

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**KONTAKTNÍ ÚLOHY
A
LISOVANÉ SPOJE**

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1985

Na několika elementárních úlohách o vzájemném dotyku nosníků a o nosníku na pružném podkladu se ukazují zvláštnosti řešení kontaktních úloh a uvádí se z metodického hlediska jejich třídění. Základem řešení obecných úloh o kontaktu pružných těles je Papkovičova - Neuberova metoda, úspěšně aplikovaná zejména v prostorových úlohách teorie pružnosti. Ukazuje se, že prostorová Hertzova úloha o dotyku těles je paradoxně jednodušší než obdobná úloha rovinná. Řešení rovinných úloh vychází z rovnic Kolosovových - Muschelišviliho. Obě metody se podrobně odvozují. Kromě klasické Hertzovy teorie se probírá také Štajermanova teorie o dotyku těles vyššího než druhého řádu.

V další části se probírá vliv smykového tření. Na jednoduchém příkladu se vysvětluje variační formulace kontaktních úloh a také využití metody konečných prvků k řešení obecného dotyku těles se třením.

Uvádějí se příklady kontaktních úloh o deskách a skořepinách a o vzájemném působení žebra a desky. Podrobně se probírá teorie lisovaných, resp. za tepla sestavených spojů s přesahem poloměrů dotykových ploch, vliv nerovností povrchů na předpětí těchto spojů a různé příčiny neshod s Lamého elementární teorií. Vysvětlují se příčiny nelinearity deformační charakteristiky těchto spojů a vznik vnitřního útlumu v nich při dynamickém namáhání. Probírá se i vliv plastických deformací na jejich napjatost a přetvoření.

Text je doplněn řešenými příklady a více než šedesáti odkazy na odbornou literaturu.

O B S A H

ÚVOD	5
1. NĚKOLIK ELEMENTÁRNÍCH PŘÍKLADŮ	7
2. NAVIEROVY-LAMÉHO ROVNICE	22
3. PAPKVIČOVA-NEUBEROVA METODA	29
4. DEFORMACE A NAPJATOST LOKÁLNĚ ZATÍŽENÉHO PRUŽNÉHO POLOPROSTORU	33
5. PROSTOROVÁ HERTZOVA ÚLOHA	37
6. ROVNICE KOLOSOVOVA-MUSCHELIŠVILIHO	48
7. ROVINNÁ DEFORMACE PRUŽNÉHO POLOPROSTORU	52
8. ROVINNÁ HERTZOVA ÚLOHA	62
9. ŠTAJERMANOVA TEORIE	67
10. KONTAKTNÍ ÚLOHY SE TŘENÍM	70
11. VARIČNÍ FORMULACE KONTAKTNÍCH ÚLOH	73
12. VYUŽITÍ METODY KONEČNÝCH PRVKŮ K ŘEŠENÍ KONTAKTNÍCH ÚLOH	76
13. KONTAKTNÍ ÚLOHY O DESKÁCH A SKOŘEPINÁCH	82
14. VÁLCE PRACOVNÍCH STROJŮ, KALANDRY A VÁLCOVACÍ STOLICE	92
15. VZÁJEMNÉ PŮSOBENÍ ŽEBRA A DESKY	93
16. VLIV NEROVNOSTÍ POVRCHŮ NA PŘEDPĚTÍ LISOVANÝCH SPOJŮ A SPOJŮ S PŘESAHEM SESTAVENÝCH ZA TEPLA	98
17. JINÉ PŘÍČINY NESHOD S LAMÉHO TEORIÍ	103
18. ÚTLUM V TORZNĚ NAMÁHANÝCH LISOVANÝCH SPOJÍCH	105
19. ŘEŠENÍ ROTAČNĚ SYMETRICKÝCH LISOVANÝCH SPOJŮ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ	113
20. VLIV PLASTICKÝCH DEFORMACÍ NÁBOJE NA NAPJATOST LISOVANÉHO SPOJE	121
LITERATURA	135

"Prosím, kde mám začít, Vaše Veličenstvo?" zeptal se. "Začni na začátku", řekl Král velmi vážně, "a pokračuj, až dojdeš na konec. Pak přestaň."

(Lewis Carroll, Alenka v říši divů)

ÚVOD

Tímto roztomilým citátem začíná G. M. L. Gladwell své pojednání o kontaktních úlohách v klasické teorii pružnosti. Naznačuje tím, že poví čtenáři všechno, co potřebuje vědět, aby mohl číst text s plným porozuměním. Není to však žádné snadné čtení, zejména ne pro toho, kdo nemá dostatečné znalosti teorie komplexní proměnné a teorie integrálních transformací.

Kontaktní úlohy jsou bohužel matematicky velmi náročné. Mnoho z nich patří mezi tzv. nekorektní úlohy, u nichž stačí malá změna zadání k tomu, aby se řešení podstatně změnilo. Oblast dotyku nebývá vždy stálá ani předem známá a v některých případech se dokonce během zatěžování nespojitě mění. Situace se ještě více zkomplikuje, uvažujeme-li tření. Okrajové podmínky pro řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic pak často závisí nejen na výsledku řešení, ale i na průběhu zatěžování. Přitom jde o úlohy velmi důležité, bez nichž nelze plně pochopit vzájemné silové působení těles a posoudit možnost vzniku nežádoucích poruch v povrchových vrstvách těles.

Zatlačujeme-li např. kuličku do pružného tělesa, dotýkají se tělesa jen v jednom bodě (za předpokladu dokonale hladkých ploch o různých křivostech), pak se však vytvoří malá dotyková plocha, jejíž velikost je závislá na velikosti působící síly. Příklad se dále zkomplikuje, uvažujeme-li tření mezi tělesy. Pak na části dotykové plochy vznikne dokonalá adheze, na jiné části relativní smyk. Představme si třeba zalisovaný čep namáhaný ohybem. Kromě uvedených dvou částí dotykové plochy může vzniknout ještě část třetí, v níž se dotyk úplně uvolní. Mění-li se zatížení čepu, mění se i velikost těchto tří částí. Mění se obecně i velikost a smysl smykových napětí vzniklých třením, neboť se změní rozdělení tlaku v dotykové ploše a může se změnit i smysl relativního pohybu obou povrchů (v té části, kde není dokonalá adheze). Již z těchto několika poznámek je zřejmé, v čem spočívá obtížnost úlohy.

Vnucuje se otázka, jaký význam má tato teorie pro technickou praxi. V oboru stavebnictví jde především o zakládání staveb. Otázka vzájemného působení základů a horninového podloží je jednou z typických úloh o dotyku těles a o silovém působení mezi nimi. Ve strojnictví jde především o lisované spoje a o dotyk

těles s různě zakřivenými povrchy. Připomeňme např. dotyk kola s kolejnicí, valivá i kluzná ložiska. Často se mezi kontaktní úlohy řadí i nosník na pružném podkladu, dotyk mezi kalandrovými a jinými válci pracovních strojů atd.

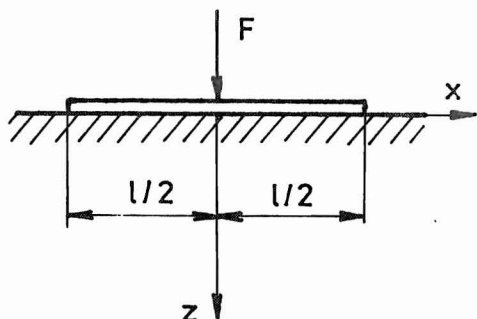
Klasická řešení kontaktních úloh vycházejí z předpokladu, že tělesa mají dokonale hladký povrch. Skutečný povrch těles je však vždy více nebo méně drsný. Tělesa se dotýkají na drobných ploškách mikroskopických nerovností; vyvýšená místa se přitom omačkávají, plasticky deformují nebo ulamují. V některých úlohách nelze tyto jevy zanedbat. Například přesah poloměrů ve spojích vytvořených sevřením (lisováním nebo sestavením zatepla) se omačkáním, popř. otěrem zmenšuje. Efektivní velikost tohoto přesahu je tedy vždy menší než ta, kterou zjistíme před montáží spoje měřením obou spojovaných částí. Únosnost tohoto sevření závisí - pokud není silový přenos zabezpečen jinak - na tlaku a na součiniteli adheze v dotykové ploše. Je zřejmé, že kontaktní úlohy tohoto typu jsou hraničním vědním oborem mezi teorií elasticity, popř. plasticity, a tribologií.

V tomto semináři se pokusíme odvodit, nebo alespoň citovat výsledky důležité pro aplikace ve stavbě strojů. Některá odvození uvedeme podrobně, v jiných případech odkážeme na literaturu. Budeme se snažit, aby obtížnější text byl vystřídán snadno pochopitelnými elementárními příklady. Snad tím vyhovíme různorodým požadavkům čtenářů, a tak snáze udržíme jejich pozornost.

1. NĚKOLIK ELEMENTÁRNÍCH PŘÍKLADŮ

O kontaktních úlohách můžeme hovořit i u některých problémů z teorie nosníků, které nyní uvedeme. Ukáží se na nich charakteristické vlastnosti kontaktních úloh, ačkoli matematické prostředky k jejich řešení jsou velmi jednoduché.

Uvažujme nejprve o nosníku délky ℓ , který je prizmatický, homogenní, dokonale elastický a který spočívá na Winklerově pružném podkladu. Je zatížen uprostřed osamělou silou podle obr. 1. Předpokládáme, že průřez nosníku je sou-



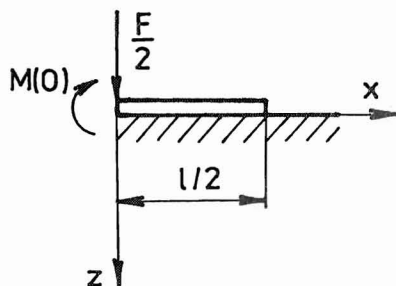
OBR. 1

měrný k rovině nákrasny (x, z) , takže vzniká rovinný ohyb. Diferenciální rovnice ohybové čáry nosníku na pružném podkladu je

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = 0 \quad (1.1)$$

Zde EJ je ohybová tuhost, k modul podkladu. Síla F působí v bodě $x = 0$. Definiční obor je $-\ell/2 \leq x \leq \ell/2$. Vzhledem k souměrnosti stačí řešit jen pravou polovinu nosníku (obr. 2) zatíženou silou $F/2$ a dvojitou $M(0)$. Okrajové podmínky jsou

$$\begin{aligned} w'(0) &= 0, & w''(0) &= \frac{F}{2EJ} \\ w''(\ell/2) &= 0, & w'''(\ell/2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$



OBR. 2

První dvě vyplývají ze symetrie. Třetí podmínka vyjadřuje vymizení ohybového momentu a čtvrtá vymizení posouvající síly na volném konci nosníku. Řešení rovnice (1.1) má, jak známo, tvar

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + \\ &+ e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

kde

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (1.4)$$

je charakteristická konstanta diferenciální rovnice (1.1). Po delším výpočtu dostaneme tyto průhyby v bodech $x = 0$, resp. $x = l/2$:

