

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**NELINEÁRNÍ PROBLÉMY  
MECHANIKY  
DEFORMOVATELNÝCH TĚLES**

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1988

V publikaci se vysvětlují rozdíly výpočetních postupů vhodných k řešení lineárních a nelineárních úloh. Na jednoduchých ilustrativních příkladech se ukazují nedostatky lineární teorie pružnosti a určují se hranice její použitelnosti.

Geometricky nelineární ohyb tenkých pružných prutů lze někdy řešit poměrně jednoduše numericky. Zvolíme-li vhodný matematický model, vystačíme často jen s programovatelnými kalkulačkami. Podobně lze řešit i pokritické deformace štíhlých elastických prutů a jejich soustav.

Probírají se různé způsoby popisu pohybu kontinua a definují se tenzorové veličiny, potřebné k řešení obecně nelineárních úloh z mechaniky poddajných těles s velkými poměrnými deformacemi. V takovém případě se mění i způsob rozkladu elastickoplastické deformace na elastickou a plastickou část. Ukazuje se, jak lze tenzorové rovnice přepsat do maticového tvaru, vhodného k programování výpočtů.

Je připojen přehled vybraných numerických metod k řešení soustav nelineárních algebraických rovnic.

## OBSAH

PŘEDMLUVA	5
1. ÚVOD	7
2. GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ OHYB TENKÝCH PRUŽNÝCH PRUTŮ	9
3. POKRITICKÉ DEFORMACE ELASTICKÝCH PRUTŮ	25
4. Maticové operace s tenzorovými veličinami	34
5. VELKÉ POMĚRNÉ DEFORMACE	42
6. TENZORY NAPJATOSTI	50
7. POHYB KONTINUA A JEHO POPIS	57
8. POHYBOVÉ ROVNICE A DEFORMAČNÍ VÝKON	63
9. GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ ÚLOHY	68
10. VELKÉ ELASTICKOPLASTICKÉ DEFORMACE	75
11. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV NELINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC	78
11.1. Metoda postupných aproximací (přímých iterací)	78
11.2. Newtonova-Raphsonova metoda	81
11.3. Metoda tečné matice	84
11.4. Metoda počáteční tuhosti	85
11.5. Metoda největšího spádu	86
11.6. Metoda sdružených směrů	89
11.7. Metoda sdružených gradientů	92
LITERATURA	95

Kdo nevěří ve vrcholnou jistotu  
matematiky, tápe ve zmatku a nikdy  
neumlčí rozpory sofistických věd,  
které člověka učí věčnému křiku.

Leonardo da Vinci (1452 - 1519)

## PŘEDMLUVA

K úspěšnému řešení praktických úloh zpravidla vystačíme se znalostmi mechaniky v rozsahu, v jakém se přednášejí na vysokých školách. Problém je spíše v tom, aby je inženýr dovedl správně použít, aby rozpoznal důležité vlivy od nedůležitých a správně utvořil idealizovaný fyzikální a matematický model. K posouzení pevnosti a deformací mu zpravidla stačí lineární teorie pružnosti a lomové mechaniky, korigovaná nanejvýš o vliv plastických deformací, zasahujících nepatrné oblasti v okolí míst s největší koncentrací napětí. Výjimkou jsou jen úlohy o creepu kovových součástí za vysokých teplot, neboť ten se v celém rozsahu řídí nelineárním konstitutivním zákonem.

Jsou však i jiné oblasti mechaniky pevné fáze, které vyžadují znalost řešení nelineárních rovnic. Pomineme-li nelineární mechaniku soustav tuhých těles, kam patří např. odpružení těles pružinami s nelineární deformační charakteristikou nebo počítačové řešení pohybu mechanismů, zůstanou ještě úlohy z nelineární mechaniky deformovatelných těles. Jde o případy těles s nelineární deformační charakteristikou a o případy s velkými deformacemi, při nichž se podstatně mění geometrická konfigurace a tvar tělesa nebo soustavy těles. Takovými jsou např. úlohy o tělesech z materiálů podobných pryži, o elastickoplastických tělesech, o pružných tělesech namáhaných nad mezí elastické stability (pokritické stavy konstrukcí), dále velké deformace elastických prutů, při nichž se elementy prutů značně posouvají a otáčejí atd. Právě těmito úlohami se budeme v tomto semináři zabývat.

K tomu je zapotřebí mít a ovládat potřebný matematický nástroj, tj. umět řešit soustavy nelineárních diferenciálních nebo algebraických rovnic. Dnešní úroveň výpočetní techniky umožňuje úspěšně řešit i úlohy, jež byly ještě nedávno prakticky neřešitelné. Je však k tomu třeba mnohem větší zkušenosti a intuice než k řešení lineárních úloh. Úspěch řešení často

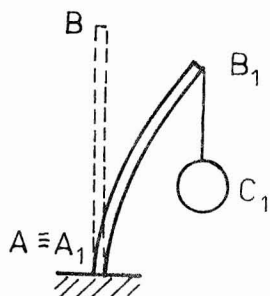
závisí na tom, jakou volíme výpočtovou strategii. Co se osvědčí u úlohy jednoho typu, může v jiném případě selhat. Zatímco k řešení lineárních úloh nám matematika poskytuje věty o existenci řešení, o počítání s neúplnými čísly, o konvergenci a stabilitě a dovoluje nám tak předem posoudit řešitelnost úlohy, jednoznačnost a praktickou dosažitelnost správného řešení, u nelineárních úloh máme k dispozici jen omezené prostředky tohoto druhu; často jsme odkázáni na numerické experimentování.

Vnucuje se otázka, má-li se řadový inženýr nelineárními úlohami vůbec zabývat, může-li se mu vynaložená intelektuální námaha v praxi rentovat. Ukážeme, že není správné zastávat příliš utilitární postoj. Každý pokrok začíná pochybnostmi a přemýšlením o tom, co je za oblastí našich současných znalostí a zkušeností. Bude-li inženýr přemýšlet o způsobech, jak formulovat a řešit nelineární úlohy, objeví pojednou slabiny lineární teorie, kterou ovládá, uvědomí si hranice její použitelnosti, pochopí hlubší smysl různých pojmů, jež až dosud bral za samozřejmé a jednoduché, a tím se snad vyvaruje možných chyb při nesprávné aplikaci metod lineární mechaniky a při interpretaci získaných výsledků. Takové poznání obohatí osobní zkušenost a rozhled i těch pracovníků, kteří se nestanou specialisty na řešení nelineárních úloh. Tento cíl budeme v dalším výkladu sledovat především.

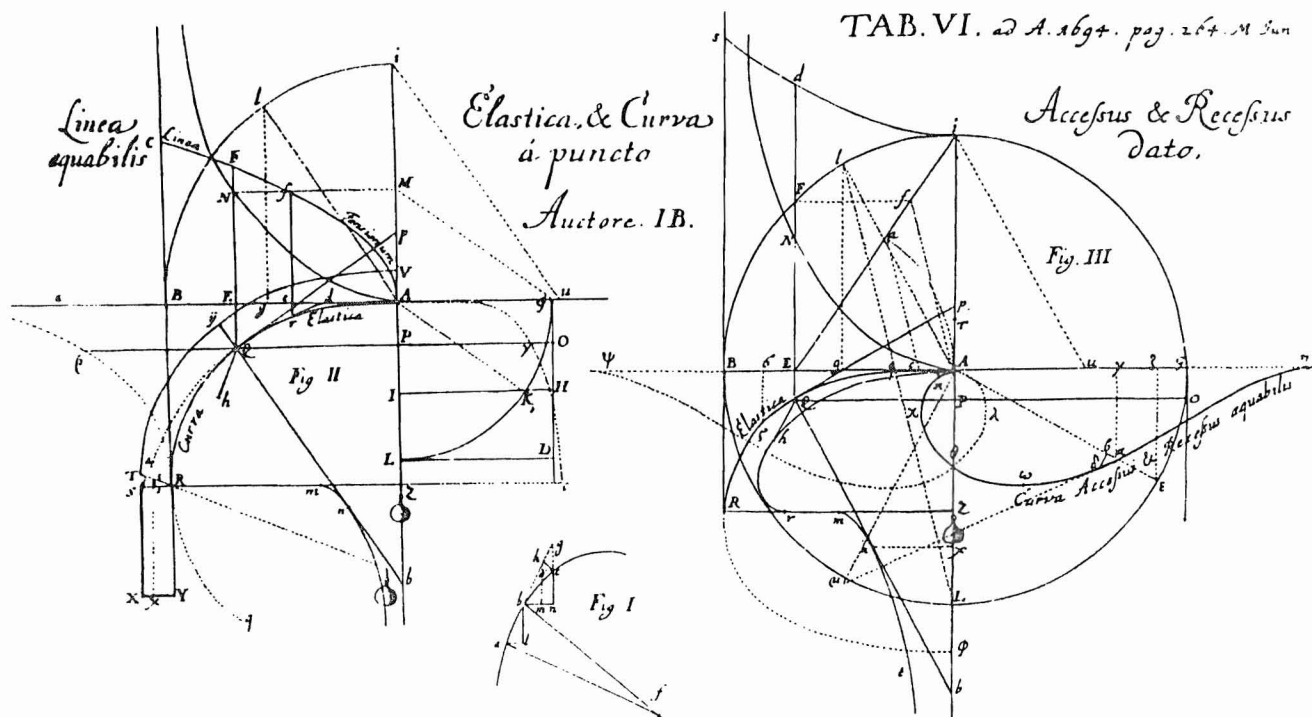
Prof. Ing. Cyril Höschl,  
Ústav termomechaniky ČSAV, Praha

# 1. ÚVOD

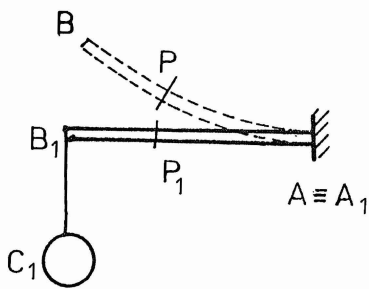
V červnu roku 1691 uveřejnil Jakub Bernoulli v časopise Acta Eruditorum výzvu k řešení úlohy o ohybu přímé svislé pružné tyče  $AB_1$ , jež je na spodním konci vetknutá a na horním zatížená zavěšeným břemenem  $C_1$  (obr. 1). Řešení zakódoval do anagramu a slíbil, že klíč k této hádance a důkaz správnosti řešení zveřejní při podzimním veletrhu. Řešení však uveřejnil spolu s omluvou za zdržení teprve po třech letech. Byl to návod ke konstrukci ohybové čáry (obr. 2), který vycházel z předpokladu, že ohybový moment závisí na deformaci a že pracovní diagram materiálu (linea tensionum) je nelineární. Stalo se tak o necelých devadesát let dříve, než byla dobudována systematická lineární teorie nosníků s malými průhyby.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

V pozůstalosti Jakuba Bernoulliho (zemřel roku 1705) byla nalezena úloha o nosníku AB tak zakřiveném, že se účinkem svisle působícího břemene  $C_1$  narovná (obr. 3). Řešení bylo uvedeno ve tvaru

$$a^2 = \Delta r \quad (1.1)$$

kde  $a$  je konstanta,  $\Delta$  značí délku oblouku  $BP = B_1P_1$ , přičemž P je řez, v němž má střednice nezátíženého prutu poloměr křivosti  $r$ . Vydavatelem pozůstalosti byl Jakubův synovec Mikuláš

Bernoulli. Přiznal, že není schopen správnost řešení dokázat. Důkaz podal o mnoho let později Leonard Euler; rozpoznal, že hledanou křivkou je klotoida.

Je zajímavé, že se staří mistři nevyhýbali řešení nelineárních úloh. Naopak, řešili je s obdivuhodnou erudicí až do praktických důsledků, přičemž k numerickým výpočtům neměli lepší prostředky než tužku a papír.

V úlohách, o nichž jsme dosud hovořili, se předpokládalo, že změna křivosti střednice prutu je známou funkcí ohybového momentu v daném místě deformovaného prutu. Lineární teorie ohybaných nosníků předpokládá, že závislost křivosti na ohybovém momentu je lineární a že ohybový moment v řezu deformovaného prutu lze počítat bez zřetele k deformaci, jako by se prut vůbec nedeformoval. Výjimka se připouští pouze u prutů namáhaných na vzpěr, u nichž se však velikost deformací na hranici elastické stability omezuje tak, aby diferenciální rovnice, popisující vzpěr, zůstaly lineární.

V první části semináře překročíme tuto hranici a budeme se zabývat případy, kdy poměrné deformace zůstanou sice malé, ale posuvy a rotace budou velké (geometrická nelinearita).

V druhé části probereme různé způsoby popisu velkých poměrných deformací poddajných těles s jim odpovídající definice deformačních a napěťových tenzorů. Tyto pojmy jsou důležité při řešení úloh s materiálovými nelinearitami.

V poslední části se budeme zabývat některými metodami řešení soustav nelineárních algebraických rovnic ve vztahu k metodě konečných prvků.

## 2. GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ OHYB TENKÝCH PRUŽNÝCH PRUTŮ

Některé z těchto úloh lze řešit elementárními metodami. Je-li např. síla tíže, kterou působí břemeno  $C_1$  na nosník znázorněný na obr. 3, rovna  $F$ , je ohybový moment v řezu  $P_1$

$$M_0 = F \delta \quad (\delta = \overline{B_1 P_1}) \quad (2.1)$$

Příslušná změna křivosti tedy je

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} = \frac{M_0}{EJ} \quad (2.2)$$

Poloměr křivosti v bodě  $P_1$  je  $r_1 \rightarrow \infty$  a  $EJ$  je ohybová tuhost. Označme

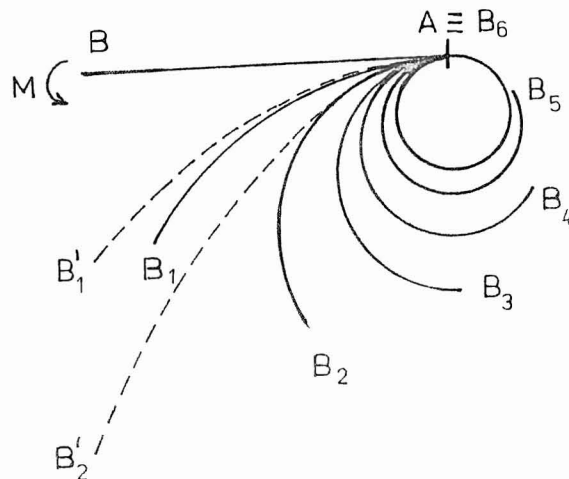
$$a^2 = \frac{EJ}{F} = \text{konst.} \quad (2.3)$$

Dosadíme-li (2.1) a (2.2) do (2.3), dostaneme

$$a^2 = \delta r \quad (2.4)$$

což je rovnice klotoidy /4/.

Jinou takovou úlohou je čistý ohyb elastického prutu AB, vetknutého v bodě A (obr. 4). Za předpokladu platnosti přímé úměry mezi kři-



Obr. 4



vostí  $r^{-1}$  a ohybovým momentem  $M$ , kterou napíšeme v bezrozměrových veličinách

$$\frac{l}{r} = \frac{Ml}{EJ} \quad (2.5)$$

se bude prut deformovat do tvaru kruhového oblouku.\*<sup>\*)</sup> Z podmínky  $l = 2\pi r$  usoudíme, že velikost ohybového momentu  $M_6$ , při kterém se prut zdeformuje do úplné kružnice, je

$$M_6 = 2\pi \frac{EJ}{l} \quad (2.6)$$

Tento ohybový moment byl rozdělen na šestiny a pro  $M_1 = M_6/6$ ,  $M_2 = 2M_6/6 = M_6/3$  až  $M_6$  byly zakresleny příslušné ohybové čáry nosníku. Z podmínky, že délka každého oblouku zůstává nezávislá na ohybovém momentu a rovná se  $l$ , snadno vypočteme vodorovný posuv  $u$  i svislý posuv  $w$  konce prutu B. Vztáhneme-li tyto posuvy k délce prutu  $l$ , vyjde

$$\frac{u}{l} = 1 - \frac{r}{l} \sin\left(\frac{l}{r}\right) \quad (2.7)$$

$$\frac{w}{l} = \frac{r}{l} \left[1 - \cos\left(\frac{l}{r}\right)\right] \quad (2.8)$$

Pro poměr  $l/r$  přitom platí (2.5). Vztahy (2.7) a (2.8) jsou graficky znázorněny na obr. 5.

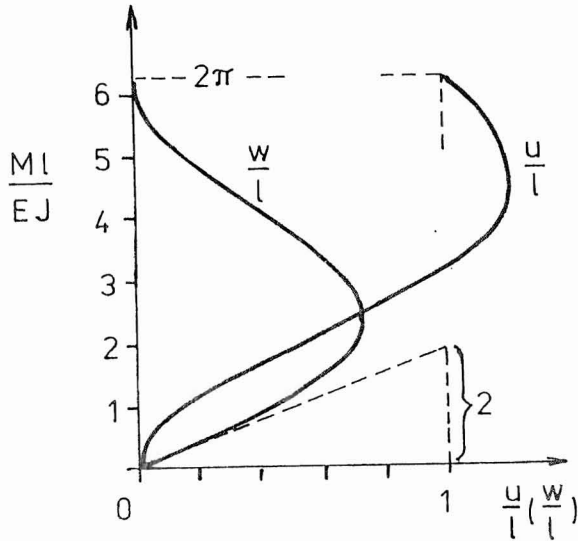
Elementární lineární teorie nosníků dává proti tomu

$$u = 0 \quad \frac{w}{l} = \frac{Ml}{2EJ} \quad (2.9)$$

a ohybová čára je parabola. Tyto paraboly jsou na obr. 4 čárkovaně zakresleny pro první dva stupně zatížení. Skutečné ohybové čáry jsou oblouky oskulačních kružnic těchto parabol s bodem dotyku A. Deformační charakteristika (2.9) je na obr. 5 vyznačena rovněž čárkovaně. Až tam, kam čárkovaná přímka sleduje průběh plně vytažené křivky, označené  $w/l$ , lze lineární teorii (2.9) použít. Je to asi pro  $w/l \leq 0,2$ . Při větších průhybech ztrácí lineární teorie platnost.

---

\*<sup>\*)</sup> Ohybový moment je ve všech průřezech stejný, tedy i křivost je stejná.



Obr. 5

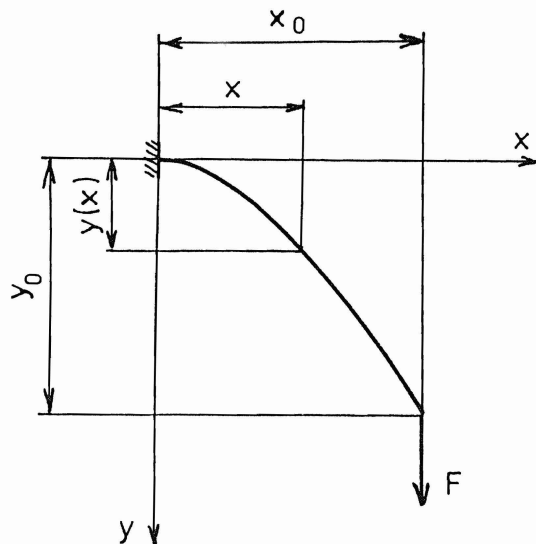
Z obr. 4 je zřejmé, že se střednice prutu, určená posuvy (2.9) podle lineární teorie prodlužuje, ačkoli to teorie nepředpokládá. Oblouk  $AB_1'$  je totiž zřetelně delší než oblouk  $AB_1 = \overline{AB} = l$  a podobné tvrzení platí i pro oblouk  $AB_2'$ . Zajímavé je, že toto prodlužování nastává nezávisle na smyslu působícího momentu, tedy i při průhybu prutu směrem nahoru (není na obr. 4 zakreslen, byl by při stejné absolutní hodnotě ohybového momentu symetrický k ose  $AB$  nezatíženého prutu).

Řešení úlohy, znázorněné na obr. 4, bylo snadné, neboť ohybový moment byl v celém prutu konstantní, nezávislý na deformaci. Kdyby však byl prut zatížen na konci svislou silou  $F$  (nezávislou na deformaci), měnil by se ohybový moment nějakého průřezu podle toho, jaký by byl tvar deformovaného prutu. Řekněme, že ohybová čára bude mít rovnici  $y = y(x)$  (obr. 6) a že souřadnice koncového bodu budou  $x_0, y_0$ . Ohybový moment v řezu určeném souřadnicí  $x$  pak bude  $M = -F(x_0 - x)$  a diferenciální rovnice ohybové čáry bude

$$\frac{F}{EJ} (x_0 - x) = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (2.10)$$

Souřadnici  $x_0$  předem neznáme. Dostaneme ji z podmínky, že se délka střednice prutu nemění

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1 + (y')^2} dx = l \quad (2.11)$$



Obr. 6

Prodloužení střednice účinkem tahové síly zanedbáváme, budeme přihlížet pouze k deformacím vzniklým ohybem. To je, jak známo, přípustné, pokud je nosník štíhlý. Soustavu rovnic (2.10) a (2.11) můžeme linearizovat jen za předpokladu, že  $(y')^2$  zanedbáme proti jedné. Tehdy vyjde  $x_0 = l$  a dále

$$y'' = \frac{F}{EJ} (l - x) \quad (2.12)$$

Rovnici (2.12) řešíme s okrajovými podmínkami

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad (2.13)$$

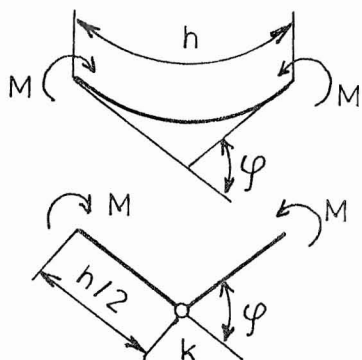
a dostaneme

$$y = \frac{F}{6EJ} x^2(3l - x) \quad (2.14)$$

V nelineární oblasti namáhání platí však soustava rovnic (2.10), (2.11) místo (2.12) a řešení je matematicky poměrně náročné /1/.

Úlohu však můžeme řešit velmi snadno numericky. Nosník si rozdělíme na několik částí. Pro jednoduchost zvolíme stejnou délku  $h$  těchto částí, takže bude  $h = l/m$ , kde  $m$  je počet částí. Tyto části budeme považovat za absolutně tuhé; jejich pružnost nahradíme pružností kloubů, které tyto části spojují. Rozdíl bude v tom, že skutečná pružnost je

v prizmatickém prutu rovnoměrně rozdělena, kdežto v náhradním modelu bude soustředěna do oddělených bodů. Rozdíl mezi těmito případy znázorňuje obr. 7.

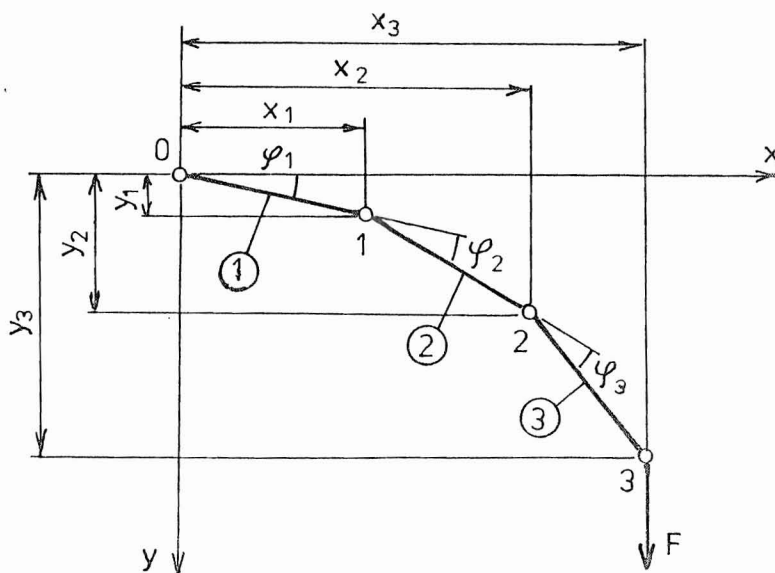


Na obr. 7 nahoře je část prutu o délce  $h$  zatížena konstantním ohybovým momentem  $M_0$ . Tečny v koncových bodech svírají spolu úhel  $\varphi = Mh / EJ$ . V dolní části obr. 7 je náhradní model složený ze dvou částí prutu o délkách  $h/2$ , spojených pružným kloubem s tuhostí  $k$ . Má-li být úhel mezi těmito částmi rovněž  $\varphi$ , musí být  $k\varphi = M$ . Odtud vyjde

$$k = \frac{EJ}{h} \quad (2.15)$$

Obr. 7

Model náhradního nosníku je zřejmý z obr. 8; platí pro  $n = 3$ . Zanedbáme-li



Obr. 8

roztážení střednice, zůstane délka všech částí prutu stejná ( $h = \text{konst.}$ ). Tuhost kloubu v místě vetknutí bude  $2k$  (bod 0), neboť  $k$  tomuto kloubu přísluší pouze jedna z obou polovin částí zakreslených v dolní polovině obr. 7.

