LE MINIMUM DE DEUX FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET UNE NOUVELLE CARACTERISATION DES FONCTIONS HOLOMORPHES

Jamel Abidi, Mohamed Lassaad Ben Yattou, Tunis

(Received April 3, 2010)

Abstract. We prove, among other results, that $\min(u,v)$ is plurisubharmonic (psh) when u,v belong to a family of functions in $\mathrm{psh}(D)\cap\Lambda_\alpha(D)$, where $\Lambda_\alpha(D)$ is the α-Lipchitz functional space with $1<\alpha<2$. Then we establish a new characterization of holomorphic functions defined on open sets of $\mathbb{C}^n$.

Keywords: maximum principle, plurisubharmonic function

MSC 2010: 32A10, 32D20, 32U05, 32U30

1. Introduction

Dans ce papier nous cherchons à déterminer des conditions sur deux fonctions u et v continues et psh sur un ouvert U de $\mathbb{C}^N$, pour que leur minimum soit psh sur U. Il apparait que le sous-ensemble $E=\{z\in U/u(z)=v(z)\}$ est obstruant. L'importance du fait que $\min(u,v)$ puisse être psh est révélée par les propositions suivantes ainsi que par d'autres conséquences indiquées dans la suite. Aussi on s'interesse à caractériser les fonctions holomorphes par les fonctions plurisousharmoniques. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^d,(d\geqslant 2)$, $h(U)$ et $\mathrm{sh}(U)$ désignent respectivement l'ensemble des fonctions harmoniques et sousharmoniques sur U. Sur les fonctions harmoniques et sousharmoniques on pourra consulter les ouvrages [6], [11], [23] et [25]. Pour $\theta\colon U\to\mathbb{C}$, $\mathrm{supp}(\theta)$ est le support de θ. Si $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $C^k(U)=\{\theta\colon U\to\mathbb{C}/\theta$ est de classe C^k dans $U\}$, $C(U)=\{\varphi\colon U\to\mathbb{C}/\varphi$ est continue sur $U\}$ et $C_c^\infty(U)=\{\theta\in C^\infty(U)/\theta$ est à support compact dans $U\}$. $H^\alpha(\alpha\geqslant 0)$ est la mesure α-dimensionnelle de Hausdorff (cf. [7], [28]). Pour $E\subset U$, E° est l'intérieur de E, m_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Si $f\colon U\to\mathbb{R}$ de classe C^1, $\mathrm{grad}(f)$ est le gradiant de f. Pour $h\in\mathbb{R}^n$, $\|h\|$ est la norme euclidienne de h.

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\mathrm{prh}(D)$ et $\mathrm{psh}(D)$ sont respectivement l'ensemble des fonctions pluriharmoniques et plurisousharmoniques dans D et $H(D)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes dans D.

Sur les fonctions plurisousharmoniques et holomorphes on pourra consulter [8], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [19], [22], [25], [27], [30], [31]. Des résultats sur le prolongement des fonctions sousharmoniques et n-sousharmoniques (cf. [26]) ont été obtenus dans [1], [3], [15] et [24]. Sur l'extension des fonctions plurisousharmoniques et holomorphes on pourra consulter [4], [5], [9], [10], [15], [19], [21] [24] et [28].

2. Résultats et préliminaires

Proposition 2.1. *Soient* $u, v \in \mathrm{psh}(U) \cap C(U)$ *(U ouvert de $\mathbb{C}^n$). Alors* $\min(u,v) = \frac{1}{2}[u+v-|u-v|] = u+v-\max(u,v)$. *D'autre part* $\min(u,v)$ *est psh si et seulement si* $dd^c u + dd^c v \geqslant dd^c \max(u,v)$.

Preuve. Les identités sont facilement vérifiables. Si $\min(u,v)$ est psh, $dd^c \min(u,v) \geqslant 0$; ce qui impliquera $dd^c u + dd^c v = dd^c(u+v) \geqslant dd^c \max(u,v)$. Réciproquement, si $dd^c u + dd^c v \geqslant dd^c \max(u,v)$, alors $dd^c \min(u,v) \geqslant 0$; ce qui impliquera aussi d'aprés le lemme de Weyl que $\min(u,v)$ est psh.