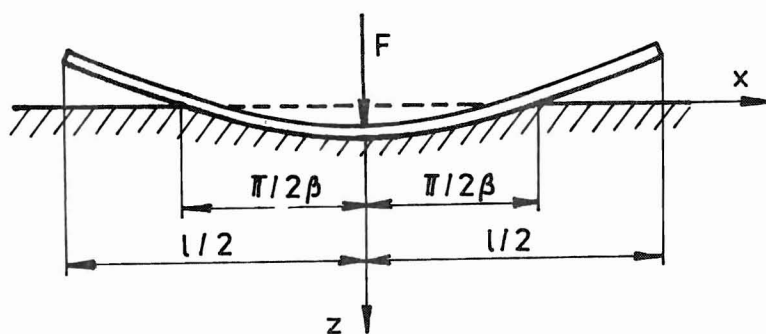
$$W(0) = \frac{F\beta}{2k} \frac{\cosh\beta l + \cos\beta l + 2}{\sinh\beta l + \sin\beta l} \quad (1.5)$$

$$W\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{2F\beta}{k} \frac{\cosh(\beta l/2) \cos(\beta l/2)}{\sinh\beta l + \sin\beta l} \quad (1.6)$$

Výraz (1.5) je vždy kladný, ale výraz (1.6) mění při $\beta l = \pi$ znaménko.*) Ohybový moment uprostřed nosníku vyjde

$$M(0) = \frac{F}{4\beta} \frac{\cosh\beta l - \cos\beta l}{\sinh\beta l + \sin\beta l} \quad (1.7)$$

Představme si nyní, že nosník na podkladu volně spočívá, takže se mezi podkladem a nosníkem může přenést pouze tlaková (měrná) síla. To znamená, že nosník může od podkladu odlehnout; v tom případě je nutné na příslušném intervalu dosadit do diferenciální rovnice (1.1) $k = 0$. Je-li nosník kratší než $l \leq \pi/\beta$, pak k odlehnutí nedojde a platí dosevadní řešení. Je-li však $l > \pi/\beta$, pak nosník odlehne na obou koncích v délce $(l/2 - \pi/2\beta)$ (obr. 3). Velikost tohoto odleh-

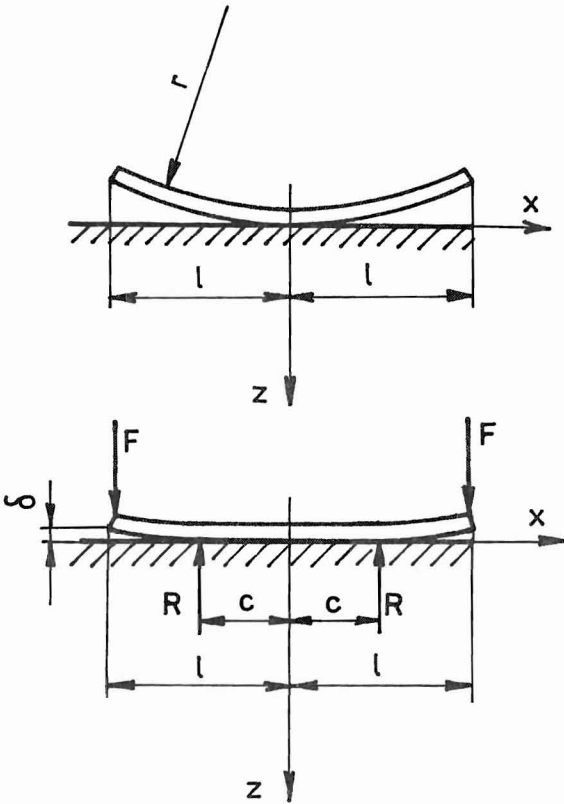


OBR. 3

* Pro velká βl by se měnilo znaménko při každém lichém násobku π .

nutí závisí jen na veličinách β , l , nikoli na zatížení F . Při jakémkoli F tedy nosník odlehne stejně. Odlehnuté části nosníku nejsou zatíženy a zůstanou přímé. Dotyková plocha (v daném případě úsečka) se mění skokem z délky l na délku $\pi/\beta < l$. Protože se zmenšuje, když zatížení začne působit, jde o kontaktní úlohu s ustupujícím dotykem. Je-li $l \leq \pi/\beta$ a k odlehnutí nedochází, je dotyková plocha stejná jako na počátku (délka l), takže jde o úlohu se stacionárním dotykem.

Zvolme nyní jinou úlohu. Na rovnou absolutně tuhou podložku budeme silami F přitlačovat štíhlý prut s malou prvotní křivostí $1/r$. To znamená, že $r \gg l$, kde $2l$ je délka prutu (obr. 4). Prut se bude působením sil F postupně narovnávat.



OBR. 4

Je zřejmé, že dokud jsou síly F nulové, dotýká se prut podložky teoreticky jen v bodě $x = 0$. Pro $F > 0$ bude interval dotyku $-c \leq x \leq c$, přičemž $0 < c < l$. Na tomto intervalu bude křivost nulová. Protože ohybový moment je úměrný změně křivosti nosníku, bude

$$M(x) = -EJ \frac{1}{r} = \text{konst} \quad (1.8)$$

na intervalu $-c \leq x \leq c$. Je-li ohybový moment konstantní, vymizí posouvající síla T i reakce q přenášená z podložky, neboť

$$T = \frac{dM}{dx}, \quad q = -\frac{dT}{dx} \quad (1.9)$$

Tyto vztahy vyplývají z požadavku rovnováhy elementu nosníku o délce dx .

Na uvedeném intervalu vzniká tedy čistý ohyb s ohybovým momentem (1.8). Aby mohl nastat, musí se do prutu přenést v bodě $x = c$, resp. $x = -c$, osamělá reakce $R = F$ směřující vzhůru. Tyto dvě osamělé reakce vytvoří spolu se silami F silové dvojice.

Je jistě zvláštní, že se reakce z podložky soustřeďuje do pouhých dvou bodů, ačkoli se prut dotýká podložky na délce $2c > 0$. Je to způsobeno idealizací. Předpokládáme ohebný prut, u něhož se průřezy posouvají a otáčejí, ale nedeformují se. O podložce předpokládáme, že je absolutně tuhá. Kdybychom tyto předpoklady zmírnili, ukázalo by se, že se silový přenos děje na konečném intervalu, avšak s velkou koncentrací napjatosti v okolí uvedených dvou bodů ($x = \pm c$). Výpočet by se však stal značně složitým.

Vzhledem k souměrnosti stačí, budeme-li se nadále zabývat jen pravou polovinou prutu. Ohybový moment v intervalu $c \leq x \leq l$ je

$$M(x) = -F(l-x) \quad (1.10)$$

a diferenciální rovnice ohybové čáry je

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{F}{EJ}(l-x) - \frac{1}{r} \quad (1.11)$$

Poslední člen v této rovnici představuje počáteční křivost prutu.^{x)}

Z podmínky spojitosti ohybového momentu v bodě $x = c$ dostaneme

$$M(c) = -F(l-c) = -EJ \frac{1}{r} \quad (1.12)$$

a tedy

$$c = l - \frac{EJ}{Fr} \quad (1.13)$$

Je zřejmé, že k úplnému narovnání celého prutu nemůže dojít, protože podmínka $c = l$ dává $F \rightarrow \infty$. Musila by tedy působit nekonečně velká síla. Proto bude vždy $c < l$. To ovšem platí jen za uvedených předpokladů pro pružný prut. Ve skutečnosti nemůže být žádný prut "donekonečna" pružný.^{*)}

x) Když $F = 0$, je $d^2w/dx^2 = -1/r$. Je to linearizovaný výraz pro křivost, který platí, pokud $|dw/dx|^2 \ll 1$.

*) A ovšem ani elementární teorie ohybu, tj. rovnice (1.11), nebude při velkém F platit.

Má-li být $c \geq 0$, musí síla F vyhovět nerovnosti

$$F \geq \frac{EJ}{lr} \quad (1.14)$$

Není-li tato nerovnost splněna, dotýká se prut podložky pouze v bodě $x=0$, dotyk je stacionární. Jakmile je podmínka (1.14) splněna, bude se interval dotyku s rostoucí silou zvětšovat.

Platí-li nerovnost (1.14), dostaneme na intervalu $c \leq x \leq l$ integrační rovnice (1.11) postupně

$$W'(x) = \frac{F}{EJ} \left(lx - \frac{1}{2} x^2 \right) - \frac{1}{r} x + C_1 \quad (1.15)$$

$$W(x) = \frac{F}{EJ} \left(\frac{1}{2} lx^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) - \frac{1}{2r} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (1.16)$$

Okrajové podmínky jsou

$$W'(c) = 0, \quad W(c) = 0 \quad (1.17)$$

Odtud vypočteme

$$C_1 = -\frac{Fc}{2EJ} (2l-c) + \frac{c}{r} \quad (1.18)$$

$$C_2 = \frac{Fc^2}{6EJ} (3l-2c) - \frac{c^2}{2r} \quad (1.19)$$

Tyto konstanty dosadíme do rovnice (1.16). Zároveň dosadíme i za křivost $1/r$ z rovnice (1.12) výraz

$$\frac{1}{r} = \frac{F(l-c)}{EJ} \quad (1.20)$$

Pro $c \leq x \leq l$, $F > EJ/lr$ vyjde popsáním způsobem

$$W = -\frac{F}{6EJ} (x-c)^3 \quad (1.21)$$

Průhyb je záporný, neboť směřuje proti kladné ose Z . Označíme-li vzdálenost konce prutu od podložky δ , tj. dosadíme-li $\delta = -w(\ell)$ (obr. 4), budeme mít tuto deformační charakteristiku:

(1) pro $F \leq EJ/lr$, $c = 0$

$$\delta = \frac{\ell^2}{2r} - \frac{F\ell^3}{3EJ} \quad (1.22)$$

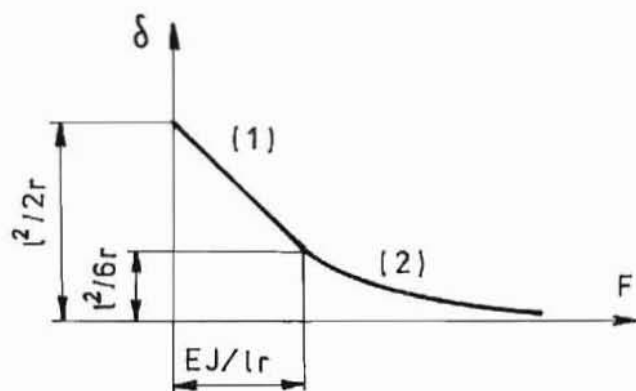
(2) pro $F > EJ/lr$, $0 < c < \ell$

$$\delta = \frac{F}{6EJ} (\ell - c)^3 = \frac{F}{6EJ} \left(\frac{EJ}{Fr} \right)^3 \quad (1.23)$$

a tedy

$$\delta = \frac{(EJ)^2}{6F^2 r^3} \quad (1.24)$$

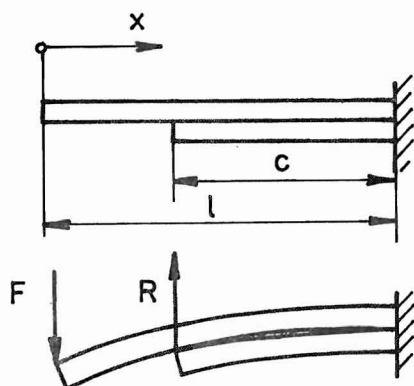
Deformační charakteristika je zakreslena schematicky na obr. 5. Část (1) je li-



OBR. 5

neární. Posuv konce prutu je úměrný síle F a dotyk je stacionární ($C = 0$). Část (2) je nelineární a dotyk postupující (s rostoucím F roste i C). Jde tedy o kontaktní úlohu, u níž lze zatěžování rozdělit na dvě fáze. První fáze se stacionárním dotykem přejde s rostoucí silou F do druhé fáze s postupujícím dotykem.

