

**ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS**

**DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA**



# **VZNIK NÁHLÉHO LOMU**

**CYRIL HÖSCHL**

**ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV**

**PRAHA 1984**

Uvádějí se základní rovnice teorie pružnosti a s použitím komplexní proměnné se odvozují vzorce pro napjatost a přetvoření v okolí konce trhliny, která proniká do rovinné oblasti. Odvozuje se korekce na plastické deformace, jestliže se omezují na malé okolí konce trhliny. Tyto vzorce tvoří základ lineární lomové mechaniky. Zvláštní pozornost se věnuje vyšetřování faktoru intenzity napětí metodou konečných prvků. Vysvětluje se závislost kritické hodnoty faktoru intenzity napětí na tloušťce stěny a uvádějí se podmínky, za nichž lze tuto hodnotu považovat za materiálovou konstantu (lomovou houževnatost). Poznatky se pak zobecňují pro nelineární oblast, kdy je třeba vycházet z jiných kritérií (COD, J-integrál, R-křivka).

Odvozuje se vliv trhliny na tuhost, resp. poddajnost konstrukčních částí. Vysvětluje se, jak se změna poddajnosti účinkem trhliny projeví při šíření únavového lomu ve staticky neurčité konstrukci.

Závěrem se vysvětluje vztah pevnostních hypotéz k lomové mechanice. Uvádí se přehled revidovaných vzorců pro výpočet faktorů intenzity napětí, empirické vztahy pro odhad lomové houževnatosti a některé příklady aplikace lomové mechaniky.

## O B S A H

	str.
Ú V O D .....	5
1. ROZBOR DEFORMACE KONTINUA .....	6
2. ROZBOR NAPJATOSTI .....	16
3. HOOKEŮV ZÁKON A DEFORMAČNÍ ENERGIE .....	24
4. ŘEŠENÍ NAPJATOSTI OKOLO TRHLINY V PRUŽNÉM TĚLESE	25
5. NAPJATOST V OKOLÍ ŘADY TRHLIN .....	40
6. TRHLINY V PRUŽNÝCH TĚLESECH SLOŽITĚJI NAMÁHANÝCH	46
7. TRHLINY V TENKÝCH OHÝBANÝCH DESKÁCH .....	56
8. TRHLINY V TĚLESE S NEROVNOMĚRNÝM ROZDĚLENÍM TEPLoty	58
9. UVOLŇOVÁNÍ DEFORMAČNÍ ENERGIE PŘI ŠÍŘENÍ TRHLINY	60
10. PODDAJNOST TĚLESA S TRHLINOU .....	66
11. ŠÍŘENÍ TRHLINY VE STATICKY NEURČITÉ KONSTRUKCI	71
12. VÝPOČET FAKTORU INTENZITY NAPĚTÍ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ .....	75
13. PLASTICKÉ DEFORMACE A KRITICKÉ OTEVŘENÍ TRHLINY	82
14. J-INTEGRÁL .....	89
15. R-KŘIVKA .....	96
16. EMPIRICKÉ VZTAHY PRO ODHAD LOMOVÉ HOUŽEVNATOSTI	100
17. PEVNOSTNÍ HYPOTÉZY A LOMOVÁ MECHANIKA .....	105
LITERATURA	117

"Bez dobré teorie není počítání nic jiného než produkce sutin, a kdo má oči k vidění vidí, jak tyto hory sutin, vršené pilnými počítači, avšak línými mysliteli, narůstají do povážlivých výšek".

E. Becker (1977)

## ÚVOD

Počítače, jejichž výkonnost a technická dokonalost se zvyšovaly v posledních letech mnohem rychleji, než se původně předpokládalo, podstatně ovlivnily rozsah a úroveň technických výpočtů. Těmi se snažíme předvídat vlastnosti výrobku, optimalizovat jeho tvar a cenu a předejít jeho předčasnému selhání. Toto selhání bývá způsobeno nadměrným opotřebením, nadměrnou deformací, popř. částečnou nebo úplnou destrukcí.

V této publikaci si všimneme jen jednoho typu takové destrukce, totiž náhlého lomu, který vznikne bez větších plastických deformací, často za relativně nízké úrovně namáhání a v materiálu, jehož vzorky vykazovaly dostatečnou houževnatost. Lomy tohoto druhu překvapily inženýry poprvé roku 1938 a pak ještě mnohokrát ve čtyřicátých letech. Havarovaly svařované mosty, lodní trupy (zejména tankery pro dopravu nafty nebo plynu), svařované komíny, svařovaná potrubí i tlakové nádoby. Šlo tedy o konstrukce velkých rozměrů, často předepjaté vlastním pnutím, s poměrně velkou akumulovanou energií a za snížené teploty. Avšak žádná z těchto okolností nestačila vysvětlit uvedený jev, který podle uznávaných pevnostních kritérií neměl vůbec nastat. Náhlé lomy se podařilo vysvětlit teprve poté, co se "oprášila" a zobecnila Griffithova teorie křehkého porušení skla z roku 1920. To vedlo k rozvoji nového vědního oboru, lomové mechaniky. Vznikly nové poznatky o porušení materiálu, které radikálně změnily i pevnostní kritéria a výpočty. Staré pevnostní teorie nebyly vyvráceny a zavrženy, jak by si bylo možné myslet. Tyto teorie byly podloženy zkušenostmi a osvědčovaly se v technických aplikacích po celá desetiletí; nyní jim však bylo vymezeno místo, kam patří, a byly nahrazeny novými postupy tam, kde se prokázala jejich nedostatečnost.

Základem každé pevnostní teorie je znalost napjatosti a jejího pro-



storového i časového průběhu. Pokrok, který přinesly počítače, se právě zde projevuje nejvíce. Známe-li provozní podmínky, k nimž nám často dopomůže experiment, jsme schopni alespoň přibližně - s požadovanou přesností - nalézt mechanickou odezvu konstrukce, ovšem za předpokladu, že známe i materiálové vlastnosti. Zbývá nejodpovědnější část inženýrských výpočtů, totiž interpretace výsledků a schválení konstrukce nebo vypracování pokynů pro její úpravu. Úroveň zkušeností a informací, které máme k dispozici, nebývá přiměřená k úrovni a výkonnosti počítače. Pak ani rozsáhlé výpočty, které pilný počítač navrhne, nám nepomohou.

Rozhodli jsme se proto na příkladu vzniku náhlého lomu ukázat novou metodu posuzování pevnosti těles, která vychází z předpokladu přípustné velikosti materiálového defektu, a porovnat ji s klasickými pevnostními hypotézami. Abychom to mohli učinit, odvodíme některé vztahy známé z teorie elasticity a z lomové mechaniky. Kromě lineární teorie, která předpokládá lineárně elastický materiál se singulární napjatostí na čele trhliny, uvedeme i některé metody nelineární lomové mechaniky, použitelné pro případ elastickoplastického tělesa. Probereme rovněž změnu poddajnosti tělesa vlivem šířící se trhliny a zhodnotíme vliv trhliny na namáhání staticky neurčité konstrukce.

Lomová mechanika je novým vědním oborem, který se prudce rozvíjí ruku v ruce s pokroky ve fyzikální metalurgii. Jejím cílem je dát inženýrovi do rukou takové poznatky a znalosti, aby byl schopen navrhnout stroj pro danou životnost s danou spolehlivostí. Náš výklad nemůže být zdaleka úplný a nemůže se dotýkat ani těch problémů, které ještě nejsou úplně dořešeny a praxí přijaty. Podáme přehled jen takových poznatků, které jsou nutné k pochopení základů lomové mechaniky a jejichž praktická užitečnost je nepochybná.

## 1. ROZBOR DEFORMACE KONTINUA

Budeme předpokládat, že hmotnost tělesa je spojitě rozdělena. Vyjmeme-li tedy z tělesa libovolný objem  $\Delta V$  a pak jej stáhneme v daném vnitřním bodě tělesa k nule, vymizí jeho hmotnost  $\Delta m$  zároveň s objemem  $\Delta V$ . Hustota  $\rho$  v daném bodě je dána limitou podílu  $\Delta m / \Delta V$ , tj.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1.1)$$

a je spojitou funkcí souřadnic. To znamená, že nepřehlídíme ke korpulární stavbě hmoty, ani k její mikroskopické struktuře. Materiál si tedy představujeme jako kontinuum (spojité prostředí). Určitému bodu tohoto kontinua přísluší polohový vektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Přetvořením se jeho poloha změní a bude popsána vektorem  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Rozdíl obou vektorů je posuv  $\vec{u}$ . Tedy

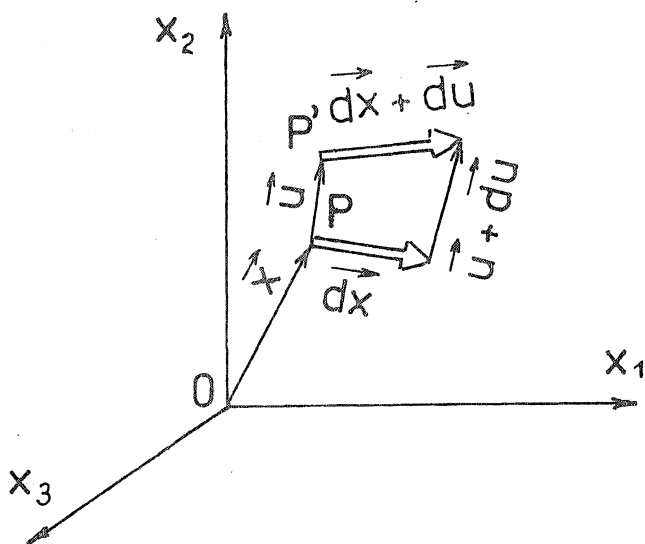
$$\vec{u} = \vec{\xi} - \vec{x} \quad (1.2)$$

Rozepíšeme-li tuto vektorovou rovnici do složek, dostaneme tři rovnice

$$u_i = \xi_i - x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

Má-li se zachovat spojitost tělesa a nemají-li v něm vzniknout zlomy, musí být složky posuvů  $u_i$  a jejich první derivace  $\partial u_i / \partial x_j$  spojitými funkcemi souřadnic. Vektorové pole posuvů  $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$  úplně popisuje přetvoření a přemístění tělesa.

Soustředíme se nyní na okolí daného bodu P (obr.1).



OBR. 1

Předpokládáme, že jde o vnitřní bod tělesa. Zvětšíme-li průvodič  $\vec{x}$  o diferenciální přírůstek  $d\vec{x}$ , zvětší se posuv  $\vec{u}$  o diferenciální přírůstek  $d\vec{u}$ . Zřejmě

$$du_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.4)$$

Použijeme-li zkráceného označení  $\partial u_i / \partial x_j = u_{i,j}$  a také Einsteinova součtového pravidla (podle indexu, který se vyskytne v daném členu dvakrát, se sčítá od 1 do 3), můžeme rovnici (1.4) zapsat stručněji takto:

$$du_i = u_{i,j} dx_j \quad (1.5)$$

Matice  $[u_{i,j}]$  je obecně nesymetrická. Můžeme ji rozdělit na symetrickou a antisymetrickou část

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (1.6)$$

kde

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad (1.7)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} - u_{j,i}] \quad (1.8)$$

Dosazením z rovnic (1.7) a (1.8) do (1.6) se snadno přesvědčíme, že rovnice (1.6) platí identicky. Protože  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ , je  $[\omega_{ij}]$  antisymetrická matice. Naopak  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , takže  $[\varepsilon_{ij}]$  je symetrická matice.

Přírůstek posuvu (1.5) tedy můžeme rozdělit na dvě části

$$du_i = du_i^{(1)} + du_i^{(2)} \quad (1.9)$$

kde

$$du_i^{(1)} = \varepsilon_{ij} dx_j \quad (1.10)$$

$$du_i^{(2)} = \omega_{ij} dx_j \quad (1.11)$$

Vzhledem k antisymetrii matice  $[\omega_{ij}]$  vyjde skalární součin

$$\vec{du}^{(2)} \cdot \vec{dx} = du_i^{(2)} dx_i = \omega_{ij} dx_j dx_i = 0 \quad (1.12)$$

To znamená, že vektorový přírůstek  $\vec{du}^{(2)}$  je kolmý k úsečce  $\vec{dx}$ , takže - pokud se posuvy mění jen zvolna - délka vektoru  $\vec{dx}$  se touto transformací nemění. Označíme-li totiž  $|\vec{dx}| = dx$ ,  $|\vec{du}^{(2)}| = du$ , vyjde

$$\sqrt{dx^2 + du^2} = dx \sqrt{1 + (du/dx)^2} \doteq dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] \doteq dx$$

pokud je  $du/dx$  malé. Transformace (1.11) tedy popisuje malé otočení posunutého vektoru  $d\vec{x}$  jako tuhé úsečky kolem bodu  $P'$ . Protože vektor  $d\vec{x}$  byl vybrán libovolně, vyjadřuje matice  $[\omega_{ij}]$  lokální otočení objemového elementu  $dV$  jako tuhého tělesa. Transformace (1.11) tedy nezmění ani velikost, ani tvar tohoto elementu, tj. daný element se sice posune a pootočí, ale nepřetvoří se. Přetvoření je popsáno pouze transformací (1.10) se symetrickou maticí  $[\varepsilon_{ij}]$ . Rozepíšeme-li tuto matici, bude

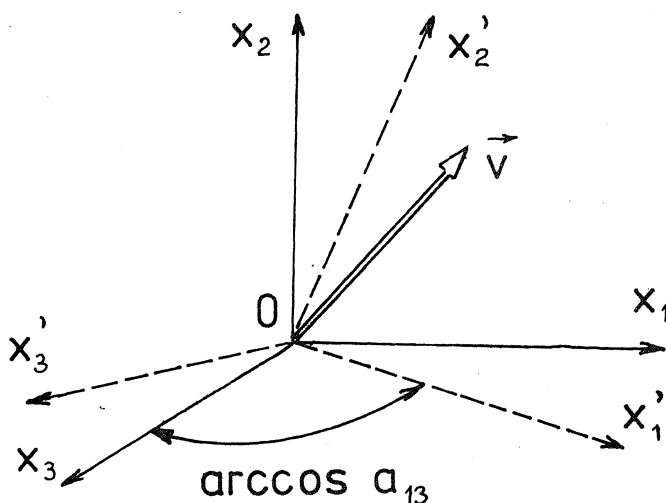
$$[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2u_{1,1} & u_{1,2} + u_{2,1} & u_{1,3} + u_{3,1} \\ u_{2,1} + u_{1,2} & 2u_{2,2} & u_{2,3} + u_{3,2} \\ u_{3,1} + u_{1,3} & u_{3,2} + u_{2,3} & 2u_{3,3} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Osy souřadnic můžeme označit také  $x, y, z$  místo  $x_1, x_2, x_3$ . Protože hodnoty  $\varepsilon_x = u_{1,1}$  ( $= \partial u_1 / \partial x_1$ ),  $\varepsilon_y = u_{2,2}$ ,  $\varepsilon_z = u_{3,3}$  jsou poměrná prodloužení a hodnoty  $\gamma_{xy} = u_{1,2} + u_{2,1}$ ,  $\gamma_{yz} = u_{2,3} + u_{3,2}$ ,  $\gamma_{zx} = u_{3,1} + u_{1,3}$  jsou zkosy, dostaneme v obvyklém technickém označení

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Ukážeme, že soubor složek  $\varepsilon_{ij}$ , který tvoří matici (1.13), je tenzorem druhého řádu, tenzorem přetvoření (deformačním tenzorem).

Nejprve se však budeme zabývat transformačními vlastnostmi vektoru  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Přejdeme-li od jedné kartézské soustavy souřadnic  $x_1, x_2, x_3$  k jiné takové soustavě  $x'_1, x'_2, x'_3$ , budou pro složky vektoru  $v$  v nové soustavě souřadnic platit transformační rovnice (obr.2)



OBR. 2  
- 9 -

$$\begin{aligned}
v_1' &= a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + a_{13} v_3 \\
v_2' &= a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + a_{23} v_3 \\
v_3' &= a_{31} v_1 + a_{32} v_2 + a_{33} v_3
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

To můžeme zapsat zkráceně jako

$$v_i' = a_{ik} v_k \tag{1.16}$$

Přitom  $a_{ij}$  značí kosinus úhlu, který svírá osa  $x_i'$  s osou  $x_j$ . Tedy

$$a_{ij} = \cos(x_i', x_j) \tag{1.17}$$

Matice těchto součinitelů není symetrická. Inverzní transformaci dostaneme, když si uvědomíme, že i pro ni musí platit vztah (1.16), zamění-li si čárkovaná soustava místo s nečárkovanou soustavou. Bude proto

$$v_j = a_{ij} v_i' \tag{1.18}$$

Transformační vztahy (1.16) popř. (1.18) jsou typické pro všechny vektory, takže lze jimi dokonce vektor definovat, tj. říkat, že každá veličina splňující tyto vztahy je vektor. Indexy, podle kterých se nesčítá, jsou "volné", sčítací indexy jsou "slepé". Volné indexy musí být na obou stranách transformační rovnice stejné. Označení slepých indexů se od nich musí lišit, ale jinak může být libovolné. Protože transformační vztahy (1.16) a (1.18) obsahují jen jeden volný index, považujeme vektor za tenzor prvního řádu. Transformační vztahy můžeme zobecnit i na veličiny dvou- nebo víceindexové; definují pak tenzory vyšších řádů. Např. vztahy (1.27) a (1.28), které uvedeme později, definují tenzor druhého řádu.

Vztah (1.16) dosadíme do (1.18) a dostaneme

$$v_j = a_{ij} a_{ik} v_k \tag{1.19}$$

Protože jsme se tím vrátili k původní soustavě souřadnic, musí být

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = k \\ 0 & \text{pro } j \neq k \end{cases} \tag{1.20}$$

Symbol  $\delta_{jk}$  je Kroneckerovo delta.

Vraťme se nyní k rovnici (1.10). Horní index (1) pro stručnost vynecháme; dostaneme

$$du_i = \varepsilon_{ij} dx_j \quad (1.21)$$

a v čárkované soustavě

$$du'_i = \varepsilon'_{ij} dx'_j \quad (1.22)$$

Pro vektory o složkách  $du'_i$ , resp.  $dx'_j$ , použijeme transformační vztah (1.16). Vyjde

$$a_{ij} du_j = \varepsilon'_{ij} a_{jk} dx_k \quad (1.23)$$

Tuto rovnici znásobíme činitelem  $a_{ih}$  a využijeme (1.20). Postupně dostaneme

$$a_{ih} a_{ij} du_j = \varepsilon'_{ij} a_{ih} a_{jk} dx_k \quad (1.24)$$

$$\delta_{hj} du_j = \varepsilon'_{ij} a_{ih} a_{jk} dx_k \quad (1.25)$$

$$du_h = \varepsilon'_{ij} a_{ih} a_{jk} dx_k \quad (1.26)$$

Tento výraz můžeme srovnat s rovnicí (1.21), v níž indexy  $i, j$  zaměníme za  $h, k$ . Dostaneme  $du_h = \varepsilon_{hk} dx_k$ , a tedy

$$\varepsilon_{hk} = a_{ih} a_{jk} \varepsilon'_{ij} \quad (1.27)$$

To je vztah, který splňují všechny tenzory druhého řádu. Pro zpětnou transformaci dostaneme obdobně

$$\varepsilon'_{ij} = a_{ih} a_{jk} \varepsilon_{hk} \quad (1.28)$$

Ukázali jsme, že přírůstek posuvů  $d\vec{u}^{(2)}$  je vždy kolmý k  $d\vec{x}$ . To však nic nevyovídá o směru přírůstku  $d\vec{u}^{(1)}$ . Ptáme se, za jakých okolností bude směr  $d\vec{u}^{(1)}$  totožný se směrem  $d\vec{x}$ , takže úsečka  $d\vec{x}$  se za deformace prodlouží a popř. posune, aniž změní směr. Tehdy musí platit, že  $d\vec{u}^{(1)} = \varepsilon d\vec{x}$ . Parametr  $\varepsilon$  je nějaké reálné číslo. Podle (1.10) pak musí být

$$\varepsilon_{ij} dx_j = \varepsilon dx_i = \varepsilon \delta_{ij} dx_j \quad (1.29)$$

Tedy také

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) dx_j = 0 \quad (1.30)$$

Rovnice (1.30) představuje homogenní soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé veličiny  $dx_1, dx_2, dx_3$ . Tato soustava má netriviální řešení jen tehdy, platí-li

$$\det (\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) = 0 \quad (1.31)$$

Když determinant rozepíšeme, máme

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (1.32)$$

Je to kubická rovnice pro neznámý parametr  $\varepsilon$

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0 \quad (1.33)$$

kde

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ J_2 &= \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} - \varepsilon_{23} \varepsilon_{32} - \varepsilon_{31} \varepsilon_{13} \\ J_3 &= \det [\varepsilon_{ij}] \end{aligned}$$

jsou invarianty deformačního tenzoru, které se transformací nemění. Parametr  $\varepsilon$  představuje poměrné prodloužení  $du^{(1)}/dx$ . Z rovnice (1.34) dostáváme tři taková hlavní poměrná prodloužení  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , neboť rovnice (1.33) má vždy tři reálné kořeny<sup>1)</sup>. Ke každému z nich přísluší trojice přírůstků  $dx_i$ , které jsou určeny až na multiplikační konstantu. Pro každou trojici tedy známe poměr  $dx_1 : dx_2 : dx_3$ , který určuje hlavní osu (směr hlavního poměrného prodloužení). Tento poměr vypočteme pro příslušené  $\varepsilon$  ze soustavy rovnic (1.30).

Ve zvláštním případě je  $u_3 = 0$  a posuvy  $u_1, u_2$  nezávisí na souřadnici  $x_3$ . Pak jde o rovinné přetvoření, při němž  $\varepsilon_{33} = 0, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$ .

Protože  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , má deformační tenzor obecně šest složek. Jsou odvozeny ze tří skalárních funkcí  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) podle vzorce (1.7). Složky  $\varepsilon_{ij}$  nemohou být proto nezávislé. Vazbu, která mezi nimi platí, dostaneme, když z rovnic (1.7) vyloučíme posuvy  $u_i$ . K tomu použijeme zvláštního obratu.

Nejprve zavedeme permutační symbol  $e_{ijk}$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , který nabývá hodnoty 1, tvoří-li indexy sudou permutací navzájem různých indexů, a hodnoty -1, tvoří-li lichou permutací. Opakuje-li se některý index, je hodnota permutačního symbolu nulová. Nenulové hodnoty permutačního symbolu ukazuje toto schéma

$e_{ijk} =$			+ 1	- 1
$i$	$j$	$k$	1 2 3	3 2 1
			3 1 2	1 3 2
			2 3 1	2 1 3

1) Je to důsledek souměrnosti deformačního tenzoru.

Nyní rovnici (1.7) dvakrát parciálně zderivujeme; bude

$$\varepsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2} [u_{i,jkl} + u_{j,ikl}] \quad (1.34)$$

Když tuto rovnici vynásobíme  $e_{jlm}$ , vymizí na pravé straně (1.34) první člen, neboť pořadí derivací můžeme zaměnit. Pro  $m=1$  např. bude

$$e_{231} u_{i,2k3} + e_{321} u_{i,3k2} = u_{i,k23} - u_{i,k23} = 0$$

a podobně i pro  $m=2$ , popř.  $m=3$ . Analogicky vymizí ve vztahu (1.34) i druhý člen na pravé straně, znásobíme-li rovnici činitelem  $e_{ikn}$ . Celkem dostaneme

$$e_{ikn} e_{jlm} \varepsilon_{ij,kl} = 0 \quad (1.35)$$

To je soustava rovnic kompatibility, která zaručuje, že tenzorové pole  $\varepsilon_{ij}(x_k)$  má geometrický význam, že bylo odvozeno ze spojitého vektorového pole posuvů, tj. z deformovaného kontinua, které si i po deformaci zachovalo spojitost. Předpokladem je, že skalární pole složek posuvů  $u_i(x_j)$  mají potřebnou spojitost, která zaručuje existenci třetích derivací a záměnnost jejich pořadí.

Rovnici (1.35) rozepíšeme např. pro  $m=3$ ,  $n=3$ . Pak

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - \varepsilon_{12,21} - \varepsilon_{21,12} = 0$$

Když tuto rovnici přepíšeme užitím symbolů  $\varepsilon_x = \varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_y = \varepsilon_{22}$ ,  $\gamma_{xy} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = \gamma_{yx}$ , dostaneme

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.36)$$

Zvolíme-li třeba  $m=2$ ,  $n=3$ , bude

$$\varepsilon_{13,21} + \varepsilon_{21,13} - \varepsilon_{11,23} - \varepsilon_{23,11} = 0$$

Po úpravě

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \quad (1.37)$$

Ke každé z rovnic (1.36), (1.37) můžeme odvodit další dvě rovnice cyklickou záměnou indexů  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ . Budou odpovídat hodnotám  $m=1$ ,  $n=1$ , popř.  $m=2$ ,  $n=2$  nebo  $m=3$ ,  $n=1$  a  $m=1$ ,  $n=2$ . Splňují-li poměrná přetvoření rovnice kompatibility, lze rovnice (1.7) integrovat a vypočítat podle posuvů.



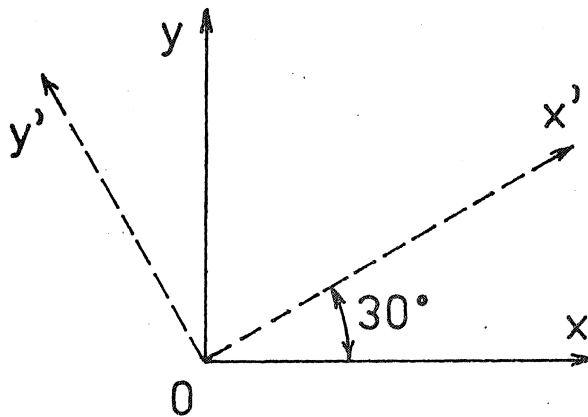
### Příklad 1

Je dáno rovinné přetvoření  $\varepsilon_x = \varepsilon_{11} = 0,002$ ,  $\varepsilon_y = \varepsilon_{22} = 0,001$ ,  
 $\gamma_{xy} = 2 \cdot \varepsilon_{12} = 0,006$ , přičemž  $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ . Určete

- (a) poměrné prodloužení ve směru odkloněném od osy  $x$  o  $30^\circ$ ,  
(b) směry a velikost hlavních poměrných prodloužení.

### Řešení

- (a) Hledané poměrné prodloužení ve směru osy  $x'$  (obr. 3) označíme  $\varepsilon_{11}'$ .



OBR. 3

Z rovnice (1.28) dostaneme

$$\varepsilon_{11}' = a_{11} a_{11} \varepsilon_{11} + a_{11} a_{12} \varepsilon_{12} + a_{12} a_{11} \varepsilon_{21} + a_{12} a_{12} \varepsilon_{22}$$

Ostatní členy odpadají, neboť jde o rovinné přetvoření. Přitom je

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos 30^\circ = \sqrt{3} / 2, & a_{12} &= \cos 60^\circ = 1 / 2 \\ a_{21} &= \cos 120^\circ = -1 / 2, & a_{22} &= \cos 30^\circ = \sqrt{3} / 2 \end{aligned}$$

Bude tedy

$$\varepsilon_{11}' = \frac{3}{4} \cdot 0,002 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 0,003 + \frac{1}{4} \cdot 0,001 = 0,004348$$

- (b) Vypočteme hodnoty součinitelů v rovnici (1.33)

$$J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0,002 + 0,001 = 0,003$$

$$J_2 = \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} = 0,002 \cdot 0,001 - 0,003^2 = 0,000\ 007$$

$$J_3 = 0$$

takže

$$\varepsilon^3 - 0,003 \varepsilon^2 - 0,000\ 007 \varepsilon = 0$$

Kořeny této rovnice jsou

$$\varepsilon_1 \doteq 0,004\ 541$$

$$\varepsilon_2 \doteq -0,001\ 541$$

$$\varepsilon_3 = 0$$

V matici  $[\varepsilon_{ij}]$  vymizí třetí řádek i sloupec, neboť jde o rovinné přetvoření. Vztah (1.30) můžeme proto zapsat v maticovém tvaru takto

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

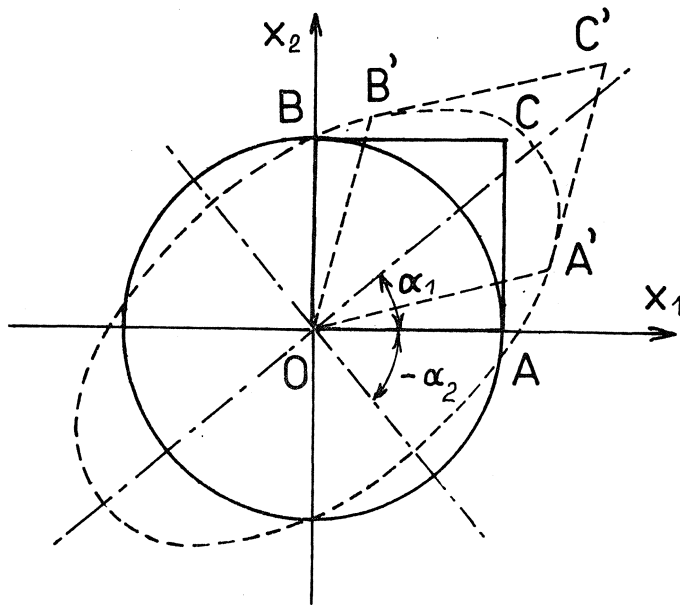
Odtud můžeme vypočítat směrnici hlavní osy

$$\operatorname{tg} \alpha = dx_2 / dx_1 = (\varepsilon - \varepsilon_{11}) / \varepsilon_{12}$$

Dosadíme-li nyní  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , resp.  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \doteq \frac{0,004\ 541 - 0,002}{0,003} = 0,847$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 \doteq \frac{-0,001\ 541 - 0,001}{0,003} = -1,180$$



OBR. 4

Na obr. 4 je zakresleno přetvoření čtvercového elementu a kružnice v rovině  $x_1, x_2$  ve stonásobném zvětšení. Čerchovaně jsou vyznačeny obě hlavní osy (třetí hlavní osa je kolmá k nákresně). Jsou to hlavní osy elipsy, do níž se přetvoří kružnice. Jsou vzájemně kolmé, neboť

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1.$$

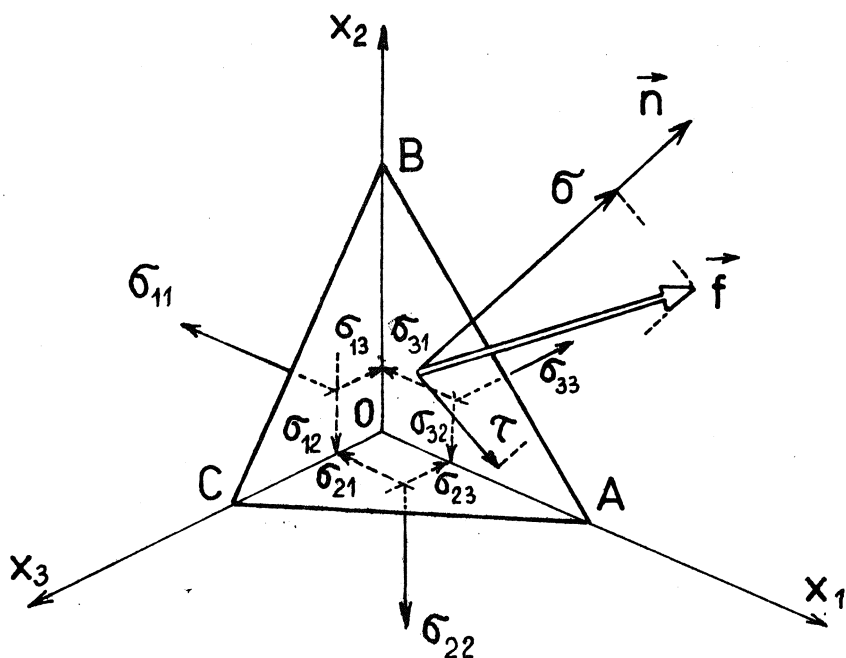
## 2. ROZBOR NAPJATOSTI

Je-li těleso vystaveno působení povrchových sil, popř. objemových sil, a zůstává-li přitom vzhledem k inerciální soustavě souřadnic v klidu nebo ve stavu rovnoměrného přímočarého pohybu, je navzdory působícím silám v rovnováze. Vnější síly splňují podmínky rovnováhy. V rovnováze je však i každá část tělesa, kterou z něho myšlenými řezy uvolníme. Uvolněním části tělesa se z vnitřních sil stanou vnější síly působící na uvolněnou část, takže i ony musí splňovat podmínky rovnováhy.

Silové účinky, kterými působí jedna část zatíženého tělesa na druhou a naopak, lze v řezu znázornit vnitřními reakcemi, jež jsou u spojitěho tělesa v ploše řezu rovněž spojitě rozděleny. Výjimkou mohou být ojedinělé singulární body, čáry nebo plochy, jež se tomu vymykají důsledkem idealizace (při soustředěném či nespojitěm zatížení nebo podepření tělesa). V ploše myšleného řezu se zaměříme na malou část o obsahu  $\Delta S$ . Na tuto elementární plošku připadne vektor vnitřní síly  $\Delta \vec{F}$ . Poměr

$$\vec{f} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \quad (2.1)$$

nazveme napěťový vektor (nebo vektor napětí). Poloha plošky  $\Delta S$  v daném bodě je dána vektorem  $\vec{n}$  její jednotkové normály. Mění-li se směr této normály, mění se i napěťový vektor. Abychom tuto změnu vyšetřili, zvolíme soustavu souřadnic tak, že vznikne elementární čtyřstěn znázorněný na obr. 5. Jeho čelní plocha, trojúhelník ABC, je právě  $\Delta S$ . Má jednotkovou normálu  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  a působí na ni napěťový vektor  $\vec{f}$ . Složka  $n_1$  má význam kosinu úhlu, který svírá vektor  $\vec{n}$  a osou  $x_1$ . To je však také úhel, který svírá rovina OBC s plochou ABC. Plocha trojúhelníku OBC je tedy  $n_1 \Delta S$ . Obdobně vypočteme obsah i dalších ploch. Na trojúhelník OBC působí napěťový vektor o složkách  $-\sigma_{11}, -\sigma_{12}, -\sigma_{13}$ . Analogicky označíme i složky působící na zbývající stěny OCA a OAB.



OBR. 5

Symbolem  $\sigma_{ij}$  označujeme napětí. První index se vztahuje ke směru normály k plošce, na niž napětí působí, druhý index pak vyznačuje směr napětí. Smysl napětí volíme takový, že kladné napětí  $\sigma_{ij}$  směřuje v kladném směru osy  $x_j$ , jestliže také vnější normála má směr kladné osy  $x_i$ . Změní-li se některý směr v opačný, změní se i znaménko napětí. Na obr. 5 jsou zakreslena vesměs kladná napětí.

Veličina  $\sigma_{ij}$  tedy popisuje silové působení v daném vnitřním bodě spojitého tělesa. Budou-li oba indexy stejné, např.  $\sigma_{11}$ , půjde o normálové napětí ( $\sigma_{11}$  působí v plošce OBC, jejíž normála má směr osy  $x_1$ , kolmo k této plošce). Jsou-li indexy navzájem různé, např.  $\sigma_{12}$ , jde o tečné napětí ( $\sigma_{12}$  působí rovněž v plošce OBC, avšak ve směru osy  $x_2$ ). Normálové napětí může být tahové (je-li kladné) nebo tlakové (je-li záporné). Tečné napětí je smykové.