Corollaire 2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$,* $u, v \in \mathrm{psh}(U) \cap C(U)$ *telles que* $dd^c \max(u,v)$ *ne charge pas* $E = \{z \in U / u(z) = v(z)\}$. *Alors* $\min(u,v) \in \mathrm{psh}(U)$.

Preuve. Par hypothèse $dd^c \max(u,v) = \chi_{U \setminus E} dd^c \max(u,v)$ ($\chi_{U \setminus E}$ est la fonction caractéristique de $U \setminus E$). Mais sur $U \setminus E$, on a $dd^c \max(u,v) \leqslant dd^c u + dd^c v$. Donc $dd^c \max(u,v) \leqslant \chi_{(U-E)}(dd^c u + dd^c v) \leqslant dd^c u + dd^c v$, sur U. On déduit que $\min(u,v)$ est psh sur U.

Théorème 2.1. *Soient u et* $v \in \mathrm{sh}(D) \cap C(D)$, *où D est un domaine de $\mathbb{R}^n$.*
On suppose que $D \setminus E$ est connexe ($E = \{x \in D / u(x) = v(x)\}$).
Alors, $\min(u,v)$ *est sousharmonique sur D.*

Preuve. Soit $x_0 \in E$. Montrons que x_0 est un extrêmum absolu de $(u-v)$ sur D. On a $u(x_0) = v(x_0)$, donc $(u-v)(x_0) = 0$.

Posons $w = u - v$, w est continue sur D.

$D \setminus E = D_1 \cup D_2$ où $D_1 = \{x \in D / u(x) > v(x)\}$, $D_2 = \{x \in D / u(x) < v(x)\}$. D_1 et D_2 sont deux ouverts disjoints de D et $D_1 \cup D_2 = D \setminus E$.

Comme $D \setminus E$ est connexe alors $D_1 = \emptyset$ ou $D_2 = \emptyset$.

Si $D_2 = \emptyset$. Alors $w > 0$ sur $D \setminus E$ et $w = 0$ sur E.

Donc $w \geqslant 0 = w(x_0)$ sur D. Il résulte que $u - v \geqslant 0$ sur D.

Donc $\min(u,v) = v$ sur D et par suite $\min(u,v) \in \mathrm{sh}(D)$.

Corollaire 2.2. *Soient u et $v \in \mathrm{psh}(D) \cap C(D)$, D domaine dans $\mathbb{C}^n$.*
Supposons que $D \setminus E$ est connexe ($E = \{x \in D/u(x) = v(x)\}$).
Alors, $\min(u, v)$ est plurisousharmonique sur D.

P r e u v e. Evidente.

L'exemple des fonctions $u_1(z) = \log|z|$ et $v_1(z) = -\log|z|$ ($z \in \mathbb{C}^*$) suggèrent le problème suivant.

Soient $u, v \in \mathrm{psh}(D) \cap C(D)$, D ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Si $E^\circ = \emptyset$ ($E = \{z \in D/u(z) = v(z)\}$) et si $D \setminus E$ n'est pas connexe, trouvez des conditions suffisantes pour que $\min(u, v)$ soit psh dans D?

Pour la réponse à ce problème, sous une condition raisonable, il faudrait montrer qu'il est même possible de controler la croissance de $\min(u, v)$ en fonction de celles de u et v.

Maintenant on introduit les espaces fonctionnels de Lipschitz et de Zygmund.

3. Les espaces $\Lambda_\alpha(U)$ et $Z_\alpha(U)$

Un important article relatif à ce sujet étant celui de Krantz [18]. Confère aussi Abidi [1].

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geqslant 1$ et $f\colon\ U \to \mathbb{C}$.

Définition 3.1. (a) Soit $\alpha \in]0, 1[$. On dira que $f \in \Lambda_\alpha(U)$ (espace de Lipschitz d'indice α) si $\|f\|_{\Lambda_\alpha(U)} = \|f\|_{L^\infty(U)} + \sup\limits_{x,(x+h)\in U} |f(x+h) - f(x)|/\|h\|^\alpha < +\infty$. On notera que f est alors continue sur U.

(b) Soit $\beta \in]0, 1]$. $f \in \mathrm{Lip}_\beta(U)$ si $\sup\limits_{x,(x+h)\in U} |f(x+h) - f(x)|/\|h\|^\beta < +\infty$.