Uvedeme nyní další úlohu. Půjde o dva nosníky z téhož materiálu, s týmž průřezem, které spočívají na sobě bez vůle a bez tření. Horní nosník je o něco delší než spodní ($l > c$, obr. 6). Na volném konci je zatížen silou F . Pravé



OBR. 6

konce obou nosníků jsou dokonale vetknuté. Ptáme se, jaké bude jejich vzájemné působení, jak se budou deformovat a jak budou namáhány.

Jsou dvě možnosti. Buď bude přenos síly mezi nimi spojitý, pak se budou oba nosníky dotýkat na konečném intervalu. Nebo se od sebe oddělí a přenos síly se uskuteční jen mezi hranou spodního nosníku a horním nosníkem. Kdyby platil první předpoklad, tj. kdyby se nosníky dotýkaly lícnicími povrchy, měly by v daném místě x stejný průhyb i stejnou křivost ($l-c \leq x \leq l$). Protože křivost je úměrná ohybovému momentu a konstanta úměrnosti se rovná $1/EJ$

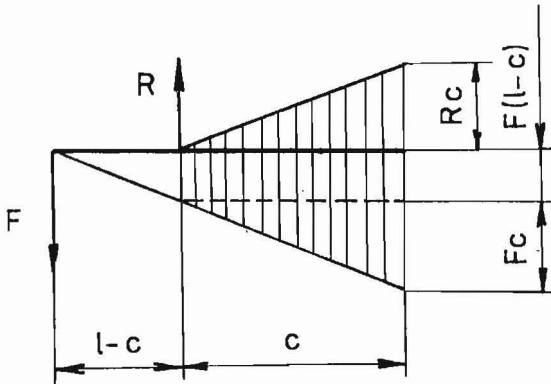
(je stejná u obou nosníků), musily by mít oba nosníky také stejný ohybový moment. Avšak v bodě $x = l-c$ bude v horním nosníku $M = -F(l-c)$, kdežto v dolním bude $M = 0$. První předpoklad tedy nemůže platit. Oba nosníky se budou v tomto místě dotýkat pouze hranou; přenesou se tam reakce R . Z podmínky, že průhyb obou nosníků musí být v bodě $x = l-c$ společný, dostaneme (obr. 7)

$$\left[F(l-c) \cdot c \frac{c}{2} + \frac{1}{2} Fc \cdot c \cdot \frac{2}{3} c \right] - \frac{1}{3} Rc^3 = \frac{1}{3} Rc^3 \quad (1.25)$$

Člen v hranaté závorce představuje EJ -násobek průhybu, který v bodě $x = l-c$ vyvolá v horním nosníku pouhá síla F . Druhý člen představuje nadlehčení silou R . Na levé straně (1.25) tedy máme celkový průhyb horního nosníku v bodě $x = l-c$, násobený ohybovou tuhostí. Je to statický moment vyšrafované části momentové plochy k vřislici o úsečce $l-c$.^{x)} Průhyb spodního nosníku je v tomto místě stejný jako průhyb horního nosníku. Z rovnice (1.25) vypočteme reakci R . Vyjde

$$R = \frac{1}{4} F \left(3 \frac{l}{c} - 1 \right) \quad (1.26)$$

x) Jde o trojúhelník a lichoběžník navzájem opačných znamének.



OBR. 7

Kontrolou správnosti zde může být, že pro $l=c$ musí vyjít $R = F/2$. V tom případě jsou totiž oba nosníky stejně dlouhé, takže musí být namáhány stejně. Pro $l > c$ je však vždy $R > F/2$.

Průhyb volného konce horního nosníku je

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{Fl^3}{3EJ} - \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} R c \cdot c \left(l - \frac{1}{3} c \right) = \\ &= \frac{Fl^3}{3EJ} - \frac{R}{6EJ} c^2 (3l - c) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Když sem dosadíme z rovnice (1.26),

vyjde po úpravě

$$\delta = \frac{F}{24EJ} [(2l-c)^3 + 3l^2c] \quad (1.28)$$

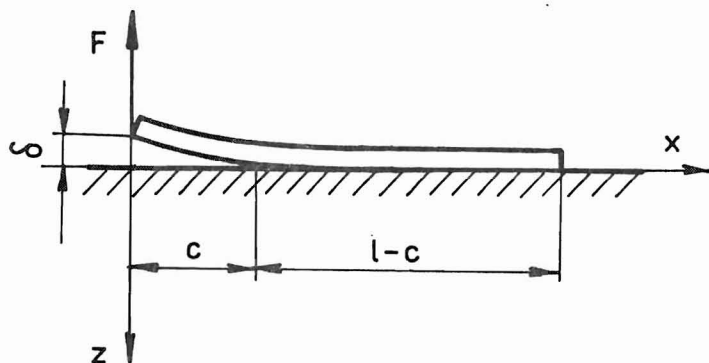
Pro $l=c$ musí vyjít $\delta = Fl^3/6EJ$. To skutečně vychází.

Je zřejmé, že se v tomto případě oba nosníky dotýkají po celé délce jen při nulovém zatížení (obr. 6 nahoře). Jakmile začne síla F působit, nosníky se v celé délce oddělí a dotýkají se už jen v bodech $x = l-c$, popř. $x = l$. Prakticky jde tedy o úlohu se stacionárním dotykem, při níž je podle (1.28) průhyb přímo úměrný síle F .*) Zahrneme-li do svých úvah i počáteční stav, kdy se oba nosníky dotýkají v délce c , můžeme považovat daný problém za úlohu s ustupujícím dotykem. Oblast dotyku se přitom na počátku zatěžování nespojitě změní a pak zůstává stálá. Mezi deformací, popř. namáháním, a zatěžující silou F platí přímá úměrnost. V kontaktních úlohách s postupujícím dotykem tato věta neplatí.

Uvažujme nyní o případě dlouhé a štíhlé pružné tyče, která spočívá na tuhé vodorovné podložce a je zatížena vlastní tíhou. Do jejího levého konce položíme počátek pravotočivého systému kartézských souřadnic tak, že osa X směřuje v ose tyče vpravo a osa Z dolů. Osa Y tedy směřuje vodorovně před nákresnu. Levý konec tyče nyní pozvedneme silou F do malé výšky δ nad úroveň podložky

*) Dotyk v bodě $x = l-c$ by vymizel, kdyby se změnil smysl síly F . To však nepředpokládáme.

(obr. 8). Ptáme se, jaká bude deformace a jaké bude namáhání tyče. Budeme před-



OBR. 8

pokládat, že tyč se ohne v rovině (x, z) a že se přitom nebude zkrucovat. Je-li tyč homogenní a izotropní, což budeme předpokládat, pak stačí, aby rovina (x, z) byla rovinou souměrnosti.

Protože průhyb δ levého konce je velmi malý, budeme moci použít elementární teorie nosníků a linearizovaný výraz pro křivost ohybové čáry

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{r} \quad (1.29)$$

Protože $r = EJ / M(x)$, je diferenciální rovnice ohybové čáry

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ} \quad (1.30)$$

Zde $M(x)$ je ohybový moment v místě x (kladný, působí-li tah ve spodním vlákne), EJ ohybová tuhost, J kvadratický moment (moment setrvačnosti) průřezové plochy k centrální ose rovnoběžné s osou y a r je poloměr křivosti (kladný, leží-li střed křivosti nad osou úseček).

Definiční oblast $0 \leq x \leq l$ musíme rozdělit na dvě části. V první části $0 \leq x < c$ odlehne nosník (tyč) od podložky a zakřiví se. V druhé části $c < x \leq l$ bude nosník přímý ($1/r = 0$), takže v něm nebude působit žádný ohybový moment. Podle (1.9) tam nebude působit ani posouvající síla a také výsledné délkové (měrné) zatížení q tam bude nulové. Reakce podložky q_R tedy musí být právě rovna opačné hodnotě délkového zatížení $q_F = \rho g S$ vlastní tíhou. Zde ρ je hustota, g tíhové zrychlení a S průřez tyče. V druhé části nosníku

tedy bude

$$q_R = -q_F, \quad q = q_R + q_F = 0 \quad (1.31)$$

Jak se prohne a jak bude namáhána první část nosníku? Ohybový moment pro $0 < x < c$ zřejmě bude

$$M(x) = Fx - \frac{1}{2} q_F x^2 \quad (1.32)$$

Tento ohybový moment musí v bodě $x = c$ vymizet. Protože tam nepůsobí žádný osamělý moment (žádná silová dvojice), musí být funkce $M(x)$ na celém definičním intervalu spojitá. Bude proto

$$Fc - \frac{1}{2} q_F c^2 = 0 \quad (1.33)$$

Protože $c \neq 0$, můžeme rovnici (1.33) krátit. Vyjde

$$F = \frac{1}{2} q_F c \quad (1.34)$$

Posouvající síla vyjde z rovnic (1.9) a (1.32) takto

$$T(x) = \frac{1}{2} q_F (c - 2x) \quad (1.35)$$

Její stejnou velikost dostaneme i metodou myšleného řezu. Pro $x = c$ vyjde z rovnice (1.35)

$$T(c) = -\frac{1}{2} q_F c \quad (1.36)$$

Protože se v uvažovaném intervalu nosník podložky nedotýká, je $q_R = 0$ a $q_F = q$. Průběh $T(x)$, popř. $M(x)$, je zakreslen na obr. 9. Je zřejmé, že se v bodě $x = c$ posouvající síla T nespojitě mění o hodnotu

$$R = \frac{1}{2} q_F c = \frac{1}{2} qc \quad (1.37)$$

V tomto bodě se tedy musí na nosník přenášet z podložky osamělá síla $R = qc/2 = q_F c/2$. Rovnice (1.35) proto platí jen v otevřeném intervalu $0 < x < c$. V bodech $x = 0$, resp. $x = c$, se posouvající síla mění skokem o hodnotu $qc/2$. Průběh namáhání nosníku je tedy tento:

$$0 < x < c$$

$$q = q_F = \rho g S$$

$$T = \frac{1}{2} q_F (c - 2x)$$

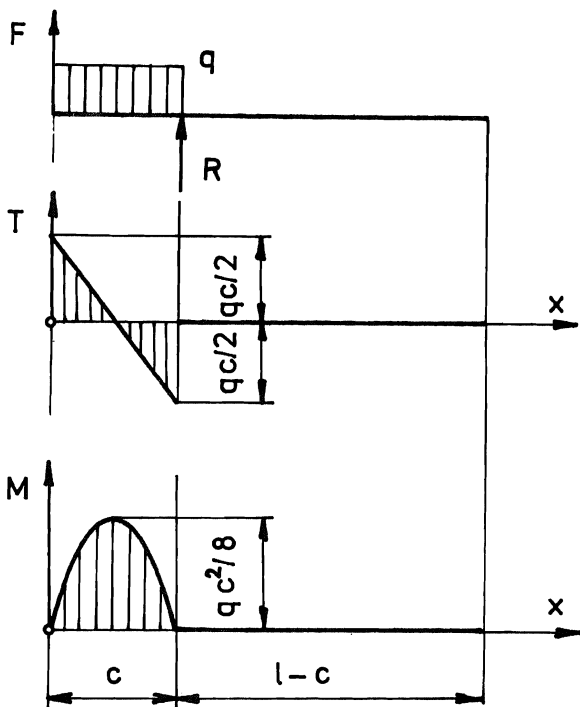
$$M = \frac{1}{2} q_F x (c - x)$$

$$c < x \leq l$$

$$q = q_F + q_R = 0$$

$$T = 0$$

$$M = 0$$



OBR. 9

Známe-li namáhání $M(x)$, můžeme z rovnice (1.30) vypočítat i deformace. Zdálo by se, že je tím úloha vyřešena. Zapomínáme, že dosud neznáme úsečku c . Víme o ní jen, že je vázána se silou F rovnicí (1.34). Sílu F však také neznáme.