Podmínku rovnováhy sil působících na čtyřstěn z obr. 5 napíšeme nejprve pro směr  $x_1$ . Bude

$$f_1 ds = \sigma_{11} n_1 ds + \sigma_{21} n_2 ds + \sigma_{31} n_3 ds \quad (2.2)$$

Tuto rovnici můžeme zřejmě zkrátit, takže bude

$$f_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \quad (2.3)$$

Obdobná rovnice bude platit i pro směry  $x_2$ ,  $x_3$ . Všechny tři rovnice můžeme shrnout do jediného vztahu

$$f_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.4)$$

Čtverec euklidovské normy tohoto vektoru je

$$\|\vec{f}\|^2 = f^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \quad (2.5)$$

Složky vektoru  $\vec{f}$  jsou  $\sigma$  a  $\tau$ . První z nich spadá do směru normály (normálové napětí), druhá do plochy ABC (tečné napětí). Z Pythagorovy věty

$$\tau^2 = f^2 - \sigma^2 \quad (2.6)$$

Velikost normálového napětí  $\sigma$  působícího v plošce ABC je dána skalárním součinem

$$\sigma = \vec{f} \cdot \vec{n} = f_i n_i = \sigma_{ji} n_j n_i \quad (2.7)$$

Zvolíme nyní potočenou soustavu souřadnic  $x_1'$ ,  $x_2'$ ,  $x_3'$  tak, aby osa  $x_1'$  spadala do směru normály  $\vec{n}$ . Pak

$$a_{1i} = n_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Složky napěťového vektoru  $\vec{f}$  nyní budou  $\sigma_{11}'$ ,  $\sigma_{12}'$ ,  $\sigma_{13}'$ . Z nich  $\sigma_{11}' > \sigma$ , druhé dvě jsou ekvivalentní s napětím  $\tau$ . Z podmínek statické ekvivalence dostaneme, že

$$\begin{aligned} \sigma_{11}' &= a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + a_{13} f_3 \\ \sigma_{12}' &= a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + a_{23} f_3 \\ \sigma_{13}' &= a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + a_{33} f_3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Zkráceně

$$\sigma_{1k}' = a_{ki} f_i \quad (2.9)$$

Když do rovnice (2.9) dosadíme z rovnic (2.4) a (2.7), budeme mít

$$\sigma_{1k}' = a_{ki} \sigma_{ji} a_{1j} = a_{1j} a_{ki} \sigma_{ji} \quad (2.10)$$

Protože jsme mohli do směru normály položit alternativně osu  $x_2'$  nebo  $x_3'$ , můžeme ve vztahu (2.10) za jedničku dosadit "volný" index  $l$ . Dostaneme

$$\sigma_{lk}' = a_{lj} a_{ki} \sigma_{ji} \quad (2.11)$$

Na označení indexů nezáleží; můžeme je zaměnit jiným, pokud nenarušíme Einsteinovo součtové pravidlo, ani pravidlo o rovnosti dvou tenzorů<sup>1)</sup>. Rovnici (2.11) můžeme proto napsat v ekvivalentním tvaru

$$\sigma_{ij}' = a_{ih} a_{jk} \sigma_{hk} \quad (2.12)$$

v němž jsou indexy abecedně poněkud lépe uspořádány. Vztah (2.12) je obdobný k rovnici (1.28). Soubor napětí  $[\sigma_{ij}]$  tedy tvoří rovněž tenzor druhého řádu, tenzor napjatosti.

Lze si položit otázku, kdy bude mít napěťový vektor  $\vec{f}$  právě směr normály k plošce, v níž sám působí. Pak v ní bude pouze normálové napětí  $\sigma$ , kdežto tečné napětí  $\tau$  vymizí. Z podmínky  $\vec{f} = \sigma \vec{n}$  plyne také, že

$$f_i = \sigma n_i \quad (2.13)$$

kde  $\sigma$  je zatím neurčená konstanta úměrnosti (reálné číslo). Dosadíme-li z rovnice (2.4) do (2.13), dostaneme

$$\sigma_{ji} n_j = \sigma n_i \quad (2.14)$$

To je však homogenní soustava lineárních algebraických rovnic pro složky  $n_i$  jednotkové normály. Můžeme ji přepsat s použitím Kroneckerova symbolu  $\delta_{ji}$  do tvaru

$$(\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}) n_j = 0 \quad (2.15)$$

Netriviální řešení může existovat jen tehdy, je-li

$$\det (\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}) = 0 \quad (2.16)$$

Rozepsáním tohoto determinantu dostaneme kubickou rovnici pro hlavní napětí  $\sigma$

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (2.17)$$

1) Dva tenzory druhého řádu  $p_{ij}$ ,  $q_{ij}$  se rovnají, rovnají-li se všechny složky. Tedy  $p_{ij} = q_{ij}$  pro  $i, j = 1, 2, 3$ . Místo toho lze ovšem psát  $p_{rs} = q_{rs}$ ;  $r, s = 1, 2, 3$ .

kteřá je obdobou rovnice (1.33). Koeficienty

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} - \sigma_{12} \sigma_{21} - \sigma_{23} \sigma_{32} - \sigma_{31} \sigma_{13}$$

$$I_3 = \det [\sigma_{ij}]$$

jsou invarianty tenzoru napjatosti, které se při transformaci (2,12) nezmění. Nemohou se změnit, neboť hlavní napětí je objektivní fyzikální veličinou, nezávislou na volbě soustavy souřadnic.

Pro každé hlavní napětí  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), vypočtené z rovnice (2.17), dostaneme příslušný poměr  $n_1:n_2:n_3$  složek normály ze soustavy rovnic (2.15). Jde o tři lineární rovnice pro tři neznámé  $n_1, n_2, n_3$ , avšak tyto rovnice jsou lineárně závislé, neboť platí (2.16). Proto můžeme jednu z rovnic (2.15) vynechat a ze zbývajících dvou vypočítat neznámé až na multiplikační konstantu. Dostaneme tedy poměr, který určuje příslušný hlavní směr, tj. směr hlavního napětí. U izotropních materiálů se směry hlavních napětí shodují se směry hlavních poměrných prodloužení.

Uvažujme nyní o rovnováze elementárního kvádrů o rozměrech  $dx_1, dx_2, dx_3$ . Směřuje-li osa  $x_1$  zleva doprava, má levá stěna obsah  $dx_2 dx_3$  a její normála má složky  $(-1, 0, 0)$ . Podle vztahu (2.4) bude mít v této stěně napěťový vektor  $\vec{f}_L$  složky  $f_{Li} = -\sigma_{1i}$ . Index "L" značí, že jde o levou stěnu elementárního hranolku. Jeho pravá stěna má jednotkovou normálu o složkách  $(+1, 0, 0)$  a vektor napětí v pravé straně má složky  $f_{Pi} = \sigma_{1i} + (\partial \sigma_{1i} / \partial x_1) dx_1$ . Druhý člen představuje přírůstek, který vzniká tím, že jsme se posunuli podél osy  $x_1$  o vzdálenost  $dx_1$ . Síly  $\vec{f}_L dx_2 dx_3 = (f_{L1}, f_{L2}, f_{L3}) dx_2 dx_3$  a  $\vec{f}_P dx_2 dx_3 = (f_{P1}, f_{P2}, f_{P3}) dx_2 dx_3$  dávají výslednou sílu

$$\begin{aligned} & (f_{L1} + f_{P1}, f_{L2} + f_{P2}, f_{L3} + f_{P3}) dx_2 dx_3 = \\ & = \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}, \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}, \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

a výslednou silovou dvojicí<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} & (d\vec{x}_1 \times \vec{f}_P) dx_2 dx_3 = \\ & = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ dx_1 & 0 & 0 \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \end{vmatrix} dx_2 dx_3 = (\sigma_{12} \vec{u}_3 - \sigma_{13} \vec{u}_2) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Když takto nahradíme výslednou silou a silovou dvojicí i síly působící

1) Se zanedbáním malých veličin vyššího než třetího řádu.

na ostatní stěny elementu, dostaneme celkovou výslednou sílu a celkovou výslednou silovou dvojici. Ty však musí být - pokud nepůsobí objemové síly - nulové. Odtud vyjde soustava tří rovnic rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.20)$$

a podmínka sdruženosti tečných napětí

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.21)$$

Tato podmínka znamená, že tenzor napjatosti je symetrický. Důsledek této symetrie je, že rovnice (2.17) má vždy tři reálné kořeny, tj. že existují tři hlavní napětí  $\sigma = \sigma_1$ ,  $\sigma = \sigma_2$ ,  $\sigma = \sigma_3$ , k nimž přísluší tři vzájemně kolmé hlavní směry určené normálami  $\vec{n} = \vec{n}_{(1)}$ ,  $\vec{n} = \vec{n}_{(2)}$ ,  $\vec{n} = \vec{n}_{(3)}$ ; vypočteme je z rovnice (2.15). V těchto směrech můžeme vést v daném bodě hlavní osy. Jsou-li hlavní napětí navzájem různá, existuje vždy jediná trojice hlavních os. Není-li tomu tak, je hlavních os nekonečně mnoho. Vždy však lze z nich vybrat jednu trojici hlavních os, které jsou vzájemně kolmé. Existuje obdoba k vyhledávání hlavních os u kvadratických ploch; obecný elipsoid má jedinou trojici hlavních os, rotačně symetrický elipsoid nebo koule jich mají nekonečně mnoho.

Působí-li na těleso také objemové síly  $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ , které mají fyzikální rozměr  $[N \cdot m^{-3}]$ , objeví se na levé straně rovnic (2.20), takže bude

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (2.22)$$

## Příklad 2

Je dána rovinná napjatost  $\sigma_x = 60 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{xy} = -30 \text{ MPa}$ . Určete hlavní napětí a hlavní osy.

## Řešení

Zvolíme  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ , takže (v jednotkách MPa)  $\sigma_{11} = 60$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = -30$ ,  $\sigma_{22} = -20$ . Invarianty jsou

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} = (60) + (-20) = 40, \\ I_2 &= \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12} \sigma_{21} = (60)(-20) - (-30)(-30) = -2100, \\ I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice (2.17) má kořeny



$$\sigma_1 = 70,$$

$$\sigma_2 = -30,$$

$$\sigma_3 = 0$$

Pro hlavní osy platí rovnice (2.15), kterou napíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po dosazení

$$\begin{bmatrix} 60 - \sigma & -30 & 0 \\ -30 & -20 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že  $\sigma$  splňuje podmínku (2.16), jsou tyto rovnice lineárně závislé. Normujeme-li vektor  $\vec{n}$  podmínkou

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

dostaneme pro první hlavní osu, tedy pro hlavní napětí  $\sigma = \sigma_1 = 70$  MPa, směrové kosiny

$$n_1^{(1)} = 3 / \sqrt{10} \doteq 0,948\ 683$$

$$n_2^{(1)} = -1 / \sqrt{10} \doteq -0,316\ 228$$

$$n_3^{(1)} = 0$$

a pro druhou hlavní osu, tj. pro  $\sigma = \sigma_2 = -30$  MPa

$$n_1^{(2)} = 1 / \sqrt{10} \doteq 0,316\ 228$$

$$n_2^{(2)} = 3 / \sqrt{10} \doteq 0,948\ 683$$

$$n_3^{(2)} = 0$$

Třetí hlavní osa má směrové kosiny

$$n_1^{(3)} = 0,$$

$$n_2^{(3)} = 0,$$

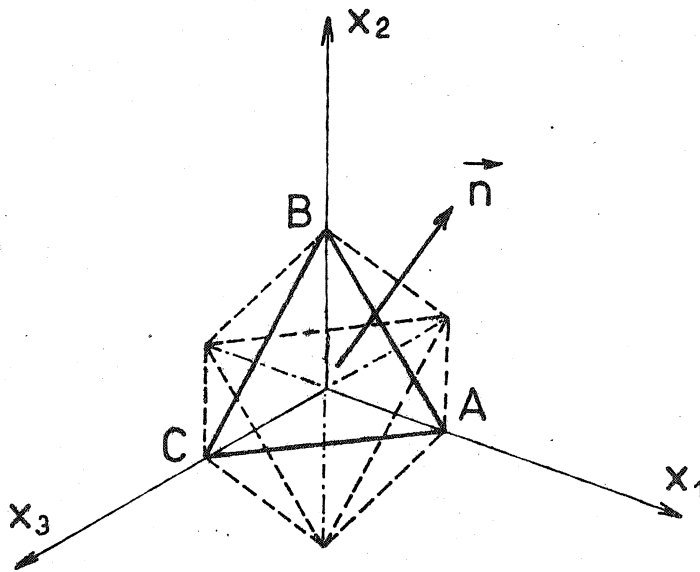
$$n_3^{(3)} = 1$$

### Příklad 3

Je dána obecná napjatost

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Hlavní osy tedy spadají do směrů souřadnicových os. Určete napětí ve stěně pravidelného elementárního osmistěnu znázorněného na obr. 6, tj. v řezu, jehož normála má směrové kosiny  $n_1 = n_2 = n_3 = \sqrt{3}/3$ .



OBR. 6

Řešení

Podle rovnice (2.7) vyjde

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{ji} n_j n_i = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 = \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{aligned}$$

Složky napěťového vektoru vypočteme podle (2.4). Bude

$$\begin{aligned} f_1 &= \sigma_{i1} n_i = \sigma_{11} n_1 = \sigma_{11} / \sqrt{3} \\ f_2 &= \sigma_{22} / \sqrt{3} \\ f_3 &= \sigma_{33} / \sqrt{3} \end{aligned}$$

Z rovnice (2.5) dostaneme

$$f^2 = \frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)$$

a z rovnice (2.6)  $\tau^2 = f^2 - \sigma^2 =$

$$= \frac{2}{9} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11})$$

Je tedy

$$\sigma = \frac{1}{3} I_1$$

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I_1^2 + I_2}$$

### 3. HOOKEŮV ZÁKON A DEFORMAČNÍ ENERGIE

Ukázali jsme, že změna tvaru, popř. velikosti elementárního hranolku vyňatého ze spojitého prostředí je popsána tenzorem přetvoření (deformačním tenzorem)  $[\epsilon_{ij}]$ . Podle Hookeova zákona existuje u pevných těles - pokud je namáhání malé - lineární vztah mezi tímto tenzorem a tenzorem napjatosti. Ten můžeme zapsat obecně ve tvaru

$$\epsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.1)$$

nebo v inverzním tvaru

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.2)$$

Přitom využíváme Einsteinova sumačního pravidla. Soubor veličin  $C_{ijkl}$  je tenzorem čtvrtého řádu. Je to tenzor elastických konstant. Naopak  $E_{ijkl}$  je tenzor elastických modulů. Je rovněž čtvrtého řádu. Protože každý z indexů probíhá hodnoty od jedné do tří, má tenzor čtvrtého řádu  $3^4 = 81$  složek. Tenzory přetvoření a napjatosti jsou však symetrické, takže indexy  $i, j$ , popř.  $k, l$ , lze zaměnit. Počet nezávislých konstant popisujících elastické vlastnosti anizotropního kontinua se tak zmenší na 36. Ukážeme později, že nezávislých elastických konstant je ještě méně. Dříve však odvodíme výraz pro deformační energii.

Představme si, že všechny složky tenzoru přetvoření se mění úměrně témuž parametru  $\lambda$ , takže

$$d\epsilon_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij} d\lambda \quad (3.3)$$

( $\bar{\epsilon}_{ij} = \text{konst}$ ). Pak ovšem

$$\epsilon_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij} \lambda \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \lambda \quad (3.4)$$

Přetvoří-li se pravoúhlý element o hranách  $dx_1, dx_2, dx_3$  tak, že hrana  $dx_1$  se prodlouží o  $\epsilon_{11} dx_1$  a úhel mezi hranami  $dx_1, dx_2$  se změní o zkos  $\gamma_{21} = \epsilon_{12} + \epsilon_{21}$ , vykonají síly působící na stěny elementu určitou práci. Změní-li se nyní  $\epsilon_{11}$  o  $d\epsilon_{11}$  a  $\gamma_{21}$  o  $d\gamma_{21} = d\epsilon_{12} + d\epsilon_{21}$ , změní se i tato práce, a to o hodnotu

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11} dx_2 dx_3) (d\epsilon_{11} dx_1) + (\sigma_{21} dx_1 dx_3) (d\gamma_{21} dx_2) = \\ & = (\sigma_{11} d\epsilon_{11} + \sigma_{12} d\epsilon_{12} + \sigma_{21} d\epsilon_{21}) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Přitom  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  jsou normálová napětí,  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  jsou sdružená tečná napětí. Obdobná práce se vykoná i při změnách ostatních složek tenzoru přetvoření, takže místo rovnice (3.5) budeme mít

$$d^4U = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dx_1 dx_2 dx_3 = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \quad (3.6)$$

Integrací dostaneme celkovou deformační energii

$$U = \int_V \Lambda(x_1, x_2, x_3) dV \quad (3.7)$$

kde

$$\Lambda = \frac{d^3U}{dx_1 dx_2 dx_3} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (3.8)$$

Vztah (3.8) platí obecně. Platí-li však Hookeův zákon (3.2), vyjde

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int E_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} = E_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \bar{\varepsilon}_{ij} \int_0^1 \lambda d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} E_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \bar{\varepsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Hodnotě  $\lambda=0$  přísluší počátek  $\varepsilon_{ij}=0$ , hodnotě  $\lambda=1$  konec deformace ( $\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}$ ). Vynecháme-li pro stručnost v dalším výkladu pruh nad symboly  $\varepsilon_{kl}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , budou pro konečný stav platit vztahy

$$\Lambda = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (3.10)$$

Platí jen pro lineárně pružná tělesa. Ihned je zřejmé, že

$$E_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \quad (3.11)$$

Za předpokladu spojitosti lze pořadí derivací zaměnit, takže lze také zaměnit skupiny indexů  $ij$ ,  $kl$ ; např.  $E_{ijkl} = E_{klij}$ . Tím se počet nezávislých konstant zmenší ze 36 na  $36 - \binom{6}{2} = 21$ . Anizotropní materiály mají tedy obecně 21 elastických modulů, resp. 21 elastických konstant. Ortotropní materiály jich mají jen 9, tělesa s transversální izotropií 5 a izotropní tělesa 2.

#### 4. ŘEŠENÍ NAPJATOSTI OKÓLO TRHLINY V PRUŽNÉM TĚLESE

Nejprve budeme předpokládat, že jde o dvousou napjatost  $\sigma_{11} = \sigma_x$ ,  $\sigma_{12} = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_y$ ; ostatní složky jsou nulové. Rovnice (2.20) dává

soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Hookeův zákon bude mít pro izotropní materiál tvar

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_{xx} \sigma_x + C_{xy} \sigma_y \\ \varepsilon_y &= C_{yx} \sigma_x + C_{yy} \sigma_y \end{aligned} \quad (4.2)$$

kde pro rovinnou napjatost máme

$$C_{xx} = C_{yy} = \frac{1}{E} \quad C_{xy} = C_{yx} = -\frac{\mu}{E} \quad (4.3)$$

Kdyby šlo o rovinné přetvoření, bylo by

$$C_{xx} = C_{yy} = \frac{1-\mu^2}{E} \quad C_{xy} = C_{yx} = -\frac{\mu(1+\mu)}{E} \quad (4.4)$$

V obou těchto případech by platilo, že

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \quad (4.5)$$

Zde  $E$  je modul pružnosti v tahu - tlaku,  $\mu$  Poissonovo číslo,  $G$  modul pružnosti ve smyku.

Je zřejmé, že případ rovinné napjatosti lze řešit formálně stejně jako případ rovinného přetvoření, neboť rovnice (4.1), (4.2) a (4.5) platí v obou případech.

Když výrazy (4.2) a (4.5) dosadíme do rovnice kompatibility (1.36), vyjde

$$\begin{aligned} C_{xx} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + C_{xy} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + C_{yx} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + C_{yy} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} &= \\ &= \frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Z rovnic (4.1) vypočteme

$$\frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (4.7)$$

S přihlédnutím k tomu, že  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , je

$$\frac{2(1+\mu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1+\mu}{E} \left( -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \quad (4.8)$$

Dosadíme-li výraz (4.8) do rovnice (4.6) a uvědomíme-li si přitom, že  $C_{xy} = C_{yx}$ ,  $C_{xx} = C_{yy}$  a že vztah

$$C_{xy} + \frac{1+\mu}{E} = C_{xx} \quad (4.9)$$

platí pro rovinnou napjatost i pro rovinné přetvoření, dostaneme

$$C_{xx} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (4.10)$$

Protože  $C_{xx}$  se nule nerovná, musí být

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (4.11)$$

To znamená, že součet napětí  $(\sigma_x + \sigma_y)$  je harmonickou funkcí proměnných  $x, y$ .

Rovnice rovnováhy (4.1) lze splnit substitucí

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} & &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.12)$$

O tom se lze přesvědčit dosazením. Funkce  $\Phi(x, y)$  je Airyho funkce napětí. Zřejmě

$$\sigma_x + \sigma_y = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = \nabla^2 \Phi \quad (4.13)$$

Dosadíme-li (4.13) do rovnice kompatibility (4.11), dostaneme podmínku

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \Phi = 0 \quad (4.14)$$

která říká, že  $\Phi(x, y)$  je bipotenciální (biharmonická) funkce.

Snadno se přesvědčíme, že rovnici (4.14) vyhovuje řešení

$$\Phi(x, y) = \psi_1(x, y) + x \psi_2(x, y) + y \psi_3(x, y) \quad (4.15)$$

v němž  $\psi_i(x, y)$  jsou harmonické funkce; pro ně platí vztah

$$\nabla^2 \psi_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.16)$$

Řešení rovnic (4.16) lze najít nejnázve užitím funkcí komplexní proměnné  $F(z) = F(x + iy)$ . Tato funkce se nazývá holomorfní v uvažovaném oboru, jestliže její derivace má v každém bodě tohoto oboru určitou hodnotu, nezávislou na směru přiblížení k onomu bodu. To znamená, že derivace funkce

podle  $x$  musí být stejná jako derivace funkce podle  $iy$  ( $i$  je imaginární jednotka). Proto musí platit, že

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{i\partial y} \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial F}{\partial y} - i \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4.17)$$

Funkci  $F$  můžeme rozložit na reálnou a na imaginární část

$$F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (4.18)$$

kde  $\varphi$  popř.  $\psi$  jsou reálné funkce proměnných  $x, y$ . Dosazením (4.18) do (4.17) dostaneme

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + i \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.19)$$

Komplexní číslo se rovná nule jen tehdy, rovná-li se nule jeho reálná i imaginární část. Musí proto být

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

To jsou známé Cauchyho-Riemannovy rovnice. Jsou to nutné a postačující podmínky pro to, aby funkce  $F(z)$  byla holomorfní.

Derivujeme-li první z rovnic (4.20) podle  $x$  a druhou podle  $y$  a sečteme, zruší se členy obsahující derivace funkce  $\varphi$  a zbude

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.21)$$

Obdobně můžeme vyloučit funkci  $\psi$ . V tom případě dostaneme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.22)$$

To znamená, že reálná i imaginární část holomorfní funkce  $F(z)$  komplexní proměnné  $z = x + iy$  splňují každá zvlášť Laplaceovu rovnici. Jsou to tedy harmonické funkce.

Označme nyní derivace holomorfní funkce  $F(z)$  takto:

$$\frac{dF}{dz} = f(z) \quad \frac{df(z)}{dz} = g(z) \quad \frac{dg(z)}{dz} = g'(z)$$

Zřejmě

$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{Re} F(z)}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{Im} F(z)}{\partial y} = \operatorname{Re} f(z) \\ \frac{\partial \operatorname{Im} F(z)}{\partial x} &= -\frac{\partial \operatorname{Re} F(z)}{\partial y} = \operatorname{Im} f(z)\end{aligned}\quad (4.23)$$

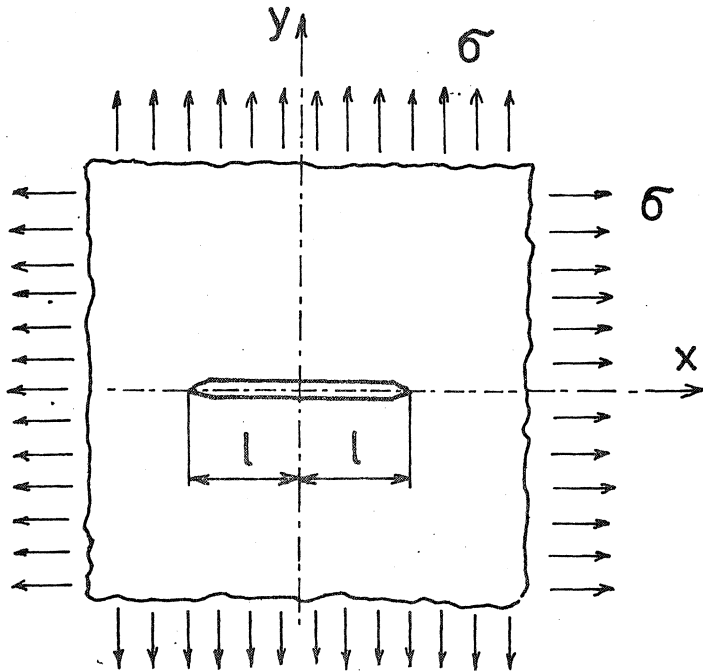
Vztahy (4.23) naznačují, jak lze reálnou nebo imaginární část funkce komplexní proměnné derivovat. Označili jsme

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} F(z) &= \varphi & \operatorname{Im} F(z) &= \psi \\ f(z) &= \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)\end{aligned}$$

Podobné vztahy platí i pro funkce  $g(z)$  a  $g'(z)$ .

#### 4.1 Trhlina rozvíraná tahem

Trhlina je umístěna v ose  $X$  souměrně k počátku a má délku  $2l$  (obr. 7). Zaujímá tedy v rovině  $X, Y$  úsečku  $-l < X < l, Y = 0$ . Deska je namáhána v nekonečnu rovnoměrným tahovým napětím. Původní napjatost byla tedy homogenní  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  a byla porušena trhlinou. Porucha zasahuje jen nejbližší okolí trhliny (podle Saint-Venantova principu) a je popsána Airyho



OBR. 7

funkcí napětí



$$\Phi = \operatorname{Re} F(z) + y \operatorname{Im} f(z) \quad (4.24)$$

Dosadíme-li (4.24) do (4.12), vyjde

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} g(z) - y \operatorname{Im} g'(z) & \sigma_y &= \operatorname{Re} g(z) + y \operatorname{Im} g'(z) \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} g'(z) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Podle (4.23) je totiž

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \operatorname{Re} f + y \operatorname{Im} g & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \operatorname{Re} g + y \operatorname{Im} g' \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= -\operatorname{Im} g + \operatorname{Im} g - y \operatorname{Re} g' = -y \operatorname{Re} g' ; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\operatorname{Im} f + y \operatorname{Re} g + \operatorname{Im} f = y \operatorname{Re} g ; & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \operatorname{Re} g - y \operatorname{Im} g' \end{aligned}$$

Zvolme nyní

$$g(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - l^2}} \quad (4.26)$$

Ukáže se, že právě tato funkce řeší napjatost v desce s trhlinou podle obr. 7. Je totiž<sup>1)</sup>

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \sigma \quad (4.27)$$

Takže v nekonečnu je  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = \sigma$ . Imaginární část funkce  $g'(z)$  v nekonečnu vymizí. Na přímce  $y = 0$  máme

$$g(z) \Big|_{y=0} = g(x) = \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - l^2}} \quad (4.28)$$

Tato funkce je reálná pro  $|x| > l$ , ryze imaginární pro  $0 < |x| < l$ , nulová pro  $x = 0$ . V bodech  $x = l$ , resp.  $x = -l$ , existuje singularita. Podle (4.25) tedy vyjde

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 0 & \text{pro } -l < x < l, \quad y = 0 \\ \tau_{xy} &= 0 & \text{pro } y = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

To však jsou okrajové podmínky pro trhlínu s nezatiženými okraji. Tyto podmínky by byly splněny, i kdyby v čitateli zlomku na pravé straně rovnice (4.26) byla libovolná analytická funkce  $g_1(z)$ , pro niž by platilo, že

$$\operatorname{Im} g_1(z) = 0 \quad \text{pro } |x| < l \quad (4.30)$$

1) Odmocnina z komplexního čísla není jednoznačná; vybereme hodnotu, která je v souladu s okrajovou podmínkou (kladné napětí v nekonečnu).

Pak funkce

$$g(z) = \frac{g_1(z)}{\sqrt{z^2 - l^2}} \quad (4.31)$$

řeší rovněž napjatost v okolí trhliny vyznačené na obr. 7, avšak při jiném, obecnějším zatížení.

Protože veškerá napětí limitují v bodě  $x = l$ ,  $y = 0$  (a ovšem i v bodě  $x = -l$ ,  $y = 0$ ) k nekonečnu, zaměříme se na vyšetření napjatosti v okolí tohoto bodu, tj. v okolí čela (kořene) trhliny. Za tím účelem posuneme do singulárního bodu počátek soustavy souřadnic. Místo proměnné  $z = x + iy$  budeme nyní mít  $\xi = \xi + i\eta$ , přičemž

$$\xi = z - l \quad (4.32)$$

Rovnice (4.26) dá

$$g(\xi + l) = \tilde{g}(\xi) = \frac{\sigma(l + \xi)}{\sqrt{\xi^2 + 2\xi l}} \quad (4.33)$$

Omezíme-li se na okolí, v němž  $|\xi| \ll l$ , bude

$$\tilde{g}(\xi) \cong \frac{\sigma l}{\sqrt{2\xi l}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\xi}} \quad (4.34)$$

kde součinitel

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \quad (4.35)$$

značí faktor intenzity napětí. Platí pro trhlínu v nekonečné oblasti rovinné napjatosti nebo rovinného přetvoření podle obr. 7.

Kdybychom vycházeli ze složitější funkce  $g(z)$  podle (4,31), dostali bychom

$$\tilde{g}(\xi) = \frac{g_1(l + \xi)}{\sqrt{\xi^2 + 2\xi l}} \quad (4.36)$$

Podle Taylorovy řady

$$g_1(\xi + l) = g_1(l) + g_1'(l)\xi + \dots \cong g_1(l) \quad (4.37)$$

Pak by opět platil vztah (4.34), bylo by však

$$K_I = g_1(\zeta) \sqrt{\frac{\pi}{l}} \quad (4.38)$$

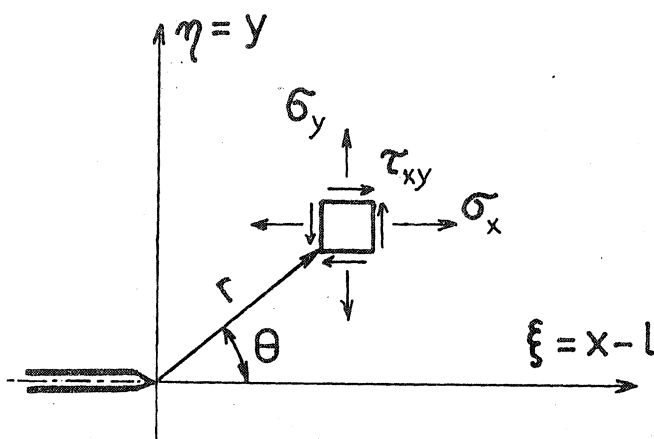
Vždy je

$$K_I = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \tilde{g}(\xi) \sqrt{2\pi\xi} \quad (4.39)$$

Typ singularity by se tedy neměnil, změnil by se pouze faktor intenzity napětí. Zvolíme-li ve zvláštním případě  $g_1(z) = \sigma^2$ , dostaneme případ okrajových podmínek podle obr. 7 a faktor intenzity napětí vyjde podle (4.35).

Dosaďme nyní do rovnice (4.34)

$$\xi = r e^{i\theta} \quad (4.40)$$



OBR. 8

Význam  $r$ ,  $\theta$  je zřejmý z obr. 8. Pak

$$\tilde{g}(\xi) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} e^{-i\theta/2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}'(\xi) &= -\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}} \xi^{-3/2} = -\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{r\sqrt{r}} e^{-i3\theta/2} \\ &= -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \left( \cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Podle první z rovnic (4.25) pak dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} \tilde{q}(\xi) - r \sin \theta \cdot \operatorname{Im} \tilde{q}'(\xi) = \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) = \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Celkem dostaneme (pro  $r \ll l$ )

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Chceme-li vypočítat posuvy, dosadíme (4.25) do rovnic (4.2) a (4.5), v nichž

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Integrací dostaneme po úpravě výrazy

$$\begin{aligned} \frac{2E}{1+\mu} u &= K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \frac{2E}{1+\mu} v &= K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.46)$$

v nichž  $k = 3 - 4\mu$  pro rovinnou deformaci a  $k = \frac{3-\mu}{1+\mu}$  pro rovinnou napjatost.

Vzorce (4.44) a (4.46) platí pro blízké okolí kořene trhliny, jejíž okraje se při daném statickém namáhání od sebe oddalují souměrně k rovině ( $x, z$ ). Počne-li se taková trhlina prodlužovat, šíří se štěpením (typ I).

**Poznámka.** Kdyby v oblasti znázorněné na obr. 7 působila pouze jednoosá napjatost  $\sigma_x = \sigma$ , neměla by na ni trhlina žádný vliv, neboť napětí  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  by byla v řezech  $y = \text{konst}$  beztak nulová. Tuto napjatost tedy můžeme odečíst, aniž se změní napjatost v okolí čela trhliny. Řešení (4.44), (4.46) a faktor intenzity napětí (4.35) platí tedy i pro případ nekonečně širokého taženého pásu s trhlinou orientovanou kolmo k ta-

novému napětí. V místech vzdálených od trhliny bude pak  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = 0$ .