On a une différence claire entre $\Lambda_\alpha(U)$ et $\mathrm{Lip}_\beta(U)$.

Définition 3.2. (a) $f \in \Lambda_1(U)$ si

$$\|f\|_{\Lambda_1(U)} = \|f\|_{L^\infty(U)} + \sup_{x,(x\pm h)\in U} \left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{\|h\|} \right| < +\infty$$

et si f est continue.

(b) Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et $\alpha \in]k, k+1[$. $f \in \Lambda_\alpha(U)$ si $f \in C^k(U)$ et si $\|f\|_{\Lambda_\alpha} = \|f\|_{\Lambda_{(\alpha-1)}} + \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \|\partial f/\partial x_j\|_{\Lambda_{(\alpha-1)}} < +\infty$.

On notera que si $\alpha \leqslant \beta$ alors $\Lambda_\beta(U) \subset \Lambda_\alpha(U)$.

L'enoncé suivant est établi dans l'article de Krantz ([18]). Soit D un domaine borné à frontière de classe C^2 dans $\mathbb{R}^n$. Soient $\alpha \in]0, k[$, $k \in \mathbb{N}$ et $f \in C^k(D)$. S'il existe une constante $c > 0$ avec $\|\nabla^k f(x)\| \leqslant c[\delta_D(x)]^{\alpha-k}$, $\forall x \in D$ ($\nabla^k f(x) =$

$\nabla^{k-1}(\nabla f)(x); \nabla(f) = \mathrm{grad}(f)$ étant le gradiant de f et $\delta_D(x) = d(x, D^c))$, alors $f \in \Lambda_\alpha(D)$.

On peut prolonger aux sous-ensembles fermés la définition des espaces de Lipschitz, de la façon suivante.

Définition 3.3. Soient E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]k, k+1[$, $k \in \mathbb{N}^*$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ bornée. $f \in \Lambda_\alpha(E)$ s'il existe des fonctions bornées $f_\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ (pour tout multi-indice γ de longueur $|\gamma|$ inférieur à k) vérifiant (1)$f_0 = f$, (2) $f_\gamma(x) = \sum\limits_{|\gamma+\delta|\leqslant k} f_{\gamma+\delta}(y)(x-y)^\delta/\delta! + R_\gamma(x,y)$ avec $|R_\gamma(x,y)| \leqslant c\|x-y\|^{\alpha-|\gamma|}$, $\forall x, y \in E$, $c = c(f)$ ne dépend que de f et α.

Si $f \in \Lambda_\alpha(U)$, $\alpha \in [k, k+1[$ et $E = \overline{U}$ alors f se prolonge en une fonction $\tilde{f} \in \Lambda_\alpha(E)$ avec $\|\tilde{f}\|_{\Lambda_\alpha(E)} \leqslant \|f\|_{\Lambda_\alpha(U)}$.

Les espaces de Lipschitz d'indice α ont des propriétés remarquables, à savoir *une propriété d'extension.* Soient $\alpha \in]0, k[$ et $f \in \Lambda_\alpha(\overline{D})$, D étant un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière de classe C^k. Alors, il existe $\tilde{f} \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ avec $\tilde{f} = f$ sur D et $\|\tilde{f}\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|f\|_{\Lambda_\alpha(\overline{D})}$, c est une constante indépendante de f. Aussi la *caractérisation suivante.*

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction bornée continue sur $\mathbb{R}^n$. $f \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ pour $\alpha \in]0, k[(k \in \mathbb{N})$ si et seulement si, il existe $c > 0$ avec $|\Delta_h^k f(x)| \leqslant c\|h\|^\alpha$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$ et $\Delta_h^k f(x)$ est la k-différence symétrique classique définie comme suit. $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x-h)$; $\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x)$ et ainsi de suite. Il résulte que si $f \in \Lambda_\alpha(D)$, D domaine borné à frontière de classe C^k(par exemple une boule ouverte) et si $0 < \alpha < k$, alors $|\Delta_h^k f(x)| \leqslant c\|h\|^\alpha$, $\forall x$, $(x \pm h) \in D$. (En effet il existe $\tilde{f} \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ avec $\tilde{f} = f$ sur D et $|\Delta_h^k f(x)| = |\Delta_h^k \tilde{f}(x)| \leqslant c\|h\|^\alpha$ si $x, (x \pm h) \in D$ $(D \subset \overline{D})$).

