A^{-1}(I - B[C A^{-1} B - D]^{-1} C A^{-1}) a .$$

21. Je dána soustava dvou hmot zavěšených na pružinách podle obr. A.3. Hmotnost m a tuhost pružiny k splňují číselně podmínku $k = m$. Sestavte pohybové rovnice a z nich matici hmotnosti a matici tuhosti. Najděte vlastní úhlové frekvence a vlastní tvary kmitu. Posuvy hmot x_1, x_2 z rovnovážné polohy transformujte pomocí modální matice do tzv. normálních souřadnic.



Obr. A.3

Řešení:

Soustavu rovnic lze napsat maticově takto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

Srovnáním s tvarem

$$M \ddot{x} + K x = 0$$

poznáváme, že matice hmotnosti M a matice tuhosti K jsou

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Předpokládáme harmonické kmitání, takže dosadíme

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}, \qquad x_2 = X_2 e^{i\omega t}.$$

Pro vektor amplitud $\{X\} = \{X_1 \; X_2\}^T$ pak vyjde

$$AX = \lambda X.$$

Přitom jsme označili $\omega^2 = \lambda$. Matice A je v tomto případě totožná s maticí tuhosti, neboť matice hmotnosti je jednotková. Z charakteristické rovnice $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ vyjde

$$\lambda_1 = 0{,}5\,(3 - \sqrt{5}) \doteq 0{,}382, \qquad \omega_1 \doteq 0{,}62,$$
$$\lambda_2 = 0{,}5\,(3 + \sqrt{5}) \doteq 2{,}618, \qquad \omega_2 \doteq 1{,}62.$$

Modální matice vyjde (po zaokrouhlení)

$$U = \begin{bmatrix} 0{,}526 & -0{,}851 \\ 0{,}851 & 0{,}526 \end{bmatrix}.$$

Normální proměnné jsou

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = [U]^T \{X\}$$

a vyhovují soustavě se separovanými proměnnými

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Vlastní vektory nyní jsou $[1 \quad 0]^T$, resp. $[0 \quad 1]^T$.

22. Zdvojnásobíme-li hmotnost druhé (tj. spodní) hmoty na obr. A.3, dostaneme pro výpočet vlastních frekvencí soustavu rovnic

$$\omega^2 M x = K x,$$

kde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Převeďte tuto rovnici na úlohu o vlastních hodnotách

$$A y = \lambda y$$

se souměrnou maticí A .

Řešení:

Kdybychom invertovali matici hmotnosti, vyšla by matice nesouměrná, neboť

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} .$$

Vlastní hodnoty této matice jsou $\lambda_1 = 0{,}22$, $\lambda_2 = 2{,}28$.

Souměrnosti dosáhneme rozkladem matice M na součin dolní a horní trojúhelníkové matice. Označíme-li

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} , \quad H^T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} ,$$

vyjde z rovnice $H^T H = M$, totiž z rovnice

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ,$$

$a = 1$, $b = 0$, $c = \sqrt{2}$. **Proto**

$$H = H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} , \qquad H^{-1} = H^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} .$$

Z rovnice (7.37)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Tato matice je souměrná a její vlastní hodnoty vskutku jsou $\lambda_1 = 0{,}22$, $\lambda_2 = 2{,}28$ **(jako dříve).**

Kdybychom nyní nalezli vlastní vektory y , dostali bychom vlastní vektory x zpětnou transformací podle (7.34)

$$x = H^{-1} y .$$

Přesvědčte se o tom.

23. Má-li matice A vlastní hodnotu λ, přísluší mocnině A^n vlastní hodnota λ^n. Dokažte.

24. Ukažte, že úlohu o vlastních hodnotách a vektorech s rozdělenou reálnou maticí

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array}\right] \{x\} = \lambda \{x\}$$

lze rozdělit na dvě úlohy, a to

$$A A^T u = \lambda^2 u,$$

$$A^T A v = \lambda^2 v,$$

zvolíme-li

$$\{x\} = \left\{\frac{u}{v}\right\}.$$

Matice A nemusí být souměrná. Ukažte, že matice $A A^T$, resp. $A^T A$ je však souměrná a pozitivně semidefinitní.

25. Najděte vlastní hodnoty matice B z prvního příkladu a určete příslušné vlastní vektory.

Odpověď: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0{,}516$, $u_1 = [1 \quad 1]^T$, $u_2 = [21 \quad -100]^T$.

26. Rozložte matici B z prvního příkladu na součin

$$B = U \Lambda U^{-1},$$

kde Λ je diagonální matice.