#### 4.2 Trhlina namáhaná smykem

Za Airyho funkci (4.15) nyní zvolíme

$$\Phi = -y \operatorname{Re} f(z) \quad (4.47)$$

Z rovnic (4.12) dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Im} q(z) + y \operatorname{Re} q'(z) \\ \sigma_y &= -y \operatorname{Re} q'(z) \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} q(z) - y \operatorname{Im} q'(z) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Dosadíme

$$q(z) = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - l^2}} \quad (4.49)$$

Zřejmě

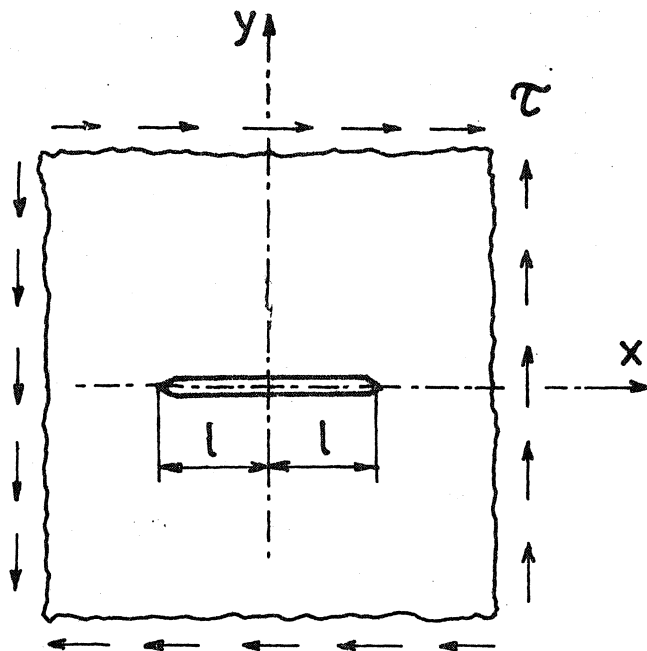
$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} q(z) = \tau \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} q'(z) = 0$$

Proto v nekonečnu působí pouze smykové napětí  $\tau_{xy} = \tau$  (obr. 9). Povrch trhliny ( $|x| < l$ ,  $y = 0$ ) není zatížen, neboť tam vyjde  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{yx} = 0$ . Funkce (4.49) tedy řeší okrajovou úlohu znázorněnou na obr. 9. Opět použijeme substituce (4.32) a (4.40). Pro faktor intenzity napětí

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi l} \quad (4.50)$$

pak vyjdou z rovnic (4.48) napětí (pro  $r \ll l$ )

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$



OBR. 9

Integrací vztahů (4.45) dostaneme (rovněž pro  $r \ll l$ )

$$\frac{2E}{1+\mu} u = k_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2k+3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.52)$$

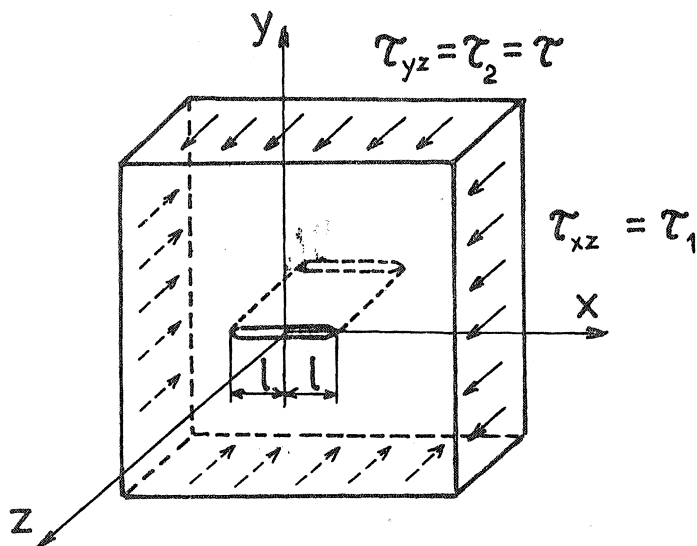
$$\frac{2E}{1+\mu} v = k_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (3-2k) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right]$$

Význam konstanty  $k$  je stejný jako v odst. 4.1. Oba povrchy trhliny se při tomto typu namáhání neoddalují, ale vzájemně se posouvají. Body na horním povrchu se posouvají stejně, ale v opačném smyslu než odpovídající body na spodním povrchu. Na přímce  $\theta = 0$  působí pouze smykové napětí. Říkáme proto, že trhlina je namáhána smykem (typ II). Není to však zcela přesně řečeno, neboť na povrchu trhliny žádné napětí nepůsobí.

### 4.3 Trhlina namáhaná stříhem

Pro tento typ namáhání (obr. 10) je možno předpokládat, že

$$u=0 \quad v=0 \quad w = w(x,y) \quad (4.53)$$



OBR.10

Jediná nenulová napětí tedy jsou

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Sdružená smyková napětí  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  nejsou na obr. 10 zakreslena, aby se obrázek nestal nepřehledným. Uvážíme-li, že  $\tau_{xz} = G_{13}$ ,  $\tau_{yz} = G_{23}$  a že ostatní napětí jsou nulová, dostaneme z rovnice (2.20) podmínku rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (4.55)$$

Dosadíme-li do této rovnice výrazy (4.54), vyjde

$$\nabla^2 w = 0 \quad (4.56)$$

Stačí tedy zvolit

$$w = \frac{1}{G} \operatorname{Im} q(z) \quad (4.57)$$

aby vyšlo

$$\tau_{xz} = \text{Im } g'(z) \qquad \tau_{yz} = \text{Re } g'(z) \qquad (4.58)$$

Tentokrát zvolíme

$$g(z) = \tau \sqrt{z^2 - l^2} \qquad (4.59)$$

takže

$$g'(z) = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - l^2}} \qquad (4.60)$$

Pak pro  $|z| \rightarrow \infty$  bude  $g = \tau z = \tau(x + iy)$  a posuv

$$w(|z| \rightarrow \infty) = \frac{\tau}{\theta} y \qquad (4.61)$$

Napětí v nekonečnu vyjdou z rovnic (4.58) a (4.60)

$$\tau_{xz} = 0 \qquad \tau_{yz} = \tau \qquad (4.62)$$

neboť  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g'(z) = \tau$ . V přímce  $y = 0$  dává (4.60)

$$g'(z) \Big|_{y=0} = g'(x) = \frac{\tau x}{\sqrt{x^2 - l^2}} = -i \frac{\tau x}{\sqrt{l^2 - x^2}} \qquad (4.63)$$

pro  $|x| < l$  ryze imaginární výraz, takže na povrchu trhliny je napětí  $\tau_{yz} = 0$ . Povrch trhliny tedy není zatížen. Funkce  $g(z)$  podle (4.59) vskutku řeší úlohu podle obr. 10, položíme-li  $\tau_{yz} = \tau$ ,  $\tau_{xz} = 0$ .

Stejným postupem jako v odst. 4.1, resp. 4.2, dostaneme pro faktor intenzity napětí

$$K_{\text{III}} = \tau \sqrt{\pi l} \qquad (4.64)$$

napětí v okolí čela trhliny ( $r \ll l$ )

$$\tau_{xz} = - \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \qquad \tau_{yz} = \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \qquad (4.65)$$

a posuv (rovněž pro  $r \ll l$ )

$$w = \frac{K_{\text{III}}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \qquad (4.66)$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že obecnou napjatost  $\tau_{xz} = \tau_1$ ,  $\tau_{yz} = \tau_2$  v nekonečnu podle obr. 10 řeší substituce

$$g(z) = \tau_2 \sqrt{z^2 - l^2} + i \tau_1 z \qquad (4.67)$$



a že napětí  $\tau_1$  nemá na napjatost v okolí čela trhliny žádný vliv.

Ani při tomto druhu namáhání se trhlina neotevřívá; body na horním povrchu trhliny se posunou stejně, avšak opačně než body na spodním povrchu, takže deformace je antisymetrická. Posuvy jsou rovnoběžné s čelem trhliny. Obdobné posuvy vznikají při stříhání. Proto mluvíme o trhlíně namáhané stříhem (typ III).

## Diskuse

V odst. 3.1 jsme ukázali, že typ namáhání daný rovnicemi (4.36), (4.39), (4.44) a (4.46) se nezmění, zaměníme-li funkci  $g_1(z) = \sigma z$  nějakou jinou, obecnější funkcí splňující podmínku (4.30). To znamená, že první typ namáhání trhliny se vyskytne nejenom v poli tahového napětí, ale i v poli ohybového nebo jinak rozděleného napětí, pokud bude splněna podmínka (4.30). Napětí a posuvy v blízkém okolí čela trhliny budou popsány vždy stejnými rovnicemi, v nichž se změní jen velikost součinitele  $K_I$ , zvaného faktor intenzity napětí.

Faktor intenzity napětí je přímo úměrný namáhání a odmocnině z délky trhliny. Konstanta úměrnosti však obecně závisí na tvaru tělesa a na jeho okrajových podmínkách, tj. na způsobu namáhání. Ať je však faktor intenzity napětí jakýkoli, je singularita napětí na čele trhliny vždy typu  $1/\sqrt{r}$  a posuvy v okolí čela trhliny se mění úměrně s  $\sqrt{r}$ , kde  $r$  je vzdálenost od čela trhliny. To platí v lineárně elastickém tělese vždy, ať je již namáhání typu I, II nebo III podle obr. 7, 9 nebo 10, avšak jen v okolí čela trhliny  $r \ll l$ . Má-li toto ohraničení platit i v obecnějším případě napjatosti, např. pro napjatost popsanou funkcí (4.31), musí být podle (4.37) také

$$|rg_1'(l)| \ll |g_1(l)| \quad (4.68)$$

To znamená, že se funkce  $g_1(z)$  smí v rozsahu délky trhliny změnit jen málo, nejvýš tak, aby přibližně platilo

$$l |g_1'(l)| \approx |g_1(l)| \quad (4.69)$$

Tato podmínka nebývá splněna, je-li čelo trhliny nedaleko jiné trhliny nebo okraje tělesa nebo nachází-li se trhlina v poli s velkým gradientem tenzoru napjatosti<sup>1)</sup>. V takovém případě je platnost uvedených vztahů

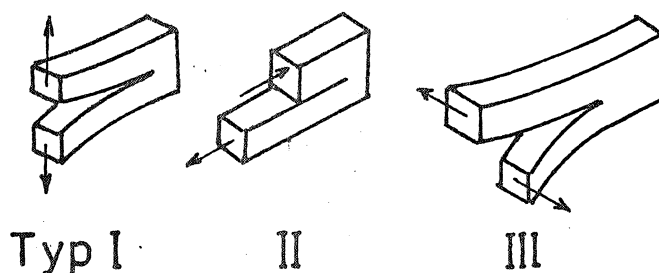
1) Za gradient tenzoru napjatosti považujeme soubor osmnácti veličin  $\sigma_{ij,k}$  ( $= \sigma_{ji,k}$ ;  $i, j, k = 1, 2, 3$ ). Velikost gradientu posuzujeme ve smyslu nějaké vhodné normy.

pro napětí a posuvy omezena podmínkou (4.68). Vždy tedy musí být splněny dvě silné nerovnosti

$$r \ll l \qquad r \ll \left| \frac{g_1(l)}{g_1'(l)} \right| \qquad (4.70)$$

aby uvedené vzorce platily<sup>1)</sup>.

Rovnice, které jsme až dosud uvedli, platí pro lineárně elastické kontinuum. Můžeme proto použít principu superpozice. Probrali jsme tři typy zatížení trhliny. Napjatost a deformace okolí čela trhliny, které vyhovuje podmínkám (4.70), lze vždy rozložit na lineární kombinaci uvedených tří základních typů. Jsou znázorněny na obr. 11.



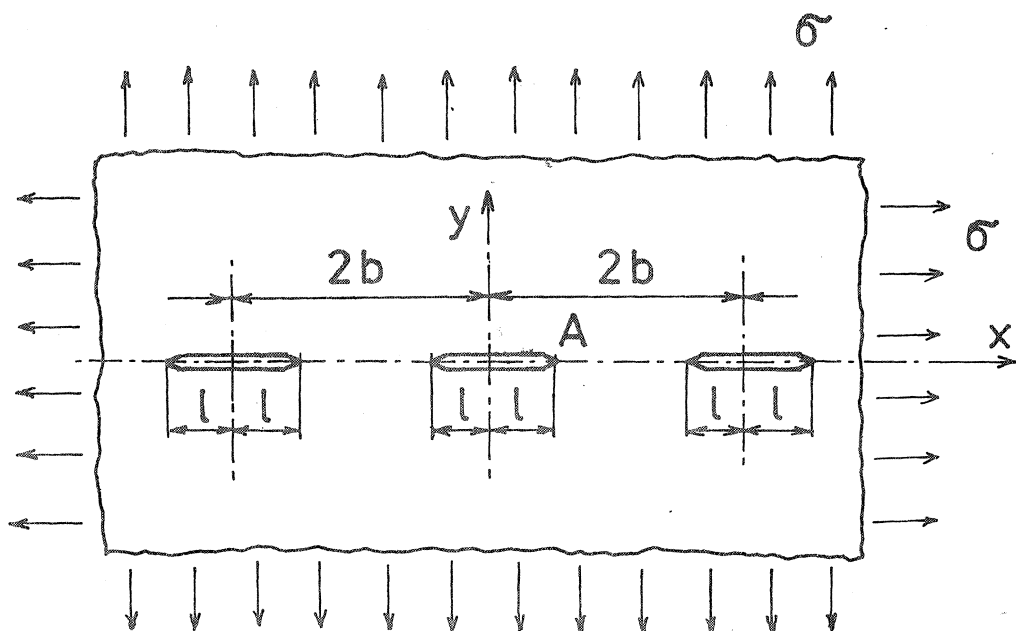
OBR. 11

Všechny trhliny, o nichž jsme až dosud pojednávali, byly rovné, hladké a ostré. Na obrázcích jsme sice pro větší přehlednost vyznačovali jejich tloušťku, ale ta je ve skutečnosti nulová (před zatížením se oba povrchy dotýkají; oddálí se jen při namáhání typu I). Zaoblení kořene trhliny má nulový poloměr křivosti; proto je na čele trhliny teoreticky nekonečně velké napětí. To nemůže ve skutečném materiálu působit. Skutečný materiál není dokonale homogenní a jeho mez pružnosti je omezená. O tom, jak prakticky zhodnotit uvedenou teorii napjatosti v okolí trhlín, pojednáme později.

1) Zápisu  $a \ll l$  rozumíme tak, že poměr  $a/l$  zanedbáváme ve srovnání s 1, pokud  $a > 0$ .

## 5. NAPJATOST V OKOLÍ ŘADY TRHLIN

Na obr. 12 je znázorněna nekonečná rovinná oblast namáhaná v nekonečnu všestranným tahem  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = 0$ . Je porušena řadou stejných a stejně vzdálených trhlin umístěných na přímce  $y=0$ . Délka každé trhliny je  $2\ell$ , jejich rozteč je  $2b$ . Na tomto příkladu můžeme studovat vzájemné působení relativně blízkých trhlin.



OBR. 12

Lze ukázat, že napjatost v dané oblasti je popsána vzorcí (4.25), jestliže do nich dosadíme funkci

$$g(z) = \frac{\sigma \sin \frac{\pi z}{2b}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{2b} - \sin^2 \frac{\pi \ell}{2b}}} \quad (5.1)$$

Výraz na pravé straně rovnice (5.1) můžeme upravit do tvaru<sup>1)</sup>

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\pi \ell / 2b)}{\sin^2(\pi z / 2b)}}} = \sigma \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi z / b)}{\cos(\pi \ell / b) - \cos(\pi z / b)}} \quad (5.2)$$

1) Za předpokladu, že  $\sin(\pi z / 2b) \neq 0$ .

z něhož je zřejmé, že funkce  $g(x, y = \text{konst})$  je periodická s periodou  $x_p = 2b$ . Stačí tedy vyšetřovat interval  $-b < x < b$ .

Z teorie komplexních čísel je známo, že

$$\sin \left[ \frac{\pi}{2b} (x+iy) \right] = \sin \frac{\pi x}{2b} \cosh \frac{\pi y}{2b} + i \cos \frac{\pi x}{2b} \sinh \frac{\pi y}{2b} \quad (5.3)$$

Tuto rovnici lze snadno odvodit z Eulerových vztahů. Je-li  $y \gg b$ , lze hyperbolické funkce nahradit exponenciální funkcí  $\frac{1}{2} \exp \frac{\pi y}{2b}$  a psát

$$\sin \left[ \frac{\pi}{2b} (x+iy) \right]_{y \gg b} \cong \frac{1}{2} \exp \frac{\pi y}{2b} \exp \frac{i \pi x}{2b} \quad (5.4)$$

Obdobný výraz dostaneme i pro  $y \ll -b$ . S jejich pomocí dokážeme, že

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} g(z) = \sigma \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} g'(z) = 0 \quad (5.5)$$

takže v nekonečnu jsou splněny okrajové podmínky  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = 0$ . Na přímce  $y=0$  platí podle (4.25)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} g(x) & \sigma_y &= \operatorname{Re} g(x) \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

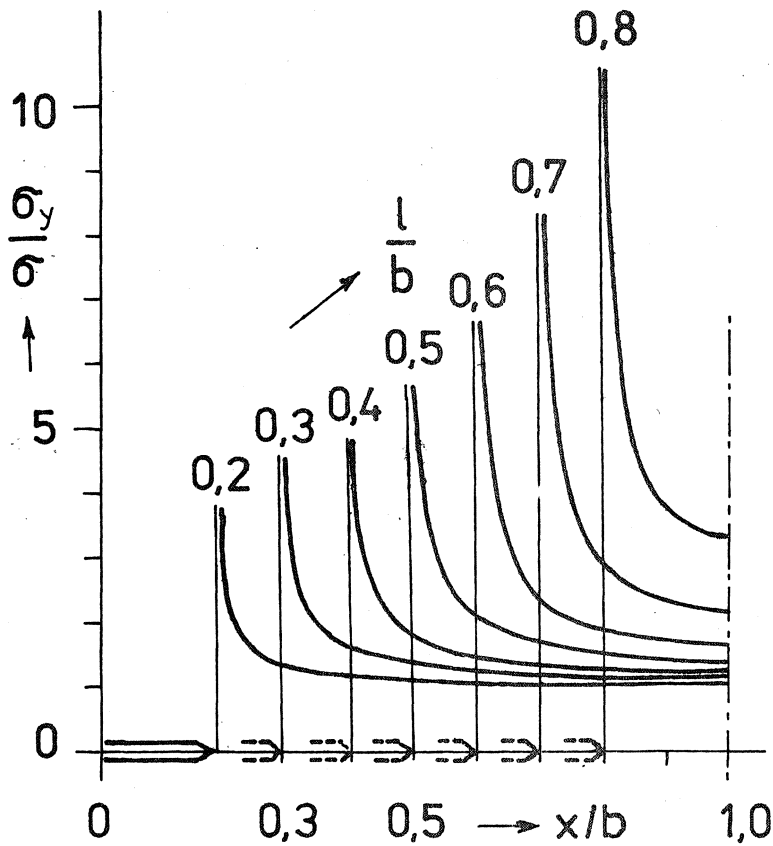
Z rovnice (5.1) je zřejmé, že na intervalu  $-b < x < b$  je  $g(x)$  ryze imaginární, takže  $\operatorname{Re} g(x) = 0$ . Povrch trhliny není tedy zatížen. Mezi trhlinami působí normálové napětí, které vypočteme z rovnic (5.6) a (5.2) (např. v intervalu  $b < x < 2b - b; y=0$ )

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi x/b)}{\cos(\pi \ell/b) - \cos(\pi x/b)}} \quad (5.7)$$

Průběh tohoto napětí je pro různě dlouhé trhliny zakreslen na obr. 13. Je zřejmé, že čím je můstek mezi trhlinami relativně užší, tím je hladina napětí v něm vyšší. Plochy pod vyznačenými čarami jsou stejné, protože celková přenášená síla nezávisí na délce trhlin.

Prozkoumáme nyní typ singularity napětí v okolí čela trhliny (bod A, obr. 12). Zvolíme opět lokální souřadnice v komplexní rovině  $\xi = \xi + i\eta$ ,  $\xi = z - b$  a dostaneme

$$\tilde{g}(\xi) = \frac{\sigma \sin \left[ \frac{\pi}{2b} (\xi + \ell) \right]}{\sqrt{\sin^2 \left[ \frac{\pi}{2b} (\xi + \ell) \right] - \sin^2 \frac{\pi \ell}{2b}}} \quad (5.8)$$



OBR. 13

Jsou-li splněny nerovnosti

$$|\xi| \ll l$$

$$|\xi| \ll b - l$$

$$(5.9)$$

můžeme přibližně dosadit

$$\sin \left[ \frac{\pi}{2b} (\xi + l) \right] \approx \frac{\pi \xi}{2b} \cos \frac{\pi l}{2b} + \sin \frac{\pi l}{2b} \quad (5.10)$$

a pak v rovnici (5.8) zanedbat malé veličiny vyššího řádu, takže

$$\tilde{q}(\xi) = \frac{\sigma \left( \sin \frac{\pi l}{2b} + \frac{\pi \xi}{2b} \cos \frac{\pi l}{2b} \right)}{\sqrt{\frac{\pi^2 \xi^2}{4b^2} \cos^2 \frac{\pi l}{2b} + \frac{\pi \xi}{b} \sin \frac{\pi l}{2b} \cos \frac{\pi l}{2b}} \quad \approx$$

$$\approx \sigma \sqrt{\frac{\sigma}{\pi \xi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi \ell}{2b}}{\cos \frac{\pi \ell}{2b}}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \xi}} \quad (5.11)$$

Faktor intenzity napětí jsme zavedli shodně s definicí (4.34), resp. (4.39). Vyjde

$$K_I = Y \sigma \sqrt{\pi \ell} \quad (5.12)$$

kde

$$Y = \sqrt{\frac{2b}{\pi \ell} \operatorname{tg} \frac{\pi \ell}{2b}} \quad (5.13)$$

je korekční činitel respektující vzájemný vliv trhlín. Je-li  $\ell/b \rightarrow 0$ , tj. jsou-li trhliny velmi vzdálené, vyjde  $Y=1$  a faktor intenzity napětí se ztotožní s výrazem (4.35). S rostoucím poměrem  $\ell/b$  činitel  $Y$  vzrůstá a pro  $\lim \ell \rightarrow b$  roste nade všechny meze.

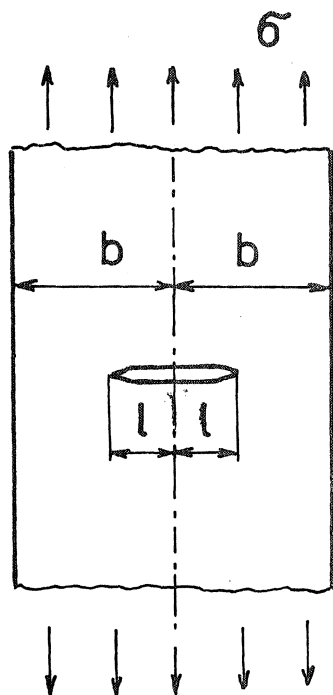
Ze vztahu (5.11) poznáváme, že pro okolí čela trhlíny ohraničeném nerovnostmi (5.9) platí dříve odvozené vztahy (4.44) a (4.46). Typ singularity se nezměnil. Vzájemný vliv trhlín se projeví jen ve změněné velikosti faktoru intenzity napětí.

Zcela obdobně lze získat faktor intenzity napětí i pro případ namáhání smykem nebo stříhem. Vyjde

$$K_{II} = K_{III} = Y \tau \sqrt{\pi \ell} \quad (5.14)$$

Pro činitel  $Y$  platí opět (5.13).

Homogenní pole rovinné napjatosti  $\sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$  by nemohlo být trhlinami rovnoběžnými s osou  $x$  podle obr. 12 rušeno, takže je lze odečíst. Stejně vzorce (5.12) a (5.13) proto platí i pro případ, že v nekonečnu působí pouze napětí  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = \sigma$ ,  $\tau_{xy} = 0$ . Mohli bychom se domnívat, že v takovém případě je  $\sigma_x = 0$  také podél přímk  $x = (2N+1)b$ ;  $N$  je celé číslo. Pak by bylo možné dvěma sousedními přímkami vymežit pás s trhlinou uprostřed namáhaný tahem (obr. 14). Ve skutečnosti nebude podél těchto přímk  $\sigma_x = 0$ , neboť se uplatní nerovnoměrné rozdělení napětí v okolí trhlín a příčná kontrakce. V řezech  $x = (2N+1)b$  na obr. 12 bude



OBR. 14

sice výsledná síla nulová, ale napětí  $\sigma_x$  se bude obecně od nuly lišit (zvláště pokud budou trhliny blízké). Proto se hodnota  $Y$  pro případ zakreslený na obr. 14 poněkud liší od hodnoty (5.13); přibližně je

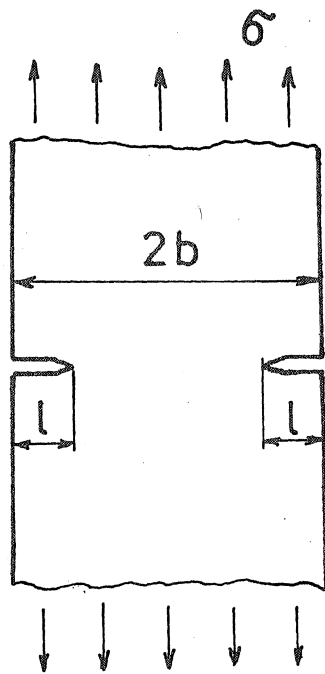
$$Y = \sqrt{\frac{2b}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2b} \left(1 + 0,308 \frac{l^2}{b^2}\right)} \quad (5.15)$$

Rovnice (5.15) platí pro  $0 \leq l/b \leq 0,6$  (obr. 14). Byla navržena tak, aby výpočet prakticky souhlasil s numerickými hodnotami, které uveřejnil M. Isida (1962).

Jednoduchý pás by bylo možno z oblasti znázorněné na obr. 12 uvolnit také dvěma sousedními přímkami ze soustavy  $x = 2Nl$ . Takový pás namáhaný tahem je znázorněn na obr. 15. Ani pro tento případ neplatí vztahy (5.12) a (5.13) přesně. Irwin vzorec korigoval přidáním druhého členu v oblé závorce

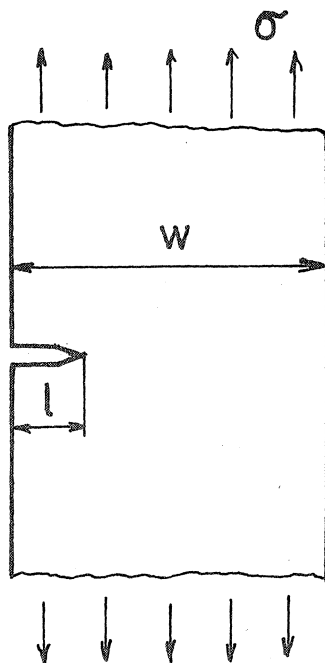
$$Y = \sqrt{\frac{2b}{\pi l} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2b} + 0,1 \sin \frac{\pi l}{b} \right)} \quad (5.16)$$

Vzorec (5.16) platí pro pás s dvěma bočními trhlinami podle obr. 15 namáhaný tahem, a to pro rozsah  $0 \leq l/b \leq 0,9$ .



OBR. 15

Ve všech probraných případech se napětí  $\sigma$  vztahuje k nezeslabenému průřezu.



OBR. 16



Mnohem větší korekce je zapotřebí, je-li na okraji pásu pouze jedna trhлина (obr. 16). Je-li pás namáhán tahem, zvětšuje se nerovnoměrnost napětí v zeslabeném průřezu tím, že se zde vytváří a skládá - názorně řečeno - tahové namáhání s ohybovým. Tyto pojmy však zde nemají přesný smysl, protože se Bernoulliho hypotéza o deformaci prutů nemůže v okolí trhliny vůbec uplatnit. Podle Cardewa a Howarda (1976) platí pro korekční činitel  $\gamma$  ve vzorci (5.12) tab. 1.

Tab. 1 Činitel  $\gamma$  pro pás s trhlinou namáhaný tahem (obr. 16)

$\frac{l}{w}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\gamma$	1,14	1,19	1,26	1,37	1,50	1,66	1,86	2,11	2,42	2,83
$\frac{l}{w}$	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	
$\gamma$	3,34	4,03	4,99	6,38	8,46	11,96	18,62	34,75	101,55	

## 6. TRHLINY V PRUŽNÝCH TĚLESECH SLOŽITĚJI NAMÁHANÝCH

Uvedeme některé vzorce pro výpočet faktorů intenzity napětí, které už nebudeme odvozovat. Jsou převzaty z literatury uvedené v seznamu na konci sborníku.

Nachází-li se obloukovitá trhлина v rovinné oblasti namáhané všestranným tahem (obr. 17), pak čelo trhliny je namáháno typem I i II (tahem i smykem). Přitom

$$K_I = \frac{G \sqrt{\pi R}}{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{2}} \quad (6.1)$$

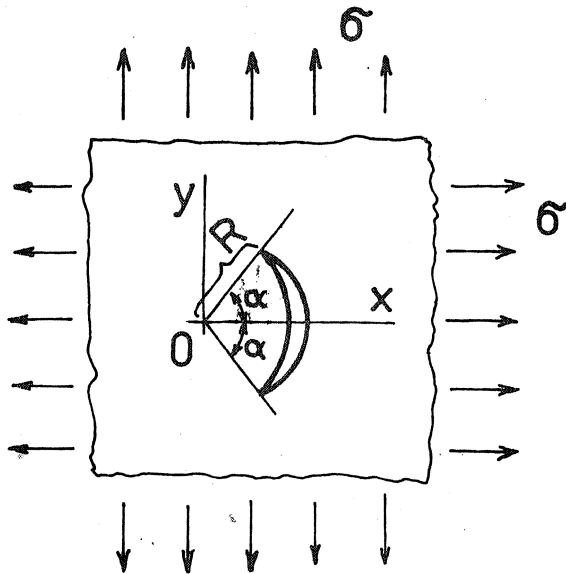
$$K_{II} = \frac{G \sqrt{\pi R}}{1 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2}} \quad (6.2)$$

Je-li úhel  $\alpha$  malý, je  $\sin \alpha \cong \alpha$ ,  $\cos \alpha \cong 1$ , takže

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K_I = G \sqrt{\pi R \alpha} = G \sqrt{\pi l} \quad (6.3)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K_{II} = 0$$

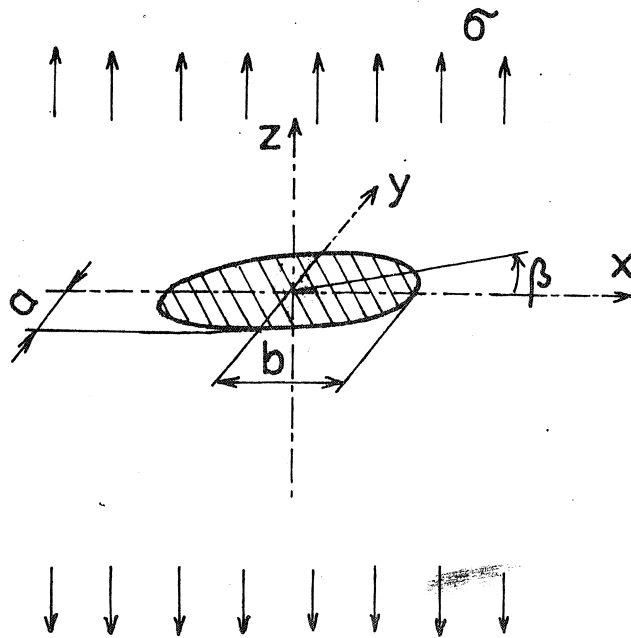
(6.4)



OBR. 17

Trhlina zřejmě přejde pro  $\alpha \rightarrow 0$  v přímou trhlinu o délce  $2l = 2R\alpha$  a uplatní se pouze namáhání typu I.

Pro eliptickou trhlinu penízkovitého typu, umístěnou v nekonečném elastickém prostředí namáhaném ve směru kolmo k trhlině tahem (obr. 18)



OBR. 18

máme

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\Phi_0 \left( \frac{a}{b} \right)} \sqrt{\sin^2 \beta + \frac{a^2}{b^2} \cos^2 \beta} \quad (6.5)$$

Faktor intenzity napětí se tedy po obvodě mění. Funkce  $\Phi_0 \left( \frac{a}{b} \right)$  je dána eliptickým integrálem

$$\Phi_0 \left( \frac{a}{b} \right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta \quad (6.6)$$

Zde  $a$ ,  $b$  jsou hlavní poloosy elipsy,  $b \geq a$ .

Je-li ve zvláštním případě  $a=b$ , přejde elipsa v kruh o poloměru  $a$  a vzorce (6.5) a (6.6) dají

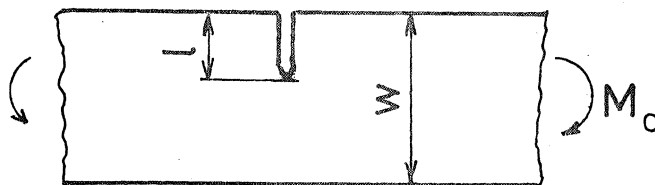
$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma \sqrt{a} \quad (6.7)$$

Vzorec (6.7) tedy platí pro kruhovou penízkovitou trhlinu o poloměru  $a$ , která se nachází v poli kolmého tahového napětí v izotropním elastickém kontinuu.

V minulém odstavci jsme uvedli vzorec pro výpočet faktoru intenzity napětí v dlouhém rovinném pásu s boční trhlinou při namáhání tahem. Je-li takový pás jednotkové tloušťky namáhán čistým ohybem (obr. 19), vyjde (za předpokladu rovinné napjatosti nebo rovinného přetvoření)

$$K_I = \frac{\varphi M_0 \sqrt{e}}{w^2} \quad (6.8)$$

kam za  $\varphi$  dosadíme z tab. 2. Hodnoty jsou převzaty z práce Cardewovy a Howardovy (1976).



OBR. 19

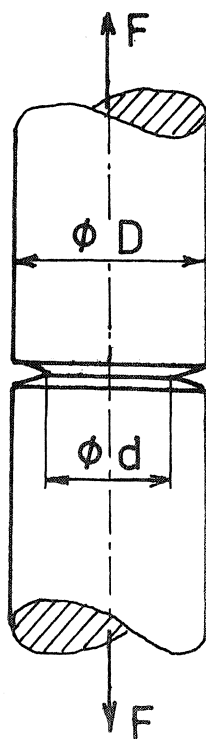
Tab. 2 Činitel  $\psi\left(\frac{l}{w}\right)$  pro pás s trhlinou namáhaný ohybem (obr. 19)

$\frac{l}{w}$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\psi$	11,4	11,1	11,1	11,2	11,5	12,0	12,6	13,5	14,5	15,9
$\frac{l}{w}$	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	
$\psi$	17,8	20,4	23,9	29,0	36,8	49,8	74,1	132,0	363,0	

Pro kulatou tyč s ostrou mezikruhovou trhlinou namáhanou tahem podle obr. 20 vyjde faktor intenzity napětí

$$K_I = \frac{F}{\pi d^2} \sqrt{\pi D} f\left(\frac{a}{D}\right) \quad (6.9)$$

kam za  $f\left(\frac{a}{D}\right)$  dosazujeme z tab. 3.