Úhly  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  zvolíme za zobecněné souřadnice. Vztah mezi kartézskými souřadnicemi  $x_i, y_i$  kloubů s zobecněnými souřadnicemi  $\varphi_k$  vyjadřují rovnice

$$\begin{aligned} x_i &= h \sum_{l=1}^i \cos \sum_{k=1}^l \varphi_k \\ y_i &= h \sum_{l=1}^i \sin \sum_{k=1}^l \varphi_k \end{aligned} \quad (2.16)$$

Rozepíšeme-li tyto rovnice pro  $m = 3$  (obr. 8), budeme mít

$$x_1 = h \cos \varphi_1$$

$$x_2 = h [\cos \varphi_1 + \cos (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$x_3 = h [\cos \varphi_1 + \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)]$$

$$y_1 = h \sin \varphi_1$$

$$y_2 = h [\sin \varphi_1 + \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$y_3 = h [\sin \varphi_1 + \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)]$$

Je-li konstanta tuhosti  $j$ -tého kloubu  $k_j$ , dá princip virtuálních prací

$$k_j \varphi_j \delta \varphi_j = F \frac{\partial y_n}{\partial \varphi_j} \delta \varphi_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.17)$$

Na levé straně je virtuální práce v  $j$ -tém kloubu, v němž se úhel změní o  $\delta \varphi_j$  (v ostatních kloubech se nezmění), na pravé straně je virtuální práce vnější síly  $F$  (při téže virtuální deformaci).

Protože

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_j} \left( \sum_{k=1}^{\ell} \varphi_k \right) = \begin{cases} 0 & \text{pro } j > \ell \\ 1 & \text{pro } j \leq \ell \end{cases} \quad (2.18)$$

bude (pro libovolné  $\delta \varphi_j$ )

$$k_j \varphi_j = Fh \sum_{k=j}^n \cos \sum_{k=1}^{\ell} \varphi_k = f_j \quad (2.19)$$

Máme  $k_0 = 2k$ ,  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k = EJ/h = nEJ/\ell$ . Zapišeme-li rovnici (2.19) v maticovém tvaru, bude pro  $n = 3$

$$\frac{3EJ}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \frac{Fl}{3} \begin{Bmatrix} \cos \varphi_1 + \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \\ \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \\ \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \end{Bmatrix}$$

Zkráceně

$$[K] \{\varphi\} = \{f(\varphi)\} \quad (2.20)$$

Na levé straně máme diagonální matici tuhosti, na pravé straně vektor zobecněných sil, který je nelineární funkcí zobecněných posuvů. Rovnice (2.20) je diskrétní matematický model, odpovídající spojitému modelu (2.10) a (2.11). Název "diskrétní" naznačuje, že jde o model s nespojitou tuhostí (diskrétní = oddělený; tuhost je soustředěna do oddělených kloubů).

Protože matice tuhosti je pozitivně definitní (a navíc konstantní a diagonální), můžeme ji invertovat a vypočítat

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \frac{Fl^2}{18EJ} \begin{Bmatrix} \cos \varphi_1 + \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \\ 2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)] \\ 2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

Kdyby byly průhyby velmi malé, rovnaly by se kosiny na pravé straně (2.21) jednotkám a vyšlo by

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \frac{F\ell^2}{10EJ} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Podle (2.16) by tomu odpovídaly průhyby  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ,

$$y_1 = \frac{9F\ell^3}{162EJ} \quad y_2 = \frac{30F\ell^3}{162EJ} \quad y_3 = \frac{57F\ell^3}{162EJ}$$

Z přesného řešení (2.14) podle lineární teorie by vyšlo

$$y_1 = \frac{8F\ell^3}{162EJ} \quad y_2 = \frac{28F\ell^3}{162EJ} \quad y_3 = \frac{54F\ell^3}{162EJ}$$

Chyba ve výpočtu největšího průhybu, způsobená diskretizací v mezích lineární teorie, je tedy asi 5,5 % (chyba metody). To je velmi malá chyba, uvážíme-li, jak hrubý model jsme použili ( $n = 3$ ).

Nelineární soustavu rovnic (2.21) můžeme řešit prostými iteracemi. Napíšeme ji symbolicky shodně s označením zavedeným v rovnici (2.20) takto

$$\{\varphi\} = [K]^{-1} \{f(\varphi)\} \quad (2.23)$$

a pro každou iteraci zavedeme index " $\delta$ " (starý vektor) a index " $n$ " (nový, opravený vektor). Zvolíme nultou iteraci  $\{\varphi\}_0$  [může to např. být nulový vektor nebo pravá strana (2.22)] a vypočteme

$$\{\varphi\}_\delta = [K]^{-1} \{f(\varphi)_0\} \quad (2.24)$$

Výraz  $\{f(\varphi)_0\}$  znamená, že jsme do vektoru  $\{f(\varphi)\}$  dosadili hodnoty z vektoru  $\{\varphi\}_0$ . Vektor  $\{\varphi\}_\delta$  ještě není řešením dané úlohy, protože jsme jej vypočetli z nesprávné (nepřesné) pravé strany rovnice (2.20). Dosadíme-li hodnotu (2.24) do (2.20), nebude tato rovnice splněna, ale dá zbytkovou zobecněnou sílu

$$\{z\} = \{f(\varphi)_\delta\} - [K] \{\varphi\}_\delta \quad (2.25)$$

Té odpovídá dodatečná deformace

$$\{\Delta\varphi\} = [K]^{-1}\{z\} \quad (2.26)$$

a nový, zpřesněný vektor

$$\{\varphi\}_m = \{\varphi\}_s + \alpha \{\Delta\varphi\} \quad (2.27)$$

Relaxační koeficient  $\alpha$  by se měl rovnat jedné; pak by se však mohlo stát, že oprava  $\{\Delta\varphi\}$ , která vyjde z rovnice (2.26) rovněž jen přibližně, vybočí z oblasti konvergence a řešení znemožní. Proto je radno nepřipočítávat opravu  $\{\Delta\varphi\}$  celou, ale jen její část (zvolit např.  $\alpha = 0,2$  až  $0,5$ , menší  $\alpha$  pro větší hodnoty zatížení a při jemnějším dělení nosníku). "Starý" vektor pak nahradíme "novým" vektorem  $\{\varphi\}_m$ , což vyznačíme zápisem

$$\{\varphi\}_m \rightarrow \{\varphi\}_s \quad (2.28)$$

To dosadíme do (2.25) a řešení opakujeme tak dlouho, až jsou normy vektorů  $\|z\|$ , popř.  $\|\Delta\varphi\|$  zanedbatelné (podle předem zvoleného kritéria).

Výsledky řešení jsou zakresleny na obr. 9. Plně vytažená čára odpovídá analytickému řešení podle Bisshoppa a Druckera, čárkovaná přímka odpovídá lineární teorii. Kroužky označují numerické řešení pro  $n = 3$ . Zvolíme-li  $n = 10$ , jsou výsledky numerického a analytického řešení prakticky zcela shodné (křížky na obr. 9).

Vraťme se ještě k paradoxnímu prodlužování prutu na obr. 4, ke kterému vede lineární teorie ohybu, přestože se v ní klade posuv  $u$  bodů na střednici rovnající se nule (a tedy  $\epsilon_{xx} = du/dx = 0$ ).

Obecně bude mít element prutu počáteční délku  $ds_0$ . Uvažujeme deformace v rovině  $x, y$ . Z Pythagorovy věty dostaneme (obr. 10)

$$ds_0^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2.29)$$

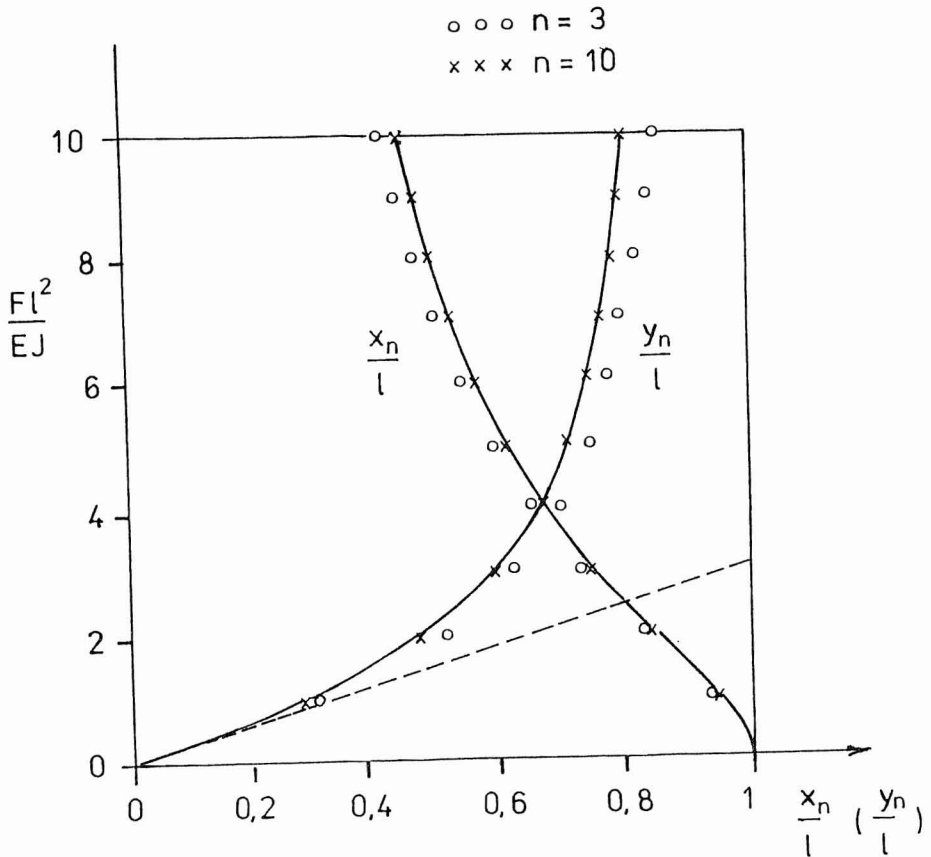
Po deformaci se délka  $ds_0$  změní na  $ds$ , přičemž

$$ds^2 = (dx + du)^2 + (dy + dv)^2 \quad (2.30)$$

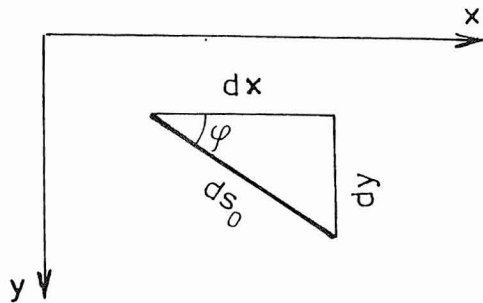
Posuvy  $u, v$  jsou funkcemi souřadnic  $x, y$ , takže

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (2.31)$$





Obr. 9



Obr. 10

V lineární teorii pružnosti se považují derivace posuvů za malé veličiny ve srovnání s jedničkou, takže lze brát

$$\begin{aligned}
 ds^2 &\doteq dx^2 + dy^2 + 2dudx + 2dvdy = \\
 &= ds_0^2 + 2dudx + 2dvdy
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

a po odmocnění \*)

$$ds \doteq ds_0 + \frac{du}{ds_0} dx + \frac{dv}{ds_0} dy \quad (2.33)$$

Všimneme-li si s použitím obr. 10, že platí vztahy

$$dx = ds_0 \cos \varphi \quad dy = ds_0 \sin \varphi$$

dostaneme z rovnic (2.31) a (2.33)

$$\begin{aligned} \frac{ds - ds_0}{ds_0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \varphi + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \varphi = \\ &= \epsilon_{xx} \cos^2 \varphi + 2 \epsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \epsilon_{yy} \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (2.34)$$

Zde

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.35)$$

jsou složky tenzoru infinitezimálních deformací. §) Vymizí-li tyto složky, je  $ds = ds_0$  (střednice prutu se neroztahuje). V našem případě byl prut položen do osy  $x$ , takže  $\varphi = 0$  a,  $ds - ds_0 = \epsilon_{xx} ds_0$ . Stačí tedy splnit podle (2.34) a (2.35) podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} = 0 \quad (2.36)$$

aby se střednice neroztahovala. Ačkoli lineární teorie tuto podmínku splňuje, střednice se přece jen při větších průhybech roztahuje. Jak je to možné?

Zřejmě je při větších průhybech zjednodušení rovnice (2.30) na tvar (2.32) nepřijatelné. Abychom se vyhnuli odmocňování, vypočteme raději poloviční rozdíl čtverců

$$\frac{1}{2} (ds^2 - ds_0^2) = dx du + \frac{1}{2} (du)^2 + dy dv + \frac{1}{2} (dv)^2 \quad (2.37)$$

\*) S využitím pravidla  $\sqrt{1+\epsilon} \doteq 1 + \frac{1}{2} \epsilon$  pro  $|\epsilon| \ll 1$ .

§) Všimněme si, že  $\epsilon_{xy}$  je právě polovinou "inženýrského" zkosu  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ .

Tato rovnice platí - na rozdíl od (2.33) - přesně. Výrazy (2.31) dosadíme na pravou stranu (2.37) a dostaneme kvadratickou formu, kterou zapíšeme ve tvaru

$$\frac{1}{2}(ds^2 - ds_0^2) = \varepsilon_{G_{xx}}(dx)^2 + 2\varepsilon_{G_{xy}} dx dy + \varepsilon_{G_{yy}}(dy)^2 \quad (2.38)$$

Srovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{G_{xx}} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{G_{xy}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{G_{yy}} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Jsou to složky Greenova deformačního tenzoru. Vymizí-li tyto složky, vymizí jakákoli deformace, a to přesně. Proti tomu vymizení tenzoru (2.35) infinitezimálních deformací nulové deformace nezaručuje. Greenův deformační tenzor (2.39) přejde v tenzor infinitezimálních deformací (2.35), zanedbáme-li v něm kvadratické členy. Oba tyto tenzory tedy splynou při nekonečně malých poměrných deformacích. \*)

V případě nosníku znázorněného na obr. 4 bylo  $dy = 0$ , takže podle (2.38)

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{G_{xx}}(dx)^2 \quad (2.40)$$

Lineární teorie kladla  $u = 0$ , tedy také  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , takže

$$ds^2 - ds_0^2 = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 (dx)^2 = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 (ds_0)^2 \quad (2.41)$$

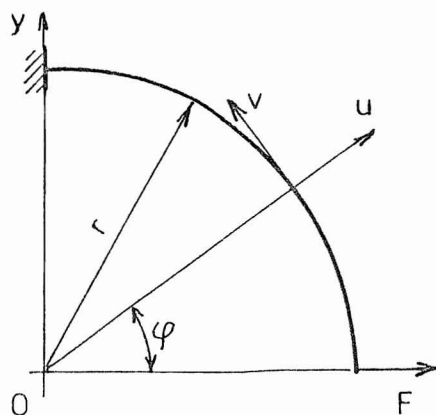
Nyní je již zřejmé, proč vychází  $ds^2 - ds_0^2 > 0$  navzdory tomu, že je splněna podmínka (2.36), a to nezávisle na smyslu průhybu (nezávisle na znaménku derivace  $\partial v / \partial x$ ).

Model podle obr. 7, popř. 8, lze použít i k řešení úloh o rovinném ohybu křivých prutů. Vypočtème např. deformaci elastického prutu ve

---

\*) Proto byla do vztahu (2.38) vzata na levé straně jedna polovina.

tvaru čtvrtkružnice, který je na jednom konci vetknutý a na druhém zatížený radiální silou  $F$  směřující od středu křivosti (obr. 11). Síla si během deformace zachovává směr.



Obr. 11

Uvedeme nejprve řešení podle lineární teorie. Radiální posuv označíme  $u$ , obvodový  $v$ . Dostaneme soustavu dvou simultánních diferenciálních rovnic, jejíž podrobné odvození lze nalézt v literatuře [2/

$$\frac{d^2u}{r^2 d\varphi^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{Fr}{EJ} \sin\varphi \quad (2.42)$$

$$\frac{dv}{r d\varphi} + \frac{u}{r} = 0 \quad (2.43)$$

Okrajové podmínky jsou

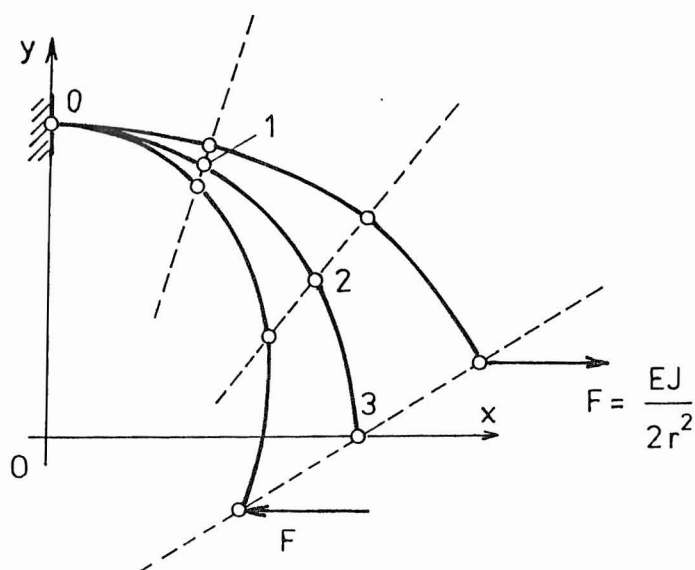
$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.44)$$

Čárkou označujeme derivaci podle úhlu  $\varphi$ . Integrace dává

$$u = \frac{Fr^3}{2EJ} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos\varphi \quad (2.45)$$

$$v = \frac{Fr^3}{2EJ} \left[ \cos\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin\varphi \right] \quad (2.46)$$

Tyto posuvy určují tvar ohybové čáry. Na obr. 12 jsou zakresleny dvě



Obr. 12

takové čáry, a to pro  $Fr^2/EJ = \pm 0,5$ . Na střednici byly zvoleny uzlové body s úhlovou roztečí  $30^\circ$ . Jejich trajektorie jsou přímkové, jak je vyznačeno na obr. 12 a jak je zřejmé z rovnic (2.45) a (2.46). Mezi posuvy a působící silou platí totiž podle těchto rovnic přímá úměrnost. Můžeme se přesvědčit, že se délka oblouků mezi uzlovými body zvětšuje, a to nezávisle na smyslu působící síly. Je to v rozporu s linearizovanou podmínkou neroztažitelnosti střednice (2.43). V této rovnici byl totiž potlačen další, a to kvadratický člen. Situace je obdobná jako u přímého prutu.

K numerickému řešení nelineární úlohy rozdělíme prut na  $n$  absolutně tuhých oblouků spojených klouby. Tětivy mezi uzlovými body budou mít délku

$$h = 2r \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right) \quad (2.47)$$

Konstantu tuhosti kloubů  $1, 2, \dots, n$  vypočteme z podmínky rovnosti úhlových deformací na jedné rozteči při rovnoměrném ohybu

$$\frac{Mr \frac{\pi}{2n}}{EJ} = \frac{M}{k}$$

Odtud

$$k = \frac{2nEJ}{\pi r} \quad (2.48)$$

Konstanta tuhosti kloubu O v místě vetknutí bude  $2k$ . Úhlová deformace se nyní nebude měřit od nuly, ale od počátečních úhlů, které spolu svírají tětivy oblouků v uzlových bodech

$$\varphi_{10} = \frac{\pi}{4n}, \quad \varphi_{20} = \frac{\pi}{2n}, \quad \dots, \quad \varphi_{m0} = \frac{\pi}{2m} \quad (2.49)$$

Zobecněné síly vypočteme obdobně jako dříve z principu virtuálních prací. Změní-li se úhel  $\varphi_k$  o  $\delta\varphi_k$ , vykoná zobecněná síla  $f_k$  práci  $f_k \delta\varphi_k$ , kdežto síla  $F$  vykoná práci

$$F x \text{ rameno síly ke } k\text{-tému uzlovému bodu } x (-\delta\varphi_k)$$

Obě práce musí být stejné, takže  $f_k$  je záporný moment síly  $F$  k uzlu  $k$ , počítaný v deformované poloze. Tak dostaneme

$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 - \varphi_{10} \\ \varphi_2 - \varphi_{20} \\ \vdots \\ \varphi_m - \varphi_{m0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

Je-li  $m = 3$ , vyjde konkrétně po snadné úpravě

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{12} \\ \frac{\pi}{6} \\ \frac{\pi}{6} \end{Bmatrix} - \frac{Fh}{2k} \begin{Bmatrix} \sin\varphi_1 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \\ 2[\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)] \\ 2\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

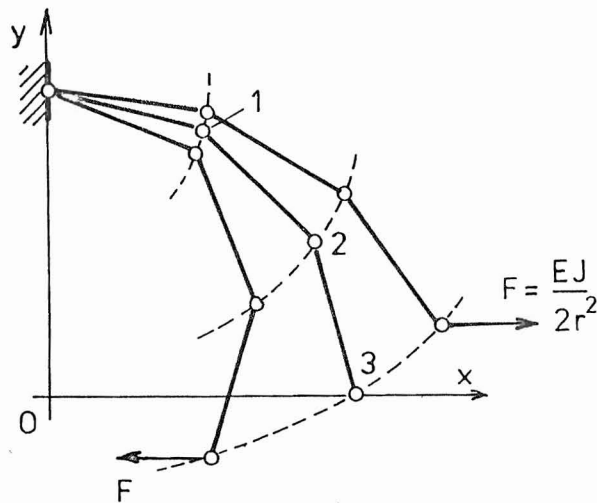
Podle (2.47) a (2.48) vypočteme pro  $m = 3$

$$\frac{Fh}{2k} = 0,135\,517\,33 \frac{Fr^2}{EJ} \quad (2.52)$$

a rovnici (2.51) řešíme iteracemi. Zpočátku dosadíme  $\psi_1 = \pi/12$ ,  $\psi_2 = \psi_3 = \pi/6$  a pak vždy to, co vyjde na levé straně (2.51), dosadíme do pravé strany. To opakujeme tak dlouho, až se výsledky znatelně nemění. \*) Asi po osmi iteracích dostaneme (v obloukové míře)

	$\frac{Fr^3}{EJ} = 0,5$	$\frac{Fr^3}{EJ} = -0,5$
$\psi_1$	0,1634	0,4175
$\psi_2$	0,3488	0,7800
$\psi_3$	0,4152	0,6538

Výsledky jsou zakresleny na obr. 13. Je zřejmé, že dráhy uzlových bodů



Obr. 13

jsou - na rozdíl od řešení podle lineární teorie, znázorněného na obr. 12 - křivočaré a že jsou směrem ke středu křivosti delší než v opačném směru (při téže absolutní velikosti zatěžující síly). Posuvy jsou tedy nelineární funkcí zatěžující síly, nesymetrickou k počátku.

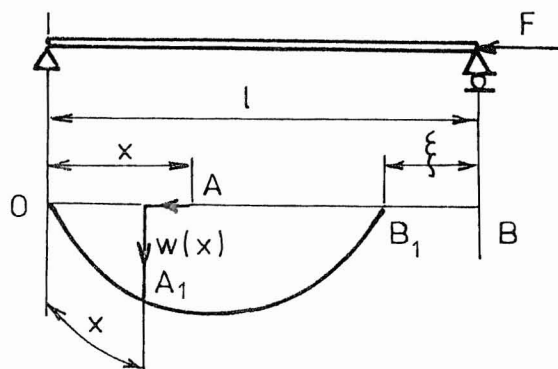
Podle příkladu znázorněného na obr. 8 a 9 můžeme soudit, že výsledky uvedené na obr. 13 jsou zatíženy malou chybou, která by se prakticky ztratila, kdybychom zvolili  $\nu = 10$ . Protože však nám jde o ukázkou metody řešení a nikoli o přesný výsledek, nebudeme řešení dále zpřesňovat.

\*) Zvolili jsme tedy  $\alpha = 1$ , což si v tomto případě můžeme dovolit (dělení je hrubé a průhyby nejsou příliš velké).

Ukázali jsme, že některé úlohy o velkých deformacích elastických prutů lze řešit elementárními výpočtovými prostředky, buď analyticky nebo - není-li to možné - numericky, přičemž k pohodlnému numerickému výpočtu stačí programovatelná kapesní kalkulačka.

### 3. POKRITICKÉ DEFORMACE ELASTICKÝCH PRUTŮ

Elastická vzpěra s kloubově uloženými konci je zatížena osovou tlakovou silou o velikosti  $F$  (obr. 14). Dosáhne-li, jak známo, tato síla



Obr. 14

kritické velikosti  $F_E$  (Eulerova síla), nastane rozdělení rovnováhy (bifurkace). Kromě přímého tvaru prutu bude v rovnováze při nezměněné osové síle i prut nepatrně zakřivený s ohybovou čarou  $w = w(x)$ .