Budeme úlohu řešit tak, jako bychom úsečku c znali. Dosazením (1.32) do (1.30) dostaneme

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{q_F}{2EJ} (cx - x^2) \quad (1.38)$$

Integrací vyjde

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{dw}{dx} = \\ &= -\frac{q_F}{2EJ} \left(\frac{1}{2} cx^2 - \frac{1}{3} x^3 + C_1 \right) \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$w(x) = -\frac{q_F}{2EJ} \left(\frac{1}{6} cx^3 - \frac{1}{12} x^4 + C_1 x + C_2 \right) \quad (1.40)$$

Okrajové podmínky jsou

$$w(0) = -\delta \quad (1.41)$$

$$w'(c) = 0, \quad w(c) = 0 \quad (1.42)$$

Z podmínek (1.42) dostaneme

$$C_1 = -\frac{1}{6} C^3, \quad C_2 = \frac{1}{12} C^4 \quad (1.43)$$

Bude tedy

$$w(x) = \frac{\rho g S}{24 EJ} (x^4 - 2Cx^3 + 2C^3x - C^4) \quad (1.44)$$

Z podmínky (1.41) vyjde konečně

$$C = \sqrt[4]{\frac{24 EJ \delta}{\rho g S}} \quad (1.45)$$

Řešení platí, pokud je $C < l$. Proto musí být

$$\delta < \frac{\rho g l^4 S}{24 EJ} = \delta_1 \quad (1.46)$$

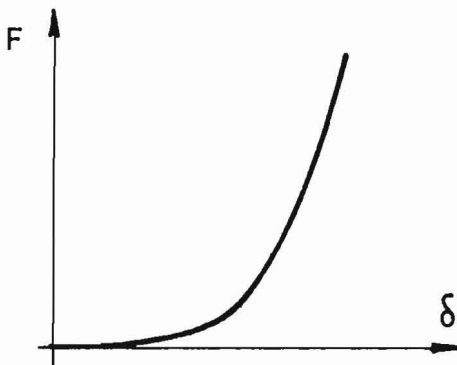
Není-li podmínka (1.46) splněna, zvedne se celá tyč a zůstane opřena jen o pravý konec.

Všimněme si některých zvláštností této úlohy. Dokud je $\delta = 0$, dotýká se tyč podložky v celé délce a neohýbá se. Reakce přenášená z podložky je rovnoměrná. Jakmile konec tyče zvedneme tak, aby $0 < \delta < \delta_1$, omezí se kontakt s podložkou na délku $l - c$. Ta bude tím kratší, čím bude δ , resp. F , větší. Mezi posuvem δ a silou F není přímá úměrnost, přestože pro materiál platí Hookeův zákon a posuvy jsou malé. Podle (1.34) a (1.45) soudíme, že

$$F = \text{konst.} \sqrt[4]{\delta} \quad (1.47)$$

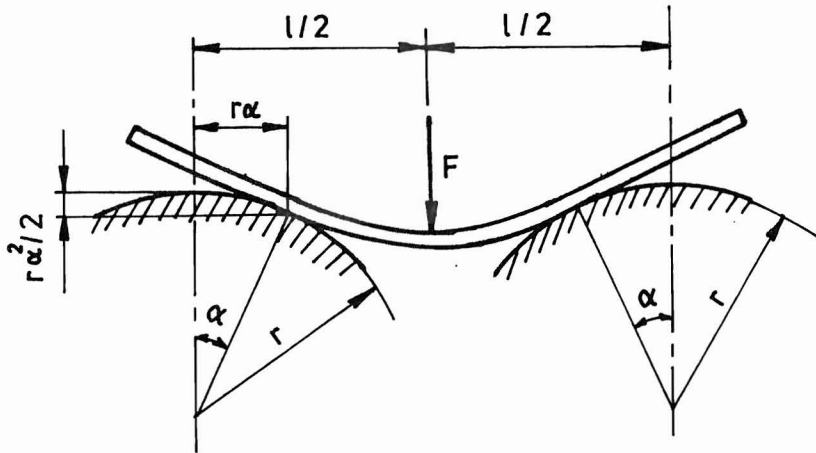
takže charakteristika $F = F(\delta)$ je silně nelineární (obr. 10). S rostoucím F

se interval dotyku zmenšuje. Zdálo by se tedy logické, kdybychom tuto fázi zatěžování ($0 < \delta < \delta_1$) zařadili mezi kontaktní úlohy s ustupujícím dotykem. Avšak toto rozdělení kontaktních úloh má smysl jen tehdy, mění-li se všechny síly úměrně témuž parametru. Kdyby se síla tíže q_F měnila úměrně se silou F , byl by podíl F/q_F konstantní a podle (1.34) by byla konstantní i úsečka C . Šlo by pak skutečně o úlohu s ustupujícím dotykem, pro kterou je charakteristické, že se oblast dotyku mění se zatížením nespojitě a pak zůstává konstantní.



OBR. 10

Uvedeme ještě jednu podobnou úlohu. Na obr. 11 je znázorněn ohyb nosníku,



OBR. 11

který je položen přes dva sudy (válce o poloměru r) a uprostřed zatížen silou F . Jestliže se síla F zvětšuje, zkracuje se pole nosníku o délku $2r\alpha$. To platí za předpokladu, že úhel α je malý. Najdeme jej z podmínky, že sklon nosníku v bodech dotyku je právě roven α . Vyjde

$$\alpha = \frac{F(l - 2r\alpha)^2}{16EJ} \quad (1.48)$$

To je kvadratická rovnice pro úhel α , jejíž řešení je

$$\alpha = \frac{l}{2r} + \frac{2EJ}{Fr^2} - \sqrt{\frac{4(EJ)^2}{F^2r^4} + \frac{2lEJ}{Fr^3}} \quad (1.49)$$

Kladné znaménko odmocniny nevyhovuje, neboť pro $\lim F \rightarrow 0$ musí vyjít $\lim \alpha \rightarrow Fl^2/16EJ$. Rovnice (1.49) se k numerickému výpočtu moc nehodí, je-li F malé (odečítají se velká čísla a přesnost se zhoršuje). S použitím binomické věty dostaneme vhodnější tvar (stále za předpokladu, že α je malé)

$$\alpha \cong \frac{Fl^2}{16EJ} \left(1 - \frac{Flr}{4EJ}\right) \quad (1.50)$$

Máme-li úhel α , dostaneme pro průhyb uprostřed nosníku rovnici

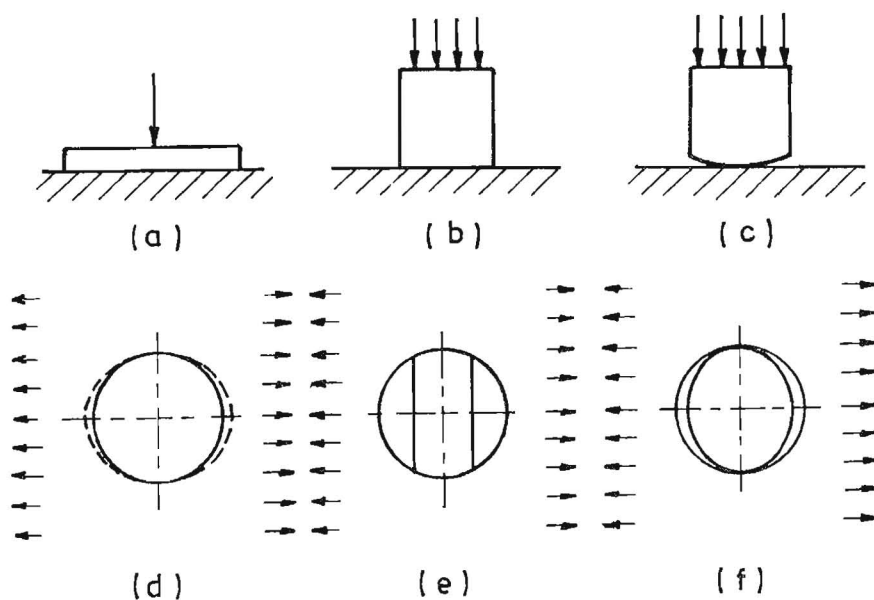
$$\delta = \frac{F(l-2r\alpha)^3}{48 EJ} + \frac{r\alpha^2}{2} \quad (1.51)$$

Je zřejmé, že závislost $\delta = \delta(F)$ je nelineární a že průhyb roste pomaleji než síla F .

Jak máme tuto úlohu podle obr. 11 zařadit mezi kontaktní úlohy? Dotyková oblast se omezuje na pouhé dva body (což je důsledek idealizace, ve skutečnosti půjde o malé plošky). Poloha těchto bodů se však se zatížením mění. Jestliže oblast dotyku při rostoucím zatížení přestane být podmnožinou původní oblasti dotyku, řadíme takový případ vždy mezi úlohy s postupujícím dotykem. Tak je tomu i v tomto případě. Závislost $\delta(F)$ je nelineární.

Diskuse

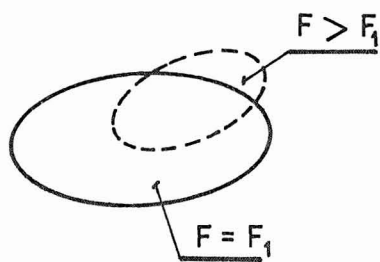
Rozdělení úloh o dotyku těles na úlohy s ustupujícím, stacionárním nebo postupujícím dotykem je důležité z metodického hlediska. Zavedli je Dundurs a Stippes /10/. Uvedli příklady, které jsou znázorněny na obr. 12. Příklad (a)



OBR. 12

představuje nosník spočívající na pružné polorovině. Je analogický s případem znázorněným na obr. 1. Rozdíl je v tom, že na obr. 1 byl nosník na Winklerově pružném podkladu, u něhož je průhyb úměrný reakci podkladu v daném místě; na deformaci v ostatních místech přitom nezáleží a napjatost podkladu se nezkoumá. Na obr. 12 (a) jde o pružnou polorovinu, která je pak ve stavu rovinné napjatosti. V obou případech dojde - je-li nosník dost štíhlý a dlouhý - ke stejnému jevu: ve střední části se nosník prohne směrem dolů, na koncích se však nosník od podložky oddělí a jeho konce se zvednou. Oblast dotyku se zmenší, a to nespojitě (srov. s obr. 3). Jde tedy o úlohu s ustupujícím dotykem. Je-li do pružné poloroviny zatlačován tuhý nebo pružný blok [obr. 12 (b)], je dotyk stacionární. V případě podle obr. 12 (c) je dolní plocha takového bloku (razníku) válcová. Je to případ kontaktní úlohy s postupujícím dotykem. Obr. 12 (d) představuje hladkou kruhovou inkluzi v kruhovém otvoru pružné roviny namáhané tahem. Můžeme si představit, že do otvoru ve stěně je bez vůle a bez tření vložen čep. Má přesně stejný poloměr jako otvor. Při zatížení stěny tahem se dotyk omezí jen na blízké okolí bodů, v nichž je tečna rovnoběžná s vektorem napětí působícím ve vzdálených místech roviny. V ostatních místech se vytvoří srpovitá mezera. Jde o kontaktní úlohu s ustupujícím dotykem. Jestliže odejmeme z inkluze, popř. z čepu, materiál ve tvaru úseče tak, abychom odňali část, kde se dotyk uvolňuje [obr. 12 (e)], bude dotyk stacionární. Na obr. 12 (f) je do otvoru ve stěně vložen eliptický čep, který se otvoru dotýká jen ve dvou bodech (přesněji řečeno v úsečkách kolmých k nákresně, které se promítají do dvou bodů). Při zatěžování se dotyková oblast zvětšuje, je to tedy kontaktní úloha s postupujícím dotykem.