Odpověď:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ 1 & -100 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}516 \end{bmatrix}.$$

27. Dokažte, že pro matice z příkladů 25 a 26 platí

$$BU\Lambda = BU .$$

28. Matici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 3 \\ -6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

rozložte na součin dolní D a horní H trojúhelníkové matice.

Řešení:

Hledáme matice D, H takové, aby $A = DH$. Protože matice A je souměrná, musí být

$$(DH)^T = H^T D^T = DH .$$

Tento vztah bude vždy platit, bude-li $D = H^T$. Zvolíme proto tento tvar rozkladu:

$$H^T H = A .$$

Rozepsáním dostaneme

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 3 \\ -6 & 3 & 10 \end{bmatrix} .$$

Musí tedy být

$$\begin{aligned} a^2 &= 4, & ab &= -2, & ac &= -6. \\ b^2 + d^2 &= 10, & bc + de &= 3, \\ c^2 + e^2 + f^2 &= 10, \end{aligned}$$

Vyjde

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

29. Je-li λ vlastní hodnotou úlohy $Ax = \lambda x$, je též vlastní hodnotou adjungované úlohy $A^T y = \lambda y$. Dokažte.

Návod:

Rovnici $Ax = \lambda x$ vynásobte skalárně vektorem y a porovnejte s výsledkem získaným z obdobně vynásobené rovnice $A^T y = \lambda y$.

30. Pro součin souměrných matic A, B definujeme tyto úlohy o vlastních hodnotách

$$ABx = \lambda_{AB} x, \qquad BAy = \lambda_{BA} y.$$

Dokažte, že vlastní hodnoty jsou v obou případech stejné, a to i u nekomutativních matic.

Návod:

Za matici A dosaďte její spektrální (modální) rozklad $A = U_A \Lambda_A U_A^T$. Pak využijte poznatek z úlohy 29.

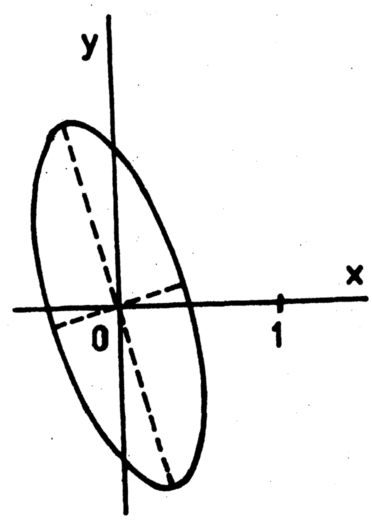
31. Pro matici

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nakreslete kuželosečku $x^T A x = 1$ a přesvědčte se, že její osy splývají s vlastními vektory a že vlastní hodnoty jsou reciprokými hodnotami kvadrátů poloos kuželosečky.

Kontrolní výsledek:

Vlastní hodnoty jsou $\lambda_1 = 3 + \sqrt{5}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$.
Kuželosečka je znázorněna na obr. A.4.



Obr. A.4

32. K souměrné matici

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

najděte podobnou diagonální matici.

Kontrolní výsledek:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} .$$

33. Nechť A , B jsou navzájem podobné čtvercové matice, takže

$$A = TBT^{-1}, \qquad B = T^{-1}AT .$$

Dokažte, že pro maticový polynom

$$P(M) = a_0 I + a_1 M + a_2 M^2 + \dots + a_n M^n \quad (M = A, \text{ resp. } B) .$$

těchto matic platí vztahy

$$T^{-1}P(A)\,T = P(B),$$

$$T\,P(B)\,T^{-1} = P(A).$$

34. Dokažte, že podobné matice mají stejný determinant i stopu.

Návod:

Využijte poznatek, že podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

35. Ukažte, že $tr(AB) = tr(BA)$, i když jde o nekomutativní matice, takže $AB \neq BA$.

36. Jak se změní první vlastní frekvence soustavy z příkladu 21, zvětší-li se hmotnost spodní zavěšené hmoty o 20 %?

Řešení:

Použijeme nejprve vzorec (12.17). Protože matice A je v daném případě souměrná, je $v_1 = u_1$, $v_1^T u_1 = 1$. A protože $A + \delta A = (M + \delta M)^{-1} K$, vyjde po dosazení

$$A + \delta A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -0,833 & 0,833 \end{bmatrix} .$$

Všimněme si, že tato matice už není souměrná. Odečtením matice A dostaneme

$$\delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,167 & -0,167 \end{bmatrix} .$$