Za počáteční konfiguraci budeme považovat přímý stlačený prut o délce  $l$ . Při jeho dodatečném průhybu  $w(x)$  se oba klouby k sobě přiblíží o posuv  $\xi = u(0)$ . Snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} \xi &= l - \int_0^l \sqrt{1 - (w')^2} dx \doteq \\ &\doteq l - \int_0^l \left[ 1 - \frac{1}{2} (w')^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^l (w')^2 dx \end{aligned} \quad (3.1)$$



kde  $W' \equiv dw/dx$  . Potenciální energie vnější síly  $F = F_E$  je tedy

$$V = -F_E \xi = -\frac{1}{2} F_E \int_0^{\ell} (W')^2 dx \quad (3.2)$$

Vlivem průhybu  $W(x)$  vzroste deformační energie o hodnotu

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EJ (W'')^2 dx \quad (3.3)$$

Protože i prohnutý prut je v rovnováze, musí variace součtu obou těchto energií vymizet. Musí tedy být

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (3.4)$$

Variace  $\delta U$  , resp.  $\delta V$  , se vypočte tak, že se funkce  $W(x)$  změní o variaci  $\delta W(x)$  , s kterou se počítá jako s malou veličinou, a určí se změna hodnoty funkcionálu  $U$  , resp.  $V$  . Např.

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EJ (W'' + \delta W'')^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EJ (W'')^2 dx \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EJ [(W'')^2 + 2W''\delta W'' - (W'')^2] dx = \\ &= \int_0^{\ell} EJ W'' \delta W'' dx \end{aligned}$$

Tak dostaneme

$$\int_0^{\ell} EJ W'' \delta W'' dx - F_E \int_0^{\ell} W' \delta W' dx = 0 \quad (3.5)$$

Okrajové podmínky jsou

$$W(0) = W(\ell) = 0 \quad W''(0) = W''(\ell) = 0 \quad (3.6)$$

Variaci  $\delta W(x)$  zvolíme tak, aby v koncových bodech vymizela (předepsané hodnoty nelze variovat). Integrace per partes (s použitím okrajových podmínek) dávají

$$\int_0^l w' \delta w' dx = [w' \delta w]_0^l - \int_0^l w'' \delta w dx = - \int_0^l w'' \delta w dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^l EJ w'' \delta w'' dx &= [EJ w'' \delta w']_0^l - \int_0^l (EJ w'')' \delta w' dx = \\ &= - [(EJ w'')' \delta w]_0^l + \int_0^l (EJ w'')'' \delta w dx = \\ &= \int_0^l (EJ w'')'' \delta w dx \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto výsledky do (3.5) vyjde

$$\int_0^l [(EJ w'')'' + F_E w''] \delta w dx = 0 \quad (3.7)$$

Parciální integrování, které jsme právě ukázali, má ve variačním počtu zásadní důležitost. Umožňuje v našem případě přepsat rovnici (3.5) do tvaru (3.7) a tak odvodit tzv. Eulerovu diferenciální rovnici (3.8) variační úlohy (3.4). Rovnice (3.4) znamená, že součet  $U + V$  nabývá za rovnováhy stacionární hodnoty. Podrobnější výklad jsme podali dříve (viz lit. /5/).

Protože funkce  $\delta w(x)$  je libovolná (až na nepodstatná omezení), musí být na celém intervalu  $0 < x < l$  splněna rovnice

$$(EJ w'')'' + F_E w'' = 0 \quad (3.8)$$

Dvojitou integrací s přihlédnutím k podmínkám (3.6) dostaneme

$$EJ w'' + F_E w = 0 \quad (3.9)$$

To je známá diferenciální rovnice, jejíž řešení vede za předpokladu

$EJ = \text{konst.}$  k Eulerovu vzorci

$$F_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad (3.10)$$

a k tvaru ohybové čáry určené rovnicí

$$w(x) = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3.11)$$

s libovolnou (avšak malou!) amplitudou  $a$ .

To je dobře známo z elementární teorie vzpěru. Pokusíme se řešit tento problém numericky. Místo funkce  $W(x)$ , která je obecně popsána nekonečně mnoha parametry  $^*)$ , zvolíme pouze  $n$  parametrů (zobecněných souřadnic)  $q_1, q_2, \dots, q_n$  a sestavíme je do vektoru  $\{q\}$ . Zároveň zvolíme matici lineárně nezávislých bázových funkcí  $[A(x)]$  takovou, aby součin

$$\{W(x)\} = [A(x)]\{q\} \quad (3.12)$$

aproximoval skutečný tvar ohybové čáry  $W(x)$ . Matice  $[A]$  je typu  $(1, n)$ , takže  $\{W(x)\}$  je typu  $(1, 1)$  (skalár). Označíme-li derivace

$$\frac{d}{dx} [A(x)] = [B(x)] \quad \frac{d}{dx} [B(x)] = [C(x)] \quad (3.13)$$

dostaneme z podmínky (3.4) rovnici

$$\lambda [K_G]\{q\} = [K_0]\{q\} \quad (3.14)$$

kde

$$[K_0] = \int_0^l EJ [C(x)]^T [C(x)] dx$$

$$[K_G] = F_0 \int_0^l [B(x)]^T [B(x)] dx$$

$$\lambda = \frac{F_E}{F_0}$$

Je totiž podle (3.2)

$$V = -\frac{1}{2} F_E \{q\}^T \int_0^l [B]^T [B] dx \{q\} = -\frac{1}{2} \lambda \{q\}^T [K_G] \{q\} \quad (3.15)$$

a příslušná variace je

$$\delta V = -\lambda \{\delta q\}^T [K_G] \{q\} \quad (3.16)$$

---

$^*)$  Např. Fourierovou řadou s nekonečně mnoha koeficienty.

Obdobně vypočteme  $\delta U$  a dosadíme do (3.4). Z rovnice

$$\delta U + \delta V = \{ \delta q \}^T ( [K_0] - \lambda [K_G] ) \{ q \} = 0 \quad (3.17)$$

pak plyne (3.14), neboť  $\{ \delta q \}$  je libovolné.

Matice  $[K_0]$  podle (3.15) je matice tuhosti, vypočtená pro přímý elastický prut, která nezávisí na tlakové síle. Matice  $[K_G]$  je tzv. geometrická matice; název objasníme později. Parametr  $\lambda$  je bezrozměrový. Je to poměr působící kritické síly  $F_E$  k libovolné konstantní síle  $F_0 > 0$ . Úlohu o vzpěru, tj. diferenciální rovnici (3.9) s okrajovými podmínkami (3.6), jsme převedli na obecnou úlohu (3.14) o vlastních hodnotách  $\lambda$  s maticemi  $[K_0]$ ,  $[K_G]$ . Jejím řešením dostaneme jednak přibližnou hodnotu Eulerovy vzpěrné síly  $F_E \doteq \lambda_{\min} F_0$ , jednak příslušný vlastní vektor  $\{ q_E \}$ , popisující prostřednictvím rovnice (3.12) tvar ohybové čáry na hranici elastické stability ( $F = F_E$ ).

Obě tyto metody, analytická i numerická, řeší problém rovnováhy na mezi elastické stability, ale neumožňují určit, co se děje potom, když síla  $F$  překročí hodnotu síly  $F_E$ . O tuto možnost jsme se připravili v okamžiku, kdy jsme se spokojili s linearizovanými výrazy (3.2), resp. (3.3), pro potenciální energii  $V$ , resp.  $U$ .

Protože  $\lambda$  značí délku oblouku (viz obr. 14), je křivost dána výrazem

$$\frac{d}{dx} \arcsin \left( \frac{dw}{dx} \right) = \frac{w''}{\sqrt{1 - (w')^2}}$$

takže místo rovnice (3.3) by mělo být

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l E J (w'')^2 [1 - (w')^2]^{-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l E J [ (w'')^2 + (w'')^2 (w')^2 + (w'')^2 (w')^4 + \dots ] dx \end{aligned} \quad (3.18)$$

a místo (3.2) bychom měli dosadit

$$\begin{aligned} V &= -F \int_0^l [1 - \sqrt{1 - (w')^2}] dx = \\ &= -F \int_0^l \left[ \frac{1}{2} (w')^2 + \frac{1}{8} (w')^4 + \frac{1}{16} (w')^6 + \dots \right] dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

Řady na pravých stranách (3.18), (3.19) konvergují, je-li  $|W'| < 1$ .  
Místo rovnice (3.14) bychom popsaným způsobem dostali

$$\frac{F}{F_0} ([K_G] + [K_{G1}] + \dots) \{q\} = ([K_0] + [K_1] + \dots) \{q\} \quad (3.20)$$

V této rovnici jsou na obou stranách v oblé závorce součty matic, z nichž druhá a další jsou funkcemi vektoru  $\{q\}$ . Např. prvky matic

$$[K_{G1}] = \frac{1}{2} F_0 \int_0^l [B]^T [B] \{q\} \{q\}^T [B]^T [B] dx \quad (3.21)$$

$$[K_1] = \int_0^l EJ ([C]^T [C] \{q\} \{q\}^T [B]^T [B] + [B]^T [B] \{q\} \{q\}^T [C]^T [C]) dx \quad (3.22)$$

obsahují kvadratické polynomy zobecněných posuvů. Tyto matice i další, zde nerozepsané, jsou v okolí rovnovážné polohy, kdy  $\|q\| \ll 1$ , zanedbatelné. Rovnice (3.20) pak přejde do tvaru (3.14). Při větších průhybech však tyto matice získávají význam a nelze je zanedbat.

Rovnice (3.20) je už schopna popsat i pokritické stavy vzpěry, ale výpočet je nepraktický a zdlouhavý. Místo toho lze opět aplikovat model prutu podle obr. 7 a 8 s tím rozdílem, že model na obr. 8 bude znázorňovat pouze polovinu vzpěry o délce  $l/2$  (vzhledem k symetrii to stačí) a že síla  $F$  bude působit rovnoběžně s osou  $x$ . Do výpočtu můžeme dokonce zavést i počáteční deformaci prutu (odchylku od přímého tvaru nezátíženého prutu), a to tak, že zavedeme počáteční hodnoty  $\{\varphi_0\}$ . Dostaneme rovnici

$$[K_0] (\{\varphi\} - \{\varphi_0\}) = \{f(\varphi)\} \quad (3.23)$$

kde

$$[K_0] = \frac{2nEJ}{l} \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\varphi\} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_m]^T$$

$$\{\varphi_0\} = [\varphi_{10} \quad \varphi_{20} \quad \dots \quad \varphi_{m0}]^T$$

Vektor zobecněných sil bude mít prvky

$$f_i = F \frac{\ell}{2m} \sum_{k=i}^m \sin \sum_{j=1}^k \varphi_j \quad (3.24)$$

Bude-li  $\{\varphi_0\} = \{0\}$  a úhly  $\{\varphi\}$  budou velmi malé (tj. bude-li norma  $\|\varphi\| \ll 1$ ), přejde rovnice (3.23) na problém vlastních hodnot

$$[K_0] \{\varphi\} = \lambda [K_G] \{\varphi\} \quad (3.25)$$

Síly  $f_i$  podle (3.24) totiž vyjdou pro malá  $|\varphi_j|$  ve zjednodušeném tvaru. Porovnáme je pak s pravou stranou rovnice (3.25). Bude

$$f_i \doteq F \frac{\ell}{2m} \sum_{k=i}^m \sum_{j=1}^k \varphi_j = \lambda \sum_{j=1}^m k_{Gij} \varphi_j \quad (3.26)$$

Zde  $k_{Gij}$  představuje prvky geometrické matice. Např. pro  $m = 3$  bude mít rovnice (3.25) po rozepsání tvar

$$\frac{6EJ}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = F \frac{\ell}{6} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

a vlastní hodnota  $\mu = 36EJ/F\ell^2$  vyjde z charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} 3 - 2\mu & 2 & 1 \\ 2 & 2 - \mu & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

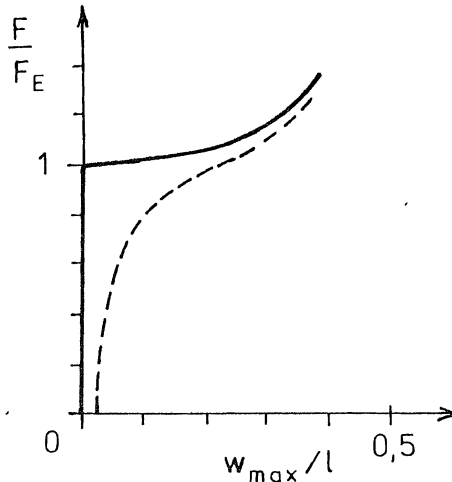
V tomto případě je výhodnější zavést parametr  $\mu$  na levé straně rovnice (místo abychom zavedli  $\lambda$  na pravé straně), protože matice tuhosti na

levé straně rovnice je diagonální. Největší kořen rovnice (3.28)

$\mu_{\max} \doteq 3,732 051$  dá kritickou Eulerovu sílu

$$F_E = \frac{36 E J}{\mu_{\max}^2 l^2} = 9,646 171 \frac{E J}{l^2} \quad (3.29)$$

asi o 2,3 % menší než je přesná hodnota (3.10). Rovnice (3.23) poskytne řešení i pro sílu převyšující kritické Eulerovo břemeno. Na obr. 15 je



Obr. 15

znázorněn takto získaný maximální průhyb  $w_{\max}$  původně přímé vzpěry ( $\{\varphi_0\} = \{0\}$ ) v závislosti na tlakové síle  $F$  vztahené k Eulerově vzpěrné síle  $F_E$ . Je zřejmé, že pro  $F < F_E$  je rovnovážný pouze přímý prut. Při  $F = F_E$  nastává rozdělení rovnováhy. Pro  $F > F_E$  je přímý tvar prutu sice také rovnovážný, ale nestabilní. Stabilní větev je vyznačena tlustou plnou čarou, její zlom je bodem bifurkace.

Má-li vzpěra nějakou počáteční deformaci  $\{\varphi_0\}$ , je její deformační charakteristika hladká v celém rozsahu působící síly. Jeden případ je na obr. 15 zakreslen čárkovaně.

Zbývá vysvětlit, proč se matice  $[K_G]$  v rovnici (3.14), popř. (3.25), nazývá geometrická. Jak známo, znamená levá strana rovnice (3.25) vektor zobecněných vratných sil, takže přírůstek deformační energie při diferenciální změně vektoru zobecněných posuvů je

$$dU = \{dq\}^T [K_0] \{q\} \quad (3.30)$$

Po integraci

$$U = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [K_0] \{q\} \quad (3.31)$$

Pravá strana rovnice (3.25) představuje zobecněné vnější síly

$$\{f\} = \lambda [K_G] \{q\} \quad (3.32)$$

Vektor  $\{f\}$  představuje zobecněné "membránové" síly v malém okolí rovnovážné geometrické konfigurace na mezi elastické stability, které vykonají na posuvech  $\{dq\}$  práci

$$dA = -dV = \{dq\}^T \{f\} \quad (3.33)$$

Geometrická konfigurace se přitom změní, avšak tak málo, že membránové síly zůstanou konstantní. Zobecněné membránové síly  $\{f\}$  tedy představují "membránovou" vzpěrnou sílu  $F$ , rozpočítanou na všechny stupně volnosti podle kritéria stejné virtuální práce. Za membránové považujeme síly (popř. napětí), které v ideální nedeformované konstrukci působí pouze tah či tlak a nikoli ohyb nebo krut.

Zvolme  $F_0 = F_E$ , takže na mezi elastické stability bude parametr  $\lambda = 1$ . Pak bude

$$\{f\} = [K_G] \{q\} \quad (3.34)$$

Máme-li tedy konstrukci zatíženou na mezi elastické stability membránovými silami a změníme-li její geometrickou konfiguraci tak málo, aby se membránové síly nezměnily, transformuje geometrická matice vektor geometrických parametrů (zobecněných posuvů) na vektor zobecněných membránových sil. Proto se tato matice nazývá geometrická.

Obdobná tvrzení se vztahují i na rovnici (3.14), kde jsou zobecněné posuvy jen jinak zvoleny.

Protože transformace (3.34) je lineární, nemůže rovnice (3.14) ani (3.25) popsat chování konstrukce nad mezi elastické stability, které je svou povahou nelineární (membránové síly nezůstávají konstantní). K tomu slouží obecnější rovnice, např. (3.20), popř. (3.23). Rovnice (3.14) a (3.25) však postačí k určení bodu, v němž nastává bifurkace.



#### 4. MATICOVÉ OPERACE S TENZOROVÝMI VELIČINAMI

V této kapitole zopakujeme některé poznatky o tenzorových veličinách a ukážeme, jak lze transformace tenzorových veličin přepsat do maticového tvaru, který se lépe hodí k programování výpočtů. Čtenář si jistě klade otázku, proč tedy nezůstaneme rovnou jen u maticové algebry? Je to proto, že tenzorová symbolika ulehčuje pochopení fyzikálních zákonů a maximálně usnadňuje jejich matematický popis. Abychom však čtenáře zbytečně nezatěžovali, omezíme se v dalším výkladu na kartézské souřadnice, v nichž kovariantní a kontravariantní tenzorové složky splývají, takže není třeba rozlišovat je polohou indexů. Obecnější výklad jsme podali dříve (viz lit. /3/).

Tenzorové veličiny se vyznačují přesně definovanou zákonitostí změny svých složek při přechodu z jedné soustavy souřadnic  $x_j$  do jiné  $\bar{x}_i$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Jsou-li obě soustavy souřadnic kartézské, platí mezi souřadnicemi lineární transformační vztahy

$$\bar{x}_i = a_{ij} x_j + b_i \quad (4.1)$$

$$x_j = \bar{a}_{jk} \bar{x}_k + \bar{b}_j \quad (4.2)$$

Podle indexů, které se v daném členu opakují dvakrát, se sčítá (Einsteinovo pravidlo). Zřejmě

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} = a_{ij} \quad \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k} = \bar{a}_{jk} \quad (4.3)$$

Protože  $\partial \bar{x}_i / \partial \bar{x}_k$  je buď jednička (pro  $i = k$ ) nebo nula (pro  $i \neq k$ ), musí být

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{x}_k} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k} = a_{ij} \bar{a}_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad (4.4)$$

Zde  $\delta_{ik}$  značí Kroneckerovo delta. \*) Obdobně  $\bar{a}_{jk} a_{ki} = \delta_{ji}$ .

---

\*) Připomeňme, že "delta" ve významu řeckého písmene je rodu středního, ve významu rozvětveného ústí řeky do moře je rodu ženského.

Sestavíme-li činitele  $a_{ij}$ , resp.  $\bar{a}_{jk}$ , do čtvercové matice  $[A]$ , resp.  $[\bar{A}]$ , typu  $(3, 3)$  a ostatní veličiny do vektorů, např.  $\bar{x}_i$  do vektoru  $\{\bar{x}\}$  typu  $(3, 1)$ , můžeme rovnici (4.4) přepsat do tvaru

$$[A][\bar{A}] = [I] \quad (\text{jednotková matice}) \quad (4.5)$$

takže  $[\bar{A}] = [A]^{-1}$ . Rovnice (4.1), popř. (4.2) budou

$$\{\bar{x}\} = [A]\{x\} + \{\bar{c}\} \quad (4.6)$$

$$\{x\} = [A]^{-1}\{\bar{x}\} + \{\bar{c}\} \quad (4.7)$$

Zřejmě

$$\{\bar{c}\} = -[A]^{-1}\{c\} \quad \{c\} = -[A]\{\bar{c}\} \quad (4.8)$$

Tyto vztahy dostaneme, vyloučíme-li z rovnic (4.6), (4.7) vektor  $\{x\}$ , popř.  $\{\bar{x}\}$ .

Mají-li obě souřadnicové soustavy společný počátek, jsou vektory posunutí (4.8) nulové. Protože obě soustavy jsou pravouhlé a přímočaré, lze jednu převést do druhé pouhou rotací. Má-li nějaký vektor v jedné soustavě složky  $x_i$  a v druhé  $\bar{x}_j$ , musí se délka vektoru v obou soustavách zachovat

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 \quad (4.9)$$

Musí tedy být

$$l^2 = \{x\}^T\{x\} = \{\bar{x}\}^T\{\bar{x}\} = \{x\}^T[A]^T[A]\{x\} \quad (4.10)$$

Matice  $[A]$  je maticí rotace. Zřejmě

$$[A]^T[A] = [I]$$

a odtud

$$[A]^T = [A]^{-1} \quad (4.11)$$

Matice  $[A]$  je tedy ortogonální. Vztah (4.11) znamená, že

$$\bar{a}_{jk} = a_{kj} \quad (4.12)$$

takže podle (4.4)

$$a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik} \quad (4.13)$$

Obdobně  $a_{kj} a_{ki} = \delta_{ji}$ .

Pro tenzorovou veličinu  $T$  platí transformační zákony, které se liší podle toho, zda jde o veličinu nultého řádu (skalár), prvního řádu (vektor), druhého řádu, třetího řádu atd. Řád se shoduje s počtem indexů u složek tenzoru. Tyto transformační zákony jsou

$$\begin{aligned} \text{Skalár:} \quad \bar{T} &= T & T &= \bar{T} \\ \text{Vektor:} \quad \bar{T}_i &= a_{ip} T_p & T_i &= a_{pi} \bar{T}_p \\ \text{Druhý řád:} \quad \bar{T}_{ij} &= a_{ip} a_{jq} T_{pq} & T_{ij} &= a_{pi} a_{qj} \bar{T}_{pq} \\ \text{Třetí řád:} \quad \bar{T}_{ijk} &= a_{ip} a_{jq} a_{kr} T_{pqr} & T_{ijk} &= a_{pi} a_{qj} a_{rk} \bar{T}_{pqr} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Analogicky lze napsat transformační rovnice i pro tenzory čtvrtého nebo i vyššího řádu. Přitom  $a_{ij} = \partial \bar{x}_i / \partial x_j$  podle (4.3).

Je dán nějaký vektor  $\bar{\xi}_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3)$ . Ptáme se, jaké budou jeho složky  $\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  v druhé souřadnicové soustavě? Podle (4.14) dostaneme

$$\bar{\xi}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = a_{ip} \xi_p(x_1, x_2, x_3) \quad (4.15)$$

Utvořme derivace

$$\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \bar{x}_j} = a_{ip} \frac{\partial \xi_p}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j} + \xi_p \frac{\partial a_{ip}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j} \quad (4.16)$$

Jde-li o kartézské souřadnice, je  $a_{ip} = \text{konst.}$  a druhý člen na pravé straně (4.16) odpadne. S použitím (4.3) a (4.12) pak zbude

$$\frac{\partial \bar{\xi}_i}{\partial \bar{x}_j} = a_{ip} \bar{a}_{qj} \frac{\partial \xi_p}{\partial x_q} = a_{ip} a_{jq} \frac{\partial \xi_p}{\partial x_q} \quad (4.17)$$

Porovnáme-li (4.17) s třetím řádkem (4.14), vidíme, že parciální derivace vektoru  $\xi_i$ , kterou zapíšeme ve tvaru

$$\xi_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$$

je tenzorem druhého řádu. To však platí jen pro kartézské souřadnice; v jiném případě je nutno připojit ještě druhý člen z pravé strany rovnice (4.16), to znamená nahradit parciální derivaci kovariantní derivací (viz /3/).

Transformaci mezi dvěma vektory v téže kartézské soustavě zprostředkuje tenzor druhého řádu. Např. vektor  $u_p(x_1, x_2, x_3)$  přejde ve vektor  $f_i(x_1, x_2, x_3)$  lineární transformací

$$f_i = k_{ip} u_p \quad (i, p = 1, 2, 3) \quad (4.18)$$

Tento vztah zapíšeme maticově. Bude

$$\{f\} = [K]\{u\} \quad (4.19)$$

Je-li  $\{u\}$  vektor posuvů v daném bodě a  $\{f\}$  vektor zatěžujících sil v témže bodě, je  $[K]$  matice tuhosti.

Není-li vztah mezi  $\{u\}$  a  $\{f\}$  lineární, tj. jsou-li

$$f_1 = f_1(u_1, u_2, u_3)$$

$$f_2 = f_2(u_1, u_2, u_3)$$

$$f_3 = f_3(u_1, u_2, u_3)$$

nelineární funkce, bude lineární vztah už jen mezi diferenciály, takže

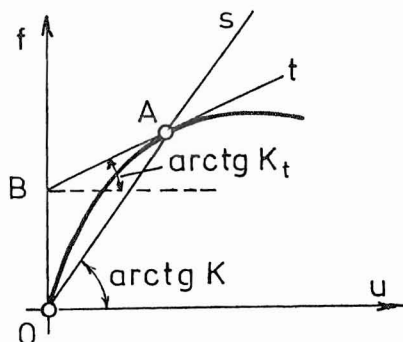
$$\{df\} = [K_t]\{du\} \quad (4.20)$$

Zde

$$k_{tij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \quad (4.21)$$

jsou prvky tzv. tečné matice, popisující tuhost v daném bodě konstrukce v nekonečně malém okolí okamžité (deformované) konfigurace.

I tehdy lze mezi oběma vektory nalézt transformaci (4.19); matice  $[K]$  však bude v takovém případě značit sečnou matici. Tečná i sečná matice závisejí obecně na velikosti deformace. Pouze v lineárním případě splynou a stanou se nezávislými na deformaci. Názvy těchto matic objasňuje obr. 16, kreslený pro jednorozměrný případ.