Ve všech dosud probraných případech se ukázalo, že při proporcionálním zatěžování je mezi deformacemi, popř. napětím, a zatížením přímá úměrnost jen tehdy, jde-li o úlohy s ustupujícím nebo se stacionárním dotykem.^{*)} Jde-li o ustupující dotyk, změní se dotyková oblast nespojitě, zůstane podmnožinou původní dotykové oblasti a dál se nemění.



OBR. 13

O postupujícím dotyku hovoříme tehdy, zvětšuje-li se oblast dotyku nebo přemístí-li se tak, že překročí hranice původní oblasti dotyku (obr. 13). Pro úlohy s postupujícím dotykem dostáváme vždy nelineární závislost mezi deformacemi, popř. napětím, a působícím zatížením. Proto nelze použít princip superpozice (dvakrát větší zatížení nevyvolá dvakrát větší posuvy).

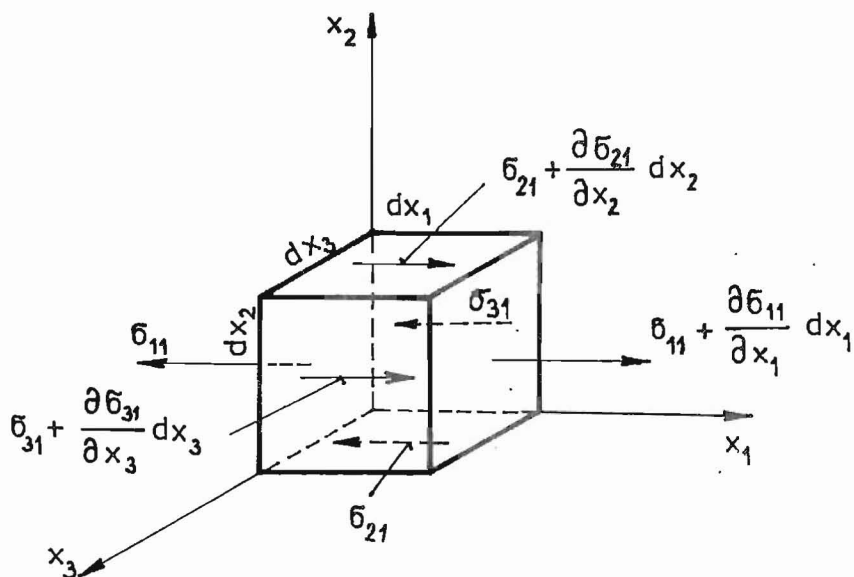
Tyto poznatky jsme získali zobecněním zkušeností nabytých řešením několika jednoduchých příkladů. Důkazy se najdou v lit. /10/, /15/.

*) Tato přímá úměrnost ještě neznamená, že platí princip superpozice. K tomu by bylo nutné, aby oblast dotyku byla stejná pro všechny superponované stavy.

2. NAVIEROVY-LAMÉHO ROVNICE

K řešení kontaktních úloh je třeba znát metody řešení prostorových úloh teorie pružnosti; s rovinnými úlohami nevystačíme. Pro ideálně pružné těleso máme k dispozici tři diferenciální rovnice rovnováhy, šest Cauchyho kinematických vztahů mezi posuvy a poměrnými deformacemi a šest konstitutivních rovnic představujících zobecněný Hookeův zákon. Je to celkem patnáct simultánních rovnic pro patnáct neznámých funkcí (tři složky posuvů, šest složek poměrných deformací a šest složek napjatosti).

Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic x_1, x_2, x_3 a z tělesa uvolníme nekonečně malý kvádr o hranách dx_1, dx_2, dx_3 (obr. 14). Sečteme všechny složky



OBR. 14

sil působících ve směru osy x_1 . Na levou stěnu o ploše $dx_2 dx_3$ působí v uvedeném směru napětí σ_{11} a síla $\sigma_{11} dx_2 dx_3$. Na pravou stěnu o téže ploše působí síla $[\sigma_{11} + (\partial \sigma_{11} / \partial x_1) dx_1] dx_2 dx_3$ a rozdíl obou je $(\partial \sigma_{11} / \partial x_1) dx_1 dx_2 dx_3$. Podobně na zadní stěnu o ploše $dx_1 dx_2$ působí vlevo síla $\sigma_{31} dx_1 dx_2$ a na přední stěnu vpravo síla $[\sigma_{31} + (\partial \sigma_{31} / \partial x_3) dx_3] dx_1 dx_2$. Rozdíl obou je $(\partial \sigma_{31} / \partial x_3) dx_1 dx_2 dx_3$. Obdobně vypočteme i rozdíl sil působících vpravo a vlevo na spodní, resp. na horní stěnu elementu. Vyjde $(\partial \sigma_{21} / \partial x_2) dx_1 dx_2 dx_3$. Kromě toho bude vpravo působit objemová síla $X_1 dx_1 dx_2 dx_3$. Celkem tedy bude - po krácení činitelem $(dx_1 dx_2 dx_3)$ - rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \quad (2.1)$$

Záměnou indexů v pořadí 1-2-3-1 (tzv. cyklickou záměnou) dostaneme i další dvě rovnice pro síly působící ve směru X_2 , popř. X_3 :

$$\frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} + X_2 = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial G_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial G_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{23}}{\partial x_2} + X_3 = 0 \quad (2.3)$$

Tyto rovnice lze zapsat stručněji, využijeme-li pravidel tenzorové algebry a Einsteinova součtového pravidla /20/. Podle indexů, které se v daném členu opakují právě dvakrát, sčítá se od 1 do 3. Místo (2.1) až (2.3) budeme pak mít jedinou rovnici

$$G_{ji,j} + X_i = 0 \quad (2.4)$$

Zde jsme označili

$$G_{ji,j} = \frac{\partial G_{ji}}{\partial x_j} = \frac{\partial G_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{3i}}{\partial x_3} \quad (2.5)$$

Rovnice (2.4) představuje tři rovnice (2.1) až (2.3), dosadíme-li $i = 1, 2, 3$.

Jsou-li posuvy a derivace posuvů malé, odvodíme z obr. 15 snadno poměrné prodloužení úsečky dx_1

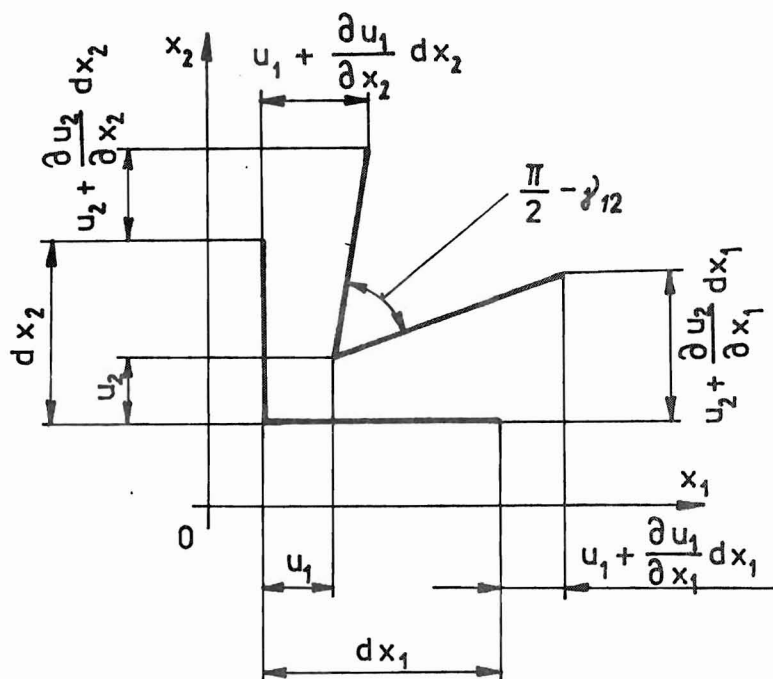
$$\epsilon_{11} = \frac{\Delta dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (2.6)$$

a zkcos, tj. změnu úhlu úseček dx_1 , dx_2

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \gamma_{21} \quad (2.7)$$

Abychom mohli tyto výsledky jednotně zapsat, zavedeme poloviční zkcosy

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ji} \quad (2.8)$$



OBR. 15

Pak rovnice (2.6), (2.7) a další rovnice odvozené z nich cyklickou záměnou indexů můžeme zapsat jediným vztahem

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.9)$$

kde $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$. Indexy za čárkou tedy představují parciální derivaci. Vzhledem k souměrnosti v indexech představuje rovnice (2.9) šest Cauchyho vztahů.

Hookeův zákon vyjadřuje lineární závislost složek ϵ_{ij} tenzoru deformace na složkách σ_{ij} tenzoru napjatosti. Pro izotropický materiál jej lze zapsat ve tvaru /20/, /15/

$$\sigma_{ij} = 2G \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.10)$$

resp.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_{ij} - \mu\sigma_{kk} \delta_{ij}] \quad (2.11)$$

Vztah (2.11) je inverzní ke vztahu (2.10). Přitom

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (2.12)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2.13)$$

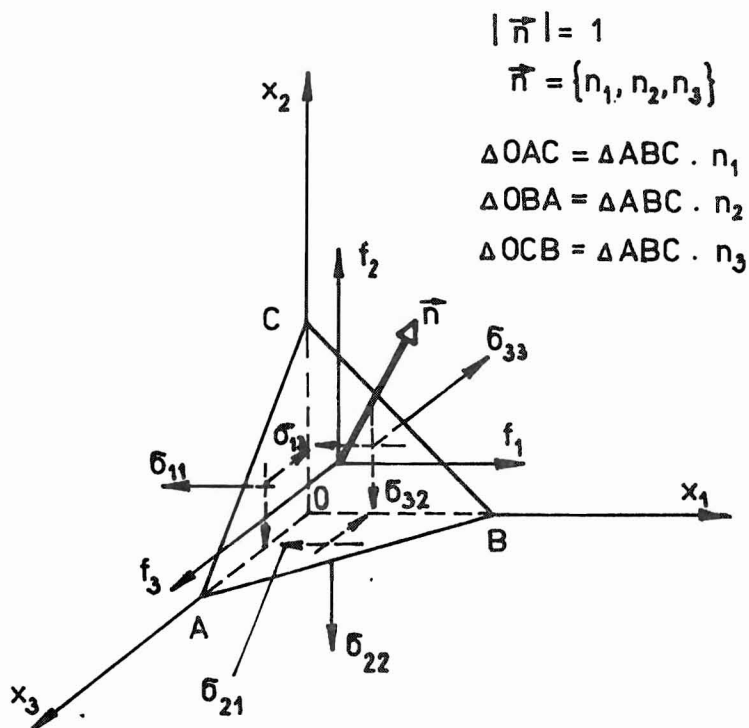
E je modul pružnosti v tahu- tlaku, G - modul pružnosti ve smyku, λ - Lamého konstanta, μ - Poissonovo číslo, δ_{ij} - Kroneckerovo delta ($\delta_{ij} = 1$ pro $i=j$; $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$).