OBR. 20

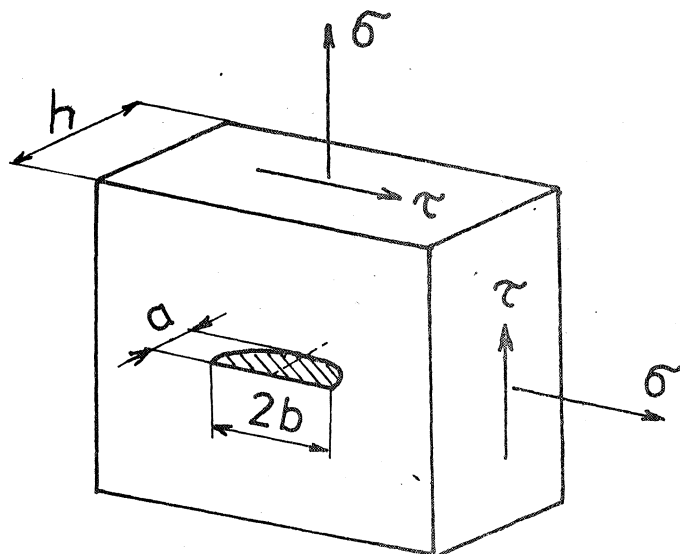
Tab. 3 Činitel  $f\left(\frac{d}{D}\right)$  pro kulatou tyč s obvodovou trhlinou (obr. 20)

$\frac{d}{D}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f$	0,117	0,164	0,196	0,221	0,240	0,255	0,259	0,251	0,210

Pro půleliptickou trhlinu podle obr. 21, která má hloubku (malou poloosu)  $a$  a šířku (velkou osu)  $2b$ , přičemž  $b/a > 1$ ,  $a/h < 1$ ; platí vzorce

$$K_I = \left[ 1 + 0,12 \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \right] \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\Phi_0\left(\frac{a}{b}\right)} \sqrt{\frac{2h}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2h}} \quad (6.9)$$

$$K_{III} = \frac{\tau \sqrt{\pi a}}{\Phi_0\left(\frac{a}{b}\right)} \sqrt{\frac{2h}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2h}} \quad (6.10)$$

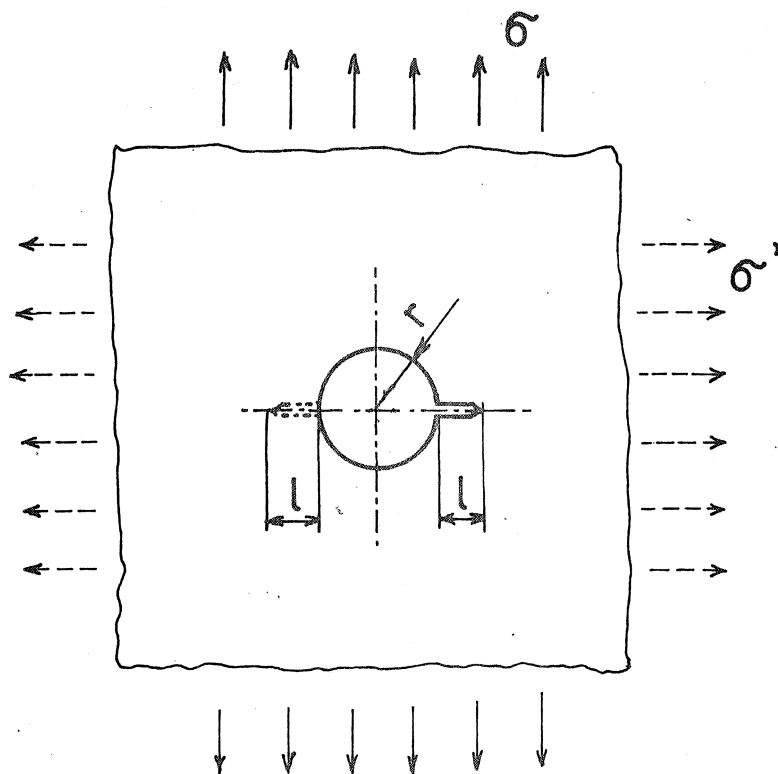


OBR. 21

Tyto hodnoty se vztahují k nejhlubšímu místu trhliny (ke konci malé poloosy). Platí zhruba pro rozsah  $0 \leq a/h \leq 0,5$ . Na velikosti napětí  $\sigma$  přitom nezáleží.

Na obr. 22 je zakreslen kruhový otvor o poloměru  $r$  v rovinné oblasti namáhané všestranným tahem. Z otvoru vybíhá jedna, resp. dvě trhliny. Délka trhliny je  $l$ . Pro faktor intenzity napětí v tom případě dostaneme

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \, q\left(\frac{l}{r}\right) \quad (6.11)$$



OBR. 22

kam za  $g(\frac{l}{r})$  dosadíme z tab. 4.

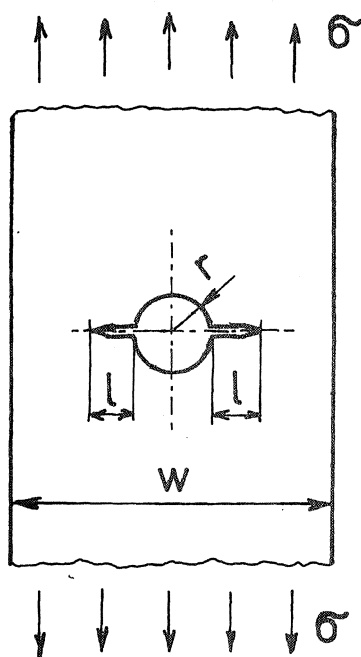
Napětí, jež je na obr. 22 vyznačeno čárkovaně, má na koncentraci napětí na čele trhliny relativně malý vliv. Přibližně lze proto rovnici (6.11) použít i pro případ, že se obě napětí liší; činitel  $g(l/r)$  odhadneme v takovém případě z tab. 4 interpolací mezi případy  $\sigma' = 0$  a  $\sigma' = \sigma$ .

Pro pás o šířce  $w$  s otvorem uprostřed a se dvěma trhlinami podle obr. 23 platí vzorec

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \sqrt{\sec(\pi l/w)} \sqrt{(r/l) + 1} \quad (6.12)$$

Tab. 4 Činitel  $f(l/r)$  pro otvor s trhlinami podle obr. 22

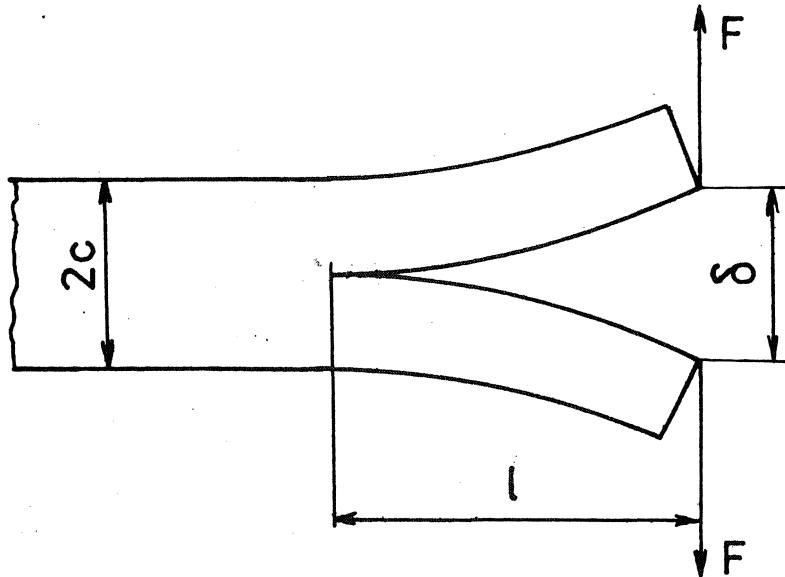
$\frac{l}{r}$	Jedna trhlina		Dvě trhliny	
	$\sigma' = 0$	$\sigma' = \sigma$	$\sigma' = 0$	$\sigma' = \sigma$
0,0	3,39	2,26	3,39	2,26
0,1	2,73	1,98	2,73	1,98
0,2	2,30	1,82	2,41	1,83
0,3	2,04	1,67	2,15	1,70
0,4	1,86	1,58	1,96	1,61
0,5	1,73	1,49	1,83	1,57
0,6	1,64	1,42	1,71	1,52
0,8	1,47	1,32	1,58	1,43
1,0	1,37	1,22	1,45	1,38
1,5	1,18	1,06	1,29	1,26
2,0	1,06	1,01	1,21	1,20
3,0	0,94	0,93	1,14	1,13
5,0	0,81	0,81	1,07	1,06
10,0	0,75	0,75	1,03	1,03
$\infty$	0,707	0,707	1,00	1,00



OBR. 23

Na obr. 24 je zakresleno štěpení rovinného prutu. Předpokládáme, že se trhlina šíří v ose prutu. Jsou-li oba konce trhliny rozvírány silou  $F$  tak, že se vzájemně oddálí o  $\delta$ , vzniká na čele trhliny singularita napjatosti s faktorem intenzity napětí

$$K_I = \frac{\sqrt{3} E \delta c \sqrt{c}}{4 l^2} \quad (l \gg 2c) \quad (6.13)$$



OBR. 24

Pro hlubokou trhlinu v tělese znázorněném na obr. 25, které je namáháno (v nekonečnu) tahovou silou  $F$  a ohybovým momentem  $M$ , platí vzorec

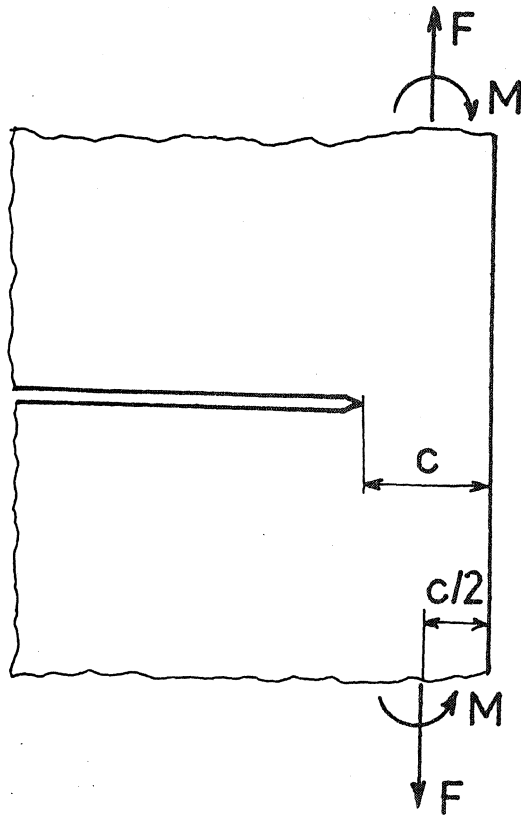
$$K_I = \sqrt{\pi} \frac{4\pi - 12}{\pi^2 - 8} \frac{F}{\sqrt{c}} + \sqrt{\pi} \frac{4\pi - 8}{\pi^2 - 8} \frac{M}{c\sqrt{c}} \quad (6.14)$$

Silové veličiny se přitom vztahují na jednotku tloušťky tělesa, takže síla  $F$  má fyzikální rozměr  $Nm^{-1}$  a ohybový moment  $M$  má fyzikální rozměr  $Nm/m = N$ .

Jako poslední případ uvedeme v tomto odstavci táhlo s okem namáhané silou  $F$  podle obr. 26; síla se přenáší do čepu tak, že tlak mezi čepem a otvorem v oku táhla je rozdělen po polovině válcového povrchu podle kosinusovky

$$\sigma_r = - \frac{2F}{\pi R_1 r} \cos \psi \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.15)$$





OBR. 25

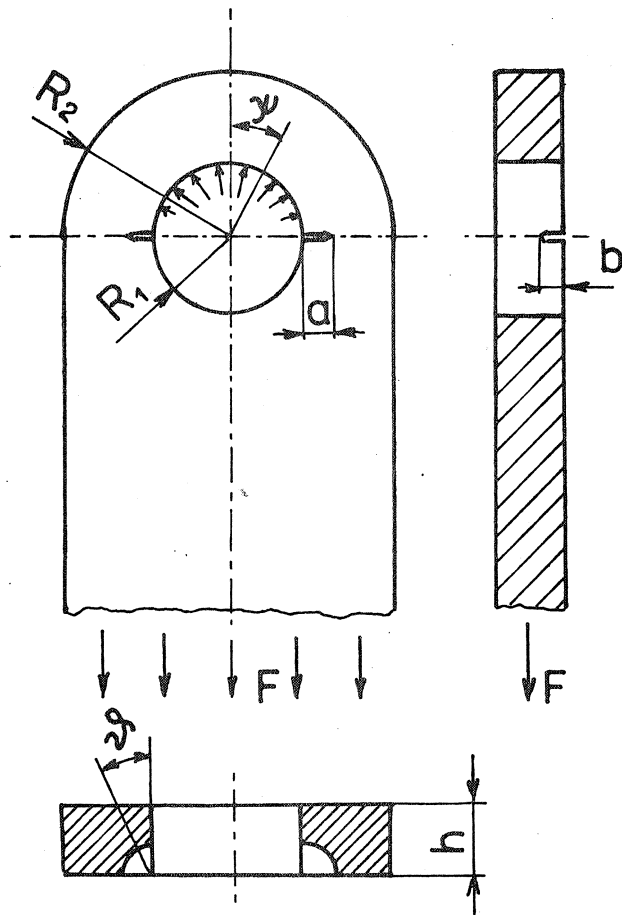
Vzniknou-li v rozích zeslabeného průřezu dvě symetrické trhliny ve tvaru čtvrtelips o poloosách  $a$ ,  $b$  (poloosa  $a$  se měří na lícním povrchu, poloosa  $b$  zasahuje do hloubky otvoru pro čep), je faktor intenzity napětí dán vztahem (pro dvě čtvrteliptické trhliny, což vyznačujeme indexem 2)

$$K_{I2} = \frac{F}{2R_1 h} \sqrt{\pi R_1} f\left(\theta, \frac{a}{b}, \frac{b}{h}\right) \quad (6.16)$$

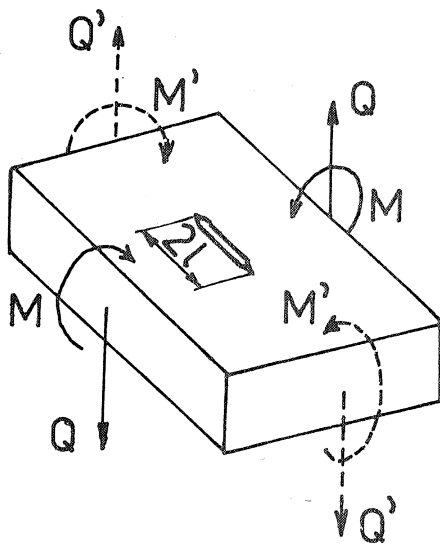
Funkci  $f$  najdeme z tab. 5. Jde-li o táhlo jen s jednou čtvrteliptickou trhlinou, vypočteme

$$K_{I1} = K_{I2} \sqrt{\frac{8R_1 h + \pi a b}{8R_1 h + 2\pi a b}} \quad (6.17)$$

Tab. 5 je převzata z práce T. Nishioky a S.N. Atluriho (1983).



OBR. 26



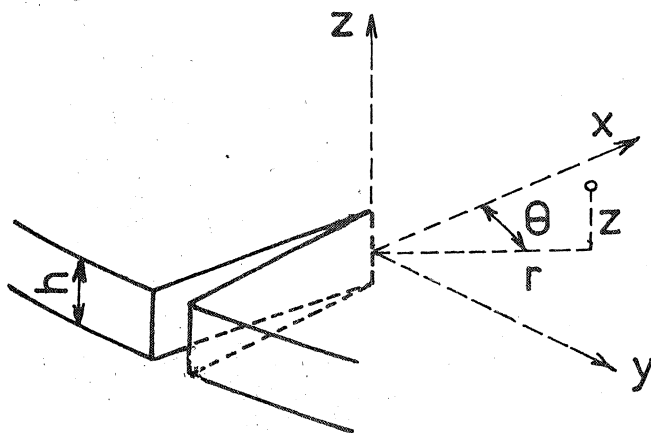
OBR. 29

Tab. 5 Funkce  $f$  pro výpočet táhla s trhlinami podle obr. 26

$a/b$	0,5			1,2			2,0		
	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8	0,2	0,5	0,8
$\psi = 0^\circ$	0,299	0,475	0,600	0,462	0,703	0,936	0,525	0,827	1,086
$10^\circ$	0,299	0,453	0,577	0,435	0,631	0,806	0,482	0,722	0,906
$20^\circ$	0,310	0,442	0,529	0,404	0,556	0,679	0,433	0,611	0,733
$30^\circ$	0,323	0,439	0,514	0,375	0,495	0,585	0,387	0,520	0,610
$40^\circ$	0,335	0,440	0,513	0,354	0,453	0,533	0,350	0,456	0,545
$50^\circ$	0,344	0,445	0,524	0,340	0,430	0,519	0,322	0,417	0,522
$60^\circ$	0,351	0,453	0,541	0,333	0,421	0,528	0,300	0,395	0,518
$70^\circ$	0,358	0,462	0,559	0,330	0,421	0,548	0,282	0,381	0,518
$80^\circ$	0,365	0,471	0,574	0,331	0,430	0,575	0,269	0,376	0,524
$90^\circ$	0,372	0,480	0,588	0,334	0,446	0,609	0,268	0,386	0,548

## 7. TRHLINY V TENKÝCH OHÝBANÝCH DESKÁCH

Platí-li Kirchhoffova teorie, jsou napětí v desce úměrná vzdálenosti od střední roviny, do níž položíme počátek souřadnic. Budeme-li v rámci této teorie posuzovat napjatost v okolí ostré průchozí trhliny (obr. 27), dostaneme za předpokladu dokonalé homogenity a lineární elasticity



OBR. 27

tyto vzorce

$$\begin{aligned} G_r = & \frac{7+\mu}{2(3+\mu)} \frac{K_B}{\sqrt{2\pi r}} \frac{z}{h} \left[ \frac{3+5\mu}{7+\mu} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \\ & + \frac{5+3\mu}{2(3+\mu)} \frac{K_S}{\sqrt{2\pi r}} \frac{z}{h} \left[ -\frac{3+5\mu}{5+3\mu} \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.1)$$

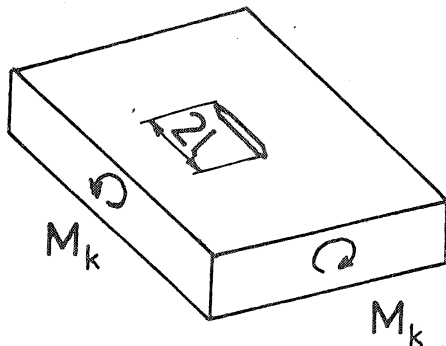
$$\begin{aligned} G_\theta = & \frac{7+\mu}{2(3+\mu)} \frac{K_B}{\sqrt{2\pi r}} \frac{z}{h} \left[ \frac{5+3\mu}{7+\mu} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] - \\ & - \frac{5+3\mu}{2(3+\mu)} \frac{K_S}{\sqrt{2\pi r}} \frac{z}{h} \left[ \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} T_{r\theta} = & \frac{7+\mu}{2(3+\mu)} \frac{K_B}{\sqrt{2\pi r}} \frac{z}{h} \left[ -\frac{1-\mu}{7+\mu} \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \\ & + \frac{5+3\mu}{2(3+\mu)} \frac{K_S}{\sqrt{2\pi r}} \frac{z}{h} \left[ -\frac{1-\mu}{5+3\mu} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (7.3)$$

Singulární část napjatosti je tedy určena dvěma faktory intenzity napětí, z nichž  $K_B$  se vztahuje k ohybu a  $K_S$  ke smyku.

Je-li trhlina relativně krátká a vzdálená od okrajů desky a od působišť soustředěných sil, lze ji posuzovat tak, jako by byla v nekonečné desce. Působí-li v takové desce krouticí moment  $M_k$  (obr. 28), je

$$K_B = 0, \quad K_S = \frac{6M_k}{h^2} \sqrt{\pi l} \quad (7.4)$$



OBR. 28

Působí-li v desce ohyb (tj. ohybové momenty a posouvající síla podle obr. 29 na str. 55), je

$$K_B = \frac{6M}{h^2} \sqrt{\pi l} \quad K_S = \frac{8\sqrt{\pi} Q l \sqrt{l}}{h^2} \quad (7.5)$$

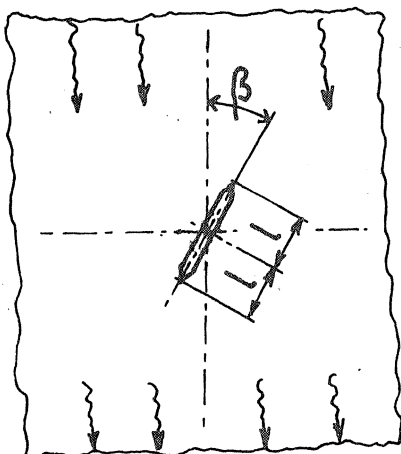
Na posouvající síle  $Q'$  a ohybovém momentu  $M'$  přitom nezáleží.

## 8. TRHLINY V TĚLESE S NEROVNOMĚRNÝM ROZDĚLENÍM TEPLoty

Představuje-li trhlina izolovanou plošku v rovinném poli s teplotním gradientem  $\nabla t$  (což je rozdíl teplot vztažený na jednotku délky ve směru tepelného toku v neporušené oblasti), vznikne účinkem trhliny porucha teplotního pole. Tím vznikne i napěťové pole se singularitami na koncích trhliny, které popisuje faktor intenzity napětí typu II (obr. 30)

$$K_{II} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha E l \sqrt{l} \nabla t \sin \beta \quad (8.1)$$

Zde  $\alpha$  je délková roztažnost,  $E$  modul pružnosti v tahu či tlaku.



OBR. 30

Vznikne-li v nekonečném pružném tělese s rovnoměrným spádem teploty penízkovitá trhlina o poloměru  $a$ , kolmá k tepelnému toku (obr. 31), je

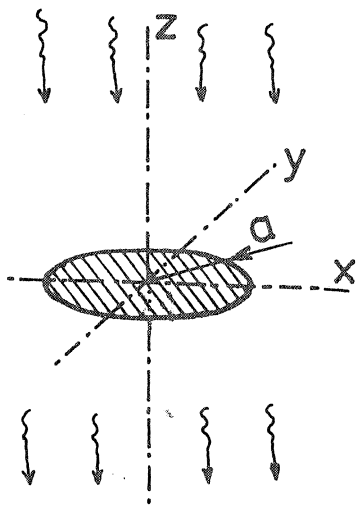
$$K_{II} = \frac{\alpha E a \sqrt{a} \nabla t}{3\sqrt{\pi} (1-\mu)} \quad (8.2)$$

Vzorce (8.1) a (8.2) bývají v literatuře citovány chybně.

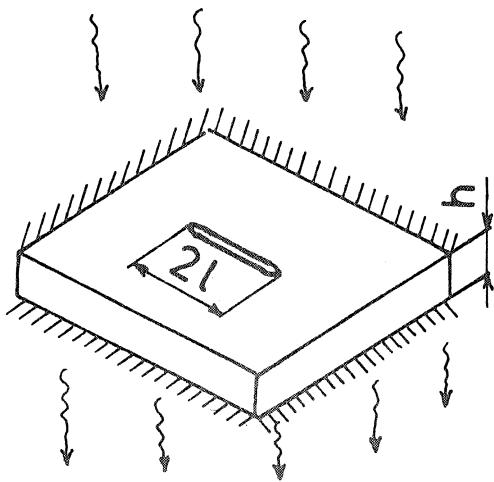
Je-li trhlina o délce  $2l$  v desce s vetknutými okraji (obr. 32) vystavena působení gradientu teploty, je

$$K_B = \frac{\alpha E h \nabla t \sqrt{\pi l}}{2(1-\mu)} \quad (8.3)$$

$$K_S = 0 \quad (8.4)$$



OBR. 31



OBR. 32

## 9. UVOLŇOVÁNÍ DEFORMAČNÍ ENERGIE PŘI ŠÍŘENÍ TRHLINY

Vrátíme se ještě k případu trhliny v nekonečné rovinné oblasti namáhané všestranným tahem podle obr. 7. V nezatížené oblasti je trhlina uzavřená (oba lící povrchy se dotýkají) a ostrá, takže ji v dané oblasti znázorňuje úsečka  $-l < x < l$ ,  $y = 0$ . Vypočteme svislé posuvy na jejím okraji, tj. funkci  $v(x)$ ,  $|x| < l$ . Tyto posuvy určují tvar rozevřené trhliny. Vyjdeme z druhých vztahů v rovnicích (4.2) a (4.45), podle nichž

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = C_{yx} \sigma_x + C_{yy} \sigma_y \quad (9.1)$$

Dosadíme sem z rovnic (4.25) a zintegrujeme při konstantním  $x$ . Dostaneme

$$v = (C_{yy} + C_{yx}) \int \operatorname{Re} g(z) dy + \\ + (C_{yy} - C_{yx}) \int y \operatorname{Im} g'(z) dy \quad (9.2)$$

K integraci použijeme vzorce (4.23). Označíme-li  $f(z) = \int g(z) dz$ , bude

$$\int \operatorname{Re} g(z) dy = \operatorname{Im} f(z) \quad (9.3)$$

$$\int y \operatorname{Im} g'(z) dy = -y \operatorname{Re} g(z) + \int \operatorname{Re} g(z) dy = \\ = -y \operatorname{Re} g(z) + \operatorname{Im} f(z) \quad (9.4)$$

Integrály (9.3) a (9.4) dosadíme do rovnice (9.2). Po úpravě získáme vztah

$$v = 2C_{yy} \operatorname{Im} f(z) - \\ - (C_{yy} - C_{yx}) y \operatorname{Re} g(z) + \operatorname{konst.} \quad (9.5)$$

Integrační konstantu určíme tak, aby pro  $\lim_{y \rightarrow \infty} v = \lim_{y \rightarrow \infty} v = (C_{yy} + C_{yx}) \sigma_y$ . Malá trhlina v okolí počátku souřadnic nemůže totiž ovlivnit posuvy v nekonečnu.

Protože  $g(z)$  je dáno rovnicí (4.26), vyjde

$$f(z) = \sigma \sqrt{z^2 - l^2} \quad (9.6)$$

a v nekonečnu dostaneme

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \sigma z = \sigma(x + iy), \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \sigma \quad (9.7)$$

$$v_{\infty} = 2C_{yy} \sigma y - (C_{yy} - C_{yx}) \sigma y + \operatorname{konst.} = \\ = (C_{yy} + C_{yx}) \sigma y + \operatorname{konst.} \quad (9.8)$$

Dosažením okrajové podmínky na levou stranu rovnice (9.8) se přesvědčíme, že integrační konstanta je nulová. Platí tedy pro rovinnou napjatost, že

$$v = \frac{2}{E} \operatorname{Im} f(z) - \frac{1+\mu}{E} y \operatorname{Re} g(z) \quad (9.9)$$

a pro rovinné přetvoření

$$v = \frac{2(1-\mu^2)}{E} \operatorname{Im} f(z) - \frac{1+\mu}{E} y \operatorname{Re} g(z) \quad (9.10)$$

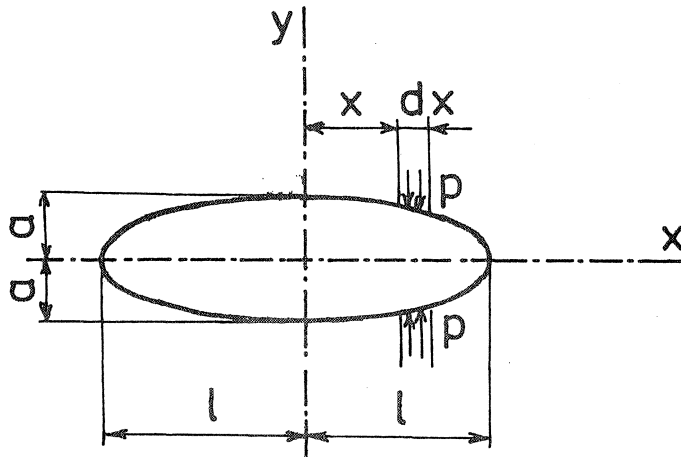
Pro okraj trhliny je  $|x| < l$ ,  $y = 0$ . Když tyto hodnoty dosadíme do funkcí (4.26) a (9.6), dostaneme z rovnice (9.9), resp. (9.10), svislý posuv horního okraje trhliny

$$v = \frac{2G}{E'} \sqrt{l^2 - x^2} \quad (9.11)$$

kde

$$E' = \begin{cases} E & \text{pro rovinnou napjatost} \\ \frac{E}{1-\mu^2} & \text{pro rovinné přetvoření} \end{cases} \quad (9.12)$$

Posuv spodního okraje se liší jen znaménkem. To znamená, že trhlina se rozevře do tvaru elipsy o malé poloose  $a = 2Gl/E$ , resp.  $2(1-\mu^2)Gl/E$ . Velká poloosa se rovná poloviční délce trhliny  $l$ . Zřejmě  $a \ll l$ , neboť modul pružnosti bývá nejméně o tři řády větší než napětí  $G$ . Elipsa je tedy velmi úzká. Na obr. 33 je zakreslena tak, že posuvy ve směru osy  $y$  jsou přehnány.



OBR. 33

Kdybychom chtěli trhlinu odstranit a materiál opět zacelit, musili bychom připojit na její okraje napětí  $G_y = p$ . Toto napětí by se v každém místě měnilo během pomalého zatěžování od nuly (na počátku zatěžování) do hodnoty  $G$  (na konci zatěžování). Předpokládejme, že  $p = \lambda G$ ,



$0 \leq \lambda \leq 1$  . Posuvy se pak budou měnit úměrně k tomuto zatížení, takže

$$dv = \frac{2\sigma}{E'} \sqrt{\ell^2 - x^2} dx \quad (9.13)$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tloušťka desky na obr. 33 je jednotková. Elementární síly  $dF = p \cdot 1 \cdot dx = p dx = \lambda \sigma dx$  vykonají při posuvech (9.13) práci

$$\begin{aligned} dA &= 2 \int dF dv = 2 \sigma dx \frac{2\sigma}{E'} \sqrt{\ell^2 - x^2} \int_0^1 \lambda dx = \\ &= \frac{2\sigma^2}{E'} \sqrt{\ell^2 - x^2} dx \end{aligned} \quad (9.14)$$

Integrací dostaneme celkovou práci potřebnou k uzavření trhliny

$$A = \frac{2\sigma^2}{E'} \int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{\ell^2 - x^2} dx = \frac{\pi \sigma^2 \ell^2}{E'} \quad (9.15)$$

Předpokládáme dokonale pružný homogenní materiál a malé posuvy, takže platí princip superpozice. Proto  $A$  představuje také práci, která se v původní desce bez trhliny uvolní vznikem trhliny. Byla-li celková deformační energie v desce bez trhliny  $U_0$ , bude nyní o hodnotu  $A$  menší, tj. bude  $U = U_0 - A$ . Přitom si představujeme, že deska je značně velká, ale nikoli nekonečná. Zvětší-li se poloviční délka trhliny  $\ell$  o  $\delta\ell$ , uvolní se další část deformační energie

$$\delta U = -\frac{\partial A}{\partial \ell} \delta\ell = -\frac{2\pi\sigma^2\ell}{E'} \delta\ell \quad (9.16)$$

Počne-li se trhlina šířit, bude se deformační energie uvolňovat a měnit v jiné druhy energií. Podstatná část se přitom spotřebuje na vytvoření nového povrchu, zbytek se rozptýlí do okolí.

Zavedeme-li pojem "rychlost" uvolňování deformační energie  $q$  jako podíl uvolněné energie  $-\delta U$  a délky přírůstku trhliny  $2\delta\ell$ , bude  $q = -\delta U / 2\delta\ell$ . To znamená, že přírůstek délky trhliny zde vystupuje v přeneseném smyslu slova jako čas. Pojem "rychlost" se zde nevztahuje k času, ale k délce trhliny.

Přitom předpokládáme, že tloušťka desky je jednotková. Fyzikální rozměr veličiny  $q$  je  $\text{Nm/m}^2 = \text{N/m}$ . Je to tedy síla vztažená na jednotku tloušťky stěny. Proto se někdy používá méně vhodný název "hnací síla trhliny".

Máme tedy k dispozici energii  $-\delta U = 2\sigma \delta l$ , která se uvolní při rozšíření trhliny o přírůstek délky  $2\delta l$ . Záporné znaménko na levé straně značí, že jde o úbytek deformační energie v tělese. Naskytá se otázka, jak tato energie souvisí se vznikem nového povrchu. Bude-li energie potřebná k vytvoření nového povrchu větší než energie uvolněná, nebude se moci trhlina šířit. Bude-li naopak menší, bude se trhlina šířit spontánně. Na hranici stability trhliny se budou obě tyto energie rovnat. Dostali jsme tak energetické (termodynamické) kritérium pro šíření trhliny, které se principiálně liší od pevnostní podmínky, v níž se porovnává efektivní napětí s mezí pevnosti.

Energie pohlcená nově vznikajícím povrchem souvisí jednak s povrchovým napětím, jednak s plastickými deformacemi (a jen podružně s jinými druhy energií). Povaha této energie je jiná u zcela křehkých látek než u látek, které se mohou plasticky tvářet.

Griffith ukázal, že povrchové napětí existuje nejen u kapalin, ale i u tuhých látek. Vznik nové lomové plochy je proto nutně spojen se spotřebou energie na vytvoření povrchového napětí. Velikost této energie vztáhneme k jednotce plochy a označíme  $\gamma$ . Griffith důmyslnými pokusy ukázal, že u skla se téměř veškerá uvolňovaná deformační energie spotřebuje právě na tuto povrchovou energii. To platí především pro začátek šíření trhliny, kdy lze jiné druhy energie - např. kinetickou - zanedbat. Rozšíří-li se trhlina, která má délku  $2l$ , o přírůstek  $2\delta l$ , bude

$$-\delta U = \gamma \cdot 2 \cdot 2\delta l \cdot 1 = 4\gamma \delta l \quad (9.17)$$

Pamatujme, že trhlina má dva lícni povrchy. Proto je celkový přírůstek lomové plochy  $4\delta l \cdot 1$ . Dosadíme-li (9.16) do energetické bilance (9.17), dostaneme Griffithovu podmínku pro napětí  $\sigma$ , při němž je šíření trhliny možné, ve tvaru

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E'\gamma}{\pi l}} = \sigma_c \quad (9.18)$$

Je-li k vytvoření nového povrchu zapotřebí více energie než se jí rozšířením trhliny uvolní, nemůže se trhlina šířit. Tak tomu je, je-li  $\sigma < \sigma_c$ ; říkáme, že trhlina je stabilní. Teprve když  $\sigma = \sigma_c$ , tj. když platí rovnice (9.18), může se trhlina začít šířit. Rozběhne-li se trhlina opravdu, začne dynamický děj, jehož popisem se nyní nebudeme zabývat. Mezní napětí  $\sigma_c$ , při němž trhlina ztrácí stabilitu, nazveme kritické napětí.

Prekvapující je, že kritické napětí  $\sigma_c$  nezávisí na kohezivní pevnos-

ti  $\sigma_p$ , jak by snad bylo možné očekávat. To je zcela zásadní otázka, která má pro aplikace lomové mechaniky rozhodující význam. Kdyby byl materiál dokonale homogenní a bez trhlin, byla by jeho kohezivní pevnost  $\sigma_p$  (tj. skutečné napětí na mezi odtržení) pravděpodobně mnohem větší než pevnost známých materiálů. Vždyť pevnost whiskerů, tj. dokonalých krystalických vláken bez dislokací, je až o dva řády vyšší než u krystalů téhož materiálu s dislokacemi. Skutečná pevnost je tedy určována nejen vlastnostmi materiálových komponent, ale i jejich strukturou, která je vždy více nebo méně nedokonalá a prostoupena vadami. Neumíme-li tyto defekty rozlišit, jsou-li tedy stejného řádu jako např. rozměr krystalické mřížky, nemůžeme je do výpočtu zahrnout jinak než tak, jak se statisticky projeví ve výsledných materiálových vlastnostech (mezi kluzu, kohezivní pevnosti). Jakmile však máme co činit s materiálovou vadou, kterou jsme schopni alespoň přibližně proměřit a která má rozměry řádově větší než jsou rozměry složek v mikrostrukturu, můžeme posoudit nebezpečnost vady, tj. nebezpečí rozběhu trhliny, podle příslušného kritického napětí, které je odvozeno z termodynamického zákona (z bilance energií) a nikoli ze statiky.

