

**ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS**

**DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA**



# **RÁZOVÁ PEVNOST TĚLES**

**CYRIL HÖSCHL**

**ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV**

**PRAHA 1977**

Publikace obsahuje teoretické i praktické poznatky o šíření napěťových vln v pružných a pružno-plastických tělesech. S použitím různých zjednodušených teorií jsou pak probírány příklady rázově namáhaných těles ve strojírenské praxi, zejména v technologii a ve stavbě pracovních a dopravních strojů. Je určena technologům a konstruktérům ve strojírenství.

## Předmluva

Když se Dům techniky v Praze rozhodl uspořádat tento seminář, byl k tomu veden známou skutečností, že se na technických školách věnuje účinkům rázů jen velmi malá pozornost. Zapomíná se, že se rázové děje velmi často využívají v technologii (sekání, ražení, kování, tváření výbuchem nebo pomocí pulsujícího elektromagnetického pole, zpevňování prokováním povrchových vrstev materiálu zastudena aj.) a že se ráz vyskytuje i tam, kde si ho nepřejeme (srážka vozidel, účinky explozí, zemětřesení). Také mnoho pracovních a dopravních strojů je za provozu rázově namáháno. Tyto rázy se někdy přenáší i na ocelové konstrukce, budovy, mosty apod. Také při zkoušce vrubové houževnatosti materiálu se využívají účinky rázu.

Exaktní teorie rázu pevných těles je velmi obtížná a lze ji aplikovat jen na některé prakticky významné případy. K mnoha jiným aplikacím se nehodí, neboť vede k nezvládnutelným a nepřehledným výpočtům. Proto je třeba vyzdvihnout důležitost přibližných řešení, jejich význam je zde větší než v kterémkoli jiném odvětví mechaniky. Kritériem použitelnosti přibližných řešení zůstává experiment. Avšak i tam, kde shoda není zcela uspokojivá, mají přibližné výpočty metodologickou cenu; učí nás rozeznávat hlavní vlivy a tendence, které rozhodují o fyzikálním ději, a obohacují naši zkušenost. Protože nevyžadují zvláštní matematické znalosti, jsou přístupné a pochopitelné i konstruktérům a technologům bez speciální přípravy. Věnovali jsme jim proto v tomto semináři hlavní pozornost.

Prof. Ing. Cyril Höschl

	Str.
1. ÚVOD	7
2. PŘÍKLADY ŠÍŘENÍ NAPĚŤOVÝCH VLN	8
2.1. Šíření podélné napěťové vlny v pružné prizmatické tyči	8
2.2. Šíření torzní napěťové vlny hřídelem stálého průřezu	11
2.3. Šíření ohybových vln v nosníku	12
2.4. Energie v tlakové rázové vlně	13
2.5. Vliv příčné kontrakce na šíření podélných vln	14
2.6. Souvislost mezi šířením podélné a příčné vlny	16
3. JEDNODUCHÉ PŘÍPADY RÁZU PRUŽNÝCH TĚLES	17
3.1. Ráz dvou pružných tyčí téhož průřezu	17
3.2. Ráz při čelním dopadu tyče na vodní hladinu	18
3.3. Ráz dvou koulí. Hertzova a Newtonova teorie	19
4. PŘESTUP, ODRAZ A SUPERPOZICE NAPĚŤOVÝCH VLN	26
4.1. Princip superpozice	26
4.2. Přestup podélných vln na rozhraní pružných tyčí	28
4.3. Filtrace torzní střídavé vlny	32
4.4. Bilance energie a hybnosti při podélném rázu tří tyčí	35
4.5. Hopkinsonova tyč	38
4.6. Ráz tuhého beranu na pružnou tyč	40
5. PRAKTICKÉ POZNATKY PLYNOUCÍ Z JEDNOROZMĚRNÉ TEORIE	47
5.1. Šíření podélných vln v tenké kuželové tyči	47
5.2. Poruchy stěn, tyčí a různých těles rázovou vlnou	50
5.3. Vodní ráz v potrubí	56
5.4. Ráz vodního paprsku na pevnou stěnu	60
5.5. Ráz válcového projektilu na pružný poloprostor	62
5.6. Šíření napěťových vln ve šroubovité válcové pružině	63
5.7. Vzpěr tyčí namáhaných rázem	65
5.8. Čelní náraz vozidla	65
6. PŘESNĚJŠÍ TEORIE ŠÍŘENÍ NAPĚŤOVÝCH VLN V PRUŽNÝCH TĚLESECH	66
6.1. Rayleighova korekce pro šíření podélných vln v pružném válci	66
6.2. Napěťové vlny v ohýbaném nosníku	69
6.3. Elastická stabilita tenké tyče namáhané osovým rázem	70
6.4. Šíření napěťových vln v podmínkách rovinné napjatosti	72



	Str.
6.5. Šíření napěťových vln v podmínkách rovinného přetvoření	73
6.6. Rayleighovo povrchové vlny	75
6.7. Aplikace v hydrologii a seizmologii	77
6.8. Odraz a lom podélných a příčných vln	78
7. ŠÍŘENÍ NAPĚŤOVÝCH VLN V ELASTICKO-PLASTICKÉM MATERIÁLU	80
7.1. Podélné vlny v prizmatické tyči s bilineárním pracovním diagramem	80
7.2. Podélné vlny v tyči s obecným pracovním diagramem	82
7.3. Interakce zatěžující a odlehčující vlny	84
7.4. Příklad dynamického tváření válce na rychloběžném lisu	89
7.5. Pěchování válce při nárazu velkou rychlostí na tuhou stěnu	92
7.6. Ráz tuhého beranu na tuho-plastickou tyč	97
7.7. Centrální ráz na volný nosník konečné délky	99
7.8. Centrální ráz na prostě podepřený nosník	102
7.9. Exploze válcové bomby	106
PŘÍKLADY	109
LITERATURA	119

## 1. ÚVOD

Člověk začal mnohem dříve stavět své příbytky, kostely, hospodářská stavení, silnice a mosty, než začal vyrábět stroje. První konstrukce byly tedy zatěžovány výhradně nebo převážně staticky. Pokrok v přírodních vědách umožnil dimenzovat tyto konstrukce s použitím výsledků statických zkoušek materiálu. Dovolená namáhání se odvozovala z meze jeho pevnosti. Ve strojnictví je však velmi mnoho částí namáháno periodickými silami a limitujícím činitelem je pak únava materiálu. Tato okolnost se zprvu brala v úvahu volbou větších hodnot součinitelů bezpečnosti; později se podařilo podrobněji prozkoumat zákonitosti vzniku a šíření únavového lomu, takže je možno odvozovat výpočet bezpečnosti, popř. životnosti součásti od základní meze únavy materiálu. K tomu je nutno znát průběh napjatosti v kritických místech součásti v závislosti na čase.

Časová závislost napjatosti se tak stává východiskem každého kvalifikovaného pevnostního výpočtu strojních částí. Získáváme ji buď měřením - to však není možné, jestliže se stroj teprve navrhuje - nebo teoreticky z předpokládaných průběhů působících sil s přihlédnutím ke změnám, které vznikají za pohybu stroje. Kinematika tohoto pohybu se nejčastěji řeší za ideálních předpokladů o vzájemných vazbách členů mechanismu.

Při řešení napjatosti strojních částí se předpokládá většinou statické namáhání. Někdy se přihlíží i k ustálenému periodickému kmitání, přechodové jevy se však v praxi analyzují zřídka. Příčinou je větší pracnost výpočtu a zejména neznalost skutečných počátečních, popř. okrajových podmínek, jež se mohou z různých příčin zásadně měnit. Tak se stává, že konstruktéři mají velmi dobrou představu o statickém i ustáleném dynamickém působení stálých nebo periodických sil, nemají však zkušenost s výpočtem přechodových stavů konstrukce.

K přechodovým stavům můžeme počítat i rázy, které vznikají v konstrukci někdy jako nežádoucí jevy (např. vřemí v mechanismu nebo při havárii), někdy jako nezbytný průvodní jev pracovního procesu. Pro ráz je charakteristická náhlá změna rychlosti některého průřezu nebo náhlá změna velikosti působící síly provázená vznikem napěťových vln, které se šíří tělesem a svými odrazy a průniky způsobují velmi komplikované stavy napjatosti tělesa.

V tomto semináři se pokusíme vysvětlit a na příkladech ozřejmit zvláštnosti, kterými se rázové namáhání těles liší od statického namáhání nebo od případů ustáleného kmitání. Použijeme k tomu co nejjednodušší matematické prostředky, někdy i za cenu značných zjednodušení. Nevytkli jsme si totiž tentokrát za cíl zdokonalit se v matematice, ale vytvořit názorné představy o účincích rázu, jež mohou obohatit zkušenost každého - i méně matematicky erudovaného - konstruktéra a technologa.

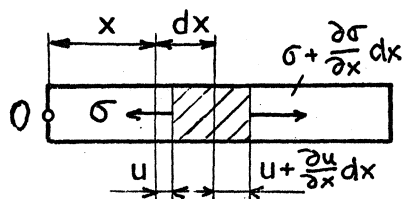
Rež šumí tak,  
když vítr běží klasem.

Petr Bezruč

## 2. PŘÍKLADY ŠÍŘENÍ NAPĚŤOVÝCH VLN

### 2.1. Šíření podélné napěťové vlny v pružné prizmatické tyči

Budeme se zabývat šířením podélné napěťové vlny ve štíhlé pružné tyči. Předpokládejme, že její příčné rozměry jsou velmi malé ve srovnání s délkou. Při stlačování tyče vznikají i příčné posuvy, které v naší první úvaze zanedbáme. Jejich vliv zahrneme do výpočtu teprve později v odstavci 6.1.



Obr. 2.1

Zanedbáme-li příčné posuvy, dostaneme stejné výsledky, jaké bychom získali za předpokladu, že materiál tyče má nulové Poissonovo číslo. Průřez vzdálený o  $x$  od počátku se pak posune - aniž se deformuje - o vzdálenost  $u = u(x, t)$  (obr. 2.1). Nestanovíme-li jinak, budeme tahové napětí považovat za kladné, tlakové za záporné. To odpovídá běžným zvyklostem v teorii pružnosti, avšak ve speciální literatuře věnované rázovému namáhání to bývá obrácené. Na element tyče vyznačený šrafováním působí výsledná síla  $A \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$  a uděluje elementu o hmotnosti  $\rho A dx$  zrychlení  $\partial^2 u / \partial t^2$ . Průřez tyče označíme  $A$ , její měrnou hmotnost  $\rho$ . Bude tedy

$$\underbrace{A \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx}_{\text{síla}} = \underbrace{\rho A dx}_{\text{hmotnost}} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\text{zrychlení}} \quad (2.1)$$

Odtud

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

Prodloužení elementu o původní délce  $dx$  je  $(\partial u / \partial x) dx$ , takže poměrné prodloužení je  $\partial u / \partial x$ . Z Hookeova zákona

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.3)$$

dostaneme - dosazením do (2.2) - výslednou parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_n^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.4)$$

v níž

$$c_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.5)$$

Indexem "n" vyjadřujeme skutečnost, že podélná vlna vzbuzuje v tyči normálové (normální) napětí. Někdy budeme tento index pro stručnost vynechávat.

Rovnice (2.4) je hyperbolického typu a bývá označována jako vlnová rovnice. Dosazením se lze přesvědčit, že její obecné řešení má tvar

$$u = f(x - c_n t) + F(x + c_n t), \quad (2.6)$$

kde  $f$ ,  $F$  jsou libovolné, obecně nezávislé funkce, které v čase  $t = 0$  popisují tvar vlny  $f(x)$ , popř.  $F(x)$ . Platí totiž, že

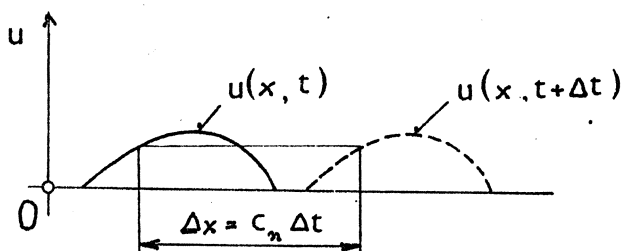
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f' + F', & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f'' + F'', \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -c_n f' + c_n F', & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c_n^2 f'' + c_n^2 F''. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že funkce (2.6) vyhovuje rovnici (2.4), mají-li  $f$ ,  $F$  alespoň dvě spojitě derivace. Lze dokázat, že tento požadavek nemusí platit. Pak tyto funkce představují zobecněné řešení, jež může být různé podle účelu, kterého chceme dosáhnout. V matematické literatuře se dokazuje existence a jednoznačnost zobecněných řešení pro širokou třídu problémů.

Předpokládejme nyní, že jedna z funkcí (např.  $F$ ) je nulová. Máme tedy

$$u = f(x - c_n t). \quad (2.7)$$

Argument funkce  $f$ , totiž hodnota  $x - c_n t$ , se nezmění, zvětší-li se čas  $t$  o přírůstek  $\Delta t$  a vzdálenost  $x$  o přírůstek  $\Delta x = c_n \Delta t$ . Pak ovšem bude mít i posuv  $u$  stejnou hodnotu. Znázorníme-li graficky rozdělení posuvů podél tyče, pak v čase  $t + \Delta t$  dostaneme stejný obraz jako v čase  $t$ , ale posunutý o  $\Delta x = c_n \Delta t$  (viz obr. 2.2). Veličina  $c_n = \Delta x / \Delta t$  tedy značí rychlost, s jakou se vlna  $u = f(x, 0)$  šíří ve směru rostoucího  $x$  v čase  $t > 0$ . Snadno usoudíme, že vlna  $u = F(x, 0)$  se pohybuje stejnou rychlostí proti rostoucímu  $x$ , tedy opačným směrem.



Obr. 2.2

K tomu je třeba připojit několik poznámek. Především si všimněme, že částice, jež byly původně ve stejné vzdálenosti  $x$ , tj. v rovině téhož průřezu, vykonají stejný posuv  $u = u(x, t)$  a budou ve stejném okamžiku vždy ve společné rovině. Jde o rovinnou vlnu. Posuv  $u$  se děje ve směru  $x$ , kterým postupuje i vlna, totiž podél tyče. Jde o podélnou vlnu. Konečně je nutno zdůraznit, že pohyb vlny je pohybem geometrického, tedy abstraktního

útváru. Rychlost pohybu vlny (2.5) nemá nic společného s rychlostí hmotných částic tyče.

Abychom si toto tvrzení objasnili, prozkoumáme podrobněji pohyb částic tyče, který je popsán rovnicí (2.7). Rychlost tohoto pohybu bude

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = -c_m f' = -c_m \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.8)$$

Napětí v tyči bude podle (2.3)  $G = E \frac{\partial u}{\partial x} = -E \frac{v}{c_m}$ , takže z rovnice (2.5) a (2.8) dostaneme

$$G = - \frac{E v c_m}{c_m^2} = -E v c_m \frac{\rho}{E} = -\rho c_m v. \quad (2.9)$$

Pro daný případ šíření napěťové vlny platí pravidlo:

napětí v tyči = mechanická impedance  $\times$  rychlost částice,

přičemž mechanickou impedancí rozumíme součin

$$Z = \rho \cdot c_m = \sqrt{E \rho}. \quad (2.10)$$

Pravidlo platí až na znaménko u napětí  $G$ , k jehož určení postačí názor. To ukážeme na příkladech. Rychlost částice měříme v souřadném systému spjatém s tou částí tyče, kterou vlna ještě nezasáhla.

Šíří-li se ocelí s modulem pružnosti  $E = 210\,000 \text{ MN m}^{-2}$  a hustotou  $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$  napěťová vlna  $G = 100 \text{ MN m}^{-2}$ , bude

$$c_m = \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11}}{7800}} \doteq 5200 \text{ m s}^{-1},$$

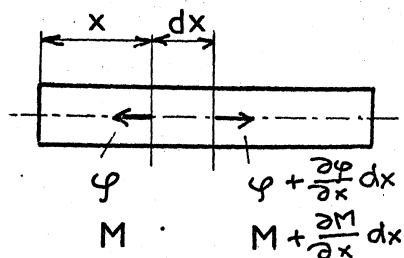
$$v = \frac{G}{\rho c_m} = \frac{100 \cdot 10^6}{7800 \cdot 5200} \doteq 2,5 \text{ m s}^{-1}.$$

Rychlost napěťové vlny je v tomto případě více než 2000krát větší než rychlost hmotných částic. To snadno pochopíme, uvědomíme-li si, že rychlost klasů ve vlnícím se obilí je rovněž zcela rozdílná od rychlosti vlny, kterou klasy geometricky vytvářejí.

Z rovnice (2.3) a (2.4) je také zřejmé, že každé nerovnoměrně rozdělené napětí v tyči ( $\partial u / \partial x \neq \text{konst}$ ) je provázáno šířením napěťových vln. Z rovnice (2.6) vyplývá, že vlny  $f(x - c_m t)$ , popř.  $F(x + c_m t)$  se šíří tyčí, aniž se mění jejich tvar nebo rychlost. Jsou to nedisperzní vlny (tj. "nerozptylují se").

## 2.2. Šíření torzní napěťové vlny hřídelem stálého průřezu

V hřídeli podle obr. 2.3 se průřez vzdálený o  $x$  od počátku otočí kolem osy o úhel  $\varphi = \varphi(x, t)$ . Toto otočení je na obr. 2.3 vyznačeno vektorem kolmým k průřezu. Na element hřídele délky  $dx$  se přenáší zprava moment  $M + (\partial M / \partial x) dx$ , zleva moment  $M$ , takže výsledný moment je  $(\partial M / \partial x) dx$ . Elementu hřídele s momentem setrvačnosti  $\rho J_p dx$  uděluje výsledný silový moment úhlové zrychlení  $\partial^2 \varphi / \partial t^2$ , takže - obdobně rovnici (2.1) - můžeme nyní psát, že



Obr. 2.3

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial x} dx}_{\text{silový moment}} = \underbrace{\rho J_p dx}_{\text{moment setrvačnosti}} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}}_{\text{úhlové zrychlení}} \quad (2.11)$$

Hookeův zákon dává pro zkrut hřídele vztah

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{M}{G J_p} \quad (2.12)$$

kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku a  $J_p$  je polární moment setrvačnosti plochy průřezu. Vyloučením  $M$  z posledních dvou rovnic dostaneme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

kde

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.14)$$

Existuje zřejmá obdoba rovnic (2.13) a (2.4). Funkce

$$\varphi = h(x - c_t t) + H(x + c_t t) \quad (2.15)$$

bude řešením rovnice (2.13), v němž  $h$ ,  $H$  jsou libovolné nezávislé funkce popisující tvar příčné vlny,  $c_t$  značí rychlost šíření příčné vlny. Index "t" připomíná, že příčná vlna budí v hřídeli tečné (smykové) napětí. Hmotné částice se nyní pohybují obvodově, kolmo ke směru šíření torzní vlny; proto hovoříme o příčné vlně. Pro poměr rychlostí, s jakou se šíří podélná a příčná vlna, dostáváme vztah

$$\frac{c_m}{c_t} = \sqrt{\frac{E}{G}} = \sqrt{2(1+\mu)}$$

v němž  $\mu$  značí Poissonovo číslo. To se mění u izotropického materiálu v mezích od nuly do 0,5, takže  $\sqrt{2} \leq \frac{c_m}{c_t} \leq \sqrt{3}$ . Opět budeme předpokládat, že jedna z obou funkcí na pravé straně rovnice (2.15) bude identicky nulová. Bude-li např.  $H \equiv 0$ , tj. postupuje-li vlna jen směrem osy  $+x$ , platí, že

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c_t \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

To je zřejmé z rovnice (2.15) pro  $H=0$ . Pak

$$M = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{GJ_p}{c_t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -J_p \sqrt{\rho G} \cdot \omega, \quad (2.16)$$

je-li  $\omega$  úhlová rychlost, s jakou se otáčí průřez ve vzdálenosti  $x$  od počátku hřídele. Má-li hřídel poloměr  $r$ , vzniká v něm u povrchu smykové napětí

$$\tau = \frac{M}{J_p} \cdot r = -\sqrt{G\rho} \cdot \omega r. \quad (2.17)$$

Tato rovnice je obdobná rovnici (2.9).

#### Poznámka

Kdyby se torzní puls šířil tyčí nekruhového průřezu, bylo by nutno dosadit do rovnice (2.12) moment tuhosti v krutu  $J_k$  místo polárního momentu setrvačnosti  $J_p$ . Pro čtvercový průřez by např. vyšlo

$$c_t = \sqrt{\frac{GJ_k}{\rho J_p}} = 0,919 \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (2.18)$$

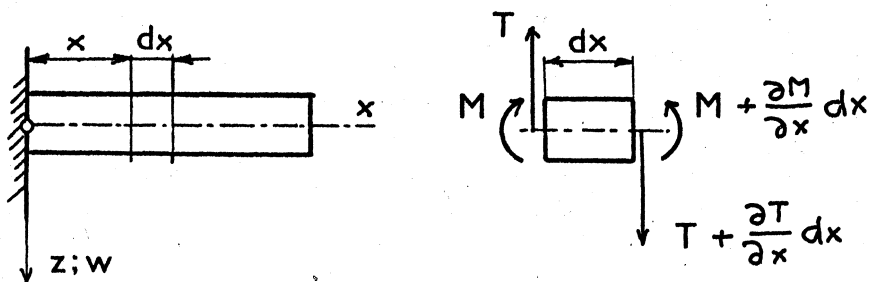
### 2.3 Šíření ohybových vln v nosníku

Na element nosníku délky  $dx$  (obr. 2.4) působí výsledná svislá síla  $\frac{\partial T}{\partial x} dx$  a uděluje mu zrychlení  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ . Má-li nosník průřez  $A$  a hustotu  $\rho$  a je-li jeho ohybová tuhost  $EJ$ , budou platit tyto dvě rovnice:

$$A\rho dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} dx, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M}{EJ}. \quad (2.20)$$

První z nich je pohybová rovnice, druhá je odvozena z teorie ohybu štíhlých nosníků.



Obr. 2.4

Zanedbáme-li rotační setrvačnost elementu, dostaneme z rovnováhy momentů působících na element nosníku vztah

$$T = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad (2.21)$$

známý v teorii pružnosti jako Schwedlerova věta. Je tedy  $T = -EJ(\partial^3 w / \partial x^3)$  a z rovnice (2.19)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = - \frac{EJ}{A\rho} \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}. \quad (2.22)$$

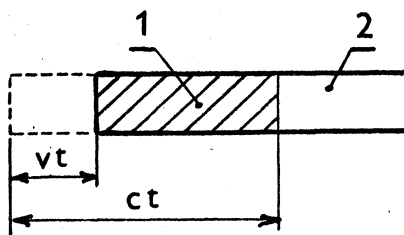
Tuto rovnici můžeme upravit. Zavedeme rychlost podélných vln  $c_m$  podle (2.5) a dále poloměr setrvačnosti průřezu  $i = \sqrt{J/A}$ . Dostaneme tak

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = - i^2 c_m^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}. \quad (2.23)$$

Na rozdíl od vlnové rovnice (2.4), popř. (2.13) jde nyní o rovnici paraboloického typu. Zkusíme-li zde dosadit řešení  $W = f(x-ct)$  nebo  $F(x+ct)$ , zjistíme, že nevyhovuje. To znamená, že vlna  $W = f(x,0)$  ani  $w = F(x,0)$  se nemůže nosníkem šířit, aniž se obecně změní její tvar. Pro nosník je typická disperze vln, o níž budeme hovořit později (odst. 6.2).

#### 2.4. Energie v tlakové rázové vlně

Vrátíme se ještě k případu prizmatické tyče z odst. 2.1. Představíme si, že tyč je v klidu až do okamžiku  $t=0$ , kdy se začne levý konec náhle pohybovat vpravo stálou rychlostí  $v$ . Za čas  $t$  urazí konec tyče dráhu  $vt$  a čelo vznikající tlakové vlny se vzdálí o  $ct$  (obr. 2.5). V části ① nosníku je rychlost jeho částic  $v$  a napětí podle (2.9)



Obr. 2.5

$$\sigma = -\rho \cdot c \cdot v. \quad (2.24)$$



Záporné znaménko značí, že jde o tlakové napětí. Část ② je dosud v klidu a bez napětí. Předpokládáme, že délka tyče je větší než  $ct$ . Hybnost první části je  $\rho A c t v$ , hybnost druhé části je nulová. Celková hybnost se za dobu  $\Delta t$  změní o  $\rho A c v \Delta t$ . Této změně přísluší impuls síly na čele tyče (v místě  $x=0$ )  $-\sigma A \Delta t$ . Z rovnosti obou výrazů dostaneme

$$\sigma = -\rho c v, \quad (2.24)$$

což je vztah totožný s rovnicí (2.9). Stlačení první části, která je v pohybu, je  $v t$ , takže z Hookeova zákona vyjde napětí

$$\sigma = -E \frac{v t}{c t} = -E \frac{v}{c}. \quad (2.25)$$

Srovnáním obou výrazů pro napětí

$$-\rho c v = -E \frac{v}{c} \quad (2.26)$$

dostaneme znovu rovnicí (2.5), totiž  $c = \sqrt{E/\rho}$ .

Jak je to s energií? Práce, kterou musíme vykonat, abychom uvedli konec tyče do pohybu rychlostí  $v$  po dobu  $t$ , je dána součinem síly  $-\sigma A$  a dráhy  $v t$ ; máme tedy

$$W_1 = -\sigma A v t = E A \frac{v^2}{c} t. \quad (2.27)$$

Kinetická energie tyče s hmotností  $\rho A c t$  je

$$W_2 = \frac{1}{2} \rho A c t v^2 = \frac{1}{2} E A \frac{v^2}{c} t. \quad (2.28)$$

Při úpravě tohoto výrazu jsme použili (2.5). Energie napjatosti v tyči je

$$W_3 = \frac{1}{2} \sigma \epsilon V = \frac{1}{2} \left(-E \frac{v}{c}\right) \left(-\frac{v t}{c t}\right) (A c t) = \frac{1}{2} E A \frac{v^2}{c} t. \quad (2.29)$$

Je zřejmé, že  $W_1 = 2W_2 = 2W_3$ . Práce vykonaná vnější silou  $W_1$  se změní z poloviny na kinetickou energii  $W_2$ , z poloviny na potenciální energii napjatosti  $W_3$  první části tyče, zasažené tlakovou vlnou.

Podobné závěry bychom mohli odvodit i pro torzní vlnu, vyvolanou náhlým zatížením čela hřídele konstantní silovou dvojicí, jež uvede čelo hřídele do rovnoměrného rotačního pohybu.

## 2.5. Vliv příčné kontrakce na šíření podélných vln

Jednoduchý Hookeův zákon (2.3) platí jen tehdy, je-li Poissonovo číslo nulové nebo jde-li jen o jednoosou napjatost. Musí platit buď  $\mu = 0$ , nebo

$\sigma_y = \sigma_z = 0$  ,  $\sigma_x = \sigma = E \epsilon_x$  . Jde-li o případ nulové deformace ve směru osy souřadnic  $z$  , tj. platí-li, že

$$\sigma_y = 0 , \quad \epsilon_z = 0 , \quad (2.30)$$

bude  $\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y) = 0$  , takže  $\sigma_z = \mu \sigma_x$  . Pak ovšem - pro  $\sigma_x = \sigma$  -

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_z) = \frac{1 - \mu^2}{E} \sigma .$$

Pro takový případ podélné vlny dostaneme vzorec pro její rychlost

$$c_m' = \sqrt{\frac{E}{(1 - \mu^2) \rho}} . \quad (2.31)$$

Šíří-li se podélná vlna neomezeným třírozměrným prostředím, bude

$$\epsilon_y = 0 , \quad \epsilon_z = 0 \quad (2.32)$$

a rychlost podélné vlny vyjde obdobně

$$c_m'' = \sqrt{\frac{E \cdot (1 - \mu)}{\rho \cdot [(1 + \mu)(1 - 2\mu)]}} . \quad (2.33)$$

Pro Poissonovo číslo  $\mu = 0,3$  je vzájemný poměr těchto rychlostí

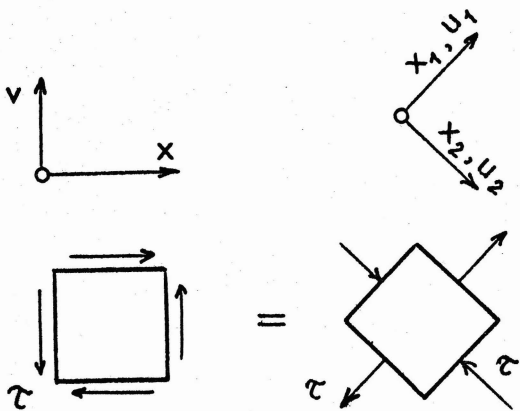
$$c_m : c_m' : c_m'' = 1 : 1,05 : 1,16 . \quad (2.34)$$

Až dosud jsme respektovali vliv omezení příčné kontrakce na podélnou tuhost tyče. Zanedbali jsme podíl časových derivací příčných posuvů na celkové rychlosti a zrychlení hmotných elementů tyče. Kdybychom uvažili i tyto setrvačné účinky příčných pohybů, dostali bychom mnohem složitější výsledky; pohyb vln by již nebyl bezdisperzní. K tomu se vrátíme v odst. 6.1.

Jiným zjednodušením je, že jsme zanedbávali vliv posuvů na objem, a tedy i na hustotu materiálu. Předpokládali jsme, že posuvy jsou zanedbatelně malé ve srovnání s rozměry tělesa, přesněji, že posuv  $v t$  na obr. 2 je zanedbatelný ve srovnání s délkou  $ct$  . O splnění tohoto předpokladu jsme se přesvědčili numerickým výpočtem pro ocelovou tyč v závěru odst. 2.1.

Nezabývali jsme se zkoumáním možnosti vybočení tyče ohybem (porušením její elastické stability). Tyč jsme považovali za dokonale pružnou. Zkušenosti se zatloukáním hřebíků nás však poučují, že tyto předpoklady vždy neplatí. Složitější případy probereme později v odst. 5.7 a 6.3.

## 2.6. Souvislost mezi šířením podélné a příčné vlny



Obr. 2.6

Při torzním rázu se hřídelem šíří příčná vlna. V hřídeli přitom vzniká smykové napětí  $\tau$ . Jak známo, lze smyk nahradit superpozicí tahu a tlaku ve směrech odchýlených od původního řezu o  $\pm 45^\circ$  (obr. 2.6). Napadá nás, že bychom mohli nahradit příčnou vlnu dvěma podélnými vlnami, jednou tahovou a druhou tlakovou, jež by se šířily pod úhlem  $\pm 45^\circ$  ke směru šíření původní příčné vlny.

Uvědomíme-li si, že pohybová rovnice pro vlnu  $u_1(x_1, t)$  je

$$\rho A_1 dx_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = A_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial x_1} dx_1 \quad (2.35)$$

a že pro poměrné prodloužení máme podle obr. 2.6 <sup>\*</sup>)

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\tau}{E} (1 + \mu), \quad (2.36)$$

dostaneme vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{E}{(1 + \mu)\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}. \quad (2.37)$$

Rychlost tahové vlny bude

$$c_m^* = \sqrt{\frac{E}{(1 + \mu)\rho}}. \quad (2.38)$$

Stejně velká vyjde i rychlost tlakové vlny  $u_2(x_2, t)$ . Urazí-li tyto vlny dráhu  $c_m^* t$ , urazí příčná vlna dráhu  $c_t t = c_m^* t \cdot \cos 45^\circ$ , odkud

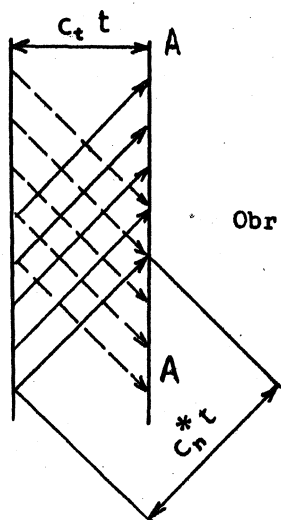
$$c_t = \frac{1}{\sqrt{2}} c_m^* = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \mu)\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (2.39)$$

Poslední vztah je totožný s rovnicí (2.14). Čára A-A na obr. 2.7 odděluje část, kam až příčná vlna dorazila, od části dosud nezasažené (v níž dosud nastal žádný pohyb hmotných částic). Je to tedy čelo příčné vlny. Příčná vlna se může také nazývat bezdilatační (nevzniká při ní změna objemu) nebo smyková

<sup>\*</sup>) Jde o Hookeův zákon pro dvouosou napjatost.

(vzniká při ní čistý smyk). Podélná vlna se ze stejných důvodů nazývá buď dilatační, nebo tahová či tlaková. V tomto odstavci jsme však viděli, že podélná vlna může být ve zvláštním případě rovněž bezdilatační (takové jsou obě podélné vlny na obr. 2.7).

V našich úvahách jsme uplatnili princip superpozice, o němž pohovoříme podrobněji v odst. 4.1.



Obr. 2.7

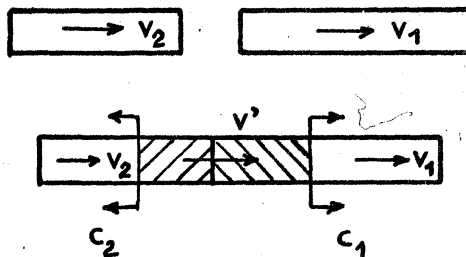
Jen v srdci ocelová střela  
jako Venuše z Louvru  
zůstane chladná  
štíhlá  
a celá.

Konstantin Biebl

### 3. JEDNODUCHÉ PŘÍPADY RÁZU PRUŽNÝCH TĚLES

#### 3.1. Ráz dvou pružných tyčí téhož průřezu

Nejprve probereme případ dvou tyčí stejného průřezu, ale nestejně impedance, které se pohybují na společné ose různými rychlostmi  $v_1 < v_2$  (obr. 3.1). Předpokládáme, že v okamžiku  $t=0$  vznikne mezi oběma tělesy ideální dotyk, od něhož se začnou šířit na obě strany tlakové vlny. Rychlost hmotných částic bude v oblasti zasažené tlakovými vlnami společná a bude se rovnat  $v'$ , rychlost šíření vln bude  $c_1$ , popř.  $c_2$  (obě vlny jsou podélné, index "n" vynecháváme).



Obr. 3.1

V místě rázu vznikne náhlá změna rychlosti, a to v první tyči  $v' - v_1$ , v druhé  $v_2 - v'$ . Rovnice (2.9) vyjadřuje poznatek, že napětí v tyči se vypočte jako součin mechanické impedance a rychlosti částice v daném průřezu (měřené relativně k oblasti nezasažené podélnou vlnou). Napětí v tlakových vlnách bude

$$\sigma = -\rho_1 c_1 (v' - v_1) = -\rho_2 c_2 (v_2 - v'). \quad (3.1)$$

Bude v obou tyčích stejné, neboť tyče mají stejný průřez a musí pro ně platit zákon akce a reakce. Z rovnice (3.1) vypočteme společnou rychlost

$$v = \frac{\rho_1 c_1 v_1 + \rho_2 c_2 v_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \quad (3.2)$$

Nyní již můžeme vypočítat i napětí

$$G = \frac{-(v_2 - v_1)}{(1/\rho_1 c_1) + (1/\rho_2 c_2)} \quad (3.3)$$

Označíme-li si  $Z_1 = \rho_1 c_1$ ,  $Z_2 = \rho_2 c_2$ , budeme mít z rovnice (3.3)

$$G = -Z (v_2 - v_1), \quad (3.4)$$

přičemž

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (3.5)$$

Poslední rovnice je stejná jako ta, která platí v elektrotechnice pro paralelní skládání impedancí. Proto se veličiny  $Z$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  nazývají "mechanické impedance". Tento název jsme zavedli už dříve, aniž jsme vysvětlili důvod.

Prozatím se nebudeme zabývat tím, co se děje, když tlakové vlny dorazí na konec tyče. K tomu se vrátíme později.

### 3.2. Ráz při čelním dopadu tyče na vodní hladinu

Představme si, že tyč dopadá kolmo na vodní hladinu rychlostí  $v_0$ . V okamžiku  $t = 0$  se dotkne hladiny celým průřezem. Tím vznikne nespojitá změna rychlosti. Průřez se bude nadále pohybovat už jen rychlostí  $v < v_0$  a vnutí tuto rychlost i částicím vody v bezprostřední blízkosti čela tyče. Napětí v tyči - index 1 - bude

$$G = -\rho_1 c_1 (v_0 - v) \quad (3.6)$$

a stejné napětí bude i ve vodě, pro niž je

$$G = -\rho_2 c_2 v. \quad (3.7)$$

Srovnáním

$$v = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} v_0 \quad (3.8)$$

Pro napětí dostaneme

$$G = - \frac{v_0}{(1/\rho_1 c_1) + (1/\rho_2 c_2)} \quad (3.9)$$

Poslední vzorec se shoduje se vzorcem (3.3). V našem výpočtu předpokládáme, že ve vodě vzniká rovněž podélná tlaková vlna. Zanedbáváme příčný pohyb vodních částic, který určitě nastane (zejména u okrajů styčného průřezu). Proto náš vzorec může platit jen pro začátek rázového děje. Kdyby konec tyče nebyl plochý, ale špičatý, vzbudil by se převážně tento příčný pohyb vodních částic už od začátku a napětí v tlakové vlně by bylo mnohem menší, než jaké dostaneme z našeho výpočtu.

Jako příklad vypočteme napětí v tlakové vlně, vzbuzené dopadem střely s plochým koncem na vodní hladinu při rychlosti rázu  $800 \text{ m s}^{-1}$ . Pro ocel máme  $\rho_1 = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_1 = 5150 \text{ m s}^{-1}$ , pro vodu  $\rho_2 = 999 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_2 = 1440 \text{ m s}^{-1}$  (tyto hodnoty platí asi při  $14 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Z rovnice (3.9) vyjde (s převodem na mega-násobky jednotek dělením  $10^6$ )

$$G = \frac{- 800}{\frac{1}{7,8 \cdot 5,15} + \frac{1}{0,999 \cdot 1,44}} = - 1110 \text{ MN m}^{-2}.$$

Toto napětí je srovnatelné s pevností kalené ocele. Tím si lze vysvětlit ničivý účinek vojenských střel s plochým čelem "dum-dum", jejichž používání je mezinárodní konvencí zakázáno.