Rovnice (2.10), resp. (2.11), představuje šest konstitutivních rovnic. Tato rovnice tvoří spolu s rovnicemi (2.4) a (2.9) základ matematické teorie pružnosti.

Působí-li na plochu ΔS povrchu tělesa síla $\vec{\Delta F}$, označujeme

$$\vec{f} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta S} \quad (2.14)$$

Je to vektor napětí (popř. napěťový vektor). Z rovnic rovnováhy trojbokého hranolu na obr. 16 dostaneme vztah pro složky f_i napěťového vektoru



OBR. 16

$$f_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ij} n_j \quad (2.15)$$

Souměrnost tenzoru napjatosti ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) vyplývá z momentových podmínek rovnováhy hranolku na obr. 14.

Okrajové podmínky předepisujeme zpravidla tak, že na části S_1 povrchu je předepsáno \vec{f} a na jiné části S_2 posuv \vec{u} .*) Přitom $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Nejjednodušší metodu řešení uvedených rovnic dostaneme, když předem eliminujeme dvanáct z patnácti hledaných funkcí. To se skutečně podaří, když napětí vyjádříme pomocí poměrných deformací, ty pak ještě pomocí posuvů a vše dosadíme do rovnic rovnováhy. Zůstanou tři simultánní parciální diferenciální rovnice pro tři neznámé složky posuvů $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$. Nejprve tedy dosadíme z rovnice (2.10) do (2.4). Vyjde

$$2 \sigma \varepsilon_{ji,j} + \lambda \varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} + X_i = 0 \quad (2.16)$$

Vzhledem k vlastnostem Kroneckerova symbolu se mu někdy říká "substituční symbol". Je totiž

$$\varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} = \varepsilon_{kk,i} \quad (2.17)$$

"Slepé" indexy "k" můžeme zaměnit za kterékoli jiné, pokud se v daném členu ne vyskytují, protože se podle nich sčítá. Je tedy např.

$$\varepsilon_{kk,i} = \varepsilon_{jj,i} = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{jj,i} = \partial \varepsilon_{11} / \partial x_i + \partial \varepsilon_{22} / \partial x_i + \partial \varepsilon_{33} / \partial x_i \quad (2.18)$$

($i = 1, 2, 3$). Místo (2.16) můžeme tedy napsat

$$2 \sigma \varepsilon_{ji,j} + \lambda \varepsilon_{jj,i} + X_i = 0 \quad (2.19)$$

Podle (2.9) máme

$$\varepsilon_{ji,j} = \frac{1}{2} (u_{j,i,j} + u_{i,j,j}) \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{jj,i} = u_{j,j,i} \quad (2.21)$$

*) To není jediný možný způsob. Na nějaké části S_3 povrchu může být např. předepsána složka u_1 posuvu a složky f_2, f_3 vektoru napětí. Složky u_2, u_3, f_1 nejsou předepsány a získají se řešením úlohy.

takže bude

$$G(u_{j,ij} + u_{i,jj}) + \lambda u_{j,ji} + X_i = 0 \quad (2.22)$$

Vzhledem k spojitosti posuvů lze pořadí derivací zaměnit, takže dostaneme

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} + X_i = 0 \quad (2.23)$$

Protože $i = 1, 2, 3$, představuje vztah (2.23) tři Navierovy (Lamého) diferenciální rovnice pro složky posuvů u_i .

Tři skalární funkce $u_i(x_1, x_2, x_3)$ tvoří dohromady jednu vektorovou funkci $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$.*) Podobně tři složky X_i objemových sil tvoří vektor \vec{X} . Vnucuje se otázka, zda by tři skalární rovnice (2.23) nebylo vhodné zapsat jako jednu vektorovou rovnici. Za tím účelem si připomeneme význam vektorového diferenciálního operátoru "nabla" (Hamiltonova operátoru)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (2.24)$$

kde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \text{ resp. } \vec{e}_3$ jsou jednotkové vektory ve směrech os souřadnic $X_1, X_2, \text{ resp. } X_3$. Zřejmě

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.25)$$

Tečkou označujeme skalární součin vektorů.

S přihlédnutím k pravidlu (2.25), které vyplývá z ortogonalit y jednotkových vektorů, dostaneme vztah pro Laplaceův operátor

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (2.26)$$

Bude např.

$$\nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.27)$$

a ve složkách

$$\nabla^2 u_i = u_{i,jj} \quad (2.28)$$

Vztah (2.27) platí pro vektorovou funkci $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ a je ekvivalentní se třemi složkovými rovnicemi (2.28).

Pro divergenci vektoru posuvu dostaneme

*) Vektor \vec{r} má složky x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \cdot (u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3) = \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{u} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\Delta \Delta V}{\Delta V} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Je to poměrná změna objemu $\Delta V = dx_1 dx_2 dx_3$. Označme tuto změnu symbolem ε (bez indexů). Bude tedy ε)

$$\varepsilon = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = u_{j,j} \quad (2.30)$$

Z rovnic (2.12) a (2.13) vypočteme

$$\lambda + G = \frac{G}{1 - 2\mu} \quad (2.31)$$

Počítání s různými elastickými veličinami pro izotropní materiál usnadní tab. 1. Rovnici (2.23) nyní můžeme upravit s použitím (2.28), (2.30) a (2.31)

Tab. 1. Vztahy mezi elastickými veličinami pro pružný izotropický materiál

Veličina	E, μ	E, G	λ, G
λ (Lamé)	$\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$	λ
G (modul pružnosti ve smyku)	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	G	G
E (Youngův modul)	E	E	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$
k (modul objemové pružnosti)	$\frac{E}{3(1-2\mu)}$	$\frac{GE}{3(3G-E)}$	$\lambda + \frac{2}{3}G$
μ (Poissonovo číslo)	μ	$\frac{E-2G}{2G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$

Poznámka: v teoretické literatuře se modul pružnosti ve smyku značí často μ a Poissonovo číslo ν .

$$\varepsilon) \text{ V technickém značení } \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

do tvaru

$$2G \nabla^2 \vec{u} = -2\vec{X} - \frac{2G}{1-2\mu} \vec{\nabla} \varepsilon \quad (2.32)$$

Je to vektorový tvar Navierových (Lamého) rovnic.

Rovnici (2.32) bychom mohli krátit dvěma, avšak pro lepší návaznost na Papkovičovu-Neuberovu metodu tak neučiníme (viz 3. kapitolu). Vztah (2.32) představuje soustavu tří rovnic ($i = 1, 2, 3$), které jsou ekvivalentní s jedinou vektorovou rovnicí (2.32), v níž ε má význam (2.30).

Aplikujeme-li Hamiltonův operátor $\vec{\nabla}$ na skalární funkci $u(x_1, x_2, x_3)$, dostaneme gradient

$$\vec{\nabla} u = \text{grad } u \quad (2.33)$$

Je to vektor. Aplikujeme-li též operátor na vektorovou funkci $\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3)$, dostaneme divergenci

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v} \quad (2.34)$$

což je skalár. Tyto pojmy jsme už objasnili jinde /20/.

3. PAPKOVIČOVA-NEUBEROVA METODA

Prostorové úlohy z teorie elasticity bude možné řešit, budeme-li vědět, jak zacházet s vektorovou parciální diferenciální rovnicí (2.32). Geniální nápad, který měli ve třicátých letech nezávisle Papkovič /45/ a Neuber /41/, spočívá v tom, že řešení by mohlo mít stejný tvar jako rovnice (2.32). Položíme tedy

$$2G \vec{u} = 4(1-\mu) \vec{\psi} - \vec{\nabla}_x \quad (3.1)$$

a zkusíme najít vektorovou funkci $\vec{\psi}(x_1, x_2, x_3)$ a skalární funkci $\chi(x_1, x_2, x_3)$ tak, aby byla rovnice (2.32) splněna. Když (3.1) dosadíme do (2.32), dostaneme

$$4(1-\mu) \nabla^2 \vec{\psi} - \nabla^2 \vec{\nabla}_x = -2\vec{X} - \frac{2G}{1-2\mu} \vec{\nabla} \varepsilon \quad (3.2)$$

Funkci $\vec{\psi}$ vybereme tak, aby platilo

$$2(1-\mu) \nabla^2 \vec{\psi} = -\vec{\chi} \quad (3.3)$$

Pak se první členy na obou stranách rovnice (3.2) zruší a funkce χ bude vyhovovat rovnici

$$\nabla^2 \chi = 2G\varepsilon / (1-2\mu) \quad (3.4)$$

S použitím (2.30) a (3.1) dostaneme

$$2G\varepsilon = 2G \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 4(1-\mu) \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} - \nabla^2 \chi \quad (3.5)$$

Zavedeme polohový vektor \vec{r} o složkách $r_i = x_i$, $r_2 = x_2$, $r_3 = x_3$. Pak zajisté bude

$$r_{i,j} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad (3.6)$$

Identitu

$$\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\psi}) = \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{\psi} + 2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} \quad (3.7)$$

dokážeme snadno, rozepíšeme-li ji ve složkách. Bude

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\psi}) &= (r_i \psi_i)_{,jj} = (r_{i,j} \psi_i + r_i \psi_{i,j})_{,j} = \\ &= (\delta_{ij} \psi_i + r_i \psi_{i,j})_{,j} = (\psi_j + r_i \psi_{i,j})_{,j} \\ &= \psi_{j,j} + \delta_{ij} \psi_{i,j} + r_i \psi_{i,jj} = \\ &= 2\psi_{j,j} + r_i \psi_{i,jj} = 2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} + \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{\psi} \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. Do rovnice (3.5) nyní dosadíme za

$$2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = \nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\psi}) - \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{\psi} \quad (3.8)$$

a budeme mít

$$\begin{aligned} 2G\varepsilon &= 2(1-\mu) [\nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\psi}) - \vec{r} \cdot \nabla^2 \vec{\psi}] - \nabla^2 \chi = \\ &= 2(1-\mu) \nabla^2 (\vec{r} \cdot \vec{\psi}) + \vec{r} \cdot \vec{\chi} - \nabla^2 \chi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Při úpravě pravé strany poslední rovnice jsme využili vztahu (3.3). Když (3.9) dosadíme do (3.4), vyjde

$$2(1-\mu) \nabla^2 [\chi - (\vec{r} \cdot \vec{\psi})] = (\vec{r} \cdot \vec{\chi}) \quad (3.10)$$

Zvolme skalární funkci $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ takovou, aby

$$2(1-\mu)\nabla^2\Phi = (\vec{r}\cdot\vec{X}) \quad (3.11)$$

Pak se v rovnici (3.10) činitel $2(1-\mu)$ zkrátí a bude

$$\nabla^2[\chi - (\vec{r}\cdot\vec{\psi})] = \nabla^2\Phi \quad (3.12)$$

Rovnice bude zřejmě splněna, bude-li platit vztah

$$\chi = (\vec{r}\cdot\vec{\psi}) + \Phi \quad (3.13)$$

Když tuto funkci dosadíme do (3.1), bude

$$2G\vec{u} = 4(1-\mu)\vec{\psi} - \vec{\nabla}[(\vec{r}\cdot\vec{\psi}) + \Phi] \quad (3.14)$$

Toto je hledané řešení, které připisujeme Papkovičovi-Neuberovi.