Irwin a Cowan ukázali, že u kovových materiálů se téměř celá energie uvolňovaná na počátku šíření trhliny spotřebuje plastickými deformacemi, a to i v případech, kdy se lom jeví navenek jako křehký (tj. u vysoce pevných materiálů nebo za nízkých teplot). Hovoříme pak o kvazikřehkém lomu; u něhož se plasticky deformuje jen tenká vrstvička materiálu na nově vznikajícím povrchu. Místo povrchové energie je pak účelnější zavést do výpočtu rychlost uvolňování deformační energie

$$g = - \frac{\delta U}{2 \delta \ell} = - \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \ell} \quad (9.19)$$

Je to měrná deformační energie uvolňovaná při šíření trhliny; vztahujeme ji k jednotce délky přírůstku trhliny. Na mezi stability je to zároveň energie  $g_Q$  spotřebovaná plastickými deformacemi v povrchových vrstvách nově vzniklých lomových ploch dělená délkou přírůstku trhliny. Celkový přírůstek trhliny má délku  $2\delta\ell$ .

Pro případ trhliny v nekonečné rovinné desce podle obr. 7 můžeme do vztahu (9.19) dosadit z rovnice (9.16) a vypočítat

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E' g_Q}{\pi \ell}} \quad (9.20)$$

Vztah (9.20) má pro kvazikřehké lomy kovových materiálů stejný význam jako vztah (9.18) pro křehké lomy skla.

Dosahuje-li napětí  $\sigma$  kritické hodnoty  $\sigma_c$ , dosahuje faktor intenzity napětí  $K_I$  kritické hodnoty  $K_{IQ}$ . Porovnáním vztahů (9.20) a (4.35) dostaneme

$$\frac{K_{IQ}}{\sqrt{\pi l}} = \sqrt{\frac{E' q_R}{\pi l}} \quad (9.21)$$

a odtud

$$K_{IQ} = \sqrt{E' q_R} \quad (9.22)$$

Energie spotřebovávaná a rozptýlovaná plastickými deformacemi při šíření trhliny závisí nejen na materiálových vlastnostech, ale také na typu deformace či napjatosti. V povrchové vrstvě - pokud není povrch zatížen - existuje rovinná napjatost, kdežto uvnitř existuje přinejmenším v okolí čela trhliny spíše rovinné přetvoření. Okolní, méně namáhaný materiál brání totiž příčné kontrakci. Každému typu napjatosti či deformace odpovídá jiná hodnota spotřebované energie. Hodnota  $K_{IQ}$  proto závisí na jejich poměru, který se s tloušťkou stěny mění. Teprve je-li stěna tlustá, lze podíl rovinné napjatosti v povrchových vrstvách zanedbat a předpokládat, že energie se spotřebovává za podmínek rovinného přetvoření; kritická hodnota faktoru intenzity napětí pak přestává na tloušťce stěny záviset a stává se materiálovou konstantou, kterou označíme  $K_{IC}$  a nazveme lomová houževnatost. Podle (9.22) je

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{E q_c}{1-\mu^2}} \quad (9.23)$$

Podobně jako mez kluzu závisí lomová houževnatost na teplotě a na rychlosti poměrné deformace. Symbolem  $K_{IC}$  označujeme její "statickou" hodnotu získanou při malé deformační rychlosti. Hodnota  $K_{IC}$ , resp.  $q_c$ , se tedy vztahuje pouze ke stavu rovinného přetvoření a k materiálu, u něhož mají plastické deformace na čele trhliny zanedbatelný vliv na celkovou elastickou napjatost.

Úvahu lze rozšířit i na ostatní typy zatížení trhliny. Pro jejich kombinaci platí místo rovnice (9.23) vztah

$$E q_c = (1-\mu^2) K_I^2 + (1-\mu^2) K_{II}^2 + (1+\mu) K_{III}^2 \quad (9.24)$$

Známe-li lomovou houževnatost  $K_{IC}$ , můžeme odtud vypočítat lomovou houževnatost i pro druhý, resp. třetí typ namáhání. Vyjde

$$K_{IIc} = K_{IC}, \quad K_{IIIc} = K_{IC} \sqrt{1-\mu} \quad (9.25)$$

## 10. PODDAJNOST TĚLESA S TRHLINOU

Představme si nějaký prut (pás, tyč) s trhlinou, namáhaný tahem silou  $F$ . Konkrétně si můžeme představit pás podle obr. 14, 15 nebo 16, popř. tyč s obvodovou trhlinou podle obr. 20. Prodloužení prutu označíme  $\delta$ . Poddajnost  $C$  prutu definujeme jako poměr infinitesimálních přírůstků prodloužení a síly

$$C = \frac{d\delta}{dF} \quad (10.1)$$

Kdyby byl prut pružný a bez trhliny, byla by podle Hookeova zákona jeho poddajnost

$$C_0 = \frac{d\delta}{dF} = \frac{\delta}{F} = \frac{L}{ES} \quad (10.2)$$

V tomto vzorci značí  $S$  průřez prutu a  $L$  jeho délku. Prut s trhlinou bude mít poddajnost větší; označíme ji  $C(\ell)$ . Tato poddajnost bude záviset nejen na modulu pružnosti  $E$  a na rozměrech prutu, ale také na tvaru trhliny a na její velikosti. Přírůstek poddajnosti vzniklý vytvořením trhliny označíme  $C_1(\ell)$ , takže bude

$$C(\ell) = C_0 + C_1(\ell) \quad (10.3)$$

kde  $\ell$  je délka trhliny. Tímto parametrem charakterizujeme velikost trhliny.

Když se trhlina počne šířit, změní se  $\ell$  na  $\ell + d\ell$  a poddajnost  $C(\ell)$  se změní na  $C(\ell + d\ell) = C(\ell) + dC$ . Deformační energie v tyči

$$U = \frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2} \frac{1}{C(\ell)} \delta^2 \quad (10.4)$$

se změní na  $U + dU$ , přičemž

$$dU = -\frac{1}{2} \frac{1}{C^2} \delta^2 dC = -\frac{1}{2} F^2 \frac{dC}{d\ell} d\ell \quad (10.5)$$

Rychlost uvolňování energie vztažená k jednotce délky  $\Delta$  čela trhliny vyjde z rovnic (10.5) a (9.19)

$$g = -\frac{1}{\Delta} \frac{dU}{d\ell} = F^2 \frac{1}{2\Delta} \frac{dC}{d\ell} \quad (10.6)$$

Přírůstek plochy trhliny je tedy  $\Delta d\ell$ , kdežto lomová plocha se zvětší o  $2\Delta d\ell$ .

Podle (9.22) je však  $q = \frac{K_I^2}{E'}$ , takže

$$\frac{dC}{dl} = \frac{2s}{E'F^2} K_I^2 \quad (10.7)$$

Pro  $E'$  platí vztah (9.12). Protože  $K_I$  je úměrné zatěžující síle, krátí se na pravé straně rovnice (10.7) tato síla, takže derivace  $dC/dl$  na zatížení nezávisí. To je zcela logické, protože vycházíme z předpokladu lineární pružnosti. Napíšeme tedy

$$K_I = F \cdot f(l) \quad (10.8)$$

a dostaneme

$$\frac{dC}{dl} = \frac{2s}{E'} f^2(l) \quad (10.9)$$

Odtud

$$C(l) = \frac{2s}{E'} \int_0^l f^2(\xi) d\xi + C_0 \quad (10.10)$$

Je tedy - s přihlédnutím k rovnici (10.3) -

$$C_1(l) = \frac{2s}{E'} \int_0^l f^2(\xi) d\xi \quad (10.11)$$

#### Příklad 4

Jak se změní poddajnost prutu (pásu) vlivem trhliny znázorněné na obr. 14?

#### Řešení

Délku prutu označíme  $L$ , jeho tloušťku  $h$  a šířku  $2b$ . Trhlina má dvě čela, takže  $s = 2h$ . Poddajnost prutu bez trhliny je dána vztahem (10.2). Vyjde

$$C_0 = \frac{L}{E2bh} \quad (a)$$

Změna poddajnosti vlivem trhliny se vypočte ze vzorce (10.11), v němž podle (10.8) a (5.12) bude

$$f(l) = \frac{K_I}{F} = \frac{K_I}{G2bh} = \frac{\sqrt{\pi}}{2bh} Y(l)\sqrt{l} \quad (b)$$

Funkce  $Y(\ell)$  je dána rovnicí (5.15). Poměrný vzrůst poddajnosti vyjde

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{2\pi(1-\mu^2)}{Lb} \int_0^\ell \xi Y^2(\xi) d\xi \quad (c)$$

kde

$$Y(\xi) = \sqrt{\frac{2b}{\pi\xi} \operatorname{tg} \frac{\pi\xi}{2b} \left(1 + 0,308 \frac{\xi^2}{b^2}\right)} \quad (d)$$

Zavedeme novou bezrozměrovou proměnnou  $\chi = \xi/b$  a dostaneme

$$\frac{C_1}{C_0} = (1-\mu^2) \frac{4b}{L} \int_0^{\ell/b} \operatorname{tg} \frac{\pi\chi}{2} (1 + 0,308 \chi^2)^2 d\chi \quad (e)$$

Výsledek numerického výpočtu uvádíme v tab. 6; platí pro  $\mu = 0,3$  a pro poměrně velkou tloušťku prutu, takže v okolí čela trhliny převládá stav rovinného přetvoření. Pro tenký prut jsou hodnoty poměru  $C_1/C_0$  až asi o 10 % větší.

Tab. 6 Výpočet změny poddajnosti prutu podle obr. 14 vlivem trhliny

$\frac{\ell}{b}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{L}{W} \cdot \frac{C_1}{C_0}$	0,014	0,059	0,138	0,258	0,435	0,691	(1,07)	(1,69)	(2,88)

Poznámka: hodnoty v závorkách jsou méně přesné [vypočtené mimo ověřený rozsah platnosti vzorce (5.15)]. V tabulce  $w = 2b$ .

### Příklad 5

Zjistěte, jak se změní vlastní frekvence ohybového kmitání nepodpřené prutu z obr. 19 vlivem trhliny. Prut má délku  $L$ , šířku  $W$  a tloušťku  $h$ .

### Řešení

Vzorce pro ohyb dostaneme zcela obdobně jako vzorce pro tah. Stačí nahradit prodloužení prutu  $\delta$  relativní úhlovou deformací  $\nu$  konců prutu

a sílu  $F$  nahradit ohybovým momentem  $M$ . Bude

$$C(\ell) = \frac{d\varphi}{dM} = C_0 + C_1(\ell) \quad (\text{a})$$

$$C_0 = \frac{L}{EJ} = \frac{12L}{EW^3h} \quad (\text{b})$$

V tomto případě má trhlina jediné čelo, takže je  $\delta = h$ . Vzorci (10.7) a (10.8) nahrazují obdobné vztahy

$$\frac{dC}{d\ell} = \frac{2\delta}{E'M^2} K_I^2 \quad (\text{c})$$

$$K_I = M \cdot f(\ell) \quad (\text{d})$$

Z nich vypočteme  $\frac{dC}{d\ell}$  jako funkci  $\ell$  a zintegrujeme. Vyjde

$$C_1(\ell) = \frac{2\delta}{E'} \int_0^\ell f^2(\xi) d\xi \quad (\text{e})$$

Vzorec (e) je formálně stejný jako (10.11), pouze význam funkce  $f(\xi)$  je jiný, plyne z rovnice (d). S použitím rovnice (6.8) dostaneme (pro tloušťku prutu  $h$ )

$$f(\ell) = \frac{K_I}{M} = \frac{K_I}{M_0 h} = \frac{\varphi(\ell)\sqrt{\ell}}{w^2 h} \quad (\text{f})$$

Zavedeme bezrozměrovou proměnnou  $x = \xi/W$  a podle (b), (e) a (f) vypočteme (s označením  $\ell = \xi = xW$ )

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{EW}{6E'L} \int_0^{\ell/w} x \varphi^2(x) dx \quad (\text{g})$$

Převládá-li na čele trhliny rovinné přetvoření (tak tomu je pro  $h \gg w$ ), je  $E/E' = 1 - \mu^2$ . Převládá-li rovinná napjatost (pro  $h \ll w$ ), je  $E/E' = 1$ . V prvním případě

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{1 - \mu^2}{6} \frac{W}{L} \int_0^{\ell/w} x \varphi^2(x) dx \quad (\text{h})$$

Hodnotu  $\varphi(x)$  odečteme z tab. 2,  $x$  má význam  $\ell/w$  pro proměnnou hloubku trhliny  $\ell = \xi$ . Výsledky numerické integrace Simpsonovou metodou shrnuje tab. 7.



Tab. 7 Výpočet změny poddajnosti prutu podle obr. 19 vlivem trhliny

$l/w$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{L}{w} \cdot \frac{C_1}{C_0}$	0,097	0,378	0,885	1,741	3,201	5,914	11,79	28,56	120,4

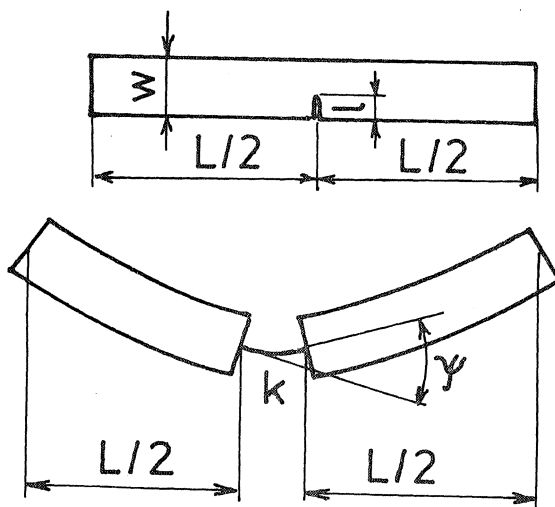
Předpokládáme, že trhlina se nachází uprostřed délky prutu. Nejnižší vlastní frekvence volného kmitání prutu bez trhliny je, jak známo

$$f_0 = 0,2967 \frac{E}{\rho} \frac{w^2}{L^2} \quad (i)$$

Frekvenci nosníku s trhlinou musíme počítat tak, že nosník rozdělíme na dvě části a ty pak spojíme fiktivní ohýbanou nehmotnou pružinou o tuhosti

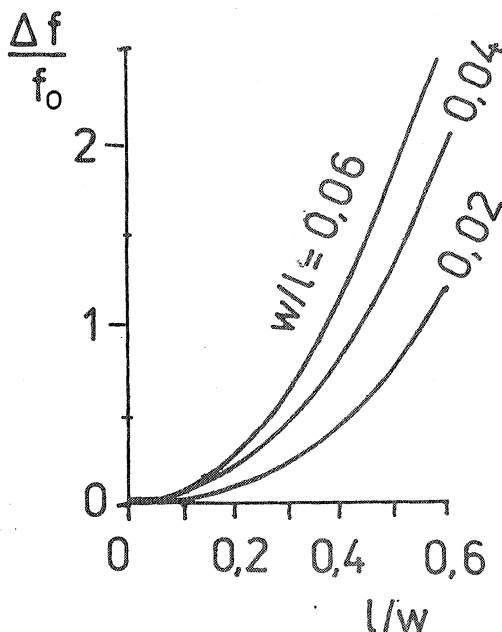
$$k = \begin{cases} \frac{1}{C_1} & \text{pro } \psi \geq 0 \\ \infty & \text{pro } \psi < 0 \end{cases} \quad (j)$$

Pružina nahrazuje vzrůst poddajnosti prutu vlivem trhliny, takže poddajnost prutu s trhlinou je stejná jako poddajnost tohoto děleného modelu. Úhel  $\psi$  je vyznačen na obr. 34. Je to úhel tečen k chybové čáře rozděleného prutu vedených v místech připojení fiktivní pružiny. Rovnice (j) rozlišuje poddajnost náhradní pružiny podle smyslu úhlu  $\psi$ . Je totiž třeba předpokládat, že trhlina se uzavře a neovlivní poddajnost prutu, je-li  $\psi \leq 0$  a trhlina je krátká ( $l < w/2$ ).



OBR. 34

Jestliže prut předejneme nebo trhlinu prořízneme tak, aby se nemohla při kmitání uzavírat, pak  $k = 1/C_1$  nezávisle na smyslu úhlu  $\psi$ . V tom případě vyjde poměrná změna  $\Delta f / f_0$  nejnižší vlastní frekvence volného kmitání tak, jak je znázorněno na obr. 35.



OBR. 35

## 11. ŠÍŘENÍ TRHLINY VE STATICKY NEURČITÉ KONSTRUKCI

Pro šíření únavové trhliny platí pro I. typ namáhání Parisův zákon

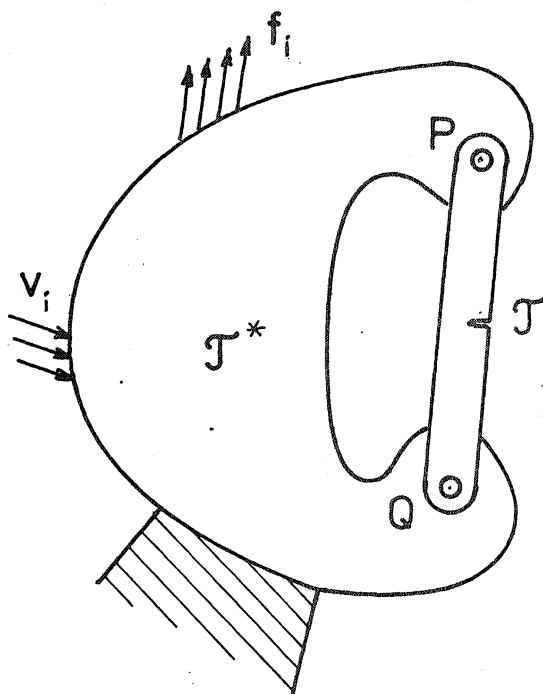
$$\frac{d\ell}{dN} = A (\Delta K_I)^n \quad (11.1)$$

v němž  $\ell$  značí délku trhliny,  $\Delta K_I = K_{I_{\max}} - K_{I_{\min}}$ ,  $N$  je počet zatěžujících cyklů s rozkmitem faktoru intenzity napětí  $\Delta K_I$ . Veličiny  $A$ ,  $n$  jsou materiálové konstanty. Protože rovnice (11.1) není v bezrozměrovém tvaru, závisí konstanta  $A$  na zvolených fyzikálních jednotkách. Např. pro feriticko-perlitickou ocel o pevnosti 350 až 760 MPa je  $A = 6,891 \cdot 10^{-9}$ ,  $n = 3$ , vyjádříme-li  $\ell$  v milimetrech a  $\Delta K_I$  v jednotkách MPa  $\sqrt{m}$ .

Růst trhliny pokračuje podle Parisova zákona (11.1) až do okamžiku,

kdy  $K_{I_{max}} = K_{IQ}$  . Pak se součást náhle rozlomí. Životnost charakterizovanou počtem cyklů  $N$  do lomu dostaneme integrací rovnice (11.1), přičemž pamatujeme, že výkmit faktoru intenzity napětí se mění s délkou trhliny, a to i tehdy, je-li amplituda zatěžujících sil stálá.

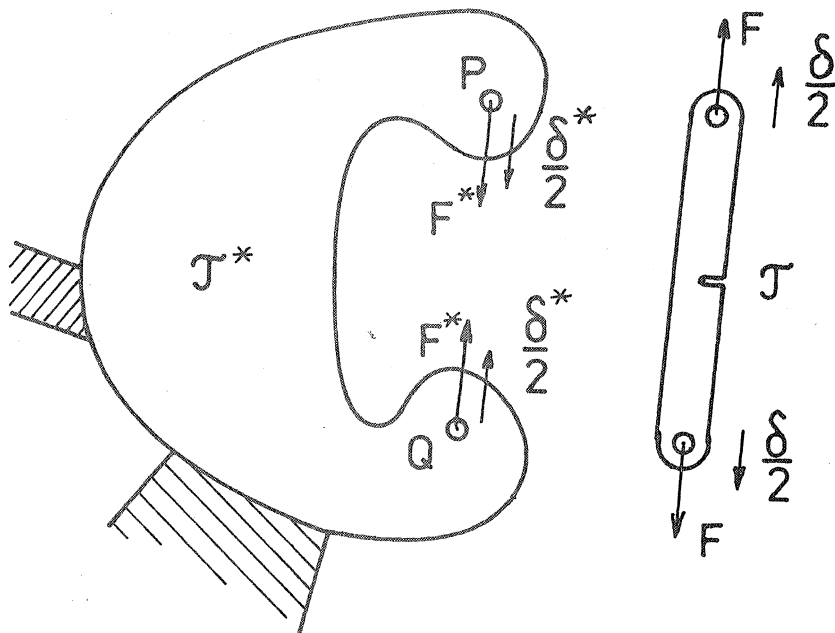
Je-li prut s trhlinou začleněn do staticky neurčité konstrukce, mění se s růstem trhliny nejen faktor intenzity napětí, ale také poddajnost prutu a tím i jeho namáhání. Změnou poddajnosti prutu se totiž obecně mění i rozdělení staticky neurčitých sil v konstrukci. Další komplikace nastává tím, že tuhost prutu s trhlinou je jiná, otvírá-li se trhlina nebo je-li uzavřena. Deformační charakteristika prutu s trhlinou je proto nelineární. Zanedbáním těchto skutečností se můžeme dopustit při výpočtu zbytkové životnosti konstrukce značné chyby.



OBR. 36

Na příkladu staticky neurčité konstrukce znázorněné na obr. 36 ukážeme, jak se projeví trhlina v prutu namáhaném tahem - tlakem. Úvahu lze snadno zobecnit i na pruty namáhané ohybem nebo krutem, popř. i na obecnější části konstrukce s trhlinou. Uvažovaný prut s trhlinou označíme  $T$  . Je začleněn do konstrukce znázorněné tělesem  $T^*$  . Vzájemné působení tělesa a prutu je zakresleno na obr. 37. Prodloužení samotného prutu si-

lou  $F$  je  $\delta$ . Pro těleso  $\mathcal{T}^*$  jsou na jeho povrchu předepsány síly (napěťové vektory)  $f_i$  a na jiné části povrchu jsou předepsány posuvy  $U_i$ .



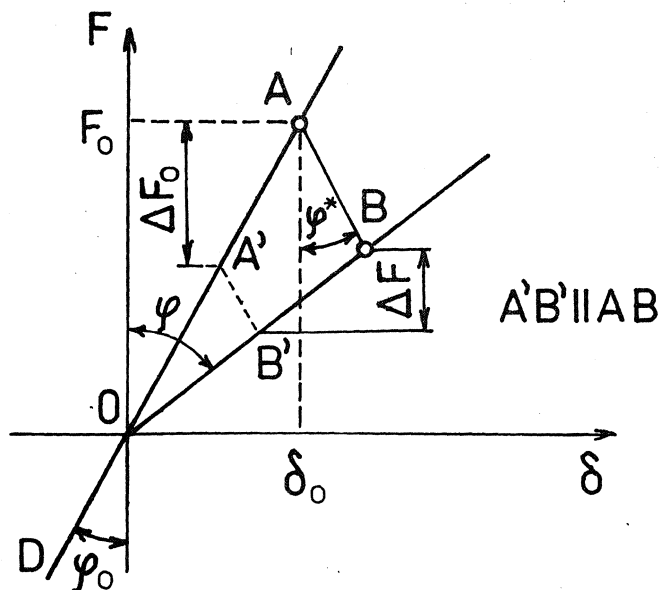
OBR. 37

Jsou-li tyto posuvy udržovány konstantní, přiblíží se klouby P, Q v tělese  $\mathcal{T}^*$  vlivem síly  $F^*$  o hodnotu  $\delta^*$ . Poddajnosti jsou

$$C = \frac{\delta}{F} \quad \text{resp.} \quad C^* = \frac{\delta^*}{F^*} \quad (11.2)$$

Hra sil mezi oběma tělesy je znázorněna v diagramu na obr. 38. Na osu úseček se vynášejí relativní posuv ok, na osu pořadnic působící síla. Deformační charakteristika prutu  $\mathcal{T}$  bez trhliny je dána přímkou DOA s rovnicí  $\delta = C_0 F$ , v níž  $C_0$  značí poddajnost bezvadného prutu. Přímka DOA svírá s osou pořadnic úhel  $\varphi_0 = \arctg C_0$ . Vytvořením trhliny se poddajnost prutu  $C_0$  zvětší na  $C = C_0 + C_1$ . Pro prut s trhlinou bude platit lomená deformační charakteristika DOB, přičemž přímka OB má rovnici  $\delta = C F$ ; svírá s osou pořadnic úhel  $\varphi = \arctg C = \arctg (C_0 + C_1)$ .

Běžným výpočtem staticky neurčité konstrukce zjistíme, že v prutu bez trhliny působí při předepsaném zatížení  $f_i, U_i$  konstrukce síla  $F_0$  a že prodloužení prutu je  $\delta_0$ . Tento "normální" stav je dán bodem A na



OBR. 38

obr. 38. Vytvoří-li se trhlinka, přejde bod A do bodu B, jemuž odpovídá síla  $F$  a prodloužení  $\delta$ . Protože těleso  $\mathcal{T}^*$  zůstává lineárně elastické, je

$$\delta - \delta_0 = C^* (F - F_0) \quad (11.3)$$

Pokles síly v prutu a vzrůst jeho prodloužení se proto děje po přímce AB, která svírá s osou pořadnic úhel  $\varphi^* = \arctg C^*$ . Poddajnost  $C^*$  můžeme teoreticky nebo experimentálně vyšetřit na tělese  $\mathcal{T}^*$  podle obr. 37, jestliže udržujeme předepsané posuvy  $v_i = \text{konst.}$  Sílu  $F$  a prodloužení  $\delta$  v prutu s trhlinkou najdeme jako průsečík přímky OB s přímkou AB. Vyjde

$$F = \frac{C_0 - C^*}{C - C^*} F_0 \quad (11.4)$$

pro  $F_0 \geq 0$ . Je-li  $F_0 < 0$ , je trhlinka uzavřena a  $F = F_0$ . Vzpomeneme-li, že  $C = C_0 + C_1$ , a zavedeme-li poměrnou změnu poddajnosti prutu  $\mathcal{T}$  podle definice

$$\varrho = \frac{C_1}{C_0 - C^*} \quad (11.5)$$

můžeme vztah (11.4) napsat ve tvaru

$$F = \begin{cases} \frac{F_0}{1+b} & \text{pro } F_0 \geq 0 \\ F_0 & \text{pro } F_0 < 0 \end{cases} \quad (11.6)$$

Podle tohoto předpisu najdeme odpovídající síly v prutu  $\mathcal{T}$  pro  $F_0 = F_{0\max}$  i pro  $F_0 = F_{0\min}$ . Dostaneme pak pro prut s trhlinou  $\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$  (příklad je zakreslen na obr. 38) a odtud i  $\Delta K_{\mathcal{T}}$ , tedy hodnotu, kterou potřebujeme dosadit do vztahu (11.1). Poměr  $C_1/C_0$ , který se vyskytuje v rovnici (11.6), vypočteme ze vzorce (10.2) a (10.11) obdobně jako v příkladu 4. Rovnici (11.1) integrujeme numericky.

Uvážíme-li změnu rozdělení sil v konstrukci znázorněné na obr. 36, dojdeme k závěru, že amplituda síly v prutu  $\mathcal{T}$  vlivem rostoucí trhliny klesá, což vede ke zpomalení růstu trhliny. Zároveň však - při stejné amplitudě zatěžujících sil - rostou amplitudy napětí v tělese  $\mathcal{T}^*$ . To může způsobit, že únavová trhlinka vznikne a počne se šířit ještě z jiného místa (v tělese  $\mathcal{T}^*$ ). U staticky určité konstrukce tyto úvahy odpadají a výpočet životnosti se zjednodušuje.

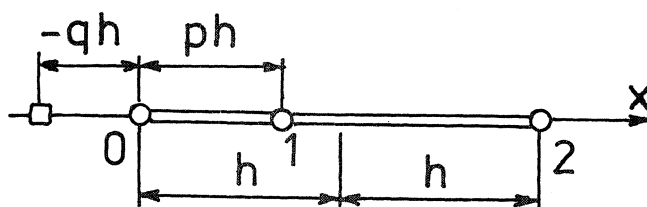
## 12. VÝPOČET FAKTORU INTENZITY NAPĚTÍ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

Analytické řešení napjatosti a posuvů v okolí singulárního bodu na čele ostré trhliny v elastickém tělese známe jen pro některé jednoduché případy. Nejdůležitější z nich jsme uvedli v kap. 4 až 8. Ve složitějších případech jsme odkázáni na řešení numerické nebo experimentální.

Můžeme např. vyšetřit průběh posuvů na okrajích trhliny a porovnat je s teoretickým průběhem platným pro malé okolí singulárního bodu. Jde-li např. o I. typ namáhání trhliny, porovnávané posuvy na okrajích trhliny, které určují tvar rozevřené trhliny, s funkcí  $v(r, \theta = \pi)$ , resp.  $v(r, \theta = -\pi)$  podle druhé z rovnic (4.46). Přiřazení obou průběhů závisí na tom, v okolí kterého bodu (pro které  $r$ ) obě křivky ztotožňujeme. Tak dostaneme závislost určeného součinitele  $K_{\mathcal{T}}$  v rovnici (4.46) na vzdálenosti  $r$ . Extrapolací této závislosti do bodu  $r=0$  dostaneme hledaný faktor intenzity napětí, ovšem jen s takovou přesností, jakou tato metoda umožňuje. Místo posuvů bychom mohli vyšetřovat uvolňovanou deformační energii nebo průběh napětí  $\sigma_y(r, \theta = 0)$  a porovnávat je obdobně

s teoretickým průběhem podle rovnice (4.44). Analogicky bychom mohli postupovat i u II. a III. typu zatížení trhliny. Popsaná metoda určování faktoru intenzity napětí je nepřímá, protože tento faktor se z naměřených nebo vypočtených hodnot teprve počítá (s použitím extrapolace do bodu  $r = 0$ ) a v těchto výpočtech není přímo zastoupen jako neznámá veličina.

Určujeme-li průběhy posuvů nebo napětí v okolí čela trhliny metodou konečných prvků obvyklého typu, musíme v tomto okolí zvolit velmi jemnou síť, mají-li mít výsledky vůbec nějaký smysl. Chceme totiž, aby konečné prvky s obvyklými, zpravidla lineárními interpolacemi posuvů vystihovaly okolí singulárního bodu, ačkoli víme, že konečné prvky, nejsou-li zvlášť upraveny, nemohou singularitu modelovat. V místech vzdálených od singulárního bodu sice dostaneme velmi přesné výsledky, ale ty nám mnoho nepomohou, neboť tam už neplatí vzorce pro singulární část analytického řešení, z nichž teprve faktor intenzity napětí určujeme. Jemné dělení sítě prvků v okolí čela trhliny klade mimořádné nároky na přípravu a kontrolu vstupu a na paměť počítače i na strojový čas. Tyto nedostatky se nedávno podařilo překonat, alespoň do jisté míry, zavedením konečných prvků s interpolačními polynomy vyšších stupňů (druhého nebo vyššího stupně). Zjistilo se, že prvky s nerovnoměrným rozdělením uzlových bodů na hranici mohou imitovat singulární část řešení, která převládá v okolí čela trhliny. To usnadní a zpřesní výpočet faktoru intenzity napětí, aniž je třeba síť příliš zjemňovat. To vysvětlíme na jednoduchém příkladu.

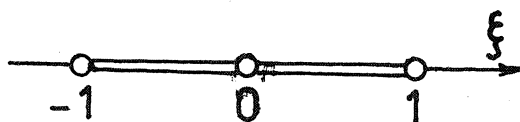


OBR. 39

Na obr. 39 je zakreslen jednorozměrný prvek ( $0 \leq x \leq 2h$ ) se třemi uzly. První má souřadnici  $x=0$ , druhý  $x=ph$ , třetí  $x=2h$ . Zavedeme bezrozměrovou souřadnici  $\lambda = x/h$ ,  $0 \leq \lambda \leq 2$ . K tomuto prvku přiřadíme kvadratickou transformaci

$$\lambda = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 \quad (12.1)$$

"rodičovský" prvek na intervalu  $-1 \leq \xi \leq +1$ , znázorněný na obr. 40.



OBR. 40

Ze vzájemného přiřazení uzlových bodů dostaneme podmínky

$$\begin{aligned} 0 &= c_0 - c_1 + c_2 \\ p &= c_0 \\ 2h &= c_0 + c_1 + c_2 \end{aligned} \quad (12.2)$$

Odtud vypočteme koeficienty  $c_0 = p$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1 - p$ . Zobrazovací rovnice tedy bude

$$s = p + \xi + (1 - p) \xi^2 \quad (12.3)$$

Řešením této kvadratické rovnice pro  $\xi$  dostaneme inverzní vztah

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(1-p)(p-s)}}{2(1-p)} \quad (12.4)$$

U odmocniny vyhovuje pouze kladné znaménko, protože např. pro  $\lim p \rightarrow 1$  musíme dostat  $\xi = s - 1$ . Je-li prvek izoparametrický, používáme k interpolaci posuvů stejný polynom jako k transformaci geometrického útvaru, jen jeho koeficienty jsou jiné. Bude tedy

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \quad (12.5)$$

Přiřazení posuvů v uzlech 0, 1, 2 (obr. 39) dává podmínky

$$\begin{aligned} u_0 &= a_0 - a_1 + a_2 \\ u_1 &= a_0 \\ u_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \end{aligned} \quad (12.6)$$

Odtud vypočteme  $a_0 = u_1$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}(u_2 - u_0)$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}(u_0 - 2u_1 + u_2)$ . Poměrné prodloužení bude

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} = (a_1 + 2a_2 \xi) \frac{d\xi}{ds} \quad (12.7)$$



Derivaci  $d\xi/ds$  vypočteme z rovnice (12.4). Vyjde

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4(1-p)(p-\Delta)}} \quad (12.8)$$

Bude tedy

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{u_1 + (u_0 - 2u_1 + u_2)\xi}{\sqrt{1 - 4(1-p)(p-\Delta)}} \quad (12.9)$$

Čitatel zlomku na pravé straně (12.9) se obecně nule nerovná. Jmenovatel se však může pro určité  $\Delta$  rovnat nule, což znamená, že v takovém bodě vznikne singulární napjatost (nekonečně velké napětí). Typ singularity je přitom zřejmě  $1/\sqrt{r}$ ,  $r \rightarrow 0$ , což odpovídá okolí čela ostré trhliny. To právě potřebujeme. Položíme proto

$$1 - 4(1-p)(p-\Delta) = 0 \quad (12.10)$$

a vypočteme souřadnici singulárního bodu

$$\Delta = p - \frac{1}{4(1-p)} \quad (12.11)$$

Chceme-li, aby singularita vznikla v bodě  $x = -q, h$  (obr. 39), tj. v bodě  $\Delta = -q$ , dostaneme z rovnice (12.10) potřebnou polohu druhého uzlu

$$p = \frac{1}{2} [(1-q) + \sqrt{q(q+2)}] \quad (12.12)$$

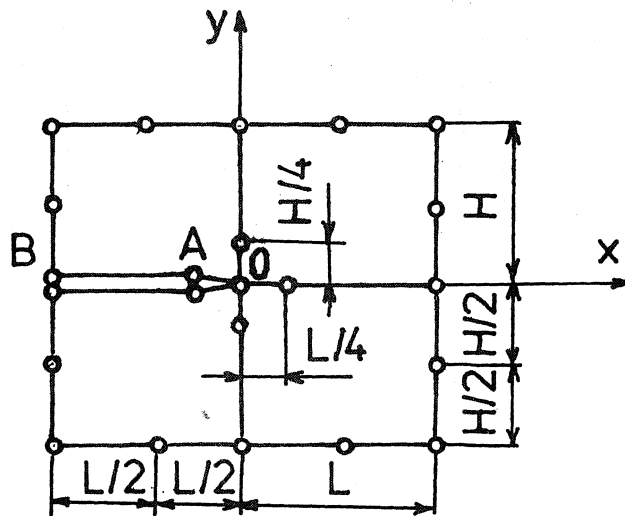
Je-li  $q=0$ , vyjde  $p=0,5$ . To znamená, že singularita vzniká v prvním uzlu, je-li druhý uzel umístěn ve čtvrtině délky celého prvku. Pro tento případ vyjde posuv  $u$  dosazením  $\xi$  z rovnice (12.4) do rovnice (12.5) (s hodnotou  $p = 0,5$ ) takto

$$u = u_0 - \left( \frac{3}{2} u_0 - 2u_1 + \frac{1}{2} u_2 \right) \sqrt{2s} + (u_0 - 2u_1 + u_2) \Delta \quad (12.13)$$

V okolí čela trhliny je singulární část řešení podle (4.46) úměrná výrazu  $K_I \sqrt{r} = K_I \sqrt{\Delta}$ , takže platí úměrnost

$$K_I \sim \left( \frac{3}{2} u_0 - 2u_1 + \frac{1}{2} u_2 \right) \quad (12.14)$$

Jinými slovy, singulární část řešení představuje právě druhý člen na pravé straně rovnice (12.13).