Notons que si $|f(x+h) - f(x-h)| \leqslant c\|h\|^\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$, lorsque $(x \pm h) \in D$, alors $(\forall x, (x+h) \in D$, il vient que $|f(x+h) - f(x)| = |f(x+\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}h) - f(x+\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}h)| \leqslant c\|h\|^\alpha/2^\alpha)$ de sorte que f est α-höldérienne sur D.

Nous définissons maintenant les espaces de Zygmund d'indice α.

Definition 3.4. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, E un sous-ensemble fermé de U et $\alpha > 0$.

(1) $u\colon U \to \mathbb{R}$ appartient à $Z_\alpha(U)$ si u est continue et $|\Delta_h^2 u(x)| \leqslant c\|h\|^\alpha$, $\forall x$, $(x \pm h) \in U$ avec $c > 0$ (c ne dépend pas de x).

(2) $u \in Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U)$ si pour tout $x_0 \in U$, il existe un ouvert $U_0 \subset U$ avec $x_0 \in U_0$ et $u \in Z_\alpha(U_0)$.

(3) Soit $u\colon U \setminus E \to \mathbb{R}$ continue. $u \in Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U, E)$ si pour tout $x_0 \in U$, il existe un ouvert U_0 inclus dans U avec $x_0 \in U_0$ et $u \in Z_\alpha(U_0 \setminus E)$.

Notons que les espaces de Lipschitz et de Zygmund sont en relation. On a en particulier le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soient $\alpha \in]0,2[$ et $u\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée (D ouvert de $\mathbb{R}^n$). Alors on a les assertions suivantes.*

(1) *Si $D = \mathbb{R}^n$; $u \in Z_\alpha(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $u \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$.*

(2) *Si D est borné à frontière de classe C^2 et $u \in \Lambda_\alpha(D)$ alors, $u \in Z_\alpha(D)$.*

4. Prolongement de fonctions psh

Le résultat suivant énoncé dans le cadre des fonctions hamoniques par Carleson [3], Verdera [30] et O'Farrel [20] a été étendu aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques par Abidi [1] (cf. aussi Ullrich [29]).

Théorème 4.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (respectivement de $\mathbb{C}^n$) et E un fermé dans U. Si $\alpha \in]0,2[$ et si $H^{n-2+\alpha}(E) = 0$ (repectivement $H^{2n-2+\alpha}(E) = 0$), alors toute $u \in \mathrm{sh}(U\setminus E)\cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U,E)$ (respectivement $u \in \mathrm{psh}(U\setminus E)\cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U,E)$), u admet un unique prolongement $\tilde{u} \in \mathrm{sh}(U)\cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U)$ (respectivement $\tilde{u} \in \mathrm{psh}(U)\cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(U)$).*

Remarque 4.1. (a) Soit $\alpha = 1$, $u(z) = \log|z|$ ($z \in \mathbb{C}^*$). Notons que $u \in h(\mathbb{C}^*) \cap \Lambda_1(\mathbb{C}^*)$ mais u n'est pas constante.

(b) Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ avec $H^\alpha(E) > 0$, $\alpha \in]1,2[$. Il existe une mesure positive μ à support dans E, de masse $0 < \|\mu\| < +\infty$, telle que $u(z) = \int \log|z-w|\,\mathrm{d}\mu(w) \in h(\mathbb{C}\setminus E)\cap Z_\alpha(\mathbb{C})$ d'après Abidi [1]. Notons que $u \in \mathrm{sh}(\mathbb{C})$. Soit $D = \mathbb{C}\setminus \overline{D}(0,R)$ avec $R > 0$ vérifiant $E \subset D(0,R)$. $u \in h(D)\cap Z_\alpha(D)$. Si $u = c$ est constante sur D, on a

$$c = \lim_{|z|\to+\infty} u(z) = \lim_{|z|\to+\infty}\left[\int \log|z|\,\mathrm{d}\mu(w) + \int \log\left|1-\frac{w}{z}\right|\mathrm{d}\mu(w)\right]$$
$$= \lim_{|z|\to+\infty} \log|z| \int \mathrm{d}\mu(w) = +\infty;$$

ce qui est impossible.