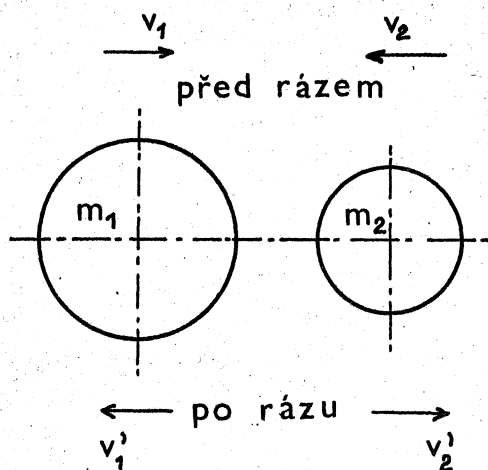
Jak uvést tyto poznatky do souladu s tím, co se učí v hydromechanice? Vždyť jde o relativní pohyb vodního sloupce pod čelem tyče k tomuto čelu, což lze srovnat s případem dynamického účinku, jaký má paprsek kapaliny, dopadající stálou rychlostí  $v$  na tuhou desku. Dopadá-li paprsek kolmo, působí na desku silou  $F = \rho_2 A v^2$ , kde  $\rho_2$  je hustota kapaliny,  $A$  průřez paprsku. Vztáhneme-li sílu  $F$  na tento průřez, dostaneme tlak v místě dopadu paprsku  $\rho_2 v^2$ , což je hodnota  $c_2/v$ krát menší než podle (3.7). Která teorie je tedy správná? Odpověď je překvapující: obě jsou správné. První vychází z předpokladu, že kapalina je stlačitelná, a platí bezprostředně po rázu, druhá považuje kapalinu za nestlačitelnou a platí pro ustálený proud. K tomu se podrobněji vrátíme v odst. 5.4.

### 3.3. Ráz dvou koulí. Hertzova a Newtonova teorie

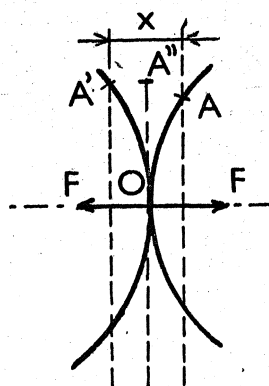
V odst. 3.1 jsme se zabývali případem ideálního rázu dvou pružných tyčí, u nichž vzniká v místě dotyku náhlá změna rychlosti spojená se vznikem podélných tlakových vln. Reakce mezi oběma tělesy vzrostla nespojitě.

Narazí-li však na sebe dva předměty se zakřiveným povrchem, změní se reakce spojitě. Dotyková plocha má nejprve zanedbatelně malé rozměry (je to

bod), během rázu se tato plocha spojitě mění, nejprve se zvětšuje, pak opět zmenšuje. Dotyková plocha zůstává však relativně malá, takže napjatost je silně koncentrována v okolí této plochy. Také deformace se koncentruje v tomto okolí a relativní vazba mezi tělesy je poddajnější než u těles, která se dotýkají ve velkých rovných plochách. Proto dotyk trvá déle, někdy dokonce mnohem déle než je perioda kmitavého pohybu nejnižší frekvence vlastního kmitání tělesa. V takovém případě můžeme jevy související s šířením napěťových vln zanedbat a brát do výpočtu pouze statickou deformační charakteristiku těles. To je podstata Hertzova řešení problému rázu dvou koulí, které nyní stručně naznačíme.



Obr. 3.2



Obr. 3.3

Narazí-li na sebe dvě koule s hmotnostmi  $m_1$ ,  $m_2$  a rychlostmi  $v_1$ ,  $v_2$  (obr. 3.2), vznikne mezi nimi síla  $F$  (obr. 3.3). Jejím účinkem se zdeformuje povrch koulí v okolí místa dotyku tak, že se vytvoří dotyková plocha o poloměru  $OA''$  (body  $A$ ,  $A'$  splynou v bodě  $A''$ ). Z Hertzovy teorie o dotyku pružných těles dostáváme tuto závislost mezi sblížením středů koulí  $x$  a působící silou  $F$  (za statického působení)

$$F = k x^{3/2}, \quad (3.10)$$

kde

$$k = \frac{4}{3 \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad E'_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1 - \mu_{1,2}^2}$$

Pohybové rovnice jsou

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -F, \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = -F. \quad (3.11)$$

Zřejmě

$$\frac{dx}{dt} = v_1 + v_2,$$

takže

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt}. \quad (3.12)$$

Dosadíme-li za  $v_1$ ,  $v_2$  z rovnic (3.11) do (3.12), dostaneme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -F \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = -F \frac{1}{m}. \quad (3.13)$$

Zavedli jsme pomocné označení ("redukovanou hmotu")

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.14)$$

Dosazením (3.10) do (3.13) vyjde

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x^{3/2}. \quad (3.15)$$

Násobením poslední rovnice  $2\dot{x}$  a integrací dostaneme

$$\dot{x}^2 - v_0^2 = -\frac{4}{5} \frac{k}{m} x^{5/2}. \quad (3.16)$$

Integrační konstanta  $v_0^2$  má význam čtverce rychlosti  $v_0 = v_1 + v_2$  na počátku rázu, kdy  $x = 0$ . Maximální stlačení  $x_{\max}$  nastane v okamžiku, v kterém  $\dot{x} = 0$ , takže

$$x_{\max} = \left( \frac{5}{4} \frac{v_0^2 m}{k} \right)^{2/5}. \quad (3.17)$$

Z rovnice (3.16) vypočteme

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_{\max}} \right)^{5/2} \right]^{1/2}. \quad (3.18)$$

Jednoduchou separací proměnných a integrací v nové proměnné  $u = x/x_{\max}$  vypočteme čas potřebný k maximálnímu stlačení

$$T = \frac{x_{\max}}{v_0} \int_0^1 \frac{du}{(1-u^{5/2})^{1/2}} \approx 1,47 \frac{x_{\max}}{v_0}. \quad (3.19)$$



Největší síla vyjde s použitím (3.10) a (3.17)

$$F_{\max} = k x_{\max}^{3/2} = k^{2/5} \left( \frac{5}{4} v_0^2 m \right)^{3/5} \quad (3.20)$$

Při dotyku tyčí v rovné ploše (odst. 3.1) byla síla úměrná relativní rychlosti těles před rázem  $v_0$ , nyní - při rázu dvou koulí - je úměrná mocnině  $v_0^{1/2}$ .

Všimněme si důležitého rozdílu mezi oběma způsoby řešení. V odst. 3.1 jsme vycházeli z pohybové rovnice (2.4), platné pro pružnou tyč; nyní jsme použili pohybové rovnice (3.11), platné pro pohyb koulí jako absolutně tuhých těles. Výsledky našeho řešení jsou stejné, jako by koule byly absolutně tuhé a narážely na sebe přes nelineární nehmotnou pružinu, jejíž charakteristika je dána rovnicí (3.10). Pružná síla je odvozena z řešení platného pro staticky zatížená pružná tělesa, kdežto setrvačná síla se počítá podle zákona dynamiky platného pro tuhá tělesa. V těchto zjednodušeních je skryto i omezení rozsahu použitelnosti uvedených vzorců.

Hertzovu teorii lze použít i u pružných těles s obecně zakřivenými hladkými povrchy. Pak musí být v bodě dotyku dány hlavní poloměry křivosti obou těles a úhel rovin, v nichž tyto křivosti určujeme. Zobecněním teorie pro tento případ se zde nebudeme zabývat.

Abychom si zpřesnili představu o vlnové a o Hertzově teorii rázu, vypočteme maximální sílu v dotyku dvou stejných tyčí, které se pohybují proti sobě po společné ose relativní rychlostí  $v_0 = 1 \text{ m s}^{-1}$ . Tyče jsou ocelové ( $E = 210\,000 \text{ MN m}^{-2}$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_m = 5189 \text{ m s}^{-1}$ ), mají kruhový průřez o poloměru  $r = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$  a danou hmotnost ( $m_1 = m_2 = 0,05; 0,1; \dots; 2 \text{ kg}$ ). V první alternativě jde o tyče s kulatými konci (koncové plochy jsou půlkulové s poloměrem  $r = 0,01 \text{ m}$ ), v druhé alternativě jde o tyče s rovnými plochými čely. Srovnáváme maximální sílu  $F_{k,p}$  v bodě dotyku a dobu  $T_k$  potřebnou k maximálnímu stlačení u tyčí s kulatými konci s dobou  $T_p$  potřebnou k průchodu tlakové vlny (jednou tyčí) u tyčí s plochými konci. Srovnání je zřejmé z tab. 1 a z obr. 3.4.

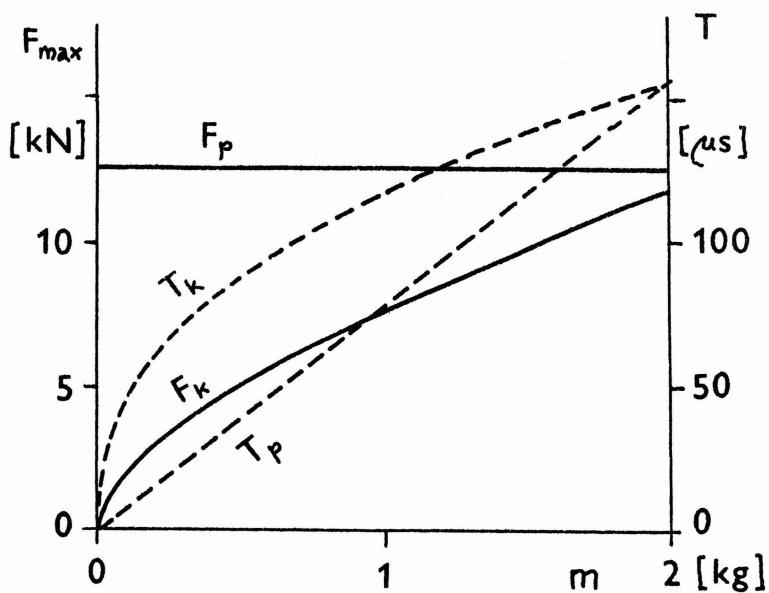
Hertzova teorie může platit jen tehdy, je-li doba, po kterou ráz trvá, mnohem delší než doba potřebná pro průchod napěťové vlny tělesem. Během rázu se pak napěťové vlny mnohokrát odrazí a navzájem částečně ruší, takže přetrvá jen jakýsi "šum", superponovaný na kvazistatickou napjatost, odvozenou z předpokladu konstantního zpoždění pohybu všech bodů tělesa. Toto zpoždění je skutečně ve všech bodech přibližně stejné, liší se jen v nejbližším okolí dotykového bodu, kde se koncentruje napjatost i deformace. Z obr. 3.4 je zřejmé, že rozdíly mezi oběma teoriemi jsou zásadní. V daném případě platí Hertzova teorie jen pro tyče s kulatými konci o hmotnosti menší než asi 0,1 kg. U kulatých tyčí s větší hmotností by bylo nutno vycházet z rozboru šíření napěťových vln v pružném tělese konečných rozměrů, počítat s tím, jak se vlny

odrážejí a navzájem interferují. To je velmi složitá úloha, běžnými prostředky neřešitelná. Zde se může uplatnit Newtonova metoda, o které ještě budeme hovořit.

Tab. 1 Srovnání výpočtu podle vlnové a Hertzovy teorie

Hmotnost [kg]		0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	2
Ploché konce	$l$ [mm]	20	41	82	122	163	204	408	816
	$F_p$ [kN]	12,7	12,7	12,7	12,7	12,7	12,7	12,7	12,7
	$T_p$ [ $\mu$ s]	3,9	7,9	15,7	23,6	31,5	39,3	78,6	157
Kulaté konce	$x_{max}$ [ $\mu$ m]	24	32	42	49	56	61	80	106
	$F_k$ [kN]	1,29	1,96	2,97	3,79	4,50	5,15	7,80	11,8
	$T_k$ [ $\mu$ s]	35,5	46,9	61,9	72,8	81,6	89,2	118	155

Poznámka: ocelové tyče, relativní rychlost rázu 1 m/s



Obr. 3.4

Předpokladem platnosti vlnové teorie je ideální dotyk těles v rovných plochách. Ten ve skutečnosti nenastává. Povrch těles je více nebo méně drsný, tj. má mnoho hrbolků, které působí jako vložená pružina. Hrbolky se částečně otláčejí za vzniku místní plastické deformace. To si vyžádá určitý čas, který může být srovnatelný s dobou průletu elastické vlny tělesem. Ale i kdyby plastické deformace nenastávaly, sama drsnost povrchu stačí ke zmírnění rázu, tj. ke zmenšení síly a zejména její časové derivace.

Ztráta části energie plastickou deformací (popř. jinými nevratnými ději v dotykové ploše) vede k tomu, že relativní rychlost těles po rázu je menší než před rázem. Tento předpoklad zavedl do výpočtu Newton, který se však nijak nezabýval tím, co se ve skutečnosti v dotykové ploše a jejím okolí děje; deformaci těles zanedbával. Poměr relativní rychlosti po rázu k relativní rychlosti před rázem

$$\varepsilon = \frac{v_1' + v_2'}{v_1 + v_2} \quad (3.21)$$

(obr. 3.2) nazval Newton součinitel restituice. Z věty o impulsu a hybnosti dostal (při rázu koulí podle obr. 3.2)

$$m_1(v_1 + v_1') = \int_0^{\tau} F dt = m_2(v_2 + v_2'), \quad (3.22)$$

kde  $\tau$  je celková doba, po kterou se tělesa dotýkají. Z rovnic (3.21) a (3.22) dostaneme rychlosti po rázu

$$v_1' = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} + \varepsilon \frac{m_2 (v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}, \quad (3.23)$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \varepsilon \frac{m_1 (v_1 + v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (3.24)$$

Z rozdílu kinetických energií před rázem a po něm najdeme velikost rozptýlené energie

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - m_1 v_1'^2 - m_2 v_2'^2) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2) (v_1 + v_2)^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Je zřejmé, že hodnotě  $\varepsilon = 1$  přísluší  $\Delta W = 0$  (dokonale elastický ráz). Největší úbytek energie nastává pro  $\varepsilon = 0$  (dokonale plastický ráz).

Newtonova teorie rázu je velmi jednoduchá. Dovedeme-li stanovit součinitel restituice, můžeme vypočítat, jak bude vypadat pohyb po rázu, jsou-li známy jeho podmínky před rázem. Nesnáz je však v tom, že součinitel restituice

zpravidla nedovedeme spolehlivě odhadnout, leda v jednoduchých, experimentálně dostatečně osvětlených případech. Výsledky výpočtu přitom na něm značně závisejí.

Součinitel restituice není žádná materiálová konstanta, závisí také na rychlosti dopadu, na tvaru a na rozměrech těles. To si lze vysvětlit tím, že při odloučení těles zůstává část energie pohlcena v tělesech ve formě energie napjatosti. Součinitel restituice nezávisí proto jen na rozsahu povrchových plastických deformací, ale také na průběhu šíření napěťových vln. Ani při dokonale elastickém rázu se součinitel restituice nemusí rovnat jedné, zůstávají v jednom nebo v obou tělesech v okamžiku jejich odloučení energie napjatosti, která není zanedbatelná ve srovnání s celkovou kinetickou energií těles před rázem. Na to se často při aplikacích zapomíná. \*) Tvrzení, které jsme uvedli za rovnici (3.25), že totiž elastickému rázu přísluší hodnota  $\varepsilon = 1$ , platí jen za předpokladu, že platí Newtonova teorie, a ta, jak jsme uvedli, nepřihlíží k deformaci těles a k energii napjatosti v nich.

Newtonova teorie má proto - stejně jako Hertzova - jen omezený rozsah platnosti. V učebnicích technické mechaniky bývá probírána většinou jen Newtonova teorie rázu. To je důvod, proč se jí nebudeme podrobněji zabývat. Naším cílem totiž je, doplnit tyto učebnice novými poznatky, nikoli opakovat staré poznatky.

Závěrem tohoto odstavce ještě uvedeme, jak se rázové jevy hodnotí pomocí teorie podobnosti. V odborné literatuře se k tomu používá "číslo poškození"  $N$ , což je bezrozměrová hodnota, pomocí níž můžeme posoudit, zda ráz nějakého tělesa na poměrně rozsáhlý základ (poloprostor) lze ještě považovat za jev kvazistatický, jde-li o pružný či nepružný ráz a v jaké rychlostní kategorii. Pro číslo poškození platí vztah

$$N = \frac{\rho v^2}{G_k} \quad (3.26)$$

kde  $\rho$  je měrná hmotnost (hustota)  $[\text{kg m}^{-3}]$ ,  
 $v$  rychlost dopadu  $[\text{m s}^{-1}]$ ,  
 $G_k$  mez kluzu, popř. mez pružnosti  $[\text{N m}^{-2}]$ .

Toto číslo se hodí k hodnocení rázového jevu hlavně tam, kde lze očekávat vznik plastických deformací. Pro pružný ráz by se lépe hodilo číslo

$$n = \frac{\rho c v}{G_k} \quad (3.27)$$

jak usoudíme podle rovnice (2.24). Přitom  $c = \sqrt{E/\rho}$  značí rychlost šíření podélné vlny. Elastický ráz je však fyzikálně jednodušší případ, v kterém

---

\*) Srov. příklad 8.

není třeba zavádět nějaké dělení. Proto zůstaneme u čísla  $N$  podle (3.26). Kategorizace, jejíž význam nelze přeceňovat, je dána tabulkou 2.

Tab. 2 Čísla poškození při rázu těles

Kategorie rázu	$N$
Kvazistatický ráz pružný	$10^{-5}$
Začátek plastických deformací	$10^{-3}$
Malá rychlost střely	$10^{-1}$
Velké plastické deformace obvyklá rychlost střely	$10^1$
Hyperrychlostní ráz	$10^3$

Určité rozpaky může způsobit odhad hodnoty  $\sigma_K$ . Měla by odpovídat předpokládané teplotě a deformační rychlosti, které však předem zpravidla neznáme. Teplota se může mimoto změnit podstatně i během rázu, a tak zpětně ovlivnit jak mez kluzu (mez pružnosti), tak deformační rychlost. Dělení v tab. 2 je však tak hrubé, že stačí pouhý odhad.

Srdce, ty chřestíš jako ty kamínky  
od mého tatínka a od mé maminky.  
Dopadl na zem třikrát, odrazil se  
a hned zas letěl v příští chvíli.

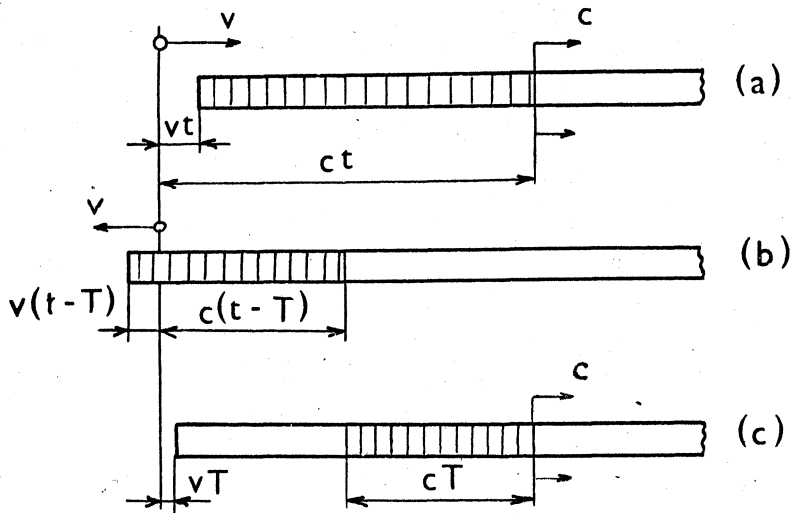
Vítězslav Nezval

#### 4. PŘESTUP, ODRAZ A SUPERPOZICE NAPĚŤOVÝCH VLN

##### 4.1. Princip superpozice

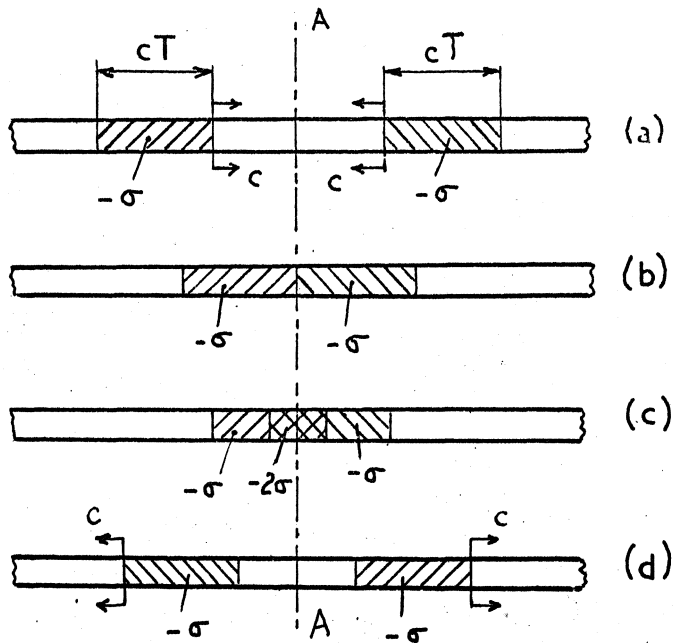
Rovnice (2.4) je lineární, proto platí princip superpozice. Šíří-li se např. v tyči na obr. 4.1 tlaková napěťová vlna, vzbuzená náhlým pohybem levého konce vpravo rychlostí  $v$ , pronikne za dobu  $t$  do vzdálenosti  $vt$  (obr. 4.1 a). K tomu můžeme přičíst tahovou napěťovou vlnu, vzbuzenou pohybem téhož konce tyče vlevo stejnou rychlostí  $v$ ; ten však začne opožděně v čase  $t = T$  (obr. 4.1 b). Po uplynutí této doby je konec tyče opět v klidu.

Výsledkem je pohyb obdélníkového napěťového pulsu, dlouhého  $cT$ , vpravo (obr. 4.1 c). Nevyšrafované části jsou na obr. 4.1 v klidu, levý konec tyče je proti původní poloze posunut do vzdálenosti  $vT$ .



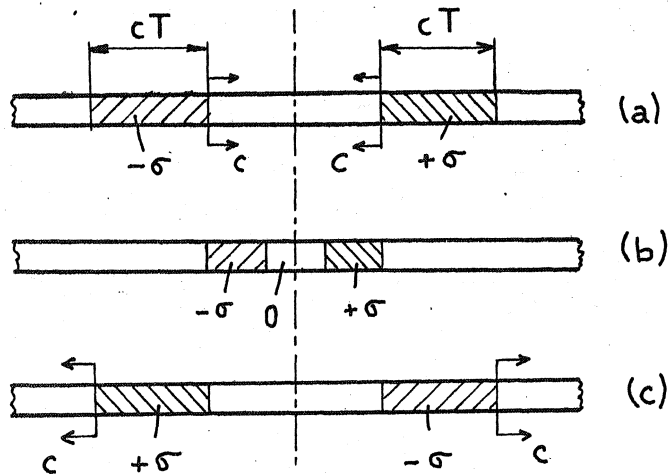
Obr. 4.1

Představíme-li si nyní nekonečnou tyč a v ní dva stejné obdélníkové pulsy, jak se k sobě blíží jakoby zrcadlově souměrným pohybem (obr. 4.2), ne- vznikne v rovině souměrnosti  $A-A$  žádný posuv. Příklad tedy odpovídá polo- nekonečné tyči pevně vetknuté v rovině  $A-A$ . Je zřejmé, že tlakový puls se odrazí opět jako tlakový. Při odrazu vlny na vetknutém konci tyče vzniká dvojnásobné tlakové napětí a trvá po dobu  $T$  (obr. 4.2 c).



Obr. 4.2

Složíme-li takto jednu tlakovou vlnu a druhou tahovou, bude v rovině souměrnosti neustále  $\sigma = 0$ ; takový případ odpovídá volnému konci tyče (obr. 4.3).



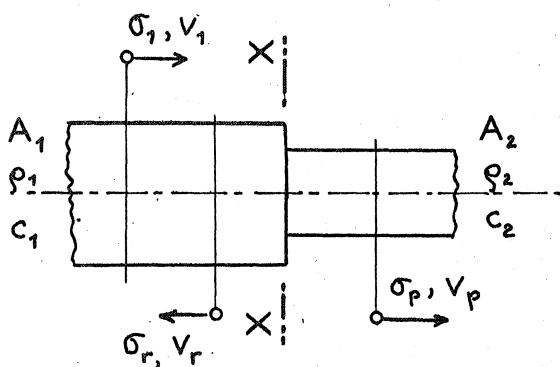
Obr. 4.3

Platí proto pravidlo: na dokonale vetknutém konci se napěťová vlna odrazí se stejným znaménkem, na volném konci s opačným.

Odraz vln na volném a dokonale vetknutém konci jsou zvláštní případy přestupu napěťových vln na rozhraní dvou pružných prostředí s různou mechanickou impedancí. Tímto obecnějším případem se budeme zabývat v příštím odstavci.

#### 4.2. Přestup podélných vln na rozhraní pružných tyčí

Tyč 1 je spojena s tyčí 2 podle obr. 4.4. Zleva přichází podélná



Obr. 4.4

napěťová vlna  $\sigma_1$ , které přísluší rychlost hmotných částic  $v_1$  a rychlost šíření vlny  $c_1$ . Na rozhraní mezi oběma tyčemi se vlna zčásti odrazí (napětí  $\sigma_r$ , rychlost částic  $v_r$ ), zčásti projde (napětí  $\sigma_p$ , rychlost částic  $v_p$ ).

Při výpočtu je třeba vycházet ze dvou skutečností:

1. síla v průřezu X - X, přenášená z první tyče na druhou, je absolutně stejná jako síla přenášená z druhé tyče na první,

2. rychlost částic v průřezu  $X - X$  je společná.

Tyto skutečnosti platí nezávisle na čase.

Značí-li  $A_{1,2}$  průřez tyče,  $\rho_{1,2}$  její hustotu, musí platit tyto rovnice:

$$A_1(G_1 + G_r) = A_2 G_p, \quad (4.1)$$

$$v_1 - v_r = v_p. \quad (4.2)$$

Poslední rovnici násobíme  $\rho_1 c_1$  a použijeme (2.9)

$$G_1 - G_r = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} G_p. \quad (4.3)$$

Z rovnice (4.1) a (4.3) vypočteme napětí v odražené a procházející vlně

$$G_r = \frac{A_2 \rho_2 c_2 - A_1 \rho_1 c_1}{A_2 \rho_2 c_2 + A_1 \rho_1 c_1} \cdot G_1, \quad (4.4)$$

$$G_p = \frac{2 A_1 \rho_2 c_2}{A_2 \rho_2 c_2 + A_1 \rho_1 c_1} \cdot G_1. \quad (4.5)$$

Když  $\frac{A_2}{A_1} \rightarrow \infty$ , dostaneme případ tyče 1 dokonale vetknuté v rovině  $X - X$ .  
Je-li  $(\rho_2/\rho_1) \rightarrow 0$ , dostaneme případ tyče s volným koncem.

Představme si nyní, že  $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$  a poměr průřezů  $A_2/A_1 = \alpha$ . Pak

$$G_r = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} G_1, \quad (4.6)$$

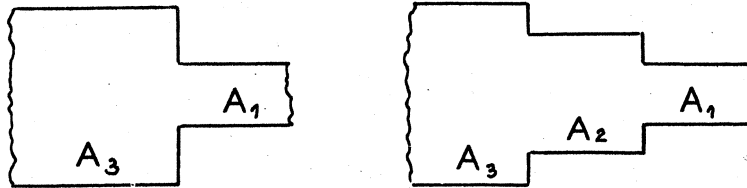
$$G_p = \frac{2}{\alpha + 1} G_1. \quad (4.7)$$

Pro tyče na obr. 4.4 je  $\alpha < 1$ . Z rovnice (4.7) usuzujeme, že tenká tyč připojená na tlustou tyč ( $\alpha < 1$ ) zesiluje napěťový puls. Je-li  $\alpha \ll 1$ , je  $G_p \approx 2G_1$  a činitel zesílení se rovná dvěma. Je zajímavé, že toto zesílení se nezmenší, uskutečníme-li redukci průřezu postupně; naopak zesílení vzroste. Představme si např., že bychom osazení  $A_1 : A_3 = 4 : 1$  nahradili dvojnásobným osazením  $A_1 : A_2 : A_3 = 4 : 2 : 1$  (obr. 4.5).

Pro případ a) máme  $\alpha_{3,1} = 0,25$  a podle (4.7)

$$G_p = \frac{2G_1}{1,25} = 1,60 G_1.$$



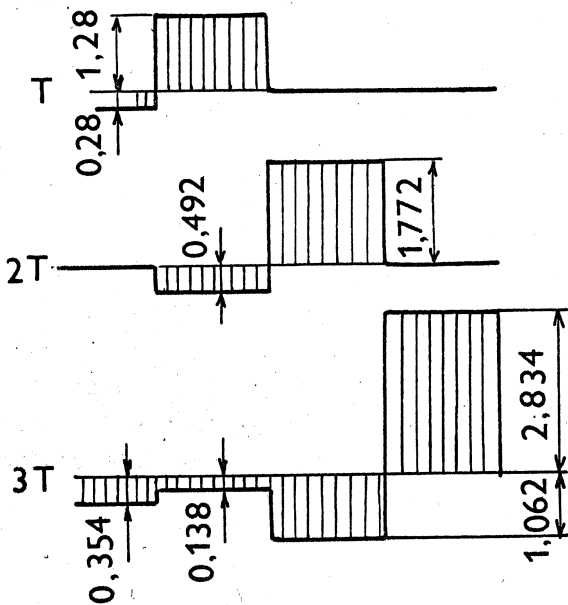
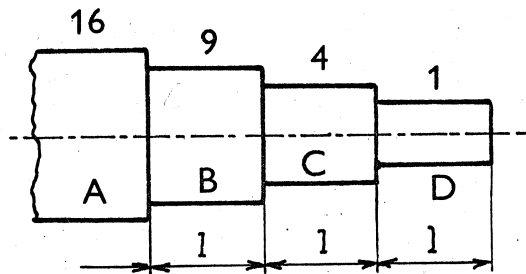


Obr. 4.5

Pro případ b) budeme mít  $\alpha_{3,2} = 0,5$ ,  $\alpha_{2,1} = 0,5$ , takže

$$G_T = \frac{2}{1,5} \cdot \frac{2}{1,5} G_1 = 1,78 G_1,$$

tj. asi o 11 % více. Tento poznatek se často využívá při konstrukci průbojníků, sekáčů, důlčků apod.



Obr. 4.6

Je-li ve zvláštním případě  $A_1 \rho_1 c_1 = A_2 \rho_2 c_2$ , neodráží se žádná vlna; pro průchozí vlnu pak máme

$$G_T = \sqrt{\frac{E_2 \rho_2}{E_1 \rho_1}} \cdot G_1 \quad (4.8)$$

Naše teorie platí za stejných zjednodušení, jaká jsme zavedli v odst. 2.1. Předpokládáme tedy existenci rovinné vlny, ačkoli víme, že osazením tyče se tato rovinnost poruší.

Uvedeme ještě jeden příklad, abychom ukázali složitost interference podélných vln. Na obr. 4.6 je znázorněna třikrát osazená tyč, jejíž průřezy jsou v poměru 16 : 9 : 4 : 1. Částí A se přivede napěťová vlna, např. jednotkové velikosti ( $G = 1$ ). Bude mít tvar obdélníkového pulsu, dlouhého právě tak jako jednotlivé části tyče, tj.  $l = cT$ .

V okamžiku  $t = 0$  se vlna na rozhraní A , B částečně odrazí a částečně projde. Pro  $\alpha = 9/16$  vyjde podle (4.6), popř. (4.7)

$$G_{rAB} = \frac{9 - 16}{9 + 16} = - 0,28,$$

$$G_{pAB} = \frac{2 \cdot 16}{9 + 16} = 1,28$$

$$(G_{rAB} + G_{pAB} = 1).$$

Po čase  $T$  bude

$$G_{rBC} = 1,28 \cdot \frac{4 - 9}{4 + 9} = - 0,492,$$

$$G_{pBC} = 1,28 \cdot \frac{2 \cdot 9}{4 + 9} = 1,772$$

$$(G_{rBC} + G_{pBC} = 1,28).$$

Po uplynutí doby  $2T$  projde vlna rozhraním CD a zároveň se tam odrazí. Bude platit

$$G_{rCD} = 1,772 \cdot \frac{1 - 4}{1 + 4} = - 1,062,$$

$$G_{pCD} = 1,772 \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 + 4} = 2,834.$$

Zároveň projde prve odražená vlna rozhraním AB , kde budeme mít

$$G_{rAB}' = - 0,492 \cdot \frac{16 - 9}{16 + 9} = - 0,138,$$

$$G_{pAB}' = - 0,492 \cdot \frac{2 \cdot 9}{16 + 9} = - 0,354.$$

Průchody a odrazy vln můžeme přehledně sledovat na obr. 4.7. V části C bude např. v okamžiku  $t = 4T$  napětí  $G_c = - 0,191 - 0,408 = - 0,599$ ; skládá se z jedné procházející vlny ( $- 0,191$ ) a z jedné odražené ( $- 0,408$ ).

Ke kontrole výpočtů můžeme použít vztah

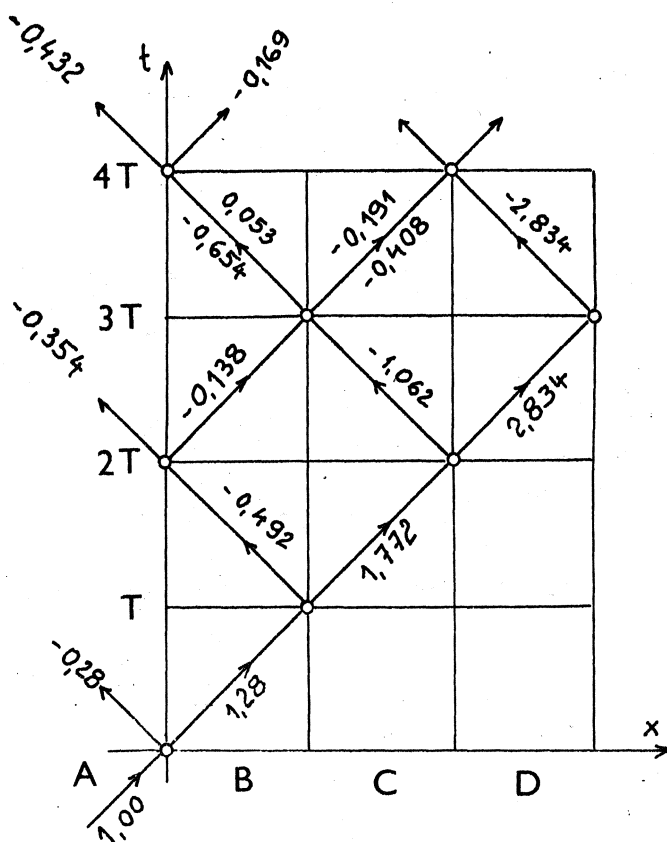
$$G_r + G_p = G_1,$$

který dostaneme sečtením rovnic (4.6) a (4.7). Např.

$$- 0,138 = 0,053 - 0,191,$$

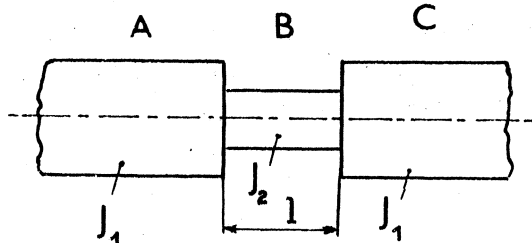
$$- 1,062 = - 0,654 - 0,408.$$

Napětí v části D dosahuje v čase  $t = 3T$  celkem 2,834násobku původní napěťové vlny.



Obr. 4.7

### 4.3. Filtrace torzní střídavé vlny



Obr. 4.8

Pravidla pro průchod a odraz podélné vlny na rozhraní mezi elastickými tělesy platí obdobně i pro torzní, tedy smykové vlny. To je dáno analogií rovnic (2.4) a (2.13).

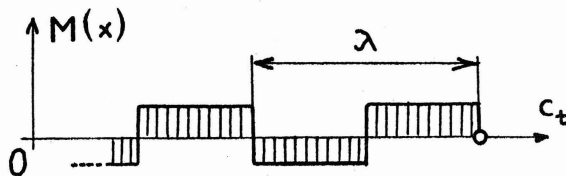
Máme-li hřídel se zápichem v délce  $l$  podle obr. 4.8, pro jehož polární momenty setrvačnosti platí, že  $J_2/J_1 = \alpha$ , platí pro krouticí moment při přestupu z části A do části B vztahy

$$M_{rAB} = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} M_A, \quad M_{pAB} = \frac{2}{1+\alpha} M_A \quad (4.9)$$

a z části B do C

$$M_{rBC} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} M_B, \quad M_{pBC} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} M_B \quad (4.10)$$

Přichází-li nyní zleva polonekonečná střídavá torzní vlna  $\pm M$ , znázorněná na obr. 4.9, vznikají odrazy a průchody vln na obou rozhraních AB, BC. Uvažujme nejprve zvláštní případ, že délka vlny  $\lambda = 2l$ . To znamená, že rozhraním BC budou procházet všechny vlny vždy téhož znaménka, jak je znázorněno na obr. 4.10. Zřejmě



Obr. 4.9

$$M_1' = -\frac{2}{1+\alpha} M_A; \quad M_1 = -\frac{2\alpha}{1+\alpha} M_1' = +\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} M_A$$

Dále

$$M_2 = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 M_1, \quad M_3 = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^4 M_1 \quad \text{atd.}$$

Vlna  $M_2$  se totiž v porovnání s vlnou  $M_1$  dvakrát odrazila. Podobně vlna  $M_3$  se odrazila čtyřikrát. Po dostatečně dlouhé době bude průchozí vlna v části C dána součtem <sup>\*</sup>)

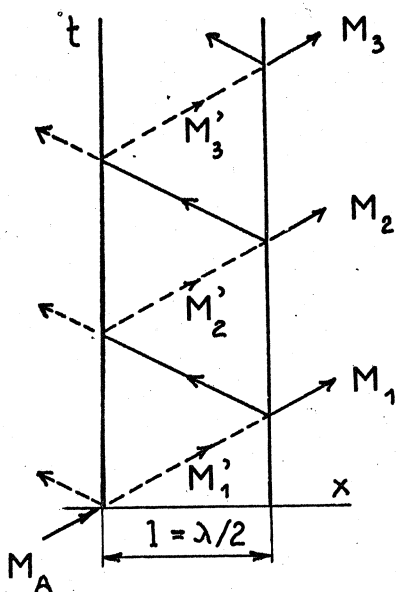
$$M_C = \frac{4\alpha M_A}{(1+\alpha)^2} \left[ 1 + \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^4 + \dots \right] \quad \text{in inf.} \quad (4.11)$$

Sečteme-li geometrickou řadu v hranaté závorce, dostaneme

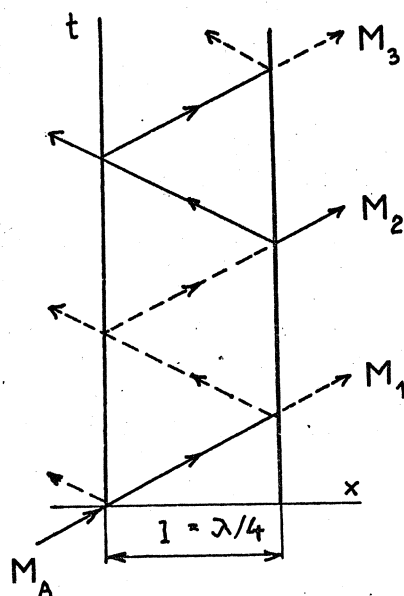
$$M_C = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2} M_A = M_A \quad (4.12)$$

Vznikne-li tedy tolik odrazů, aby  $\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right]^{2n}$  se dalo zanedbat proti jedné ( $2n$  je počet odrazů,  $n$  je přirozené číslo), bude se vlna v části C šířit tak, jako by hřídel nebyl vůbec osazen.