OBR. 41

Pro první typ namáhání trhliny můžeme tedy použít v okolí čela trhliny čtyři izoparametrické prvky znázorněné na obr. 41. Na těch stranách, jež jsou vnitřním uzlem půleny, je posuv interpolován kvadratickou parabolou. Na vnitřních stranách jsou uzly umístěny podle čtvrtinového pravidla a posuvy jsou úměrné výrazu  $a + b\sqrt{r} + cr$ , kde  $r$  je vzdálenost od počátku [odpovídá souřadnici  $s$  v rovnici (12.13)]. Na okraji OAB trhliny by mělo teoreticky podle rovnice (4.46) být (pro  $\theta = \pi$ )

$$v = \frac{1+\mu}{2E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 2(k+1) \quad (12.15)$$

Srovnáním se singulární částí rovnice (12.13) dostaneme (vezmeme-li  $u_0 = 0, u_1 = v_A, u_2 = v_B, s = -x/(L/2) = 2r/L$ )

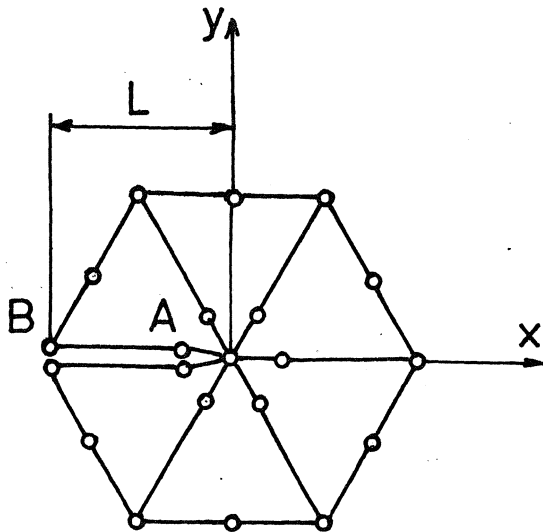
$$\left(-2v_A + \frac{1}{2}v_B\right) \sqrt{\frac{4r}{L}} = \frac{1+\mu}{2E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 2(k+1) \quad (12.16)$$

Odtud vypočteme

$$K_I = \frac{E}{(1+\mu)(1+k)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} (4v_A - v_B) \quad (12.17)$$

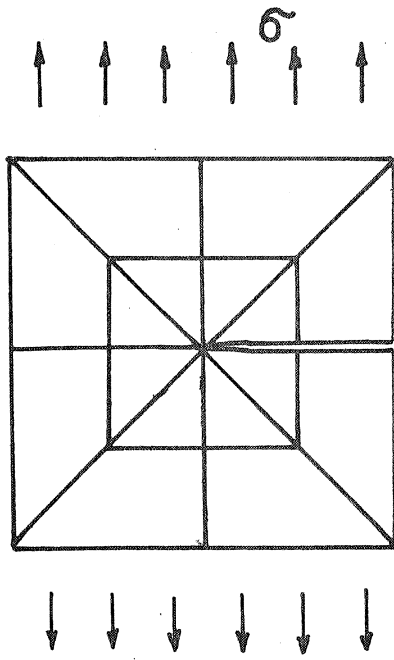
Význam symbolu  $\bar{q}$  je stejný jako v rovnici (4.46).

Uspořádání prvků podle obr. 41 má nevýhodu v tom, že typ singulari-ty pro napětí  $1/\sqrt{r}$  se vytváří přesně jen podél souřadnicových os  $X, Y$ . Lépe proto vyhovují analogicky odvozené trojúhelníkové prvky zobrazené na obr. 42 (BARSOUM, R.S., 1977). Trojúhelníkový prvek lze odvodit buď přímo (pak má šest uzlových bodů) nebo nepřímo degradací čtyřúhelníkové- ho konečného prvku (pak má osm uzlových bodů, z nichž tři se ztotožní). Ponecháme-li v degradovaném čtyřúhelníku koincidentní uzly volné (takže jejich posuvy nemusí být stejné), dostaneme singularitu typu  $1/\sqrt{r}$ . Tepr-ve když předepíšeme pro všechny tři uzly společné posuvy, dostaneme typ singulari-ty  $1/\sqrt{r}$ .

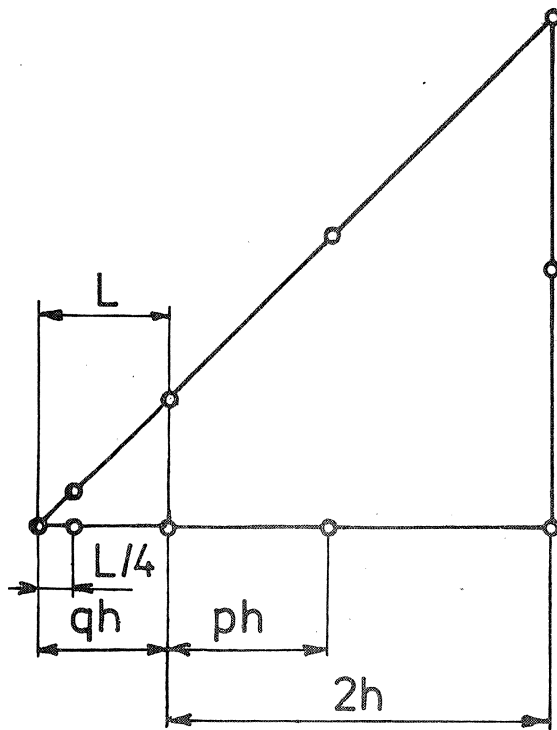


OBR. 42

Nemá-li být výsledek výpočtu podle rovnice (12.17) nepřesný, musí být vzdálenost  $r = L$  (obr. 41, 42) ještě v mezích platnosti singulární části analytického řešení [viz vztahy (4.70)]. Prvky tedy nemohou být příliš velké. Přesnost se zvýší, jestliže i připojené sousední izoparametrické prvky naznačují polohou svých uzlů, kde je singulární bod. Taková síť je naznačena na obr. 43 a její detail na obr. 44. Koeficienty  $p, q$  přitom vyhovují rovnici (12.12). Objevení uvedených zákonitostí představuje podstatný pokrok ve výpočtu singulárních napjatostí a přetvo-ření metodou konečných prvků. Výhoda je, že přitom používáme běžných procedur platných pro izoparametrické prvky, takže není třeba programo-vý systém nijak speciálně upravovat.



OBR. 43



OBR. 44

Existují i přímé metody, u nichž se k modelování okolí čela trhliny používají speciální konečné prvky. Obsahují faktory intenzity napětí  $K_I$  a  $K_{II}$  jako přidavné neznámé parametry, které se určují spolu s ostatními neznámými přímo z variačního principu. Jsou tedy zahrnuty do zobecněného vektoru neznámých veličin.

### 13. PLASTICKÉ DEFORMACE A KRITICKÉ OTEVŘENÍ TRHLINY

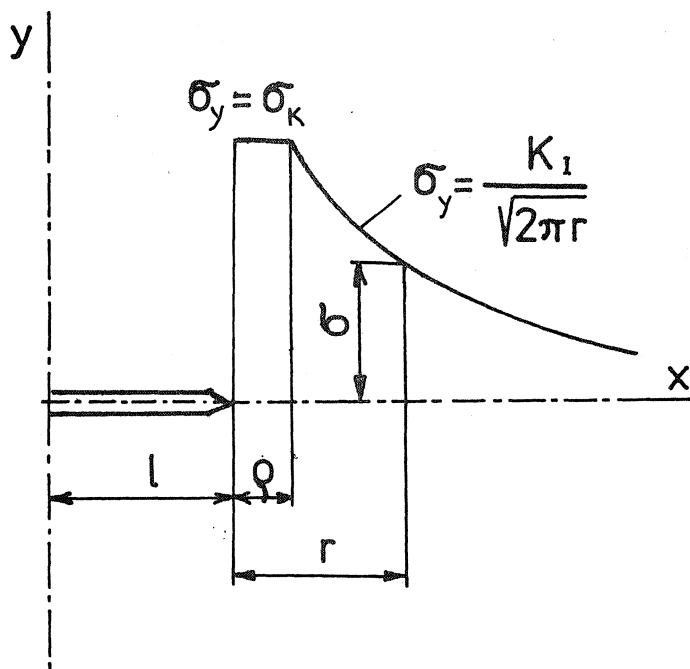
Vlivem plastických deformací se u kovových materiálů mění napjatost v okolí kořene trhliny. I u takových materiálů, jejichž lom se jeví z makroskopického hlediska jako křehký, provázejí šíření trhliny mikroskopické plastické deformace. Začínají se znatelnou měrou uplatňovat za tzv. přechodové teploty. Plastickými deformacemi se mění podmínky rovinného přetvoření na čele trhliny a blíží se více podmínkám rovinné napjatosti, což zpětně působí na další růst plastických deformací. Proto pozorujeme, že i malé stoupnutí teploty v přechodové oblasti způsobí velký vzrůst houževnatosti materiálu (můžeme ji posoudit např. podle výsledků rázové zkoušky). Blízko nad přechodovou teplotou se tento vzrůst prakticky zastaví - lom se stane převážně plastickým.

Je-li oblast plastických deformací velmi malá, lze její vliv zahrnout do výpočtu přibližnou korekcí rovnic lineární lomové mechaniky, které jsme odvodili pro dokonale elastický materiál. Můžeme totiž předpokládat, že odchylka od elastické napjatosti vznikne jen v nejbližším okolí čela trhliny, takže např. pro I. typ namáhání trhliny bude napjatost v okolí čela trhliny, avšak mimo plastickou oblast, stále popisována rovnicemi (4.44). Konkrétně bude v řezu  $y = 0$  ( $\theta = 0$ ) stále platit vztah

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (13.1)$$

Pro trhlinu v nekonečné desce podle obr. 7 je podle (4.35)  $K_I = \sigma \sqrt{\pi l}$ . Rovnice (13.1) platí tedy pro  $r > \rho$ , je-li  $\rho$  rozměr plastické oblasti v řezu  $y = 0$ . V intervalu  $0 < r < \rho$  bude za předpokladu rovinné napjatosti  $\sigma_y = \sigma_K$  (obr. 45). Spojitost průběhu napětí v místě  $r = \rho$  vyžaduje, aby

$$\sigma_K = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \rho}} \quad (13.2)$$



OBR. 45

Odtud vypočteme

$$\varrho = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_k} \right)^2 \quad (13.3)$$

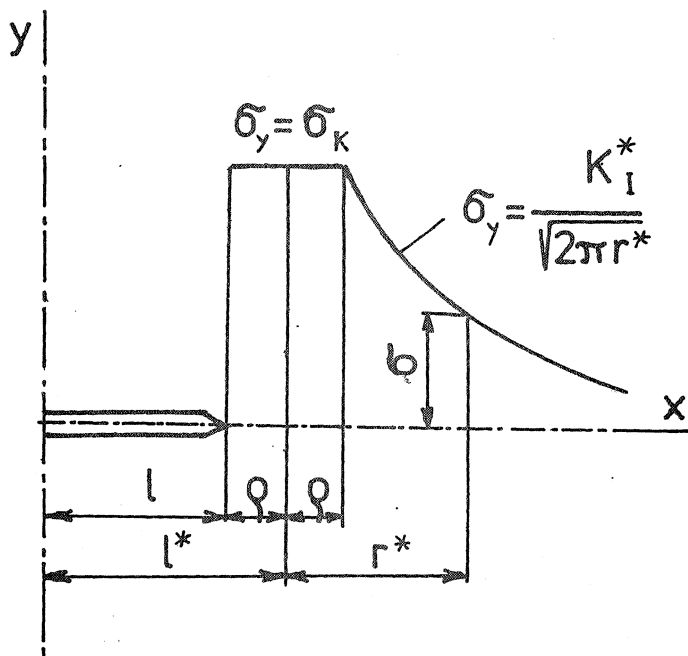
Tak jednoduché to však přece jenom není. Uvedený výpočet vyžaduje určitou opravu.

V intervalu  $0 < r < \varrho$  se původně přenesla síla

$$F = b \int_0^{\varrho} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \frac{2b K_I \varrho}{\sqrt{2\pi \varrho}} = 2\sigma_k b \varrho \quad (13.4)$$

kdežto podle obr. 45 se přenese jen síla  $\sigma_k b \varrho$ , tedy poloviční. Musí proto nastat určitá redistribuce napětí. Přibližně můžeme předpokládat, že šířka plastické oblasti bude  $2\varrho$  (obr. 46). V elastické oblasti  $r \geq 2\varrho$  bude platit vztah

$$\sigma_y = \frac{K_I^*}{\sqrt{2\pi r^*}} \quad (13.5)$$



OBR. 46

kde pro případ podle obr. 7 bude

$$K_I^* = \sigma \sqrt{\pi l^*} \quad (13.6)$$

Je to korigovaný faktor intenzity napětí. Symbolem

$$r^* = r - \varrho \quad (13.7)$$

jsme označili vzdálenost od čela efektivní (náhradní) trhliny, která má délku

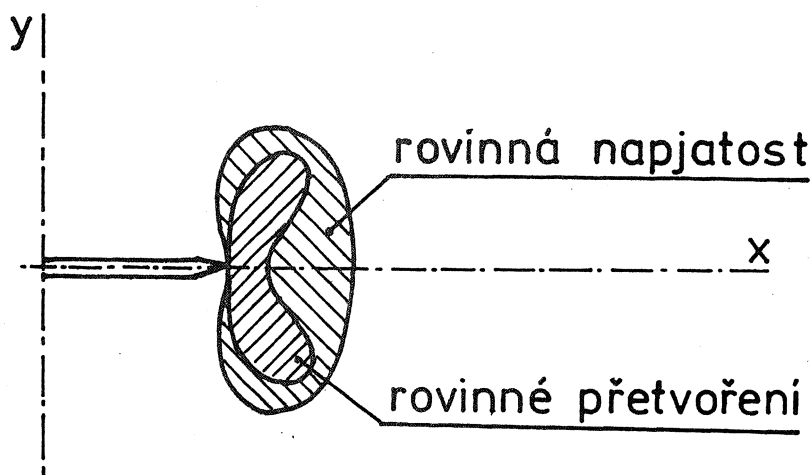
$$l^* = l + \varrho \quad (13.8)$$

Nyní je bilance sil obnovena:

Přibližnou opravu vzorců lineární lomové mechaniky pro malou oblast platických deformací ( $\varrho \ll l$ ) tedy dostaneme, když skutečnou délku trhliny nahradíme efektivní délkou podle (13.8). Vzdálenost  $\varrho$ , udávající

poloviční šířku plastické oblasti, jsme odvodili za předpokladu rovinné napjatosti. Pro rovinné přetvoření bude asi třikrát menší, tj.

$$\rho \approx \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_k} \right)^2 \quad (13.9)$$



OBR. 47

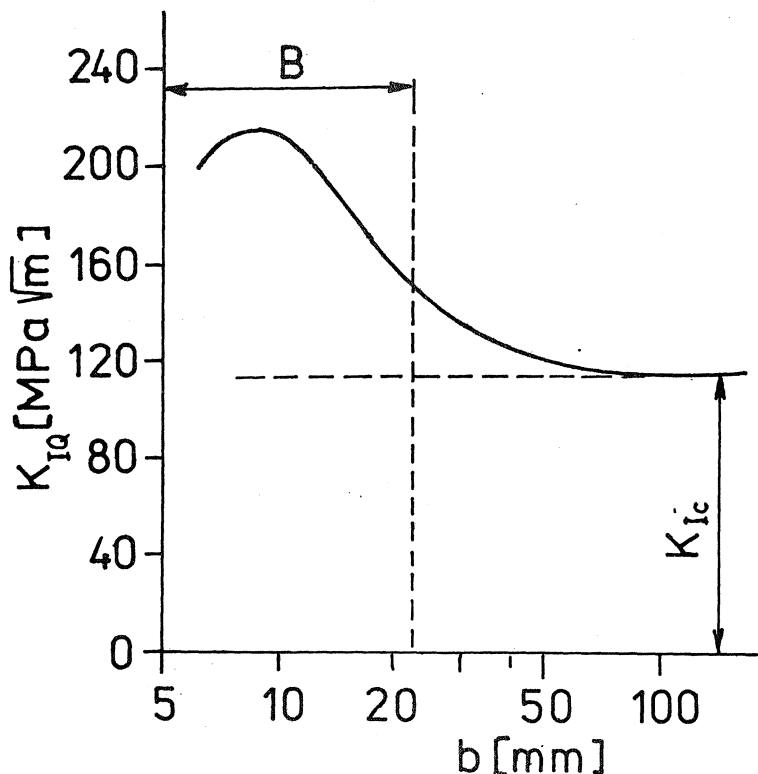
Srovnání plastických oblastí pro oba případy je znázorněno na obr. 47. Protože poblíž lícních povrchů desky je rovinná napjatost, ale uvnitř desky rovinné přetvoření, bude na koncích průchozí trhliny oblast plastických deformací asi třikrát větší než ve střední části. Tím si lze vysvětlit, proč - nejde-li o extrémně malé tloušťky stěny - vzrůstá kritická hodnota  $K_{IQ}$  faktoru intenzity napětí (pro I. typ namáhání trhliny), zmenšujeme-li tloušťku stěny. Rozhraní mezi stavem, kdy převládá rovinná napjatost resp. rovinné přetvoření, bylo zkouškami stanoveno jako

$$B = 2,5 \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_k} \right)^2 \quad (13.10)$$

Příklad závislosti  $K_{IQ}$  na tloušťce stěny je zakreslen na obr. 48. Z něho je patrný význam veličiny  $B$ , která se vztahuje k rozběhu trhliny (k mezi její stability).

Chceme-li tedy experimentálně stanovit hodnotu lomové houževnatosti  $K_{IC}$ , musíme se postarat o to, aby na čele trhliny převládal stav rovinného přetvoření. Toho dosáhneme tak, že zkušební vzorek bude mít tloušťku větší než  $B$  vypočtenou ze vztahu (13.10). Mez plastických deformací





OBR. 48

$\sigma_K$ , resp.  $\sigma_{Q2}$ , kterou do tohoto vztahu dosazujeme, musí být stanovena za stejné teploty jako  $K_{Ic}$ .

Mezi  $K_{IQ}$  a  $K_{Ic}$  udává Irwin (1964) závislost

$$K_{IQ} = K_{Ic} \sqrt{1 + 1,4\beta^2} \quad (13.11)$$

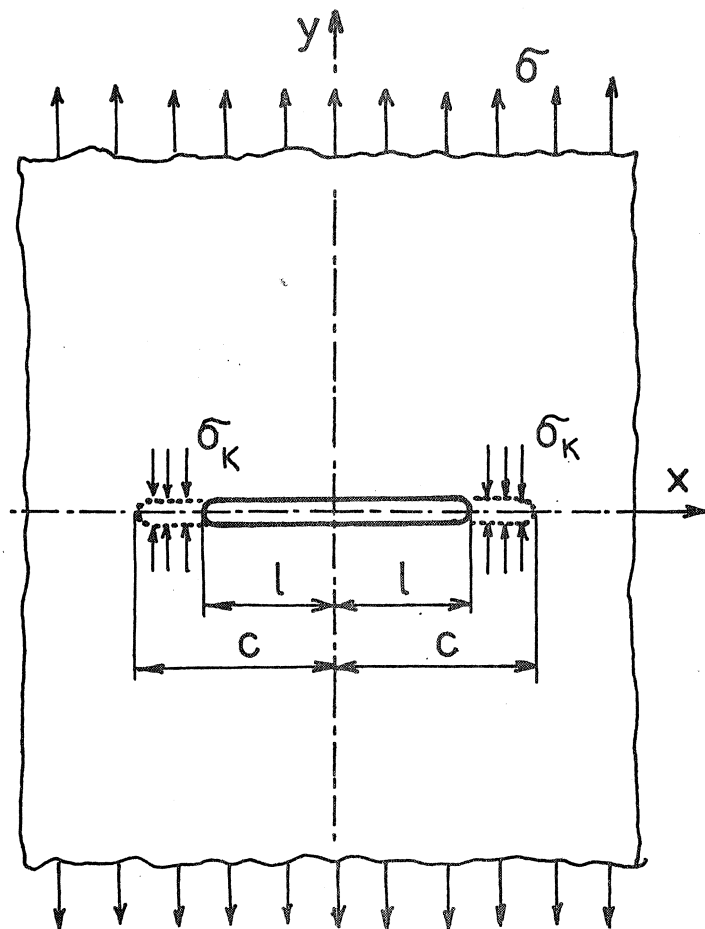
v níž  $\beta$  značí bezrozměrový parametr

$$\beta = \frac{1}{b} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_K} \right)^2 \quad (13.12)$$

Rovnice (13.11) platí pro malé hodnoty parametru  $\beta$ .

M.Ja.Leonov a V.V.Panasjuk (1959) a nezávisle na nich D.S.Dugdale (1960) vypracovali podrobnější teorii zahrnující vliv plastických deformací. Představili si, že oba okraje ("břehy") trhliny se v určité oblasti

před čelem trhliny nejprve od sebe oddalují za působení konstantního napětí  $\sigma_y = \sigma_k$ , až jejich vzdálenost dosáhne kritické hodnoty  $\delta_c$ , kdy se oba břehy oddělí (trhlina se počne šířit). Tento proces vysvětlíme podrobněji na příkladu trhliny délky  $2\ell$  v nekonečné oblasti při namáhání tahem (obr. 49). K řešení použijeme principu superpozice. Pouhé zatížení  $\sigma$  vyvolá v dokonale elastické desce s trhlinou o délce  $2\ell$  v řezu



OBR. 49

$y=0$  napětí

$$\sigma_y' = \frac{K_I'}{\sqrt{2\pi r}} \quad (13.13)$$

kde  $K_I' = \sigma \sqrt{\pi c}$  a vzdálenost  $r = x - c$ . K tomu superponujeme účinek samotného zatížení  $\sigma_k$ , které působí na intervalu  $\ell < |x| < c$ . Pro ten platí vztah

$$\sigma_y'' = -\frac{K_I''}{\sqrt{2\pi r}} \quad (13.14)$$

v němž

$$K_I'' = 2\sigma_k \sqrt{\frac{c}{\pi}} \arccos \frac{\ell}{c} \quad (13.15)$$

Výsledné napětí v desce s trhlinou o délce  $2\ell$  je pak

$$\sigma_y = \sigma_y' + \sigma_y'' \quad (13.16)$$

Protože skutečná délka trhliny je  $2\ell$ , nemůže v bodě  $x=c$  vzniknout singularita. Musí se proto obě singulární napjatosti (13.13) a (13.14) pro  $r \rightarrow 0$  zrušit. To znamená, že  $K_I' = K_I''$  čili

$$\sigma \sqrt{\pi c} = 2\sigma_k \sqrt{\frac{c}{\pi}} \arccos \frac{\ell}{c} \quad (13.17)$$

Odtud dostaneme

$$\frac{\ell}{c} = \cos \frac{\pi \sigma}{2\sigma_k} \quad (13.18)$$

Známe-li tento poměr, můžeme vypočítat šířku  $c-\ell$  plastické oblasti před čelem trhliny. Je-li  $\sigma \ll \sigma_k$ , můžeme kosinus rozvinout podle Maclaurinovy řady a ponechat z ní pouze první dva členy. Dosadíme tedy

$$\cos \frac{\pi \sigma}{2\sigma_k} \doteq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \sigma}{2\sigma_k} \right)^2 \quad (13.19)$$

Pak podle posledních dvou rovnic

$$c - \ell \doteq \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_I'}{\sigma_k} \right)^2 \quad (13.20)$$

Tuto hodnotu můžeme porovnat s šířkou  $2\ell_0$  vypočtenou pomocí rovnice (13.3); ta vyjde asi o 19 % menší než podle (13.20). Rozdíl není podstatný, neboť obě teorie jsou jen přibližné. Platnost modelu podle obr. 49 však není tak omezena, pokud jde o velikost plastické oblasti; přibližně platí i pro případ, že se jmenovité napětí blíží mezi kluzu.

Pro daný model podle obr. 49 lze vypočítat také posuvy. Důležitý je relativní posuv v místě  $x=\ell$  vypočtený pro  $\sigma = \sigma_c$  a pro poměr  $\ell/c$  podle (13.18), tj. pro napětí na mezi stability trhliny. V tom případě se oba břehy trhliny v uvedeném místě od sebe oddálí o kritickou vzdálenost

$$\delta_c = \frac{8}{\pi} \frac{\sigma_k}{E} l \ln \left[ \cos \left( \frac{\pi \delta_c}{2 \sigma_k} \right) \right]^{-1} \quad (13.21)$$

Tato hodnota se nazývá kritické otevření trhliny a označuje COD (crack opening displacement). Pro velmi malý poměr  $\delta_c / \sigma_k$  odtud vyjde

$$\delta_c \doteq \frac{\pi l \sigma_c^2}{\sigma_k E} = \frac{K_{IQ}^2}{\sigma_k E} \quad (13.22)$$

Vzroste-li trhlina o přírůstek  $\delta l$ , spotřebuje se práce  $\sigma_k \delta l$  a  $\delta_c = g_Q \delta l$  a , kde  $g_Q$  je rychlost uvolňování deformační energie. Odtud

$$g_Q = \sigma_k \delta_c \quad (13.23)$$

Dosazením za  $\delta_c$  z rovnice (13.22) dostaneme známý vztah

$$g_Q = \frac{K_{IQ}^2}{E} \quad (13.24)$$

platný pro rovinnou napjatost. Jde-li o rovinné přetvoření, je shodně s rovnicí (9.23)

$$g_c = \frac{1-\mu^2}{E} K_{Ic}^2 \quad (13.25)$$

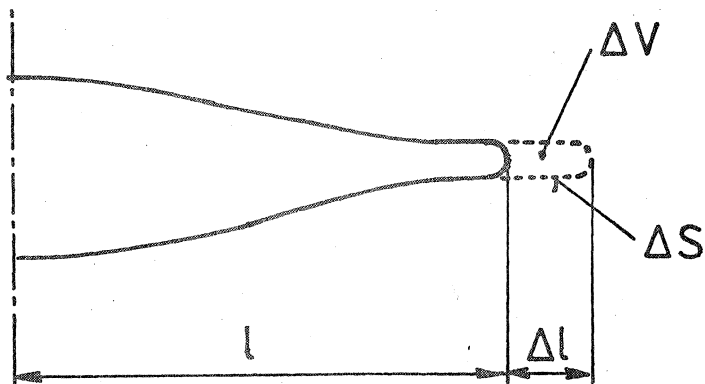
Podle (13.23) a (13.25) je pak

$$\delta_c = \frac{(1-\mu^2) K_{Ic}^2}{\sigma_k E} \quad (13.26)$$

Vztah (13.23) platí pro model podle obr. 49 bez zřetele k velikosti plastické oblasti. Rovnice (13.26) však platí jen pro případ, že plastická oblast před čelem trhliny je velmi malá.

#### 14. J-INTEGRÁL

Jiným kritériem, kterého lze užít k posuzování meze stability trhliny pro elastický i elastickoplastický lom, je kritická hodnota J-integrálu.



OBR. 50

Předpokládejme, že trhlina naznačená na obr. 50 je namáhána tahem. Jde tedy o namáhání I. typu. Sledujme, co se stane, když se poloviční délka  $l$  trhliny změní o přírůstek  $\Delta l$ . Při šíření trhliny se bude deformační energie v tělese zřejmě zmenšovat. Nová část trhliny zaujme objem  $\Delta V$ , v němž byla původně akumulována deformační energie

$$\int_{\Delta V} \lambda dV = \int_{\Delta V} dV \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (14.1)$$

Můžeme si představit, že bychom proces rozšíření trhliny uskutečnili ve dvou fázích: nejprve bychom z tělesa vyňali objem  $\Delta V$ , aniž se jinak cokoliv změní. To znamená, že odečteme energii (14.1) a na povrchu  $\Delta S$  přírůstku trhliny připojíme napěťové vektory o složkách  $f_i$  takové, aby se napjatost v ostatní oblasti nezměnila. Tyto vektory tedy představují původní silové působení objemu  $\Delta V$  na zbylou část tělesa; na nově vzniklém povrchu je namáhání spojitě rozděleno. Ve skutečnosti nebude na povrchu trhliny působit žádný napěťový vektor (žádné napětí); musíme proto - v druhé fázi procesu - napěťové vektory  $f_i$  uvolnit. Tím vzniknou na povrchu  $\Delta S$  posuvy  $\Delta u_i$  a na plošném elementu  $dS$  se uvolní práce  $dS \int f_i du_i$ . Označíme-li přírůstek deformační energie  $\Delta U$  (je to vlastně záporný úbytek), bude celkem

$$\Delta U = - \int_{\Delta V} \lambda dV + \int_{\Delta S} dS \int_{u_i}^{u_i + \Delta u_i} f_i du_i \quad (14.2)$$

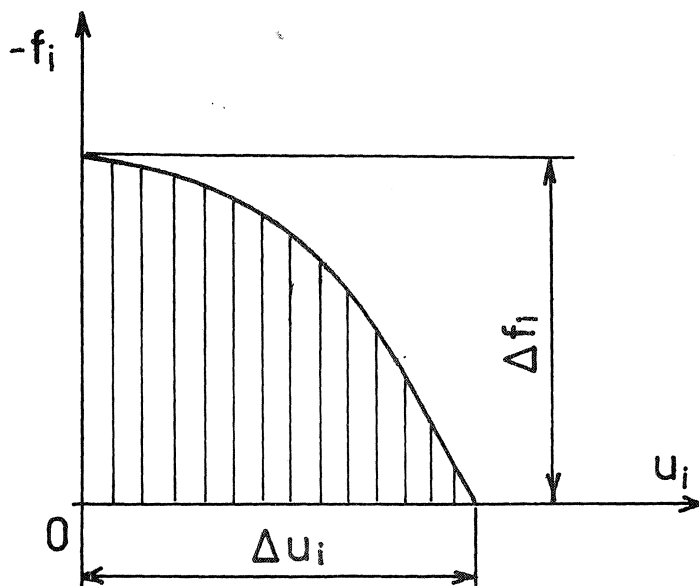
Oba členy na pravé straně jsou záporné, neboť skalární součin  $f_i du_i < 0$ .

Platí tedy nerovnost

$$-\Delta V - \int_{\Delta V} \lambda dV = - \int_{\Delta S} dS \int_{u_i}^{u_i + \Delta u_i} f_i du_i \geq 0 \quad (14.3)$$

V rovnicích (14.2) a (14.3) sčítáme podle Einsteinova pravidla přes index  $\dot{u} = 1, 2, 3$ .

Vzhledem k předpokládanému vzniku plastických deformací nemůžeme předpokládat, že závislost napěťového vektoru na posuvech jím vyvolaných bude lineární. Znázorníme ji proto pro každou složku příslušnou křivkou, z nichž jedna je zakreslena na obr. 51. Práce složky  $f_i$  napěťového vektoru, vztažená k jednotce plochy, je pak dána vyšrafovanou plochou. Takové



OBR. 51

plochy máme v každém místě nového povrchu tři a teprve jejich součet dává měrnou práci, kterou získáme, když uvolníme povrchová napětí. Na povrchu  $\Delta S$  vybereme místo, kde je uvedený součet největší. Pak bude zřejmě platit toto ohraničení:

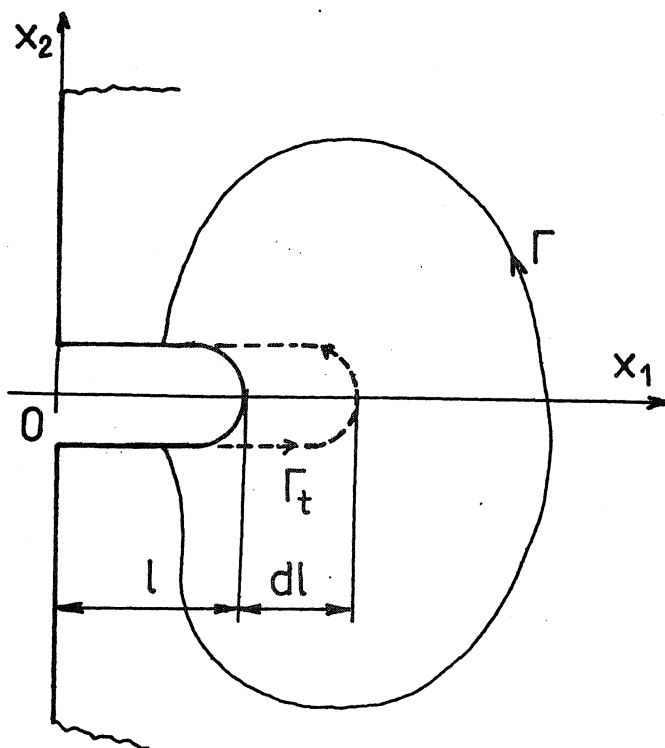
$$0 \leq - \int_{\Delta S} dS \int_{u_i}^{u_i + \Delta u_i} f_i du_i \leq \Delta S \Delta f_i \Delta u_i \quad (14.4)$$

Podle věty o střední hodnotě je také

$$0 \leq \int_{\Delta V} \lambda dV \leq \lambda_{\max} \Delta V \quad (14.5)$$

Levá strana této nerovnosti je dána tím, že hustota deformační energie nemůže být záporná. Jsou-li  $\Delta f_i$ ,  $\Delta u_i$  malé veličiny prvního řádu,  $\Delta S$  druhého řádu a  $\Delta V$  třetího řádu, je výraz na pravé straně (14.4) zanedbatelný proti pravé straně (14.5). Proto podle (14.3) pro  $\lim \Delta V \rightarrow 0$  (ostrá trhlina) bude platit nerovnost  $0 \leq -\Delta U - \int \lambda dV \leq \Delta S |\Delta f_i \Delta u_i| \approx 0$ , takže

$$-\Delta U = \int_{\Delta V} \lambda dV \quad (14.6)$$



OBR. 52

V dalším výkladu se omezíme na dvourozměrný případ podle obr. 52. V souřadnicích  $x_1$ ,  $x_2$  dostaneme pro element  $dV$  objemu (v desce o tloušťce  $b$ ) vztah

$$dV = b dl dx_2 \quad (14.7)$$

Tento výraz dosadíme do rovnice (14.6), ale z naznačené objemové integrace uskutečníme jen část. Místo přírůstku  $-\Delta U$  dostaneme pak diferenciál

$$-dU = b dl \int_{\Gamma_t} \lambda dx_2 \quad (14.8)$$

Označme

$$J = \int_{\Gamma_t} \lambda dx_2 \quad (14.9)$$

V okamžiku, kdy se trhlina počíná šířit, nabývá tento J-integrál kritické hodnoty  $J_Q$ . Podle (14.8) a (9.19) vyjde

$$J = - \frac{dU}{b dl} = g \quad (14.10)$$

Kritická hodnota J-integrálu se tedy rovná rychlosti uvolňování deformační energie (na hranici stability trhliny)  $g_Q$ . To je důležitá hodnota, která souvisí podle vztahu (9.22) s kritickou hodnotou  $K_{IQ}$  faktoru intenzity napětí a podle (13.23) také s kritickým otevřením trhliny. Všechny tyto veličiny lze použít jako kritéria pro stabilitu trhliny i tehdy, vznikají-li v okolí čela trhliny větší plastické deformace. Nejsou to však materiálové konstanty, protože se mění také s tloušťkou stěny. Materiálovými konstantami se stanou jen za podmínky, že na čele trhliny existuje stav rovinného přetvoření a že rozsah plastické oblasti je zanedbatelný; tehdy souvisí s lomovou houževnatostí  $K_{IC}$ .