Ceci établit une différence fondamentale entre $C(D)\cap L^\infty(D)\cap Z_\alpha(D)$ et $\Lambda_\alpha(D)$.

Proposition 4.1. *Soient D un domaine de $\mathbb{R}^n$ (respectivement de $\mathbb{C}^n$) et $u,v \in C(D)\cap \mathrm{sh}(D)$ (respectivement $u,v \in C(D)\cap \mathrm{psh}(D)$) avec $\alpha \in]1,2[$.*

On note $E = \{z \in D / u(z) = v(z)\}$ et on suppose que

(1) *$H^{n-2+\alpha}(E) = 0$ (respectivement $H^{2n-2+\alpha}(E) = 0$).*

(2) $\min(u,v) \in Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(D) = Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(D\setminus E)$ (car $E^\circ = \emptyset$).

Alors, $\min(u,v)$ *est sh (respectivement psh) sur* D *et appartient à* $Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(D)$.

P r e u v e. $\min(u,v)$ se prolonge en une fonction $w \in \mathrm{sh}(D) \cap Z_\alpha^{\mathrm{loc}}(D)$ qui est continue sur D; comme $E^\circ = \emptyset$ alors $\min(u,v) = w$ sur D.

R e m a r q u e 4.2. Si $u, v \in \mathrm{sh}(U) \cap C(U) \cap \Lambda_\alpha(U)$, $1 < \alpha < 2$. Alors $\min(u,v) \in Z_{(\alpha-1)}^{\mathrm{loc}}(U)$. En général, $\min(u,v) \notin Z_\alpha(U)$.

5. Caractérisation des fonctions holomorphes

Définition 5.1. Soit $u\colon \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty[$ une fonction. On dit que u «produit» les fonctions holomorphes si pour tout domaine D de $\mathbb{C}^n$, pour toute fonction $f\colon D \to \mathbb{C}$ continue, *la condition* $u(w - f(z))$ est psh sur $D \times \mathbb{C}$ *implique* f est holomorphe sur D.

On a le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Soit* $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorphe,* $g \neq 0$.

Alors, $\log|g|$ *produit les fonctions holomorphes si et seulement si* $g \neq \mathrm{e}^{g_1}$, $\forall g_1$ *affine sur* $\mathbb{C}$ *et holomorphe.*

P r e u v e. L'hypothèse $\log|g|$ produit les fonctions holomorphes implique $\log|g|$ n'est pas affine sur $\mathbb{C}$ (évident). Dans ce cas $\log|g| \neq \mathrm{Ré}(g_1)$, $\forall g_1$ affine et holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc $|g| \neq |\mathrm{e}^{g_1}|$ sur $\mathbb{C}$. Soit alors $|g/\mathrm{e}^{g_1}| \neq 1$ (ou encore $g/\mathrm{e}^{g_1} \neq c$, $\forall c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$). Donc $g \neq c\mathrm{e}^{g_1}$, $\forall c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Soit alors $g \neq \mathrm{e}^{g_2}$, $\forall g_2$ fonction holomorphe et affine sur $\mathbb{C}$.

Pour la réciproque on traite les deux étapes suivantes.

E t a p e 1. $h = \log|g|$ est harmonique sur $\mathbb{C}$. Montrons que $\log|g|$ n'est pas affine sur $\mathbb{C}$ pour en déduire que h produit les fonctions holomorphes (d'après Abidi [2]). Comme $\log|g| \neq \mathrm{Ré}(g_1)$, $\forall g_1$ fonction holomorphe et affine sur $\mathbb{C}$, alors $\log|g|$ n'est pas affine sur $\mathbb{C}$. D'après Abidi [2], h produit les fonctions holomorphes.

E t a p e 2. $u = \log|g|$ n'est pas harmonique sur $\mathbb{C}$. Il résulte que g s'annulle sur $\mathbb{C}$. On a $u \in \mathrm{sh}(\mathbb{C})$. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue avec v est psh sur $\mathbb{C}^2$ ($v(z,w) = u(w - f(z))$ pour $(z,w) \in \mathbb{C}^2$).

Soit $\varphi, \theta \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, $\varphi \geqslant 0$, $\theta \geqslant 0$ et posons $\psi(z,w) = \varphi(z)\theta(w)$ pour $z, w \in \mathbb{C}$. Remarquons que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C}^2)$, $\psi \geqslant 0$.