<sup>\*</sup>) Zkratkou in inf. (in infinitum) vyznačujeme, že řada pokračuje teoreticky do nekonečna.



Obr. 4.10



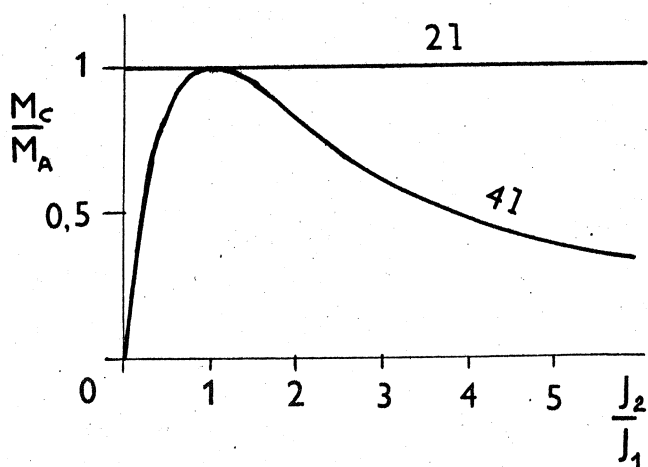
Obr. 4.11

Bude-li však délka vlny  $\lambda = 4\ell$  (obr. 4.11), budou se shodovat znaménka u vln  $M_2, M_4, M_6, \dots$  a budou právě opačná než u vln  $M_1, M_3, M_5, \dots$ , takže amplituda v části C bude

$$M_c = \frac{4\alpha M_A}{(1+\alpha)^2} \left[ 1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - \dots \dots \dots \text{in inf.} \right]$$

a tedy

$$M_c = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2} M_A = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} M_A \quad (4.13)$$



Obr. 4.12

Je-li  $\alpha \neq 1$ , je vždy  $M_c < M_A$ , např. pro  $\alpha = 0,2$  je  $M_c = 0,38 M_A$  (pro  $\lambda = 4\ell$ ). Poměr  $M_c/M_A$  je pro tento případ zakreslen na obr. 4.12 v závislosti na poměru  $\alpha = J_2/J_1$ .

Je jistě zajímavé, že v prvním případě ( $\lambda = 2\ell$ ) projde vlna nakonec v nezměněné intenzitě, kdežto v druhém případě ( $\lambda = 4\ell$ ) se amplituda krouticího momentu průchodem osazenou částí

hřídele trvale zmenší. Ačkoli torzní vlna je bezdisperzní, vzniká při průchodu střídavé vlny zápichem na hřídeli selekce podle vlnové délky.

Také tento případ je zjednodušen; nepočítali jsme s koncentrací deformace (a napjatosti) u kořenů zápichu.

#### 4.4. Bilance energie a hybnosti při podélném rázu tří tyčí

Uvedeme příklad podélného rázu tří tyčí, jejichž hmotnosti jsou k sobě v témže poměru jako jejich mechanické impedance a jejichž průřez je stejný. Platí tedy úměra

$$\rho_1 c_1 : \rho_2 c_2 : \rho_3 c_3 = \rho_1 A l_1 : \rho_2 A l_2 : \rho_3 A l_3, \quad (4.14)$$

kteřá po krácení dává

$$c_1 : c_2 : c_3 = l_1 : l_2 : l_3. \quad (4.15)$$

Doba potřebná k průchodu podélné napěťové vlny je pro každou tyč stejná, neboť podle (4.15)

$$T = \frac{l_1}{c_1} = \frac{l_2}{c_2} = \frac{l_3}{c_3}. \quad (4.16)$$

Volbou těchto zvláštních poměrů se zjednoduší další výpočet, takže jej budeme moci snadno podrobně sledovat. Impedance označíme zkráceně

$$Z_i = \rho_i c_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.17)$$

V čase  $t = 0$  je situace taková, že tyče 2 a 3 se vzájemně dotýkají a jsou v klidu, tyč 1 do nich narazí rychlostí  $v_0$  (obr. 4.13 a).

Z rozhraní mezi tyčemi 1 a 2 se počne šířit napěťová vlna (na obě strany tlaková), a to v tyči 1

$$G_1 = -Z_1 (v_0 - v_2) \quad (4.18)$$

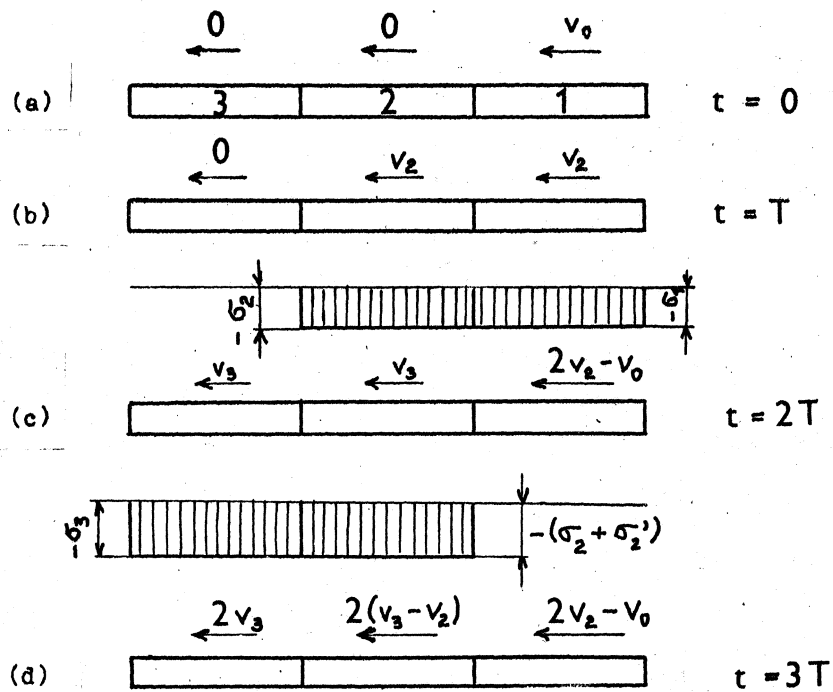
a v tyči 2

$$G_2 = -Z_2 v_2. \quad (4.19)$$

Z podmínky  $G_1 = G_2$ , vyjadřující zákon o akci a reakci, dostaneme

$$v_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} v_0, \quad G_1 = G_2 = -\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} v_0 \quad (4.20)$$

Symbolem  $v_2$  značíme rychlost částic v oblasti tyče 2 zasazené napěťovou vlnou  $G_2$ . Po čase  $t = T$  proběhne každá tato vlna právě celou délkou tyče (obr. 4.13 b). Rychlost první tyče nyní bude  $v_0 + [-(v_0 - v_2)] = v_2$ .



Obr. 4.13

Bude tedy stejná jako rychlost druhé tyče. Třetí tyč se dosud nepohnula. Tlaková vlna v první tyči se nyní na volném konci odrazí a bude se odtud šířit (zprava doleva) jako tahová. Při průchodu této vlny se změní rychlost částic první tyče o stejnou hodnotu jako předešle, tj. o  $-(v_0 - v_2)$ , takže rychlost první tyče po průchodu odražené tlakové vlny bude

$$v_2 - (v_0 - v_2) = 2v_2 - v_0 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} v_0 \quad (4.21)$$

Tyč bude nadále (od okamžiku  $t = 2T$ ) bez napětí, neboť tlaková a tahová vlna se navzájem zruší.

Na rozhraní tyčí 2 a 3 projde tlaková vlna z druhé tyče do třetí; tam bude mít velikost

$$\sigma_3 = -z_3 v_3 \quad (4.22)$$

K původní vlně  $-\sigma_2$  se bude superponovat odražená vlna  $-\sigma_2'$ , která vznikne náhlým zpomalením levého konce tyče 2 z rychlosti  $v_2$  na rychlost  $v_3$ . Bude pro ni platit vztah

$$\sigma_2' = -z_2 (v_2 - v_3) \quad (4.23)$$

Zákon o akci a reakci dá

$$\sigma_3 = \sigma_2 + \sigma_2' \quad (4.24)$$

takže

$$v_3 = \frac{2z_2}{z_2 + z_3} v_2 = \frac{2z_1 z_2}{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)} v_0, \quad (4.25)$$

$$G_3 = - \frac{2z_1 z_2 z_3}{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)} v_0. \quad (4.26)$$

Stav v okamžiku  $t = 2T$  je znázorněn na obr. 4.13 c. Nyní se tlaková vlna  $G_3$  odrazí od volného konce třetí tyče jako tahová; v oblasti, kam pronikne, se rychlost zvětší o hodnotu  $v_3$ , takže bude celkem  $2v_3$ . Tyč 1 je nyní bez napětí. Odlehčovací vlna  $G_2$  se počne šířit do druhé tyče (zprava) a způsobí tam změnu rychlosti o  $(-v_2)$  [srov. (4.19)]. Protože napětí na rozhraní tyče 1 a 2 je nulové, odrazí se tlaková vlna  $G_2'$  na pravém čele druhé tyče jako tahová; rychlost v druhé tyči se tím zvětší podle (4.23) o  $-(v_2 - v_3)$ . Celkem bude - po průchodu obou odlehčovacích vln - rychlost druhé tyče

$$v_3 - v_2 - (v_2 - v_3) = 2(v_3 - v_2). \quad (4.27)$$

Aby tomu tak skutečně bylo, nesmí být rychlost druhé tyče menší než rychlost první tyče, takže

$$2v_3 - 2v_2 \geq 2v_2 - v_0. \quad (4.28)$$

Jinak by se totiž od tohoto rozhraní začaly šířit nové napěťové vlny. Podmínka (4.28) dává

$$v_0 \geq 4v_2 - 2v_3$$

čili

$$\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)\left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right) \geq 4 \frac{z_1}{z_2} \frac{z_3}{z_2}. \quad (4.29)$$

V okamžiku  $t = 3T$  je situace taková, jak ji znázorňuje obr. 4.13 d.

Nyní ukážeme, jak se změní rozdělení kinetické energie a hybnosti v soustavě. Kinetická energie první tyče v čase  $t \geq 3T$  je

$$W_1 = \frac{1}{2} A \ell_1 \rho_1 \left[ \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} v_0 \right]^2 \quad (4.30)$$

a její hybnost

$$H_1 = A \ell_1 \rho_1 \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} v_0. \quad (4.31)$$



Pro druhou tyč dostaneme s použitím (4.20) a (4.25)

$$W_2 = \frac{1}{2} A l_2 \rho_2 \left[ \frac{2 Z_1 (Z_2 - Z_3)}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)} v_0 \right]^2, \quad (4.32)$$

$$H_2 = A l_2 \rho_2 \left[ \frac{2 Z_1 (Z_2 - Z_3)}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)} v_0 \right]. \quad (4.33)$$

Konečně pro třetí tyč vyjde

$$W_3 = \frac{1}{2} A l_3 \rho_3 \left[ \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)} v_0 \right]^2, \quad (4.34)$$

$$H_3 = A l_3 \rho_3 \left[ \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)} v_0 \right]. \quad (4.35)$$

Dosažením se lze přesvědčit, že

$$W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{2} A l_1 \rho_1 v_0^2, \quad (4.36)$$

$$H_1 + H_2 + H_3 = A l_1 \rho_1 v_0. \quad (4.37)$$

Při úpravě těchto vztahů uijeme rovnici (4.14) ve tvaru

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = \rho_1 l_1 : \rho_2 l_2 : \rho_3 l_3. \quad (4.14 \text{ a})$$

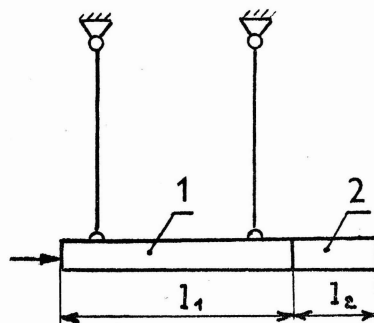
Rovnice (4.36) vyjadřuje zákon zachování energie, rovnice (4.37) zákon zachování hybnosti. Oba zákony platí, neboť jsme předpokládali dokonale elastický (tedy energeticky bezztrátový) ráz v izolované soustavě tří těles.

#### 4.5. Hopkinsonova tyč

Je to dělená tyč, sloužící k měření procházejícího napěťového pulsu při výzkumu rázově namáhaných částí. Měří se jednak délka pulsu (trvání rázu), jednak maximální napětí v něm. Metodu popsál roku 1913 Bertram Hopkinson.

Tyč je zpravidla ocelová; průřezy v dělicí rovině jsou pečlivě opracovány a co nejhladší. Vytvoření ideálního dotyku v celé ploše je usnadňováno zmagnetováním tyče. Delší část 1 tyče je zavěšena na vláknech, která umožňují volné vykřivnutí tyče ve svislé rovině. Kratší část 2 je "časoměrná" (obr. 4.14). Při rázu ve směru šípky se tyčí 1 počne zleva šířit

napěťový puls. Vzniká-li např. výbuchem střelné bavlny, lze průběh tlaku v závislosti na čase zjednodušeně znázornit trojúhelníkem (obr. 4.15 a). Předpokládejme, že délka pulsu je právě  $L = 2\ell_2$ . Puls projde dělicí rovinou beze změny (obr. 4.15 b), neboť mechanické impedance obou částí jsou stejné. Na volném konci se puls odrazí s opačným znaménkem, tedy jako tahová vlna (obr. 4.15 c). V okamžiku znázorněném na obr. 4.15 d dorazí odražená vlna k dělicí rovině a časoměrná část 2 se odloučí od tyče, neboť dělicí rovinou se nemůže přenášet tahové napětí. V tomto okamžiku je tyč 1 v klidu a bez napětí, kdežto časoměrná část 2 získá hybnost  $H_2$ , která se rovná impulsu síly



Obr. 4.14

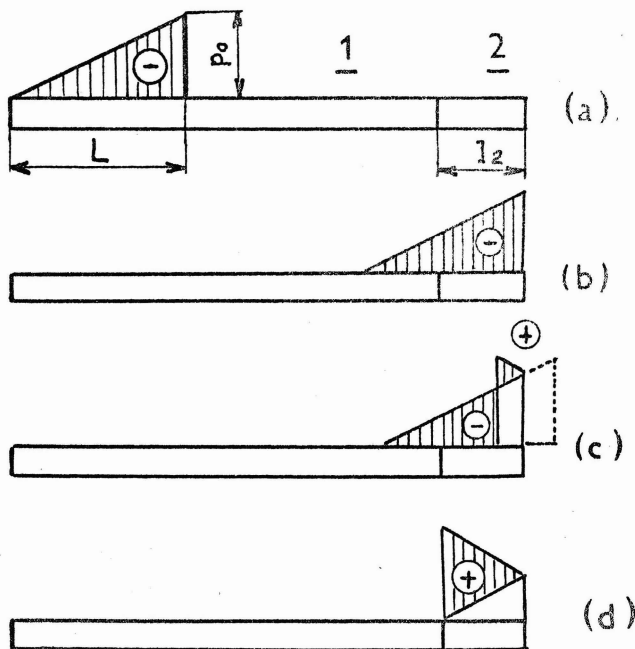
$$H_2 = -A \int_0^T \sigma(t) dt. \quad (4.38)$$

$T$  je dvojnásobkem doby potřebné pro průchod napěťové vlny časoměrnou částí, tedy

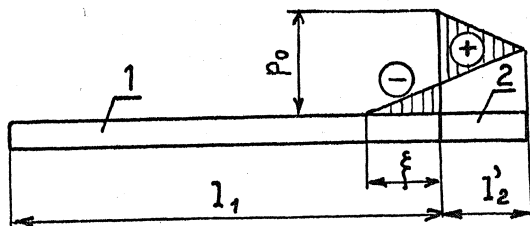
$$T = 2\ell_2 / c = L / c. \quad (4.39)$$

Hybnost  $H_2$  letící tyče 2 změříme zachycením v balistickém kyvadle. Rovnice (4.39) dává dobu, po kterou trval ráz na čele tyče 1. Rychlost c šíření podélných vln v tyči totiž známe.

Délku  $\ell_2$  však předem neznáme a musíme ji najít zkusmo. Zvolíme-li např.  $\ell_2' < L/2$ , nastane v okamžiku odloučení časoměrné tyče situace znázorněná na obr. 4.16. Hybnost části 2 bude nyní menší než v případě podle obr. 4.15 d, neboť napěťový puls projde dělicí rovinou jen zčásti. Hybnost tyče 1 bude  $H_1' > 0$ , což se projeví výkyvem tyče, a hybnost odletující časoměrné části  $H_2' < H_2$ .



Obr. 4.15



Obr. 4.16

Správné délce  $l_2$  časoměrné části odpovídá maximální hybnost této části. Z rozdílu hybností obou časoměrných částí můžeme určit maximální tlakové napětí na čele vlny ( $\tau_{v0}$  na obr. 4.15 a). Podle obr. 4.16 snadno nahlédneme, že

$$\xi = 2l_2 - 2l_2' = 2(l_2 - l_2') \quad (4.40)$$

Pro délku napěťového pulsu platí, že  $L = 2l_2$  (jako dříve). Rozdíl hybností

$$\Delta H = H_2 - H_2' \quad (4.41)$$

tedy odpovídá části impulsu, která neprošla do tyče 2 na obr. 4.16

$$\Delta H = \frac{1}{2} A \left( \tau_{v0} \frac{\xi}{2l_2} \right) \cdot \left( \frac{\xi}{c} \right) \quad (4.42)$$

průměrná síla                      čas

Odtud

$$\tau_{v0} = \frac{c l_2}{A \xi^2} \Delta H = \frac{c l_2 (H_2 - H_2')}{4A (l_2 - l_2')} \quad (4.43)$$

Rovnice (4.39) poskytuje dobu trvání rázu, rovnice (4.43) maximální napětí. Vzorec (4.43) platí pro napěťovou vlnu ve tvaru trojúhelníka (obr. 4.15). Kdybychom průběh tlaku v závislosti na čase neznali, musili bychom jej rekonstruovat z opakovaných měření s různě dlouhými částmi 2 nebo bychom musili použít tyč s větším počtem dělicích rovin.

Měření jsou zatížena systematickou chybou, neboť v tyči, jejíž průřez má konečné rozměry, vzniká disperze, s kterou jsme nepočítali. Trvá-li napěťový puls jen velmi krátkou dobu, může být určení správné délky  $l_2$  obtížné. Velikost maximálního napětí nesmí být příliš velká, aby namáhání tyče zůstalo v mezích pružnosti a aby se časoměrná tyč působením odražené (tj. tahové) napěťové vlny nepřetrhla.

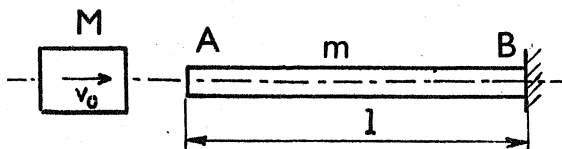
Analogické uspořádání lze užít i k měření torzního napěťového pulsu v hřídeli. V tom případě disperze nevzniká.

#### 4.6. Ráz tuhého beranu na pružnou tyč

Je-li mechanická impedance beranu násobená jeho průřezem mnohem větší než stejná veličina u pružné tyče, můžeme přibližně předpokládat, že beran je absolutně tuhý a počítat jen s pružností tyče. Výsledky, které takto

dostaneme, budou platit tím lépe, čím kratší bude doba průchodu elastické vlny beranem v porovnání s dobou průchodu této vlny tyčí. Je-li rozdíl průřezů obou těles velký, nebude pro těleso beranu platit jednorozměrná teorie, ale nastane v něm velmi složité prostorové šíření napěťových vln. Zanedbáním pružnosti beranu se zároveň zbavíme nutnosti řešit tuto velmi nepřehlednou situaci. Náš předpoklad je vlastně východiskem z nouze.

Dopadne-li absolutně tuhý beran na pružnou tyč rychlostí  $v_0$ , vnutí tuto rychlost v prvním okamžiku i koncovému průřezu tyče. Předpokládáme, že styk se děje za ideálních podmínek, takže se neuplatní ani drsnost, ani nekolmost či křivost koncových ploch (obr. 4.17). Hmotnost beranu je  $M$ , hmotnost tyče je  $m = \rho A l$ .



Obr. 4.17

Náhla změna rychlosti koncového průřezu způsobí, že se tyčí začne šířit tlaková napěťová vlna. Napětí na čele této vlny vypočteme jednoduše podle (2.9)

$$\sigma_0 = -\rho c v_0 = -\tau v_0, \quad (4.44)$$

kde  $c = \sqrt{E/\rho}$  značí rychlost šíření podélné vlny v tyči.

Účinkem tlakového napětí v dotykové ploše vznikne zpoždění pohybu beranu ( $-dv/dt$ ). Bude platit tato pohybová rovnice

$$M \left( \frac{dv}{dt} \right) = A \sigma. \quad (4.45)$$

Rychlost  $v$  beranu i napětí  $\sigma$  v dotykové ploše závisí na čase. Podle (2.9)

$$\sigma = -\rho c v, \quad (4.46)$$

takže

$$M \frac{dv}{dt} = -A \rho c v. \quad (4.47)$$

Separací proměnných a integrací

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{A \rho c}{M} \int_0^t dt \quad (4.48)$$

vyjde po úpravě

$$v = v_0 e^{-\gamma t}, \quad (4.49)$$

kde

$$\gamma = \frac{A \rho c}{M} = \frac{A}{M} \sqrt{E \rho} = \frac{m}{M} \frac{c}{l} \quad (4.50)$$

Dosazením (4.49) a (4.44) do (4.46) vyjde napětí v dotykové ploše

$$\sigma_A = \sigma_0 \cdot e^{-\gamma t} = -\rho_0 e^{-\gamma t} \quad (4.51)$$

Vidíme, že strmost napěťové vlny, charakterizovaná činitelem  $\gamma$ , je tím větší, čím větší je hmotnost tyče v poměru k hmotnosti beranu. Počáteční napětí (4.44) však na hmotnosti beranu nezávisí, je dáno pouze jeho rychlostí v okamžiku dopadu. To je jistě překvapující poznatek.

Podle (4.51) je napěťová vlna exponenciální. Když dospěje na vetknutý konec tyče (v čase  $t = T = l/c$ ), odrazí se (se stejným znaménkem). Odražená vlna se sečte s prvotní procházející vlnou, takže napětí ve vetknutém průřezu vyjde

$$\sigma_B = -2\rho_0 e^{-\gamma(t-T)} \quad (4.52)$$

Rovnice (4.51) platí pro  $0 < t < 2T$ , rovnice (4.52) pro  $T < t < 3T$ . V okamžiku  $t = 2T$  dorazí odražená vlna zpět k beranu a tam se znovu odrazí; tím vzroste tlak v dotykové ploše rázem o hodnotu  $2\rho_0$ . Bezprostředně po odrazu tam bude působit celkové napětí

$$\sigma_A(t=2T) = -\rho_0 (2 + e^{-\gamma 2T}) \quad (4.53)$$

Tím se změní pohybová rovnice. Místo (4.45) bude nyní platit, že

$$M \frac{dv}{dt} = \left[ \underbrace{-2\rho_0 e^{-\gamma(t-2T)}}_{\text{odražená vlna}} + \underbrace{\sigma(t)}_{\text{modifikovaná vlna}} \right] A \quad (4.54)$$

Protože  $e^{-\gamma 2T} = e^{-2m/M}$  a zároveň  $v = -\sigma/\rho c$ , vyjde po úpravě z poslední rovnice

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{d\sigma}{dt} = -2\rho_0 e^{2\beta} \cdot e^{-\gamma t} + \sigma, \quad (4.55)$$

kde

$$\beta = \frac{m}{M} \quad (4.56)$$

a  $\gamma$  je dáno vztahem (4.50). Řešení lineární diferenciální rovnice (4.55) dostaneme ve tvaru

$$\sigma = 2\rho_0 \gamma e^{2\beta} \cdot t \cdot e^{-\gamma t} + C e^{-\gamma t} \quad (4.57)$$

Platí pro  $2T < t < 4T$ , pokud se dotyk nepřeruší. S počáteční podmínkou  $\sigma = -\rho_0 e^{-\gamma 2T}$  pro  $t = 2T$  a s přihlédnutím k tomu, že  $\gamma T = \beta$ , vyjde integrační konstanta  $C = -\rho_0(1 + 4\beta e^{2\beta})$ , takže

$$\sigma = -[1 + (4\beta - 2\gamma t) e^{2\beta}] \rho_0 e^{-\gamma t} \quad (4.58)$$

Nenastane-li uvolnění dotyku mezi beranem a tyčí, je výsledný tlak ( $-\sigma_A^*$ ) v dotykové ploše v intervalu  $2T < t < 4T$  dán výrazem v hranaté závorce na pravé straně (4.54); dosazením z rovnice (4.58) máme

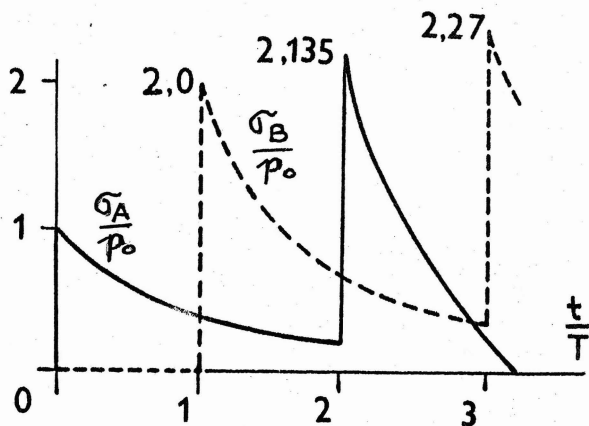
$$\begin{aligned} \sigma_A^* &= -2\rho_0 e^{-\gamma t} \cdot e^{2\beta} + \sigma = \\ &= -[1 + (2 + 4\beta - 2\gamma t) e^{2\beta}] \rho_0 \cdot e^{-\gamma t}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Vypočítáme poměr  $\beta = m/M$ , při kterém se dotyk mezi beranem a tyčí uvolní až na konci uvedeného intervalu, tj. v okamžiku  $t = 4T$ . Z podmínky, že  $\sigma_A^* = 0$  pro limitu zleva  $t \rightarrow 4T$ , vyjde

$$e^{-2\beta} = 4\beta - 2 \quad (4.60)$$

a odtud  $\beta \approx 0,58$ . Je-li tedy  $\beta = m/M > 0,58$ , klesne napětí  $|\sigma_A^*|$  k nule v intervalu  $2T < t < 4T$ . To, že tlakové napětí v dotykové ploše klesne k nule, ještě nemusí znamenat, že dotyk skončil. Abychom to mohli s jistotou tvrdit, musili bychom ještě rozbrat pohybový stav těles po tomto okamžiku. Někdy nastává opakovaný dotyk těles během jednoho rázu.

Odvozené výsledky použijeme k ilustrativnímu numerickému výpočtu. Zvolíme  $\beta = 1$ , tj. hmotnost tyče a beranu bude stejná. Průběh napětí  $\sigma_A$  v dotykovém průřezu, resp.  $\sigma_B$  v místě vetknutí (obr. 4.17) v závislosti na čase znázorňuje obr. 4.18. Největší tlakové napětí vzniká na vetknutém konci bezprostředně po druhém odrazu napěťové vlny, a to  $2,27 \rho_0$ . Dotyk mezi beranem a tyčí se přeruší po době  $t = 3,068 T$ .



Obr. 4.18

Kdyby  $\beta < 0,58$ , prošla by napěťová vlna více než dvakrát tam a zpět, než by nastalo přerušení dotyku. Pokaždé by bylo nutno přepočítat napětí z pohybové rovnice pro určitý časový interval.

Jak by se změnila naše úloha, kdyby byl konec B tyče volný? Tlaková vlna (4.51) by se nezměnila, neboť nezávisí na podmínkách v místě B. V intervalu  $0 < t < 2T$  by platilo

$$G_A = -\rho_0 \cdot e^{-\gamma t} \quad (4.61)$$

Tato vlna by se však na volném konci tyče B odrazila jako tahová. V okamžiku  $t = 2T$  by na konci A byla původní tlaková vlna  $-\rho_0 \cdot e^{-2\beta}$  a k tomu odražená tahová vlna  $+\rho_0$ . V bezprostřední blízkosti konce A by bylo tahové napětí

$$G_A(t = 2T) = -\rho_0(e^{-2\beta} - 1) = \rho_0(1 - e^{-2\beta}) \quad (4.62)$$

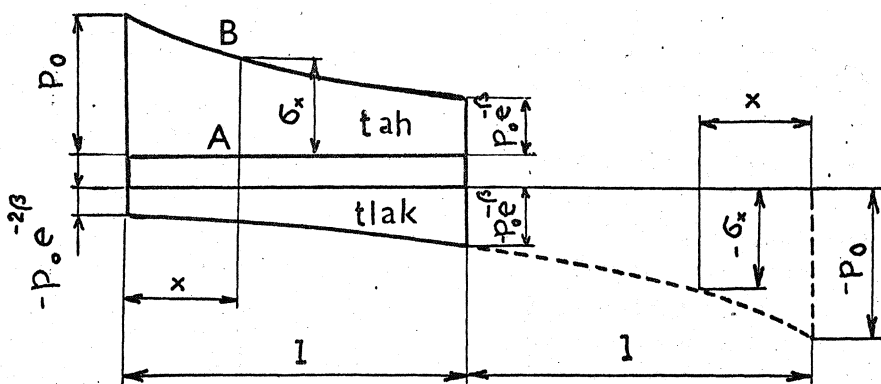
a rychlost

$$v_A = v_0(1 + e^{-2\beta}). \quad (4.63)$$

Rychlost beranu je v tomto okamžiku jen  $v_0 \cdot e^{-2\beta}$ , takže v okamžiku  $t = 2T$  nastane odloučení beranu od tyče. Volný konec tyče má v tomto okamžiku rychlost  $2v_0 e^{-\beta} = v_B$ .

Zkontrolujme nyní, jak bude v tomto okamžiku rozdělena energie. Kinetická energie beranu před dopadem na tyč byla

$$W = \frac{1}{2} M v_0^2. \quad (4.64)$$



Obr. 4.19

Napětí v tyči je v okamžiku  $t = 2T$  rozděleno podle obr. 4.19. Ve vzdálenosti  $x$  od levého konce tyče se napětí skládá ze dvou složek, z původní vlny

$$- \rho_0 \exp\left(-\frac{2\ell-x}{2\ell}\beta\right) = -\rho_0 \exp\left(-2\beta + \beta \frac{x}{\ell}\right)$$

a z odražené vlny, znázorněné úsečkou AB,

$$\rho_0 \exp\left(-\beta \frac{x}{\ell}\right).$$

Celkem bude

$$G(x) = -\rho_0 \left[ e^{-2\beta} \cdot e^{\beta \frac{x}{\ell}} - e^{-\beta \frac{x}{\ell}} \right]. \quad (4.65)$$

Energie napjatosti v tyči bude

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2E} A \int_0^{\ell} G^2(x) dx = \\ &= \frac{\rho_0^2 A \ell}{4\beta E} \left[ 1 - 4\beta e^{-2\beta} - e^{-4\beta} \right]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Výraz před hranatou závorkou lze pomocí (4.44), (4.56) a (2.5) upravit na  $\frac{1}{4} M v_0^2$ , takže

$$U = \frac{1}{4} M v_0^2 \left[ 1 - 4\beta e^{-2\beta} - e^{-4\beta} \right]. \quad (4.67)$$

Rychlost částic v průřezu vzdáleném  $x$  od levého konce je

$$v(x) = v_0 \left[ e^{-2\beta} \cdot e^{\beta \frac{x}{\ell}} + e^{-\beta \frac{x}{\ell}} \right]. \quad (4.68)$$

První člen na pravé straně této rovnice vyjadřuje vliv odražené vlny, druhý člen vliv původní vlny. Kinetická energie obsažená v tyči bude

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} v^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{4} M v_0^2 \left[ 1 + 4\beta e^{-2\beta} - e^{-4\beta} \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Kinetická energie beranu v okamžiku  $t = 2T$  vyjde

$$B = \frac{1}{2} M (v_0 \cdot e^{-2\beta})^2 = \frac{1}{2} M v_0^2 e^{-4\beta} \quad (4.70)$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$W = U + K + B. \quad (4.71)$$



Pro  $\beta = 1$  vyjde toto rozdělení energií:

$$\begin{aligned}U &= 0,220 \text{ W} \\K &= 0,761 \text{ W} \\B &= 0,019 \text{ W} .\end{aligned}$$

V beranu zbudou sotva 2 % původní energie. <sup>\*</sup>)

Kdybychom zanedbali hmotnost elastické tyče s vetknutým koncem (obr. 4.17), stlačila by se tato tyč po dopadu beranu rovnoměrně. Označíme-li posuv levého konce tyče  $u$ , platila by místo (4.45) pohybová rovnice beranu

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} = -AE \frac{u}{l} \quad (4.72)$$

Označíme-li

$$\frac{AE}{Ml} = \alpha^2, \quad (4.73)$$

bude

$$u = C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t \quad (4.74)$$

S počátečními podmínkami

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad (4.75)$$

vyjde z rovnice (4.74) posuv

$$u = \frac{v_0}{\alpha} \sin \alpha t \quad (4.76)$$

a z Hookeova zákona napětí

$$\sigma = -E \frac{u}{l} = -\frac{E v_0}{\alpha l} \sin \alpha t \quad (4.77)$$

Největší tlakové napětí v tyči

$$|\sigma|_{\max} = \frac{E v_0}{\alpha l} = v_0 \sqrt{\frac{EM}{Al}} \quad (4.78)$$

vzniká po době

$$t = \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{Ml}{AE}} = T \quad (4.79)$$

---

<sup>\*</sup>) Protože je beran absolutně tuhý, je v něm energie napjatosti nulová.

V tom okamžiku se celá kinetická energie beranu přemění beze zbytku v potenciální energii napjatosti tyče. V okamžiku  $t = 2T$  dotyk přestává, neboť napětí  $G$  nemůže být tahové.

Jaký je fyzikální rozdíl mezi oběma případy? Je-li tyč nehmotná, znamená to, že její měrná hmotnost  $\rho = 0$  a rychlost šíření podélných vln  $c = \infty$ . Vzorec (4.44) dá v limitě

$$v_0 = \rho \cdot c \cdot v_0 = \rho \sqrt{\frac{E}{\rho}} v_0 = \sqrt{E\rho} \cdot v_0 = 0. \quad (4.80)$$

"Nulová" napěťová vlna se šíří tyčí nekonečnou rychlostí a nekonečněkrát se odrazí v konečném čase. Součet všech těchto nekonečně mnoha nekonečně malých napěťových vln musí v limitě dávat napětí podle (4.77). Příklad rázu hmotného tuhého beranu na nehmotnou pružnou tyč představuje limitní, fyzikálně neuskutečnitelný případ vlnové teorie. Přitom nespojitý průběh tlaku, jehož příklad vidíme na obr. 4.18, přejde ve spojitý průběh podle (4.77).

A nic už v život nepřivleče,  
co propaseno a co pokoseno.  
Ta s kosou trávu rodných luk když seče,  
ať aspoň voní na okamžik seno.

Viktor Dyk

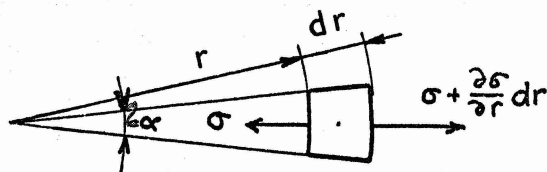
## 5. PRAKTICKÉ POZNATKY PLYNOUCÍ Z JEDNOROZMĚRNÉ TEORIE

### 5.1. Šíření podélných vln v tenké kuželové tyči

U osazované tyče na obr. 4.6 jsme zjistili, že směrem k tenčímu konci tyče se velikost napětí zvětšuje. Zajímá nás proto, jak se bude šířit napěťová vlna v kuželové tyči, kterou lze považovat za limitní případ mnohokrát osazené tyče. Úlohu si zjednodušíme tak, že tyč volíme štíhlou, abychom v ní mohli zanedbat všechny složky napjatosti až na radiální a nemuseli přihlížet k příčným posuvům hmotných částic.