Pro $u_1 = [\,0,526 \quad 0,851\,]^T$ vyjde z rovnice (12.17)

$$\delta\lambda_1 \doteq [0,526 \quad 0,851] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,167 & -0,167 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,526 \\ 0,851 \end{Bmatrix} \doteq -0,046,$$

$$\lambda_1 + \delta\lambda_1 \doteq 0,382 - 0,046 = 0,336.$$

Přímým výpočtem z pozměněné matice $A + \delta A$ vyjde $\lambda_1 + \delta\lambda_1 \doteq 0,333$, takže chyba přibližného řešení podle vzorce (12.17) je necelé jedno procento.

37. Určete, jak se změní vlastní tvary kmitu u soustavy z příkladu 21, změní-li se nepatrně matice A soustavy.

Kontrolní výsledek:

Lze ukázat, že u této soustavy vyjde $\omega_{12} \doteq 0,0128$, $\omega_{21} \doteq -0,0873$. Pomocí rovnice (12.5) vypočteme změny vlastních vektorů pro případ, že se spodní hmota soustavy zvětší o 20 %. Tak dostaneme přibližné hodnoty, které srovnáme s přesným výpočtem. Dostaneme tyto hodnoty:

Původní soustava	Pozměněná soustava počítaná	
	podle (12.5)	přesně
$u_1 = \begin{Bmatrix} 0,5257 \\ 0,8507 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,5149 \\ 0,8573 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0,5145 \\ 0,8575 \end{Bmatrix}$
$u_2 = \begin{Bmatrix} -0,8507 \\ 0,5257 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0,8966 \\ 0,4513 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0,8944 \\ 0,4472 \end{Bmatrix}$

38. Jak známo, pořadí činitelů při násobení matic nelze obecně zaměnit. Mají-li však matice společné vlastní vektory, tvoří výjimku z tohoto pravidla. Dokažte toto tvrzení.

Návod:

Využijte skutečnost, že takové matice mají stejnou modální matici, a použijte rozklad (9.33).

39. Je dána matice A a její nepřesná inverze $B \cong A^{-1}$. Navrhněte postup ke zpřesnění inverzní matice B, aniž se celá úloha přepočítává.

Řešení:

Místo přesné inverzní matice A^{-1} máme k dispozici jen nepřesnou maticí B. Rozdíl mezi nimi

$$\delta B = A^{-1} - B$$

je podle předpokladu malý, takže $\| \delta B \| \ll \| A^{-1} \|$. Protože $A^{-1} A = I$, musí platit, že

$$(B + \delta B) A = I .$$

Odtud

$$\delta B A = I - BA ,$$

takže

$$\delta B = (I - BA)A^{-1}.$$

Za matici A^{-1} nyní dosadíme přibližnou hodnotu B. Bude tedy

$$\delta B \doteq (I - BA)B.$$

Dostaneme tak korigovanou inverzní matici

$$A^{-1} \doteq B + \delta B,$$

která bude přesnější než původní matice. Kdybychom s její přesností nebyli spokojeni, můžeme ji opravit stejným způsobem ještě jednou (popř. i několikrát). Příklad:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Předpokládejme, že budeme místo přesné hodnoty A^{-1} mít

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -1{,}9 \\ -1{,}0 & 3{,}2 \end{bmatrix}.$$

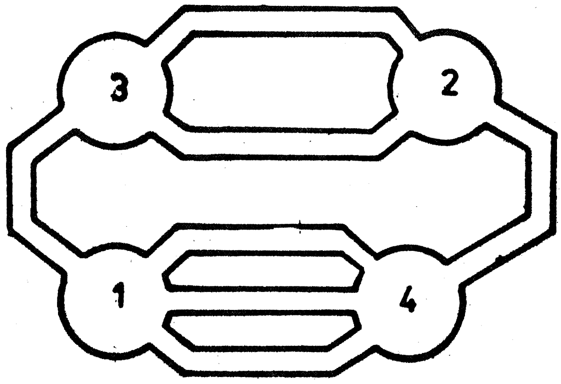
Po prvním zpřesnění vyjde

$$A^{-1} \doteq \begin{bmatrix} 0{,}98 & -1{,}96 \\ -0{,}98 & 2{,}94 \end{bmatrix}.$$

Poznámka: uvedená metoda zpřesňování inverzní matice má význam u velkých matic, jejichž inverze je zatížena zaokrouhlovacími chybami a je časově náročnou operací.