$\forall\, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}\int \theta(w)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\overline{z}\partial z}(z)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w)b_1\overline{b_1}\\ +2\,\mathrm{Ré}\Big[\int\frac{\partial\theta}{\partial w}(w)\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(z)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w)b_2\overline{b_1}\Big]\\ +\int\varphi(z)\frac{\partial^2\theta}{\partial\overline{w}\partial w}(w)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w)b_2\overline{b_2}\geqslant 0.\end{aligned}$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrons que f est holomorphe au voisinage de z_0.

Soit $w_0 \in \mathbb{C}$ et $(w_0 - f(z_0)) \notin E$ où $E = \{\xi \in \mathbb{C}/g(\xi) = 0\}$ (E est fermé polaire dans $\mathbb{C}$).

Fixons $r > 0$ avec $\forall w \in D(w_0, r)$, $\forall z \in D(z_0, r)$, l'expression $(w - f(z)) \notin E$.

On suppose que $\mathrm{supp}(\theta) \subset D(w_0, r)$ et $\mathrm{supp}(\varphi) \subset D(z_0, r)$.

$\forall z \in \mathrm{supp}(\varphi)$, z fixé, la fonction

$$w \in D(w_0, r) \mapsto \log|g(w - f(z))|$$

est harmonique. Donc

$$\int\varphi(z)\frac{\partial^2\theta}{\partial\overline{w}\partial w}(w)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w)=0.$$

Remplaçons b_1 par 1 (dans l'inégalité précédente) on a alors $\int\theta(w)(\partial^2\varphi/\partial\overline{z}\partial z)(z)\times \log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w) + 2\mathrm{Ré}[\int(\partial\theta/\partial w)(w)(\partial\varphi/\partial\overline{z})(z)\log|g(w-f(z))|\times \mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w)b_2] \geqslant 0$ ($\forall b_2 \in \mathbb{C}$). On déduit que $\int(\partial\theta/\partial w)(w)(\partial\varphi/\partial\overline{z})(z)\times \log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(z)\,\mathrm{d}m_2(w) = 0$.

Donc $\int(\partial\varphi/\partial\overline{z})(z)[\int(\partial\theta/\partial w)(w)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(w)]\,\mathrm{d}m_2(z) = 0$.

Considérons alors

$$\begin{aligned}&\int\frac{\partial\theta}{\partial w}(w)\log|g(w-f(z))|\,\mathrm{d}m_2(w)\\ &\quad=\int\frac{\partial}{\partial w}[\theta(w)\log|g(w-f(z))|]\,\mathrm{d}m_2(w)-\int\theta(w)\frac{\partial}{\partial w}[\log|g(w-f(z))|]\,\mathrm{d}m_2(w)\\ &\quad=-\int\theta(w)\frac{\partial}{\partial w}[\log|g(w-f(z))|]\,\mathrm{d}m_2(w)\ \ (\forall z\in D(z_0,r)).\end{aligned}$$

Donc $\int(\partial\varphi/\partial\overline{z})(z)[\int\theta(w)(\partial/\partial w)(\log|g(w-f(z))|)\,\mathrm{d}m_2(w)]\,\mathrm{d}m_2(z) = 0$.

Utilisons Fubini, il arrive que

$$\int\theta(w)\Big[\int\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(z)\frac{\partial}{\partial w}(\log|g(w-f(z))|)\,\mathrm{d}m_2(z)\Big]\,\mathrm{d}m_2(w)=0.$$

On vérifie sans peine que

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(z)\frac{g'(w-f(z))}{g(w-f(z))}\,\mathrm{d}m_2(z)=0,\ \forall w\in D(w_0,r),\ \forall\varphi\in C_c^\infty(D(z_0,r),\ \varphi\geqslant 0$$

(on raisonne par l'absurde). Donc

$$z\in D(z_0,r)\mapsto \frac{g'(w-f(z))}{g(w-f(z))}$$

est holomorphe, pour tout $w\in D(w_0,r)$.