Spokojíme se s jednorozměrnou teorií, která popisuje v kuželové tyči šíření kulové napěťové vlny se středem vlnoploch ve vrcholu kužele (obr. 5.1). Na vytknutý element působí vlevo síla

$$F = \pi (r \cdot \alpha)^2 G$$



Obr. 5.1

a vpravo síla

$$F + \frac{\partial F}{\partial r} dr = F + (2\pi r \alpha^2 G + \pi r^2 \alpha^2 \frac{\partial G}{\partial r}) dr.$$

Rozdíl těchto sil působí vpravo a uděluje hmotě elementu  $\rho \pi (r \alpha)^2 dr$  zrychlení  $\partial^2 u / \partial t^2$  ( $u$  značí radiální posuv). Platí pohybová rovnice

$$(2\pi r \alpha^2 G + \pi r^2 \alpha^2 \frac{\partial G}{\partial r}) dr = \rho \pi r^2 \alpha^2 dr \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.1)$$

Protože

$$G = E \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (5.2)$$

dá (5.1) po úpravě

$$\frac{E}{\rho} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.3)$$

Substitucí

$$u(r, t) = \frac{1}{r} \nu(r, t)$$

přejde tato rovnice ve tvar

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}$$

čili

$$c^2 \frac{\partial^2 (\nu r)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 (\nu r)}{\partial t^2}, \quad (5.4)$$

kde  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Řešení rovnice (5.4) je

$$\nu = \frac{1}{r} [f(r-ct) + F(r+ct)], \quad (5.5)$$

kde  $f$ , popř.  $F$  jsou libovolné funkce, popisující tvar vlny  $\nu = ur$ . Vlna popsaná první funkcí se šíří od vrcholu kužele a vlna popsaná druhou funkcí se šíří k vrcholu, a to stejnou rychlostí  $c$ .

Zaměříme svou pozornost na vlnu, která se šíří směrem k vrcholu kužele, takže budeme mít

$$u = \frac{1}{r} F(r+ct). \quad (5.6)$$

Pro napětí  $G$  dostaneme z rovnice (5.2) vztah

$$G = E \left( \frac{1}{r} F' - \frac{1}{r^2} F \right) \quad (5.7)$$

a pro rychlost hmotné částice (směrem od vrcholu kužele)

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{c}{r} F' \quad (5.8)$$

Dříve odvozený vztah  $G = \varrho \cdot c \cdot v$  (což je - až na znaménko - vztah (2.9)) tedy neplatí; platil by teprve pro velká  $r$ , pro něž by bylo možno zanedbat druhý člen v oblé závorce (5.7).

Za funkci  $F(\xi)$  zvolíme  $C(e^{-\xi/\lambda} - 1)$ , tedy

$$u = \frac{C}{r} \left( e^{-\frac{r+ct}{\lambda}} - 1 \right) \quad \text{pro } t \geq -\frac{r}{c}$$

$$u = 0 \quad \text{pro } t < -\frac{r}{c} \quad (5.9)$$

Platí, že  $u = 0$  pro  $r = -c \cdot t$  (čelo vlny); část  $r < -c \cdot t$  je v klidu (není dosud vlnou zasažena). Čas je záporný, tj. vlna se šíří v čase  $-\infty < t < 0$ . V okamžiku  $t = 0$  by dorazila k vrcholu  $r = 0$ . Konstanta  $C$  má rozměr plochy.

Pro vlnu (5.9) vyjde podle (5.2) nebo (5.7) napětí

$$G = -\frac{EC}{r^2} \left( e^{-\frac{r+ct}{\lambda}} - 1 \right) - \frac{EC}{\lambda r} e^{-\frac{r+ct}{\lambda}} \quad (5.10)$$

Na čele tlakové vlny je tlakové napětí (pro  $r = -ct$ )

$$G_0 = -\frac{EC}{\lambda r} \quad (5.11)$$

Daleko za čelem vlny (pro velká  $r$ ) vymizí exponenciální funkce v rovnici (5.10) a zbývá

$$G_\infty = +\frac{EC}{r^2} \quad (5.12)$$

Vzorec (5.12) prakticky platí pro  $r+ct > 3\lambda$ . Napětí ve větší vzdálenosti než  $3\lambda$  za čelem vlny je tahové a dává v průřezu  $\pi(r\alpha)^2$  konstantní sílu

$$F_\infty = G_\infty \pi r^2 \alpha^2 = \pi \alpha^2 EC \quad (5.13)$$

Napětí  $G(r)$  mění znaménko v nulovém bodě funkce (5.10), pro který

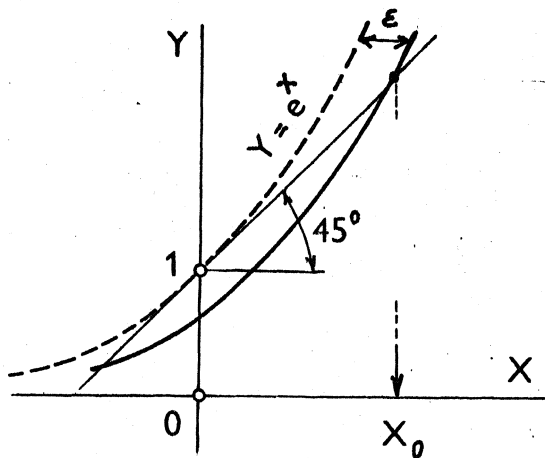
$$\left( 1 + \frac{r}{\lambda} \right) e^{-\frac{r+ct}{\lambda}} = 1 \quad (5.14)$$

Čím je vlnové čelo blíže k vrcholu, tím je poměr  $\varepsilon = \left| \frac{ct}{\lambda} \right|$  menší. Zavedeme-li pomocná označení

$$\frac{r}{\lambda} = X, \quad -\frac{ct}{\lambda} = \varepsilon, \quad (5.15)$$

můžeme (5.14) přepsat do tvaru

$$\left. \begin{aligned} Y &= 1 + X, \\ Y &= e^{X-\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$



Obr. 5.2

První z těchto rovnic lze znázornit přímkou, druhou posunutou exponenciální křivkou (obr. 5.2). Jejich průsečík dává hledaný nulový bod

$$X_0 = \frac{r_0}{\lambda}, \quad (5.17)$$

dělící tahovou část tyče ( $r > r_0$ ) od tlakové ( $|ct| < r < r_0$ ).

Je zřejmé, že  $X_0$  (a tedy i  $r_0$ ) je menší, je-li menší  $\varepsilon$ , tj. je-li čelo blíže k vrcholu; nakonec je v limitě pro  $\varepsilon \rightarrow 0$  celá tyč ve stavu tahového napětí. V okolí vrcholu však již nejsou

splněny předpoklady úlohy (napětí limituje k nekonečnu).

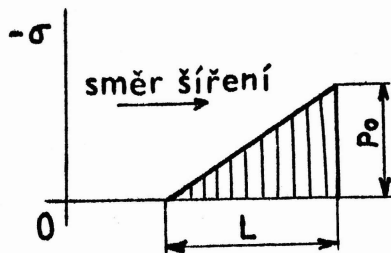
Poučné na tomto příkladu je, že v kónické tyči se zvětšuje napětí v tlakové vlně při pohybu směrem k vrcholu a že za oblastí tlakovou následuje oblast tahová; obě jsou součástí téže vlny. Tlaková oblast se zkracuje za současného vzrůstu napětí na čele vlny (při pohybu směrem k vrcholu). Zvětšování napětí na čele vlny je charakteristické i pro vlny jiného tvaru než podle rovnice (5.9).

## 5.2. Poruchy stěn, tyčí a různých těles rázovou vlnou

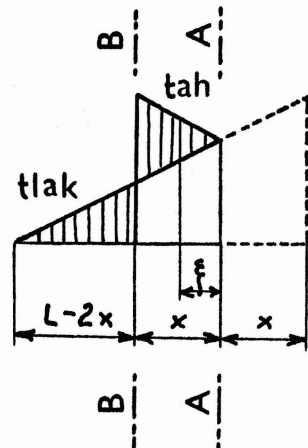
Vzniká-li rázová vlna explozí výbušniny, mívá prudký vzestup a pozvolný spád tlaku, takže ji lze v prvním přiblížení znázornit trojúhelníkovým průběhem. Budeme tento průběh předpokládat (obr. 5.3), ačkoli úvahy, které uvedeme, lze snadno zobecnit pro jakýkoli tvar napěťové vlny.

Šíří-li se tlaková vlna podle obr. 5.3 tyčí nebo deskou vyrobenou z materiálu o kohezni pevnosti v tahu  $\sigma_p$ , vznikne v materiálu trhlinka, jakmile tahové napětí složené z původní tlakové a odražené tahové vlny dostoupí této hodnoty. Primární a odražená vlna jsou znázorněny na obr. 5.4. Koncový povrch tyče (volný povrch stěny) je označen čarou A-A. Pokud je  $x \leq L/2$ , je výsledné napětí v řezu B-B

$$\tilde{\sigma}(x) = \rho v_0 \left(1 - \frac{L-2x}{L}\right) = \frac{2x}{L} \rho v_0 \quad (5.18)$$



Obr. 5.3



Obr. 5.4

Z podmínky  $\tilde{\sigma}(x) = \tilde{\sigma}_p$  vyjde vzdálenost  $x$ , v níž vznikne trhlina

$$x = \frac{L}{2} \frac{\tilde{\sigma}_p}{\rho v_0} \quad (5.19)$$

Částice mezi čelem vlny B-B a volným povrchem A-A mají rychlost  $v(\xi)$  složenou z rychlosti příslušné prvotní vlně

$$v_1 = \frac{1}{\rho c} \cdot \rho v_0 \left(1 - \frac{x+\xi}{L}\right) \quad (5.20)$$

a z rychlosti příslušné odražené vlně

$$v_2 = \frac{1}{\rho c} \cdot \rho v_0 \left(1 - \frac{x-\xi}{L}\right) \quad (5.21)$$

Sečtením

$$v(\xi) = v_1 + v_2 = \frac{2}{\rho c} \rho v_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (5.22)$$

Tato rychlost je konstantní (nezávislá na  $\xi$ ). Dosazením z rovnice (5.19) do (5.22)

$$v = \frac{2\rho v_0}{\rho c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}_p}{\rho v_0}\right) \quad (5.23)$$

Je-li  $G_p = \rho_0$ , je

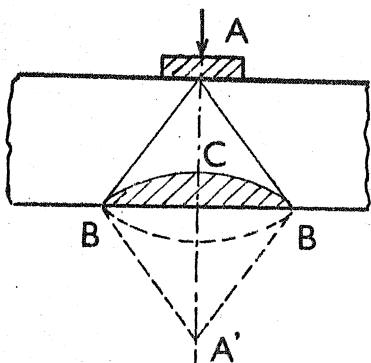
$$v = v^* = \frac{G_p}{\rho c} \quad (5.24)$$

Je-li uvedená podmínka splněna, odtrhne se vrstva s největší tloušťkou  $x = L/2$  a její rychlost bude dána rovnicí (5.24). Je-li  $G_p < \rho_0$ , bude mít odtržená vrstva menší tloušťku podle (5.19) a rychlost podle (5.23). Rychlostí (5.23), popř. (5.24) je část uvolněná trhlinou vymrštěna. Vlnový děj tím však nekončí, neboť na povrchu trhliny vzniká další odražená vlna.

Za uvedených předpokladů vznikne trhlina buď v intervalu  $0 < x \leq L/2$ , nebo nevznikne vůbec. To vyplývá z rovnice (5.19) a z nerovnosti  $\rho_0 \geq G_p$ . Není-li tato nerovnost splněna, trhlina nevznikne.

Uvedenou teorií, aplikovanou na různá tělesa, lze vysvětlit mnoho praktických poznatků, zejména rozdílnost typů poruch při rázovém nebo statickém (či únavovém) namáhání. Výklad opírající se o jednorozměrnou teorii je ovšem zjednodušený. Ve skutečnosti vznikají při odrazu a průchodu vln na elastickém rozhraní jak podélné, tak i příčné vlny a vlnový děj v tělese je mnohem složitější. Bez zřetele k této složitosti uvedeme nyní některé příklady.

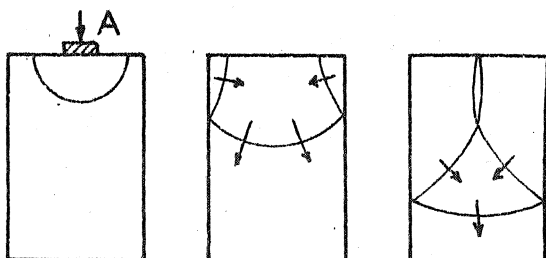
### 1. Ráz na povrch desky



Obr. 5.5

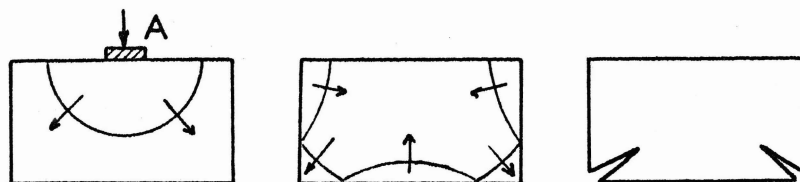
Ráz v bodě A desky na obr. 5.5 lze vyvolat buď nárazem beranu, nebo výbuchem. Na povrchu B-B se odráží tlaková sférická vlna, která vyšla z bodu A, jednak jako tahová, jednak jako smyková. Tahová vlna se odráží tak, jako by se šířila ze zrcadlového obrazu A'. Vznikne-li trhlina, má tvar BCB' a odštěpený materiál má tvar čočky vyznačené šrafováním.

### 2. Ráz na povrch kvádrů



Obr. 5.6

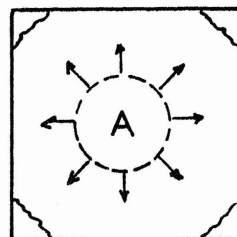
Je-li kvádr úzký, setkají se odražené tahové vlny na jeho ose a trhlina tedy vznikne na této ose (obr. 5.6). Je-li kvádr široký, vznikne trhlina v jeho rozích (obr. 5.7). Někdy mohou vzniknout oba druhy trhlin zároveň.



Obr. 5.7

### 3. Ráz na čtvercovou křehkou desku

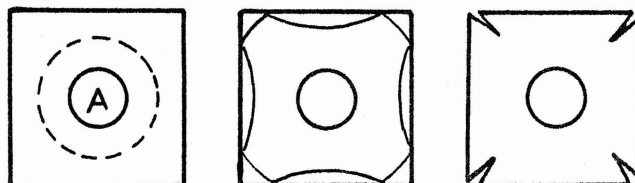
Deska je volně na okrajích podepřena. Ráz vzniká uprostřed. Napěťová vlna se šíří nejprve rotačně souměrně, pak se však začne uprostřed stran desky odrážet. Zároveň se projeví i zvýšení napětí v rozích (na způsob vlnění v kónické tyči, odst. 5.1), což způsobí odštěpení rohů. Příklad je znázorněn na obr. 5.8. Zvýšení napětí v rozích je mnohem významnější než napětí v odražené vlně, která by způsobila odštěpení čoučkovitého útvaru podle obr. 5.5.



Obr. 5.8

### 4. Ráz v potrubí čtvercového průřezu

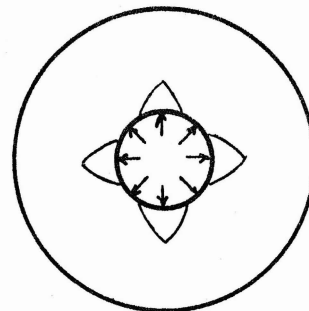
Tento průřez někdy mívají betonové kanály. Vznikne-li uvnitř potrubí výbuch, šíří se napěťové vlny podle obr. 5.9. Tahové vlny se superponují v rozích, kde vznikají v úhlopříčném směru trhliny. Je zajímavé, že vznikají v místech, kde je stěna nejtlustší a kde tedy při statickém zatížení vzniká nejmenší napětí.



Obr. 5.9

### 5. Ráz v potrubí mezikruhového průřezu

Vznikne-li detonační vlna uvnitř potrubí s průřezem podle obr. 5.10, vznikají trhliny ve směrech největších smykových napětí. Je-li materiál dostatečně houževnatý, vzniknou trhliny nejprve na vnějším povrchu, a to až po velké plastické deformaci. To je případ roztržení pláště při explozi válcové bomby, o kterém se zmíníme v odst. 7.9.

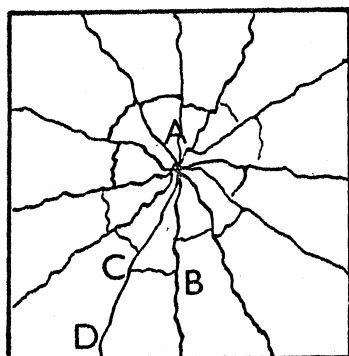


Obr. 5.10

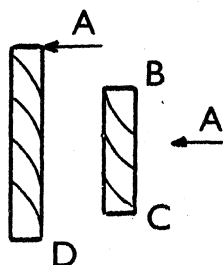


## 6. Ráz na skleněnou desku

Vznikne-li ráz v bodě A na desku pevně na obvodě vetknutou, vznikne



Obr. 5.11



nejprve síť radiálních trhlin, šířících se od okrajů desky k bodu A. Trhliny vznikají na opačné straně, než na které vznikl ráz, a šíří se etapovitě rychlostí menší než asi  $0,4 \sqrt{E/\rho}$ . Etapovitým šířením trhliny vzniká lasturovitý vzhled lomové plochy, podle kterého lze poznat směr, odkud vznikl ráz. V další etapě vznikají sekundární trhliny v obvodovém směru,

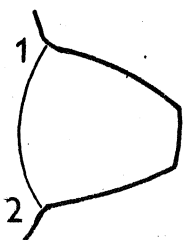
a to ze stejné strany, na jakou působil ráz; lastury jsou v obvodových lomech orientovány opačně (obr. 5.11).

Je-li tabule skla zasažena střelou velké rychlosti, nestačí se síť trhlin podle obr. 5.11 plně vyvinout a vznikne jen otvor se sítí krátkých trhlinek na okrajích. Působí-li na okenní sklo plošná tlaková vlna, může vzniknout buď síť převážně radiálních trhlin, je-li ráz mírný, nebo převážně obvodových trhlin u obvodu tabule, kdežto střední část se posune jako celek, aniž se podstatněji poruší. Tento druhý případ nastane při "ostrém" rázu velké intenzity.

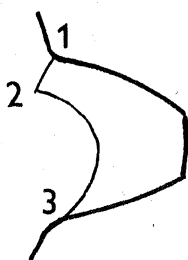
Vznik a šíření trhlin ve skle závisí také na stavu vlastních pnutí. To se využívá u tzv. bezpečnostního skla, které se po nárazu rozsype na malé částičky.

## 7. Ráz na zub ozubeného kola

Vznikne-li ráz v soukolí ozubených kol, může se porušit jeden nebo i několik zubů. Lom se šíří buď tak, jako při statickém zatížení (obr. 5.12),



Obr. 5.12



Obr. 5.13

je-li rychlost rázu malá, nebo podle obr. 5.13. Část 1 - 2 je kvazikřehký lom drobně zrnitého vzhledu, část 2 - 3 je smykový lom, jehož povrch je hladký a nese stopy po relativním pohybu obou částí při šíření lomu (rysky rovnoběžné s nákresnou na obr. 5.13). Smyková část lomu vzniká vždy u kořene protějšního (nezatíženého)

boku zubu a lze podle ní bezpečně usoudit na směr síly působící při poruše kola.

Poruší-li se zub únavovým lomem, vzniká rovněž hladká lomová plocha. Probíhá však vždy jen podle obr. 5.12 a čáry na lastuře lomu probíhají převážně kolmo k nákrese na obr. 5.12.

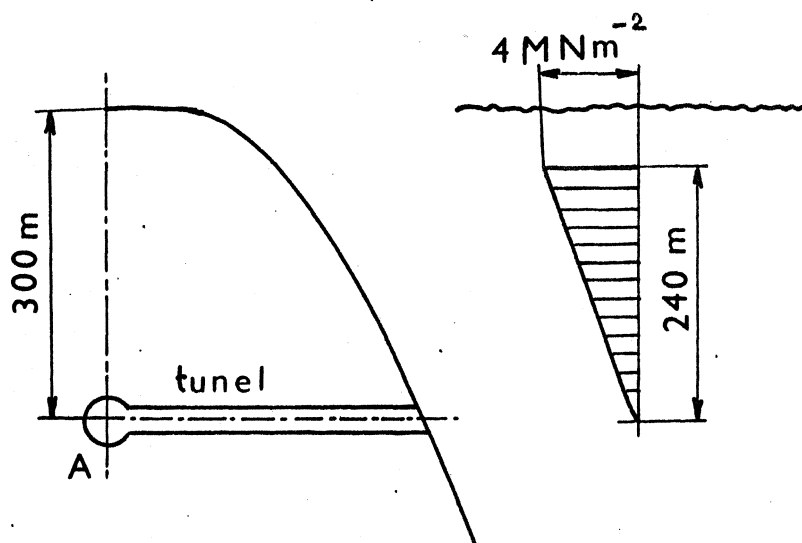
### 8. Účinek podzemního nukleárního výbuchu

Uvedené poznatky lze aplikovat i ve velkém měřítku, jak ukážeme na příkladu výbuchu nukleární nálože 1,7 kilotun TNT v hloubce 300 m pod povrchem (obr. 5.14). Výbuchem vznikne tlaková vlna o délce  $L = 240$  m, na jejímž čele je tlakové napětí  $p_0 = 4 \text{ MN m}^{-2}$ . Má-li hornina kohezni pevnost  $G_p = 2 \text{ MN m}^{-2}$ , oddělí se vrstva o tloušťce

$$x = \frac{240}{2} \cdot \frac{2}{4} = 60 \text{ m}$$

podle (5.19). Je-li rychlost zvuku v hornině  $C = 2000 \text{ m s}^{-1}$  a měrná hmotnost  $\rho = 1500 \text{ kg m}^{-3}$ , vyjde rychlost, s jakou se vrstva oddělí, podle (5.23)

$$v = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^6}{1,5 \cdot 2 \cdot 10^6} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2}{4}\right) = 2 \text{ m s}^{-1}.$$



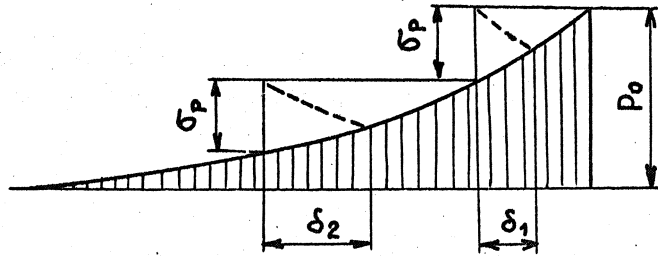
Obr. 5.14

Vrstva nadskočí do výšky

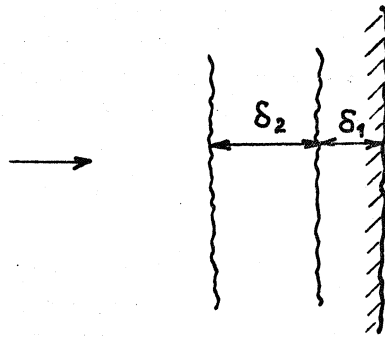
$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{4}{2 \cdot 10} = 0,2 \text{ m}.$$

### Poznámka

Protože vytvořením trhliny ještě nekončí vlnový děj, může vzniknout (při větším poměru  $\rho_0/G_p$ ) další trhlina, takže se oddělí dvě nebo několik vrstev. Např. u vlny na obr. 5.15 je tloušťka první odtržené vrstvy  $\delta_1$ , druhé  $\delta_2$ .

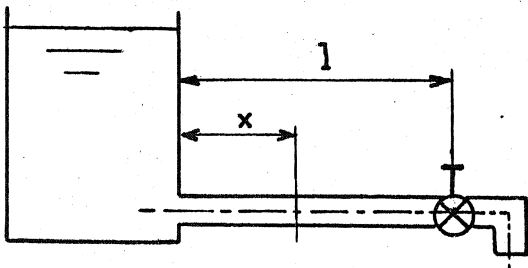


Obr. 5.15



### 5.3. Vodní ráz v potrubí

Proudí-li voda z nádrže delším potrubím a uzavře-li se náhle záklopka na konci potrubí, vznikne v potrubí rázová vlna, která se šíří od záklopky k nádrži jednak vodou, jednak potrubím. Přitom se uplatní větší nebo menší měrou elastické vlastnosti potrubí i vodního sloupce a pasivní odpory, které způsobí rozptýl části energie.



Obr. 5.16

Úlohu budeme řešit za zjednodušujících předpokladů. Nejprve budeme předpokládat, že potrubí je absolutně tuhé a rychlost vody před rázem se rovná  $v$  (obr. 5.16). Uzavřeme-li náhle záklopku, vznikne ve vodním sloupci podélná tlaková vlna

$$\rho v = \rho c v, \quad (5.25)$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (5.26)$$

značí rychlost zvuku ve vodě,  $K$  modul objemové stlačitelnosti. Ten závisí na tlaku a na teplotě vody. Tyto změny zanedbáme (nejsou pro naši úlohu podstatné) a vezmeme např.  $K = 2000 \text{ MN m}^{-2}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ , takže

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^9}{10^3}} \doteq 1410 \text{ m s}^{-1}. \quad (5.27)$$

Dosažením uvedených hodnot do (5.25) vyjde

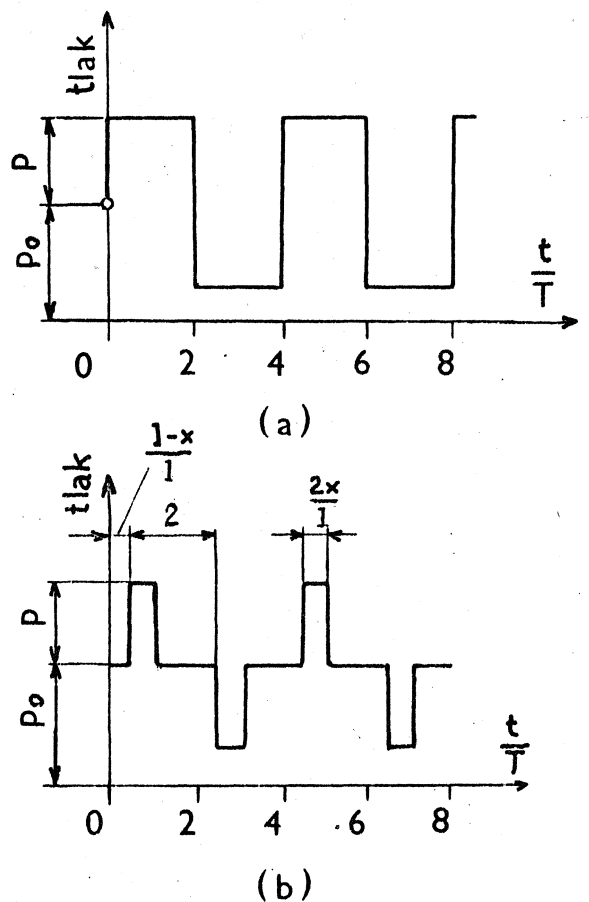
$$\nu = 1000 \cdot 1410 \text{ v} = 1,41 \cdot 10^6 \text{ v}$$

čili - budeme-li tlak měřit v megapascalch -

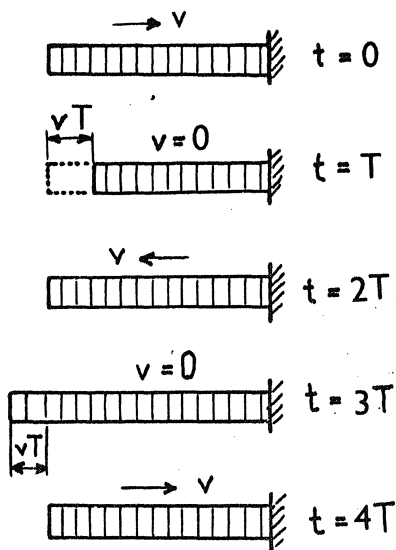
$$\nu = 1,41 \text{ v} \cdot [\text{MN m}^{-2}; \text{m s}^{-1}]. \quad (5.28)$$

Tlaková vlna se šíří od záklopky k nádobě. Když dorazí na levý volný konec (v čase  $t = l/c = T$ ), odrazí se a vrací se k záklopce jako vlna tahová. V čase  $t = T$  je celý vodní sloupec v klidu; když odražená vlna dojde až k záklopce ( $t = 2T$ ), pohybuje se celý sloupec směrem k nádobě rychlostí  $v$ .

Tlak přitom klesne na původní hodnotu. Vzápětí se vlna odrazí od záklopky a vrací se k nádobě opět jako tahová vlna. O "tahové" vlně zde však můžeme mluvit jen potud, pokud celkový tlak neklesne blízko k absolutní nule; v takovém případě by nastalo odtržení vodního sloupce. Zanedbáme-li hydraulické ztráty, musí být  $\nu < \nu_0$ , kde  $\nu_0$  značí atmosférický tlak (což byl tlak v místě ventilu před vznikem rázu). Je-li tato podmínka splněna, vznikne periodický průběh tlaku podle obr. 5.17 a. Tlak v potrubí ve vzdálenosti  $x$  kolísá podle obr. 5.17 b. V čase  $t = T, 3T, 5T, \dots$  je celý sloupec v klidu, v čase  $t = 0, 4T, 8T, \dots$  se pohybuje směrem k záklopce rychlostí  $v$ , v čase  $t = 2T, 6T, 10T, \dots$  se pohybuje stejnou rychlostí opačným směrem (od záklopky). To je pro začátek děje znázorněno na obr. 5.18.



Obr. 5.17



Obr. 5.18

Průběhy tlaků na obr. 5.17 a 5.18 jsou idealizovány. Ve skutečnosti se tlakové vlny tlumí hydraulickými ztrátami, uvolňováním plynnů za nízkého tlaku, popř. odtržením sloupce.

Nyní posoudíme, jakým vlivem se uplatní pružnost potrubí. Kdyby potrubí bylo pružné pouze v podélném směru, umožnilo by pohyb záklopy po vodním rázu společnou rychlostí  $W$ . Tlaková vlna ve vodním sloupci by byla

$$\rho v = \rho c (v - W), \quad (5.29)$$

tedy menší než podle (5.25). Zároveň by vznikla tahová napěťová vlna v potrubí (index "p")

$$G = \rho_p c_p W, \quad (5.30)$$

která by se šířila mnohem větší rychlostí  $c_p = \sqrt{E_p / \rho_p}$  než podle (5.26). Na vetknutém konci potrubí by se odrazila a vrátila se

opět jako tahová vlna (přestup vlnění do stěny nádoby zanedbáváme, stěnu považujeme za absolutně tuhou). Po průchodu této odražené vlny je rychlost v potrubí nulová. Při opětovém odrazu na volném konci potrubí (na straně záklopy) se tahová vlna změní na tlakovou a rychlost záklopy se změní na  $-W$ . Vlivem těchto odrazů se k průběhu tlaku na obr. 5.17 a superponují napěťové pulsy o amplitudě  $\pm \rho_p c_p W$ . Velikost rychlosti  $W$  vypočteme z podmínky rovnováhy sil působících na záklopu. Je-li  $\pi r^2$  světlý otvor v potrubí a  $2\pi r h$  průřez potrubím ( $h$  je tloušťka potrubí,  $r$  jeho poloměr), musí být

$$\rho \pi r^2 = G 2\pi r h \quad (5.31)$$

čili

$$W = v \frac{1}{1 + 2 \frac{\rho_p c_p}{\rho c} \frac{h}{r}} \quad (5.32)$$

Také tento rozbor je značně zidealizován. Levý konec potrubí není dokonale vetknutý a vzájemné působení vodního sloupce a potrubí je složitější. Na pravém konci potrubí rušivě působí nenulová hmotnost záklopy, s kterou jsme nepočítali.

Skutečné potrubí je pružné také v obvodovém směru. Vlivem tlaku  $\rho v$  v něm vzniká obvodové napětí  $G_t$  a osově napětí  $G_o$

$$G_t = \frac{\rho r}{h}, \quad G_o = \frac{\rho r}{2h} \quad (5.33)$$

Objem potrubí se zvětší v poměru

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta (\pi r^2 \ell)}{\pi r^2 \ell} = 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta \ell}{\ell}. \quad (5.34)$$

Z Hookeova zákona

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{E_{\mu}} (\sigma_t - \mu_{\mu} \sigma_o), \quad (5.35)$$

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E_{\mu}} (\sigma_o - \mu_{\mu} \sigma_t),$$

takže

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\mu r}{2 E_{\mu} h} (5 - 4 \mu_{\mu}). \quad (5.36)$$

Připočteme-li k tomu objemovou změnu kapaliny  $\nu/K$ , dostaneme pro celkovou poměrnou změnu objemu, kterou vyjádříme poměrem  $\nu/K_{red}$ , vztah

$$\frac{\nu}{K_{red}} = \frac{\nu}{K} + \frac{\mu r}{2 E_{\mu} h} (5 - 4 \mu_{\mu}). \quad (5.37)$$

Efektivní (redukováný) modul objemové stlačitelnosti tedy vyjde

$$K_{reol} = \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{r}{2 E_{\mu} h} (5 - 4 \mu_{\mu})}. \quad (5.38)$$

Zavedením tohoto modulu objemové stlačitelnosti můžeme přibližně respektovat vliv pružnosti potrubí. Nepřesnost vzorce (5.38) spočívá mj. v tom, že tlak  $\nu$  není po délce potrubí konstantní a že se potrubím šíří napěťové vlny, takže poměr  $\sigma_t : \sigma_o = 2 : 1$ , plynoucí z rovnic (5.33), ve skutečnosti neplatí.

Tlak v potrubí mimoto závisí na průběhu zavírání zákločky. Předpokládáme, že zákločka nebude uzavřena náhle, ale tak, že sloupec vody se bude rovnoměrně zpožďovat se zpožděním  $a$ . Předpokládáme, že  $a > \nu c / 2\ell$ , takže se zákločka úplně uzavře ještě dříve, než tlaková vlna dorazí k nádobě a zpět. Tlak působený zavíráním zákločky bude nyní funkcí času

$$\nu(t) = \rho c v(t). \quad (5.39)$$

V této rovnici značí  $v(t)$  změnu rychlosti působenou zavíráním zákločky. Podle předpokladu

$$v(t) = at. \quad (5.40)$$

Tlak vzrůstá s časem až do okamžiku, kdy se zákločka zcela uzavře; tehdy je rychlost  $v(t) = v_o$  (= původní rychlost proudu) a proudění se zcela zastaví. To se stane v čase  $t = t_o = v_o/a$ . Dosadíme-li za  $v(t_o) = v_o$  do (5.39), dostaneme

$$p_0 = p(t_0) = \rho c v_0. \quad (5.41)$$

Maximální tlak je za těchto předpokladů stejný, jako kdybychom záklopku zavřeli náhle, nastává však později. Tento tlak by však nemohl vzniknout, kdybychom záklopku zavírali tak pomalu, že by se odražená vlna vrátila k záklopce ještě dříve, než bychom ji zavřeli.

#### 5.4. Ráz vodního paprsku na pevnou stěnu

Dopadne-li válcový paprsek vody rychlostí  $v$  na pevnou nepohyblivou stěnu, vznikne nárazem tlak odpovídající stlačitelné kapalině

$$p = \rho c v. \quad (5.42)$$

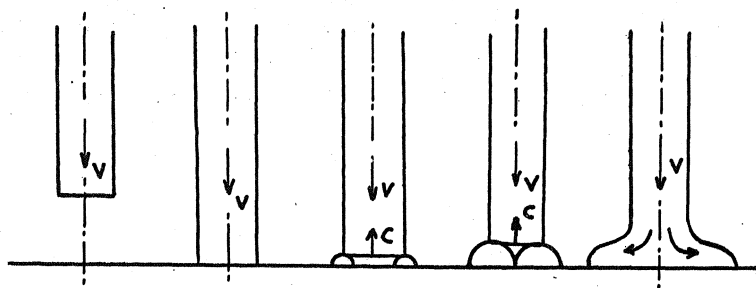
Není-li stěna absolutně tuhá, ale má mechanickou impedanci  $Z = \rho_s c_s$  (index "s" se vztahuje na stěnu), vyjde

$$p = \frac{\rho c Z}{\rho c + Z} v. \quad (5.43)$$

Oba vztahy se ztotožní pro  $\lim Z \rightarrow \infty$ . Tlak  $p$  však trvá jen velmi krátce. Od okrajů plochy dopadu se začne šířit odlehčující vlna. Současně vzniká radiální pohyb kapaliny ven z odlehčených oblastí, až tlak klesne a ustálí se na hodnotě příslušné změně hybnosti nestlačitelné kapaliny, totiž na

$$p^* = \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (5.44)$$

Tento děj je schematicky znázorněn na obr. 5.19.



Obr. 5.19

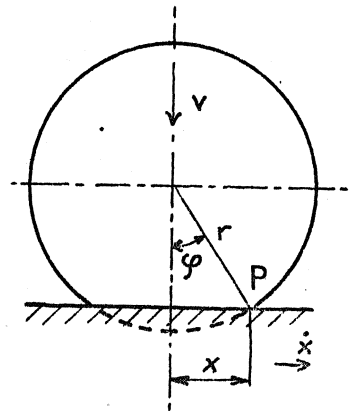
Má-li vodní paprsek průměr 3 mm, trvá maximální tlak uprostřed plochy dopadu přibližně

$$t = \frac{r}{c} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 10^3} = 10^{-6} \text{ s}, \quad (5.45)$$

tedy asi jednu mikrosekundu.

Výpočet je založen na ideálních předpokladech, které nebudou ve skutečnosti splněny. Čelo paprsku nebude rovinné, jak je na obr. 5.19 zakresleno. Abychom mohli posoudit, jaká chyba tím vzniká, budeme se nyní zabývat dopadem kulové kapky (obr. 5.20).

V prvních okamžicích krátce po dopadu kapky lze pohyb částic směrem od normály zanedbat. Bod P na okraji styčné plochy je od normály vzdálen o  $x$ . Snadno vypočteme, že



Obr. 5.20

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \varphi, \\ v &= -\frac{d}{dt}(r \cos \varphi) = \dot{\varphi} r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

takže

$$\dot{x} = \dot{\varphi} r \cos \varphi = v \cotg \varphi. \quad (5.47)$$

Má-li začít pokles tlaku vlivem odlehčující vlny, musí být  $\dot{x} < c$ . V mezním případě je  $\dot{x} = c$ , tedy  $v \cotg \varphi = c$ . Pokud je úhel  $\varphi$  malý, můžeme dosadit  $\tg \varphi \approx \sin \varphi = x/r$ , takže  $v r/x = c$  a odtud

$$x = \frac{vr}{c}. \quad (5.48)$$

Jakmile kapka zasáhne plošku o poloměru  $x$  daném rovnicí (5.48), začne tlak  $p$  podle (5.43) klesat, až převládne radiální pohyb vytékající kapaliny a tlak klesne na hodnotu  $p^*$  podle (5.44). Výpočet je opět pravdivý jen částečně; mezní poloměr, při němž začne pokles tlaku, je větší než podle (5.48).