40. V bludišti na obr. A.5 je v hnízdě 1 pokusná myš. Nakreslenými kanály může volně přecházet z hnízda do hnízda. Učiní tak vždy, kdykoli ji vyplašíme. Spojovací kanál přitom volí náhodně, a to všechny přístupné kanály se stejnou pravděpodobností. Při pokusu vyplašíme myš pravidelně každou minutu. Jaká je pravděpodobnost, že po třech minutách bude v druhém hnízdě?

Obr. A.5



Řešení:

Matice pravděpodobností je

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Tato matice má prvky p_{ij} , řádek i znamená hnízdo, v kterém myš právě je, druhý index j značí hnízdo, ke kterému myš směřuje. Např. pravděpodobnost, že myš pronikne z hnízda 3 do hnízda 2 , je $p_{32} = \frac{2}{3}$.

Rovná-li se tedy pravděpodobnost, že myš bude v k-tém hnízdě x_k, bude po dalším kroku v j-tém hnízdě s pravděpodobností $p_{kj} \cdot x_k$. Celková pravděpodobnost, že v tomto kroku přiběhne myš do j-tého hnízda, je $\sum_k p_{kj} x_k$. Vektor pravděpodobností $\{x_k\}_0$ přejde tak do vektoru $\{x_k\}_1$. Vzpomeneme-li si na pravidlo o násobení matice vektorem (2.12), poznáme, že

$$\{x_k\}_1 = [P]^T \{x_k\}_0 .$$

Po třech krocích

$$\{x_k\}_3 = ([P]^T)^3 \{x_k\}_0 .$$

Vyčíslením

$$\{x_k\}_3 \doteq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,396 \\ 0,604 \end{Bmatrix} .$$

V hnízdech 1 a 2 se tedy myš nemůže po třetí minutě (po třetím přeběhnutí) vůbec vyskytnout. S pravděpodobností asi 0,6 bude ve čtvrtém hnízdě, 0,4 ve třetím.

Poznámka: naše matice má strukturu

$$P = \left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline B & 0 \end{array}\right] ,$$

takže třetí mocnina má tvar

$$P^3 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & ABA \\ \hline BAB & 0 \end{array}\right] .$$

Z této matice potřebujeme jen první sloupec, protože vektor $\{x_k\}_0$ má nenulový jen první prvek. Všimneme-li si toho, ušetříme si práci s výpočtem prvků matice $([P]^T)^n$, které nepotřebujeme.

41. Body o souřadnicích x_i , y_i proložte regresní přímku

$$y = a + bx$$

a stanovte součinitel korelace. Souřadnice daných bodů jsou uvedeny v tabulce

$i =$	1	2	3
$x_i =$	2	3	7
$y_i =$	1	3	5

Kontrolní výsledek:

$$y = \frac{1}{7}(x + 5) , \quad R = 0,947.$$

42. Určete dynamickou nestacionární odezvu $u(t)$ na silové působení $F(t)$ u mechanické soustavy, jejíž matice hmotnosti je M, matice tlumení C a matice tuhosti K. Posuvy jsou sestaveny do vektoru $u(t)$.

Řešení:

K výpočtu použijeme modální metodu. Soustavu pohybových rovnic

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F$$

budeme nejprve řešit pro volné kmitání $(F=0)$ a bez tlumení $(C=0)$. Do rovnice

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

dosadíme předpokládaný tvar řešení

$$u = \varphi e^{i\omega t},$$

kde φ je vektor amplitud harmonického kmitání. Vyjde

$$(K - \omega^2 M)\varphi = 0.$$

To je úloha (7.28) o vlastních hodnotách a o vlastních vektorech, kterou umíme řešit metodami popsanými v sedmé kapitole. Budeme předpokládat, že hodnoty ω^2 vyjdou navzájem různé. Z vlastních vektorů $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ vybereme určitý počet p nezbytný k dostatečně přesnému popisu kmitání soustavy, které chceme určit, a sestavíme z nich modální matici Φ o velikosti $(n \times p)$. Má-li soustava malý počet stupňů volnosti, volíme $p=n$ (tj. zahrneme do výpočtu všechny vlastní vektory). Je-li soustava velká a složitá, volíme $p<n$, aby se ušetřil výpočtový čas. Pak použijeme substituci

$$u = \Phi q,$$

kde q jsou zobecněné souřadnice. Dosazením do pohybové rovnice vyjde

$$M\Phi\ddot{q} + C\Phi\dot{q} + K\Phi q = F.$$

Řešení $q = q(t)$ bude jen přibližné, pokud $p<n$. Poslední rovnice je soustavou n diferenciálních rovnic pro p neznámých. Protože obecně $p<n$, je tato soustava přeurčená. Promítneme ji proto do p-rozměrného prostoru násobením maticí Φ^T zleva, takže budeme mít

$$\bar{M}\ddot{q} + \bar{C}\dot{q} + \bar{K}q = \bar{F}(t),$$

kde

$$\bar{M} = \Phi^T M \Phi, \qquad \bar{K} = \Phi^T K \Phi,$$
$$\bar{C} = \Phi^T C \Phi, \qquad \bar{F} = \Phi^T F.$$