Funkce $\vec{\psi}$, resp. Φ , vyhovují rovnici (3.3), resp. (3.11). Jsou-li objemové síly χ nulové, je

$$\nabla^2\vec{\psi} = 0, \quad \nabla^2\Phi = 0 \quad (3.15)$$

Potom složky ψ_i vektorové funkce $\vec{\psi}$ i skalární funkce Φ jsou harmonické funkce.

Diskuse

Jsou-li dány objemové síly $\vec{X}(x_1, x_2, x_3)$, nedostaneme z rovnic (3.3) a (3.11) funkce $\vec{\psi}$, Φ jednoznačně. Z rovnice (3.14) je zřejmé, že pole $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ odvozené z funkcí $\vec{\psi}$, Φ je stejné jako pole, které odvodíme z funkcí

$$\vec{\psi}^* = \vec{\psi} + \vec{\nabla}\xi \quad (3.16)$$

$$\Phi^* = \Phi + 4(1-\mu)\xi - \vec{r}\cdot\vec{\nabla}\xi \quad (3.17)$$

jestliže skalární funkce ξ bude harmonická, tj. bude-li

$$\nabla^2\xi = 0 \quad (3.18)$$

Abychom to poznali, stačí z rovnic (3.16) a (3.17) do vztahu (3.14) dosadit; odpadnou všechny členy obsahující funkci ξ . Vzhledem k platnosti (3.18) budou rovnice (3.3) a (3.11) i nadále splněny.

Proto je vždy možné (ale ne vždy výhodné) vybrat jednu ze složek $\psi_i(x_1, x_2, x_3)$ identicky nulovou. Pak máme tři neznámé funkce $u_j(x_1, x_2, x_3)$

($i = 1, 2, 3$) vyjádřené pomocí tří harmonických funkcí. Přitom jsme splnili všechny rovnice matematické teorie pružnosti, takže se o ně nemusíme starat. Jiné, co s uvedenými funkcemi musíme splnit, jsou okrajové podmínky.

Příklad 1

Dokažte, že funkce $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ je harmonická všude mimo počátek souřadnic.

Řešení

Označíme $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pak $f = 1/r$. Bude

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (\text{a})$$

Diferencováním rovnice

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{b})$$

dostaneme

$$r dr = x dx + y dy + z dz \quad (\text{c})$$

a odtud - při konstantním y, z -

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (\text{d})$$

Proto z rovnice (a) vyjde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} \quad (\text{e})$$

Další derivací dostaneme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{x^2}{r^5} \quad (\text{f})$$

Celkem bude

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (\text{g})$$

Je tedy funkce f harmonická, což jsme měli dokázat. Počátek souřadnic vyjímáme, protože tam má funkce f singularitu.

4. DEFORMACE A NAPJATOST LOKÁLNĚ ZATÍŽENÉHO PRUŽNÉHO POLOPROSTORU

Předpokládejme, že máme tak velké pružné těleso, že je můžeme nahradit pružným poloprostorem $z \geq 0$. Nechť rovina $z = 0$ (tj. povrch poloprostoru) není zatížena s výjimkou oblasti S , na niž působí tlak $p(x, y)$, $(x, y) \in S$. Okrajové podmínky tedy budou

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx}(x, y, 0) &= 0 \\ \sigma_{zy}(x, y, 0) &= 0 \\ \sigma_{zz}(x, y, 0) &= -p(x, y) \end{aligned} \right\} (x, y) \in S \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx}(x, y, 0) &= 0 \\ \sigma_{zy}(x, y, 0) &= 0 \\ \sigma_{zz}(x, y, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} (x, y) \notin S \quad (4.2)$$

Objemové síly neuvažujeme. Ukáže se, že okrajové podmínky lze splnit s jedinou harmonickou funkcí. Nejprve zvolíme $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = \psi$. Funkci Φ prozatím ponecháme. Dosazením těchto funkcí do Papkovičovy-Neuberovy rovnice (3.14), kterou předtím rozepíšeme do složek, dostaneme

$$\begin{aligned} 2G u &= -z \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ 2G v &= -z \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ 4G w &= 4(1-\mu)\psi - \left(z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Přitom dosazujeme u, v, w za u_1, u_2, u_3 ; x, y, z za x_1, x_2, x_3 , abychom označování převedli na způsob, který je technikům bližší.

S použitím Cauchyho kinematických vztahů (2.9) vypočteme složky tenzoru přetvoření a z Hookeova zákona (2.10) také složky tenzoru napjatosti. Vyjde

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= (1-2\mu) \frac{\partial \psi}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ \sigma_{zy} &= (1-2\mu) \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \\ \sigma_{zz} &= 2(1-\mu) \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Za předpokladu, že

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left\{ z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} = 0 \quad (4.5)$$

budou napětí σ_{zx} , σ_{zy} na povrchu $z = 0$ nulová, jestliže položíme

$$(1 - 2\mu)\psi = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (4.6)$$

Tato rovnice představuje vazbu mezi oběma harmonickými funkcemi. Volně lze vybrat tedy už jen jednu z nich. Dosaďme-li z rovnice (4.6) do třetí z rovnic (4.4), dostaneme

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (4.7)$$

Hledáme tedy už jen harmonickou funkci ψ .

Zkusmo zavedeme integrál

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R} \quad (4.8)$$

kde ξ , η jsou souřadnice bodu uvnitř oblasti S a

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} \quad (4.9)$$

představuje vzdálenost bodu $(\xi, \eta, 0)$ od bodu (x, y, z) . Vypočteme (formálním derivováním)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\frac{z}{2\pi} \iint_S \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} &= \frac{3z}{2\pi} \iint_S \frac{(x - \xi) f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^5} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^3} + \frac{3}{2\pi} \iint_S \frac{(x - \xi)^2 f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R^5} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Z posledního vztahu je ihned zřejmé, že κ)

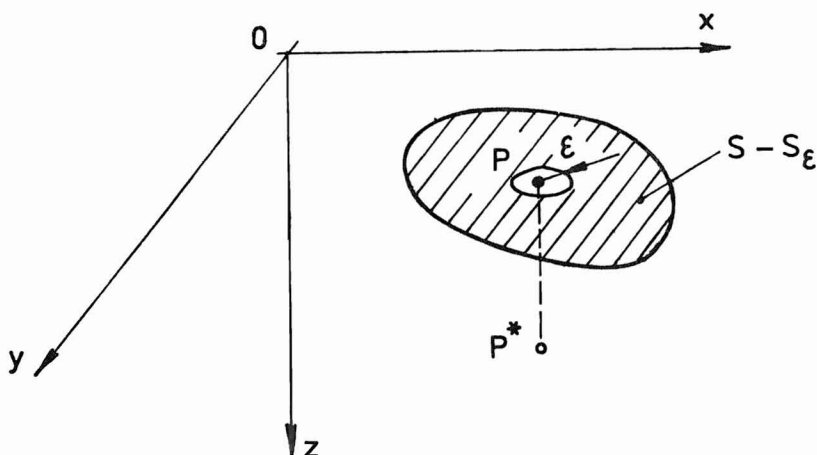
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.11)$$

Je tedy integrál (4.8) harmonická funkce, přinejmenším všude tam, kde $R \neq 0$.

κ) Je to zřejmé především tomu, kdo samostatně řešil příklad 1 na konci 3. kapitoly.

Prozkoumáme nyní vztah, který má funkce ψ podle (4.8) k dané úloze. Zvolíme na povrchu poloprostoru bod $P(x, y, 0)$. Bude-li tento bod mimo oblast S , bude $R \neq 0$ a podle (4.7) a (4.10) bude $G_{zz}(P) = 0$. O tom, že pro $z = 0$ vymizí i G_{zx} , G_{zy} , jsme se už zmínili. Mimo oblast S vymizí na povrchu $z = 0$ všechna napětí.

Jak to bude, jestliže $P(x, y, 0) \in S$? Uvažme ještě bod $P^*(x, y, z)$. Kolem bodu P opišeme v rovině $z = 0$ kružnici o poloměru ϵ , která uzavře kruh S_ϵ (obr. 17). Tento kruh z oblasti S vyjme; zbude oblast vyznačená šrafováním.



OBR. 17

Protože bod P do ní nepatří, bude příspěvek integrálu (4.8) k napětí podle (4.7) z této oblasti nulový. Proto postačí uvažovat pouze integraci nad ploškou S_ϵ . V rovině $z = 0$ zvolíme válcové souřadnice r, ϑ, z s počátkem v bodě P . Vypočteme např. podle (4.10)

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -z f(x, y) \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\epsilon \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= -2\pi f(x, y) z \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + z^2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Použili jsme přitom větu o střední hodnotě, tj. funkci $f(\xi, \eta)$ jsme nahradili hodnotou v reprezentativním bodě $(x, y) \in S_\epsilon$. Poloměr ϵ je sice velmi malý, avšak větší než nula. Proto, když $P^* \rightarrow P$, vyjde

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + z^2}} \right\} = 1 \quad (4.13)$$

a tedy

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -f(x, y) \quad (4.14)$$

Protože druhý člen na pravé straně (4.7) podle (4.5) v rovině $z = 0$ vymizí, bude

$$G_{zz} = -f(x, y) \quad \text{pro} \quad (x, y) \in S \quad (4.15)$$

Když tento výsledek porovnáme s okrajovou podmínkou (4.1), pak vidíme, že

$$f(x, y) = p(x, y) \quad (4.16)$$

Jestliže tuto hodnotu dosadíme do integrálu (4.8), dostaneme řešení dané úlohy. Posuvy i napětí vyjdou pomocí těchto harmonických funkcí ("potenciálů")

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R} \quad (4.17)$$

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1-2\nu}{2\pi} \iint_S \ln(z+R) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.18)$$

Funkci (4.17) jsme dostali dosazením (4.16) do (4.8), funkci (4.18) integrací rovnice (4.6). Stačí, abychom tyto funkce dosadili do (4.3) a (4.4).

Příklad 2

Vyřešíme posuvy a napjatost pružného poloprostoru $z \geq 0$, v jehož počátku působí osamělá síla F ve směru osy z .

Řešení

Použijeme Diracovy "delta funkce" $\delta(x)$ definované takto

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \neq 0 \quad (a)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1 \quad \text{pro} \quad \varepsilon > 0$$

Přísně vzato nejde o funkci proměnné x , ale o zobecněnou "funkci" ve smyslu teorie distribucí /52/.*) Zvolíme-li pak kolem počátku oblast S ve tvaru čtverce ($x = \pm \varepsilon$, $y = \pm \varepsilon$), bude osamělá síla F odpovídat tlak (distribuce tlaku)

$$p(x, y) = -F \delta(x) \delta(y) \quad (b)$$

*) Přesněji bychom měli hovořit o Diracově distribuci.