Abychom si učinili lepší představu o velikosti tohoto mezního poloměru, vypočteme jej pro kapku o průměru 4 mm ( $r = 2$  mm) a rychlost  $v = 600 \text{ m s}^{-1}$ . Vyjde

$$x = 600 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1500} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,8 \text{ mm}.$$

Této hodnotě odpovídá  $\varphi \approx 0,8/2 = 0,4$  a  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} = 1 - 0,08 = 0,92$ . Dráhu  $y = r(1 - \cos \varphi) = r\varphi^2/2 = 2 \cdot 0,08 = 0,16$  mm urazí kapka za  $t = (0,16 \cdot 10^{-3} / 600) \cdot 10^6 \mu\text{s} = 0,27 \mu\text{s}$ . Po této době (ve skutečnosti



bude o něco větší) začne tlak v dotykové plošce klesat. Při  $Z \rightarrow \infty$  tento tlak vyjde

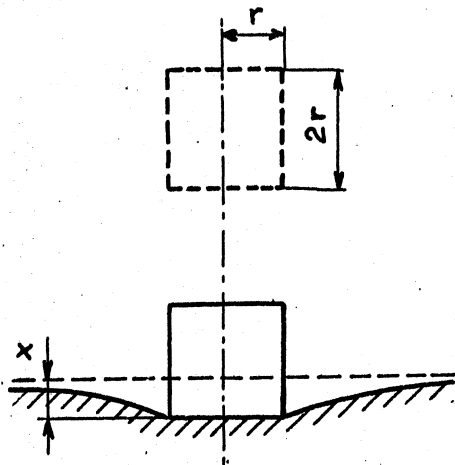
$$\tau = \rho c v = 1000 \cdot 1500 \cdot 600 \cdot 10^{-6} \text{ MN m}^{-2} = 900 \text{ MN m}^{-2}.$$

To je hodnota srovnatelná s pevností oceli. Je zřejmé, že dopadem částic kapaliny velkou rychlostí vznikají velmi vysoké tlaky, které však zasahují jen nepatrnou oblast a trvají jen zlomek mikrosekundy nebo nejvýše několik mikrosekund.

Uvedeným způsobem lze vysvětlit erozivní účinky vodních kapek při průtoku mokré páry nízkotlakovými stupni parních turbín. Erozi jsou ohrožena i letadla, když prolétávají vysokou rychlostí vrstvou mraků. Dopadají-li např. drobné vodní kapky velkou rychlostí na desku z organického skla, způsobují v místě prvního dotyku tlakovou vlnu, která má dvojnásobně škodlivý účinek. Jednak může na opačné straně způsobit mikrotrhlínky rovnoběžné s povrchem, vyvolané odraženou vlnou (srov. s obr. 5.4 a 5.5), jednak může způsobit, že v povrchové vrstvě vznikne prstencovitá trhlinka kolem místa dopadu kapky, a to na straně dopadajících kapek. Velký tlak v místě dopadu kapky totiž vyvolává v blízkém okolí tahové radiální napětí. Síť trhlinek zhoršuje průhlednost a pronikavě snižuje pevnost desky.

#### 5.5. Ráz válcového projektilu na pružný poloprostor

Předpokládáme, že projektil (razník) má tvar rovnostranného válce podle



Obr. 5.21

obr. 5.21 a že je absolutně tuhý. Po dopadu se projektil zaboří do pružného poloprostoru do hloubky  $x$ . Je-li  $x \ll r$ , odvozuje se pro tento posuv z teorie pružnosti vzorec

$$x = \frac{P}{2rE} (1-\mu^2), \quad (5.49)$$

v němž  $P$  značí sílu mezi razníkem a pružným poloprostorem. Vzorec platí za předpokladu statického zatížení. Stejná síla způsobí zpoždění projektilu

$$\ddot{x} = -\frac{P}{m} = -\frac{P}{2\pi r^2 \rho}. \quad (5.50)$$

Z obou posledních rovnic vyloučíme sílu  $P$  a dostaneme

$$\ddot{x} + \frac{E}{(1-\mu^2)\pi r^2 \rho} x = 0. \quad (5.51)$$

To je rovnice harmonického pohybu, která však platí jen pro  $x > 0$ . Dotyk obou těles tedy trvá

$$T = \pi r \sqrt{\frac{\pi \rho (1 - \mu^2)}{E}} \quad (5.52)$$

Jako příklad volíme  $r = 10 \text{ mm}$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$  (ocel),  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ ,  $\mu = 0,3$ . Vyjde

$$T = \pi \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{\pi \cdot 7800 \cdot 0,91}{2,1 \cdot 10^{11}}} = 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Není-li projektil absolutně tuhý, ale je-li rovněž ocelový, je doba potřebná pro průchod napěťové vlny tam a zpět

$$T = \frac{2 \cdot 2r}{c} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{5000} = 0,8 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Obě hodnoty jsou téhož řádu, takže předpoklad zcela tuhého projektilu nevy-  
stihuje správně skutečnost. Uvedenou teorii lze proto použít jen tehdy, je-li  
poloprostor z jiného, poddajnějšího materiálu. I tehdy je však teorie zatíže-  
na chybou, neboť rovnice (5.49) byla odvozena za předpokladu statického nemá-  
hání. Rychlost dopadu projektilu tedy nesmí být příliš velká, nemá-li vznik-  
nout velká chyba. Přesnější výpočet je velmi pracný a přesahuje naše možnosti.

#### 5.6. Šíření napěťových vln ve šroubovitě válcové pružině

Je-li  $R$  střední poloměr vinutí,  $n$  počet závitů,  $d$  průměr drátu a  $G$  modul pružnosti ve smyku, prodlužuje se hustě vinutá šroubovitě válcová pružina účinkem osové síly  $F$  přibližně o

$$\delta = \frac{64 F R^3 n}{G d^4} \quad (5.53)$$

Značí-li  $u$  osový posuv některého řezu, roztáhne se element pružiny o délce  $dx$  účinkem osové síly  $F$  o délku

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{64 F R^3 n}{G d^4} \frac{dx}{l} \quad (5.54)$$

kde  $l$  je délka pružiny (tedy nikoli délka drátu). Hmotnost tohoto elementu je

$$dm = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 2\pi R n \rho \frac{dx}{l} \quad (5.55)$$

Síla  $\frac{\partial F}{\partial x} dx$  se mu uděluje zrychlení  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  podle Newtonova zákona

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.56)$$

Za  $dm$  dosadíme z rovnice (5.55) do (5.56) a pomocí rovnice (5.54) vyloučíme  $F$ . Vyjde pohybová rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G d^2 l^2}{32 \pi^2 R^4 m^2 \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.57)$$

Srovnáním s rovnicí (2.4) dojdeme k závěru, že vlna  $u(x, t)$  se bude pružinou šířit rychlostí

$$c = \frac{ld}{4 \pi R^2 m} \sqrt{\frac{G}{2\rho}} = \frac{ld}{4 \sqrt{2} \pi R^2 m} c_s \quad (5.58)$$

Čas  $T$ , za který napěťová vlna proběhne celou pružinou, je

$$T = \frac{l}{c} = \frac{4 \pi R^2 m}{d} \sqrt{\frac{2\rho}{G}} \quad (5.59)$$

To znamená, že rozruch běží drátem o délce  $L = 2 \pi R m$  rychlostí

$$w = \frac{L}{T} = \frac{d}{2 \sqrt{2} R} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (5.60)$$

Protože drát je relativně tenký ( $d \ll R$ ), šíří se rozruch drátem mnohem menší rychlostí než torzní vlna, která se šíří rychlostí  $\sqrt{G/\rho}$ . To je velmi zajímavé, neboť drát je přitom namáhán převážně krutem.

Uvedená teorie přestává platit, dosednou-li při rázu závity na sebe. V tom případě se vytvoří "píst", který se skládá z několika navzájem těsně dosedajících závitů. Rychlost napěťové vlny v něm je podstatně větší než ve volné části pružiny. Čela tohoto "pístu" se pohybují rovněž rychleji než dává (5.58).

Skutečnost je složitější, jde-li o řídce vinutou pružinu. Podrobnější rozbor ukazuje, že vznikají zároveň torzní i podélné vlny (vztaženo na pružinu jako celek, tedy na pružnou tyč, která má stejné výsledné elastické vlastnosti a rozdělení hmoty jako pružina). Tyto vlny jsou vzájemně vázány.

### 5.7. Vzpěr tyčí namáhaných rázem

Dopadne-li štíhlá pružná tyč na tuhou podložku větší rychlostí než kritickou, ohne se. Pro hrubou představu o velikosti kritické rychlosti stačí předpokládat, že napětí vyvolané rázem

$$\sigma = -\rho c v \quad (5.61)$$

dosáhne meze elastické stability

$$\sigma = -\frac{\pi^2 E i^2}{l^2}, \quad (5.62)$$

kde  $i$  je poloměr setrvačnosti průřezu, tj.  $i = \sqrt{J/A}$ . Rovnice (5.62) je známý Eulerův vzorec. Vyloučením  $\sigma$  z obou posledních rovnic dostaneme pro kritickou rychlost  $v_{kr}$  vzorec

$$v_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\rho c} \left(\frac{i}{l}\right)^2 = \pi^2 c \left(\frac{i}{l}\right)^2. \quad (5.63)$$

Ačkoli byl tento vzorec odvozen za velmi jednoduchých předpokladů, souhlasí uspokojivě s pokusy. Experimentální výsledky jsou však zatíženy velkým rozptylem, což platí o všech pokusech, při nichž se zkoumá elastická stabilita.

Dopadne-li ve směru osy na tuhou podložku tenkostěnná trubka, začne se od jednoho okraje "mačkat"; v plášti se vytvářejí prohlubně a vyvýšeniny, které se složí v záhyby. Tím se začne délka trubky výrazně zkracovat. Z pokusů s tenkostěnnými trubkami z měkké oceli vyplynulo, že kritické napětí v tlaku při nárazu trubky je větší než při jejím statickém zatížení osovou silou a závisí na rychlosti rázu. Je-li tato rychlost v rozsahu do  $40 \text{ m s}^{-1}$ , platí přibližně vztah

$$\frac{\sigma_{dyn}}{\sigma_{stat}} = 0,0375 v + 1. \quad (5.64)$$

Do tohoto vztahu dosazujeme rychlost v jednotkách  $\text{m s}^{-1}$ .

### 5.8. Čelní náraz vozidla

Karosérie moderních vozidel je tenkostěnná a velmi často "samonosná". Při čelním nárazu se chová podobně jako tenkostěnná trubka (odst. 5.7). Na mezi stability dosáhne osová síla vcelku stálé hodnoty

$$F = |G| A, \quad (5.65)$$

která nezávisí (v prvním přiblížení) na velikosti deformace. Nahradíme-li vozidlo ekvivalentním válcem, dostaneme pro jeho "redukovanou" (spíše bychom

měli říci "homogenizovanou") hmotnost vztah

$$\rho = \frac{M}{A l} \quad (5.66)$$

kde  $M$  je hmotnost celého vozidla,  $l$  jeho délka,  $A$  průřez. Zpoždění vozidla při nárazu vypočteme z pohybového zákona

$$|a| = \frac{F}{M} = \frac{|G|A}{\rho A l} = \frac{|G|}{\rho l} \quad (5.67)$$

Liší-li se vozidla pouze délkou, je zpoždění při čelním nárazu vozidla nepřímo úměrné jeho délce.

Protože zranění posádky vzniká následkem velkého zpoždění pohybu, je relativně bezpečnější delší vozidlo. Zaoceánský parník je z tohoto hlediska bezpečnější než železniční vagón, poněkud méně bezpečný je autobus a nejhůře jsou na tom automobilisté. Narazí-li automobil na pevnou překážku rychlostí 25 až 45 km/h, vzniká v něm zpoždění až 40 g (v okamžiku asi 0,05 sekundy po rázu). Tato hodnota je informativní; ve skutečnosti může být zpoždění poněkud menší nebo větší podle typu vozidla.<sup>x)</sup>

Vyvalily se vlny zdola,  
roztáhly se v širá kola.

Karel Jaromír Erben

## 6. PŘESNĚJŠÍ TEORIE ŠÍŘENÍ NAPĚŤOVÝCH VLN V PRUŽNÝCH TĚLESECH

### 6.1. Rayleigho korekce pro šíření podélných vln v pružném válci

Až dosud jsme zanedbávali vliv příčné kontrakce na pohyb podélných vln. Zahrneme jej nyní do výpočtu přibližnou úvahou. Budeme předpokládat, že příčný pohyb částic se děje podle stejných zákonů jako při statickém působení síly, tj. je-li poměrné prodloužení tyče ve směru její osy  $\partial u / \partial x$ , je příčné poměrné prodloužení  $-\mu (\partial u / \partial x)$ . Mění-li se tyto hodnoty s časem, pak jejich rychlosti jsou  $\partial^2 u / \partial x \partial t$ , popř.  $-\mu (\partial^2 u / \partial x \partial t)$ . Na poloměru  $r$  je tedy radiální rychlost hmotných částic  $-\mu r (\partial^2 u / \partial x \partial t)$ . Kruhový prstenec o délce  $dx$ , který má poloměr  $r$  a tloušťku  $dr$ , má hmotnost  $dm = 2\pi r dr dx \rho$  a kinetickou energii

$$d^2W = \frac{1}{2} 2\pi r dr dx \rho \left[ (-\mu r \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t})^2 + (\frac{\partial u}{\partial t})^2 \right] \quad (6.1)$$

<sup>x)</sup> Zde  $g$  značí gravitační zrychlení ( $9,81 \text{ m s}^{-2}$ ).

Druhý člen v hranaté závorce odpovídá osové složce pohybu. Integrujeme-li podle poloměru od  $r = 0$  do  $r = a$  (plný váleček má poloměr  $a$ ), dostaneme kinetickou energii v části válce omezené dvěma řezy kolnými k ose a vzdálenými  $dx$

$$dW = \frac{1}{4} \pi a^4 \rho \left( \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \pi a^2 \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (6.2)$$

Potenciální energie napjatosti je v tomto elementu

$$dU = \frac{\sigma^2}{2E} dV = \frac{1}{2E} \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \pi a^2 dx = \frac{1}{2} E \pi a^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (6.3)$$

Podle Hamiltonova principu má vymizet variace integrálu

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dx} \right) dx = I. \quad (6.4)$$

Za posuv  $u(x,t)$  dosadíme variovanou funkci  $u(x,t) + \delta u(x,t)$  a dostaneme integrál  $I + \delta I$ . Variaci  $\delta u(x,t)$  a její první derivaci zvolíme na okrajích intervalu nulovou. Jde přitom o "nekonečně malou" veličinu, takže zanedbáním malých členů vyššího řádu dostaneme z rovnic (6.4), (6.2) a (6.3)

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \pi a^4 \rho \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} dx + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \pi a^2 \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} dx - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} E \pi a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Nyní budeme integrovat per partes, takže např.

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} dx dt &= \left[ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx \right]_{t_1}^{t_2} \\ - \iint \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dt &= \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta u dt \right]_{x_1}^{x_2} + \\ + \iint \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \delta u dt dx &= \iint \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \delta u dt dx. \end{aligned}$$

Tzv. "okrajové členy" v hranatých závorkách vymizí. Podobně

$$\iint \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} dx dt = - \iint \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx dt,$$

$$\iint \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx dt = - \iint \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u dx dt.$$

Celkem bude

$$\delta I = \iint \left[ \frac{1}{2} \pi a^4 \rho \mu^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \pi a^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \right. \\ \left. + E \pi a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \delta u dx dt. \quad (6.6)$$

Má-li mít  $I$  stacionární hodnotu, musí variace  $\delta I$  vymizet. Protože  $\delta u(x, t)$  je libovolná funkce (až na nepodstatná omezení), musí vymizet výraz v hranaté závorce (6.6). To dá pohybovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mu^2 a^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.7)$$

Až na člen se smíšenou derivací je totožná s rovnicí (2.4). Právě tento člen způsobuje, že řešení (2.6), popisující bezdisperzní šíření napěťových vln, už neplatí. Co tedy platí? Zkusme substituci

$$u(x, t) = u_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right], \quad (6.8)$$

představující nikoli už obecnou vlnu, ale sinusovou o vlnové délce  $\lambda$  (změní-li se  $\lambda$  o  $\lambda$ , změní se argument sinu o celou periodu). Dosazením (6.8) do (6.7) a krácením dostaneme pro fázovou rychlost vlny

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \left( \frac{\pi \mu a}{\lambda} \right)^2}}. \quad (6.9)$$

Stejný vztah bychom dostali i pro kosinovou vlnu. Je-li poměr  $a/\lambda$  malý, můžeme použít přibližné vzorce

$$\sqrt{1 + 2\varepsilon} \doteq 1 + \varepsilon; \quad \frac{1}{1 + \varepsilon} \doteq 1 - \varepsilon \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

a dostaneme

$$c = \left[ 1 - \pi^2 \mu^2 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.10)$$

To je známá Rayleighova korekce, kterou se opravuje vzorec (2.5). I tato korekce je však jen přibližná a platí pro malé poměry  $a/\lambda$ , asi pro  $0 < a/\lambda < 0,7$ .

Co je důsledkem této korekce? Především to, že rychlost šíření napěťové vlny závisí na její frekvenci. O frekvenci má smysl hovořit jenom u periodické vlny; rovnice (6.8) popisuje sinusovou vlnu. Protože každou periodickou obecnou vlnu lze rozložit na její harmonické složky (ve Fourierovu řadu), postačí rovnice (6.8) k popisu šíření i této vlny. Neperiodickou vlnu lze pak považovat za periodickou s nekonečnou periodou; místo Fourierovy řady dostaneme Fourierův integrál. Pomocí zákona superpozice tedy dostaneme z rovnice (6.8) zákon šíření jakékoli napěťové vlny. Vlna se však nebude šířit jako celek, který zachovává tvar, ale vznikne disperze (rozptyl). Složky s velmi dlouhou vlnou (s malou frekvencí) se budou šířit rychlostí  $\sqrt{E/\rho}$  souhlasně s jedno-rozměrnou teorií, kterou jsme popsali v odst. 2.1. Složky s kratší vlnovou délkou (s větší frekvencí) se budou šířit pomaleji. Tím se tvar vlny zkreslí ("roztáhne se"). Např. původně obdélníkový napěťový puls se změní přibližně na lichoběžníkový s drobnými superponovanými oscilacemi, vzniklými vzájemným posunutím harmonických složek různých frekvencí.

## 6.2. Napěťové vlny v ohýbaném nosníku

V odst. 2.3 jsme odvodili pro tento případ pohybovou rovnici

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -i^2 c_m^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (6.11)$$

Zkusíme, zda a jak se může nosníkem šířit sinusová vlna

$$w(x,t) = w_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right] \quad (6.12)$$

Dosazením a krácením vyjde pro rychlost šíření této vlny vztah

$$c = 2\pi \left( \frac{i}{\lambda} \right) c_m \quad (6.13)$$

Rychlost sinusové (a obdobně i kosinusové) vlny tedy opět závisí na její frekvenci (na vlnové délce).\*) Tentokrát je rychlost nepřímě úměrná vlnové délce, takže nekonečně krátká vlna by se v nosníku šířila nekonečně velkou rychlostí. To není fyzikálně možné. Paradox vzniká nepřesností rovnice (6.11). Vezmeme-li v úvahu rotační setrvačnost průřezů, dostaneme místo (6.13) přesnější vztah

---

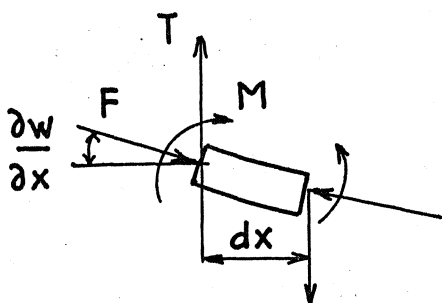
\*) Mezi frekvencí  $f$  a vlnovou délkou  $\lambda$  platí známý vztah  $f = \frac{c}{\lambda}$ .



$$\frac{c}{c_m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi i}\right)^2}} \quad (6.14)$$

Ani tento vzorec však není přesný a platí pro vlny delší než asi  $20 i$  ( $i$  = poloměr setrvačnosti průřezu =  $\sqrt{J/A}$ ). Další korekci, a to na vliv smyku (posouvající síly), zavedl do výpočtu Timošenko. Tím se však již nebudeme zabývat.

### 6.3. Elastická stabilita tenké tyče namáhané osovým rázem



Obr. 6.1

Šíří-li se tlaková napěťová vlna v dlouhé tenké tyči, může nastat její vybočení vzpěrem, a to ještě dříve, než vlna dojde až na konec tyče. Dynamický děj bude tedy odlišný od statického. Abychom jev alespoň přibližně prozkoumali, budeme předpokládat, že tyčí se šíří tlaková napěťová vlna o konstantní velikosti  $\sigma = -F/A$ . Pro ohyb tyče platí v tom případě rovnice (2.19) doplněná o člen respektující vliv osové síly (obr. 6.1). Vertikální výslednice osových sil bude v rovnováze se setrvačnou silou

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dm = \frac{\partial}{\partial x} \left( T - F \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

čili

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} A \rho dx = \frac{\partial T}{\partial x} dx - \frac{\partial}{\partial x} \left( F \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \quad (6.15)$$

Místo (2.22) pak dostaneme

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left( F \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (6.16)$$

V oblasti zasažené tlakovou vlnou je síla  $F$  konstantní, takže

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6.17)$$

kde

$$\alpha = \frac{EJ}{\rho A}, \quad \beta = \frac{F}{\rho A}$$

Je-li tyč přímá, je  $W \equiv 0$ . Jakmile však vznikne nějaká "porucha" přímého tvaru, pak pro její harmonickou sinusovou složku můžeme psát

$$W = W_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right] \quad (6.18)$$

Obdobnou rovnici bychom mohli napsat i pro kosinusovou složku. Z rovnice (6.18) dosadíme do (6.17) a dostaneme (po zkrácení)

$$c^2 = \alpha \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \beta \quad (6.19)$$

Krátké vlny se budou šířit velkou rychlostí (zanedbáme-li  $\beta$ , dostaneme vztah (6.13)), ale delší vlny se budou šířit rychlostí menší, až vlny o kritické délce  $\lambda_{krit}$  a delší se nebudou šířit vůbec. Pro kritickou délku dostaneme anulováním pravé strany (6.19)

$$\lambda_{krit} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 2\pi \sqrt{\frac{EJ}{F}} = 2\pi i \sqrt{\frac{E}{|\sigma|}} \quad (6.20)$$

Dosadíme-li sem podle (2.5) a (2.9)  $F = \rho c v A$ , vyjde

$$\lambda_{krit} = 2\pi \sqrt{\frac{EJ}{\rho c v A}} = 2\pi i \sqrt{\frac{c}{v}} \quad (6.21)$$

Zde opět

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

Jde-li o tyč kruhového průřezu, bude  $i = \frac{d}{4}$ ,  $d$  značí průměr tyče. Pak

$$\lambda_{krit} = \frac{\pi}{2} d \sqrt{\frac{c}{v}} \quad (6.22)$$

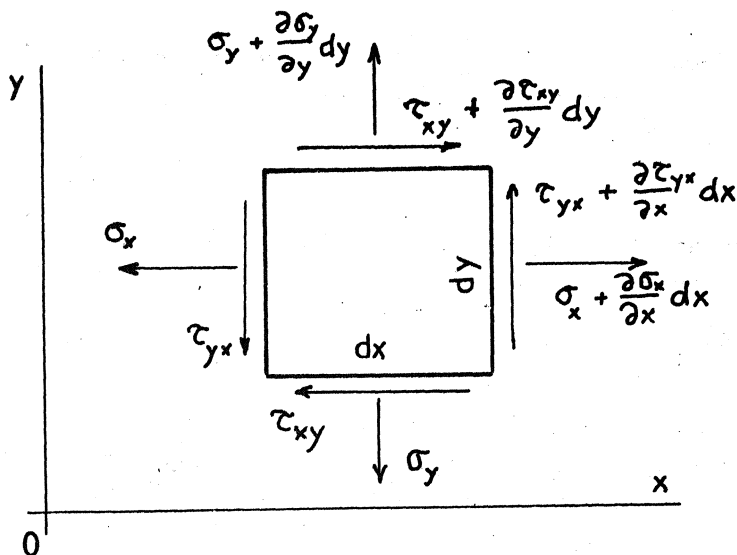
Nešíření vln  $\lambda \geq \lambda_{krit}$  znamená, že se průhyb bude na místě zvětšovat. Tím se vyznačuje ztráta elastické stability prutu. Protože na mezi elastické stability je  $\lambda = \lambda_{krit}$ , budeme moci na vybočující tyči pozorovat stojící vlnu právě této délky.

Tato úvaha platí i pro elasticko-plastickou oblast namáhání, nahradíme-li modul pružnosti Kármánovým "redukovaným" modulem

$$E_k = \frac{4EE'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2}, \quad \text{kde } E \text{ značí Youngův modul a } E' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

podle obr. 7.3.

#### 6.4. Šíření napěťových vln v podmínkách rovinné napjatosti



Obr. 6.2

Přejdeme nyní k dvou-  
rozměrným úlohám a začneme  
s tenkou deskou, v níž lze  
předpokládat rovinnou nap-  
jatost. Tloušťku desky  
zvolíme za délkovou jed-  
notku. V souřadnicích  $x$ ,  
 $y$  jsou nenulové pouze  
složky napjatosti  $\sigma_x$ ,  
 $\sigma_y$  a  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$   
(obr. 6.2). Kromě uvedených  
napětí připojíme k elemen-  
tu ještě objemovou setr-  
vačnou sílu, jejíž složka  
do směru osy  $x$ , popř.  $y$   
je

$$-\rho dx dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{popř.} \quad -\rho dx dy \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Tak převedeme dynamickou úlohu na statickou úlohu o rovnováze sil podle d'Alembertova principu. Podmínka rovnováhy sil do směru  $x$  dává

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{xy} dx = \rho dx dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

a po úpravě

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6.23)$$

Obdobně

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (6.24)$$

kde  $u$ ,  $v$  jsou posuvy ve směru  $x$ ,  $y$ . Z Hookeova zákona

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = G \gamma_{xy} = G \gamma_{yx}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Složky přetvoření lze vyjádřit pomocí posuvů

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.26)$$

Dosazením (6.26) do rovnic (6.25) a odtud do (6.23) a (6.24) vyjde

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + G \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right],$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + G \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]. \quad (6.27)$$

Podle rovnic (6.27) je možné bezdisperzní šíření podélných vln libovolným směrem rychlostí  $c_m$ . Za předpokladu, že

$$u = f(x - c_m t),$$

$$v = g(y - c_m t) \quad (6.28)$$

dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{atd.}$$

a z rovnic (6.27) vyjde - z obou rovnic stejně -

$$c_m = \sqrt{\frac{E}{(1-\mu^2)\rho}} \quad (6.29)$$

To je však vztah (2.31). Pro příčnou vlnu platí, že

$$u = f(y - c_t t),$$

$$v = g(x - c_t t) \quad (6.30)$$

a z rovnic (6.27) vyjde

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6.31)$$

stejně jako dříve. Neomezeným rovinným prostředím se může šířit obecná podélná i příčná vlna, aniž vzniká disperze.

### 6.5. Šíření napěťových vln v podmínkách rovinného přetvoření

Na rozdíl od minulého odstavce je nyní  $\epsilon_z = 0$ , takže

$$\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y). \quad (6.32)$$

Hookeův zákon dává

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \varepsilon_x + 3\lambda e, \\ \sigma_y &= 2G \varepsilon_y + 3\lambda e, \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (6.33)$$

kde

$$e = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \dots \quad (6.34)$$

Přítom

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = K - \frac{2}{3} G \quad (6.35)$$

značí Lamého elasticou konstantu,  $K$  modul objemové stlačitelnosti,  $G$  modul pružnosti ve smyku. Rovnice (6.33) nyní nastoupí místo rovnic (6.25). Místo (6.27) pak po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v, \end{aligned} \quad (6.36)$$

kde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Dosadíme-li do (6.36) ze vzorců (6.28) pro podélnou vlnu - s použitím (6.26) -, dostaneme pro rychlost šíření podélné vlny vztah

$$c_m = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} \quad (6.37)$$

To je však rovnice (2.33). Smyková vlna (6.30) je ekvivolumentrická, neboť  $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , takže v rovnicích (6.36) odpadne na pravé straně první člen. Rychlost šíření smykových vln vyjde

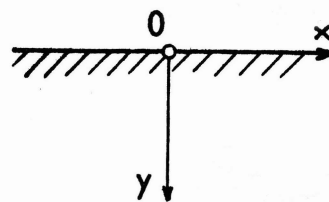
$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6.38)$$

shodně s dřívějším.

Lze dokázat, že stejně druhy vln - podélná s rychlostí (6.37) a příčná s rychlostí (6.38) - se mohou šířit i nekonečným trojrozměrným elastickým izotropním prostředím.

## 6.6. Rayleigho povrchové vlny

Teorie šíření podélných a příčných vln nemůže vysvětlit vznik povrchového vlnění, které bylo možno pozorovat při zemětřesení, ani vznik vln na hladině moře. Tyto jevy vysvětlil Rayleigh teorií, která se týká pružného poloprostoru ohraničeného např. osou  $y = 0$  (obr. 6.3). Do rovnic (6.36) zkusíme dosadit



Obr. 6.3

$$\begin{aligned} u &= U(y) \sin k(x-ct), \\ v &= V(y) \cos k(x-ct), \end{aligned} \quad (6.39)$$

kde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Rovnice (6.39) představují eliptický pohyb

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1, \quad (6.40)$$

kde  $a = U(y)$ ,  $b = V(y)$ . Všechny body, které ležely původně na rovnoběžce  $y = \text{konst.}$ , opisují shodné elipsy, avšak s fázovým posuvem, který se mění ve směru osy  $x$ , takže tyto eliptické pohyby bodů vytvářejí geometricky vlnu o délce  $\lambda$ , pohybující se fázovou rychlostí  $C$  ve směru osy  $x$  (obr. 6.4). Dosazením (6.39) do (6.36) dostaneme dvě rovnice, které můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} c_2^2 U'' + k^2(c_1^2 - c_2^2)U - k(c_1^2 - c_2^2)V' &= 0, \\ c_1^2 V'' + k^2(c_1^2 - c_2^2)V + k(c_1^2 - c_2^2)U' &= 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Přitom jsme označili

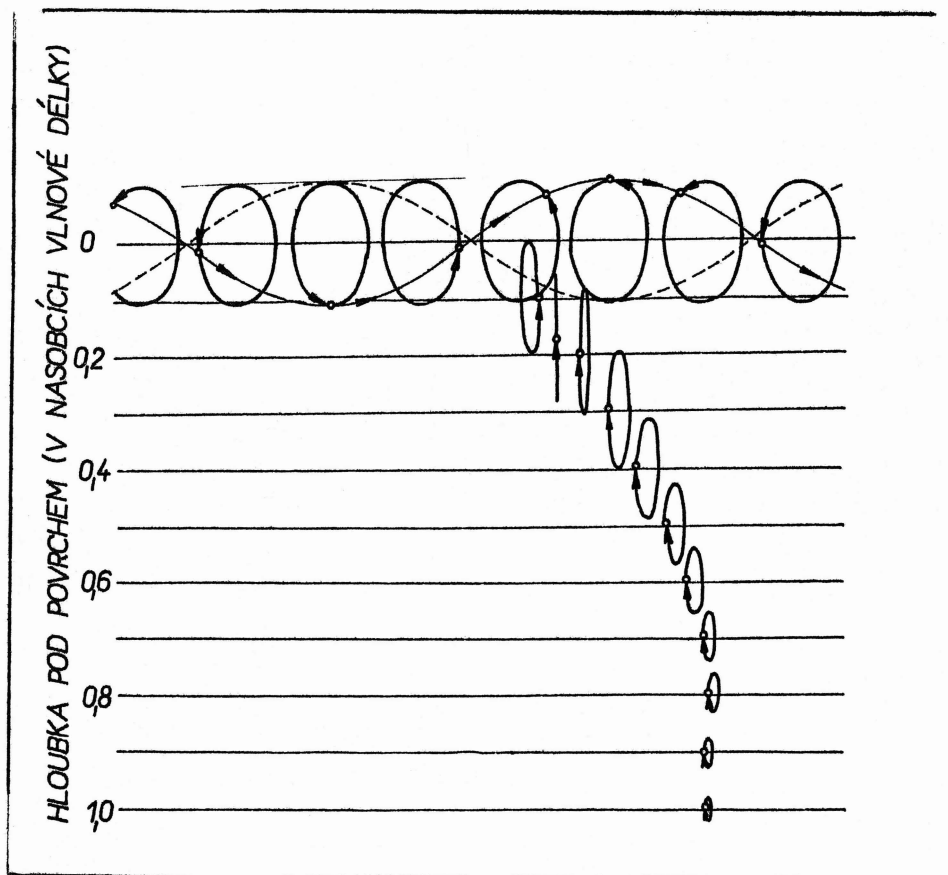
$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho} \quad (6.42)$$

čtverce rychlostí podélné a příčné vlny. Oběma rovnicím (6.41) můžeme vyhovět substitucí

$$\begin{aligned} U &= A k e^{-\alpha y} + B \beta e^{-\beta y}, \\ V &= A \alpha e^{-\alpha y} + B k e^{-\beta y}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

zvolíme-li

$$\alpha = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}, \quad \beta = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}. \quad (6.44)$$



Obr. 6.4

O tom se můžeme přesvědčit zvlášť pro každý partikulární integrál

$$\{U; V\} = \{k e^{-\alpha y}; \alpha e^{-\alpha y}\}, \quad \text{popř.} \quad \{\beta e^{-\beta y}; k e^{-\beta y}\}.$$

Každá z těchto dvojic funkcí splňuje rovnice (6.41) identicky. Integrační konstanty  $A$ ,  $B$  vyjdou z okrajových podmínek

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{yx} = 0 \quad \text{pro} \quad y = 0. \quad (6.45)$$

Tyto podmínky vyžadují, aby

$$\begin{aligned} 2G V'(0) + 3\lambda [k U(0) + V'(0)] &= 0, \\ U'(0) - k V(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Dosažením (6.43) do (6.46) vyjde soustava homogenních rovnic, které však jsou lineárně závislé, a tedy řešitelné pro poměr  $A/B$ , je-li determinant soustavy nulový. Anulováním determinantu dostaneme podmínku pro neznámou rychlost  $C$  (po úpravě pomocí definičních vztahů mezi elastickými konstantami)

$$\left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^2 = 4 \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_1^2}} \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_2^2}} \quad (6.47)$$

Vyjde

$$\frac{A}{B} = - \frac{k^2 + \beta^2}{2k\alpha} = - \frac{2 - \frac{C^2}{C_2^2}}{2\sqrt{1 - \frac{C^2}{C_1^2}}} \quad (6.48)$$

Protože

$$\frac{C_1^2}{C_2^2} = \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} \quad (6.49)$$

závisí  $C$  podle (6.47) na Poissonově čísle. Pro  $\mu = 0,25$  vyjde  $C \doteq 0,92 \cdot C_2$ , pro  $\mu = 0,4$  je  $C \doteq 0,94 C_2$ . Vždy vyjde  $C < C_2$ . Protože  $\alpha$ ,  $\beta$  jsou reálná kladná čísla, zmenšuje se amplituda  $U$  i  $V$  exponenciálně se souřadnicí  $y$ . Z rovnic (6.44) je zřejmé, že  $\alpha$  a  $\beta$  jsou tím větší, čím menší je vlnová délka  $\lambda$  (a tedy  $k$  větší). Vlny o krátké délce zasahují do menší hloubky pod povrch (obdoba "skin"-efektu, známého z elektrotechniky).

Postup, jakým se eliptické pohyby částic skládají v povrchovou vlnu, je zřejmý z obr. 6.4. Zároveň tam lze pozorovat, jak se mění eliptické dráhy částic při postupu do nitra tělesa.

## 6.7. Aplikace v hydrologii a seizmologii

Ideální kapalina není schopna přenášet smyková napětí, takže  $G = 0$ , a tedy i  $C_2 = 0$ . Protože  $E = 2(1+\mu)G$ , je také  $E = 0$ . U ideální kapaliny nemá smysl mluvit o modulech pružnosti. Kdyby mohl - snad v beztláčeném prostředí - existovat volný sloupec ideální kapaliny, nepotřebovali bychom k jeho pomalému stlačení žádnou sílu. Objem by se přitom nezměnil, takže  $\mu = 0,5$ . Lamého konstanta (6.35) pak nabývá neurčité velikosti (nula dělená nulou) a limituje se k modulu stlačitelnosti  $K$ . Podle (6.37) je pak rychlost šíření podélných vln v ideální stlačitelné kapalině

$$c_n = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (6.50)$$

Příčné vlny se v ideální kapalině nemohou šířit.

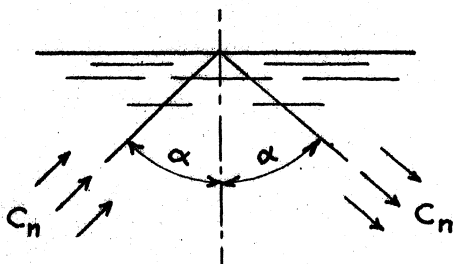


Protože smyková napětí vymizí identicky, zmenší se Mohrova kružnice napjatosti na bod, takže  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$  (Pascalův zákon). To souhlasí se vztahem (6.32) pro  $\mu = 0,5$ .

Rychlost šíření Rayleighovy vln - tedy i mořských vln - je v ideální kapalině nulová. Skutečná kapalina - voda - má však určitou viskozitu, která za pohybu umožňuje přenos malých smykových napětí. Proto je ve skutečnosti rychlost šíření povrchových vln na vodě od nuly různá, avšak malá.