Posons $k=g'/g$ et notons que sur $\mathbb{C}\setminus E$, k est holomorphe. Alors k n'est pas constante sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}\setminus E$. En effet, si k est constante sur $\mathbb{C}\setminus E$, on doit avoir $k(w)=g'(w)/g(w)=c$, $c\in\mathbb{C}$ ($w\in\mathbb{C}\setminus E$). Donc $g'(w)=cg(w)$, $\forall w\in\mathbb{C}\setminus E$. $g(w)=A\mathrm{e}^{cw}=\mathrm{e}^{g_1(w)}$, $A\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ($\forall w\in\mathbb{C}$ même). Donc g_1 est affine sur $\mathbb{C}$. Impossible d'aprés l'hypothèse.

Il résulte que k n'est pas constante sur $\mathbb{C}\setminus E$. $(z,w)\mapsto k(w-f(z))$ est holomorphe non constante sur $D(z_0,r)\times D(w_0,r)$. Donc $\exists w_1\in D(w_0,r)$, avec $(\partial k/\partial w)(w_1-f(z_0))\neq 0$. k est inversible au voisinage de $(w_1-f(z_0))\in\mathbb{C}\setminus E$. Donc $(\partial k/\partial w)(w_1-f(z))\neq 0$, $\forall(z,w)\in D(z_0,t)\times D(w_0,t)$, avec $0<t\leqslant r$.

Donc $(\partial k/\partial w)(w_1-f(z))\neq 0$, $\forall z\in D(z_0,t)$.

Or $z\in D(z_0,r)\mapsto k(w-f(z))$ est holomorphe, pour tout $w\in D(w_0,r)$.

De même $w\in D(w_0,r)\mapsto k(w-f(z))$ est holomorphe sur $D(w_0,r)$, pour tout $z\in D(z_0,r)$. D'aprés le théorème de Hartogs (cf. [14]),

$$(z,w)\in D(z_0,r)\times D(w_0,r)\mapsto k(w-f(z))$$

est holomorphe. Il résulte que (w_1-f) est holomorphe sur $D(z_0,t)$. Donc f est holomorphe sur $D(z_0,t)$.

Lorsque $f\colon D\to\mathbb{C}$, f continue, D domaine de $\mathbb{C}^n$, les raisonnements qu'on a fait sont locaux et en utilisant la fibration on se ramène au cas $n=1$.

Applications. (a) Soient g_1,g_2 et $g_3\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, holomorphes, $g_1g_2g_3\neq 0$. On suppose que $\log|g_1|\leqslant\log|g_2|\leqslant\log|g_3|$ sur $\mathbb{C}$. Alors $\log|g_j|$ produit les fonctions holomorphes(analytiques) si et seulement si $\log|g_k|$ aussi, $j,k\in\{1,2,3\}$, $j\neq k$. De plus on a la propriété suivante.

Si $[\log|g_1|+\log|g_2|]$ produit les fonctions holomorphes, alors $\log|g_1|$ ou $\log|g_2|$ produit les fonctions analytiques.

(b) D'une façon générale, pour u et $v\colon\mathbb{C}\to[0,+\infty[$ avec $\log(u)$ et $\log(v)$ produisant les fonctions analytiques, alors $\log(u+v)$ produit les fonctions analytiques. (En particulier, si $\log|g_1|$ et $\log|g_2|$ produisent les fonctions analytiques alors $\log(|g_1|+|g_2|)$ l'est aussi.)

(c) Soient g_1 et g_2 deux fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$. On suppose que $\log|g_1|$ et $\log|g_2|$ caractérisent les fonctions holomorphes. Alors $\max(\log|g_1|, \log|g_2|)$ caractérise (produit) les fonctions analytiques.

(d) Soit k une fonction analytique non constante et s'annulant sur $\mathbb{C}$. Alors pour toute $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonique, la fonction $u = (\log|k| + h)$ produit les fonctions analytiques.

Problèmes ouverts. Soit $k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ continue, $\varepsilon > 0$.

(a) Existe-t-il $l\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ continue sousharmonique qui produit les fonctions holomorphes avec $|k - l| < \varepsilon$?

On pourra en réalité étudier les différents approximations à gauche et à droite.

Lorsque k est convexe sur $\mathbb{C}$. Que se passe-t-il alors?

(b) Peut on remplacer ε par une fonction $s\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+^*$?

(c) Soit E un sous-ensemble fermé polaire dans $\mathbb{C}$. Existe t-il $l\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ continue sousharmonique qui produit les fonctions holomorphes, $|k - l| < \varepsilon$ et $k = l$ sur E?