Obr. 16

Ukážeme ještě, že jsou-li  $f_i$ , popř.  $u_p$  v rovnici (4.18) složky vektorů, jsou  $k_{ip}$  složky tenzoru druhého řádu. \*) Po transformaci je totiž

$$a_{pi} \bar{f}_p = k_{ij} a_{qj} \bar{u}_q \quad (4.22)$$

Obě strany vynásobíme  $a_{ri}$  a použijeme (4.13). Bude

$$\delta_{pr} \bar{f}_p = \bar{f}_r = a_{ri} a_{qj} k_{ij} \bar{u}_q = \bar{k}_{rq} \bar{u}_q \quad (4.23)$$

Srovnáním obou posledních výrazů dostaneme, že

$$\bar{k}_{rq} = a_{ri} a_{qj} k_{ij} \quad (4.24)$$

To je však transformační zákon pro tenzory druhého řádu podle (4.14).

Vztah (4.18), popř. (4.19) můžeme zobecnit na  $m$ -rozměrné prostory, takže  $i, p = 1, 2, \dots, m$ . To lze, pokud i tehdy platí (4.14).

Typickými tenzory druhého řádu jsou tenzory napjatosti a deformace známé z lineární teorie elasticity

---

\*) Toto tvrzení je v souladu s tzv. kvocientovým pravidlem tenzorového počtu.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Na pravé straně těchto rovnic je uvedeno tzv. inženýrské označení tenzových složek. Povšimněme si zejména, že např.  $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$  je poloviční "inženýrský" zkos. Transformaci mezi tenzory (4.25) a (4.26) zprostředkuje u lineárně pružných těles Hookeův zákon, který zapíšeme ve tvaru

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.27)$$

Podle kvocientového pravidla je  $E_{ijkl}$  tenzorem čtvrtého řádu. Pro hustotu deformační energie  $U$  platí, že

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{kl} \quad (4.28)$$

Po integraci \*)

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (4.29)$$

Výraz na pravé straně (4.27) představuje devět sčítanců, na pravé straně (4.29) už 81 sčítanců. Tyto vztahy bychom rádi zapsali maticově, ale bez další úpravy to zřejmě nepůjde.

Úprava spočívá v tom, že využijeme souměrnosti tenzorů (4.25) a (4.26) a utvoříme z nich zobecněné vektory v šestirozměrném prostoru

---

\*) S přihlédnutím k tomu, že  $E_{ijkl} = E_{klij}$ . Práci, energii, popř. výkon vztahený k jednotce objemu budeme značit psacími písmeny. Celková deformační energie bude  $U = \int_V U dV$ .

$$\begin{aligned}
 \{G\} &= [G_{11} \ G_{22} \ G_{33} \ G_{12} \ G_{23} \ G_{31}]^T = \\
 &= [G_x \ G_y \ G_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T = \\
 &= [G_1 \ G_2 \ G_3 \ G_4 \ G_5 \ G_6]
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

To znamená, že jsme každé dvojici indexů přiřadili index jediný, např. 11  $\rightarrow$  1, 12, popř. 21  $\rightarrow$  4 atd. Stejně uspořádáme i deformační tenzor, avšak tak, aby platilo, že

$$dU = \{d\varepsilon\}^T \{G\} \tag{4.31}$$

To znamená, že bude

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon\} &= [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{31}]^T = \\
 &= [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T = \\
 &= [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6]^T
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

Tenzor elastických modulů má 81 složek  $E_{ijkl}$ , z nich je však jen 36 nezávislých, jde-li o obecnou anizotropii. U izotropního materiálu jsou tyto nezávislé elastické konstanty jen dvě. Skupinu indexů  $i, j$ , resp.  $k, l$ , nahradíme indexem jediným, a to podle stejného pravidla, jaké jsme zvolili u tenzoru napjatosti (4.30). Dostaneme tak 36 složek se dvěma indexy, které uspořádáme do čtvercové matice  $[E]$  šestého řádu. Hookeův zákon (4.27) pak zapíšeme maticově ve tvaru

$$\{G\} = [E] \{\varepsilon\} \tag{4.33}$$

Pro deformační energii (4.29) dostaneme

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 E_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} \tag{4.34}$$

Je totiž

$$\sum_{j=1}^6 E_{ij} \varepsilon_j = G_i \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \varepsilon_i G_i$$

a tomu odpovídá

$$[E] \{ \varepsilon \} = \{ G \} \quad U = \frac{1}{2} \{ \varepsilon \}^T \{ G \}$$

Popsaným obratem jsme složky symetrických tenzorů druhého řádu zobrazili jako vektory v šestirozměrném prostoru a k tenzoru čtvrtého řádu o 36 nezávislých složkách jsme přiřadili matici šestého řádu. To nám umožnilo použít maticový zápis i pro transformaci (4.27), a to ve tvaru (4.33). Zato platíme ztrátou jiné výhody; veličiny  $G_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $E_{ij}$  s redukovaným počtem indexů již nepodléhají transformačním zákonům (4.14) při změně souřadnicové soustavy, nejsou to tedy složky tenzorů.

Závěrem ještě připomeňme, že součiny nejsou v maticové algebře obecně komutativní, zatímco v tenzorovém zápisu na pořadí činitelů nezáleží. Tak např. zápisům

$$[A][B] = [C] \quad [B][A] = [D]$$

odpovídají výrazy (podle opakovaných indexů se sčítá)

$$\begin{aligned} a_{ij} b_{jk} &= c_{ik} & b_{ij} a_{jk} &= d_{ik} \\ b_{jk} a_{ij} &= c_{ik} & a_{jk} b_{ij} &= d_{ik} \end{aligned}$$

Přitom obecně  $c_{ik} \neq d_{ik}$ . Podobně bude pro

$$[A]^T [B] = [E] \quad [A][B]^T = [F]$$

platit, že

$$a_{ij} b_{ik} = e_{jk} = b_{ik} a_{ij} \quad a_{ij} b_{kj} = f_{ik} = b_{kj} a_{ij}$$

Naproti tomu např. pro

$$[B]^T [A] = [E]^T$$

dostaneme

$$b_{ij} a_{ik} = e_{kj} = a_{ik} b_{ij}$$

tedy totéž, co jsme už měli pro matici  $[E]$  (indexy  $j$ ,  $k$  můžeme zaměnit).



Pokud matice  $[A]$  až  $[F]$  nejsou maticemi tenzorů, bylo by třeba sčítání podle opakovaných indexů vyznačovat symbolem  $\sum$ . Einsteinovo pravidlo se totiž vztahuje pouze na tenzory. Např. by se mělo psát

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

pro součin  $[C]$  matic  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $n$ -tého řádu.

## 5. VELKÉ POMĚRNÉ DEFORMACE

Deformace v kontinuu budou úplně popsány, budeme-li ke každému bodu  $P$  o souřadnicích  $a_1, a_2, a_3$  nedeformovaného tělesa znát jeho polohu  $P'$  po deformaci. Bod  $P'$  bude mít souřadnice  $x_1, x_2, x_3$ . To znamená, že pro každé  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) a čas  $t$  budeme znát

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t) \quad (5.1)$$

Hodnoty  $a_1, a_2, a_3$  nezávisí na čase. Protože přiřazení bodů  $P, P'$  musí být vzájemně jednoznačné, musí existovat také inverzní vztah

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (5.2)$$

Rozdíl souřadnic nějakého bodu po deformaci a před ní je posuv

$$u_i = x_i - a_i \quad (5.3)$$

Vyšetříme vzájemnou polohu dvou nekonečně blízkých bodů  $P, Q$ . Bod  $Q$  má před deformací souřadnice  $a_1 + da_1, a_2 + da_2, a_3 + da_3$ . Po deformaci bude tento bod v místě  $Q'$  a jeho souřadnice budou  $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3$ . Zřejmě podle (5.3)

$$dx_i = da_i + du_i = da_i + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} da_j \quad (5.4)$$

Tento zápis můžeme zjednodušit s použitím Kroneckerova symbolu  $\delta_{ij}$ .  
Snadno nahlédneme, že platí

$$dx_i = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right) da_j \quad (5.5)$$

Délka elementární úsečky  $ds_0 = \overline{PQ}$  se vypočte pomocí Pythagorovy věty; podle ní musí být

$$ds_0^2 = da_i da_i = (da_1)^2 + (da_2)^2 + (da_3)^2 \quad (5.6)$$

Úsečka  $\overline{PQ}$  přejde po deformaci v úsečku  $\overline{P'Q'} = ds$ , pro kterou budeme mít vztah

$$ds^2 = dx_i dx_i = \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right) \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial a_k} \right) da_j da_k \quad (5.7)$$

Kroneckerovu symbolu  $\delta_{ij}$  se říká také substituční symbol, neboť např.

$$\delta_{ij} a_j = a_i \quad \delta_{ij} b_{jk} = b_{ik} \quad (5.8)$$

Roznásobením (5.7) s využitím (5.8) dostaneme

$$ds^2 = \left( \delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial a_k} + \frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_i}{\partial a_k} \right) da_j da_k \quad (5.9)$$

Po vzoru (2.38) definujeme Greenův deformační tenzor o složkách  $\epsilon_{Gjkl}$  tak, aby

$$\frac{1}{2} (ds^2 - ds_0^2) = \epsilon_{Gjkl} da_j da_k \quad (5.10)$$

Na levou stranu (5.10) dosadíme výrazy (5.6) a (5.9). Protože  $da_j$ ,  $da_k$  jsou libovolné, musí být

$$\epsilon_{Gjkl} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial a_k} + \frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_i}{\partial a_k} \right] \quad (5.11)$$

shodně s výrazem (2.39). Jsou-li derivace posuvů malé, jsou malé i poměrné deformace; poslední člen v hranaté závorce (5.11) je pak malou veličinou druhého řádu, kterou lze zanedbat. Dostaneme tenzor infinitezimál-

ních deformací o složkách

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial a_k} + \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right) \quad (5.12)$$

Infinitesimální tenzor deformací definoval A. L. Cauchy roku 1823, avšak ve tvaru  $\varepsilon_{jk} = 1/2 (\partial u_j / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_j)$ ; tenzor nese jeho jméno.

Až dosud jsme vycházeli z Lagrangeova popisu (5.1), při němž jsou  $a_i$ ,  $t$  nezávisle proměnné veličiny. Mohli jsme však použít Eulerův popis (5.2), v němž jsou nezávislé  $x_i$ ,  $t$ . Místo (5.4) a (5.5) bychom dostali

$$da_i = dx_i - du_i = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (5.13)$$

a dále by bylo

$$ds^2 = dx_i dx_i \quad ds_0^2 = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left( \delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k \quad (5.14)$$

Tento postup by vedl k definici Almansiho deformačního tenzoru o složkách  $\varepsilon_{Ajk}$ . Obdobně k rovnici (5.10) by bylo

$$\frac{1}{2} (ds^2 - ds_0^2) = \varepsilon_{Ajk} dx_j dx_k \quad (5.15)$$

Po dosazení z rovnic (5.14) by vyšlo porovnáním koeficientů na obou stranách rovnice (5.15)

$$\varepsilon_{Ajk} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \quad (5.16)$$

Také tento tenzor splyne s Cauchyho tenzorem (5.12), budou-li posuvy a jejich první derivace velmi malé (přísně vzato nekonečně malé). Tehdy bude  $x_i \cong a_i$ .

Význam zavedených definic pochopíme lépe na příkladu jednorozměrné deformace, pro kterou  $x_1 = x$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ . Bude-li tato deformace rovnoměrná v délce  $l$  zkušební tyče, která měla původní délku  $l_0$ , bude

$$\frac{\partial u_1}{\partial a_1} = \frac{du_1}{da_1} = \frac{l-l_0}{l_0}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{du_1}{dx_1} = \frac{l-l_0}{l}$$

a z rovnic (5.11), (5.12) a (5.16) vyjde

$$\varepsilon_{G11} = \frac{du_1}{da_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{du_1}{da_1} \right)^2 = \frac{l-l_0}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{l-l_0}{l_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \quad (5.17)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{l-l_0}{l_0} \quad (5.18)$$

$$\varepsilon_{A11} = \frac{du_1}{dx_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{du_1}{dx_1} \right)^2 = \frac{l-l_0}{l} + \frac{1}{2} \left( \frac{l-l_0}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l^2} \quad (5.19)$$

Protože  $l$  je funkcí času, lze vypočítat diferenciální přírůstky, popř. časové derivace těchto veličin

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{G11} &= \frac{l dl}{l_0^2} & \dot{\varepsilon}_{G11} &= \frac{l}{l_0} \frac{\dot{l}}{l_0} \\ d\varepsilon_{11} &= \frac{dl}{l_0} & \dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{\dot{l}}{l_0} \\ d\varepsilon_{A11} &= \frac{l_0^2 dl}{l^3} & \dot{\varepsilon}_{A11} &= \frac{l_0^2}{l^2} \frac{\dot{l}}{l} \end{aligned} \quad (5.20)$$

V teorii tváření byla zavedena ještě tzv. logaritmická deformace

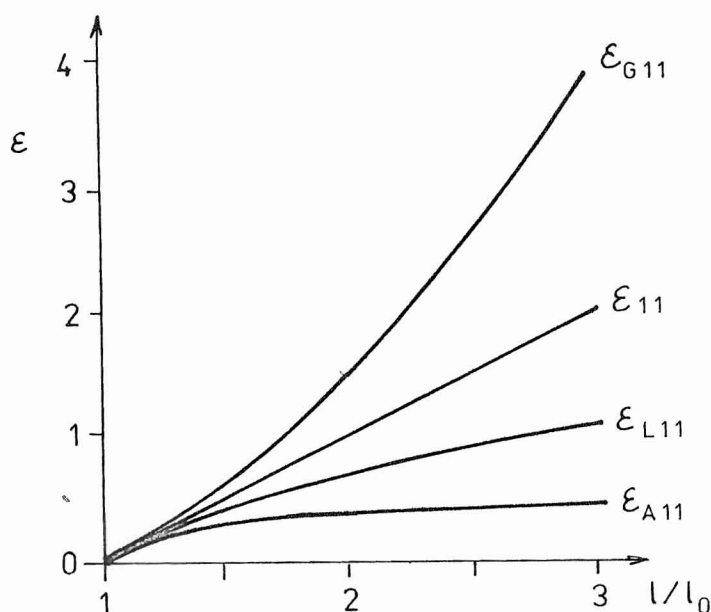
$$\varepsilon_{L11} = \ln \frac{l}{l_0} \quad (5.21)$$

pro kterou

$$d\varepsilon_{LH} = \frac{dl}{l} \quad \dot{\varepsilon}_{LH} = \frac{\dot{l}}{l} \quad (5.22)$$

Zde se diferenciální přírůstek délky  $dl$  vztahuje k délce  $l$  tyče v témže okamžiku, což se zdá přirozené. Tomu však nevyhovuje ani jedna z definic (5.20). K otázce časových derivací se ještě vrátíme.

Různé definice jednorozměrných poměrných deformací podle (5.17), (5.18), (5.19) a (5.21) jsou znázorněny na obr. 17. Je zřejmé, že se tyto hodnoty pro větší poměry  $l/l_0$  značně liší, avšak všechny splývají pro  $l/l_0 \rightarrow 0$ .



Obr. 17

Vzájemná jednoznačnost zobrazení (5.1) a (5.2) je důsledkem axiomu o nezničitelnosti a neprostupnosti hmoty. Protože nepřipouštíme ani roztržení, ani zlomy, musí být tyto funkce třídy  $C^1$  (spojité v nultých a prvních derivacích) a jakobián těchto deformací nesmí vymizet. Prvky jakobiánu jsou

$$f_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \quad (5.23)$$

Jakobián  $J$  je definován jako determinant

$$J = \det [f_{ij}] \neq 0 \quad (5.24)$$

Veličiny  $f_{ij}$  jsou složkami tenzoru druhého řádu (podle kap. 4). Můžeme je uspořádat do matice třetího řádu

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

která není obecně symetrická, ale je regulární vzhledem k (5.24). Matice  $[F]$  se často označuje jako matice deformačních gradientů. \*) Inverzní matice  $[F]^{-1}$  má složky

$$f_{ij}^{-1} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \quad (5.26)$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že platí §)

$$[\varepsilon_G] = \frac{1}{2} ([F]^T [F] - [I]) \quad (5.27)$$

$$[\varepsilon_A] = \frac{1}{2} ([I] - [F]^{-T} [F]^{-1}) \quad (5.28)$$

nebo ve složkách

$$\varepsilon_{Gij} = \frac{1}{2} (f_{ki} f_{kj} - \delta_{ij}) \quad (5.29)$$

\*) Gradient funkce  $\varphi(a_1, a_2, a_3)$  má složky  $\partial\varphi/\partial a_1$ ,  $\partial\varphi/\partial a_2$ ,  $\partial\varphi/\partial a_3$ . Zde máme místo skalární funkce  $\varphi$  vektorovou funkci  $x_i(a_1, a_2, a_3)$ .

§) Z rovnice (5.5) vypočteme  $f_{ij} = \partial x_i / \partial a_j = \delta_{ij} + \partial u_i / \partial a_j$  a dosadíme do (5.29). Obdobně  $f_{ij}^{-1} = \partial a_i / \partial x_j = \delta_{ij} - \partial u_i / \partial x_j$  dosadíme do (5.30).

$$\varepsilon_{Aij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - f_{ki}^{-1} f_{kj}^{-1}) \quad (5.30)$$

V jednorozměrném případě máme

$$f_{11} = \frac{l}{l_0} \quad f_{11}^{-1} = \frac{l_0}{l} \quad (5.31)$$

Deformační gradienty  $f_{ij}$  obsahují dostatečnou informaci o velkých deformacích kontinua, neboť jednoznačně určují Greenův i Almansiho deformační tenzor. Opačné tvrzení neplatí, neboť matice  $([R][F])$ , resp.  $([F][R])$ , kde  $[R]$  je libovolná ortogonální matice, dává stejný Greenův, resp. Almansiho deformační tenzor jako pouhá matice  $[F]$ .

Z rovnic (5.27) a (5.28) snadno odvodíme vztahy

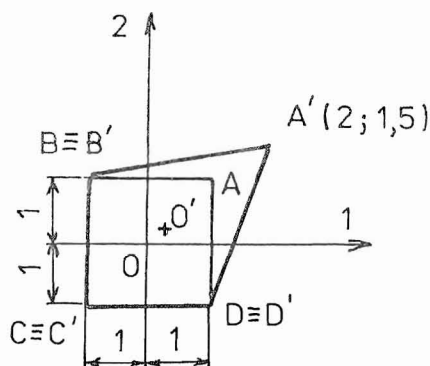
$$[\varepsilon_G] = [F]^T [\varepsilon_A] [F] \quad [\varepsilon_A] = [F]^{-T} [\varepsilon_G] [F]^{-1} \quad (5.32)$$

Jejich rozepsáním do tenzorových složek dostaneme

$$\varepsilon_{Gij} = f_{ki} f_{lj} \varepsilon_{Akl} \quad \varepsilon_{Aij} = f_{ki}^{-1} f_{lj}^{-1} \varepsilon_{Gkl} \quad (5.33)$$

Deformační gradienty tedy umožňují přepočítat složky Almansiho deformačního tenzoru na složky Greenova deformačního tenzoru a naopak.

Uvedeme příklad. Zvolíme deformaci čtverce ABCD, znázorněného na obr. 18, který přejde ve čtyřúhelník A'B'C'D'. Snadno se můžeme přesvědčit,



Obr. 18

že tomu vyhovují vztahy

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4} (1 + 5a_1 + a_2 + a_1 a_2) \\ x_2 &= \frac{1}{8} (1 + a_1 + 9a_2 + a_1 a_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

respektive

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} (11 - x_1 + 2x_2) + \frac{1}{2} \mathcal{D} \\ a_2 &= -\frac{1}{4} (11 + x_1 - 2x_2) + \frac{1}{4} \mathcal{D} \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

kde

$$\mathcal{D} = \sqrt{x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 14x_1 + 36x_2 + 113} \quad (5.36)$$

Rovnice (5.35) jsou reciproké k rovnicím (5.34). Z rovnic (5.34) vyplývá, že např. počátek  $O(0; 0)$  se posune do bodu  $O'(0,25; 0,125)$ .

Matice deformačních gradientů má prvky podle (5.23). \*) Vyjde

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(5+a_2) & \frac{1}{4}(1+a_1) \\ \frac{1}{8}(1+a_2) & \frac{1}{8}(9+a_1) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Podobně podle (5.26) dostaneme

$$[F]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\varphi) & -(1+\varphi) \\ -\frac{1}{4}(1-\varphi) & \frac{1}{2}(1-\varphi) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

kde

$$\varphi = \frac{x_1 - 2x_2 + 7}{\mathcal{D}} \quad \psi = \frac{x_1 - 2x_2 - 9}{\mathcal{D}} \quad (5.39)$$

Hodnota  $\mathcal{D}$  je dána vztahem (5.36).

---

\*) Jde o rovinnou úlohu, takže  $i, j = 1, 2$ .



Jak jsme již uvedli, materiálový bod, který byl v nezatiženém stavu v počátku souřadnic, má souřadnice

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \text{resp.} \quad x_1 = 0,25, \quad x_2 = 0,125$$

Pro tento bod dostaneme

$$[F] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad [F]^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

S použitím (5.27), popř. (5.28), vypočteme Greenův, resp. Almansiho tenzor. Jde o týž materiálový bod, který má před deformací polohu 0, po deformaci polohu 0'. Vyjde

$$[\varepsilon_G] \doteq \begin{bmatrix} 0,289 & 0,227 \\ 0,227 & 0,164 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$[\varepsilon_A] \doteq \begin{bmatrix} 0,161 & 0,116 \\ 0,116 & 0,070 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Je zřejmé, že se oba tenzory značně liší. Proto není lhostejné, který z obou tenzorů vstoupí do konstitutivního zákona.

#### Poznámka

Protože součet tenzorů stejného řádu je opět tenzorem téhož řádu, můžeme s použitím (5.27), resp. (5.28), definovat také tenzory

$$[C] = [F]^T [F] \quad [C] = [F][F]^T \quad (5.43)$$

Tenzor  $[C]$ , resp.  $[C]$ , se nazývá pravý, resp. levý, Cauchyho-Greenův deformační tenzor.

## 6. TENZORY NAPJATOSTI

Vedeme-li v zatíženém tělese myšlený řez, jehož elementární plošku  $dA$  znázorníme vektorem  $\vec{dA}$  kolmým k této plošce o složkách  $dA_1$ ,  $dA_2$ ,  $dA_3$  takovým, že euklidovská norma

$$\|dA\| = \sqrt{dA_1^2 + dA_2^2 + dA_3^2} = dA \quad (6.1)$$

se rovná jeho délce, bude se v této plošce přenášet z jedné strany tělesa na druhou vnitřní síla  $d\vec{T} = \vec{t} dA$ , kde  $\vec{t}$  představuje část vektoru síly  $\vec{T}$  připadající na jednotku plochy, tedy jakousi "hustotu" silového toku. Vektor  $\vec{t}$  nazveme napěťový vektor (vektor napětí); má rozměr  $N \cdot m^{-2}$  (Pa).

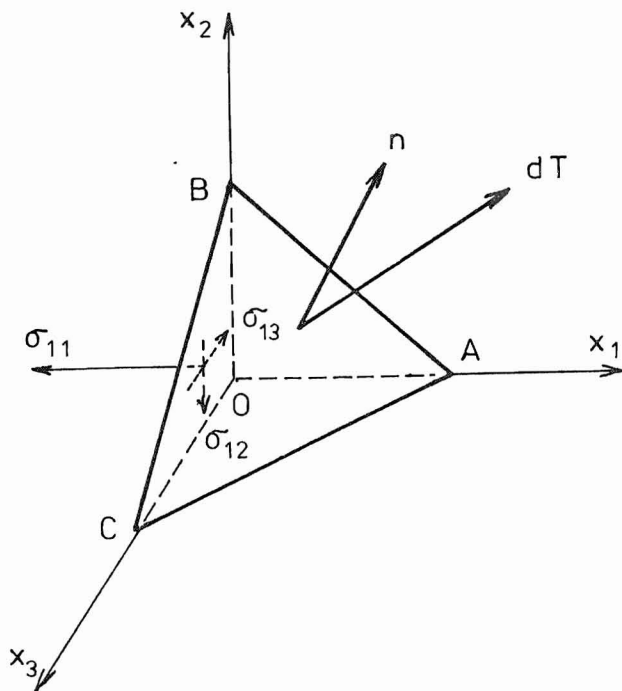
Zavedeme-li ve směru vektoru  $d\vec{A}$  vektor jednotkové normály  $\vec{n}$ , bude

$$d\vec{A} = \vec{n} dA \quad (6.2)$$

a tedy také

$$dA_i = n_i dA \quad (6.3.)$$

Vytkněme plošku  $dA$  v okolí počátku kartézských souřadnic tak, že bude se souřadnicovými rovinami tvořit čtyřstěn OABC (obr. 19). Vzniklý čtyřstěn představuje hmotný bod, neboť jeho rozměry jsou nekonečně malé.



Obr. 19

Stěna OBC má velikost  $dA_1$ , neboť je to průmět plochy  $dA$  do roviny  $x_2, x_3$ . Působí v ní tahové napětí  $\sigma_{11}$  a smyková napětí  $\sigma_{12}, \sigma_{13}$ . První index znamená směr normály k plošce OBC, druhý index směr smykového napětí. Obdobná napětí budou působit i v ploškách OCA, popř. OAB; na obr. 19 už nejsou nakreslena, aby se obrázek nestal nepřehledným.