V seizmologii se podélné vlny nazývají P-vlny (push waves) a příčné S-vlny (shake waves).\*) Seizmograf zaznamenává nejprve P-vlny, které se šíří nejrychleji, pak S-vlny a naposledy Rayleighovy vlny. Protože se P-vlny a S-vlny šíří prostorem, kdežto Rayleighovy vlny se šíří jen při povrchu, zmenšuje se intenzita Rayleighovy vln se vzdáleností od zdroje jen pomalu. Proto tyto vlny působí při zemětřesení největší škody. Rayleighovy vlny v povrchu zemské kůry se však poněkud liší od schématu na obr. 6.4. Vertikální složka pohybu je více nebo méně potlačena a také horizontální složka bývá téměř rovnoběžná s čelem vlny, místo aby byla k němu kolmá. Love ukázal, že tyto odchylky lze vysvětlit závislostí modulů pružnosti a hustoty zemské kůry na hloubce. Tyto pozměněné Rayleighovy vlny se tedy nazývají Loveho vlny.

#### 6.8. Odraz a lom podélných a příčných vln



Obr. 6.5

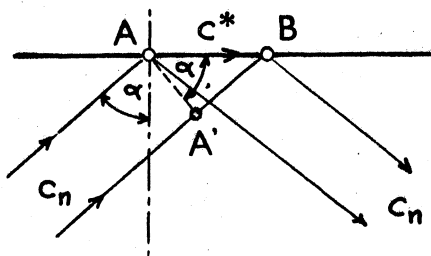
Nejjednodušší je odraz podélných vln ve vodní nádrži o hladinu, nad níž je vakuum. V ideální kapalině nemohou vzniknout příčné vlny a přestup vln do vakua není možný. Pak platí jednoduchý zákon o úhlu odrazu, který se rovná úhlu dopadu, což je zřejmé z obr. 6.5.

Šířeli-li se podélná vlna rychlostí  $c_m$  podle (6.50), je možno na hladině pozorovat fázovou rychlost

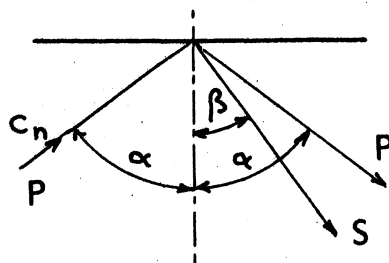
$$c^* = \frac{c_m}{\sin \alpha} \quad (6.51)$$

To je zřejmé z obr. 6.6. Než bod  $A'$  rovinné vlny  $AA'$  dorazí do bodu  $B$ , uplyne čas  $\Delta t = A'B/c_m$ . Za stejný čas uběhne na hladině vlna dráhu  $AB = c^*\Delta t$ . Vyloučením  $\Delta t$  z obou posledních rovnic dostaneme (6.51).

\*) To push = strkat, to shake = třást, viklat.



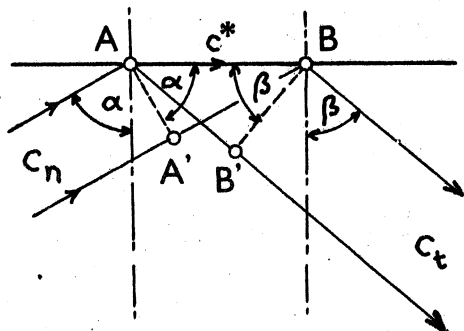
Obr. 6.6



Obr. 6.7

V našich úvahách se omezíme na rovinné vlny a na rovinná rozhraní. Dopadá-li pružným poloprostorem na rozhraní s vakuem podélná vlna, odrazí se na povrchu tak, že odražená vlna obsahuje podélnou i příčnou složku (obr. 6.7).

Pro odraženou podélnou vlnu platí stejný zákon jako na obr. 6.5 a vztah (6.51). Pro příčnou vlnu dostaneme podle obr. 6.8 rovnici



Obr. 6.8

$$c^* = \frac{c_t}{\sin \beta} \quad (6.52)$$

Za dobu  $\Delta t = AB / c^*$  urazí totiž odražený paprsek dráhu  $AB' = c_t \Delta t$  (rovinná vlna se odrazí opět jako rovinná a povrchová fázová rychlost je společná pro obě odražené vlny). Srovnáním (6.51) a (6.52) dostaneme

$$\frac{c_n}{\sin \alpha} = \frac{c_t}{\sin \beta} \quad (6.53)$$

Protože  $c_t < c_n$ , je též  $\beta < \alpha$ .

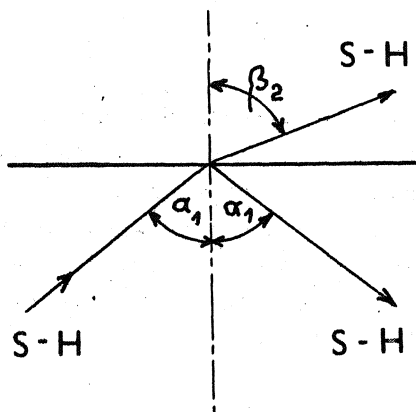
V obecném případě půjde o rozhraní mezi dvěma elastickými prostředími. Na něm nastane odraz i lom. Příslušné zákony odvodíme z těchto skutečností:

1. na rozhraní jsou společné normálové i tečné posuvy,
2. na rozhraní jsou spojitá normálová i tečná napětí,
3. na rozhraní je společná fázová rychlost.

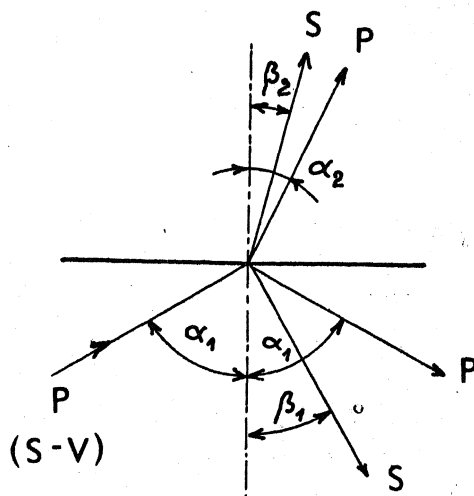
U příčných vln je třeba rozlišovat dvě složky (dva zvláštní případy): složku S - H polarizovanou tak, že posuvy se dějí horizontálně (kolmo k nákreš), a složku S - V, u níž se posuvy dějí ve vertikální rovině (v rovině nákreš). Složka S - H má tu vlastnost, že její částice nekonají při šíření vlny žádný pohyb, který by měl složku rychlosti kolmo k rozhraní; tato složka tedy nemůže budít žádnou podélnou vlnu, ale zase jenom S - H vlny

(obr. 6.9). Označíme-li veličiny spjaté s dolním poloprostorem indexem 1, s horním 2, dostaneme pro odraženou a lomenou vlnu

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_{t1}} = \frac{\sin \beta_2}{c_{t2}} \quad (6.54)$$



Obr. 6.9



Obr. 6.10

Nejobecnější případ nastává, dopadá-li na rozhraní dvou elastických prostředí P-vlna nebo S-V vlna. V tom případě vznikají vždy dvě odražené i dvě lomené vlny, jedna podélná a druhá příčná (obr. 6.10). Z podmínky, že fázová rychlost na rozhraní je pro všechny vlny společná, vyjde

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_{m1}} = \frac{\sin \alpha_2}{c_{m2}} = \frac{\sin \beta_1}{c_{t1}} = \frac{\sin \beta_2}{c_{t2}} \quad (6.55)$$

Zatím co zní tu slova strohá  
a těžkopádný rým,  
přibíhá krása bosonohá,  
lehoučká jako dým.

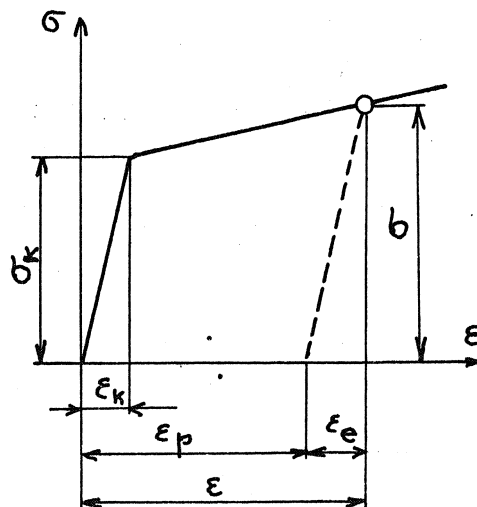
Jaroslav Seifert

## 7. ŠÍŘENÍ NAPĚŤOVÝCH VLN V ELASTICKO-PLASTICKÉM MATERIÁLU

### 7.1. Podélné vlny v prizmatické tyči s bilineárním pracovním diagramem

V tomto odstavci zobecníme poznatky z odst. 2.1 na případ materiálu, u něhož lze vztah mezi napětím a poměrným prodloužením, popř. zkrácením

jednoduše definovat. Z experimentů je známo, že tento vztah závisí obecně i na teplotě a na deformační rychlosti. Nyní však budeme předpokládat, že v mezích našich příkladů bude tato závislost neměnná. Nejjednodušším případem je materiál s bilineární charakteristikou podle obr. 7.1. Pro napětí  $\sigma < \sigma_k$  platí Hookeův zákon  $\epsilon = \sigma/E$  a rychlost šíření elastické podélné vlny je jako dříve  $\sqrt{E/\rho}$ . Když však napětí  $\sigma$  přestoupí hodnotu  $\sigma_k$ , čemuž odpovídá rychlost částic  $v > \sigma_k/\rho c$ , čili  $v > \sigma_k/\sqrt{E\rho}$ , vznikne poměrné prodloužení (popř. zkrácení, jde-li o tlakovou vlnu)



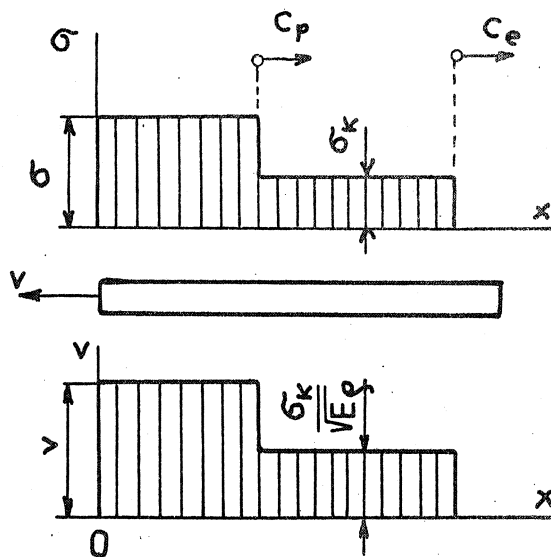
Obr. 7.1

$$\epsilon = \epsilon_p + \epsilon_e \quad (7.1)$$

Část  $\epsilon_e$  je elastická (při odlehčení vratná), část  $\epsilon_p$  plastická (trvalá). Mezi napětím  $\sigma$  a prodloužením  $\epsilon$  nyní platí vztah

$$(\sigma - \sigma_k) = P(\epsilon - \epsilon_k), \quad (7.2)$$

kde  $P$  je modul plasticity. Tento vztah platí jen pro  $\sigma > \sigma_k$  ( $\epsilon > \epsilon_k$ ). Modul plasticity  $P$  má v rovnici (7.2) stejnou funkci jako modul pružnosti  $E$  v rovnici (2.3). Proto se plastické napětí (napětí v plastické oblasti) šíří rychlostí  $\sqrt{P/\rho}$ . Situaci znázorňuje obr. 7.2. Levý konec dlouhé tyče je náhle uveden do pohybu rychlostí  $v > \sigma_k/\sqrt{E\rho}$ . V tyči vzniknou dvě vlny, jedna elastická s napětím  $\sigma_k$  a s poměrným prodloužením  $\epsilon_k$ , druhá plastická s napětím  $\sigma - \sigma_k$  a s poměrným prodloužením  $\epsilon - \epsilon_k$ . První se šíří rychlostí  $c_e = \sqrt{E/\rho}$ , druhá  $c_p = \sqrt{P/\rho}$ . Obě vlny jsou tahové a skládají se, takže tam, kde proběhly obě vlny, je napětí  $\sigma$  a poměrné prodloužení  $\epsilon$ .



Obr. 7.2

## 7.2. Podélné vlny v tyči s obecným pracovním diagramem

Na element tyče, jehož průřez v nezátíženém stavu byl  $A$ , délka  $dx$  a hmotnost  $\rho$ , působí v zatíženém stavu vlevo síla

$$\bar{F} = \bar{A} \bar{\sigma}, \quad (7.3)$$

kde  $\bar{F}$ ,  $\bar{A}$  a  $\bar{\sigma}$  se vztahují na deformovaný element. Vpravo působí síla

$$\bar{F} + d\bar{F} = \bar{A} \bar{\sigma} + d(\bar{A} \bar{\sigma}). \quad (7.4)$$

Pohybová rovnice zní

$$(\bar{F} + d\bar{F}) - \bar{F} = d(\bar{A} \bar{\sigma}) = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7.5)$$

Zde  $u(x, t)$  je posuv elementu, který byl původně - v nezátíženém stavu v čase  $t = 0$  - ve vzdálenosti  $x$  od zvoleného počátku.

Pracovní diagram je závislost působící síly na prodloužení tyče. Sílu v něm převádíme na napětí dělením původním průřezem  $A$ . Tak dostaneme jmenovité napětí

$$\sigma = \frac{\bar{F}}{A} = \frac{\bar{A} \bar{\sigma}}{A}. \quad (7.6)$$

Z rovnice (7.6) dosadíme do (7.5); dostaneme

$$d(A\sigma) = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7.7)$$

Tento vztah budeme krátit  $A$  a dělit rovnicí

$$d\epsilon = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (7.8)$$

Vyjde

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{\rho}{\partial^2 u / \partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.9)$$

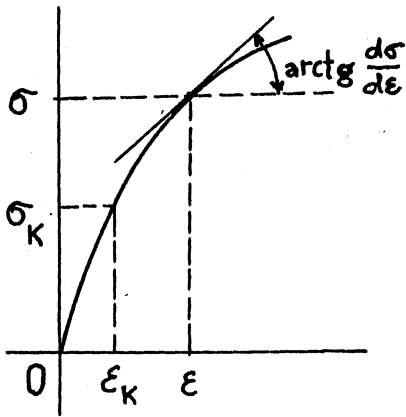
čili

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.10)$$

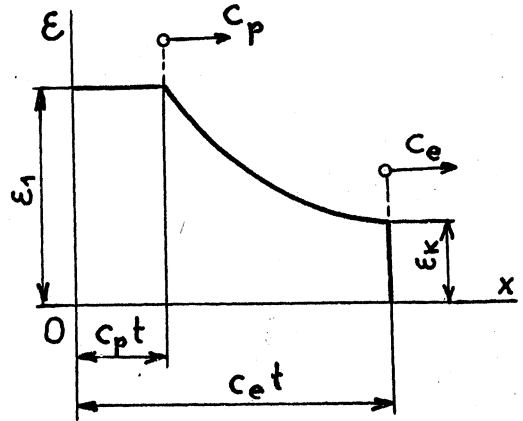
Srovnáním s rovnicí (2.4) dospějeme k závěru, že rychlost šíření podélných vln je

$$c_p = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \quad (7.11)$$

Derivace  $d\sigma/d\varepsilon$  je směrnicí čáry  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  na obr. 7.3.



Obr. 7.3



Obr. 7.4

Jak bude nyní vypadat vlna vzbuzená náhlým pohybem koncového průřezu prizmatické tyče

$$v = 0 \quad \text{pro } t \leq 0, \quad (7.12)$$

$$v = \text{konst.} \quad \text{pro } t > 0 ?$$

Vzbudí-li plastická vlna největší poměrnou deformací  $\varepsilon_1$  (a tedy napětí  $\sigma_1$ ), dostaneme tvar napěťové vlny, znázorněný na obr. 7.4. Na osu pořadnic jsou vynesena poměrná prodloužení, na osu úseček vzdálenost od levého (zatíženého) konce tyče. Čelo elastické vlny dospělo do vzdálenosti  $c_e t$ .

Nyní vyšetříme, jaká je rychlost částic tyče. Než napěťová vlna s poměrným prodloužením  $\varepsilon$  projde elementem  $dx$ , uplyne doba

$$dt = \frac{dx}{c_p} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}} \quad (7.13)$$

Za tuto dobu se impulsem síly  $d(A\sigma)$  změní hybnost elementu o hmotnosti  $\rho A dx$  o hodnotu

$$(\rho A dx) dv = d(A\sigma) dt. \quad (7.14)$$

Z posledních dvou rovnic dostaneme

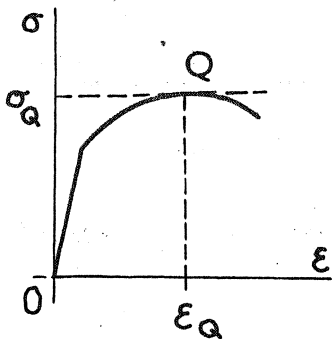
$$dv = \frac{d\sigma}{\rho \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}} \quad (7.15)$$

a integrací

$$v = \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\varepsilon_1} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_1} c_e \sqrt{\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} d\varepsilon \quad (7.16)$$

Pro bilineární vztah podle obr. 7.1 vyjde

$$v = \varepsilon_k \sqrt{\frac{E}{\rho}} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_k) \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \varepsilon_k c_e + (\varepsilon_1 - \varepsilon_k) c_p \quad (7.17)$$



Obr. 7.5

Podle (7.16) je rychlost částice plastické vlny dána integrálem, který lze vyčíslit jen pro  $d\sigma/d\varepsilon \geq 0$ . Jakmile bychom se v pracovním diagramu dostali až k bodu Q, v němž je  $d\sigma/d\varepsilon = 0$  (obr. 7.5), nemůže se rychlost teoreticky dále zvětšovat a vznikne lom. Tak dospíváme k pojmu Kármánovy kritické rychlosti

$$v_{krit} = \int_0^{\varepsilon_Q} c_e \sqrt{\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} d\varepsilon \quad (7.18)$$

Nemá-li se tyč porušit, musí být  $v < v_{krit}$ .

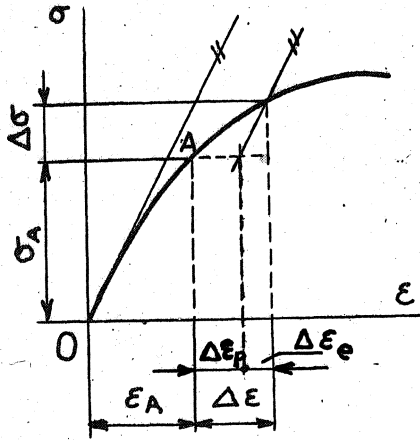
Při tomto výpočtu značně zjednodušujeme daný problém. Ve skutečnosti nebudou posuvy malé, jak jsme až dosud předpokládali, a křivka  $\sigma(\varepsilon)$  nebude nezávislá na rychlosti deformace.

### 7.3. Interakce zatěžující a odlehčující vlny

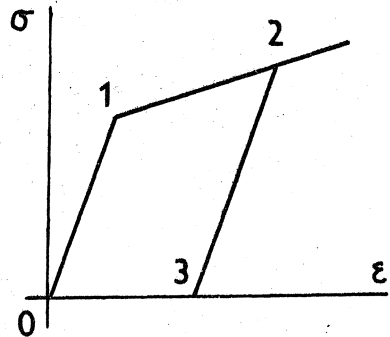
Jak jsme již uvedli v souvislosti s obr. 7.1, má poměrné přetvoření vždy svou elastickou vratnou složku. Plastická složka  $\varepsilon_p$  může chybět (chybí, je-li  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_k$ ), ale elastická nikoli. Kdybychom tyč s pracovním diagramem podle obr. 7.6 předepnuli tak, aby v ní vzniklo jmenovité napětí  $\sigma_A$ , a pak náhle zatížili o hodnotu  $\Delta\sigma$ , nebude se tyč šířit vlna  $\Delta\sigma$  rychlostí  $c_p$  podle (7.11), ale opět dvě vlny, jedna elastická rychlostí  $c_e$  a druhá plastická rychlostí  $c_p$ ; celkový vzrůst  $\Delta\varepsilon$  poměrného prodloužení se rozdělí na elastickou a plastickou složku

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p \quad (7.19)$$

Elastická složka se šíří rychlostí  $c_e$  jako "elastická návěšt". Nedostaneme ji z naší zjednodušené teorie, ale byla prokázána experimentálně.

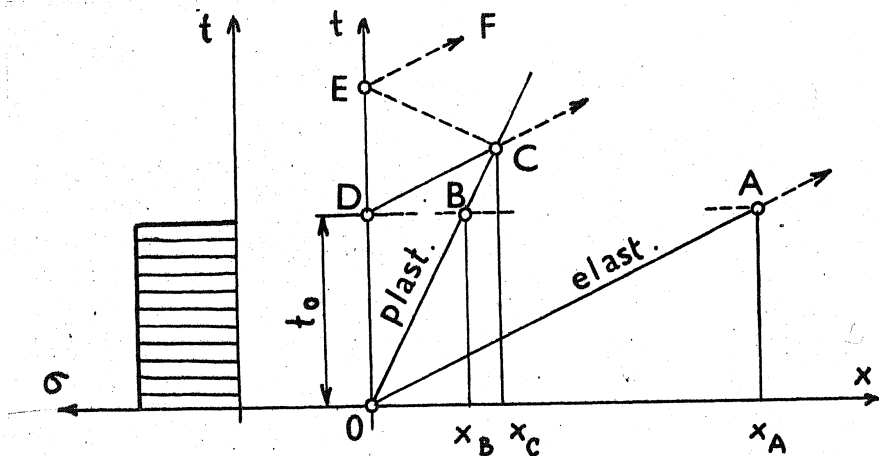


Obr. 7.6



Obr. 7.7

Nastane-li náhlé odlehčení, začne se tyč šířit odlehčující vlna, která je elastická a šíří se proto rychlostí  $c_e$ . Ukážeme to na příkladu tyče vyrobené z materiálu s bilineárním pracovním diagramem (obr. 7.7). Šíření napěťových vln budeme sledovat na obr. 7.8. Během zatížení konce tyče napětím  $\sigma = \text{konst.}$  ( $\sigma > \sigma_k$ ) v čase  $0 < t < t_0$  pronikne elastická vlna do vzdálenosti  $x_A$  a plastická vlna do vzdálenosti  $x_B$ . V okamžiku  $t = t_0$  se od



Obr. 7.8



konce tyče začne šířit odlehčující elastická vlna a dostihne plastickou vlnu ve vzdálenosti  $x_c$ . Nyní mohou nastat různé alternativy podle toho, o kolik napětí  $\sigma$  převyšovalo mez kluzu  $\sigma_k$ . Plastická vlna může vymizet, takže se budou dále šířit už jen elastické vlny, nebo může dál v jiné intenzitě pokračovat. Elastická vlna jednak pokračuje ve směru DC, jednak se od průřezu  $x = x_c$  odrazí zpět k volnému konci (CE). Tam se může opět odrazit (EF). Podrobnosti lze sledovat jen tak, že kromě napětí sledujeme i změny rychlostí hmotných částic tyče.

Jako příklad uvedeme ráz tyče vyrobené z materiálu s bilineárním pracovním diagramem (tj. s lineárním zpevněním v plastické oblasti namáhání). Tyč se pohybuje rychlostí  $v$  a narazí na tuhou nepohyblivou stěnu. V okamžiku rázu se začnou šířit od konce tyče dvě vlny, elastická ( $c_e = \sqrt{E/\rho}$ ) a plastická ( $c_p = \sqrt{P/\rho}$ ).

Tak vzniknou v čase  $0 < t < l/c_e$  tři oblasti; v první je materiál v klidu a je plasticky tvářen, v druhé se ještě pohybuje, avšak prošla jím už elastická vlna, která pohyb zpomalila, a v třetí má tyč ještě původní rychlost, materiál je tam dosud nepřetvořen a bez napětí.

Má-li vzniknout plastická deformace, musí být  $v > \sigma_k / \rho c_e$ . Protože  $c_e = \sqrt{E/\rho}$ ,  $\epsilon_k = \sigma_k / E$ , můžeme také napsat, že  $v > c_e \epsilon_k$ . Rychlost v druhé oblasti je

$$v_2 = v - c_e \epsilon_k \quad (7.20)$$

Příchodem plastické vlny se tato rychlost změní v nulovou. Napětí v této vlně proto vyjde (tlakové napětí bereme nyní jako kladné)

$$\sigma_1 - \sigma_k = (v - c_e \epsilon_k) \rho c_p \quad (7.21)$$

a výsledné napětí v první (plastické) oblasti

$$\sigma_1 = \sigma_k + \rho c_p (v - c_e \epsilon_k) \quad (7.22)$$

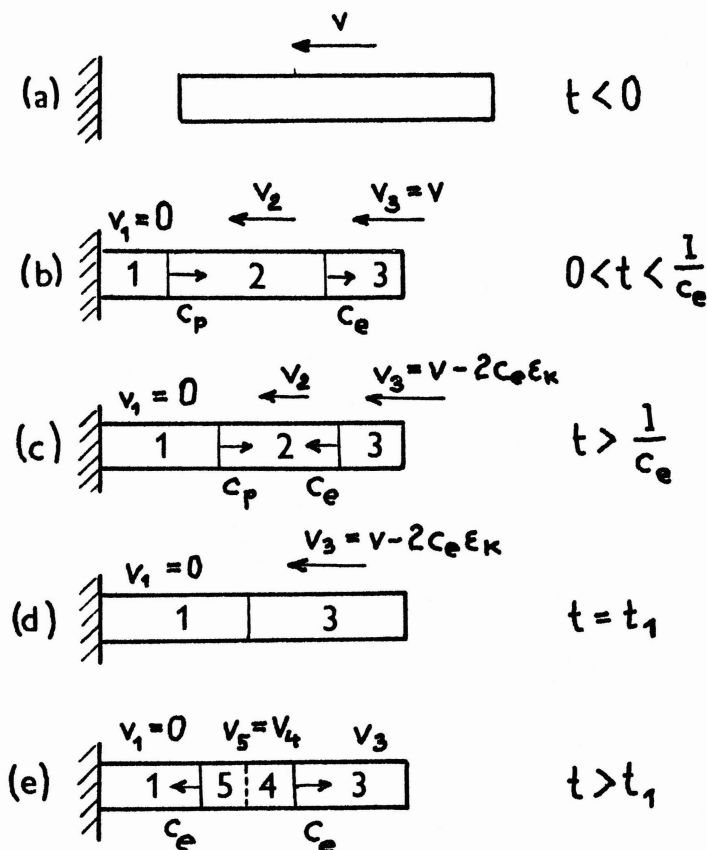
Celkové poměrné zkrácení v téže oblasti je

$$\epsilon_1 = \epsilon_k + \frac{\sigma_1 - \sigma_k}{P} = \epsilon_k + \frac{v - c_e \epsilon_k}{c_p} \quad (7.23)$$

Podle obr. 7.1 má toto poměrné zkrácení dvě složky, elastickou a plastickou. Pro plastickou platí vztah

$$\epsilon_p = \left( \epsilon_k + \frac{v - c_e \epsilon_k}{c_p} \right) - \frac{\sigma_1}{E} = \frac{c_e^2 - c_p^2}{c_e^2 c_p} (v - c_e \epsilon_k) \quad (7.24)$$

Při úpravě poslední rovnice jsme použili (7.22) a definiční vztahy pro rychlosti šíření vln. Nyní je stav tyče takový, jaký je znázorněn na obr. 7.9 b.



Obr. 7.9

$$x_1 = \frac{2c_p}{c_p + c_e} l, \quad t_1 = \frac{2l}{c_p + c_e} \quad (7.27)$$

Skutečná délka plasticky tvářené oblasti je  $x_1(1 - \epsilon_p)$ . V okamžiku  $t = t_1$  je situace taková, jako kdyby na vetknutou, předem rovnoměrně stlačenou tyč 1 (s tlakovým napětím  $\sigma$ ) narazila tyč 3 rychlostí  $v - 2c_e \epsilon_k$ , popř.  $-(2c_e \epsilon_k - v)$ . Od průřezu  $x = x_1$  se začnou šířit vlny, o nichž budeme předpokládat, že jsou obě elastické. V oblastech jimi zasažených musí být rychlost hmotných částic stejná. Označíme ji  $v_4$  a budeme předpokládat, že směřuje vpravo. Pak změna rychlosti v oblasti 1, kterou projde odražená elastická vlna, je právě  $v_4$ . Odlehčující napětí je proto  $\rho c_e v_4$ , takže v oblasti 1 bude po průchodu odražené elastické vlny napětí

$$P(\epsilon - \epsilon_k) + E \epsilon_k - \rho c_e v_4.$$

V okamžiku  $t = l/c_e$  dorazí elastická vlna na volný konec tyče a odrazí se jako tahová, tedy odlehčující vlna. Za ní bude oblast 3 opět bez napětí (obr. 7.9 c). Rychlost částic, která se průchodem původní elastické vlny zmenšila o  $c_e \epsilon_k$ , se po průchodu odražené elastické vlny zmenší rovněž o  $c_e \epsilon_k$ , takže bude (v oblasti 3 na obr. 7.9 c)

$$v_3 = v - 2c_e \epsilon_k \quad (7.25)$$

Odražená vlna se setká s čelem plastické vlny v okamžiku  $t = t_1$ . Z rovnic pro dráhu vlnových čel

$$\begin{aligned} x_1 &= c_p t_1 \\ 2l - x_1 &= c_e t_1 \end{aligned} \quad (7.26)$$

vypočteme

Vlna, která se šíří vpravo do oblasti 3, způsobí změnu rychlosti  $v - 2c_e \epsilon_k + v_4$ , tedy napětí  $\rho c_e (v - 2c_e \epsilon_k + v_4)$ . Podle zákona o akci a reakci se musí obě tato napětí rovnat, takže

$$\rho c_e (v - 2c_e \epsilon_k + v_4) = P(\epsilon - \epsilon_k) + E \epsilon_k - \rho c_e v_4. \quad (7.28)$$

S použitím (7.23) vyjde odtud pro čtvrtou a pátou oblast (obr. 7.9 e)

$$v_4 = \frac{(c_p - 3c_e)(v - c_e \epsilon_k)}{2c_e} + v. \quad (7.29)$$

Ve čtvrté oblasti vyjde elastické poměrné prodloužení

$$\epsilon_4 = \frac{\rho c_e}{E} (v - 2c_e \epsilon_k + v_4). \quad (7.30)$$

Po úpravě

$$\epsilon_4 = \frac{c_p + c_e}{2c_e^2} (v - c_e \epsilon_k). \quad (7.31)$$

Nemá-li vzniknout plastická vlna, musí být  $\epsilon_4 \leq \epsilon_k$ . Odtud dostaneme podmínku pro rychlost

$$v \leq c_e \epsilon_k \left( 1 + \frac{2c_e}{c_e + c_p} \right). \quad (7.32)$$

V páté oblasti bude poměrné zkrácení

$$\begin{aligned} \epsilon_5 &= \epsilon_1 - \frac{\rho c_e v_4}{E} = \left( \epsilon_k + \frac{v - c_e \epsilon_k}{c_p} \right) - \frac{\rho c_e v_4}{E} = \\ &= \left( \epsilon_k + \frac{v - c_e \epsilon_k}{c_p} \right) - \frac{\rho c_e}{E} \left[ \frac{(c_p - 3c_e)(v - c_e \epsilon_k)}{2c_e} + v \right] = \\ &= (v - c_e \epsilon_k) \frac{2c_e^2 + c_e c_p - c_p^2}{2c_e^2 c_p}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Elastické vlny se budou nyní odrážet tak dlouho, až se přeruší dotyk se stěnou a pak ještě tak dlouho, až se utlumí. Plastické deformace se však už nezmění a zasáhnou pouze část tyče o délce  $x_1$ .

Není-li podmínka (7.32) splněna, vznikne další plastická vlna, která se bude šířit od průřezu  $x = x_1$  vpravo, až se setká s další odlehčující vlnou v průřezu  $x = x_2$  (obr. 7.10). Plastickými deformacemi bude v tom případě zasažena část tyče o délce  $x_2$ . V řezech  $x = x_1$ , popř.  $x = x_2$  vzniká nespojitost přetvoření tyče.

Abychom měli nějakou určitější představu o rychlosti, s jakou nastane plastické přetvoření tyče v délce  $x_1$  (jediné místo nespojitosti přetvoření je v průřezu  $x = x_1$ ), dosadíme do odvozených rovnic hodnoty příslušné měkké oceli. Pro ni přibližně platí, že  $E = 100 \text{ P}$ ,  $c_e = 5000 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_p = 500 \text{ m s}^{-1}$ ,  $G_K = 200 \text{ MN m}^{-2}$ ,  $\epsilon_K = 10^{-3}$ . Má-li rychlost  $v$  vzbudit plastické deformace a přitom vyhovět nerovnosti (7.32), musí být

$$1 < \frac{v}{c_e \epsilon_K} < 3 - \frac{2 \frac{c_p}{c_e}}{1 + \frac{c_p}{c_e}}$$

čili

$$1 < \frac{v}{5} < 3 - \frac{0,2}{1,1}$$

Odtud okrouhle

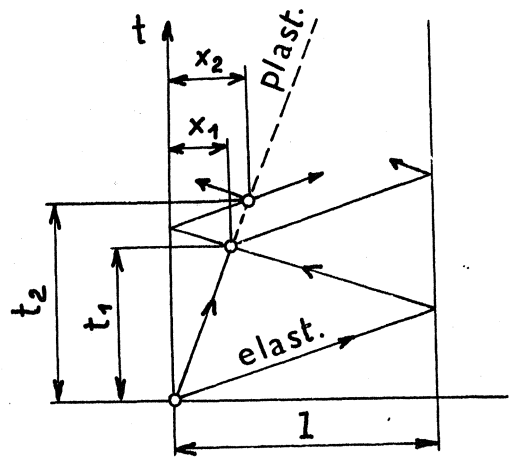
$$5 < v < 14 \quad [\text{m s}^{-1}] .$$

To jsou poměrně malé rychlosti. Rychlost  $5 \text{ m s}^{-1}$  má těleso, které padá z klidu volným pádem z výšky  $h = v^2/2g = 25/20 = 1,25 \text{ m}$ , rychlosti  $14 \text{ m s}^{-1}$  přísluší výška volného pádu necelých  $10 \text{ m}$ .

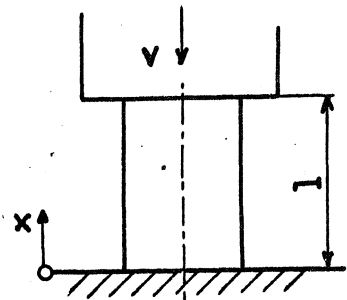
Pro délku zplastizované oblasti dostaneme z rovnice (7.27)  $x_1 = 0,18 \ell$ .

#### 7.4. Příklad dynamického tváření válce na rychloběžném lisu

V tomto odstavci naznačíme rozbor přetváření krátkého válce, který stojí na tuhé a nepohyblivé kovářině a je tvářen rovinným čelem tuhého lisovadla, které se pohybuje konstantní rychlostí  $v$  (obr. 7.11). V okamžiku, kdy se čelo lisovadla dotkne horní základny válce, vzniknou rázem dvě vlny, elastická a plastická. Na čele elastické vlny je tlakové napětí  $G_A = G_K$ . V části válce, kudy prošla tato vlna (ale ještě neprošla plastická vlna), je rychlost částic



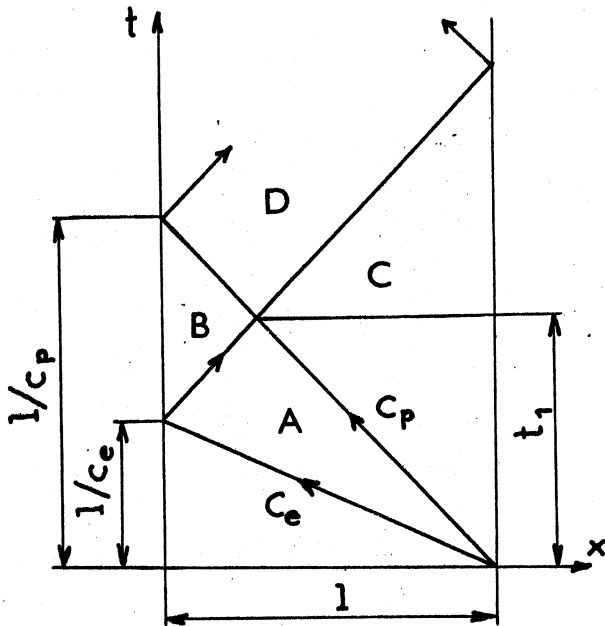
Obr. 7.10



Obr. 7.11

$$v_A = \frac{\sigma_k}{\rho c_e} = \frac{\sigma_k}{E} \frac{E}{\rho} \frac{1}{c_e} = c_e \epsilon_k \quad (7.34)$$

Index A se vztahuje k obr. 7.12, v němž můžeme sledovat šíření jednotlivých vln.



Obr. 7.12

Plastická vlna, která je pomalejší, vzbuzuje v částicích materiálu rychlost  $v_c = v$  (totožnou s rychlostí lisovadla). Tím vznikne změna rychlosti  $v_c - v_A = v - c_e \epsilon_k$ , spojená se vznikem napětí

$$\sigma_c - \sigma_k = \rho c_p (v - c_e \epsilon_k) \quad (7.35)$$

Odtud

$$\sigma_c = \sigma_k \left(1 - \frac{c_p}{c_e}\right) + \rho c_p v \quad (7.36)$$

Když elastická vlna dorazí až k základně, odrazí se opět jako tlaková vlna. Protože napětí dopadající vlny se rovná mezi kluzu, je odražená vlna čistě plastická. Rychlost  $v_A$  se přitom změní na nulu (materiál se zastaví). Proto

$$\sigma_B - \sigma_k = \rho c_p v_A = \rho c_p c_e \epsilon_k \quad (7.37)$$

a odtud

$$\sigma_B = \sigma_k \left(1 + \frac{c_p}{c_e}\right) \quad (7.38)$$

Plastická vlna postupující od kovadliny se setká s plastickou vlnou postupující od lisovadla ve vzdálenosti  $x = x_1$  a v čase  $t = t_1$ . Z kinematických vztahů

$$(t_1 - l/c_e) c_p = x_1, \quad t_1 c_p = l - x_1 \quad (7.39)$$

vyjde

$$x_1 = \frac{1}{2} l \left(1 - \frac{c_p}{c_e}\right), \quad t_1 = \frac{1}{2} l \left(\frac{1}{c_p} + \frac{1}{c_e}\right) \quad (7.40)$$

Protože stlačování materiálu pokračuje, existují od okamžiku  $t = t_1$  v tělese již jen plastické vlny. Pokud se pohyb lisovadla nezastaví, pokračuje stlačování materiálu, během něhož se plastické vlny na obou koncích vždy znovu odrážejí, jak je naznačeno na obr. 7.12. Když se lisovadlo zastaví, šíří se od něho odlehčující elastická vlna.