References

[1] *J. Abidi*: Sur le prolongement des fonctions harmoniques. Manuscripta Math. *105* (2001), 471–482. zbl

[2] *J. Abidi*: Analycité, principe du maximum et fonctions plurisousharmoniques (à paraitre).

[3] *L. Carleson*: Selected Problems on Exceptional Sets. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1967. (Reprint: Wadswarth, Belmont, Cal., 1983). zbl

[4] *U. Cegrell*: Removable singularities for plurisubharmonic functions and related problems. Proc. Lond. Math. Soc. *36* (1978), 310–336. zbl

[5] *U. Cegrell*: Removable singularity sets for analytic functions having modulus with bounded Laplace mass. Proc. Amer. Math. Soc. *88* (1983), 283–286. zbl

[6] *J. B. Conway*: Functions of One Complex Variable II. Springer, Berlin, 1995. zbl

[7] *H. Federer*: Geometric Measure Theory. Springer, Berlin, 1969. zbl

[8] *R. C. Gunning, H. Rossi*: Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965. zbl

[9] *R. Harvey*: Removable singularities for positive currents. Amer. J. Math. *96* (1974), 67–78. zbl

[10] *R. Harvey, J. Polking*: Extending analytic objects. Comm. Pure Appl. Math. *28* (1975), 701–727. zbl

[11] *W. K. Hayman, P. B. Kennedy*: Subharmonic Functions. Academic Press, 1976. zbl

[12] *G. M. Henkin, J. Leiterer*: Theory of Functions on Complex Manifolds. Birkhäuser, Boston, Mass., 1984. zbl

[13] *M. Hervé*: Les fonctions analytiques. Presses Universitaires de France, 1982. zbl

[14] *L. Hörmander*: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966. zbl

[15] *J. Hyvönen, J. Rühentaus*: On the extension in the Hardy classes and in the Nevanlinna class. Bull. Soc. Math. France *112* (1984), 469–480. zbl

[16] *M. Klimek*: Pluripotential Theory. Clarendon Press, Oxford, 1991. zbl

[17] *S. G. Krantz*: Function Theory of Several Complex Variables. Wiley, New York, 1982. zbl

[18] *S. G. Krantz*: Lipschitz spaces, smoothness of functions, and approximation theory. Expo. Math. *3* (1983), 193–260. zbl

[19] *P. Lelong*: Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Gordon and Breach, New York, 1969. zbl

[20] *A. G. O'Farrell*: The 1-reduction for removable singularities, and the negative Hölder spaces. Pro. R. Ir. Acad. *A 88* (1988), 133–151. zbl

[21] *E. Poletsky*: The minimum principle. Indiana Univ. Math. J. *51* (2003), 269–304. zbl

[22] *R. M. Range*: Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables. Springer, Berlin, 1986. zbl

[23] *T. Ransford*: Potential Theory in the Complex Plane. Cambridge University Press, 1995. zbl

[24] *J. Riihentaus*: On the extension of separately hyperharmonic functions and H^p-functions. Michigan Math. J. *31* (1984), 99–112. zbl

[25] *L. I. Ronkin*: Introduction to the theory of entire functions of several variables. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1974). zbl

[26] *W. Rudin*: Function Theory in Polydiscs. Benjamin, New York, 1969. zbl

[27] *W. Rudin*: Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Springer, New York, 1980. zbl

[28] *B. Shiffman*: On the removal of singularities of analytic sets. Michigan Math. J. *15* (1968), 111–120. zbl

[29] *D. C. Ullrich*: Removable sets for harmonic functions. Michigan Math. J. *38* (1991), 467–473. zbl

[30] *J. Verdera*: Approximation by solutions of elliptic equations, and Calderon-Zygmund operators. Duke Math. J. *55* (1987), 157–187. zbl

[31] *V. S. Vladimirov*: Les fonctions de plusieurs variables complexe (et leur application à la théorie quantique des champs). Dunod, Paris, 1967. zbl

Authors' addresses: *Jamel Abidi, Mohamed Lassad Ben Yattou*, Département de Mathématique, Faculté des Sciences de Tunis, 1060-Tunis, Tunisia, e-mail: `abidijamel1@yahoo.fr`.