Výpočet J-integrálu podle rovnice (14.9) by byl velmi problematický. Lze však dokázat, že integrál po uzavřené křivce

$$\oint \left[ \lambda dx_2 - f_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] \quad (14.11)$$

identicky vymizí, pokud je křivka vedena uvnitř oblasti, v níž existuje jednoznačná závislost  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{kl})$ . Tvrzení tedy platí nejen pro lineárně i nelineárně pružné materiály, ale i pro pružnoplastické materiály za podmínky prostého zatěžování, kdy platí deformační teorie plasticity (J.R.Rice, 1968). Vedeme-li křivku tak, aby se skládala ze dvou oblouků, z nichž jeden je na obr. 52 označen  $\Gamma$  a druhý, který je součástí hranice trhliny,  $\Gamma_t$ , pak - s přihlédnutím k orientaci těchto oblouků - bude

$$\int_{\Gamma} \left[ \lambda dx_2 - f_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] + \int_{-\Gamma_t} \left[ \lambda dx_2 - f_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] = 0 \quad (14.12)$$

Druhý člen v druhé závorce vymizí, neboť na povrchu trhliny (s výjimkou mizivé délky  $dl$ ) je napěťový vektor  $f_i$  nulový. Zbývá

$$\int_{\Gamma} \left[ \lambda dx_2 - f_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] = - \int_{-\Gamma_t} \lambda dx_2 \quad (14.13)$$



Protože  $\int_{-\Gamma}^{\Gamma} \lambda dx_2 = - \int_{\Gamma}^{\Gamma} \lambda dx_2 = -J$  , dostaneme

$$J = \int_{\Gamma} \left[ \lambda dx_2 - f_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right] \quad (14.14)$$

Křivka  $\Gamma$  může být vedena uvnitř oblasti jakkoli, ale tak, aby začínala na dolním a končila na horním břehu trhliny (obr. 52). Rovnice (14.14) umožňuje výpočet J-integrálu, známe-li pole napjatosti a posuvů v okolí trhliny. Nemusíme je tedy znát v blízkosti kořene trhliny. To je zvlášť důležité při numerickém výpočtu, neboť si můžeme integrační cestu  $\Gamma$  vybrat tak, aby výsledky byly co nejpřesnější.

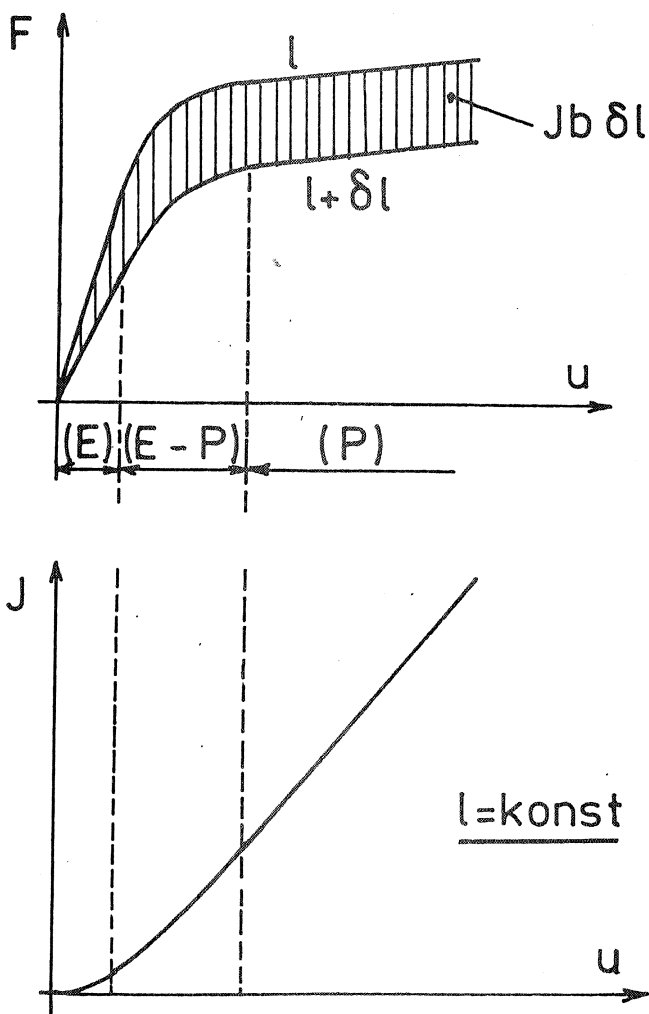
Hodnotu J-integrálu můžeme zjistit také experimentálně. Využijeme k tomu rovnice (4.10). Je-li zkušební deska s trhlinou zatěžována silou  $F$  , vykoná se během zatěžování práce  $\int F du$ . Zde  $u$  znamená relativní posuv mezi působištěm síly  $F$  a působištěm příslušné reakce  $R = -F$ . Obecně platí, že  $u = CF$ , kde  $C$  je poddajnost. U lineárně pružného tělesa je poddajnost konstantní, obecně to však nebude platit. Závislost  $u(F)$  bude např. taková, jak je naznačeno na obr. 53 nahoře. Horní křivka platí pro trhlinu délky  $l$ . Deformační práce síly  $F$  je dána plochou pod touto křivkou. Změní-li se nyní délka trhliny ( $l \rightarrow l + \delta l$ ), změní se i tato křivka. Práce síly  $F$  bude nyní menší. Rozdíl prací v obou případech značí energii  $-\delta U = q \delta l$  uvolněnou při rozšíření trhliny o délku  $\delta l$ . Je to šrafovaná plocha mezi křivkami v horní části obr. 53. Podle rovnice (14.10) je to vlastně J-integrál násobený hodnotou  $q \delta l$  ( $q$  značí tloušťku desky). Stačí tedy změřit poddajnost vzorku pro dvě různé dlouhé trhliny a hodnotu J-integrálu můžeme vypočítat. Rozdíl délek trhlín však nesmí být příliš velký, protože uvedený rozbor platí jen pro  $\lim \delta l \rightarrow 0$ . Přesnost takového experimentu bude tedy nevalná, avšak možnost získat hodnotu J-integrálu experimentálně je jistě zajímavá a objasňuje jeho fyzikální podstatu.

Na obr. 53 dole je vyznačen průběh J-integrálu na posuvu  $u$ . V elastické oblasti (E) je tento průběh parabolický, neboť poddajnost je konstantní. Druhá (přechodová) oblast je elastickoplastická (E-P) a třetí plastická (P); pro tu je závislost  $J(u)$  přibližně lineární.

J-integrál tedy závisí - podobně jako faktor intenzity napětí - na geometrii tělesa, na jeho zatížení a na délce trhliny. Na mezi stability trhliny nabývá kritické hodnoty  $J_Q$ . Je-li v okolí čela trhliny převážně rovinné přetvoření (tj. je-li tloušťka stěny velká) a plastická oblast velmi malá, dostaneme z rovnic (14.10) a (9.23) vztah mezi kritickou hodnotou J-integrálu a lomovou houževnatostí

$$J_c = \frac{1-\mu^2}{E} K_{Ic}^2$$

(14.15)



OBR. 53

Kritická hodnota J-integrálu je v tom případě úměrná čtverci lomové houževnatosti. Závisí však také na modulu pružnosti. Hodnota  $J_Q$ , resp.  $J_c$ , může sloužit jako kritérium stability trhliny.

## 15. R-KŘIVKA

Nejsou-li splněny předpoklady pro vznik lomu za podmínek rovinného přetvoření, pak o počátku šíření trhliny nerozhoduje lomová houževnatost, a to ani tehdy, je-li rozsah plastických deformací malý. Místo lomové houževnatosti  $K_{IC}$  musíme použít kritickou hodnotu faktoru intenzity napětí  $K_{IQ}$ . Tím se stane celý jev složitější, neboť hodnota  $K_{IQ}$  závisí u téhož materiálu nejen na teplotě a na deformační rychlosti, ale také na tloušťce stěny a na počáteční délce trhliny. Hodnota  $K_{IC}$  závisí naproti tomu pouze na teplotě a na deformační rychlosti. Jde-li o pomalé zatěžování a o počátek rozběhu trhliny, je deformační rychlost malá a v počátečním stadiu šíření trhliny se neuplatní; zbývá pak už jen závislost na teplotě.

K posuzování případů, kdy o počátku šíření trhliny nerozhoduje lomová houževnatost, ale obecněji např. hodnota  $K_{IQ}$  nebo kdy plastické deformace zasahují velkou oblast, lze použít experimentálně zjištěné R-křivky (resistance curve). Tato křivka se získává zkouškou vzorku s počáteční trhlinou délky  $l_0$  za pozvolného zatěžování pokud možno stejnou deformační rychlostí. Při I. typu namáhání se trhlina postupně štěpí a spotřebovává měrnou energii  $R$ . Je-li přírůstek délky trhliny  $\delta l$  a vzorek má tloušťku  $b$ , spotřebuje se plastickými deformacemi energie  $R b \delta l$ . Měrná energie  $R$  je ovšem totožná s hodnotou  $G_Q$  uvolňované deformační energie na mezi stability trhliny a také s hodnotou  $J_Q$  [viz rovnici (14.10)]. Předpokládá se, že závislost  $R = R(\Delta l)$  zjištěná pro trhlinu s počáteční délkou  $l_0$  platí stejně i pro jinou počáteční délku. Jinými slovy, měrná energie potřebná k vytváření nového povrchu závisí pouze na přírůstku délky trhliny, nikoli však na délce samé. To platí samozřejmě pro křehké materiály, kdy je měrná energie konstantní, platí to však i pro elastickoplastické materiály, které se tvářením zpevňují a u nichž měrná energie  $R$  s přírůstkem délky trhliny roste. To nyní vysvětlíme podrobněji.

Kdyby šlo o rovinné přetvoření [tloušťka stěny by musila být větší než  $B$  podle vzorce (13.10)] a kdyby byl rozsah plastických deformací velmi malý (mnohem menší než délka trhliny a než vzdálenost od okraje tělesa ve směru trhliny), rozhodovala by o šíření trhliny lomová houževnatost  $K_{IC}$ . Také bychom mohli použít jako kritéria hodnotu  $G_C$  podle vztahu (13.25). Trhlina by se šířila do "panenského" materiálu, o němž předpokládáme, že je homogenní. Proto by bylo  $G_C$  konstantní.

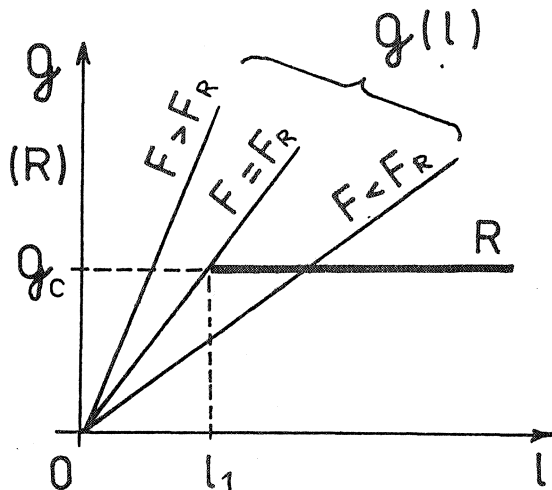
Rychlost  $Q$  uvolňované deformační energie vypočteme ze vztahů (9.16) a (9.19). Vyjde (pro vzorek podle obr. 7)

$$Q = \frac{\pi G^2 l}{E'} \quad (15.1)$$

Odtud, popř. i ze vztahu (10.6) lze soudit, že  $Q$  je úměrné čtverci zatížení. Při stejném zatížení je  $Q$  úměrné délce trhliny  $l$ . Můžeme tedy psát, že

$$Q = Q(F, l) \quad (15.2)$$

Zde  $F$  je zobecněná síla (u vzorků namáhaných tahem je to tahová síla, u ohýbaných vzorků je to ohybový moment). Zobecněnou sílu budeme považovat za parametr izoplet v diagramu  $Q(l)$  (obr. 54). Dostaneme svazek přímek



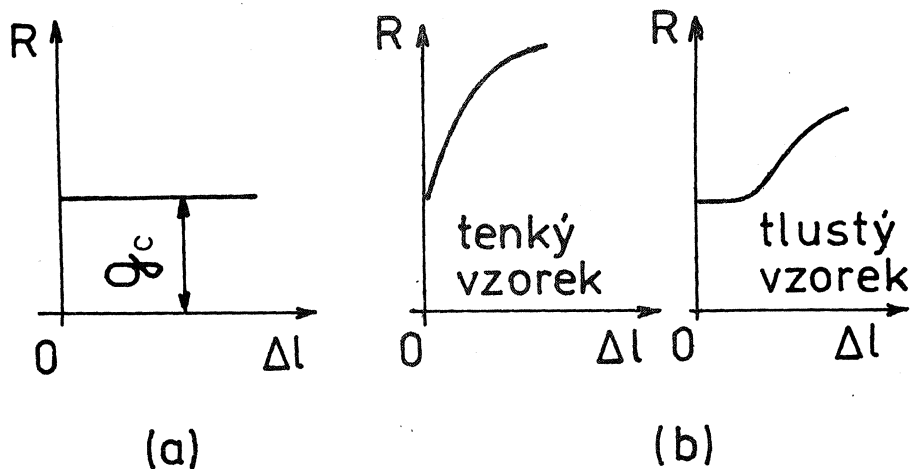
OBR. 54

procházejících počátkem. Počáteční délka trhliny nechť je  $l_1$ . Závislost měrné energie  $R$  na přírůstku  $\Delta l = l - l_1$  délky trhliny je tzv.  $R$ -křivka. V daném případě je to úsečka (polopřímka) rovnoběžná s osou úseček, vyznačená rovněž na obr. 54. Jestliže pro  $F = F_R$  dostaneme přímku  $Q(l)$  procházející počátečním bodem  $R$ -křivky (popsané úsečky), pak síla odpovídá mezi stability trhliny. Jedině pro tuto přímku bude totiž splněna podmínka

$$Q = R \quad \text{pro} \quad l = l_1 \quad (15.3)$$

Tato podmínka představuje rovnost uvolňované a spotřebované energie.

Je-li nyní materiál elastickoplastický, šíří se trhlina do oblastí, jež byly už předem různou měrou plastickými deformacemi zpevněny. R-křivka nebude proto vodorovná úsečka, ale nějaká zpravidla rostoucí závislost.

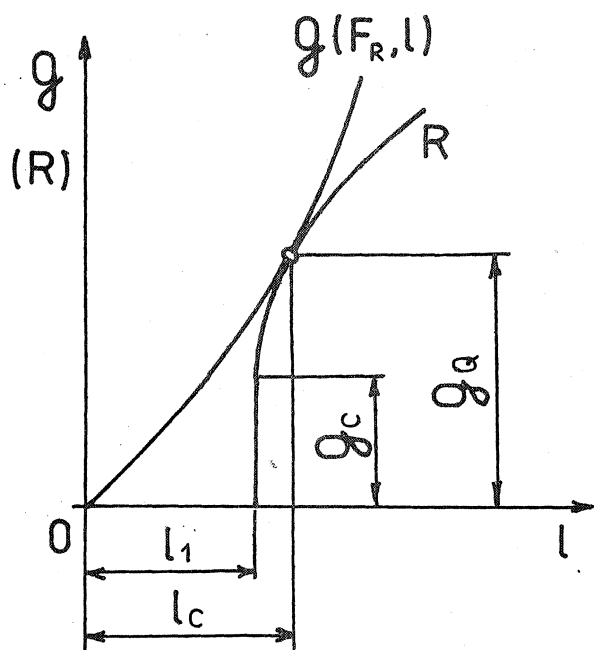


OBR. 55

Na obr. 55 je pro srovnání schematicky zakreslena R-křivka pro křehký materiál (a) a pro elastickoplastický materiál (b). R-křivku můžeme získat jen experimentálně. Naproti tomu závislost  $g(F, \ell)$  lze odvodit teoreticky (třeba metodou konečných prvků s použitím J-integrálu). Křivky  $g(F, \ell)$  již nebudou lineárně závislé na  $\ell$ , obzvlášť tehdy ne, bude-li mít těleso konečné rozměry a obecný tvar.

Chceme-li nyní určit kritické zatížení  $F_R$ , vyneseme do diagramu  $g(\ell)$  zjištěnou R-křivku, a to tak, aby její počátek spadal do bodu  $\ell = \ell_1$ ,  $g = g_c$ . Z izoplet  $g(F, \ell)$  vybereme tu, která se R-křivky dotýká (obr. 56). Pořadnice dotykového bodu dává rychlost  $g_Q$  uvolňované deformační energie při rozběhu trhliny a úsečka kritickou délkou  $\ell_c$  trhliny; dosáhne-li trhliny délky  $\ell_c$ , šíří se dál spontánně, neboť se uvolní více deformační energie než kolik se jí spotřebuje novými plastickými deformacemi (pro  $\ell > \ell_c$  je  $g > R$ ). Zároveň získáme kritickou sílu  $F_R$  potřebnou k rozběhu trhliny.

Abychom to lépe osvětlili, uvedeme ještě tuto úvahu. Tyč s trhlinou zatěžovaná zobecněnou silou  $F$  se prodlužuje o zobecněný posuv  $u$ . Je-li za stabilní rovnováhy  $F = F_0$ ,  $u = u_0$ , pak k docílení většího posuvu ( $du > 0$ ) musíme zvětšit sílu ( $dF > 0$ ). To znamená, že derivace



OBR. 56

$dF/du$  bude v bodě  $u=u_0$  pozitivní. Kdyby byla tato derivace naopak negativní, znamenalo by to, že při šíření trhliny bude síla klesat (nebo nebude-li klesat, vznikne zrychlení a trhlina se bude šířit dynamicky). Na mezi stability  $F=F_R$  bude  $dF/du = 0$ .

Podmínku rovnováhy však můžeme zapsat také ve tvaru  $g-R = 0$  (místo rovnice  $F=F_R$ ). Pak bude na mezi stability platit podmínka

$$\frac{d(g-R)}{du} = 0 \quad (15.4)$$

Odtud

$$\frac{\partial g}{\partial F} \frac{dF}{du} + \frac{\partial g}{\partial l} \frac{dl}{du} - \frac{\partial R}{\partial F} \frac{dF}{du} - \frac{\partial R}{\partial l} \frac{dl}{du} = 0 \quad (15.5)$$

Na mezi stability  $F=F_R$  je však  $dF/du=0$ . Proto odpadne na levé straně rovnice (15.5) první a třetí člen. Zbývající dva členy dávají podmínku

$$\left(\frac{\partial q}{\partial l}\right)_{F=F_R} = \left(\frac{\partial R}{\partial l}\right)_{F=F_R} \quad (15.6)$$

To je však podmínka pro dotyk obou křivek definujících na obr. 56 kritický stav (mez stability). Tím je odůvodněn dříve popsáný postup.

## 16. EMPIRICKÉ VZTAHY PRO ODHAD LOMOVÉ HOUŽEVNATOSTI

Určování lomové houževnatosti, tj. faktoru intenzity napětí v podmínkách rovinného přetvoření, je poměrně náročné. Tato hodnota závisí nejen na materiálu, ale také na teplotě a na deformační rychlosti. Bylo vykonáno mnoho pokusů, jejichž cílem bylo nahradit zkoušku lomové houževnatosti jinou, méně náročnou materiálovou zkouškou. Hledal se vztah zejména mezi lomovou houževnatostí a vrubovou houževnatostí. Žádný z těchto vztahů však není zcela spolehlivý a nemůže zkoušku lomové houževnatosti nahradit. Empirické vztahy však mohou poskytnout alespoň informativní hodnoty.

Pro oceli namáhané pod přechodovou teplotou byl nalezen vztah

$$\frac{K_{Ic}^2}{E} = 0,516 \cdot 10^{-3} U \quad (16.1)$$

kde  $K_{Ic}$  [MPa  $\sqrt{m}$ ] značí lomovou houževnatost,  
 $E$  [MPa] modul pružnosti v tahu - tlaku,  
 $U$  [J  $cm^{-2}$ ] energii vztaženou k lomové ploše (0,8  $cm^2$ )  
 při ohybu vzorku s V-vrubem

Vzorek s V-vrubem se používá při Charpyho rázové zkoušce (ČSN 42 0381). Vztah (16.1) platí pro oceli nižší pevnosti a pro statické i dynamické hodnoty, jestliže si odpovídají deformační rychlosti. Dosadíme-li tedy za  $U$  vrubovou houževnatost  $KCV$  získanou při rázové zkoušce, vyjde ze vztahu (16.1) přibližně dynamická lomová houževnatost  $K_{Id}$ .

Při namáhání nad přechodovou teplotou převládají při vytváření lomu plastické deformace a stav rovinného přetvoření přestává být dominantní, nejde-li o zvlášť tlusté stěny. Pro teploty v horní části přechodové ob-

lasti a nad přechodovou teplotou byla navržena empirická rovnice

$$\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_{kA}}\right)^2 = 0,5164 \left(\frac{KCV}{\sigma_{kA}} - 0,0123\right) \quad (16.2)$$

v níž  $K_{IC}$  [MPa  $\sqrt{m}$ ] je lomová houževnatost,  
 $\sigma_{kA}$  [MPa] mez kluzu při statické zkoušce tahem (0,2 %),  
 $KCV$  [J  $cm^{-2}$ ] vrubová houževnatost zjištěná za normální teploty při Charpyho zkoušce s V-vrubem podle ČSN 42 0381

Rovnice (16.2) platí přibližně pro oceli s mezí kluzu větší než asi 690 MPa. U ocelí s nižší mezí kluzu se dosáhne lepší shody, dosadí-li se do vzorce (16.2) dynamická hodnota meze kluzu  $\sigma_{kd}$  zjišťovaná při větší deformační rychlosti; odhadem

$$\sigma_{kd} \cong \sigma_{kA} + 140 \text{ až } 200 \text{ MPa} \quad (16.3)$$

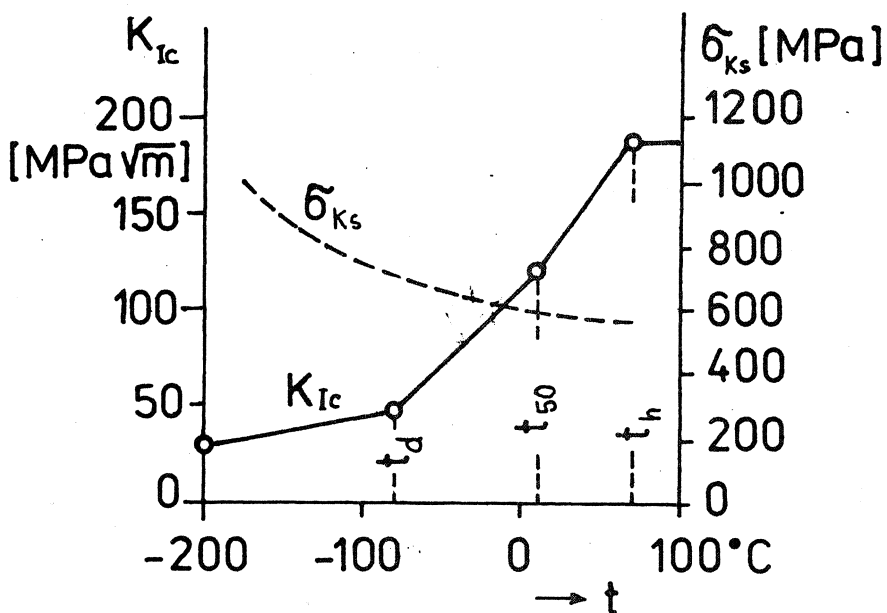
Podle Begleyho a Logsdona lze celou křivku  $K_{IC}(t)$  pro rotorové oceli schematizovat lomenou čarou sestavenou takto:

1. Charpyho rázovou zkouškou se vyšetří oblast přechodové teploty a stanoví se teploty  $t_d$  (dolní přechodová teplota, 100 % křehkého lomu),  $t_{50\%}$  (50 % křehkého lomu) a  $t_h$  (horní přechodová teplota, plastický lom).
2. Uskuteční se tahová zkouška za teplot  $t_d$ , resp.  $t_h$ .
3. Za teploty  $t_d$  se vypočte
 
$$K_{IC} = 0,0717 \sigma_{kA}$$
 kde  $K_{IC}$  [MPa  $\sqrt{m}$ ] je lomová houževnatost za teploty  $t_d$ ,  
 $\sigma_{kA}$  [MPa] statická mez kluzu (0,2 %) při téže teplotě.
4. K výpočtu  $K_{IC}$  za teploty  $t_h$  uijeme vztahu (16.2).
5. Za teploty  $t_{50}$  zvolíme  $K_{IC}$  jako aritmetický průměr hodnot vypočtených podle bodů 3 a 4.
6. Dolní větev se vede do bodu  $K_{IC} = 28 \text{ MPa } \sqrt{m}$  při teplotě  $-200^\circ\text{C}$ . Horní větev je rovnoběžná s osou úseček.

Příklad takto určené závislosti lomové houževnatosti na teplotě je zakreslen na obr. 57.

Pro oceli užívané ve stavbě jaderných reaktorů byla stanovena empirická závislost referenční hodnoty  $K_{IR}$  lomové houževnatosti na teplotě  $t$  [ $^\circ\text{C}$ ] ve tvaru





OBR. 57

$$K_{IR} = 29,42 + 1,344 \exp \{ 0,0261 [ t - (NDT - 88,9) ] \} \quad (16.4)$$

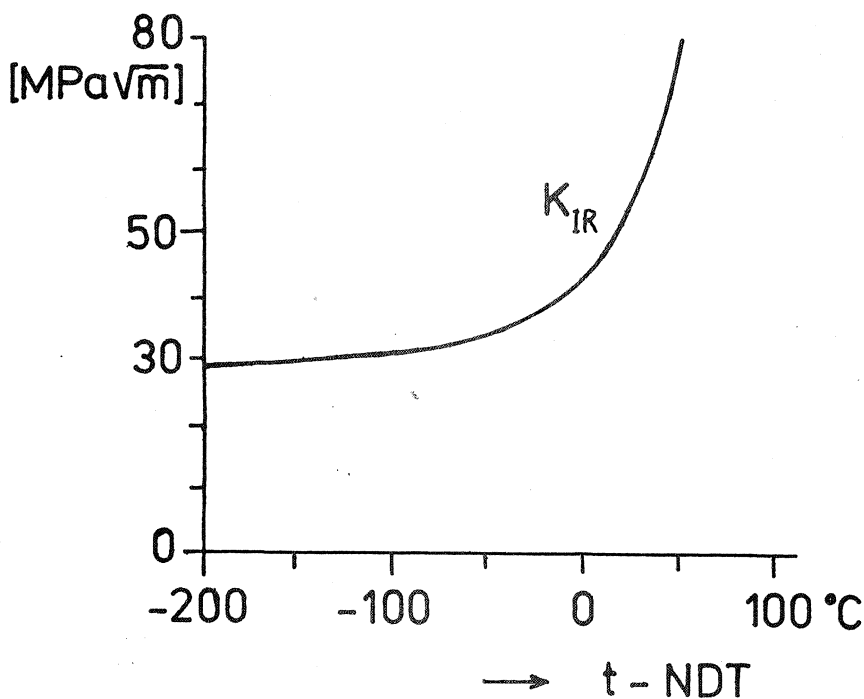
kde  $K_{IR} [MPa \sqrt{m}]$  je dolní mez lomové houževnatosti určená tak, aby kritické hodnoty nebyly nižší než referenční, a to ani při šíření trhliny z lokálně zkřehlých oblastí.  $NDT$  je teplota nulové houževnatosti (nil-ductility temperature, ČSN 42 0349). Závislost  $K_{IR}$  na rozdílu teplot  $t - NDT$  ve stupních Celsia je vynesena na obr. 58.

Podobnou závislost pro referenční lomovou houževnatost navrhl Rabotnov a kol. (1976):

$$K_{IR} = \frac{6326}{86 - t_R} \quad (16.5)$$

Z tohoto vzorce vyjde  $K_{IR}$  v jednotkách  $MPa \sqrt{m}$ ,  $t_R$  je rozdíl teplot mezi provozní teplotou  $t_p$  a přechodovou teplotou  $t_{50\%}$  zjištěnou podle Charpyho rázových zkoušek ohybem vzorku podle ČSN 42 0381. Vztah (16.5) platí pro hodnoty  $K_{IR} \leq 140 MPa \sqrt{m}$ .

Jak jsme již uvedli, závisí lomová houževnatost nejen na teplotě, ale také na deformační rychlosti, a to zejména u ocelí nižší pevnosti. Uskutečnil-li se zkouška lomové houževnatosti při větší deformační rych-



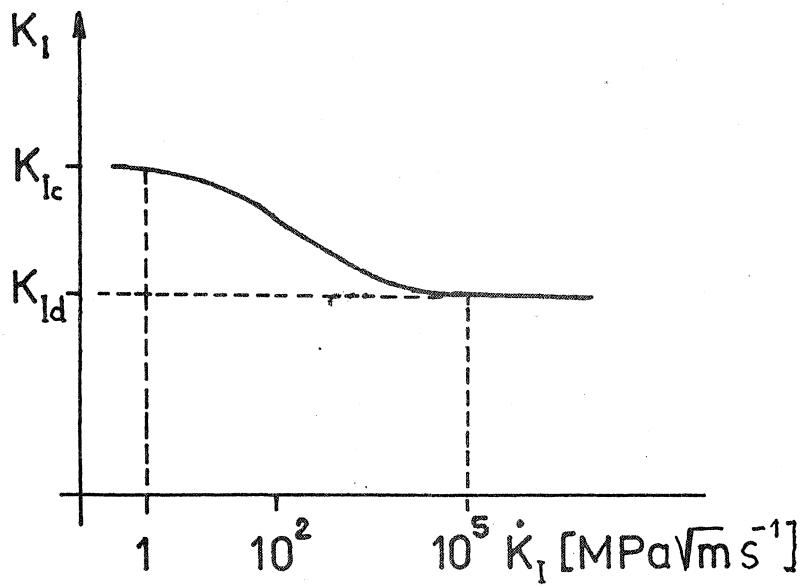
OBR. 58

losti, získá se dynamická lomová houževnatost  $K_{Id}$  (obr. 59). Za statickou zkoušku lze považovat takovou, při níž  $\dot{K}_I \leq 1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m/s}}$ , resp.

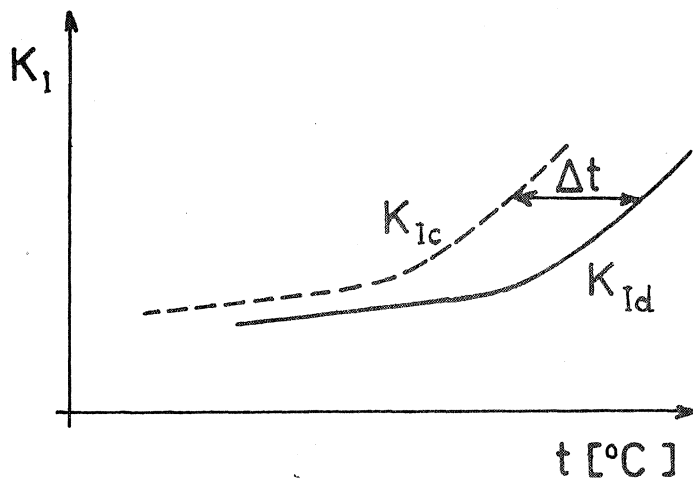
$\dot{\epsilon} \leq 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , kdežto při dynamické zkoušce je  $\dot{K}_I \geq 10^5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m/s}}$ , resp.  $\dot{\epsilon} \geq 20 \text{ s}^{-1}$ . Tyto hodnoty jsou jen orientační. Křivka vyznačující závislost  $K_{Id}$  na teplotě se liší od téže závislosti pro  $K_{Ic}$  především tím, že je posunuta o rozdíl  $\Delta t$  (obr. 60). Podle Rabotnova a kol. (1976) můžeme tento teplotní rozdíl  $[\text{K}]$  odhadnout ze vztahů

$$\Delta t = \begin{cases} 120 - 0,12 \sigma_{kA} & \text{pro } 250 \leq \sigma_{kA} \leq 1000 \\ 0 & \text{pro } \sigma_{kA} > 1000 \end{cases} \quad (16.6)$$

Zde  $\sigma_{kA}$   $[\text{MPa}]$  je mez kluzu (0,2 %) při statické zkoušce tahem za normální teploty. Hodnota  $K_{Id}$  se tedy vztahuje k dynamickému rozběhu stabilní trhliny. Jestliže se trhlina už šíří rychlostí  $dl/dt$ , stává se faktor intenzity napětí závislý na této rychlosti šíření trhliny a označuje se  $K_{ID}$ .



OBR. 59



OBR. 60

Z termodynamických úvah vyplývá, že trhлина se nemůže šířit rychlostí větší než je rychlost Rayleighových povrchových vln v daném materiálu (je to rychlost asi o 4 až 8 procent nižší než  $\sqrt{G/\rho}$ , kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku a  $\rho$  hustota).