V oblasti D (obr. 7.12) bude rychlost  $v_D$ . Uvážíme-li změnu rychlosti částic v intervalu  $0 < x < x_1$  při přechodu z oblasti B do D, usoudíme, že tlakové napětí

$$\sigma_D = \sigma_B + \rho c_p v_D. \quad (7.41)$$

Pro částice z intervalu  $x_1 < x < l$  bude platit, že

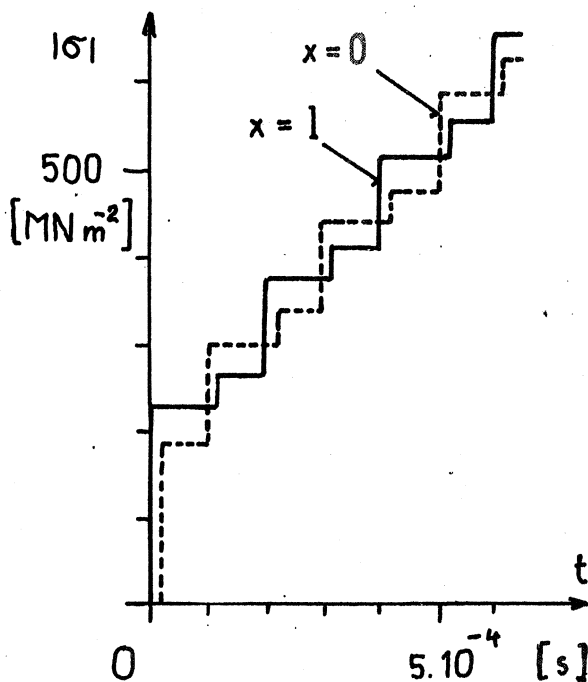
$$\sigma_D = \sigma_C + \rho c_p (v - v_D). \quad (7.42)$$

Z rovnic (7.41) a (7.42) vyjde po úpravě

$$v_D = v - c_e \epsilon_k, \quad (7.43)$$

$$\sigma_D = \sigma_k + \rho c_p v.$$

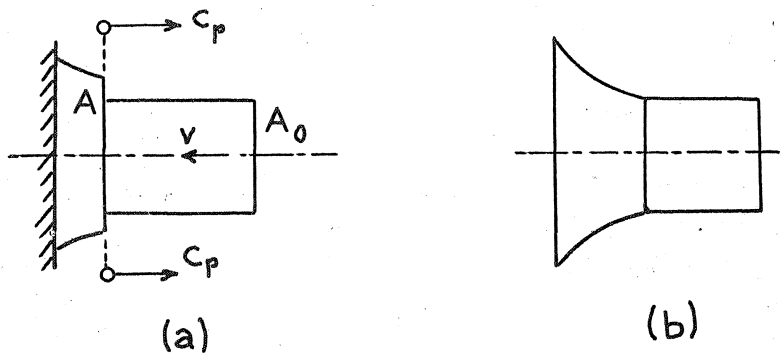
Tak bychom mohli v rozboru pokračovat. Zajímavé je, že tlakové napětí v dotyku s lisovadlem neroste spojitě, ačkoli rychlost lisovadla je konstantní. To je zřejmé z příkladu na obr. 7.13, platného pro váleček z měkké oceli,  $l = 5 \text{ cm}$ ,  $\sigma_k = 170 \text{ MN m}^{-2}$ ,  $v = 18 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_e = 5000 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_p = 500 \text{ m s}^{-1}$ . Čárkovaně je vyznačen průběh napětí mezi válečkem a nepohyblivou kovadlinou. Napětí tam začne vzrůstat teprve od okamžiku dopadu elastické vlny ( $t = l/c_e$ ). Je zřejmé, že děj, který se jeví pozorovateli ve větším časovém intervalu jako spojitý, probíhá ve skutečnosti nespojitě, po stupních.



Obr. 7.13

### 7.5. Pěchování válce při nárazu velkou rychlostí na tuhou stěnu

Dopadne-li válec z materiálu s bilineární charakteristikou kolmo na nepohyblivou tuhou stěnu velkou rychlostí (je-li např. proti stěně vystřelen), jsou plastické deformace tak velké, že se podstatně změní profil tělesa. Jeho tvar bude záviset na velikosti zpevnění materiálu (na poměru modulů  $P/E$ ). Je-li zpevnění malé, bude i rychlost  $c_p$  malá ve srovnání s rychlostí, jakou se šíří elastické vlny. U materiálu bez zpevnění by se plastické vlny vůbec nemohly šířit, plastické deformace by se koncentrovaly jen na konci tyče. Elastické vlny by za dobu trvání rázu proběhly tyčí mnohokrát; na volném konci by při každém odrazu měnily znaménko, takže část nezasažená plastickými vlnami by se ve větším časovém úseku jevila pozorovateli jako absolutně tuhá. Materiál by tedy bylo možno představit si jako tuho-plastický. Při přechodu do plastické oblasti by se začal tvářet, element válcového tvaru by se začal zkracovat a zároveň rozšiřovat, takže na hranici plastické oblasti by vznikla nespojitosť průřezu (obr. 7.14 a). Pro takový případ se teorie zjednoduší.



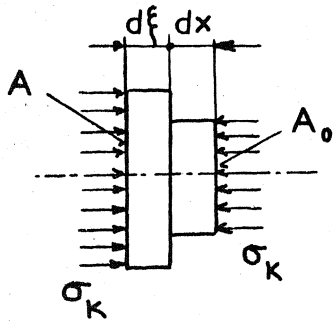
Obr. 7.14

Čelo plastické vlny má plošný obsah  $A$  a pohybuje se vpravo rychlostí  $c_p$ . Zbývající tuhá část válce má průřez  $A_0$  a pohybuje se vlevo rychlostí  $v$ . Proniká tedy čelem plastické vlny relativní rychlostí  $c_p + v$ . Protože objem se plastickou deformací zmatelně nemění, platí vztah

$$A_0 (c_p + v) = A c_p. \quad (7.44)$$

Je-li zpevnění malé, jak předpokládáme, je napětí na čele plastické vlny  $G_k$ . Když element o hmotnosti

$$dm = \rho A_0 (c_p + v) dt \quad (7.45)$$



Obr. 7.15

projde čelem plastické vlny, působí na něj síla  $\Delta F$  podle obr. 7.15

$$\Delta F = \sigma_k (A - A_0). \quad (7.46)$$

Rychlost hmotných částic přitom klesne z hodnoty  $v$  na nulu, takže věta o impulsu a hybnosti dá

$$v dm = \Delta F dt, \quad (7.47)$$

odkud

$$\rho A_0 (c_p + v) v = \sigma_k (A - A_0). \quad (7.48)$$

Element o délce  $dx$  je komprimován na  $d\xi$  (obr. 7.15), takže jeho poměrné zkrácení je

$$\varepsilon = \frac{dx - d\xi}{dx} = 1 - \frac{d\xi}{dx}. \quad (7.49)$$

Protože  $A_0 dx = A d\xi$ , je též

$$\varepsilon = 1 - \frac{d\xi}{dx} = 1 - \frac{A_0}{A}. \quad (7.50)$$

Z rovnice (7.44) dostaneme rychlost čela plastické vlny

$$c_p = \frac{v}{\frac{A}{A_0} - 1}. \quad (7.51)$$

Dosadíme-li tento vztah do (7.48), zjednoduší se tato rovnice na tvar

$$\rho v^2 \left[ 1 + \frac{1}{\frac{A}{A_0} - 1} \right] = \sigma_k \left( \frac{A}{A_0} - 1 \right). \quad (7.52)$$

S použitím (7.50) odtud vypočteme

$$\frac{\rho v^2}{\sigma_k} = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon}. \quad (7.53)$$

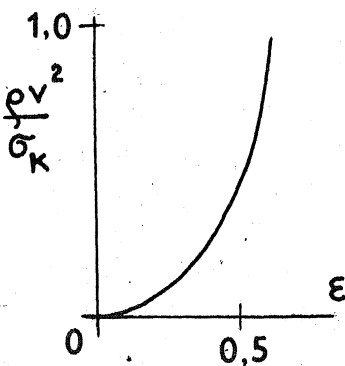
Tento vztah je znázorněn na obr. 7.16.

Změní-li se za čas  $dt$  délka elementu  $dx$  na  $d\xi$ , je rychlost čela plastické vlny

$$c_p = \frac{d\xi}{dt}. \quad (7.54)$$

Za stejnou dobu se tuhá část válce posune o  $ds$ , takže

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (7.55)$$



Obr. 7.16

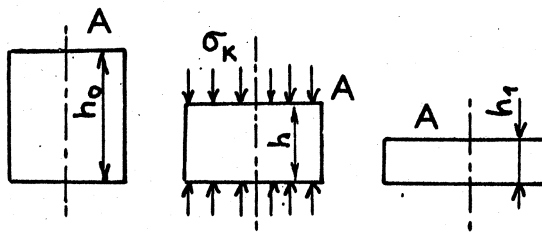


Poznamenejme, že

$$dx = (c_p + v) dt = ds + d\xi$$

Je-li nějaký váleček z ideálně tuho-plastického materiálu stlačován tak, že jeho výška  $h_0$  a průřez  $A_0$  se změní na  $h_1$  a  $A_1$  (obr. 7.17), je k tomu třeba práce

$$\begin{aligned} W &= -\sigma_k \int A dh = -\sigma_k \int A d\left(\frac{h_0 A_0}{A}\right) = \\ &= \sigma_k A_0 h_0 \int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = \sigma_k A_0 h_0 \ln \frac{A}{A_0} \end{aligned} \quad (7.56)$$



Obr. 7.17

V případě podle obr. 7.15 je  $h_0 = dx$ , takže práce pohlcená plastickou deformací za čas  $dt$  dává výkon

$$\frac{dW}{dt} = (A_0 \sigma_k \ln \frac{A}{A_0}) \frac{dx}{dt} = A_0 (c_p + v) \sigma_k \ln \frac{A}{A_0} \quad (7.57)$$

Práce  $dW$  se zmaří na úkor kinetické energie  $\frac{1}{2} v^2 dm$  a na úkor práce, kterou vykoná tlaková síla  $\sigma_k A_0$  při posuvu  $ds$ . To dá příkon

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} v^2 \frac{dm}{dt} + \sigma_k A_0 \frac{ds}{dt} \quad (7.58)$$

S použitím (7.45) a (7.55) odtud vyjde

$$\frac{dW}{dt} = A_0 v \left[ \frac{1}{2} \rho v (c_p + v) + \sigma_k \right] \quad (7.59)$$

Porovnáním (7.57) a (7.59) s použitím (7.51) dostaneme

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \sigma_k \left[ \ln \frac{A}{A_0} - \left(1 - \frac{A_0}{A}\right) \right] \quad (7.60)$$

Konečně vzhledem k rovnici (7.50)

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = G_k \left[ \ln \frac{1}{1-\varepsilon} - \varepsilon \right]. \quad (7.61)$$

Počáteční rychlost  $v(0) = v_0$  dá počáteční přetvoření  $\varepsilon_0$ , pro něž

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 = G_k \left[ \ln \frac{1}{1-\varepsilon_0} - \varepsilon_0 \right]. \quad (7.62)$$

Pro tuhou část válce o délce  $X$  platí pohybová rovnice

$$G_k A_0 = -\rho A_0 X \left( v \frac{dv}{ds} \right). \quad (7.63)$$

Derivováním (7.61) dostaneme

$$\rho v \frac{dv}{ds} = G_k \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{ds}. \quad (7.64)$$

Dosazením tohoto výrazu do (7.63) a jednoduchou úpravou vyjde

$$-\frac{ds}{X} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} d\varepsilon. \quad (7.65)$$

Avšak  $ds = \varepsilon dx$ ,  $dx = -dX$ , takže

$$\frac{dX}{X} = \frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (7.66)$$

Odtud

$$X = \frac{C}{1-\varepsilon}. \quad (7.67)$$

S počáteční podmínkou  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , když  $X = l$  (= délka nedeformovaného válečku), máme

$$X = l \frac{1-\varepsilon_0}{1-\varepsilon}. \quad (7.68)$$

V okamžiku, kdy se přetváření materiálu skončí, je  $\varepsilon = 0$  a délka nepřetvořené části

$$X(\varepsilon=0) = X_0 = l(1-\varepsilon_0). \quad (7.69)$$

Pro přetvořenou část máme podle (7.49) a (7.68)

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = 1-\varepsilon = \frac{l(1-\varepsilon_0)}{X} = -\frac{dX}{dX}, \quad (7.70)$$

odkud

$$\xi = -l(1 - \varepsilon_0)(\ln X + C'). \quad (7.71)$$

S počáteční podmínkou  $\xi = 0$ , když  $X = l$ , vyjde

$$\xi = -l(1 - \varepsilon_0) \ln \frac{X}{l} = l(1 - \varepsilon_0) \ln \frac{l}{X}. \quad (7.72)$$

Dosadíme-li sem z rovnice (7.68), máme konečně

$$\xi = l(1 - \varepsilon_0) \ln \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon_0}. \quad (7.73)$$

Na konci přetváření

$$\xi(\varepsilon=0) = \xi_0 = l(1 - \varepsilon_0) \ln \frac{1}{1 - \varepsilon_0} \quad (7.74)$$

a celková délka přetvořeného válce

$$L = X_0 + \xi_0 = l(1 - \varepsilon_0) \left(1 + \ln \frac{1}{1 - \varepsilon_0}\right). \quad (7.75)$$

Nyní už můžeme určit tvar přetvořeného válce. Z rovnice (7.62) vypočteme numericky  $\varepsilon_0$  a z rovnice (7.73) průběh  $\xi = \xi(\varepsilon)$ . S použitím (7.50) dostaneme vztah mezi  $\xi$  a poměrem průřezů  $A/A_0$ . Typický tvar přetvořeného válce je znázorněn na obr. 7.14 b. Z tohoto obrázku je zřejmé, že diskontinuita průřezů na čele plastické vlny po dokončení rázového děje vymizí.

V teorii, kterou jsme zde vyložili, existuje určitý rozpor jako důsledek přijatých zjednodušení úlohy. Při sestavování rovnice (7.47) jsme předpokládali nespojitost průřezů vyznačenou na obr. 7.15, ale při výpočtu přetvárné práce (7.56) jsme předpokládali spojitou změnu průřezu (obr. 7.17). Důsledkem této inkonzistence je, že pro rychlost šíření plastické vlny dostáváme z naší teorie dva různé vztahy.

První z nich plyne z rovnic (7.50) a (7.51), z nichž

$$c_p = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} v \quad (7.76)$$

a po dosazení za  $v$  z rovnice (7.61)

$$c_p = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \sqrt{2 \left( \ln \frac{1}{1 - \varepsilon} - \varepsilon \right)} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}. \quad (7.77)$$

Druhý vztah dostaneme z rovnic (7.76) a (7.53). Vyjde

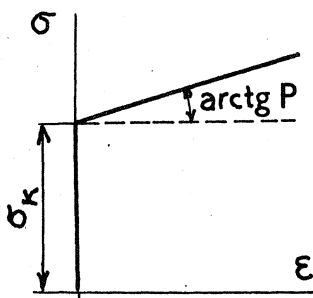
$$c_p = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\sigma_k \varepsilon^2}{\rho(1-\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{\sigma_k}{\rho}} \cdot \sqrt{1-\varepsilon} \quad (7.78)$$

Oba poslední vztahy se shodují jen pro malá  $\varepsilon$ . Jinak vychází z rovnice (7.78) větší hodnota než z rovnice (7.77). Rovnici (7.78) je třeba považovat za správnější, neboť k jejímu odvození jsme nepotřebovali úvahu o velikosti přetvárné práce.

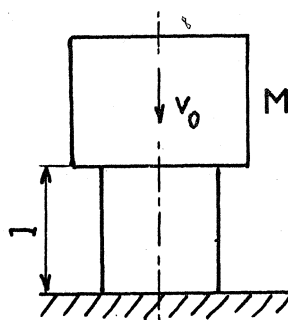
Tvar na obr. 7.14 b s konkávním profilem odpovídá experimentálním výsledkům s materiály o malém stupni zpevnění. Přetvořením vzorků s větším zpevněním vzniká za jinak stejných podmínek tvar s konvexním profilem v přetvořené části.

#### 7.6. Ráz tuhého beranu na tuho-plastickou tyč

Budeme předpokládat, že na krátkou tyč, spočívající na tuhé a nepohyblivé kováčtině, udeří tuhý beran s počáteční rychlostí  $v_0$  a hmotností  $M$ . Materiál tyče je tuho-plastický s lineárním zpevněním (obr. 7.18). Při dopadu beranu (obr. 7.19) vznikne jednak elastická vlna, která má u tuho-plastického materiálu nekonečnou rychlost a tlakové napětí  $\sigma_k$ , jednak plastická vlna s rychlostí  $c_p = \sqrt{P/\rho}$  a s tlakovým napětím za čelem vlny  $\sigma > \sigma_k$ . Rychlost částic za čelem plastické vlny se rovná rychlosti beranu. Je funkcí času, neboť pohyb beranu se bude zpomalovat. Označíme ji  $v = v(t)$ . Čas  $t$  budeme měřit od prvního dotyku beranu s válcem, o němž předpokládáme, že je ideální, tj. bez tření a s rovnoměrně rozděleným napětím v dotykové ploše.



Obr. 7.18

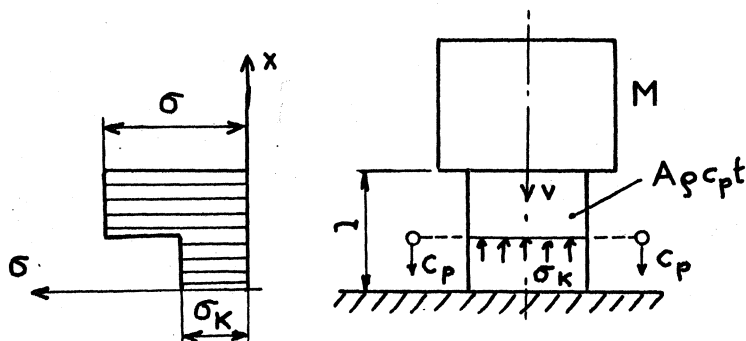


Obr. 7.19

Část zasažená pouze elastickou vlnou se teoreticky nedeformuje, neboť  $E = \infty$ . Má tedy nulovou rychlost částic. Proto se při odrazu elastické vlny na kováčtině nemůže rychlost částic změnit a zůstane nulová, dokud

danou částicí neprojde plastická vlna. Ze stejných důvodů se při odrazu elastické vlny nemůže změnit ani napětí a zůstane rovné mezi kluzu  $\sigma_k$ . Před čelem plastické vlny je tedy tyč tuhá a působí v ní tlakové napětí  $\sigma_k$  (při nulové deformaci). Situace je po čase  $t < l/c_p$  znázorněna na obr. 7.20. Za čas  $dt$  vznikne změna hybnosti

$$dH = [M + A\rho c_p(t + dt)](v + dv) - [M + A\rho c_p t]v. \quad (7.79)$$



Obr. 7.20

Časová změna hybnosti se musí rovnat působící síle, tedy

$$\frac{dH}{dt} = -\sigma_k A. \quad (7.80)$$

Dosazením z rovnice (7.79) vyjde

$$(M + A\rho c_p t) \frac{dv}{dt} + A\rho c_p v = -\sigma_k A. \quad (7.81)$$

Separací proměnných a integrací

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\sigma_k + \rho c_p v} = - \int_0^t \frac{A dt}{M + A\rho c_p t} \quad (7.82)$$

dostaneme po úpravě

$$\frac{\sigma_k + \rho c_p v}{\sigma_k + \rho c_p v_0} = \frac{M}{M + A\rho c_p t} \quad (7.83)$$

Napětí na čele plastické vlny je pak

$$\sigma = \sigma_k + \rho c_p v = \frac{M}{M + A \rho c_p t} (\sigma_k + \rho c_p v_0). \quad (7.84)$$

Zavedením hmotnosti tyče  $m = A \ell \rho$  můžeme poslední vztah upravit na

$$\sigma = (\sigma_k + \rho c_p v_0) \frac{1}{1 + \frac{m}{M} \frac{c_p t}{\ell}}. \quad (7.85)$$

Na začátku stlačování je tedy  $\sigma = \sigma_k + \rho c_p v_0$ . Pak se s časem napětí  $\sigma$  zmenšuje, až klesne na hodnotu  $\sigma_k$ . Tu se plastická vlna zastaví. Tomu odpovídá délka přetvořené části

$$x = c_p t = \frac{M c_p v_0}{A \sigma_k}. \quad (7.86)$$

Tato teorie přibližně platí, pokud  $x < \ell$ . Jinak dorazí plastická vlna až ke kovářině a odrazí se. Platnost naší teorie omezíme podmínkou

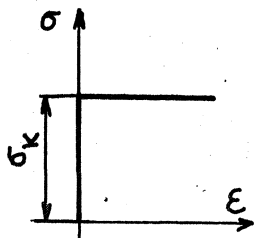
$$\frac{\sigma_k}{\rho c_p} < v_0 < \frac{A \sigma_k \ell}{M c_p}. \quad (7.87)$$

Kdyby byla rychlost  $v_0$  menší než  $\sigma_k / (\rho c_p)$ , nevznikla by žádná plastická vlna. Kdyby byla větší než  $A \sigma_k \ell / (M c_p)$ , vznikl by odraz na kovářině; tím by se teorie zkomplikovala.

Deformační charakteristika materiálu je zidealizována, skutečnost bude složitější. Také tření zasáhne rušivě do fyzikálního děje. Způsobí, že válec ztratí prizmatický tvar a napětí v průřezu nebude rozděleno rovnoměrně.

### 7.7. Centrální ráz na volný nosník konečné délky

Volný (nepodepřený) nosník délky  $2\ell$  je v okamžiku  $t = 0$  náhle zatížen uprostřed působící konstantní silou  $F$ . Předpokládáme, že jsou splněny podmínky pro rovinný ohyb nosníku. Pokusíme se předpovědět odezvu nosníku na působení dané síly  $F$ . Úlohu si zjednodušíme předpokladem, že materiál nosníku je ideálně plastický (obr. 7.21).



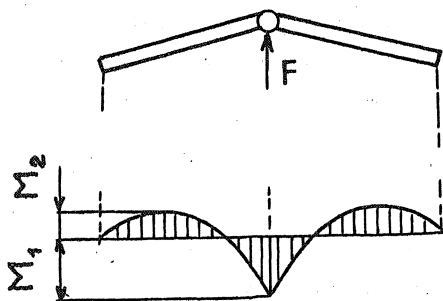
Obr. 7.21

Je-li síla  $F$  malá, urychluje rovnoměrně celý nosník. Má-li nosník průřez  $A$  a měrnou hmotnost  $\rho$ , bude platit pohybová rovnice

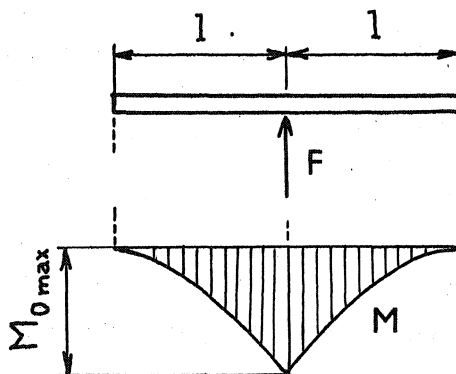
$$F = 2\ell A \rho a. \quad (7.88)$$

Zde  $a$  značí zrychlení nosníku. Setrvačné síly zatěžují nosník v tomto případě rovnoměrně (obr. 7.22). Největší ohybový moment v nosníku je

$$M_{\text{max}} = \frac{ql^2}{2} = \frac{A\rho a l^2}{2} \quad (7.89)$$



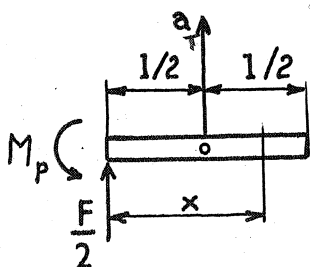
Obr. 7.22



Obr. 7.23

Dosažením ze (7.88)

$$M_{\text{max}} = \frac{Fl}{4} \quad (7.90)$$



Obr. 7.24

Jakmile tento ohybový moment dosáhne mezní hodnoty  $M_p$ , vznikne uprostřed nosníku plastický kloub s konstantním vnitřním momentem  $M_p$ . Nosník získá šípovitý tvar podle obr. 7.23. Uprostřed bude  $M_1 = M_p = \text{konst.}$  Uvolníme-li polovinu nosníku, budou na ni působit síly podle obr. 7.24. Pro zrychlení  $a_T$  těžiště T bude platit rovnice

$$\frac{F}{2} = A l \rho a_T \quad (7.91)$$

a pro úhlové zrychlení

$$\frac{Fl}{4} - M_p = \frac{A l^3 \rho}{12} \varepsilon \quad (7.92)$$

Zrychlení bodu ve vzdálenosti  $x$  od středu nosníku pak bude

$$a = a_T - \varepsilon \left(x - \frac{l}{2}\right). \quad (7.93)$$

Na element o délce  $dx$  působí setrvačná síla (kladná, působí-li proti síle  $F$ )

$$q dx = q(x) dx = \rho A dx \cdot a(x), \quad (7.94)$$

takže na jednotku délky připadá

$$q(x) = \rho A \left[ a_T - \varepsilon \left(x - \frac{l}{2}\right) \right]. \quad (7.95)$$

Vyšetříme-li pro toto zatížení průběh posouvající síly a ohybového momentu, snadno zjistíme, že ve vzdálenosti

$$\xi = l \frac{\frac{F l}{M_T}}{3 \left( \frac{F l}{M_T} - 4 \right)} \quad (7.96)$$

od středu nosníku vzniká extrémní ohybový moment (obr. 7.23)

$$M_2 = \frac{1}{12} \frac{F(l-\xi)^3}{l \xi}. \quad (7.97)$$

Když i tento moment dosáhne mezní velikosti, což se stane při síle

$$F = F_2 = \frac{12 M_T l \xi}{(l-\xi)^3}, \quad (7.98)$$

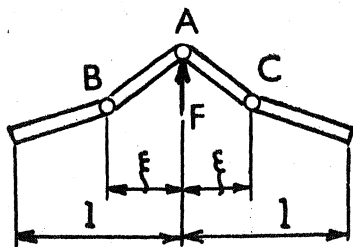
vznikne i v tomto místě plastický kloub. Dosadíme-li (7.98) do (7.96), dostaneme kubickou rovnici pro  $\xi$ , jejíž jediný reálný kořen je

$$\xi = 0,404 l. \quad (7.99)$$

Tvar nosníku je naznačen na obr. 7.25.

Dosadíme-li (7.99) do (7.98), vyjde

$$F_2 = 22,8 \frac{M_T}{l}. \quad (7.100)$$



Obr. 7.25

Při síle této velikosti se tedy právě vytvoří plastické klouby B, C (obr. 7.25). Kdyby byla síla větší než (7.100), posunuly by se plastické klouby B, C z polohy  $\xi = 0,404 l$  poněkud blíže ke středu nosníku.

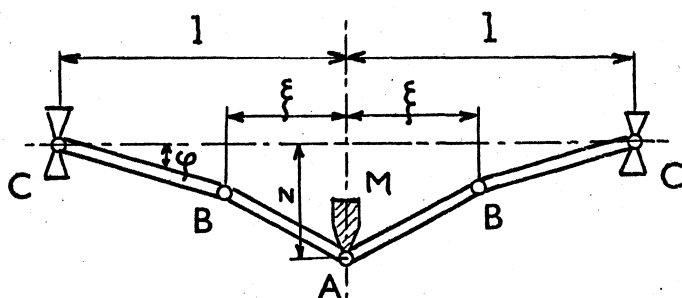


Kdyby se síla  $F$  za ohybu zmenšila, zmizely by (ztuhly by) nejprve plastické klouby  $B$ ,  $C$ , pak i kloub  $A$  a nosník by se dál pohyboval jako tuhé těleso.

### 7.8. Centrální ráz na prostě podepřený nosník

Opět budeme předpokládat, že nosník je vyroben z tuho-plastického materiálu. To znamená, že kinetická energie nosníku a energie rozptýlená v plastických kloubech je mnohem větší než energie elastické napjatosti, takže elastickou napjatost můžeme zanedbat. Zanedbáváme také eventuální zpevnění materiálu při plastických deformacích a předpokládáme materiál ideálně plastický. Jeho pracovní diagram je stejný jako v předchozím odstavci (obr. 7.21). Nosník je na koncích kloubově podepřen (s vyloučením vodorovné reakce) a uprostřed svého rozpětí je zatížen nárazem tuhého beranu, který má počáteční rychlost  $v_0$ .

Z pokusů je známo, že se střední část nosníku přetvoří do šípovitého tvaru a že ramena tohoto šípů se během rázu prodlužují, zpočátku rychle, později pomaleji, až se jejich prodlužování zastaví. Konce nosníku mimo střední šípovitou část se přitom otáčejí kolem podpor prakticky jako tuhé celky. Podle toho musíme předpokládat, že se nejprve vytvoří plastický kloub uprostřed nosníku (právě pod beranem) a pak ještě dva pohyblivé plastické klouby, které se během rázu od středu vzdalují (až do určité vzdálenosti, kde se zastaví).

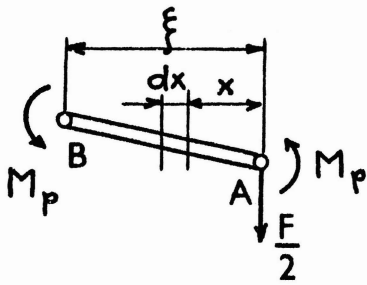


Obr. 7.26

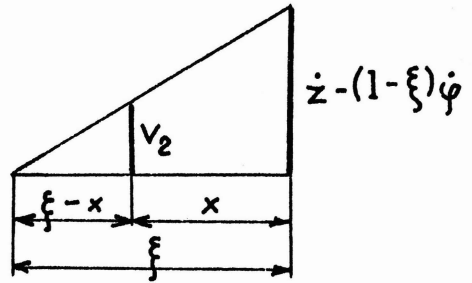
V určitém okamžiku po rázu lze situaci znázornit obrázkem 7.26. Poloha pohyblivých plastických kloubů je označena  $B$ , centrální plastický kloub je  $A$ . Uvolněná část  $AB$  je zakreslena na obr. 7.27. Rychlost elementu o délce  $dx$  se skládá z unášivé rychlosti bodu  $B$ ,

která je  $(l - \xi) \dot{\psi}$ , a z druhotné rychlosti vzhledem k bodu  $B$ . Je-li rychlost bodu  $A$  označena  $\dot{z}$ , je druhotná rychlost bodu  $A$  rovna  $\dot{z} - (l - \xi) \dot{\psi}$ , kdežto druhotná rychlost bodu  $B$  je nulová. Protože se druhotná rychlost na úsečce  $AB$  lineárně mění, dostaneme její hodnotu  $v_2$  pro obecný bod této úsečky z úměry podle obr. 7.28

$$v_2 = \left[ \dot{z} - (l - \xi) \dot{\psi} \right] \frac{\xi - x}{\xi} \quad (7.101)$$



Obr. 7.27



Obr. 7.28

Celkem bude rychlost elementu  $dx$

$$v = (l - \xi)\dot{\psi} + v_2 = \dot{z} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) + \frac{x}{\xi} (l - \xi)\dot{\psi}. \quad (7.102)$$

Derivováním podle času dostaneme zrychlení

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{z} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) + \dot{z} \frac{x \dot{\xi}}{\xi^2} - \frac{x}{\xi^2} (l - \xi) \dot{\xi} \ddot{\psi} + \frac{x}{\xi} (-\dot{\xi}) \dot{\psi} + \frac{x}{\xi} (l - \xi) \ddot{\psi}. \quad (7.103)$$

Pro sílu  $F$  platí vztah

$$F = M \ddot{z}. \quad (7.104)$$

Je-li hmotnost jednotkové délky nosníku  $m = A \rho$ , dá podmínka rovnováhy vnějších a setrvačných sil

$$\frac{F}{2} + \int_0^{\xi} a m dx = 0. \quad (7.105)$$

Posouvající síla v plastickém kloubu  $B$  je nulová, neboť plastický moment vzniká tam, kde je ohybový moment extrémní, tedy kde  $dM/dx = T = 0$ . Dosadíme-li do rovnice (7.105) z rovnic (7.104) a (7.103), dostaneme po úpravě

$$(M + m \xi) \ddot{z} + m \xi \ddot{\psi} (l - \xi) + m \dot{\xi} (\dot{z} - l \dot{\psi}) = 0. \quad (7.106)$$

Další dvě rovnice dostaneme z úvahy o rotaci částí  $AB$  a  $BC$ . Momentová podmínka pro část  $AB$  (obr. 7.27) dává

$$2M_p = \int_0^{\xi} x a m dx. \quad (7.107)$$

Dosadíme-li sem z rovnice (7.103), dostaneme po úpravě

$$12 M_{\mu} = m \left[ \xi^2 \ddot{z} + 2 \xi^2 (l - \xi) \ddot{\psi} + 2 \xi \dot{\xi} (\dot{z} - l \dot{\psi}) \right]. \quad (7.108)$$

Část BC (obr. 7.26) se otáčí účinkem pouhého momentu  $M_{\mu}$  přenášeného na část BC v plastickém kloubu B. Protože moment setrvačnosti této části je

$$J_{BC} = \frac{1}{3} m (l - \xi)^3, \quad (7.109)$$

dostaneme pohybovou rovnici

$$M_{\mu} = J_{BC} \ddot{\psi} = \frac{1}{3} m (l - \xi)^3 \ddot{\psi}. \quad (7.110)$$

Rovnice (7.106), (7.108) a (7.109) určují neznámé funkce  $\xi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $z(t)$ . Je to však soustava nelineárních diferenciálních rovnic, kterou nelze řešit jednoduchými prostředky. Pokusíme se proto soustavu rovnic dále zjednodušit.

Násobíme-li rovnici (7.106)  $2\xi$  a odečteme od rovnice (7.108), vyjde

$$\ddot{z} = - \frac{12 M_{\mu}}{2M\xi + m\xi^2}. \quad (7.111)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do (7.106) a za  $\ddot{\psi}$  dosadíme z rovnice (7.106), vyjde

$$\dot{\xi} (\dot{z} - l \dot{\psi}) = \frac{3M_{\mu}}{m} \left[ \frac{2}{\xi} + \frac{2}{2\frac{M}{m} + \xi} - \frac{\xi}{(l - \xi)^2} \right]. \quad (7.112)$$

Tato rovnice váže navzájem už jen rychlosti, nikoli zrychlení. Když se kloub B zastaví, je  $\dot{\xi} = 0$ . Zastaví se tedy ve vzdálenosti  $\xi$ , pro kterou se výraz v hranaté závorce (7.112) rovná nule. Dosazením různých hodnot za  $M/m$  se lze přesvědčit, že tuto podmínku splňuje  $\xi$  z intervalu  $0,59 l < \xi < 0,67 l$ .

Pro malé hodnoty  $t$  máme též malé  $\xi$ ; z rovnice (7.111) je zřejmé, že zpoždění  $-\ddot{z}$  je v tomto případě velké. Rychlost  $\dot{z}$  se na začátku rázu rovná  $v_0$  a úhlová rychlost je  $\dot{\psi} = 0$ . Z rovnice (7.112) pak vyjde  $\dot{\xi} \rightarrow \infty$  pro  $t \rightarrow 0$ .

Z pokusů je známo, že v počátečním stadiu rázu se deformuje převážně střední část nosníku, kdežto části kolem podpor se téměř nepohnou. Pro  $t = 0$  je skutečně  $\dot{\psi} = 0$  a zrychlení podle (7.109) má nejmenší hodnotu, neboť  $\xi = 0$ . Dosadíme-li tedy do rovnic (7.106) a (7.108)  $\dot{\psi} = 0$ ,  $\ddot{\psi} = 0$ , dostaneme diferenciální rovnice platné přibližně pro začátek děje. Rovnice (7.106) dá

$$(M + m\xi) \ddot{z} + m \dot{\xi} \dot{z} = 0 \quad (7.113)$$

a rovnice (7.108)

$$m \ddot{z} \xi^2 + 2 m \nu \xi \dot{\xi} \dot{z} = 12 M \mu . \quad (7.114)$$

Tyto rovnice lze upravit na tvar

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (M \dot{z} + m \xi \dot{z}) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (m \xi^2 \dot{z}) &= 12 M \mu . \end{aligned} \right\} \quad (7.115)$$

S počátečními podmínkami  $\xi = 0$ ,  $\dot{z} = v_0$  pro  $t = 0$  odtud dostaneme

$$\dot{z} = \frac{M v_0}{M + m \xi} ; \quad m \nu \xi^2 \dot{z} = 12 M \mu t . \quad (7.116)$$

Vyloučením  $\dot{z}$  z obou posledních rovnic vyjde

$$m \nu \xi^2 \frac{M v_0}{M + m \xi} = 12 M \mu t . \quad (7.117)$$

Odtud

$$\xi = \frac{6 M \mu t}{M v_0} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{M^2 v_0}{3 M \mu m t}} \right] . \quad (7.118)$$

Protože  $t$  je malé, můžeme zanedbat jedničku pod odmocninou; dostaneme

$$\xi = \frac{6 M \mu t}{M v_0} + \sqrt{\frac{12 M \mu t}{m v_0}} . \quad (7.119)$$

Derivováním (7.117) podle času dostaneme

$$\dot{\xi} = \frac{12 M \mu}{M m v_0} \frac{(M + m \xi)^2}{\xi (2M + m \xi)} . \quad (7.120)$$

Dělíme-li (7.116) rovnicí (7.120), vyjde

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{M v_0}{M + m \xi} \cdot \frac{M m v_0}{12 M \mu} \cdot \frac{\xi (2M + m \xi)}{(M + m \xi)^2} . \quad (7.121)$$

S novou proměnnou  $\rho = M + m \xi$

$$z = \int_0^\xi \frac{M^2 v_0^2}{12 M \mu m} \cdot \frac{\rho^2 - M^2}{\rho^3} d\rho \quad (7.122)$$

a odtud konečně

$$z = \frac{M^2 v_0^2}{12 M \mu m} \left[ \ln \left( 1 + \frac{m}{M} \xi \right) - \frac{m \xi (2M + m \xi)}{2(M + m \xi)^2} \right]. \quad (7.123)$$

Rovnice (7.113) až (7.123) platí jen pro začátek rázu (pro malá  $t$ ,  $\xi$ ), což znovu zdůrazňujeme.