Napišeme rovnice rovnováhy. Pro síly ve směru osy  $x_1$  např. platí, že

$$\begin{aligned} dT_1 = t_1 dA &= \sigma_{11} dA_1 + \sigma_{21} dA_2 + \sigma_{31} dA_3 = \\ &= (\sigma_{11} m_1 + \sigma_{21} m_2 + \sigma_{31} m_3) dA \end{aligned} \quad (6.4)$$

Odtud dostaneme

$$t_1 = \sigma_{11} m_1 + \sigma_{21} m_2 + \sigma_{31} m_3 = \sigma_{j1} m_j \quad (6.5)$$

Cyklickou záměnou indexů dostaneme další dvě rovnice. Všechny je můžeme shrnout do tenzorového zápisu

$$dT_i = \sigma_{ji} dA_j \quad t_i = \sigma_{ji} m_j \quad (6.6)$$

Složky  $\sigma_{ij}$  tvoří Cauchyho napěťový tenzor (tenzor napjatosti). Je symetrický, neboť podle pravidla o sdružených smykových napětích  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Mohli bychom jej nazvat též Eulerův napěťový tenzor, neboť odpovídá Eulerovu popisu pohybu kontinua (za nezávisle proměnné se berou souřadnice bodu přetvořeného tělesa a čas).

Cauchyho tenzor napjatosti se neshoduje s tzv. inženýrským tenzorem napjatosti, nejde-li o zanedbatelně malé posuvy (o lineární teorii pružnosti). Rozdíl je v tom, že ploška  $dA$ , v níž napěťový vektor působí, není totožná s ploškou  $dA_0$  nedeformovaného tělesa. V lineární teorii pružnosti se rozdíl mezi  $dA$  a  $dA_0$  poněkud paradoxně zanedbává; bere se síla  $\vec{dT}$ , která existuje pouze v deformovaném tělese, a vztahuje se k plošce  $dA_0$  nedeformovaného tělesa.

Protože Cauchyho napěťový tenzor se počítá tak, že se síla  $\vec{dT}$  vztahuje k plošce  $dA$  deformovaného tělesa, mají jeho složky skutečný fyzikální význam, nejsou to tedy žádná "konvenční" napětí. Přidružíme je proto k Almansiho deformačnímu tenzoru, neboť ten také - jak je patrné z rovnice (5.19) - vztahuje absolutní deformaci k rozměrům deformovaného tělesa.

Chceme-li obdobně přidružit nějaký napěťový tenzor ke Greenovu deformačnímu tenzoru podle (5.17), máme možnost - ne však jedinou, jak ještě uvidíme - vztáhnout sílu  $\vec{dT}$  k elementu  $dA_0$  nedeformovaného tělesa a psát

$$dT_i = \tau_{ji} dA_{0j} \quad t_i = \tau_{ji} \frac{dA_0}{dA} m_{0j} \quad (6.7)$$

místo (6.6). Složky  $\tau_{ij}$  tvoří Lagrangeův (nebo též l. Piolův) napěťový tenzor. Je nesymetrický, neboť pravidlo sdružených smykových napětí, a tedy symetrie tenzoru napjatosti, se odvozuje z momentové podmínky rovnováhy psané pro elementární kvádr o stranách  $dx_1, dx_2, dx_3$ , vyňatý z deformovaného tělesa. Proto je  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , avšak  $\tau_{ij} \neq \tau_{ji}$ .

Pokusíme se najít souvislost mezi oběma těmito tenzory. Označme úsečky  $OA = dx_1, OB = dx_2, OC = dx_3$ . Pak budeme moci objem čtyřstěnu na obr. 19 vyjádřit zápisem

$$\begin{aligned} dV &= \frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{9} (dA_1 dx_1 + dA_2 dx_2 + dA_3 dx_3) = \\ &= \frac{1}{9} dA_j dx_j \end{aligned} \quad (6.8)$$

Je totiž  $dA_1 = \frac{1}{2} dx_2 dx_3$  atd.

Pro nedeformovaný čtyřstěn budeme moci obdobně napsat, že

$$dV_0 = \frac{1}{9} dA_{0i} da_i = \frac{1}{9} dA_{0i} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \quad (6.9)$$

Z axiomu o zachování hmotnosti plyne, že

$$\rho dV = \rho_0 dV_0 \quad (6.10)$$

Dosazením (6.8) a (6.9) do (6.10) dostaneme

$$\frac{\rho}{\rho_0} dA_j dx_j = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dA_{0i} dx_j \quad (6.11)$$

Protože  $dx_j$  můžeme volit libovolně, např.  $dx_1 \neq 0, dx_2 = dx_3 = 0$  atd., musí být

$$\frac{\rho}{\rho_0} dA_j = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dA_{0i} \quad (6.12)$$

Vypočteme-li odtud  $dA_j$ , dosadíme do první z rovnic (6.6) a pak porovnáme s první z rovnic (6.7), dostaneme vztah <sup>\*</sup>)

$$dT_i = G_{ki} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} dA_{0j} = \tau_{ji} dA_{0j} \quad (6.13)$$

a odtud už

$$\tau_{ji} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} G_{ki} \quad (6.14)$$

Nesymetrie tenzoru  $\tau_{ji}$  je odtud zřejmá na první pohled. Vymizí jedině při infinitezimálních posuvech, kdy  $x_i \cong a_i$ , takže  $\partial a_j / \partial x_k = \delta_{jk}$ . V tom případě bude  $\tau_{ji} = (\rho_0 / \rho) G_{ji} \cong G_{ji}$ . Hustota se totiž změní neznametelně, takže  $\rho_0 \cong \rho$ . Pak oba tenzory splývají.

Nesymetrie Lagrangeova napětového tenzoru o složkách  $\tau_{ij}$  představuje určitou komplikaci. Lze ji odstranit, nebudeme-li k plošce  $dA_0$  nepřetvořeného tělesa vztahovat sílu  $d\vec{T}$ , ale nějakou jinou, z předchozí síly vhodně přepočtenou sílu  $d\vec{T}_0$ . Nabízí se transformace

$$dT_{0j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dT_i \quad (6.15)$$

která je analogická rovnici

$$da_j = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \quad (6.16)$$

Vztah (6.16) platí mezi elementy  $da_j$ ,  $dx_i$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Zdá se být zcela přirozené, že sílu o složkách  $dT_i$  přepočítáváme na sílu o složkách  $dT_{0i}$ , stejně jako se přepočítávají diferenciály  $dx_i$  z přetvořeného tělesa na  $da_i \cong dx_{0i}$  v nepřetvořeném tělese.

Mezi silou  $d\vec{T}_0$  podle definice (6.15) a ploškou  $dA_0$  znázorněnou normálovým vektorem  $d\vec{A}_0$  o složkách  $dA_{0i}$  budeme mít vztah

$$dT_{0j} = S_{ij} dA_{0i} \quad (6.17)$$

kterým nahradíme první z rovnic (6.7). Přitom  $S_{ij}$  jsou složky Kirchhoffova (2. Piolova) napětového tenzoru.

\* ) Označení němých (slepých) indexů, podle nichž se sčítá, můžeme - nebo dokonce při dosazování často musíme - změnit, avšak vždy tak, aby se v žádném členu nevyskytl žádný index více než dvakrát.

Dosaďme do rovnice (6.17) z rovnic (6.15) a (6.13). Dostaneme

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i} \sigma_{ki} - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_p}{\partial x_k} dA_{0p} = S_{pj} dA_{0p} \quad (6.18)$$

Protože je  $dA_{0p}$  libovolné, musí být

$$S_{pj} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_p}{\partial x_k} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \sigma_{ki} \quad (6.19)$$

Zaměníme-li indexy  $p, j$  i  $k, i$ , shledáme, že důsledkem symetrie Cauchyho tenzoru je i symetrie Kirchhoffova tenzoru. Proto je Kirchhoffův (2. Piolův) napěťový tenzor vhodný k praktickým výpočtům s aplikací Lagrangeova popisu, často vhodnější než Lagrangeův nesymetrický tenzor.

Vztah (6.19) zapíšeme maticově. Použijeme přitom matici deformačních gradientů. Bude

$$[S] = \frac{\rho_0}{\rho} [F]^{-1} [G] [F]^{-T} \quad (6.20)$$

Podobně můžeme napsat i vztah (6.14)

$$[\tau] = \frac{\rho_0}{\rho} [F]^{-1} [G] \quad (6.21)$$

Je tedy

$$[S] = [\tau] [F]^{-T} \quad (6.22)$$

Pro názornost zvolme jednorozměrnou napjatost  $\sigma_{11} \neq 0$ , ostatní složky Cauchyho napěťového tenzoru nulové. Bude-li materiál nestlačitelný a izotropický, bude  $\rho_0 = \rho$  a dále

$$f_{11} = \frac{l}{l_0}, \quad f_{22} = f_{33} = \sqrt{\frac{l_0}{l}}, \quad f_{ij} = 0 \quad \text{pro } i \neq j \quad (6.23)$$

Z rovnic (6.21) a (6.22) pak dostaneme, že

$$\tau_{11} = \sigma_{11} \frac{l_0}{l}, \quad S_{11} = \sigma_{11} \frac{l_0^2}{l^2} \quad (6.24)$$

Ostatní složky těchto tenzorů budou nulové.

Uvedeme ještě jeden příklad. V nějakém rovinném pravoúhlém elementu o rozměrech  $da_1 \times da_2$  vyvoláme velmi malou deformací napjatost  $[\bar{G}] \cong [S]$ . Oba tenzory jsou skoro stejné, neboť předpokládáme, že posuvy jsou velmi malé, takže  $x_i \cong a_i$  ( $i = 1, 2$ ). Matice deformačních gradientů je pak velmi přibližně jednotková. Nyní otočíme souřadnicové osy  $x_1, x_2$  do polohy  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  o úhel  $\varphi$ . Bude platit transformační rovnice

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Ve zkráceném zápisu

$$\{\bar{x}\} = [A]\{x\} \quad (6.26)$$

Mimoходом, pro matici  $[A]$  bychom také mohli použít zápis

$$[A] = \frac{\partial \{\bar{x}\}}{\partial \{x\}^T} = \begin{bmatrix} \partial \bar{x}_1 / \partial x_1 & \partial \bar{x}_1 / \partial x_2 \\ \partial \bar{x}_2 / \partial x_1 & \partial \bar{x}_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Je to ortogonální matice, takže  $[A]^T = [A]^{-1}$ .

V otočeném elementu o rozměrech  $d\bar{x}_1 \times d\bar{x}_2$  bude mít Cauchyho napěťový tenzor podle (4.14) složky

$$\bar{G}_{ij} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_p} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_q} G_{pq} \quad (6.28)$$

čili

$$[\bar{G}] = [A][G][A]^T \quad (6.29)$$

Najdeme k tomuto tenzoru přidružený Kirchhoffův (2. Piolův) tenzor o složkách  $\bar{S}_{ij}$ . Podle (6.19) bude

$$\bar{S}_{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a_i}{\partial \bar{x}_p} \frac{\partial a_j}{\partial \bar{x}_q} \bar{G}_{pq} \quad (6.30)$$

Avšak  $\varrho = \varrho_0$ , neboť jsme element pouze otočili, takže se jeho objem nezměnil. Dále  $a_i \cong x_i$ , takže

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_p} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_q} \bar{G}_{pq} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_p} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_q} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \bar{x}_q}{\partial x_t} G_{\lambda t} = \\ &= \delta_{i\lambda} \delta_{jt} G_{\lambda t} = G_{ij} \cong S_{ij} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Kirchhoffův (2. Piolův) tenzor napjatosti se tedy rotací elementu nezmění. Je to přirozené, neboť síla  $d\vec{T}$  i ploška příslušné stěny elementu, daná vektorem  $d\vec{A}$ , se přepočítávají k původnímu nedeformovanému tvaru elementu otočením o úhel  $\varphi$  zpět.

Poznamenejme ještě, že maticový tvar rovnice (6.30) je dán výrazem (6.20). Je-li  $x_i \cong a_i$ , je také  $[F] \cong [A]$ , takže dosadíme-li (6.29) do (6.20), dostaneme  $[\bar{S}] = [G]$  shodně s rovnicí (6.31). Matice deformačních gradientů se v tomto případě velmi přibližně shoduje s maticí rotace.

Vztah (6.31) však pozorného čtenáře přece jen překvapí. Jak to, že  $\bar{S}_{ij} = S_{ij}$ ? Což pro Kirchhoffův tenzor neplatí transformační vztahy (4.14)? Ovšemže platí, ale je třeba připomenout, že oba tyto tenzory (s pruhem i bez pruhu nad znakem  $S$ ) se vztahují k stále stejné původní geometrické konfiguraci, tedy k elementu o rozměrech  $da_1 \times da_2$ , kterým jsme neotáčeli!

## 7. POHYB KONTINUA A JEHO POPIS

Uvedli jsme dva způsoby popisu pohybu kontinua. Podle Lagrangeova způsobu zavádíme materiálové souřadnice  $a_i$  bodu a určujeme jeho prostorové souřadnice  $x_i$  pro každý čas  $t$ . Pohyb kontinua je pak popsán rovnicí

$$x_i = x_i(a_j, t) \quad (7.1)$$

Podle Eulerova způsobu hledáme naopak výchozí polohu  $a_i$  bodu, který v čase  $t$  zaujímá polohu danou nezávislými prostorovými souřadnicemi  $x_i$



$$a_i = a_i(x_j, t) \quad (7.2)$$

Je-li těleso v čase  $t = 0$  nedeformované, je  $a_i = x_i (t = 0)$ ,  
 $x_i = a_i + u_i (t > 0)$ .

Lagrangeovým souřadnicím  $a_i$  se říká materiálové, neboť jsou spjaty s materiálem, kdežto Eulerovy souřadnice  $x_i$  jsou prostorové.

Rychlost bodu o souřadnicích  $x_i$  vypočteme parciální derivací (7.1) podle času. Použijeme-li totiž Lagrangeův popis, nezáviselí materiálové souřadnice  $a_i$  na čase. Bude

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (7.3)$$

Přírůstek posuvu  $du_i$  dostaneme, vynásobíme-li tuto rychlost přírůstkem času  $dt$ . Tento přírůstek bude nekonečně malý, takže přetvárná rychlost  $v_{ij}$ , tj. rychlost změny poměrných deformací, bude dána časovou derivací Cauchyho deformačního tenzoru (5.12) s tím rozdílem, že se bude vztahovat k aktuální (okamžité) geometrické konfiguraci; bude tedy

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (7.4)$$

Použijeme-li Eulerův popis, budou nezávislé souřadnice  $x_i, t$ . Např. teplota  $\theta$  může být dána vztahem

$$\theta = \theta(x_i, t) \quad (7.5)$$

Rovnice (7.5) udává celé teplotní pole a jeho časový průběh. Teplota se mění s časem i s místem. Změnu teploty určitého materiálového bodu  $d\theta$  dostaneme diferencováním (7.5)

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \theta}{\partial t} dt \quad (7.6)$$

První člen na pravé straně značí změnu způsobenou tím, že se daný bod posunul do sousední polohy o  $dx_i = v_i dt$  (konvektivní změna), druhý člen je dán tím, že se za čas  $dt$  teplotní pole v daném místě změnilo (lokální změna). Rychlost teplotní změny dané materiálové částice (rychlost substanciální změny) označíme  $D\theta/dt$ . S použitím (7.6) vyjde

$$\frac{D\Theta}{Dt} = v_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (7.7)$$

Rozdíl mezi materiálovou derivací  $D\Theta/Dt$  a obyčejnou derivací

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (7.6a)$$

je, že v prvním případě klademe  $dx_i = v_i dt$ , kdežto v druhém případě by mohlo být  $dx_i$  v rovnici (7.6) nezávislé na pohybu částice, a tedy libovolné. Předpis pro materiálovou derivaci tedy je

$$\frac{D}{Dt} = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.8)$$

Bude-li rychlostní pole dáno vztahem

$$v_j = v_j(x_i, t) \quad (7.9)$$

bude zrychlení materiálového bodu o souřadnicích  $x_i$  v čase  $t$  dáno vztahem

$$b_i = \frac{Dv_i}{Dt} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (7.10)$$

První člen na pravé straně představuje konvektivní, druhý člen lokální část zrychlení. Celková změna rychlosti je substanciální.

Vraťme se nyní k Eulerovu popisu (7.2). Materiálové souřadnice jsou pevně svázané s materiálovou částicí, takže jejich materiálová derivace je nulová. Bude tedy

$$\frac{Da_i}{Dt} = v_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_i}{\partial t} = 0 \quad (7.11)$$

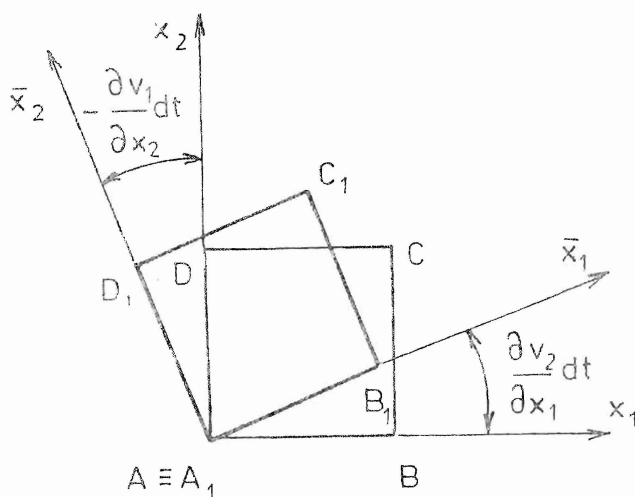
Odtud bychom mohli vypočítat rychlost  $v_j$  onoho bodu v okamžiku  $t$ , který v nedeformovaném tělese měl souřadnice  $a_i$ .

Další z pojmů, který nás zajímá, je napjatost. Budou-li Cauchyho napětí  $\sigma_{ij}$  závislá na  $x_k$ ,  $t$ , bude substanciální změna tohoto tenzoru dána materiálovou derivací

$$\frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = v_k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \quad (7.12)$$

Je to změna, která souvisí s posunutím elementu (konvektivní část) a s přírůstkem času (lokální část). Materiálová derivace však nerespektuje změnu vzniklou rotací elementu. Nehodí se proto do konstitutivních rovnic, závisí-li materiálová odezva též na rychlosti změny tenzoru napjatosti. Musíme proto najít ještě jinou formu časové derivace, která bude zahrnovat i změnu způsobenou rotací materiálové částice.

Sledujme deformaci rovinného elementu ABCD mezi okamžiky  $t$  a  $t + dt$  (obr. 20). Bod A nechť je pevně spjat s počátkem souřadnic



Obr. 20

$x_1, x_2$ , takže je v něm  $v_1 = v_2 = 0$ . Rychlost bodu B má pak složky  $(\partial v_1 / \partial x_1) dx_1$ ,  $(\partial v_2 / \partial x_1) dx_1$ . Proto úhel, o který se otočí strana AB za čas  $dt$ , je  $(\partial v_2 / \partial x_1) dt$ . Obdobně zjistíme, že úhel, o který se ve stejném smyslu a za stejnou dobu otočí strana AD, je  $(-\partial v_1 / \partial x_2) dt$ . Úhel BAD se proto zmenší o zkos

$$\gamma_{12} = 2 \varepsilon_{12} = \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dt = 2 v_{12} dt \quad (7.13)$$

což je rozdíl obou zmíněných úhlů. Indexy 1, 2 můžeme v rovnici (7.13) zaměnit, aniž se hodnota výrazů na obou stranách změní. To znamená, že tenzory  $\varepsilon_{ij}$ , popř.  $v_{ij}$ , jsou symetrické.

Průměrná úhlová rychlost, s jakou se element ABCD otáčí kolem bodu A, je

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = -\omega_{21} \quad (7.14)$$

Je to aritmetický průměr úhlových rychlostí, jakými se otáčejí strany AB, popř. AD. Složky  $\omega_{ij}$  tvoří antisymetrický spinový tenzor. \*)

Otáčí-li se element, aniž se deformuje, je  $v_{12} = 0$  a  $\partial v_2 / \partial x_1 = -\partial v_1 / \partial x_2$ . Úsečka AC má v souřadnicích  $x_1, x_2$ , pevných v prostoru, složky  $dx_1, dx_2$ , kdežto v otočené soustavě  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  bude mít složky  $d\bar{x}_1, d\bar{x}_2$ . Zřejmě

$$\left. \begin{aligned} d\bar{x}_1 &= dx_1 + \omega_{12} dt dx_2 \\ d\bar{x}_2 &= dx_2 - \omega_{12} dt dx_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

nebo též

$$\left. \begin{aligned} d\bar{x}_1 &= (\delta_{11} - \omega_{21} dt) dx_2 \\ d\bar{x}_2 &= (\delta_{12} - \omega_{12} dt) dx_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Cbě tyto rovnice můžeme shrnout do jediné, užijeme-li tenzorový zápis. Bude-li  $i, j = 1, 2$ , bude též

$$d\bar{x}_i = (\delta_{ji} - \omega_{ji} dt) dx_j \quad (7.17)$$

Rovnici (7.17) jsme sice odvodili jen v rovině, avšak platí i v prostoru, s tím rozdílem, že  $i, j = 1, 2, 3$ . Výraz v oblé závorce (7.17) představuje tenzor  $C_{ij}$  druhého řádu

$$C_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij} dt \quad (7.18)$$

který zprostředkuje hledanou transformaci při rotaci elementu ABCD jako tuhého celku podle (7.17)

$$d\bar{x}_i = C_{ji} dx_j \quad (7.19)$$

\*) Zřejmě  $\omega_{ij} + v_{ij} = \partial v_j / \partial x_i$ , takže spinový tenzor je antisymetrickou částí gradientu  $\partial v_j / \partial x_i$  pole rychlostí  $v_j(x_i, t)$ , zatímco tenzor rychlosti přetvoření je jeho symetrickou částí.

V materiálovém bodě A se napjatost  $\sigma_{ij}$  změní za čas  $dt$  o substan-  
ciální změnu  $(D\sigma_{ij}/Dt) dt$ , takže budeme mít napjatost

$$\sigma_{ij} + \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} dt$$

Tento tenzor se však musí transformovat k potočeným osám souřadnic  $\bar{x}_1$ ,  
 $\bar{x}_2$ ,  $\bar{x}_3$ . Porovnáme-li (7.19) se vzorcí (4.14), dospějeme k závěru, že  
tenzor napjatosti, spjatý s materiálovým bodem A, který měl v čase  $t$   
složky  $\sigma_{ij}$ , bude mít v čase  $t + dt$  složky

$$\sigma_{ij} + \overset{\vee}{\sigma}_{ij} dt = c_{pi} c_{qj} (\sigma_{pq} + \frac{D\sigma_{pq}}{Dt} dt) \quad (7.20)$$

Dosadíme-li na pravou stranu (7.20) z rovnice (7.18) a pak ji roznásobí-  
me a zanedbáme nekonečně malé veličiny řádu vyššího než prvního, dostane-  
me porovnáním obou stran (7.20) tzv. Jaumannovu derivaci (označili jsme  
ji trojúhelníčkem)

$$\overset{\vee}{\sigma}_{ij} = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} - \sigma_{pj} \omega_{pi} - \sigma_{iq} \omega_{qj} \quad (7.21)$$

Vzhledem k symetrii tenzoru  $\sigma_{ij}$  můžeme poslední výraz upravit tak, aby  
vynikla symetrie Jaumannovy derivace napěťového tenzoru. Bude

$$\overset{\vee}{\sigma}_{ij} = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} - \sigma_{jp} \omega_{pi} - \sigma_{ip} \omega_{pj} \quad (7.22)$$

Zaměníme-li indexy  $i, j$ , hodnota výrazu na pravé straně (7.22) se  
nezmění.

## 8. POHYBOVÉ ROVNICE A DEFORMAČNÍ VÝKON

V teorii pružnosti se odvozují diferenciální pohybové rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j - \rho b_j = 0 \quad (8.1)$$

kde  $f_j$  je objemová síla (síla připadající na jednotku objemu),  $\rho$  značí hustotu a  $b_j$  zrychlení ( $j = 1, 2, 3$ ). Tato rovnice musí platit i při velkých deformacích, pouze symboly v ní dostanou přesnější obsah. Element vyjmeme z deformovaného tělesa, takže  $x_i$  bude prostorová souřadnice,  $\sigma_{ij}$  Cauchyho napěťový tenzor. Rovněž objemová síla  $f_j$  a hustota  $\rho$  se budou vztahovat na deformované kontinuum.