Tím jsme získali soustavu s menším počtem neznámých, kterou můžeme řešit. K usnadnění výpočtů se zpravidla předpokládá, že tlumení je proporcionální, takže

$$\bar{C} = \alpha \bar{M} + \beta \bar{K},$$

kde α, β jsou konstanty. Je-li úloha lineární a matice M, K souměrné a pozitivně definitní, vyjdou matice $\bar{M}$, $\bar{K}$ diagonální, takže i matice $\bar{C}$ je potom diagonální. Zpravidla se bere

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 2\xi_p\omega_p \end{bmatrix},$$

kde ξ_i je součinitel kritického tlumení.

Ukážeme, jak by se úloha řešila dále Newmarkovou metodou. Délku časového kroku označíme Δt. O zrychlení budeme předpokládat, že se uvnitř každého kroku mění lineárně, takže třetí derivace posuvů podle času $\dddot{q}$ je konstantní. V intervalu

$$t_i < t_i + \tau < t_{i+1}, \quad 0 < \tau < \Delta t, \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

bude tedy platit

$$\ddot{q} = \ddot{q}_i + k\tau,$$
$$\dot{q} = \dot{q}_i + \ddot{q}_i\tau + \frac{1}{2}k\tau^2,$$
$$q = q_i + \dot{q}_i\tau + \frac{1}{2}\ddot{q}_i\tau^2 + \frac{1}{6}k\tau^3.$$

Označili jsme $q_i = q(t = t_i)$. Tečkou označujeme derivaci podle času τ. Dosadíme-li $\tau = \Delta t$, dají levé strany těchto rovnic $\ddot{q}_{i+1}$, $\dot{q}_{i+1}$, q_{i+1}. Vyloučíme konstantu k a dostaneme po úpravě

$$\ddot{q}_{i+1} = \frac{6}{\Delta t^2}(q_{i+1} - q_i) - \frac{6}{\Delta t}\dot{q}_i - 2\ddot{q}_i,$$

$$\dot{q}_{i+1} = \frac{3}{\Delta t}(q_{i+1} - q_i) - 2\dot{q}_i - 0{,}5\,\ddot{q}_i\,\Delta t.$$

Maticovou rovnici pak upravíme do tvaru

$$[\bar{K} + \bar{K}_m]\, q_{i+1} = \bar{P}_i + \bar{F} + \bar{K}_m q_i ,$$

kde

$$\bar{K}_m = \frac{6}{\Delta t^2}\bar{M} + \frac{3}{\Delta t}\bar{C} ,$$

$$\bar{P}_i = \bar{M}\left(\frac{6}{\Delta t}\dot{q}_i + 2\ddot{q}_i\right) + \bar{C}\left(2\dot{q}_i - 0{,}5\ddot{q}_i \Delta t\right).$$

Tuto rovnici již můžeme řešit a pro dané q_i najít q_{i+1}. Stejně lze postupovat i u nelineárních úloh, kdy např. matice $\bar{K}$ závisí na vektoru q_i. Pak postupujeme iterační metodou. Pro iteraci je výhodnější, zavedeme-li přírůstky

$$\Delta q = q_{i+1}^{(k)} - q_{i+1}^{(k-1)} .$$

Zde k je přirozené číslo označující pořadí iteračního kroku. Rovnice se upraví na tvar

$$[\bar{K} + \bar{K}_m]\,\Delta q = \bar{P}_i + \bar{F} - \bar{K} q_{i+1}^{(k-1)} + \bar{K}_m \left\{ q_{i+1}^{(k-1)} - q_i \right\} .$$