### 7.9. Exploze válcové bomby

Nastane-li exploze výbušniny uvnitř ocelové válcové bomby, vzniknou uvnitř vysoké tlaky zplodin výbuchu, které způsobí postupné rozpínání kovového pláště. V určitém okamžiku se plášť rozpadne na drobné úlomky, které jsou vymršťovány velkou rychlostí a mají pro okolí ničivý účinek. Jak si vysvětlit vznik těchto úlomků, když plášť je vyroben z poměrně houževnatého materiálu? Fyzikální děj je značně komplikovaný. Exploze nevzniká v celém objemu naráz, ale šíří se zpravidla od jednoho konce. Plášť bomby se proto deformuje rovněž postupně. Roztříští se, když se průměr pláště zvětší plastickou deformací téměř na dvojnásobek původní hodnoty.

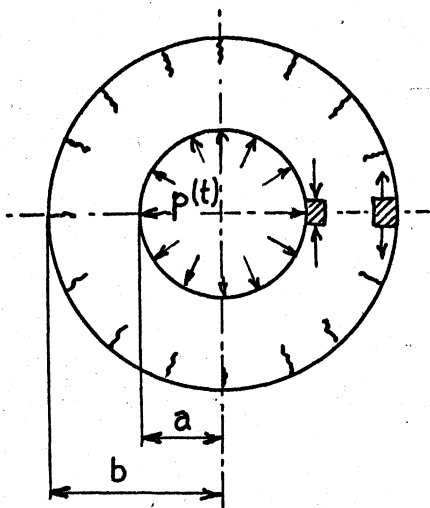
Při explozi vznikne dosti náhle na vnitřním povrchu pláště tlak. Tím vzniká dynamická napjatost stěny pláště, která se liší od známé napjatosti při statickém přetlaku. Ve vnitřních povrchových vrstvách vzniká tlakové obvodové napětí, což je neobvyklé. Tahové obvodové napětí se postupně vytváří směrem od vnějšího povrchu. Budeme předpokládat, že trhlinka může vzniknout jen v oblasti tahového napětí a že se nemůže šířit, je-li obvodové napětí tlakové. Roztříštění pláště tedy nastane v okamžiku, kdy v celé tloušťce stěny pláště převládne tahové obvodové napětí. Vznik trhlín je znázorněn na obr. 7.29. Trhliny jsou kresleny jako radiální, mohou však probíhat zčásti i šikmo k povrchu, neboť roztříštění pláště předchází kluz, na němž se převážně podílejí smyková napětí. Těmito podrobnostmi se nebudeme zabývat.

Pro element vyňatý ze stěny pláště a zakreslený na obr. 7.30 platí pohybová rovnice

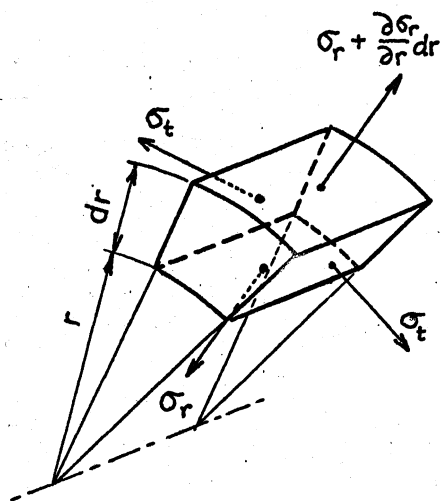
$$\frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \rho \frac{d^2 r}{dt^2}. \quad (7.124)$$

Zde  $r = r(t)$  značí vzdálenost elementu od osy v okamžiku  $t$ ,  $\rho$  hustotu materiálu, z něhož je plášť bomby vyroben. Na počátku zatěžování měl poloměr  $r$  velikost  $r_0$  a vnitřní poloměr pláště byl  $a_0$ . Během exploze je  $r > r_0$ ,  $a > a_0$ . Z podmínky, že změnu objemu lze při plastických deformacích zanedbat, vyjde

$$r_0^2 - a_0^2 = r^2 - a^2. \quad (7.125)$$



Obr. 7.29



Obr. 7.30

Derivováním této rovnice podle času dostaneme vztah

$$r \frac{dr}{dt} = a \frac{da}{dt} \quad (7.126)$$

Budeme derivovat ještě jednou. Zároveň dosadíme  $da/dt = v$  = radiální rychlost pohybu bodů na vnitřním povrchu pláště. Získáme tak rovnici

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{v^2}{r} + \frac{a}{r} \frac{dv}{dt} - \frac{a^2}{r^3} v^2 \quad (7.127)$$

Trescova podmínka plasticity dá

$$\sigma_t - \sigma_r = \sigma_k \quad (7.128)$$

Z obou posledních rovnic dosadíme do (7.124) a dostaneme

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_k}{r} + \rho \left( \frac{v^2}{r} + \frac{a}{r} \frac{dv}{dt} - \frac{a^2 v^2}{r^3} \right) \quad (7.129)$$

Po integraci

$$\sigma_r = \left[ \sigma_k + \rho \left( v^2 + a \frac{dv}{dt} \right) \right] \ln r + \frac{1}{2} \rho \frac{a^2 v^2}{r^2} + C \quad (7.130)$$

S okrajovou podmínkou

$$\sigma_r = -p \quad \text{pro} \quad r = a \quad (7.131)$$

vyjde integrační konstanta

$$C = -p - \left[ \sigma_k + \rho \left( v^2 + a \frac{dv}{dt} \right) \right] \ln a - \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (7.132)$$

a tedy

$$\sigma_r + p = \left[ \sigma_k + \rho \left( v^2 + a \frac{dv}{dt} \right) \right] \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \rho v^2 \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right). \quad (7.133)$$

Z rovnice (7.128) vyjde pak obvodové napětí

$$\sigma_t = \sigma_k - p + \left[ \sigma_k + \rho \left( v^2 + a \frac{dv}{dt} \right) \right] \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \rho v^2 \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right). \quad (7.134)$$

Toto napětí je tlakové u vnitřního povrchu a tahové u vnějšího. Změna znaménka nastává v hloubce  $y = b - r$  pod vnějším povrchem, pro kterou vyjde  $\sigma_t = 0$ . Pomocí rovnice (7.134) tak odvodíme pro  $y$  podmínku

$$p - \sigma_k = \left[ \sigma_k + \rho \left( v^2 + a \frac{dv}{dt} \right) \right] \ln \frac{b-y}{a} + \frac{1}{2} \rho v^2 \left[ \frac{a^2}{(b-y)^2} - 1 \right]. \quad (7.135)$$

Zmizí-li tlaková oblast, je  $y = b - a = \dot{r}$  a poslední rovnice dá

$$p = \sigma_k. \quad (7.136)$$

Je to pevnostní podmínka pro plášť.

Přijmeme-li předpoklad polytropické expanze zplodin výbuchu, bude se tlak měnit podle vztahu

$$p = p_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-2\kappa}, \quad (7.137)$$

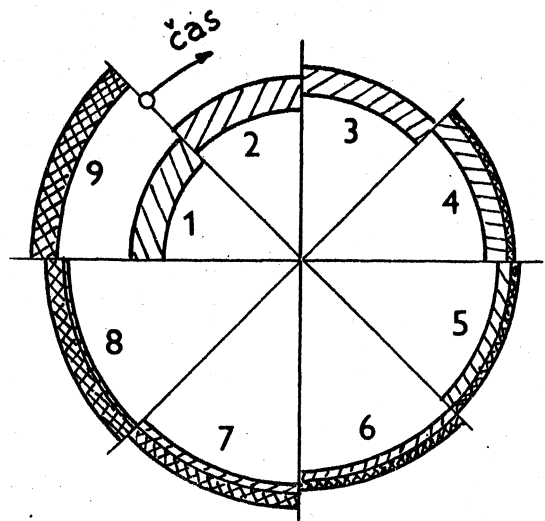
kde  $\kappa$  je polytropický exponent a  $p_0$  efektivní detonační tlak na počátku rozpínání pláště. Pro TNT (trinitrotoluen) se exponent mění od hodnoty asi 3,4 při tlaku  $p_0 = 16\,000 \text{ MN m}^{-2}$  až asi k hodnotě  $\kappa = 1,9$ , když hustota zplodin výbuchu klesne asi na čtvrtinu původní hodnoty. Vezmeme-li průměrnou hodnotu  $\kappa = 3$ , vyjde z rovnic (7.136) a (7.137) poloměr  $a$ , při němž se plášť roztříští

$$a = a_0 \left( \frac{p_0}{\sigma_k} \right)^{\frac{1}{6}}. \quad (7.138)$$

Dosadíme-li např.  $p_0 = 16\,000 \text{ MN m}^{-2}$  a  $\sigma_k = 450 \text{ MN m}^{-2}$ , dostaneme

$a \approx 1,8 a_0$ . Je zajímavé, že odolnost pláště proti šíření trhlin, posuzovaná podle velikosti poloměru  $a$ , při němž nastane roztříštění pláště, je menší, je-li mez kluzu pláště větší. Na obr. 7.31 je po kruhových oktantech zakresleno devět poloh pláště za jeho rozpínání během exploze. Poloha 1 je

počáteční (poloměry  $a_0$ ,  $b_0$ ). Zpočátku je obvodové napětí prakticky jen tlakové. Od polohy 4 je možno pozorovat postupné vytváření oblasti s tahovým obvodovým napětím. V poloze 9 se tahová oblast rozšíří do celé stěny, takže nastane její úplné roztříštění. V tom okamžiku je vnitřní poloměr  $a = 1,8 a_0$ .



Obr. 7.31

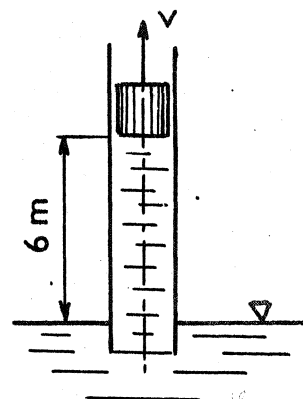
Uvedli jsme, že exploze se šíří podél osy postupně. Ve výpočtu jsme tento poznatek nerespektovali. Změna tlaku není v osovém směru tak náhlá, aby ji nebylo možno zanedbat jako méně významnou skutečnost. Podmínka (7.138) se tím příliš neovlivní. Spíše se změní průběh tlaku v závislosti na čase, takže střepiny pláště nebudou mít všude podél osy stejnou hybnost.

Kdybychom i tyto okolnosti zahrnuli do výpočtu, dostali bychom v našem příkladu rychlosti asi 1500 až 4500  $\text{m s}^{-1}$  (připomeňme, že rychlost zvuku ve vzduchu je jen asi 330  $\text{m s}^{-1}$ ). Podrobnostmi takového výpočtu se však již nebudeme zabývat.

Na tomto příkladu je poučné především to, že rozdělení obvodových napětí se za rázového namáhání (po explozi) zcela liší od případu staticky zatížené tlakové nádoby, kdy dostaneme při vnitřním přetlaku vždy jen tahové obvodové (membránové) napětí.

### PŘÍKLADY

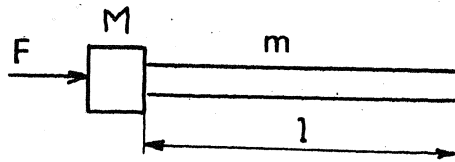
1. Ve svislém potrubí naplněném vodou je umístěn píst 6 m nad spodní hladinou. Píst se začne náhle pohybovat vzhůru rychlostí  $v$  (obr. A 1). Při jaké rychlosti se píst odtrhne od vodního sloupce? Jak se bude v tom případě pohybovat vodní sloupec? Zvolte hustotu vody  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ , rychlost zvuku ve vodě 1400  $\text{m s}^{-1}$ .



Obr. A 1

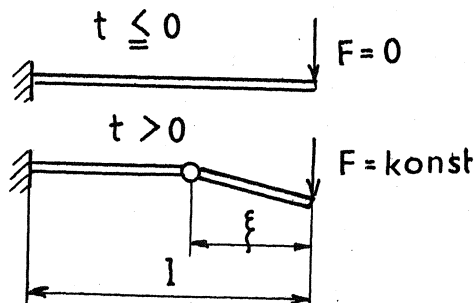


2. K pružné tyči o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  je přiložen tuhý beran o hmotnosti  $M$  (obr. A 2). Je náhle zatížen v okamžiku  $t = 0$  konstantní silou  $F$ . Jaký pohyb beranu nastane bezprostředně po začátku zatížení?



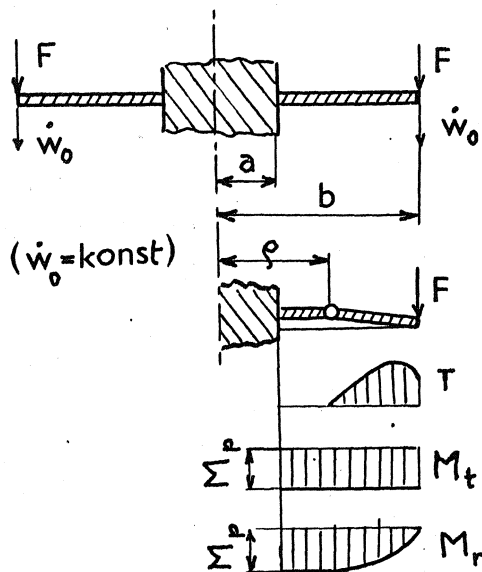
Obr. A 2

3. Vetknutý prizmatický nosník z tuho-plastického materiálu má hmotnost  $m$  a je v okamžiku  $t = 0$  náhle zatížen konstantní silou  $F$  podle obr. A 3. V jaké vzdálenosti od volného konce vznikne plastický kloub a jaké bude zrychlení konce nosníku krátce po jeho zatížení?



Obr. A 3

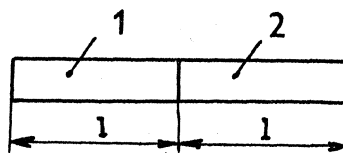
4. Mezikruhová deska o poloměrech  $a$ ,  $b$  (obr. A 4) a o hmotnosti  $M$  je vyrobena z tuho-plastického materiálu. V okamžiku  $t = 0$  je náhle zatížena takovou silou  $F$ , rovnoměrně rozdělenou po obvodu  $r = b$  desky, že se obvod začne posouvat dolů rychlostí  $\dot{w}_0 = \text{konst}$ . Na poloměru  $r = a$  je deska pevně vetknutá. Experimentálně bylo zjištěno, že plastický kloub má tvar kružnice, jejíž počáteční poloměr je  $r = b$  a během zatěžování se zmenšuje až na hodnotu  $r = a$ , kde se zastaví. Posouvající síla  $T$ , radiální ohybový moment  $M_r$  a obvodový ohybový moment  $M_t$  probíhají asi tak, jak je na obr. A 4 naznačeno.



Obr. A 4

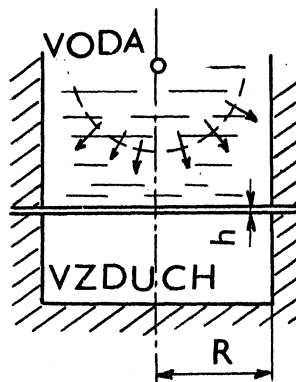
Vypočtete pro začátek pohybu rychlost  $\dot{w}$ , zrychlení  $\ddot{w}$  obecného elementu desky, rychlost pohybu plastického kloubu, dobu, než plastický kloub dospěje k místu vetknutí, a průběh síly  $F$  v závislosti na poloze plastického kloubu.

5. Dvě stejné pružné válcové tyče jsou k sobě těsně přiloženy (obr. A 5) a pak na levém čele první tyče náhle zatíženy konstantním napětím  $\sigma$  po dobu  $0 < t < \ell/c$ . Jaký vznikne pohyb?



Obr. A 5

6. Kruhová tenkostěnná membrána z měkké oceli je na obvodě vetknuta podle obr. A 6. Rázovou tlakovou vlnou, která se šíří z vodního prostoru, se membrána přetvoří do miskového tvaru. Vypočítejte, jakou počáteční rychlost  $v_0$  musí rázová vlna udělit membráně, aby se tloušťka plechu přetvořením zmenšila uprostřed na polovinu. Přitom předpokládejte, že rozhodují jen membránová napětí a deformace (vliv ohybu zanedbejte) a že pro složky poměrné deformace platí vztahy



Obr. A 6

$$\epsilon_r = \epsilon_t = \epsilon_o \left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

$$\epsilon_r + \epsilon_t + \epsilon_z = 0.$$

První z těchto rovnic je linearizovanou závislostí složek poměrného přetvoření na poloměru, druhá vyjadřuje nulovou změnu objemu. Pro materiál platí konstituční rovnice

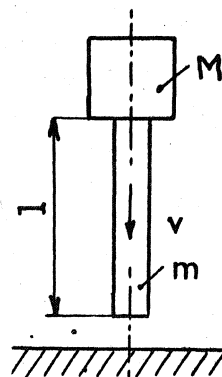
$$\sigma = A \epsilon^n = 6,3 \cdot 10^8 \epsilon^{0,2} \quad [\text{N m}^{-2}],$$

v níž  $\sigma$ ,  $\epsilon$  jsou "redukované" hodnoty podle hypotézy HMMH

$$\sigma = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r \sigma_t - \sigma_t \sigma_z - \sigma_z \sigma_r},$$

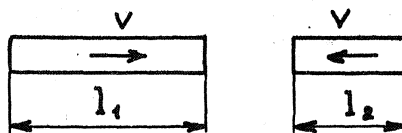
$$\epsilon = \frac{2}{3} \sqrt{\epsilon_r^2 + \epsilon_t^2 + \epsilon_z^2 - \epsilon_r \epsilon_t - \epsilon_t \epsilon_z - \epsilon_z \epsilon_r}.$$

7. Pružná tyč o hmotnosti  $m = A \ell \rho$  nese na konci tuhé těleso o hmotnosti  $M$  (obr. A 7). Rychlostí  $v$  narází na tuhý nepohyblivý základ. Jaký bude pohyb tuhého tělesa a jaké vznikne napětí v dotykové ploše mezi ním a pružnou tyčí bezprostředně po rázu?



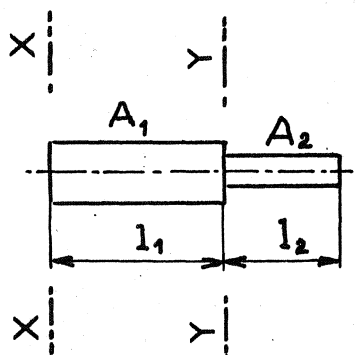
Obr. A 7

8. Dvě tyče vyrobené ze stejného materiálu o hustotě  $\rho$  a se stejným průřezem  $A$  se pohybují proti sobě na společné přímce rychlostí  $+v$ , popř.  $-v$  (obr. A 8). Předpokládejte dokonale pružný ráz s ideálním dotykem obou těles. Určete, jak bude rozdělena energie v okamžiku  $t = 2\ell_1/c$ . Jaký bude součinitel restituce pro  $\ell_1 = 2\ell_2$ ?



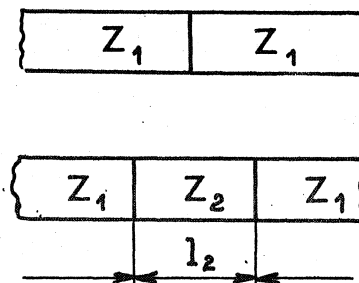
Obr. A 8

9. Dvě ocelové tyče se dotýkají v rovině  $Y - Y$  (obr. A 9). Předpokládáme, že  $A_1 > A_2$ ,  $\ell_1 > \ell_2$ . V rovině  $X - X$  je sestava tyčí zatížena tlakovou napěťovou vlnou  $\sigma$  o délce  $2\ell_2$ . Jakou hybnost má odlétnuvší druhá tyč?



Obr. A 9

10. Dvě stejné polonekonečné tyče na sebe těsně doléhají (obr. A 10). Zleva jimi projde konstantní tlaková napěťová vlna  $\sigma = 1 \text{ MN m}^{-2}$ . Jak se změní průchod vlny, vložíme-li mezi tyče distanční kus s malou mechanickou impedancí  $Z_2 = 0,2 Z_1$ ? Jak by se podmínky průchodu vlny změnily, kdyby se naopak použil distanční kus s velkou mechanickou impedancí, např.  $Z_2 = 5 Z_1$ ?



Obr. A 10

## Kontrolní výsledky

1. Píst se odtrhne při rychlosti  $v > 2,85 \text{ cm s}^{-1}$ . Horní hladina vodního sloupce se začne náhle pohybovat rychlostí  $v_0 = 2,85 \text{ cm s}^{-1}$  a po uplynutí každých 8,6 milisekundy se rychlost náhle zvýší o  $2v_0$ . Nahradíme-li tento stupňovitý průběh rychlosti lineárním, vyjde "průměrná" hodnota zrychlení  $6,67 \text{ m s}^{-2}$ . Tyto hodnoty platí jen pro začátek pohybu, kdy lze dráhu horní hladiny zanedbat proti délce vodního sloupce.
2. Pohyb je popsán rovnicí

$$x = \frac{F}{m} T \left[ t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right],$$

kde

$$T = \frac{\ell}{c}; \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \alpha = \frac{mc}{M\ell}.$$

Rovnice platí pro  $0 \leq t < 2T$ . V témže intervalu působí v dotykové ploše napětí

$$\sigma = -\frac{F}{m} T [1 - e^{-\alpha t}] \rho c.$$

3. Vyjde

$$\xi = \frac{3M_r}{F}; \quad a = \frac{2F\ell}{m\xi}.$$

V zadání úlohy se nic neříká o tom, jak nebo čím byla síla  $F$  vyvozena. Kdyby byla způsobena proudem vody, bylo by  $F = A\rho v^2$ . Kdyby byla vyvozena nárazem olověné střely o délce  $\ell$ , hmotnosti  $M$ , bylo by obdobně  $F = (M/\ell)v^2$  a poloha plastického kloubu by byla  $\xi = 3M_r\ell/Mv^2$ . Vzhledem k tvárnosti olova, která se ještě zvýší lokálním ohřevem po nárazu, lze olověnou střelu považovat spíše za vazkou kapalinu než za tuhé těleso.

4. Dostaneme

$$\dot{w} = w_0 \frac{r-\rho}{b-\rho}; \quad \ddot{w} = -\dot{\rho} \dot{w}_0 \frac{b-r}{(b-\rho)^2}.$$

Tyto vztahy platí pro  $\rho \leq r \leq b$ . Je-li  $a \leq r \leq \rho$ , je  $\dot{w} = \ddot{w} = 0$ .

Rychlost pohybu plastického kloubu je

$$\dot{\varrho} = - \frac{12 M_p}{m \dot{w}_0 b} \frac{1}{(1-\xi)(1+3\xi)}$$

kde

$$\xi = \frac{\varrho}{b} ; \quad m = \frac{M}{\pi(b^2 - a^2)}$$

Plastický kloub dospěje do místa vetknutí desky po době

$$t_1 = \frac{m \dot{w}_0 b^2}{12 M_p} \left[ \left(1 - \frac{a}{b}\right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \right]$$

Pro sílu  $F$  na vnějším obvodu desky dostaneme

$$Q = -T(r=b) = \frac{2M_p}{b-\varrho} \frac{b+2\varrho}{b+3\varrho}$$

Vztahy platí jen pro  $0 < t < t_1$ .

5. Napěťový puls proběhne právě za dobu  $T = l/c$  z první tyče do druhé. Na konec druhé tyče dorazí v okamžiku  $t = 2T$ . První tyč zůstane bez napětí a v klidu, druhá se od ní odloučí v okamžiku  $t = 2T$  rychlostí  $v_0 = G/\rho c$ . V tomto okamžiku je druhá tyč rovnoměrně zkrácena o  $|\Delta l| = G l / E$ . Když puls, který se odrazí na pravém čele, proběhne druhou tyčí, tedy v okamžiku  $t = 3T$ , bude druhá tyč rovnoměrně prodloužena o  $\Delta l$  a její rychlost bude opět  $v_0$ . V čase  $t = 4T$  bude druhá tyč opět rovnoměrně zkrácena atd. Druhá tyč se tedy bude pohybovat tak, že k jejímu rovnoměrnému pohybu rychlostí  $v_0$  bude superponováno střídavé roztahování a zkracování tyče. Rychlost částic druhé tyče se bude s periodou  $2T$  nespojitě měnit v mezích  $0 \leq v \leq 2v_0$ . Pouze rychlost těžiště druhé části bude konstantní ( $v_T = v_0$ ).

6. Plastická přetvárná práce je

$$W = \int \Delta(r) dV = \int_{r=0}^a \Delta(r) \cdot 2\pi r h dr,$$

kde

$$\Delta(r) = \int_0^{\bar{\epsilon}} G d\epsilon ; \quad \bar{\epsilon} = 2\epsilon_t = 2\epsilon_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Dosazením

$$W = \frac{A}{1+n} \cdot 2\pi a^2 h \frac{(2\epsilon_0)^{1+n}}{(2+n)(3+n)}$$

Pro  $\Delta h/h = -\epsilon_2 = 2\epsilon_0 = 0,5$  je  $\epsilon_0 = 0,25$ , takže

$$W = 6,45 \cdot 10^7 \pi a^2 h$$

Počáteční kinetická energie membrány

$$K = \pi a^2 h \rho v_0^2 / 2 = 3900 \pi a^2 h v_0^2$$

Z rovnice  $W = K$  vypočteme  $v_0 \approx 129 \text{ m s}^{-1}$ .

7. Posuv  $y$  tuhého tělesa budeme měřit od okamžiku nárazu  $t = 0$  směrem dolů. Pro interval  $0 \leq t \leq T$  ( $T = l/c$ ) bude  $y = vt$ ,  $G = 0$ .  
V intervalu  $T < t < 3T$  platí pohybová rovnice

$$M\ddot{y} = -A\rho c v - A\rho c \dot{y}$$

S počátečními podmínkami  $y = vT$ ,  $\dot{y} = v$  pro  $t = T$  odtud vyjde

$$y = v(2T-t) + \frac{2v}{\alpha} \{1 - e^{-\alpha(t-T)}\},$$
$$G = -2\rho c v e^{-\alpha(t-T)}$$

kde

$$\alpha = \frac{Mc}{Ml} \quad , \quad T < t < 3T$$

V okamžiku  $t = 3T$  dorazí k tuhému tělesu vlna odražená od základu a pohybová rovnice se změří na

$$M\ddot{y} = -2A\rho c v e^{-\alpha(t-3T)} - A\rho c (\dot{y} + v)$$

Pokud nenastane uvolnění dotyku, platí tato rovnice pro interval  $3T < t < 5T$  s počátečními podmínkami

$$y = -vT + 2 \frac{v}{\alpha} (1 - e^{-\alpha 2T}),$$
$$\dot{y} = v(2e^{-\alpha 2T} - 1)$$

pro  $t = 3T$ . Nezájímáme-li se o posuvy, ale jen o napětí, můžeme poslední rovnici řešit substitucí

$$A\rho c (\dot{y} + v) = \tilde{G}(t).$$

8. V okamžiku  $t = 2l_1/c$  je druhá tyč bez napětí a její kinetická energie je

$$W_2 = \frac{1}{2} A\rho l_2 v^2.$$

Kinetická energie první tyče je v témže okamžiku

$$W_1 = \frac{1}{2} A\rho (2l_2 - l_1) v^2.$$

Energie napjatosti v druhé tyči je nulová, v první vyjde

$$U_1 = \frac{1}{2} A [2(l_1 - l_2)] \frac{G^2}{E} = \frac{1}{2} A [2(l_1 - l_2)] v^2 \frac{E\rho}{E} = A\rho v^2 (l_1 - l_2).$$

Součet dá kinetickou energii tyčí před nárazem

$$W_1 + W_2 + U_1 = \frac{1}{2} A\rho v^2 (l_1 + l_2).$$

Pro  $l_1 = 2l_2$  budou rychlosti rozděleny takto: v okamžiku  $t = l_1/c$  je první tyč v klidu (a stlačená). V okamžiku  $t = 1,5(l_1/c)$  bude celá bez napětí (odlehčující vlny zleva a zprava se setkají). Levá polovina první tyče se bude pohybovat vlevo rychlostí  $v$ , pravá stejnou rychlostí vpravo. Těžiště se nebude pohybovat a bude vzdáleno o

$$\frac{l_1}{2} \cdot \frac{E}{E - \rho c v}$$

od roviny dotyku. V okamžiku  $t = 2l_1/c$  budou obě poloviny první tyče rovnoměrně roztaženy. Když bude  $t = 2,5 l_1/c$ , budou opět bez napětí a v čase  $t = 3l_1/c$  budou opět stlačeny. Těžiště první tyče se tedy nepohybuje a relativně k němu se tyč střídavě roztahuje a stlačuje. Periodou tohoto pohybu je  $2l_1/c$ . Druhá tyč se pohybuje vpravo od okamžiku  $t = 2l_2/c = l_1/c$  stálou rychlostí  $v$ .

Součinitel restituce vztáhneme k pohybu těžišť obou tyčí. Podle definice (3.25)

$$\varepsilon = \frac{0 + v}{v + v} = 0,5.$$

Součinitel restituce je tedy menší než jedna, ačkoli jde o ideálně pružný ráz.

9. Pro vlnu, která projde rovinou Y-Y, platí vztah

$$\tilde{\sigma}_P = \frac{2A_1}{A_2 + A_1} \tilde{\sigma}$$

a pro vlnu odraženou od této roviny

$$\tilde{\sigma}_R = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} \tilde{\sigma}$$

Impuls síly na čele X-X je celkem

$$H = A_1 \tilde{\sigma} \frac{2\ell_2}{c}$$

Impuls dodaný druhé tyči prošlou tlakovou vlnou je

$$H_2 = A_2 \tilde{\sigma}_P \frac{2\ell_2}{c}$$

a první tyči odraženou vlnou

$$H_1 = -A_1 \tilde{\sigma}_R \frac{2\ell_2}{c}$$

Platí, že

$$H = H_1 + H_2$$

Z celkového impulsu  $H$  získá tedy druhá tyč hybnost

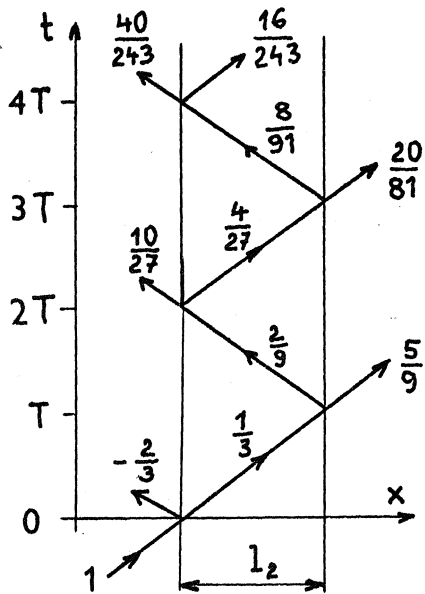
$$H_2 = H \frac{2A_1}{A_2 + A_1}$$

Je-li  $A_1 = A_2$ , vyjde  $H_2 = H$ ,  $H_1 = 0$ . V tom případě se celý dodaný impuls změní v hybnost druhé tyče.

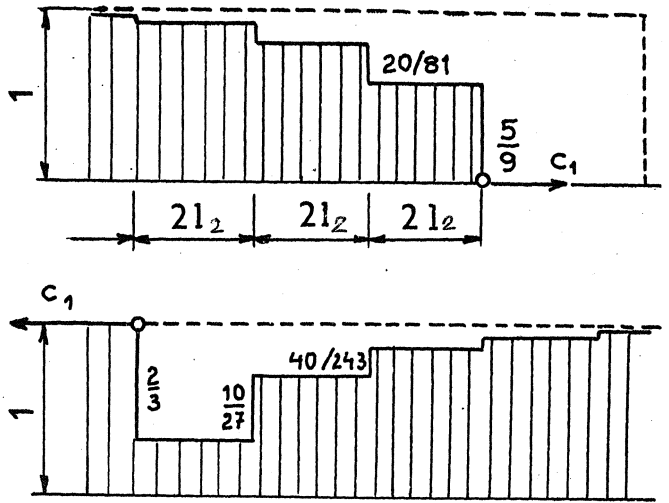
10. Není-li vložen distanční kus, projde vlna beze změny. Je-li vložen kus s malou mechanickou impedancí, vznikne situace znázorněná na obr. A 11. Od distančního kusu se budou šířit dvě vlny, vpravo vlna zatěžující (obr. A 12 nahoře), vlevo odlehčující (obr. A 12 dole). Pravá vlna limituje k hodnotě  $\tilde{\sigma} = 1 \text{ MN m}^{-2}$ , levá k nule. Jednotlivé stupně tvoří v těchto vlnách geometrickou řadu. Čárkovane je zakreslen tvar vlny pro dotyk tyčí bez distančního kusu. Z obr. A 12 je zřejmé, že se podstatně zmírní náběh tlakové vlny v pravé tyči. Pro časovou stupnici na obrázcích platí, že  $T = \ell_2/c_2 =$  doba průchodu podélné vlny distančním kusem.

Má-li distanční kus větší mechanickou impedanci, budou obdobně platit obr. A 13 a A 14.

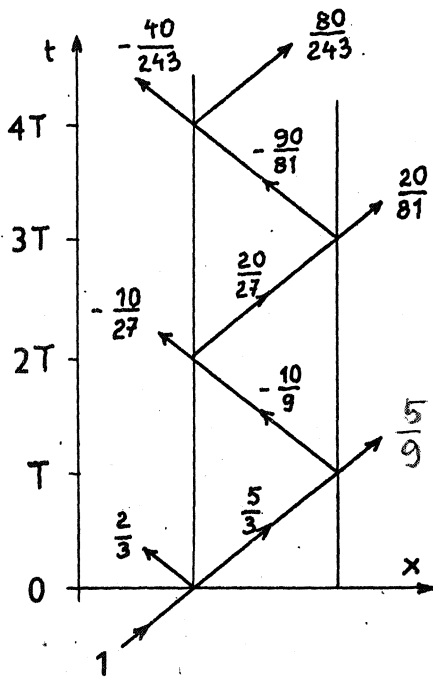




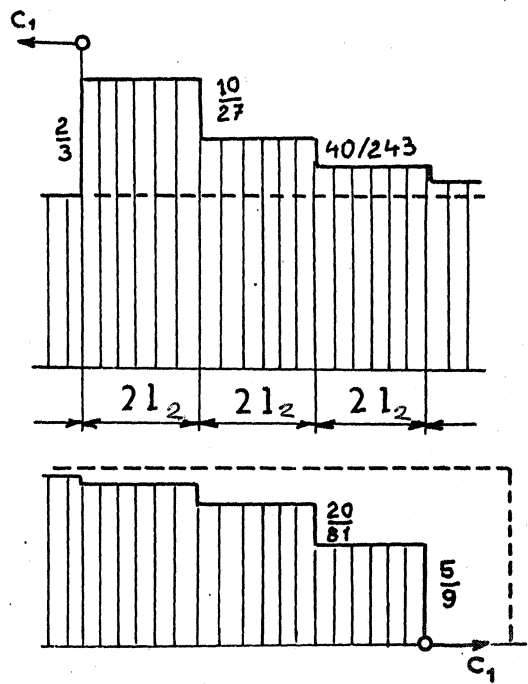
Obr. A 11



Obr. A 12



Obr. A 13



Obr. A 14

## LITERATURA

- /1/ BOBROVNICKIJ, J. I. - GENKIN, M. D. - MASLOV, V. P. - RIMSKIJ-KORSAKOV, A. V. M.: Rasprostraněníje voln v konstrukcijach iz tonkich stěržněj i plastin. Izd. Nauka, Moskva 1974.
- /2/ BREPTA, R.: Rázy a vlny napětí v pevných tělesech. Vydavatelství ČVUT, Praha 1971.
- /3/ BREPTA, R. - PROKOPEC, M.: Šíření napěťových vln a rázy v tělesech. Academia, Praha 1972.
- /4/ DAVIDĚNKOV, N. N.: Problemy udara v metallovědniji. Izd. AN-SSSR, Moskva 1938.
- /5/ FARLÍK, A. - ONDRÁČEK, E.: Teorie dynamického tváření. SNTL, Praha 1968.
- /6/ GOLDSMITH, W.: Impact. Edward Arnold, London 1960.
- /7/ HENRYCH, J.: Dynamika výbuchu a její užití. Academia, Praha 1973.
- /8/ JOHNSON, W.: Impact strength of materials. Edward Arnold, London 1972.
- /9/ KINSLOW, R. (red.): High-velocity impact phenomena. Academic Press, New York 1970.
- /10/ KOLSKY, H.: Stress waves in solids. Clarendon Press, Oxford 1953.
- /11/ KORNHAUSER, M.: Structural effects of impact. Cleaver - Hume, London 1964.
- /12/ ORLENKO, L. P.: Pověděnije materiálův pri intensivnych dinamičeskich nagruzkach. Mašinostrojenije, Moskva 1964.
- /13/ RACHMATULIN, Ch. A. - DĚMJANOV, J. A.: Pročnosť pri intensivnych kratkovremennych nagruzkach. Fizmatgiz, Moskva 1961.
- /14/ REDWOOD, M.: Mechanical waveguides. Pergamon Press, London 1960.
- /15/ RINEHART, J. S. - PEARSON, J.: Behaviour of metals under impulsive loads. Dover Publications, New York 1965.
- /16/ RINEHART, J. S.: Stress waves propagation in materials (red. N. DAVIDS). Interscience, New York 1960.

Název: RÁZOVÁ PEVNOST TĚLES

Autor: Prof. Ing. Cyril Höschl

Počet stran: 119

Náklad: 180 výtisků

Formát: A 4

Odborný redaktor: Ing. Milan Hýča, CSc.

Odpovědný redaktor: Ing. Vladimír Václavík

Číslo publikace: 60 - 510 - 77 (1301)

Vydal a rozmnožil: ČVTS - Dům techniky Praha  
Gorkého nám. 23, Praha 1

Datum vydání: Únor 1977