Použijeme-li Lagrangeův popis (7.1), nahradíme Cauchyho tenzor Lagrangeovým tenzorem. Vztah (6.14) znásobíme na obou stranách deformačním gradientem  $\partial x_p / \partial a_j$  a poměrem  $\rho / \rho_0$ . Dostaneme

$$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_p}{\partial a_j} \tau_{jk} = \frac{\partial x_p}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \sigma_{ki} = \delta_{pk} \sigma_{ki} = \sigma_{pi} \quad (8.2)$$

Indexy  $p, i$  zaměníme za  $i, j$  a němý index  $j$  změním na  $k$ . Pak budeme moci (8.2) přímo dosadit do (8.1). Vyjde

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial x_i} + f_j - \rho b_j &= \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial a_k} + f_j - \rho b_j = 0 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Podle (6.10) je  $\rho_0 / \rho = dV / dV_0$ . Označíme-li

$$f_{0j} = f_j \frac{\rho_0}{\rho} = f_j \frac{dV}{dV_0} \quad (8.4)$$

objemovou sílu vztaženou k jednotce objemu v nedeformovaném tělese, získá pohybová rovnice (8.2) jednoduchý tvar

$$\frac{\partial \tau_{kj}}{\partial a_k} + f_{0j} - \rho_0 b_j = 0 \quad (8.5)$$

Chceme-li přejít ke Kirchhoffovu (2. Piolovu) tenzoru, musíme podle rovnice (6.22) dosadit

$$\tau_{kj} = S_{kp} \frac{\partial x_j}{\partial a_p} \quad (8.6)$$

Budeme mít

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left( S_{kp} \frac{\partial x_j}{\partial a_p} \right) + f_{0j} - \rho_0 b_j = 0 \quad (8.7)$$

Soustředíme se nyní na výpočet deformační práce, t.j. práce, kterou vykonávají za pohybu kontinua napětí. V lineární teorii pružnosti se dokazuje, že pro diferenciál hustoty deformační práce platí vzorec

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} = & \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \\ & + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx} \end{aligned} \quad (8.8)$$

V tenzorovém značení budeme mít jednoduše  $\star$ )

$$\mathcal{L} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (8.9)$$

Integrací (8.9) za předpokladu platnosti Hookeova zákona vyjde

$$d\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr} [\sigma][\varepsilon] = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \quad (8.10)$$

---

$\star$ ) Pamatujme, že  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  a že pro  $i \neq j$  je  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ , resp.  $x, y, z$ ).

Na pravé straně (8.10) jsme uvedli dvě formy maticového zápisu. Jedna vychází ze čtvercových matic (4.25) a (4.26), přičemž symbol "tr" znamená stopu matice (trace), tj. součet prvků na hlavní diagonále. Druhá forma platí pro vektory (4.30) a (4.32). V ideálně pružném tělese se hustota  $\rho$  deformační práce mění v hustotu  $\rho_0$  potenciální deformační energie (4.29). To však nelze obecně tvrdit. U těles s nelineární deformační charakteristikou neplatí dokonce ani integrál (8.10), platí pouze diferenciální tvar (8.9). Abychom nepracovali s diferenciály, ale s derivacemi, podělíme obě strany rovnice (8.9) diferenciálem času  $dt$ . Na levé straně dostaneme hustotu deformačního výkonu. Na pravé straně budeme moci rychlost změny poměrných deformací nahradit přetvárnou rychlostí (7.4). Dostaneme

$$\rho = \frac{dP}{dV} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sigma_{ij} v_{ij} \quad (8.11)$$

Vztah (8.11) bude platit i pro velké deformace, bude-li  $\sigma_{ij}$  značit Cauchyho napěťový tenzor.

Jak bude možno vyjádřit hustotu deformačního výkonu v materiálových souřadnicích? Tenzor  $\sigma_{ij}$  nahradíme tenzorem  $S_{ij}$  pomocí převodního vztahu (6.19). Bude nejprve

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_j}{\partial a_q} S_{pq} \quad (8.12)$$

a pak s použitím (6.10) vypočteme

$$\rho \frac{dP}{dV_0} = \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_j}{\partial a_q} S_{pq} v_{ij} \quad (8.13)$$

Víme však, že podle (7.4) je

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (8.14)$$

a podle (5.29)

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{Gpq} &\equiv \frac{D\epsilon_{Gpq}}{Dt} \equiv \frac{\partial \epsilon_{Gpq}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_k}{\partial a_p} \frac{\partial x_k}{\partial a_q} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial a_p} \frac{\partial x_k}{\partial a_q} + \frac{\partial x_k}{\partial a_p} \frac{\partial v_k}{\partial a_q} \right) \end{aligned} \quad (8.15)$$



Snadno se dosazením z rovnic (8.14) a (8.15) přesvědčíme, že

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_j}{\partial a_q} S_{pq} v_{ij} = S_{pq} \dot{\epsilon}_{Gpq} \quad (8.16)$$

Platí tedy jednoduchý vzorec

$$P_0 = \frac{dP}{dV_0} = S_{pq} \dot{\epsilon}_{Gpq} \quad (8.17)$$

Výkon  $P$ , který konají za pohybu kontinua s velkými deformacemi napětí, je tedy

$$P = \int_{V_0} S_{ij} \dot{\epsilon}_{Gij} dV_0 = \int_V G_{ij} v_{ij} dV \quad (8.18)$$

Předposlední výraz platí pro Lagrangeův, poslední pro Eulerův popis pohybu kontinua.

Podle zákona o zachování energie se rychlost změny součtu kinetické a vnitřní energie rovná součtu výkonu vnějších sil a výkonů daných pří-  
vodem tepla, chemickými změnami, popř. rychlostmi změn elektromagnetické  
a povrchové energie. Výkon vnějších povrchových sil lze převést užitím  
Gaussovy věty na objemový integrál (8.18).

Vraťme se ještě k rovnicím (8.11) a (8.17). Je-li hustota deformač-  
ního výkonu v Lagrangeově popisu dána výrazem (8.17), měl by v Eulerově  
popisu platit analogický výraz

$$P = G_{ij} \overset{\circ}{\epsilon}_{Aij} \quad (8.19)$$

a nikoli (8.11). Vztah (8.11) je však správný, fyzikálně odůvodněný,  
takže se mu musí přizpůsobit i derivace Almansiho deformačního tenzoru.  
Označili jsme ji kroužkem a budeme jí říkat konvektivní derivace /6/.  
Musí být definována tak, aby platilo

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{Aij} = v_{ij} \quad (8.20)$$

Ukážeme, že předpis

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{Aij} = \frac{D \epsilon_{Aij}}{Dt} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \epsilon_{Akj} + \epsilon_{Aik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad (8.21)$$

tento požadavek splňuje. Aplikací operátoru (7.8) na vzorec (5.30) dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{D \epsilon_{Aij}}{Dt} &= -\frac{1}{2} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} + \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \frac{\partial a_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_i} \right] \quad (8.22)
 \end{aligned}$$

Je totiž např.

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_p} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_p} \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{\partial a_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial v_k}{\partial x_p} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \quad (8.23)
 \end{aligned}$$

Se zřetelem k (7.11) odpadne předposlední člen, takže

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_p} \right) = - \frac{\partial v_k}{\partial x_p} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \quad (8.24)$$

Tento vztah jsme použili k úpravě materiálové derivace v rovnici (8.22). Výraz (8.22) dosadíme do (8.21) a po úpravě s použitím (8.14) dostaneme (8.20).

Pro jednorozměrnou deformaci bude podle (5.19) a (5.20) platit, že

$$\frac{D \epsilon_{A11}}{Dt} = \frac{l_0^2}{l^2} \frac{\dot{l}}{l}, \quad \epsilon_{A11} = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l^2}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\dot{l}}{l} \quad (8.25)$$

takže podle (8.21) vyjde

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{Ah} &= \frac{l_0^2 \dot{l}}{l^3} + \frac{\dot{l}}{l} \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l^2} + \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l^2} \frac{\dot{l}}{l} = \\ &= \frac{1}{l^3} (l_0^2 \dot{l} + l^2 \dot{l} - l_0^2 \dot{l}) = \frac{\dot{l}}{l} = v_{11} \end{aligned} \quad (8.26)$$

shodně s tvrzením (8.20).

## 9. GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ ÚLOHY

Pokud jsou poměrné deformace i rotace malé, splývají Almansiho i Greenův deformační tenzor s Cauchyho infinitezimálním deformačním tenzorem a také oba Piolovy napěťové tenzory přejdou v Cauchyho tenzor "skutečných" napětí. Zabývejme se nyní případem, kdy poměrné deformace budou velmi malé, ale rotace velké. Takový případ je charakteristický pro geometricky nelineární úlohy.

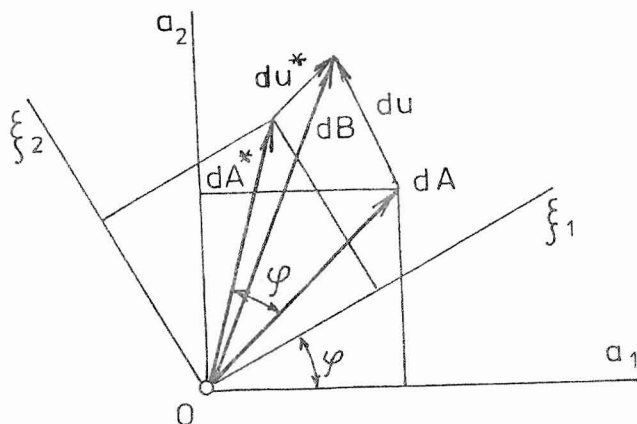
Představme si malou část kontinua v pevných materiálových souřadnicích  $a_i$ , která je podrobena jako tuhý celek nějaké rotaci, nikoli nutně malé, popsané ortogonální maticí  $[R]$ . Matice  $[R]$  popisuje, jak se změní v soustavě souřadnic  $a_1, a_2, a_3$  složky nějakého vektoru, bude-li tento vektor rotovat. Určitý nekonečně malý vektor  $\vec{dA}$  o složkách  $da_i$  přejde do polohy  $\vec{dA}^*$  o složkách  $da_i^*$ , přičemž

$$\{da^*\} = [R]\{da\} \quad (9.1)$$

Zvolili jsme nekonečně malý vektor, protože chceme vyšetřovat poměrné deformace. Délky původního i otočeného vektoru jsou stejné, tj.  $|\vec{dA}| = |\vec{dA}^*|$ . Zvolme nyní souřadnicový systém  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , který bude rotovat zároveň s hmotným elementem. Otočený vektor  $\vec{dA}^*$  v něm bude mít složky  $d\xi_i^* = da_i$ . Nyní podrobíme uvažovanou část kontinua malé deformaci, takže vektor  $\vec{dA}^*$  přejde do vektoru  $\vec{dB}$ . Pišme

$$\vec{dB} = \vec{dA} + \vec{du} = \vec{dA}^* + \vec{du}^* \quad (9.2)$$

Posuv  $\vec{du}^*$  bude relativně velmi malý, ale posuv  $\vec{du}$  relativně velký. Pro rovinný případ je tato deformace znázorněna na obr. 21.



Obr. 21

Rozdíl čtverců délek obou vektorů je

$$|\vec{dB}|^2 - |\vec{dA}^*|^2 = 2\varepsilon_{Gij}^* d\xi_i^* d\xi_j^* \quad (9.3)$$

resp.

$$|\vec{dB}|^2 - |\vec{dA}|^2 = 2\varepsilon_{Gij} da_i da_j \quad (9.4)$$

Oba výrazy se však musí sobě rovnat, neboť pouhým otočením se délka úsečky  $\vec{dA}$  nezměnila. Kromě toho lze tenzor  $\varepsilon_{Gij}^*$  nahradit infinitezimálním tenzorem  $\varepsilon_{ij}^*$ , protože parciální derivace  $|\partial u_i^* / \partial \xi_j^*|$  jsou velmi malé ( $|\partial u_i / \partial a_j|$  však nikoli!). Bude tedy

$$\varepsilon_{Gij} da_i da_j = \varepsilon_{ij}^* d\xi_i^* d\xi_j^* \quad (9.5)$$

Avšak  $d\xi_i^* = da_i$  pro  $i = 1, 2, 3$ , takže nakonec

$$\varepsilon_{Gij} = \varepsilon_{ij}^* \quad (9.6)$$

To znamená, že při velkých rotacích a malých poměrných deformacích se Greenův deformační tenzor rovná infinitezimálnímu deformačnímu tenzoru vztahenému k souřadnicovým osám, jež rotují spolu s elementem kontinua.

Toto tvrzení platí i tehdy, posuneme-li element jako tuhý celek, neboť posuv  $c_i = a_i - \bar{a}_i$  je konstantní a po diferenciaci se neuplatní ( $dc_i = 0$ , tedy  $da_i = d\bar{a}_i$ ).

Nyní zopakujeme úvahu, kterou jsme už v poněkud jiném pořádku uvedli na konci 6. kapitoly. Matice  $[F]$  deformačních gradientů  $\partial x_i / \partial a_j \cong \partial a_i^* / \partial a_j$  se podle rovnice (9.1) shoduje s dříve definovanou maticí rotace  $[R]$ . Kirchhoffův tenzor  $[S]$  lze proto s použitím (6.20) vypočítat z Cauchyho tenzoru  $[G]$ , vztaženého k nepotočeným osám, z rovnice

$$[S] = [R]^{-1} [G] [R]^{-T} = [R]^T [G] [R] \quad (9.7)$$

Připomeňme, že při rotaci hmotného elementu mají  $a_i^*$  význam prostorových souřadnic (nejsou svázány s materiálovým bodem).

Vztáhneme-li Cauchyho napěťový tenzor k otočeným osám souřadnic, bude mít složky  $[G^*]$ . Podle (6.29) platí mezi těmito složkami transformace \*)

$$[G] = [R] [G^*] [R]^T \quad (9.8)$$

Dosadíme-li (9.8) do (9.7), dostaneme

$$[S] = [R]^T [R] [G^*] [R]^T [R] = [G^*] \quad (9.9)$$

Platí tedy věta: jsou-li poměrné deformace malé (a rotace velké), rovnají se složky Kirchhoffova (2. Piolova) napěťového tenzoru složkám Cauchyho tenzoru vztaženým k souřadnicovým osám, jež rotují zároveň s materiálovým elementem.

Mezi Cauchyho napěťovým tenzorem a infinitezimálním deformačním tenzorem platí velmi přibližně Hookeův zákon

$$G_{ij}^* = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (9.10)$$

neboť jde o velmi malé poměrné deformace. Podle rovnic (9.6) a (9.9) můžeme usoudit, že stejný tenzor  $E_{ijkl}$  elastických modulů vstoupí i do vztahu mezi 2. Piolovým a Greenovým tenzorem

$$S_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (9.11)$$

\*) Platí, že  $G_{ij}^* = \frac{\partial a_i}{\partial f_p} \frac{\partial a_j}{\partial f_q} G_{pq}^* = \frac{\partial a_i^*}{\partial a_p} \frac{\partial a_j^*}{\partial a_q} G_{pq}^*$ ,

takže do (6.29) dosadíme  $[A] = [F] = [R]$ .

To však platí jen pro případ malých poměrných deformací, přičemž posuvy a rotace mohou být velké.

Jde-li o deformační variantu metody konečných prvků, jsou posuvy  $u_i(a_j, t)$  aproximovány vztahem

$$u_i(a_j, t) \cong \sum_{k=1}^m A_{ik}(a_j) q_k(t) \quad (9.12)$$

v němž  $A_{ik}$  jsou báze funkce a  $q_k$  zobecněné posuvy,  $m$  je počet stupňů volnosti matematického modelu. Pro Greenův deformační tenzor (5.11) potom dostaneme výraz

$$\begin{aligned} \varepsilon_{G_{ij}} \cong & \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_{jk}}{\partial a_i} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial a_j} \right) q_k + \\ & + \sum_{p=1}^3 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial A_{pk}}{\partial a_i} \frac{\partial A_{pl}}{\partial a_j} q_k q_l \end{aligned} \quad (9.13)$$

Ve smyslu výkladu ve 4. kapitole budeme složky  $\varepsilon_{G_{ij}}$  považovat za souřadnice bodu v šestirozměrném prostoru a sestavíme je do vektoru

$$\{\varepsilon_G\} = ([B_L] + \frac{1}{2} [B_{NL}]) \{q\} \quad (9.14)$$

Matice  $[B_L]$  odpovídá lineární části pravé strany (9.13), kdežto matice  $[B_{NL}]$  nelineární části. Protože výraz  $[B_{NL}] \{q\}$  je kvadratickou formou zobecněných posuvů  $q_k$  [srovnej s posledním členem rovnice (9.13)], dostaneme diferencováním (9.14) vztah

$$\{d\varepsilon_G\} = ([B_L] + [B_{NL}]) \{dq\} = [B] \{dq\} \quad (9.15)$$

Budeme nyní předpokládat, že zatížení je statické, tj. že vektor  $\{q(t)\}$  se mění velmi pomalu nebo se nemění vůbec. Vektor zobecněných vnějších sil označíme  $\{f\}$ . Z podmínky, že virtuální práce těchto sil se musí rovnat virtuálnímu přírůstku deformační energie, dostaneme \*)

$$\{\delta q\}^T \{f\} = \int_{V_0} \{\delta \varepsilon_G\}^T \{S\} dV_0 = \{\delta q\}^T \int_{V_0} [B]^T \{s\} dV_0 \quad (9.16)$$

\*) Podle předpokladu jde o ideálně pružné kontinuum s velmi malými poměrnými deformacemi. Setrvačné síly se při statickém zatížení neuplatňují.

Protože variace  $\{\delta q\}$  je libovolná, musí platit tato podmínka rovnováhy mezi vnějšími a vnitřními silami

$$\{f\} = \int_{V_0} [B]^T \{s\} dV_0 \quad (9.17)$$

V přírůstkovém tvaru bude

$$\{df\} = \int_{V_0} [B]^T \{ds\} dV_0 + \int_{V_0} [dB]^T \{s\} dV_0 \quad (9.18)$$

Nyní dosadíme podle (9.15) a (9.11)

$$[B] = [B_L] + [B_{NL}] \quad (9.19)$$

$$\{s\} = [E] \{\epsilon_G\} \quad (9.20)$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{V_0} [B]^T \{ds\} dV_0 &= \int_{V_0} ([B_L]^T + [B_{NL}]^T) [E] ([B_L] + [B_{NL}]) dV_0 \{dq\} = \\ &= ([K_L] + [K_D]) \{dq\} \end{aligned} \quad (9.21)$$

Ze srovnání je patrné, že

$$[K_L] = \int_{V_0} [B_L]^T [E] [B_L] dV_0 \quad (9.22)$$

značí matici tuhosti známou z řešení lineárních úloh a

$$\begin{aligned} [K_D] &= \int_{V_0} ([B_{NL}]^T [E] [B_L] + [B_L]^T [E] [B_{NL}] + \\ &+ [B_{NL}]^T [E] [B_{NL}]) dV_0 \end{aligned} \quad (9.23)$$

představuje matici pro velké deformace.

Zvláštní pozornost zasluhuje druhý člen v rovnici (9.18). Rozepíšeme-li integrand ve složkách, bude

$$\sum_{j=1}^6 dB_{ji} S_j = \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^n \frac{\partial B_{ji}}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^6 \frac{\partial B_{ji}}{\partial q_k} S_j \right) dq_k \quad (9.24)$$

Vidíme, že

$$\int_{V_0} [dB]^T \{S\} dV_0 = [K_S] \{dq\} \quad (9.25)$$

kde  $[K_S]$  značí matici počáteční napjatosti (initial stress stiffness matrix), která závisí na aktuální velikosti napětí a má prvky

$$K_{S_{ij}} = \int_{V_0} \sum_{k=1}^6 S_k \frac{\partial B_{k\ell}}{\partial q_j} dV_0 \quad (9.26)$$

Přitom  $B_{k\ell} = B_{Lk\ell} + B_{NLk\ell}$  podle (9.19). Celkem budeme mít tuto základní rovnici pro geometricky nelineární úlohy (v přírůstkovém tvaru)

$$([K_L] + [K_D] + [K_S]) \{dq\} = \{df\} \quad (9.27)$$

Součet matic v oblé závorce představuje tečnou matici tuhosti

$$[K_t] = [K_L] + [K_D] + [K_S] = \frac{\partial \{f\}}{\partial \{q\}^T} \quad (9.28)$$

Při vzpěru je na hranici elastické stability  $[K_D] = [0]$  a matice  $[K_S]$  obsahuje pouze membránová napětí, ztotožní se tedy s geometrickou maticí  $[K_G]$ . Při pokritických deformacích se však budou matice  $[K_S]$  a  $[K_G]$  lišit. Ponechání této geometrické matice ve výpočtu velkých pružných deformací (místo matice  $[K_S]$ ) vede proto k nepřesnostem a zhoršuje konvergenci.

Chceme-li se vyhnout sestavování matice  $[K_D]$  pro velké deformace a přitom zachovat jednoduchost Lagrangeovy formulace, při níž se vychází z počáteční, a tedy předem známé geometrické konfigurace, můžeme řešit úlohu po krocích a využít ekvivalence vztahů (9.10) a (9.11). Jestliže jsme vyřešili geometrickou konfiguraci  $\{q(t)\}$  v čase  $t$ , budeme se snažit v dalším kroku určit konfiguraci

$$\{q(t + \Delta t)\} = \{q(t)\} + \{\Delta q(t)\} \quad (9.29)$$

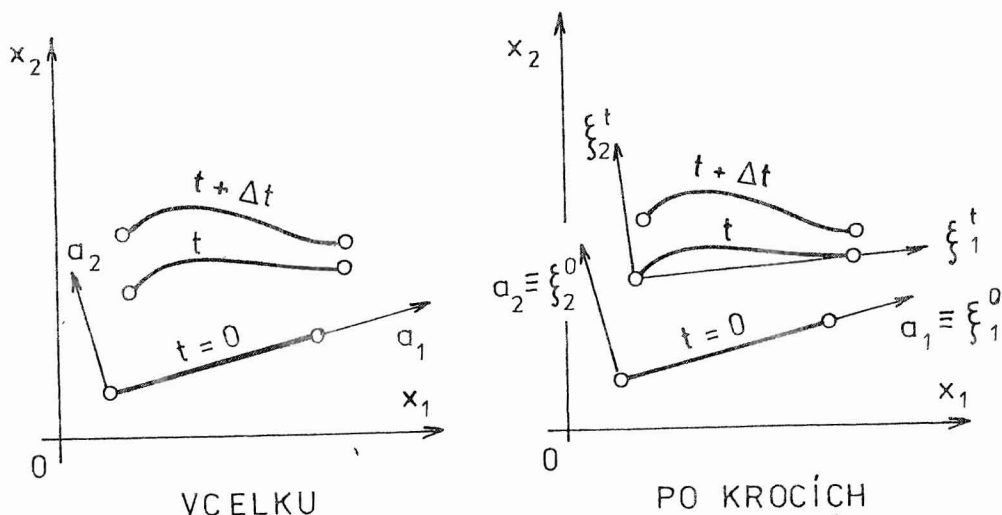
Za tím účelem zavedeme lokální souřadnice  $\xi_i$ , které budou rotovat spolu s elementem. Posuvy  $u_i^*$  budou proto vzhledem k této souřadnicové soustavě velmi malé. To znamená, že v lokálních souřadnicích odpadne matice pro velké deformace  $[K_D]$ . Nepůjde-li o okolí meze elastické stability, bude možno vynechat i matici  $[K_S]$ , takže k určení přírůstku postačí lineární matice tuhosti  $[K_L]$ . Bude



$$\{\Delta q^*\} = [K_L]^{-1} \{\Delta f\} \quad (9.30)$$

Na obr. 22 je naznačen postup hledání geometricky nelineární deformace konečného elementu elastického prutu v rovině s globálními sou-

### LAGRANGEOVA METODA



Obr. 22

řadnicemi  $x_1$ ,  $x_2$ . V levé části obrázku je úloha řešena v Lagrangeově formulaci vcelku. Každá geometrická konfigurace se vztahuje vždy k týmž souřadnicím  $a_1$ ,  $a_2$ . Tečná matice tuhosti závisí na posuvech a je dána rovnicí (9.28). Přírůstky zobecněných souřadnic se počítají z lineari-zované soustavy (9.27) ve tvaru

$$\{\Delta q\} \cong [K_t]^{-1} \{\Delta f\} \quad (9.31)$$

Aplikujeme-li Lagrangeovu metodu po krocích, zvolíme v každém kroku novou soustavu souřadnic  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  a přírůstky posuvů počítáme vzhledem k této aktuální lokální soustavě podle vztahu (9.30). Matice  $[K_L]$  se přitom nemění. Přírůstky  $\{\Delta q^*\}$  pak transformujeme do souřadnic  $a_1$ ,  $a_2$ , resp.  $x_1$ ,  $x_2$ ; bude

$$\{\Delta q\} = [T] \{\Delta q^*\} \quad (9.32)$$

kde  $[T]$  je příslušná transformační matice.

Když jsme takto vypočítali - kterýmkoli z obou způsobů - přírůstky posuvů  $\{\Delta q\}$ , dostaneme z rovnice (9.29) posuvy  $\{q(t+\Delta t)\}$ . Tyto hodnoty jsou však jen přibližné, neboť nepočítáme s diferenciály, ale s konečnými přírůstky. Nebude proto obecně přesně splněna podmínka (9.17); zbude reziduální vektor nerovnovážných sil

$$\{z\} = \{f\} - \int_{V_0} [B]^T \{s\} dV_0 \quad (9.33)$$

S jeho pomocí bychom mohli - pokud by to bylo žádoucí - vypočítat opravu

$$\{\Delta q^1\} = [K_t]^{-1} \{z\} \quad (9.34)$$

a přičíst k vektoru  $\{q\}$ .