Vypočteme Δq, pak $q_{i+1}^{(k)} = \Delta q + q_{i+1}^{(k-1)}$. V poslední rovnici zvětšíme k o jedničku, vypočteme nové $\bar{P}_i$, nové Δq a pak i $q_{i+1}^{(k+1)}$. Pokračujeme tak dlouho, až Δq prakticky vymizí. Pro další časový krok ($i+2$) vypočteme znovu i matici $\bar{K}$, popř. $\bar{K}_m$ a iteraci opakujeme. Časový krok Δt volíme tak malý, aby nebylo nutno přepočítávat matice $\bar{K}$, $\bar{K}_m$ také v průběhu iteračního procesu, což by výpočet prodražilo. Rozsah semináře nedovoluje, abychom tento postup probírali podrobněji. Příklad však naznačuje, jak lze s použitím maticové symboliky přehledně zorganizovat i rozsáhlé výpočty nelineárních úloh.

Nakonec připojíme ještě poznámku k rovnici (7.28). Upravíme ji na tvar

$$(K - \omega^2 M)\, x = 0 .$$

Je zřejmé, že ji ani nepotřebujeme převádět na základní tvar (7.2). Charakteristická rovnice je

$$| K - \lambda M | = 0,$$

kde $\lambda = \omega^2$ je vlastní hodnota dané úlohy. Je to vlastní hodnota matice $(M^{-1}K)$. Také vlastní vektory můžeme vypočítat přímo z rovnic

$$(K - \lambda_i M)\, u_i = 0$$

($i = 1, 2, \ldots, n$). Jsou-li matice K , M souměrné (popř. hermiteovské) a je-li mimo to matice M definitní (nebo nesingulární a K , M komutativní), jsou vlastní hodnoty λ_i reálné. Vlastní vektory u_i , u_j příslušné vlastním hodnotám λ_i , λ_j ($\lambda_i \neq \lambda_j$) splňují podmínky zobecněné ortogonality

$$u_i^T K u_j = 0, \qquad u_i^T M u_j = 0,$$

za předpokladu, že matice M je pozitivně definitní. U fyzikálních úloh bývají matice K , M pozitivně definitní (u nepodepřených soustav je K pozitivně semidefinitní) a souměrné. To zaručuje existenci reálných vlastních hodnot, a tedy i existenci reálných vlastních kruhových frekvencí volného kmitání.

— - —

LITERATURA

/1/ BACHVALOV, N. S.: Čislennyje metody. Nauka, Moskva 1975.

/2/ BELLMAN, R.: Introduction to matrix analysis. McGraw-Hill, New York 1960.

/3/ CHOBOT, K.: Použití maticového počtu ve stavebné mechanice. SNTL, Praha 1967.

/4/ COLLATZ, L.: Problémy charakteristických hodnot s technickými aplikacemi. SNTL, Praha 1965.

/5/ FRANKLIN, J. N.: Matrix theory. Prentice-Hall, London 1968.

/6/ GANTMACHER, I. R.: Těorija matic. Gostěchizdat, Moskva 1953.

/7/ HOUSEHOLDER, M. S.: The theory of matrices in numerical analysis. Blaisdell Publ., New York 1965.

/8/ NEISS, F.: Determinanten und Matrizen. 7. vyd. Springer, Berlin 1967.

/9/ PARLETT, B.: Certain matrix eigenvalue techniques discussed from a geometric point of view. H. M. Stationary Office, London 1973.

/10/ PULLMAN, N. J.: Matrix theory and its applications. Marcel Dekker, New York and Basel 1976.

/11/ RALSTON, A.: Základy numerické matematiky. Academia, Praha 1973.

/12/ RAO, C. R. - MITRA, S. K.: Generalized inverse of matrices and its applications. John Wiley, New York 1971.

/13/ RIPPL, J.: Lambda matice v dynamice lineárních diskretních soustav. Monografie SVÚSS č. 21, Praha - Běchovice 1976.

/14/ SEARLE, S. K.: Matrix algebra for the biological sciences. 2. vyd. John Wiley, New York 1967.

/15/ SCHMIDTMAYER, J.: Maticový počet a jeho použití v elektrotechnice. SNTL, Praha 1954.

/16/ WESTLAKE, J. R.: Numerical matrix inversion and solution of linear equations. John Wiley, New York 1968.

Druh publikace:	Sborník přednášek
Název:	MATICOVÝ POČET
Zpracoval:	Prof. Ing. Cyril Höschl
Počet stran:	126
Náklad:	170 výtisků
Formát:	A4
Číslo publikace:	60 - 884 - 78 (1570)
Vydal a rozmnožil:	ČVTS - Dům techniky Praha Gorkého náměstí 23, Praha 1
Rok vydání:	1978