## 17. PEVNOSTNÍ HYPOTÉZY A LOMOVÁ MECHANIKA

Pevnost nějaké součásti posuzujeme vždy jen v souvislosti s pravděpodobným mezním stavem, při němž dochází k poruše buď velkými trvalými deformacemi nebo rozlomením části. Toto rozlomení nastává někdy náhle nebo po malém počtu zatěžovacích cyklů, zpravidla nepřevyšujícím  $10^2$ . Pak hovoříme o jednorázovém nebo kvazistatickém porušení, popř. o dynamickém tečení (jde-li o míjivé namáhání). Nastává-li rozlomení teprve po větším počtu cyklů než  $10^2$ , jde o únavový lom.

Můžeme-li předpokládat existenci nějaké vady v materiálu, tedy existenci počáteční trhliny, můžeme podle zákonů lomové mechaniky odhadnout kritickou velikost namáhání, při němž trhлина ztratí stabilitu a počne se náhle šířit. Jsme tedy schopni odhadnout kritické přetížení, při němž by vznikl náhlý lom. Jsme však schopni odhadnout také životnost části (s použitím Parisova zákona), bude-li se namáhání opakovat na nižší než kritické úrovni. Teprve když se únavová trhлина natolik rozšíří, že kritické napětí klesne na hodnotu provozního napětí, dolomí se součást náhle ve zbytku průřezu.

Často však můžeme být na rozpacích, jakou vadu bychom měli v materiálu předpokládat. To záleží na defektoskopických metodách, jimiž výroba disponuje, na nebezpečnosti poruchy a na celkové úrovni technologie. Kromě toho se musíme rozhodnout, zda pro daný případ platí lineární lomová mechanika (kritérium  $K_{IC}$ , resp.  $K_{IQ}$ ) nebo musíme-li použít vztahů z nelineární lomové mechaniky (kritérium COD,  $J_Q$  nebo R-křivka). Všeobecně se předpokládá, že lineární lomová mechanika platí, pokud kritické jmenovité napětí v zeslabeném průřezu nepřesáhne  $0,8 \sigma_K$ , resp.  $0,8 \sigma_{0,2}$ .<sup>1)</sup> Je-li tato podmínka splněna, nezávisí hodnota  $Q_{IQ}$  na počáteční délce trh-

1) Poznamenejme, že v literatuře, která se týká mechanických zkoušek materiálu, se mez kluzu označuje  $R_e$ , mez pevnosti  $R_m$ , tažnost  $A$ , kontrakce  $Z$ . V těchto skriptech se však přidržujeme, pokud neuvádíme výslovně jinak, normy ČSN 01 1302.

liny. Metody a kritéria nelineární lomové mechaniky lze aplikovat i v lineární oblasti, v níž lze použít k rozboru napjatosti a deformací elastický model (popř. korigovaný elastický model, vznikají-li plastické deformace jen v malém rozsahu). Opačné tvrzení však neplatí.

U důležitých konstrukcí (mosty, jaderné reaktory) jsou aplikace lomové mechaniky zakotveny v příslušných předpisech. Počítá se tam s referenčními hodnotami, které mají zaručit požadovanou provozní bezpečnost. V ostatních případech jsme odkázáni na vlastní úsudek a na znalosti materiálových vlastností, z nichž výrobce zaručuje jen některé. U mnoha strojních částí zjistíme, že aplikace lineární lomové mechaniky nepřichází v úvahu, a pro nelineární lomovou mechaniku nebudeme znát potřebné hodnoty (R-křivku apod.). Bude-li taková součást bez makroskopických defektů, budou se v ní rozvíjet plastické deformace takovou měrou, že součást bude nutné vyřadit z provozu ještě dříve, než dojde k lomu. V takovém případě je na místě posuzovat bezpečnost konstrukce vzhledem k plastickému meznímu stavu.

Někdy však - z důvodu přesnosti mechanismu - nechceme připustit žádné plastické deformace; za kritické pak považujeme takové namáhání, při němž se objeví první plastické deformace. To znamená, že v nejvíce namáhaném místě bude právě splněna podmínka plasticity. Tu lze u izotropního materiálu zapsat obecně ve tvaru

$$f(I_1, I_2, I_3, \sigma_k) = 0 \quad (17.1)$$

Napjatost vstupuje do této podmínky pouze prostřednictvím invariantů [srov. s rovnicí (2.17)], neboť vznik plastických deformací nemůže záviset na volbě souřadnicové soustavy. Všechny napjatosti, splňující vztah (17.1), jsou z hlediska vzniku plastických deformací ekvivalentní. Mezi nimi je i napjatost při prostém tahu; když ji do rovnice (17.1) dosadíme, dostaneme identitu. Tak jsme získali možnost nahradit libovolnou napjatost na mezi plastických deformací ekvivalentní jednoosou napjatostí, kterou můžeme snadno realizovat při zkoušce tahem. Tehdy je  $\sigma_x = \sigma_k, \sigma_y = 0$ ,

$\tau_{xy} = 0$  atd. Podle stejného vztahu pro přepočty napjatostí, tj. podle stejného kritéria ekvivalence, můžeme danou napjatost nahradit ekvivalentní jednoosou napjatostí, u níž bude  $0 < \sigma_x = \sigma_{ekv} < \sigma_k$ . Za míru bezpečnosti pak bereme poměr

$$k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ekv}} \quad (17.2)$$

Protože chceme, aby k plastickým deformacím nedošlo (leda až po  $k$ -násob-

ném zvětšení namáhání), musí být  $k > 1$ . Tedy

$$\sigma_{ekv} < \sigma_k \quad (17.3)$$

To je "pevnostní" podmínka, která má smysl u houževnatých materiálů, u nichž lze předpokládat rozvíjení plastických deformací.

Analogicky můžeme posuzovat i pevnost u křehkých součástí, neznáme-li lomovou houževnatost a nemůžeme-li rozumně předpokládat žádný makroskopický defekt. V podmínce (17.2), resp. (17.3) pouze zaměníme mez kluzu za mez pevnosti, která se u křehkých materiálů jen málo liší od kohezivní pevnosti. Dostaneme

$$k = \frac{\sigma_p}{\sigma_{ekv}} \quad (17.4)$$

resp.

$$\sigma_{ekv} < \sigma_p \quad (17.5)$$

Hodnota  $k$  podle (17.2) může být např. 1,5 až 2,5, abychom získali rozumnou pevnostní rezervu. Hodnotu  $k$  podle (17.4) však musíme volit větší, protože kohezivní pevnost materiálu je zatížena větším rozptylem. Při plastických deformacích se totiž vlastnosti materiálu v průřezu vyrovnávají, kdežto kohezivní pevnost závisí vždy na nejslabším článku materiálové struktury a na vlastním pnutí, které může být tím nebezpečnější, čím je součást větší. U křehkých materiálů proto volíme míru bezpečnosti 2 až 3; uplatní-li se větší měrou nehomogenita, vlastní pnutí nebo tvarová nepřesnost (při vzpěru), volíme raději 3 až 5 (vyšší hodnoty pro součásti větších rozměrů).

Tak jsme dospěli ke klasickým pevnostním hypotézám. Jejich význam je dnes omezen na případy, kdy je aplikace lomové mechaniky ztížena nebo kdy nepřichází v úvahu z jiných důvodů (když nechceme připustit plastické deformace a kvazikřehký lom nehrozí, popř. kdy můžeme předpokládat dosažení plastického mezního stavu). Tyto hypotézy slouží v podstatě jako kritéria ekvivalence mezi různými stavy napjatosti. Uvedeme nejnámější pevnostní hypotézy ve stručném přehledu. K tomu však budeme potřebovat pojem deviátor napětí a deviátor přetvoření; tyto pojmy nyní vysvětlíme.

Podle zkušeností snese homogenní materiál téměř neomezené namáhání hydrostatickým tlakem (hlavní napětí jsou záporná a rovnají se tomuto tlaku), aniž se poruší. Proto se jeví účelné oddělit od obecné napjatosti

její "hydrostatickou složku", tj. oddělit od normálových napětí jejich aritmetický průměr  $\Delta = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ . Dostaneme

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{xx} & \Delta_{xy} & \Delta_{xz} \\ \Delta_{yx} & \Delta_{yy} & \Delta_{yz} \\ \Delta_{zx} & \Delta_{zy} & \Delta_{zz} \end{bmatrix} \quad (17.6)$$

V tenzorovém zápisu

$$\sigma_{ij} - \Delta \delta_{ij} = \Delta_{ij} \quad (17.7)$$

Napjatost  $[\Delta_{ij}]$  se nazývá deviator napětí. Obdobně vypočteme

$$\varepsilon_{ij} - e \delta_{ij} = e_{ij} \quad (17.8)$$

kde  $e = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$  soubor šesti hodnot tvořících matici  $[e_{ij}]$  je deviator přetvoření. Jemu přísluší nulová změna objemu, neboť  $\Delta V/V = e_{ii} = \varepsilon_{ii} - e \delta_{ii} = 3e - 3e = 0$ .

Uvedeným rozdělením se tedy vyčleňuje z přetvoření část, která působí změnu objemu, od části, při které se objem nemění (mění se jen tvar). Hookeův zákon pro izotropní materiál lze upravit do tvaru

$$\Delta = 3Ke, \quad \Delta_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (17.9)$$

Zde  $K$  značí modul objemové pružnosti, pro který platí vztah

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (17.10)$$

$E$ ,  $G$  jsou moduly pružnosti v tahu - tlaku a ve smyku,  $\mu$  Poissonovo číslo. Hustota deformační energie se dá rovněž rozdělit na dvě nezávislé části

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (17.11)$$

kde

$$\Lambda_1 = \frac{3}{2} \Delta e \quad (17.12)$$

značí dilatační energii (příslušnou změně objemu) a

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2} \Delta_{ij} e_{ij} \quad (17.13)$$

distorzní energii (při stálém objemu; přísluší změně tvaru). Nyní již uvedeme přehled pevnostních hypotéz.

#### A. Hypotézy pro posouzení poruchy materiálu v křehkém stavu

Rankinova hypotéza maximálního napětí. Při porovnávání prostorové a jednoosé napjatosti se uvažují pouze extrémní hodnoty hlavních napětí. Jsou-li hlavní napětí  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , je ekvivalentní napětí rovno buď  $\sigma_1$  (je-li  $\sigma_1 > 0$ ) nebo  $-\sigma_3$  (je-li  $\sigma_3 < 0$ ). V prvním případě se ekvivalentní napětí porovnává s mezí pevnosti v tahu, v druhém případě s mezí pevnosti v tlaku. Rozhoduje méně příznivý případ.

Saint-Venantova hypotéza maximálního prodloužení. Ekvivalentním napjatostem přísluší stejná maximální prodloužení  $\epsilon_{max}$ . Předpokládáme-li platnost Hookeova zákona až do porušení, bude

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \mu \sigma_2 - \mu \sigma_3 \quad (17.14)$$

jestliže hlavní napětí splňují podmínku  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Při zkoušce tlakem je  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -F/S$ , takže

$$\sigma_{ekv} = -\mu \sigma_3 \quad (17.15)$$

Při zkoušce tahem

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 \quad (17.16)$$

Dosadíme-li  $\sigma_1 = \sigma_{pt}$ ,  $\sigma_3 = -\sigma_{pd}$ , vyjde srovnáním obou výrazů poměr meze pevnosti v tahu k mezí pevnosti v tlaku

$$\frac{\sigma_{pt}}{\sigma_{pd}} = \mu \quad (17.17)$$

To se u mnohých křehkých látek potvrzuje.

Porucha se nepředpokládá, vyjde-li  $\epsilon_{max} < 0$ . V takovém případě se doporučuje na tuto hypotézu nespolehat a postupovat raději podle hypotézy Rankinovy. Někteří autoři navrhnou brát

$$\sigma_{ekv} = -\sigma_3 + \mu \sigma_1 + \mu \sigma_2 \quad (17.18)$$

a toto napětí porovnávat s mezí pevnosti v tlaku  $\sigma_{pd}$ . Avšak představa,



že by se materiál porušoval zmenšováním meziatomárních vzdáleností, odporuje původnímu duchu hypotézy. K poruše dojde spíše tím, že skutečný materiál není zcela homogenní a různé strukturní složky jsou různě namáhány; pro některé z nich může být dokonce  $\varepsilon > 0$ . Vycházíme-li však z představy homogenního materiálu, nemůžeme tyto podrobnosti výpočtem zachytit.

**Mohrova hypotéza mezní čáry.** Zakreslíme-li do roviny  $\sigma, \tau$  všechny Mohrovy kružnice odpovídající napjatostem, při nichž se materiál v daném místě poruší, vytvoří se obálka. Porucha nastane, dotkne-li se Mohrova kružnice této obálky. Nahradíme-li tuto obálku dvěma přímkami, jež se dotýkají kružnic znázorňujících prostý tah resp. prostý tlak na mezi pevnosti, dostaneme pro napjatost  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  na mezi pevnosti podmínku

$$\sigma_1 \sigma_{pd} - \sigma_3 \sigma_{pt} = \sigma_{pd} \sigma_{pt} \quad (17.19)$$

Mohrova hypotéza je vhodná pro materiály, u nichž je mez pevnosti v tlaku větší než v tahu.

#### B. Hypotézy pro posuzování vzniku plastických deformací

**Misesova hypotéza** (zvaná též Huberova-Misesova-Henckyho) bere za základ srovnání distorzní energie (17.13). Dvě napjatosti jsou ekvivalentní, mají-li stejnou distorzní energii. Pak musí platit, že

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2}{3}} \quad (17.20)$$

Známe-li hlavní napětí, pak - bez zřetele k pořadí jejich velikosti - bude

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} \quad (17.21)$$

Výrazy na pravých stranách rovnic (17.20) a (17.21) se nazývají intenzita napětí a označují v této souvislosti symbolem  $\sigma_i$ . Plastické deformace vznikají, rovná-li se  $\sigma_{ekv}$  mezi kluzu v tahu.

**Trescova (Guestova) hypotéza** klade za základ srovnání největší smykové napětí. Protože  $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , jsou-li  $\sigma_1$ , resp.  $\sigma_3$  největší, resp. nejmenší hlavní napětí, je

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (17.22)$$

Plastické deformace podle této hypotézy vznikají, rovná-li se  $\sigma_{ekv}$  mezi kluzu v tahu.

### C. Univerzální hypotézy

Za ekvivalentní napětí lze zvolit výraz

$$\sigma_{ekv} = \frac{\sigma_{pt}}{\sigma_{pd}} \sigma_i + \left(1 - \frac{\sigma_{pt}}{\sigma_{pd}}\right) \sigma_1 \quad (17.23)$$

v němž  $\sigma_i$  je intenzita napětí, tj. výraz na pravé straně rovnice (17.20) nebo (17.21), a  $\sigma_1$  je největší hlavní napětí, o němž předpokládáme, že je tahové. U křehkých materiálů je pevnost v tlaku značně větší než pevnost v tahu a podmínka (17.23) se blíží Rankinově ( $\sigma_{ekv} = \sigma_1$ ). U houževnatých materiálů je  $\sigma_{pt} = \sigma_{pd}$  a vztah (17.23) přechází v Misesovu hypotézu ( $\sigma_{ekv} = \sigma_i$ ).

Aby nebylo nutné určovat hlavní napětí, předpokládá se někdy pro ekvivalentní napětí rovnice

$$\sigma_{ekv} = \frac{1}{2} \left[ \left(1 + \frac{\sigma_{pt}}{\sigma_{pd}}\right) \sigma_i + \left(1 - \frac{\sigma_{pt}}{\sigma_{pd}}\right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] \quad (17.24)$$

Vztahy (17.23) a (17.24) nejsou rovnocenné.

### Příklad 6

Vypočtete mez pevnosti ve smyku  $\tau_p$  u šedé litiny, pro niž známe mez pevnosti v tahu  $\sigma_{pt} = 240$  MPa a mez pevnosti v tlaku  $\sigma_{pd} = 800$  MPa.

### Řešení

Při smyku je  $\sigma_1 = \tau_p$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau_p$ , takže podle Mohrovy hypotézy (17.19) bude

$$\tau_p (\sigma_{pd} + \sigma_{pt}) = \sigma_{pd} \sigma_{pt}$$

Odtud

$$\tau_p = \frac{\sigma_{pd} \sigma_{pt}}{\sigma_{pd} + \sigma_{pt}} = 184,6 \text{ MPa}$$

Podle (17.23) vyjde  $\tau_p \dot{=} 196,8 \text{ MPa}$  (dosazujeme  $\sigma_i = \tau_p / \sqrt{3}$ ) a podle (17.24)  $\tau_p \dot{=} 213,2 \text{ MPa}$ .

### Příklad 7

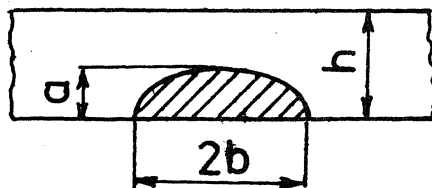
Vyberte materiál pro tlakovou nádobu o průměru  $D = 760 \text{ mm}$ , která bude za stálé teploty namáhána přetlakem  $p = 34 \text{ MPa}$ . Máte k dispozici oceli o vlastnostech uvedených v tab. 8. Údaje platí za provozní teploty.

Tab. 8 Materiálové hodnoty daných materiálů

Ocel	Mez kluzu $\sigma_k$ [MPa]	Lomová houževnatost $K_{Ic}$ [MPa $\sqrt{\text{m}}$ ]
A	1790	88
B	1520	121
C	1240	154
D	1240	242
E	966	286
F	759	187

### Řešení

Nejprve odhadneme velikost materiálové vady (počáteční trhliny), která by se mohla ve stěně vyskytnout. Předpokládáme, že nebudeme tolerovat větší vadu než odpovídá trhlince hluboké  $a = 10 \text{ mm}$  s poměrem  $a/2b = 0,25$  (obr. 61). Je-li tato trhlina orientována kolmo k obvo-



OBR. 61

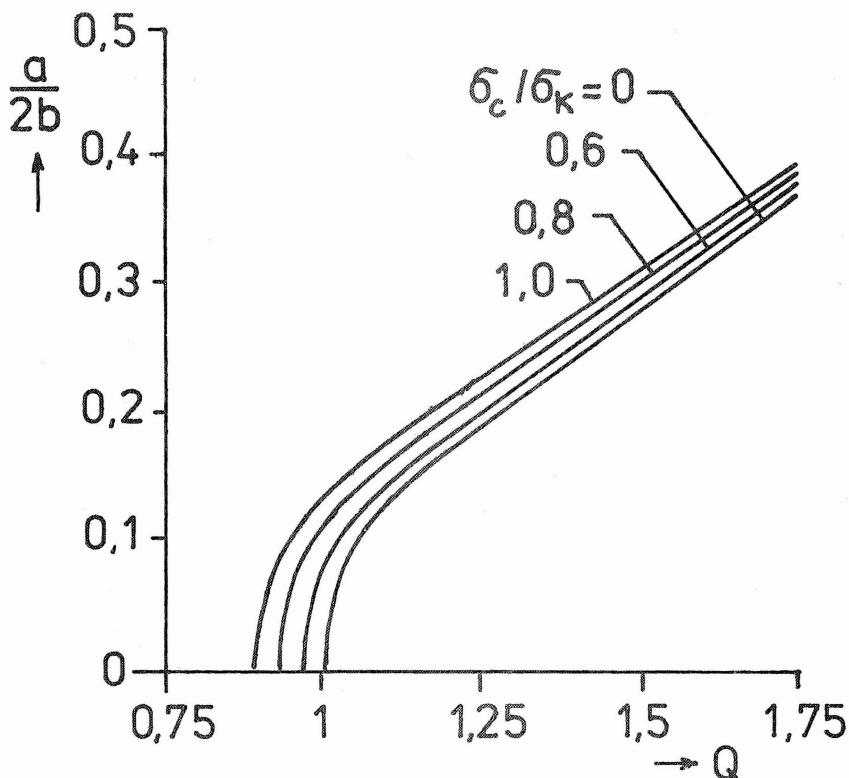
vému napětí, bude kritické napětí dáno vzorcem (Rolfe, S.T. - Barsom, J.M. 1977)

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{Q} K_{Tc}}{1,1\sqrt{\pi} z \sqrt{a}} \quad (a)$$

kde  $Q$  - činitel podle obr. 62,

$z$  je opravný činitel přibližně vystihující zvýšení napětí v okolí hluboké trhliny, jež vzniká zeslabením stěny. Zvolíme odhadem

$$z = \begin{cases} 1,2 \frac{a}{h} + 0,4 & \text{pro } 0,5 < \frac{a}{h} < 1 \\ 1 & \text{pro } \frac{a}{h} \leq 0,5 \end{cases} \quad (b)$$



OBR. 62

Zvolíme dovolené napětí  $\sigma_D$ , které bude vykazovat k mezi kluzu  $\sigma_k$  míru bezpečnosti  $k = 2$  (za předpokladu bezvadného materiálu). Stejnou míru bezpečnosti budeme požadovat i vzhledem k možnému vzniku náhlého lomu (za předpokladu, že v materiálu je trhlina o maximální hloubce 10 mm). Dovolené napětí bude tedy

$$\sigma_D = \min\left(\frac{\sigma_k}{2}, \frac{\sigma_c}{2}\right) \quad (c)$$

Tloušťka stěny pak vyjde ze známého vzorce pro tenkostěnné tlakové nádoby

$$h = \frac{p D}{2 \sigma_D} \quad (d)$$

Výpočet můžeme uskutečnit jenom tak, že napětí  $\sigma_c$  nejprve odhadneme, neboť  $Q$  a  $Z$  budou záviset na této volbě. Když vypočtené kritické napětí podle (a) se bude lišit od našeho odhadu, opravíme tento odhad a výpočet zopakujeme. Ukážeme to na příkladu materiálu A. Zvolíme  $\sigma_c = 0,6 \sigma_k$ , takže  $Q = 1,38$  (obr. 62). Dále odhadneme  $Z = 1$ . Z rovnice (a) vyjde (pro  $a = 0,01$  m)

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{1,38} \cdot 88}{1,1 \sqrt{\pi} \cdot 1,0 \cdot \sqrt{0,01}} = 530 \text{ MPa}$$

Pro tuto hodnotu však máme  $\sigma_c / \sigma_k = 530 / 1790 \approx 0,3$ , tedy méně, než jsme původně předpokládali. Musíme proto odhad opravit. Zvolíme  $\sigma_c / \sigma_k = 0,3$ . Vyjde  $Q = 1,42$ . Bude

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{1,42} \cdot 88}{1,1 \sqrt{\pi} \cdot 1,0 \cdot \sqrt{0,01}} = 538 \text{ MPa}$$

Nyní bude  $\sigma_c / \sigma_k \approx 0,3$ ,  $\sigma_D = 269$  MPa. Pak podle (d) dostaneme

$h = 34 \cdot 760 / 2 \cdot 269 \approx 48$  mm, takže  $Z = 1$ . Další korekce je zbytečná. Pro tloušťku stěny 48 mm bude hmotnost 1 m dlouhé části válcového pláště

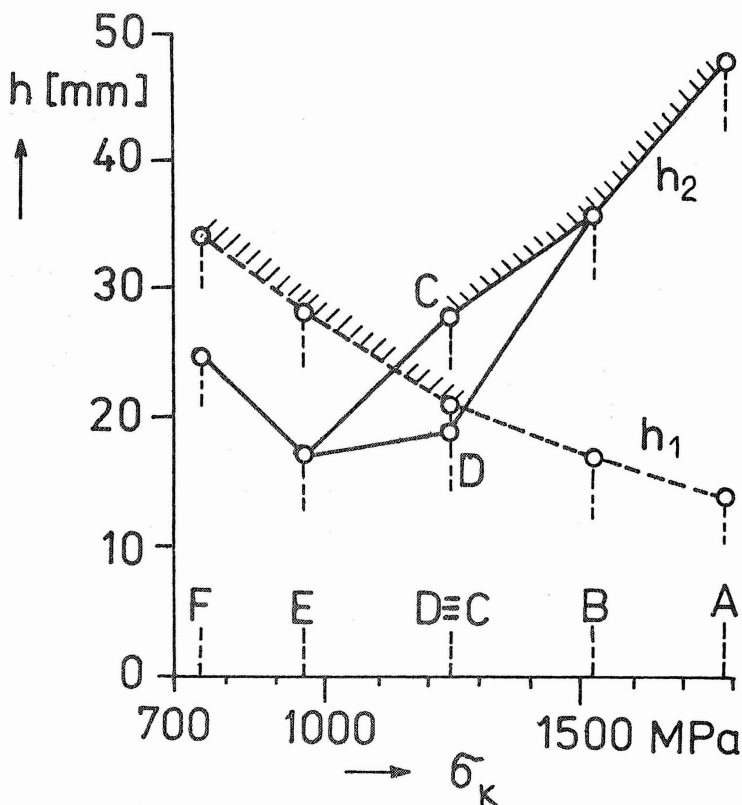
$$m = \rho \pi D h = 7,8 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 0,76 \cdot 0,048 \approx 894 \text{ kg m}^{-1}$$

Výsledky výpočtu jsou shrnuty do tab. 9.

Tab. 9 Výsledky výpočtů z příkladu 7

Materiál	A	B	C	D	E	F
$\sigma_c$ [MPa]	538	734	921	1393	1545	1046
$\sigma_c / \sigma_k$	0,3	0,48	0,74	1,12	1,60	1,37
$Q$	1,42	1,40	1,36	1,26	1,11	1,19
$Z$	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
$\sigma_{D1} = \sigma_k / 2$	895	760	620	620	483	380
$\sigma_{D2} = \sigma_c / 2$	269	367	461	697	773	523
$h_1$ [mm]	14	17	21	21	28	34
$h_2$ [mm]	48	36	28	19	17	25
$h$ [mm]	48	36	28	21	28	34
$m$ [kg m <sup>-1</sup> ]	894	670	521	391	521	633

Tloušťky  $h_1$  vyhovují požadavku bezpečnosti vzhledem k mezi kluzu, tloušťky  $h_2$  jsou vypočteny se zřetelem ke kritickému napětí na mezi stability předpokládané trhliny. Tloušťka  $h$  je větší z obou těchto hodnot. Je zřejmé, že nejmenší tloušťka stěny - a tedy i nejmenší hmotnost tlakové nádoby - vychází pro materiál D. Toto kritérium pro výběr materiálu však nemusí být rozhodující. Zvýšená lomová houževnatost materiálu D ve srovnání s materiálem C o stejné mezi kluzu je docílena větší metalurgickou čistotou a některými legurami, takže cena materiálu D bude vysoká. Z ekonomického hlediska může být nejvýhodnější materiál E.



OBR. 63

Na obr. 63 je zakreslen průběh  $h_1$  resp.  $h_2$  na mezi kluzu  $\sigma_k$  pro vybrané materiály podle tab. 8. Ukazuje se, že užití materiálu s větší mezi kluzu nemusí být výhodné. Např. pro materiál B dostaneme větší tloušťku stěny  $h$  než pro materiál C, ačkoli mez kluzu je u materiálu B větší než u materiálu C. Z hlediska lomové mechaniky se může bezpečnost nádoby s danou tloušťkou stěny užitím příliš pevných materiálů paradoxně snížit.

Poznamenejme ještě, že poměr  $\sigma_c / \sigma_k$  vychází pro materiály D až F větší než 0,8, takže užití vzorců lineární lomové mechaniky může být

sporné. Vypočteme-li však podle vzorce (13.9) poměr  $Q/a$  charakterizující velikost plastické oblasti u kořene trhliny, vyjde tento poměr v mezích od 0,14 (pro materiály A, B) do 0,18 (materiál E). Vzhledem k přibližnosti celé úvahy nepovažujeme za nutné výpočet korigovat.

Všimneme-li si, jak vzrůstá kritická hodnota faktoru intenzity napětí s klesající tloušťkou stěny (obr. 48), můžeme považovat za rozumné, aby např. u tlakových nádob nepřestoupila tloušťka stěny  $h$  hodnotu  $h_m$  vypočtenou podle vztahu

$$h_m = \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_k} \right)^2 \quad (e)$$

Pak bude oblast plastických deformací prostupovat v mezním případě prakticky celou stěnu, takže se co nejlépe využije plastické pevnostní rezervy.

Podle jiného kritéria můžeme požadovat, aby se stěna tlakové nádoby dříve proděravěla než se roztrhla. Předpokládá se, že netěsnost povede buď k podstatnému poklesu tlaku nebo že ji bude možné podle úniku tekutiny včas zpozorovat a opravit, takže se předejde katastrofálnímu náhlému lomu. Prakticky to znamená, že trhlina na obr. 61 by měla být stabilní ještě při délce  $a=h$ , kdy pronikne celou stěnou. Faktor intenzity napětí se přitom koriguje činitelem  $\xi$  se zřetelem k plastickým deformacím, takže

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi h} / \xi \quad (f)$$

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\sigma_k} \right)^2} \quad (g)$$

Pro kritickou hodnotu faktoru intenzity napětí se předpokládá platnost vztahů (13.11) a (13.12). Jmenovité napětí  $\sigma = pD/2h$  tedy musí splňovat nerovnost

$$\frac{\pi \sigma^2}{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma}{\sigma_k} \right)^2} \leq \frac{K_{Ic}^2}{h} \left[ 1 + 14 \frac{K_{Ic}^4}{h^2 \sigma_k^4} \right] \quad (h)$$

Zde  $\sigma_k$  je mez kluzu a  $K_{Ic}$  lomová houževnatost při provozní teplotě a odpovídající deformační rychlosti.

## L i t e r a t u r a

- /1/ BARSOUM, R.S.: Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly plastic crack tip elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11 (1977), 1: 85 - 98
- /2/ BOWIE, O.L.: Analysis of infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole. *Journal of Mathematical Physics* 35 (1956)
- /3/ BURIAN, P.: Lomové charakteristiky modelových vzorků jednoduchého nýtového spoje. *Zpravodaj VZLÚ* 4 (142), (1980): 169-177
- /4/ BURKE, J., WEISS, V. (red.): *Application of Fracture Mechanics to Design*. Plenum Press, New York 1979
- /5/ BURKE, J., WEISS, V. (red.): *Risk and Failure Analysis for Improved Performance and Reliability*. Plenum Press, New York 1980
- /6/ CARDEW, G.E., HOWARD, I.C.: An edge-crack in an elastic strip and related problems in fracture mechanics and viscous flow. *International Journal of Engineering Science* 14 (1976): 403 - 414
- /7/ CLARK, W.G.Jr.: Fracture mechanics and nondestructive testing of brittle materials. *ASME Journal of Engineering for Industry* 94 (1972), 1: 291 - 298
- /8/ ČEREPANOV, G.P.: *Mechanika chrupkogo razrušeniya*. Nauka, Moskva 1973
- /9/ *Fracture Toughness Testing and its Applications*. ASTM Special Technical Publication No. 381 (1964). Ruský překlad: *Příkladnoje voprosy vjazkosti razrušeniya*. Izd. Mir, Moskva 1968
- /10/ GRIFFITH, A.A.: The phenomenon of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc., Series A, London*, 221 (1920): 163 - 198
- /11/ HÖSCHL, C.: Únava materiálu při periodickém zatěžování. *Sborník DT ČSVTS Praha č. DT 2192* (1981)



- /12/ HÖSCHL,C.: Únava materiálu při náhodném zatěžování. Sborník DT-ČSVTS Praha č. 60-638-82 (2330) (1982)
- /13/ HÖSCHL,C.: Mezní plastické stavy. Sborník DT-ČSVTS Praha č. 60-644-83 (2561) (1983)
- /14/ IRWIN,G.R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. ASME Journal of Applied Mechanics 24 (1957): 361 - 364
- /15/ IRWIN,G.R.: Crack toughness testing of strain-rate sensitive materials. ASME Journal of Engineering for Power 86 (1964): 444
- /16/ IRWIN,G.R., KRAFFT,J.M., PARIS,P.C., WELLS,A.A.: Basic Aspects of Crack Growth and Fracture. NRL Report 6598, Washington, D.C., Nov. 21, 1967
- /17/ ISIDA,M.: Proc. Fourth US Congress of Applied Mechanics, 1962
- /18/ KNOTT,J.F.: Fundamentals of Fracture Mechanics. John Wiley, New York 1973
- /19/ LEONOV,M.Ja.: Mechanika deformacij i razrušenija. Ilim, Frunze 1981
- /20/ LEONOV,M.Ja., PANASJUK,V.V.: Razvitok najdribnišich triščin v tverdomu tili. Prikladnaja Mechanika AN URSR (1959), V, 4: 391 - 401
- /21/ LIEBOWITZ,H. (red.): Fracture. An Advanced Treatise, vol 1 - 7. Academic Press, New York 1968 - 1972
- /22/ LYNN,P.P., INGRAFFEA,A.R.: Transition elements to be used with quarter-point crack tip elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering 12 (1978), 6: 1031 - 1036
- /23/ MOROZOV,Ja.M., NIKIŠKOV,G.P.: Metod koněčnych elementov v mehanike razrušenija. Mir, Moskva 1980
- /24/ NĚMEC,J.: Tuhost a pevnost ocelových částí. 2. vyd. Nakl. ČSAV (Academia), Praha 1963

- /25/ NISHIOKA, T., ATLURI, S.N.: An alternating method for analysis of surface-flawed aircraft structural components. AIAA Journal 21 (1983), 5: 749 - 757
- /26/ RABOTNOV, Ju.N. a kol.: Metod račeta konstrukcij na soprotivlenije chrupkomu razrušeniju. Mašínovéděníje (1976), 1: 62 - 68
- /27/ RICE, J.R.: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. ASME Journal of Applied Mechanics 35 (1968): 379 - 386
- /28/ ROLFE, S.T., BARSOM, J.M.: Fracture and Fatigue Control in Structures. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1977
- /29/ ROSSMANITH, H.P.: Grundlagen der Bruchmechanik. Springer-Verlag, Wien, 1982
- /30/ SIH, G.C.: Mechanics of Fracture. Vol. 1 - 4. Noordhoff, Leyden 1973 - 1977
- /31/ SIH, G.C., TAMUSZ, V.P.: Fracture of Composite Materials. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1979
- /32/ SIH, G.C., THEOCARIS, P.S.: Mixed Mode Crack Propagation. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn 1981
- /33/ SLEPJAN, L.I.: Mechanika treščin. Sudostrojenije, Leningrad 1981
- /34/ SNEDDON, I.N.: The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid. Proc. Roy. Soc., Series A, London, 187 (1946): 229 - 260
- /35/ WESTERGAARD, H.M.: Bearing pressures and cracks. Transactions ASME, Journal of Applied Mechanics 6 (1939), 2: A 49 - A 53
- /36/ YAMADA, Y., EZAWA, Y., NISHIGUCHI, I.: Reconsiderations on singularity or crack tip elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering 14 (1979): 1525 - 1544

<b>Druh publikace:</b>	<b>Sborník</b>
<b>Název:</b>	<b>Stavba strojů 96 VZNIK NÁHLÉHO IOMU</b>
<b>Autor:</b>	<b>Prof. Ing. Cyril Höschl, Ústav termomechaniky ČSAV</b>
<b>Počet stran:</b>	<b>120</b>
<b>Náklad:</b>	<b>150 výtisků</b>
<b>Formát:</b>	<b>A4</b>
<b>Číslo publikace:</b>	<b>60 - 608 - 84 (2799)</b>
<b>Vydal a rozmnožil:</b>	<b>Dům techniky ČSVTS Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23</b>
<b>Rok vydání:</b>	<b>1984 DT 01 - 485/84</b>
<b>Cena publikace:</b>	<b>220 Kčs (cenový výměr DT č. 146/84)</b>