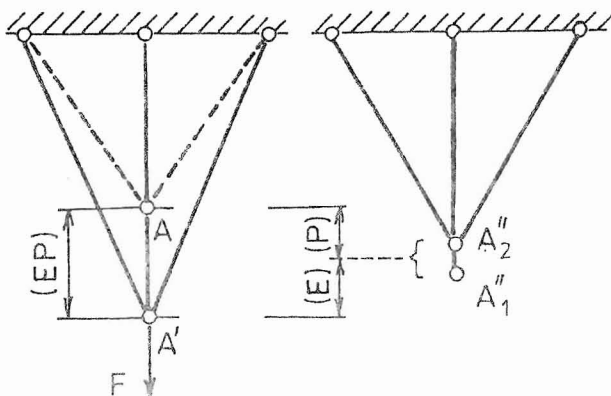
Vycházíme-li z Lagrangeovy metody po krocích, můžeme získat tečnou matici  $[K_t]$  nepřímo transformací matice  $[K_L]$  např. v čase  $t$  k souřadnicovým osám  $\xi_1^t, \xi_2^t$ . Výpočet opravy podle (9.34) můžeme podle potřeby opakovat, až je norma vektoru oprav dostatečně malá.

Naše úvahy se až dosud vztahovaly k jednomu konečnému prvku (obr. 22). Předpokládáme, že způsob sestavení globálních matic tuhosti je uživateli metody konečných prvků znám. Globální matici  $[K_L]$ , platnou pro celou soustavu konečných prvků, získáme načtením lokálních matic, které vypočteme k lokálním souřadnicím a pak transformujeme do globální soustavy souřadnic. Při Lagrangeově metodě po krocích jsou lokální souřadnice jiné nejen pro každý prvek, ale i pro každý krok. Globální matice  $[K_L]$  pak zastupuje tečnou matici  $[K_t]$ , platnou pro celou konstrukci.

## 10. VELKÉ ELASTICKOPLASTICKÉ DEFORMACE

V teorii plasticity se zpravidla řeší úlohy za předpokladu, že deformace jsou velmi malé nebo že jde o ustálené plastické tečení. Např. se řeší plastické deformace v okolí vrubu, přičemž mimo toto okolí jsou deformace elastické. Jako příklad stacionárního procesu plastického tečení materiálu uvedeme válcování plechů. Poznamenejme, že i teorie mezních stavů, která vychází z představy tuhoplastického materiálu, nepředpokládá až do mezního stavu žádnou deformaci; pak se náhle vyvinou plastické klouby a konstrukce se zhroutí. Tyto poněkud násilné předpoklady způsobují, že se předpověď podle teorie mezních stavů často liší od experimentálně zjištěných mezních zatížení, zvláště u desek.

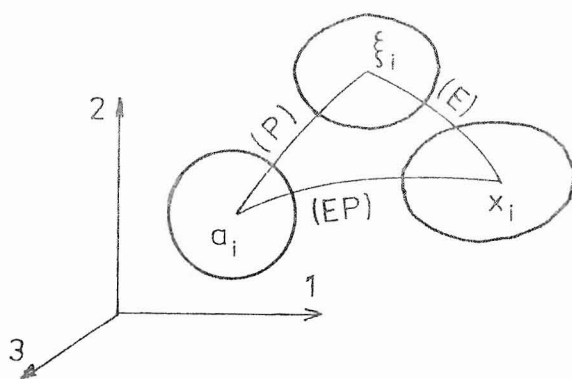
Zabývejme se nyní případem velkých elastickoplastických deformací. Na obr. 23 je soustava tří prutů, která je za působení síly  $F$  podro-



Obr. 23

bená velké elastické deformaci (EP). Po odlehčení se dolní kloub o něco zvedne, přičemž v konstrukci zůstane zbytkové vlastní pnutí. Chceme-li oddělit elastické deformace (E) od plastických (P), musíme dolní kloub demontovat a vlastní pnutí zrušit. Ponecháme-li oba boční pruty spojené, posune se jejich kloub o něco nazpět, kdežto uvolněné oko prostředního prutu o něco poklesne. To znamená, že plastické deformace, které v prutech zůstaly, nejsou kompatibilní, pruty nelze bez určité násilné deformace znovu spojit. Předpokládáme totiž, že oka a čep jsou bez vůle.

Něco podobného se děje i v kontinuu, jak je naznačeno na obr. 24.



Obr. 24

Body v nezatíženém kontinuu mají souřadnice  $a_i$ . Po elastoplastické deformaci přejdou do polohy  $x_i$ . Nyní si představíme, že jsme v kontinuu zrušili nekonečně mnoha myšlenými řezy všechna napětí. Bod o souřadnicích  $x_i$  tím přejde do bodu o souřadnicích  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Elastickoplastická deformace je popsána spojitým zobrazením

$$x_i = x_i(a_i, t) \quad (10.1)$$

Zobrazení

$$\xi_i = \xi_i(a_i, t) \quad (10.2)$$

bude proti tomu obecně nespojitě. Kdyby bylo spojitě, platilo by pravidlo o derivacích složených funkcí

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial a_j} \quad (10.3)$$

čili podle (5.23) a (5.24)

$$[F] = [F_e][F_p] \quad (10.4)$$

Index "e" znamená elastickou, index "p" plastickou část matice deformačních gradientů. Je-li zobrazení (10.2) nespojitě, představují matice  $[F_e]$ ,  $[F_p]$  deformační gradienty lokálního lineárního zobrazení nekonečně malých elementů, v nichž uvažujeme pouze homogenní stav napjatosti a deformace, na nichž závisí konstitutivní rovnice. Tyto stavy pak nejsou ovlivněny nespojitostí zobrazení (10.2), takže i tehdy můžeme vycházet z multiplikativního pravidla (10.4). Podrobnosti najdeme v lit. /7/.

Podrobíme-li (10.4) časové derivaci, bude

$$[\dot{F}] = [\dot{F}_e][F_p] + [F_e][\dot{F}_p] \quad (10.5)$$

Jsou-li deformace velmi malé, jsou matice deformačních gradientů velmi přibližně jednotkové. V tom případě bude

$$[\dot{F}] = [\dot{F}_e] + [\dot{F}_p] \quad (10.6)$$

Odtud pak dostaneme známé aditivní pravidlo

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (10.7)$$

pro superpozici malých elastických a plastických deformací. K odvození rovnice (10.7) z rovnice (10.6) jsme využili poznatek, že pro infinitezimální deformační tenzor platí podle (5.3), (5.12), (5.23) a (5.25) vztah

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} ([F] + [F]^T) - [I] \quad (10.8)$$

## 11. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV NELINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

Metoda konečných prvků vede ve statice k soustavě algebraických rovnic pro zobecněné posuvy  $q_i$  v maticovém tvaru

$$Kq = f \quad (11.1)$$

Zde  $f$  je vektor zobecněných sil a  $K$  matice tuhosti. Pro jednoduchost zápisu již nebudeme - pokud se nerozhodneme jinak - v dalším textu vyznačovat matice a vektory (sloupcové matice) ani závorkami, ani jinak.

Není-li matice  $K$  konstantní, není ani soustava (11.1) lineární. Mohli bychom to zdůraznit zápisem

$$K(q)q = f \quad (11.2)$$

Sečná matice tuhosti  $K(q)$  někdy závisí i na deformační rychlosti, tj. na  $\dot{q}$ . To však nebudeme nyní uvažovat, omezíme se jen na algebraické rovnice. Nelineární soustavu (11.2) lze obecně řešit jenom iteracemi.

### 11.1. Metoda postupných aproximací (přímých iterací)

Rovnici (11.2) upravíme do tvaru

$$q = K^{-1}(q)f \quad (11.3)$$

a zahájíme iterační proces předpisem \*)

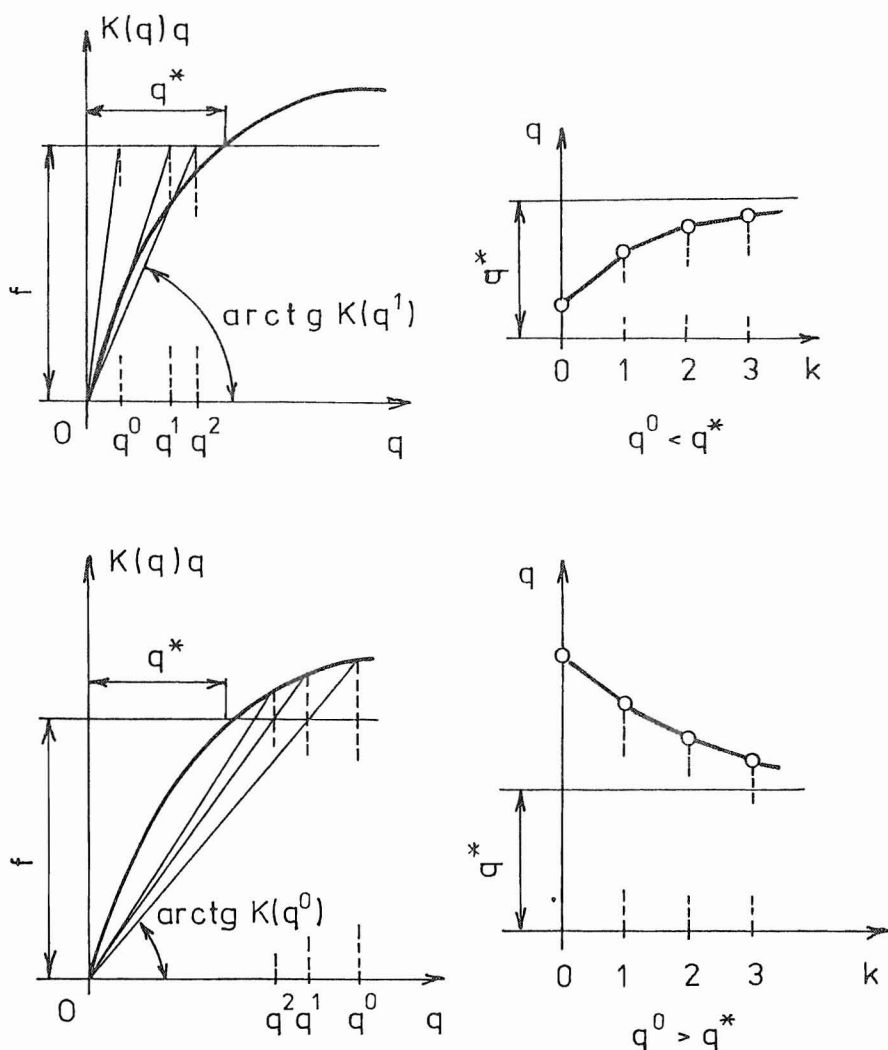
$$q^{k+1} = K^{-1}(q^k)f \quad (11.4)$$

---

\*) Pořadí iterace vyznačujeme vpravo horním indexem.

Je-li tento proces konvergentní, pak pro  $k \rightarrow \infty$  dostaneme v limitě správné řešení  $q^*$ . Prakticky se spokojíme s přibližným řešením, tj. zastavíme iterační proces v okamžiku, kdy změna vektoru  $q$  mezi dvěma posledními iteracemi je v normě dostatečně malá. Nevýhodou tohoto postupu je, že konvergence procesu často závisí na vhodném odhadu nulté aproximace  $q^0$  a že máme v každém iteračním kroku jinou matici tuhosti.

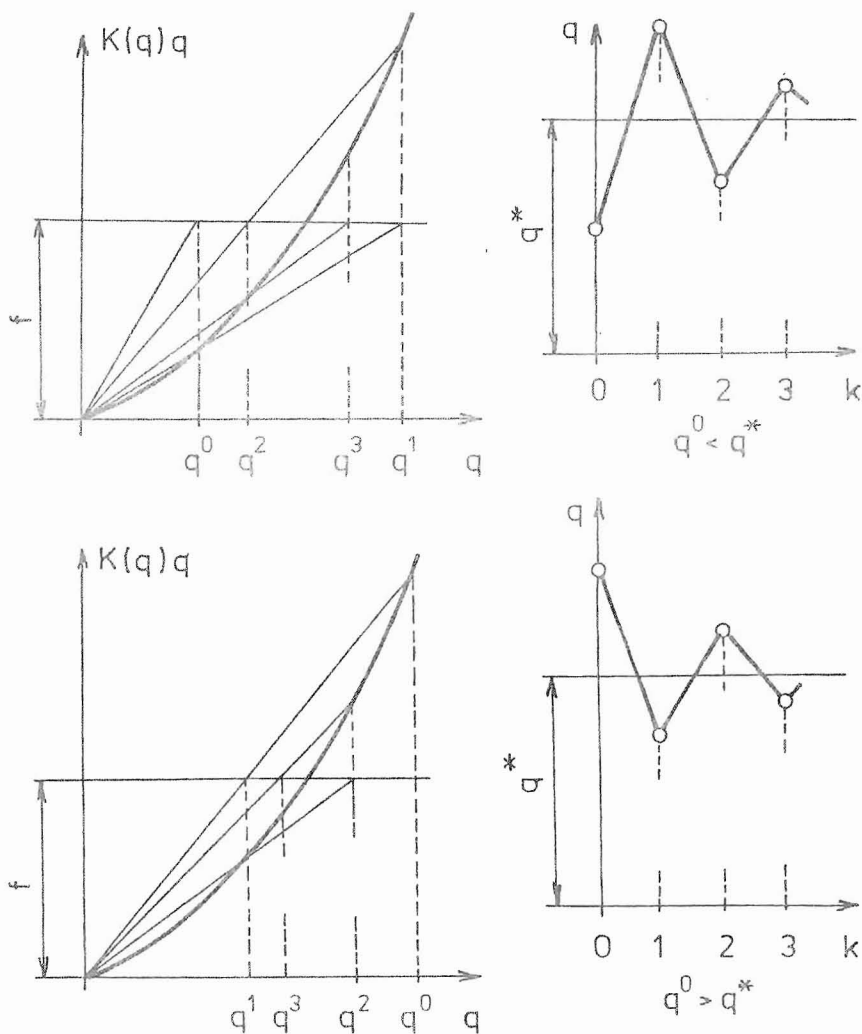
Postup řešení znázorníme na obr. 25 pro případ, že jde jen o jednu



Obr. 25

proměnnou, takže matice a vektory v rovnici (11.4) budou typu  $(1, 1)$ , tj. skaláry. Obr. 25 nahoře platí pro případ, že funkce (11.2) je konvexní a odhad  $q^0$  je menší než správné řešení  $q^*$ . V dolní části obrázku je

znázorněn týž případ, ale odhad  $q^0$  je větší než  $q^*$ . Na obr. 26



Obr. 26

je pak znázorněn týž postup pro konkávní funkci (11.2). Rozdíl je v tom, že na obr. 25 konvergují hodnoty  $q^k$  monotónně, kdežto na obr. 26 oscilují kolem správné hodnoty, konvergují k ní však rovněž. Co platí pro jednu proměnnou, nemusí být pravda pro mnoho proměnných. U soustav s mnoha stupni volnosti se stává, že místo očekávaných oscilací kolem správného řešení ztratí proces stabilitu a začne divergovat. Tato numerická nestabilita bývá způsobena vazbou mezi jednotlivými stupni volnosti (pásovitostí matice tuhosti). Metoda je velmi jednoduchá, ale její konvergenci často nelze předem zaručit ani předvídat.

## 11.2. Newtonova-Raphsonova metoda

Liší-li se řešení  $q$  během iterací od správného řešení  $q^*$  rovnice (11.2), nemůže být rovnice (11.2) přesně splněna. Po dosazení přibližného řešení  $q$  do této rovnice zůstane nenulová zbytková síla

$$z = K(q)q - f \quad (11.5)$$

Tato nevyvážená síla je zřejmě funkcí  $q$ . Po  $k$ -té iteraci bude přesné řešení dáno výrazem

$$q^* = q^k + \Delta q^k \quad (11.6)$$

Přírůstek  $\Delta q^k$  však dosud neznáme. Výraz (11.6) dosadíme do (11.5) a rozvineme v Taylorovu řadu kolem  $q^k$

$$z(q^*) = z(q^k) + \left. \frac{\partial z}{\partial q^T} \right|_{q=q^k} \Delta q^k + \dots = 0 \quad (11.7)$$

Zanedbáme-li malé veličiny vyššího než prvního řádu, což můžeme, bude-li  $\|\Delta q^k\| \ll 1$ , zbude lineární soustava algebraických rovnic pro opravy  $\Delta q^k$  ve tvaru

$$J(q^k) \Delta q^k = -z(q^k) \quad (11.8)$$

Výraz

$$J(q) = \frac{\partial z}{\partial q^T} \quad (11.9)$$

představuje Jacobiho matici. Např. pro tři stupně volnosti bychom rozepsáním (11.9) dostali

$$J(q) = \begin{bmatrix} \partial z_1 / \partial q_1 & \partial z_1 / \partial q_2 & \partial z_1 / \partial q_3 \\ \partial z_2 / \partial q_1 & \partial z_2 / \partial q_2 & \partial z_2 / \partial q_3 \\ \partial z_3 / \partial q_1 & \partial z_3 / \partial q_2 & \partial z_3 / \partial q_3 \end{bmatrix} \quad (11.10)$$

Čtenář jistě pochopil, že horním indexem  $k$  vyznačujeme iteraci a nikoli snad mocninu. Typický člen Jacobiho matice  $J(q^k)$  je



$$J_{ij}^k = \left( \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)^k = k_{ij}^k + \sum_{p=1}^n \left( \frac{\partial k_{ip}}{\partial q_j} \right)^k q_p^k \quad (11.11)$$

Zde  $n$  je řád Jacobiho matice. Poslední člen v rovnici (11.11) je obecně nesymetrický v indexech  $i, j$ . Vynecháme-li jej, dostaneme místo (11.8)

$$K(q^k) \Delta q^k \cong -z(q^k) \quad (11.12)$$

a po dosazení z rovnice (11.6)

$$K(q^k)(q^* - q^k) \cong -z(q^k) = -K(q^k)q^k + f \quad (11.13)$$

Odtud dostaneme

$$K(q^k)q^* \cong f \quad (11.14)$$

Rovnice neplatí přesně, takže jejím řešením nedostaneme  $q^*$ , ale  $q^{k+1}$ , tj.  $(k+1)$ -ní iteraci. Bude tedy

$$q^{k+1} = K^{-1}(q^k)f \quad (11.15)$$

To je však rovnice (11.4). Vynecháním nepohodlného druhého členu na pravé straně (11.11) přejde Newtonova-Raphsonova metoda v metodu postupných aproximací z odst. 11.1.

Zůstaneme u metody Newtonovy-Raphsonovy. Z rovnice (11.8) vypočteme opravu

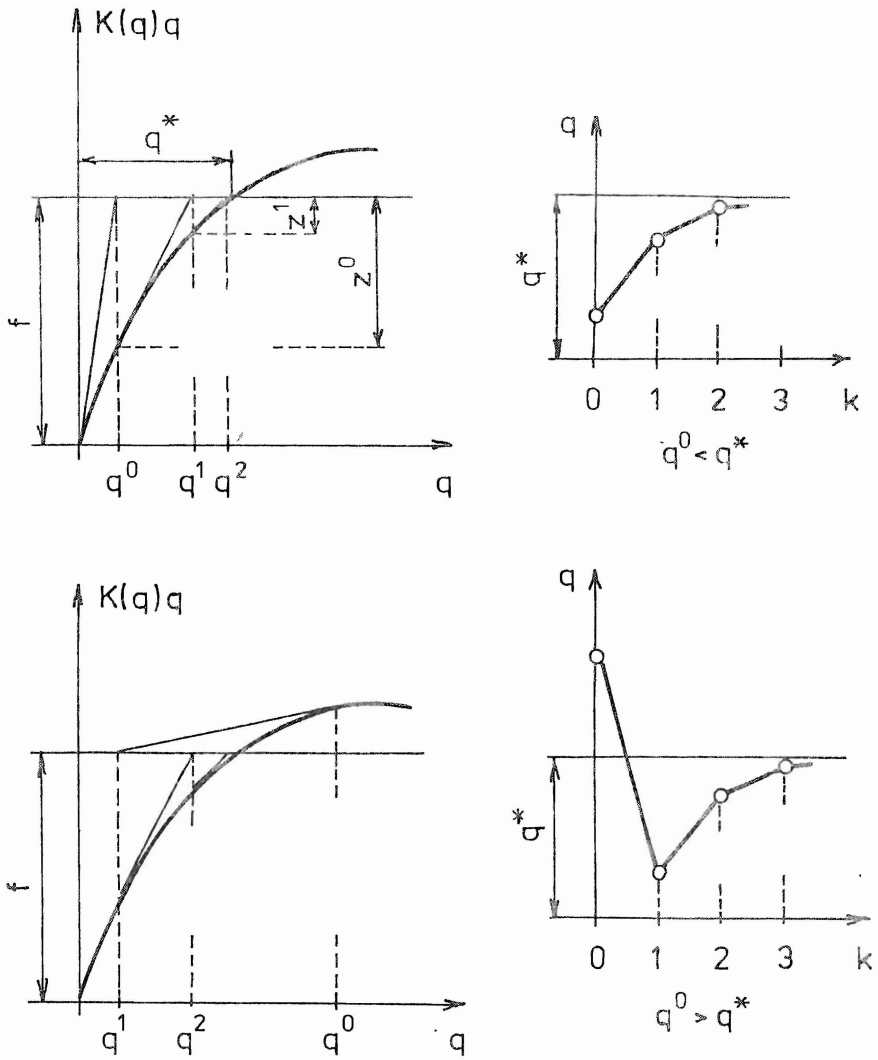
$$\Delta q^k = -J^{-1}(q^k)z(q^k) \quad (11.16)$$

a z rovnice (11.6) dostaneme novou, zpřesněnou hodnotu

$$q^{k+1} = q^k + \Delta q^k \quad (11.17)$$

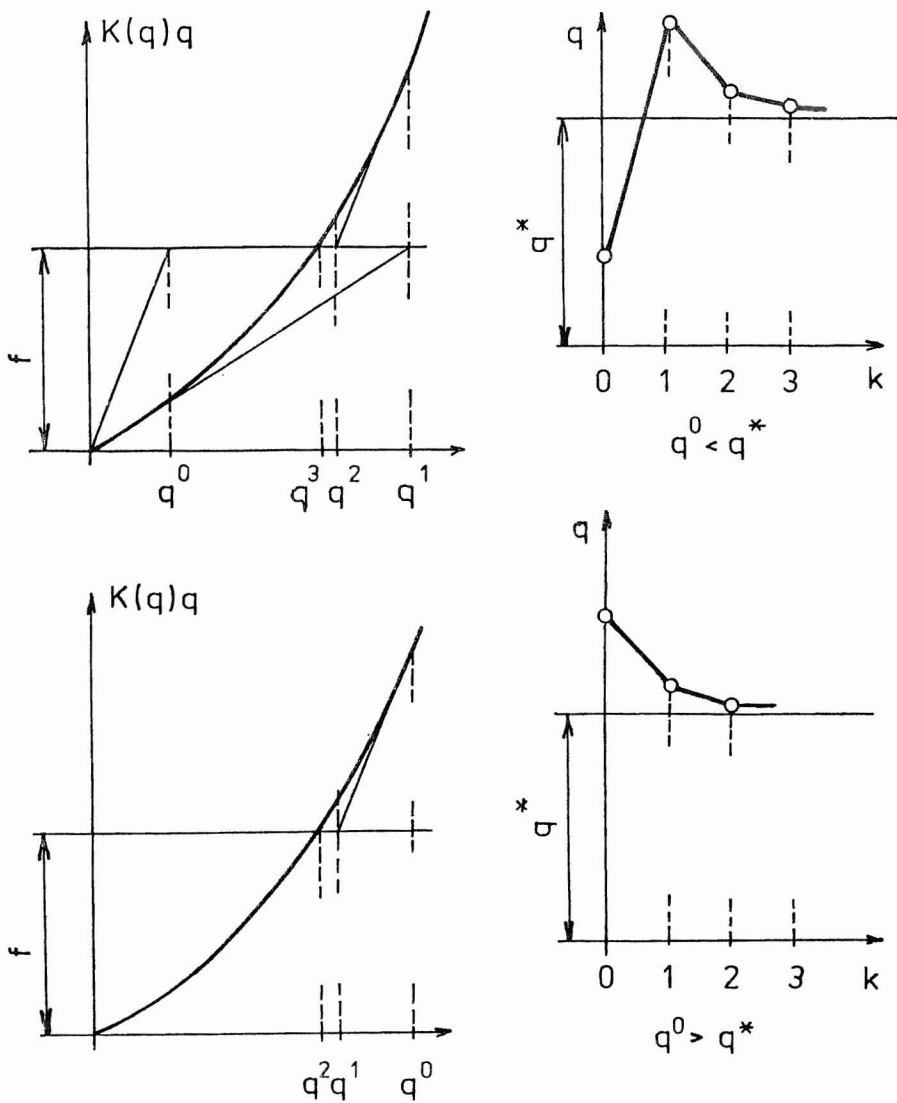
S touto hodnotou vypočítáme Jacobiho matici  $J^{k+1} = J(q^{k+1})$ , vektor zbytkových sil  $z(q^{k+1})$  a z rovnice (11.16) novou opravu  $\Delta q^{k+1}$ . Pak už bude  $q^{k+2} = q^{k+1} + \Delta q^{k+1}$  atd., až bude  $\|z\| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  je zvolené malé číslo). Tehdy by mělo být také  $\|\Delta q\|$  zanedbatelné. Je-li tomu tak, iterace končí.

Postup výpočtu demonstrujeme na obr. 27 pro jednu proměnnou. Funkce  $K(q)q$  je zde konvexní. Na obr. 28 je též postup, avšak pro konkávní



Obr. 27

funkci. Newtonova-Raphsonova metoda konverguje obvykle rychleji a je stabilnější než metoda přímých iterací z odst. 11.1.



Obr. 28

### 11.3. Metoda tečné matice

U materiálů, jejichž odezva na dané nemáhání závisí také na historii zatěžování, je třeba rovnici (11.2) řešit pro odstupňované zatížení. Tehdy bude v prvním přiblížení

$$K(q) \Delta q + \Delta K(q) q = \Delta f \quad (11.18)$$

Rozepsáním do složek dostaneme

$$\sum_{j=1}^n \left( k_{ij} + \sum_{p=1}^n \frac{\partial k_{ip}}{\partial q_j} q_p \right) \Delta q_j = \Delta f_i \quad (11.19)$$

čili

$$K_t \Delta q = \Delta f \quad (11.20)$$

Levá strana rovnice (11.19) vznikla diferencováním  $i$ -tého řádku vektoru  $\{K(q)q\}_i$  tj. výrazu  $\sum_j k_{ij} q_j$ . Matice

$$K_t = \left[ k_{ij} + \sum_{p=1}^n \frac{\partial k_{ip}}{\partial q_j} q_p \right] \quad (11.21)$$

je tečná matice tuhosti. Hranatá závorka znamená, že prvky uvnitř závorky jsou sestaveny do čtvercové matice (index  $i$  vyznačuje řádek, index  $j$  sloupec matice). Vynecháme-li v rovnici (11.21) na pravé straně druhý člen, dostaneme sečnou matici tuhosti  $K(q)$  [srovnej s rovnicí (11.2)]. Srovnáním (11.21) s (11.11) zjišťujeme, že tečná matice (11.21) je totožná s Jacobiho maticí (11.9). Iterační proces je tedy obdobný procesu popsanému v odst. 11.2.

Význam tečné, popř. sečné matice jsme již dříve objasnili v souvislosti s obr. 16. Mají-li zobecněné síly potenciál, tj. existuje-li funkce  $U$  zobecněných posuvů taková, že  $f_i = \partial U / \partial q_i$ , je tečná matice vždy symetrická; sečná matice však taková být nemusí.

#### 11.4. Metoda počáteční tuhosti

Až dosud jsme musili v každém iteračním kroku znovu řešit celou soustavu rovnic, tj. vypočítat buď sečnou nebo tečnou matici tuhosti a uskutečnit její faktorizaci, což jsou náročné početní operace. Tomu se lze vyhnout, nahradíme-li matici tuhosti v každé iteraci její počáteční hodnotou, tedy maticí vypočtenou z nulté aproximace  $q^0$ . Místo rovnice (11.16) dostaneme

$$\Delta q^k = -J^{-1}(q^0) z(q^k) \quad (11.22)$$

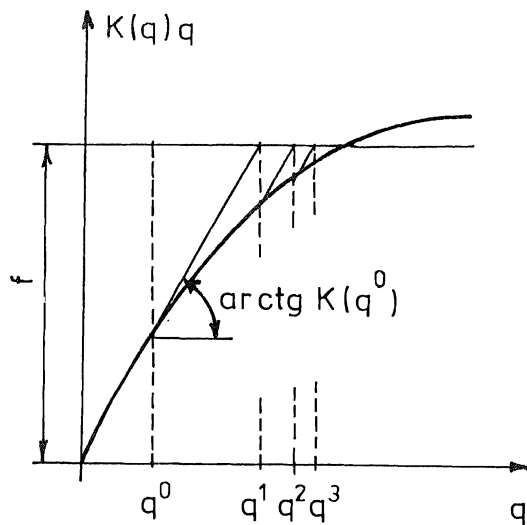
V této rovnici lze Jakobiho matici  $J$  popřípadě nahradit sečnou maticí  $K(q)$ , takže pak

$$\Delta q^k = -K^{-1}(q^0)z(q^k) \quad (11.23)$$

Rovnici (11.23) můžeme porovnat s rovnicí (11.12).

Naznačeným způsobem se ve všech iteračních krocích kromě prvního ušetří výpočet i faktorizace matic tuhosti, ale zpomalí se konvergence, takže je nutný větší počet iteračních kroků. Často je vhodné kombinovat oba postupy, tj. po určitém počtu iterací vypočítat novou matici tuhosti.

Postup výpočtu pro jednu proměnnou je zřejmý z obr. 29.



Obr. 29

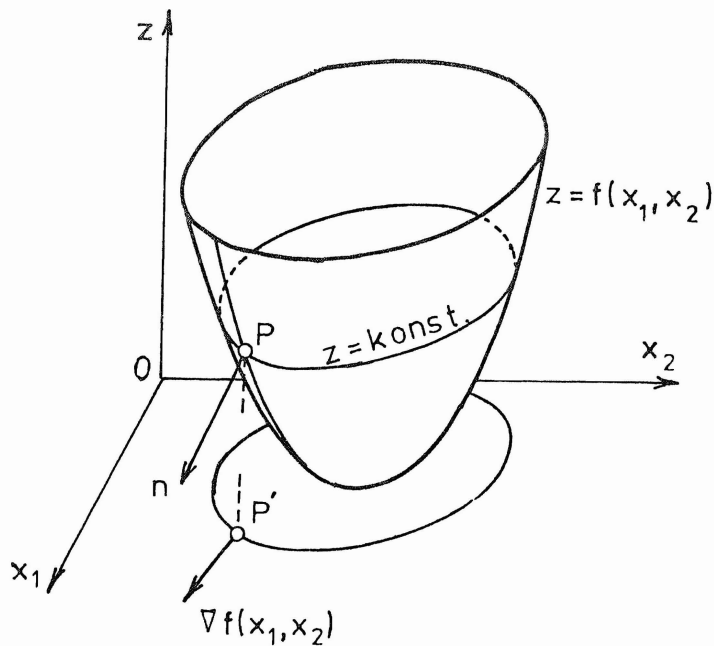
### 11.5. Metoda největšího spádu

Soustavu nelineárních rovnic v implicitním tvaru  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , můžeme zapsat jako jedinou rovnici

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (11.24)$$

Je to skalární funkce  $f$  vektoru  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ . Řešit původní soustavu rovnic znamená totéž, jako nalézt minimum funkce  $z = f(x)$ . Toto minimum je zřejmě nula. V jiném, obecnějším případě to nula nemusí být.

K minimalizaci funkce  $z = f(x)$  lze použít metody poněkud odlišné od dosud probíraných. Funkci  $z = f(x)$  si lze znázornit v  $(n + 1)$  rozměrném prostoru jako plochu. Pro  $n = 2$  je plocha zobrazena na obr. 30.



Obr. 30

Diferenciací rovnice  $z = f(x)$  dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n - dz = 0 \quad (11.25)$$

Levou stranu této rovnice si lze představit jako skalární součin dvou vektorů, a to vektoru

$$\vec{n} = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \dots \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (-1) \right]^T \quad (11.26)$$

a vektoru  $\vec{dt}$ , ležícího v tečné rovině

$$\vec{dt} = [ dx_1 \quad dx_2 \quad \dots \quad dx_n \quad dz ]^T \quad (11.27)$$

Je to diferenciální vektorový přírůstek polohového vektoru  $\vec{OP}$ . Jde vskutku o vektor v tečné rovině, neboť body o souřadnicích  $(x_i + dx_i, z + dz)$  také splňují rovnici  $z = f(x)$ ; jsou tedy rovněž na této ploše, avšak v nekonečně blízkosti bodu  $P$  o souřadnicích  $(x_i, z)$ . Tři takové soumězné body, pokud nejsou kolineární, určují tečnou rovinu. Přitom  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Zapíšeme-li tedy rovnici (11.25) ve tvaru skalárního součinu

$$\vec{n} \cdot d\vec{t} = 0 \quad (11.28)$$

usoudíme ihned, že vektor  $\vec{n}$  je vektor normály k ploše  $z = f(x)$  v bodě  $P$  (obr. 30). V průmětu do roviny  $z = 0$  se tento vektor jeví jako normála k vrstevnici ve směru největšího nárůstu funkční hodnoty; normála k vrstevnici má složky  $\partial f / \partial x_i$ . Podle (11.26) totiž dostaneme

$$\vec{\nabla} f(x) = \text{grad } f(x) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \quad (11.29)$$

Vektor  $\vec{\nabla} f$  gradientu funkce  $f$  je v  $n$ -rozměrném prostoru, kdežto vektor  $\vec{n}$  je v  $(n+1)$ -rozměrném prostoru. Změníme-li znaménko (a tedy smysl vektoru), dostaneme vektor  $\vec{u} = -\vec{\nabla} f(x)$  ve směru největšího spádu. Snadno nahlédneme, že vektor  $\vec{u}$  je průmětem spádnice tečné roviny v bodě  $P$ . Představuje-li bod  $P(x^k, z)$  na dané ploše  $k$ -tou aproximaci řešení, bude zřejmě výhodné postoupit z tohoto bodu při hledání minima funkce  $f(x)$  ve směru největšího spádu, tj. zvolit  $(k+1)$ ní aproximaci

$$x^{k+1} = x^k + \alpha u^k = x^k - \alpha \nabla f(x^k) \quad (11.30)$$

Zde  $\alpha$  je dosud neznámý parametr. Zvolíme jej tak, aby funkce  $z = f(x)$  nabývala minima. Musí tedy být

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0 \quad (11.31)$$

Rozepíšeme-li funkci  $z = f(x^k - \alpha \nabla f)$  v Taylorovu řadu kolem bodu o souřadnicích  $x^k$  a zanedbáme-li v této řadě členy s třetí a vyšší mocninou  $\alpha$ , vyjde z podmínky (11.31) výraz

$$\alpha = \frac{\sum_i (\partial f / \partial x_i)^2}{\sum_{i,j} [(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(\partial f / \partial x_i)(\partial f / \partial x_j)]} \quad (11.32)$$

Parciální derivace vyhodnocujeme v bodě  $x^k$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .  
Dostaneme nový bod o souřadnicích

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k) \quad (11.33)$$

a v tomto novém bodu můžeme vypočítat nový gradient, pak vyhledat další zpřesněný vektor  $x^{k+2}$  atd. Nevýhodou této metody je, že musíme počítat první i druhé parciální derivace.

### 11.6. Metoda sdružených směrů

Je-li plocha  $z = f(x)$  dostatečně "rozumná", lze ji v každém bodě nahradit osculační plochou druhého stupně, která ji v okolí tohoto bodu nahradí. Je-li tento bod v blízkosti minima, má tato kvadrika s danou plochou minimum téměř společné. Zdá se proto, že nejrychleji povedou k cíli metody, které najdou minimum kvadratické funkce s nejmenším počtem kroků. Ukáže se, že tento počet kroků se rovná počtu proměnných ve vektoru  $x$  a jen výjimečně je menší.

Nechť má funkce  $f(x)$  celkem  $n$  proměnných, tj.  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , a nechť nabývá minima v bodě  $h$ . V okolí tohoto bodu ji rozvineme v Taylorovu řadu

$$f(x) = f(h) + \frac{1}{2} (x-h)^T A (x-h) + \dots \quad (11.34)$$

Protože jde o minimum, je matice  $A$  symetrická a pozitivně definitní. Zanedbáme-li členy třetího a vyššího řádu, dostaneme rovnici osculační kvadriky v bodě  $h$

$$f(x) = f(h) + \frac{1}{2} (x-h)^T A (x-h) \quad (11.35)$$

Její gradient je

$$g(x) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} = A(x-h) \quad (11.36)$$



Je nulový v bodě  $x = \bar{x}$ , kde funkce  $f(x)$  nabývá minima  $f(\bar{x})$ .  
 Označme  $k$ -tou iteraci  $x^k$  a také

$$f^k = f(x^k) \quad g^k = g(x^k) \quad (11.37)$$

Z bodu  $x^k$  postoupíme do bodu  $x^{k+1}$  ve směru  $p^k$ , takže bude

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k \quad (11.38)$$

Zde  $\alpha^k$  je dosud neurčený parametr. Směr  $p^k$  volíme tentokrát tak, aby platilo

$$(g^{k+1})^T p^k = 0 \quad (11.39)$$

Bude tedy kolmý na gradient funkce  $f(x)$  v novém bodě  $x^{k+1}$ .

Opakovaným použitím vzorce (11.38) dostaneme pro  $n$ -tou iteraci

$$x^n = x^{j+1} + \sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha^k p^k \quad (11.40)$$

pro všechna  $j$  z intervalu  $0 \leq j \leq n-1$ . Z rovnice (11.36) pak dostaneme, že

$$g^n = g^{j+1} + \sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha^k A p^k \quad (11.41)$$

Vektory v této rovnici transponujeme a zprava znásobíme vektorem  $p^j$ . První člen na pravé straně se bude vzhledem k (11.39) rovnat nule. Zbude

$$(g^n)^T p^j = \sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha^k (p^k)^T A p^j \quad (11.42)$$

Vektory  $p^0, p^1, p^2, \dots, p^{n-1}$  zvolíme navzájem sdružené tak, aby byly  $A$ -ortogonální, tj. aby platilo

$$(p^i)^T A p^j = 0 \quad \text{pro } i \neq j \quad (11.43)$$

Potom

$$(g^m)^T p^j = 0 \quad (11.44)$$

Protože vektory  $p^0, p^1, \dots, p^{m-1}$  nejsou lineárně závislé, tvoří vektorovou bázi v  $m$ -rozměrném prostoru. Rovnice (11.44) pak může být splněna jen tak, že

$$g^m = 0 \quad (11.45)$$

Z rovnice (11.36) a (11.45) pak dostaneme

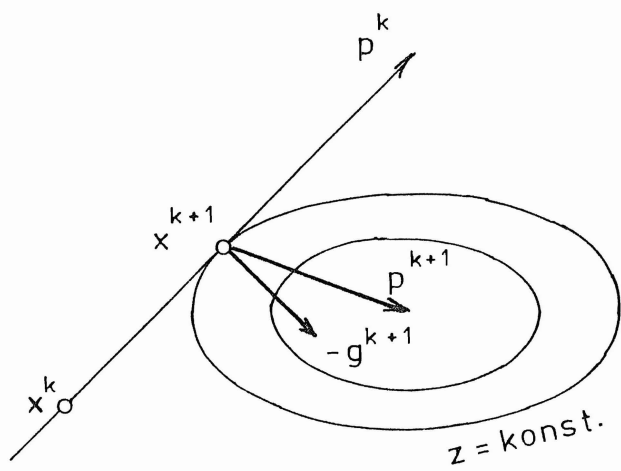
$$0 = A(x^m - h)$$

čili

$$x^m = h \quad (11.46)$$

To tedy znamená, že se po  $m$  iteracích dostaneme do bodu minima. Říkáme, že metoda je kvadraticky konvergentní. Minima dosáhneme po  $m$  krocích nebo i dříve, nebudou-li ve zvláštním případě všechna  $\alpha^k$  různá od nuly.

Vzniká otázka, jak může platit tento závěr, když jsme dosud neurčili hodnotu  $\alpha^k$  v  $k$ -tém iteračním kroku. Tato hodnota je však určena podmínkou (11.39), která může být splněna jen pro určité  $\alpha^k$ . Ozřejmí to obr. 31, platný pro dvě proměnné. Z bodu  $x^k$  postoupíme do bodu  $x^{k+1}$ ,



Obr. 31

který musí být na přímce  $p_k$  tečným bodem vrstevnice plochy  $z = f(x_1, x_2)$ . Na rozdíl od metody největšího spádu nepostoupíme dál ve směru záporného gradientu  $-g^{k+1}$ , ale ve směru sdruženém k  $p^k$ , tj. ve směru  $p^{k+1}$ . Ten nás zavede rovnou do bodu minima (do středu elipsy). Protože šlo o kvadratickou plochu nad rovinou  $x_1, x_2$ , dostali jsme přesné řešení pouze ve dvou krocích. To platí pro kterékoli sdružené směry; je tedy jedno, jak první směr zvolíme. Není-li plocha kvadratická, je třeba více iteračních kroků než  $n$ .

### 11.7. Metoda sdružených gradientů

Sdružené směry vybereme tak, aby směr  $p^{i+1}$  byl lineární kombinací směrů  $p^0, p^1, \dots, p^i$  a gradientu  $g^{i+1}$  a aby byla přitom zachována A-ortogonalita (11.43). Tento postup vede k jednoduchému výsledku

$$p^{i+1} = -g^{i+1} + \beta^i p^i \quad (11.47)$$

kde

$$\beta^i = \frac{|g^{i+1}|^2}{|g^i|^2} \quad (11.48)$$

Podrobnosti obsahuje lit. /8/ a /13/. Za první směr se zvolí záporný gradient, tj.  $p^0 = -g^0 = -g(x^0)$ , kde  $x^0$  je startovní bod.

Zbývá otázka, jak prakticky stanovit hodnotu  $\alpha^k$  v rovnici (11.38). Označme

$$z(\alpha) = f(x^k + \alpha p^k) \quad (11.49)$$

Tato funkce by měla nabývat pro nejvýhodnější hodnotu  $\alpha$  minima, tj. mělo by být

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha^k} = 0 \quad (11.50)$$

To tedy znamená vyřešit rovnici

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^T} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial x^T}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial x^T}{\partial \alpha} g(x) = 0 \quad (11.51)$$

čili

$$(p^k)^T g(x^k + \alpha p^k) = 0 \quad (11.52)$$

Jedna z několika možností je odhadnout velikost  $f(h)$  v rovnici (11.35) a s použitím (11.36) odtud vypočítat

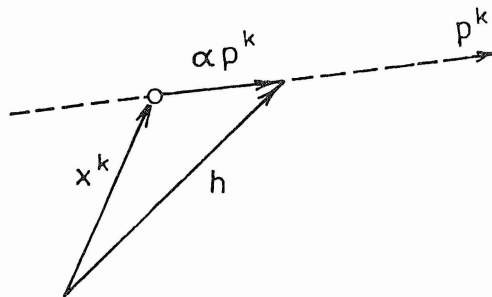
$$(x^k - h)^T g(x^k) = 2(f^k - f(h)) \quad (11.53)$$

To však podle obr. 32 znamená, že

$$-\alpha (p^k)^T g^k = 2(f^k - f(h)) \quad (11.54)$$

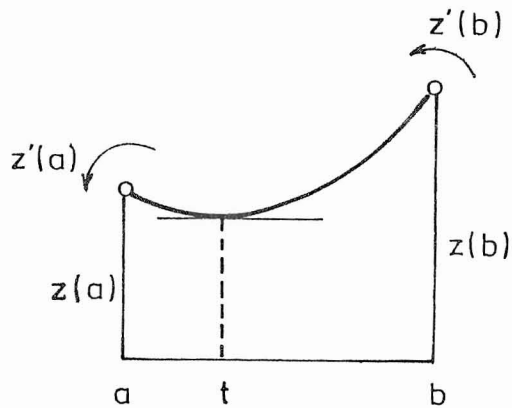
a odtud

$$\alpha^k = 2 \frac{f(h) - f^k}{(p^k)^T g^k} \quad (11.55)$$



Obr. 32

Tato hodnota není přesná, protože byla odvozena z odhadnutého minima  $f(h)$ . Kromě toho bod, v němž nastává minimum, zpravidla neleží na přímce  $p^k$  (obr. 32). Hodnota  $\alpha^k$  vychází proto často větší než je třeba. Doporučuje se proto použít vzorec (11.55) jen tehdy, vyjde-li  $\alpha^k < \|p^k\|$  (euklidovská norma vektoru  $p^k$ ); jinak zvolit  $\alpha^k = \|p^k\|$ . Nyní se vypočtou funkční hodnoty a první derivace podél přímky  $p^k$  v bodech  $x^k$ ,  $x^k + \alpha^k p^k$ ,  $x^k + 2\alpha^k p^k$ ,  $x^k + 4\alpha^k p^k$  atd., až se podaří ohraničit minimum do intervalu  $(a, b)$ , v němž budeme znát  $z(a)$ ,  $z'(a)$ ,  $z(b)$ ,  $z'(b)$ . Koncovými body intervalu s danými funkčními hodnotami a derivacemi proložíme kubickou parabolou (obr. 33), která aproximuje skutečný průběh funkce na tomto intervalu, a najdeme



Obr. 33

zpřesněnou hodnotu  $t$  určující bod  $x^{k+1}$  z intervalu  $(a, b)$ , pro kterou nabývá kubická funkce minima. Vyjde

$$t = b - \frac{z'(t) + w - y}{z'(b) - z'(a) + 2w} (b - a) \quad (11.56)$$

kde

$$y = 3 \frac{z(a) - z(b)}{b - a} + z'(a) + z'(b) \quad (11.57)$$

$$w = \sqrt{y^2 - z'(a)z'(b)} \quad (11.58)$$

Podrobnosti obsahuje práce /9/, kde je však použito jiné označení veličin. Naznačeným postupem se vyhneme výpočtu druhých derivací, které vstoupily do vzorce (11.32). Jiná metoda je popsána v práci /10/.

Poznámka. Existují i jiné, velmi účinné metody, které zde už nebudeme probírat. Např. kvazinewtonské metody /14/, které obcházejí nutnost opakovaně počítat a invertovat Jacobiho matici v rovnici (11.16), nebo řešení soustavy rovnic prvek po prvku /15/, vhodné pro metodu konečných prvků.

„Přehledový článek o numerických metodách napsali Č. HÖSCHL a M. OKROUHLÍK: Numerical methods in mechanics of solids. *Strojnícky časopis* 48 (1997). Part I, 3, str. 145-161, Part II, 4, str. 217-247.“

## LITERATURA

- /1/ BISSHOPP, K. E. - DRUCKER, D. C.: Large deflection of cantilever beams. Quarterly of Applied Mathematics, sv. 3 (1945), č. 3, s. 272 - 275.
- /2/ HÖSCHL, C.: Chyb a krut ve složitých soustavách. Publikace DT ČSVTS Praha č. 60-603-85, Praha 1985.
- /3/ HÖSCHL, C.: Principy a zákony mechaniky poddajných těles (1. část). Publikace DT ČSVTS Praha č. 60-537-78 (1491), Praha 1978.
- /4/ DVCŘÁK, J. - ŠVEC, A.: Technické křivky. Praha, SNTL 1962.
- /5/ HÖSCHL, C.: Užití malých počítačů v dynamice soustav. Publikace DT ČSVTS Praha č. 60-643-83 (DT 2420), Praha 1983.
- /6/ ARGYRIS, J. H.: Computer and mechanics. In: Koiter, W. T. (red.): Theoretical and applied mechanics. Amsterdam, North-Holland Publ. Co. 1977.
- /7/ LEE, E. H.: Elastic-plastic deformation at finite strains. Trans. ASME, Series E, Journ. of Applied Mechanics sv. 36 (1969), č. 1, s. 1 - 6.
- /8/ RALSTON, A. - WILF, H. S.: Mathematische Methoden für Digitalrechner I. München - Wien, R. Oldenbourg-Verlag 1972.
- /9/ FLETCHER, R. - REEVES, C. M.: Function minimization by conjugate gradients. The Computer Journal, sv. 7 (1964), s. 149 - 154.
- /10/ POWELL, M. J. D.: An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. The Computer Journal sv. 7 (1964), s. 155 - 162.
- /11/ Finite element methods for nonlinear problems. (Red.: Bergan, P. G., Bathe, K. J., Wunderlich, W.) Berlin, Springer-Verlag 1986.
- /12/ BERGAN, P. G.: Solution algorithms for nonlinear structural problems. Computers and Structures sv. 12 (1980), s. 497 - 509.
- /13/ HESTENS, M. - STIEFEL, E.: Method of conjugate gradients for solving linear systems. Report 1659, J. Res. Nat. Bur. Standards sv. 49 (1952), s. 409.
- /14/ DENNIS, J. E., Jr. - MORÉ, J. J.: Quasi-Newton methods, motivation and theory. SIAM Review sv. 19 (1977), č. 1, s. 46 - 89.
- /15/ HUGHES, T. J. R. - LEVIT, I. - WINGET, J.: An element by element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. Computer methods in applied mechanics and eng., sv. 36 (1983), s. 241.

---

Název publikace:	Stavba strojů 124 NELINEÁRNÍ PROBLÉMY MECHANIKY DEFORMOVATELNÝCH TĚLES
Autor:	Prof. Ing. Cyril Höschl
Počet stran:	96
Náklad:	130 výtisků
Formát:	A4
Číslo publikace:	60 - 601 - 88 (3785 - 250C)
Vydal a rozmnožil:	Dům techniky ČSVTS Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23
Datum vydání:	1988 DT 01 - 543/88
Cena publikace:	240 Kčs (cenový výměr č. 177 /88)