Když tento výraz dosadíme do (4.17) a (4.18), dostaneme vzhledem k (a)

$$\psi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{F}{R} \quad (c)$$

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1-2\mu}{2\pi} F \ln(z+R) \quad (d)$$

S těmito funkcemi vyjdou z rovnic (4.3) posuvy

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1-2\mu}{4\pi G} \frac{F_x}{R(z+R)} + \frac{1}{4\pi G} \frac{F_{xz}}{R^3} \\ v &= -\frac{1-2\mu}{4\pi G} \frac{F_y}{R(z+R)} + \frac{1}{4\pi G} \frac{F_{yz}}{R^3} \\ w &= \frac{2(1-\mu)}{4\pi G} \frac{F}{R} + \frac{1}{4\pi G} \frac{Fz^2}{R^3} \end{aligned} \quad (e)$$

Přitom

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (f)$$

V počátku souřadnic vzniká singularita. Počátek tedy musíme z řešení vyjmout.

5. PROSTOROVÁ HERTZOVA ÚLOHA

Působí-li osamělá síla \vec{F} ve směru osy z v počátku souřadnic, vyjdou posuvy bodů na povrchu $z = 0$ pružného poloprostoru $z > 0$, jak jsme právě ukázali, takto

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1-2\mu}{4\pi G} \frac{F_x}{R^2} & v &= -\frac{1-2\mu}{4\pi G} \frac{F_y}{R^2} \\ w &= \frac{(1-\mu)}{2\pi G} \frac{F}{R} \end{aligned} \quad (5.1)$$

kde

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.2)$$

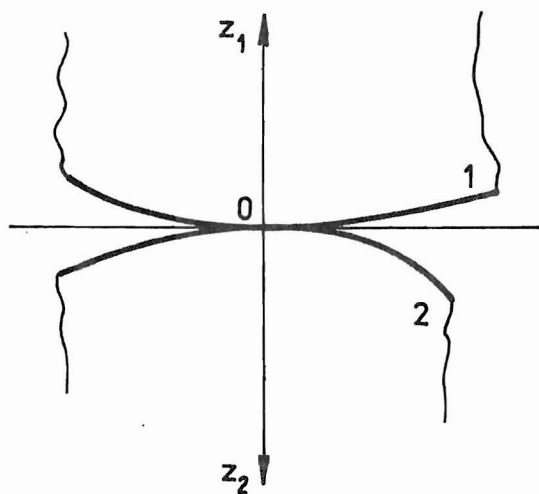
Vraťme se k úloze o pružném poloprostoru, na jehož povrchu působí v oblasti S tlak $p(x,y)$. Posuvy bodů na povrchu takto zatíženého tělesa (poloprostoru) můžeme dostat z rovnic (5.1) využitím principu superpozice. V bodě $(\xi, \eta) \in S$ bude působit elementární síla $p(\xi, \eta) d\xi d\eta$ (ve směru osy z). Tuto hodnotu dosadíme místo síly F do vzorců (5.1). Posuvy du, dv, dw v bodu $P(x, y, 0)$ z nich dostaneme, když za x, y, R dosadíme $x-\xi, y-\eta, r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. Integrací přes oblast S vyjdou posuvy u, v, w takto

$$\begin{aligned}
 u(x, y, 0) &= -\frac{1-2\mu}{4\pi G} \iint_S \frac{(x-\xi)p(\xi, \eta)d\xi d\eta}{r^2} \\
 v(x, y, 0) &= -\frac{1-2\mu}{4\pi G} \iint_S \frac{(y-\eta)p(\xi, \eta)d\xi d\eta}{r^2} \\
 w(x, y, 0) &= \frac{1-\mu}{2\pi G} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)d\xi d\eta}{r}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

kde

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \tag{5.4}$$

Ponecháváme čtenáři, aby se přesvědčil, že stejné vzorce vyjdou ze vzorců (4.3), dosadíme-li do nich funkce (4.17) a (4.18).



OBR. 18

Nechť se dvě ideálně hladká oblá tělesa dotýkají v jednom bodě (obr. 18), který zvolíme za počátek souřadnicové soustavy. V tečné rovině zvolíme osy x, y . Osy z_1, z_2 spadají do společné normály obou těles, přičemž osa z_1 směřuje dovnitř tělesa 1 a obdobné tvrzení platí i o tělese 2. Povrch prvního tělesa bude popsán rovnicí $z_1 = f_1(x, y)$, povrch druhého $z_2 = f_2(x, y)$. Funkci $f_1(x, y)$ rozvineme do Maclaurinovy řady kolem počátku. Dostaneme

$$\begin{aligned}
 f_1(x, y) &= f_1(0, 0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 x + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

První tři členy na pravé straně rovnice (5.5) odpadnou, protože v počátku souřadnic je $z_1 = 0$, $\partial z_1 / \partial x = 0$, $\partial z_1 / \partial y = 0$ (počátek souřadnic je dotykovým bodem a rovina x, y je tečnou rovinou). Indexy 0 u obličných závorek naznačují, že příslušné derivace vyhodnocujeme v počátku souřadnic.

Omezíme-li se na malé okolí počátku souřadnic, můžeme vyšší než kvadratické členy v rovnici (5.5) zanedbat. Pak budeme mít

$$z_1 = f_1(x, y) \cong a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2 \quad (5.6)$$

když označíme $a_0 = (\partial^2 f_1 / \partial x^2)_0 / 2$, $a_1 = (\partial^2 f_1 / \partial x \partial y)$,
 $a_2 = (\partial^2 f_1 / \partial y^2) / 2$

Podobně

$$z_2 = f_2(x, y) \cong b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 y^2 \quad (5.7)$$

Takto však můžeme postupovat jen tehdy, nejsou-li činitele a_0, a_1, \dots, b_2 samy zanedbatelně malé. Pak bychom musili z Maclaurinových řad přibrat další členy. V rovnicích (5.6) a (5.7) by se pak objevily vyšší mocniny proměnných x, y . Protože v okolí bodu 0 musí být $z_1 + z_2 > 0$, uplatnily by se v součtu $z_1 + z_2$ vždy jen pozitivně definitní formy. Součet představuje vůli mezi tělesy v bodě (x, y) . Omezíme-li se na druhé mocniny, dostaneme pro ni výraz \equiv)

$$z_1 + z_2 = (a_0 + b_0)x^2 + (a_1 + b_1)xy + (a_2 + b_2)y^2 \quad (5.8)$$

Vyneseme-li tento součet jako funkci x, y , dostaneme oskulační eliptický paraboloid. Je oskulační vzhledem k obecné ploše

$$z_1 + z_2 = f_1(x, y) + f_2(x, y) \quad (5.9)$$

Obě plochy (5.8) a (5.9) mají tedy společný bod, společnou tečnu a společné křivosti.

Jak později ukážeme, můžeme otočením soustavy souřadnic kolem osy z_1 , resp. z_2 , vždy dosáhnout toho, že smíšený kvadratický člen v rovnici (5.8) vymizí. Pak bude

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 \quad (5.10)$$

Konstanty A, B známe, vyplývají z geometrie povrchů obou těles v okolí bodu dotyku.

\equiv) V jiném případě by mohlo např. být

$$z_1 + z_2 = (a_3 + b_3)x^4 + (a_4 + b_4)x^2y^2 + (a_5 + b_5)y^4$$

To však prozatím neuvažujeme. O úlohách tohoto typu pojednává Štajerman /56/. Viz též kap. 9.

Nyní k sobě tělesa přitlačíme silou F působící ve vzdálených bodech $(0, 0, z_1)$, resp. $(0, 0, z_2)$ ve společné normále. Oba povrchy se zdeformují a vytvoří se dotyková plocha S .

Použijeme těchto předpokladů:

- (1) Zanedbáváme tření
- (2) Každé z těles nahradíme pružným poloprostorem
- (3) Tělesa se k sobě přiblíží o hodnotu δ , měřenou mezi vzdálenými body tělesa

Předpoklad (1) zjednodušuje výpočet, ale neodpovídá fyzikální realitě. Skutečný povrch je vždy drsný a větší nebo menší tření vstupí do hry. Předpokládáme však, že jeho vliv nebude velký a že jej lze zanedbat.

Předpoklady (2) a (3) budou udržitelné jedině tehdy, prokáže-li se dalším výpočtem, že se deformace a napětí koncentrují do malého okolí dotykového bodu a že vzdálená místa v tělese nejsou namáhána.

Představme si nejprve, že tělesa jsou prostupná a absolutně tuhá. Bod $P_1(x, y, z_1)$ pronikne do tělesa 2 a bod $P_2(x, y, z_2)$ pronikne do tělesa 1. Jejich původní vzdálenost byla $z_1 + z_2$, nyní bude $\delta - (z_1 + z_2)$. O průnik půjde ovšem jen tehdy, bude-li $\delta > z_1 + z_2$, tj. bude-li bod $P_0(x, y, 0)$ blízko počátku v nějaké oblasti S . Ve skutečnosti průnik nenastane, protože hmota obou těles je neprostupná a pružná. Bod P_1 , resp. P_2 , se proto posune směrem dovnitř tělesa 1, resp. 2, o posuv w_1 , resp. w_2 tak, že se tím přesah úplně vyrovná. Bude tedy

$$w_1 + w_2 = \delta - (z_1 + z_2) \quad \text{pro } (x, y) \in S \quad (5.11)$$

$$w_1 + w_2 > \delta - (z_1 + z_2) \quad \text{pro } (x, y) \notin S \quad (5.12)$$

Zvláštností je, že okrajové podmínky obsahují nerovnost (5.12) a že oblast dotyku S dosud neznáme. Když do podmínek (5.11) a (5.12) dosadíme z rovnice (5.10), dostaneme

$$w_1 + w_2 = \delta - Ax^2 - By^2 \quad \text{pro } (x, y) \in S \quad (5.13)$$

$$w_1 + w_2 > \delta - Ax^2 - By^2 \quad \text{pro } (x, y) \notin S \quad (5.14)$$

Průhyby w_1 , w_2 vypočteme ze vzorců (5.3). Podle třetího z těchto vzorců bude

$$w_1 = \frac{1 - \mu_1}{2\pi G} \int_S \frac{p \, dS}{r} \quad (5.15)$$

$$w_2 = \frac{1-\mu_2}{2\pi G} \int_S \frac{p ds}{r} \quad (5.16)$$

Zde dS představuje plošný element v bodě, v němž působí tlak p a jehož vzdálenost od místa, kde určujeme průhyb, je r .

Jde nyní o to, najít takové rozdělení $p(\xi, \eta)$ tlaku na ploše S , aby jím způsobený průhyb měl tvar paraboloidu $z_i = A_i x^2 + B_i y^2$ ($i = 1, 2$). Hertz ukázal, že této podmínce vyhovuje funkce

$$p(\xi, \eta) = p_0 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} \quad (5.17)$$

pro $(\xi, \eta) \in S$. Dosazením (5.17) do podmínky (5.13) dostaneme

$$\frac{p_0}{2\pi} \left(\frac{1-\mu_1}{G_1} + \frac{1-\mu_2}{G_2} \right) \iint_S \frac{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}} d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (x, y) \in S \quad (5.18)$$

Protože povrch těles zůstane i po deformaci hladký, bude jeho zatížení spojitě a vyjde $p = 0$ na hranici S .*) Hranice oblasti dotyku S má proto rovnici

$$1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 0 \quad (5.19)$$

Je to tedy elipsa o poloosách a, b . Nyní již můžeme integrál v rovnici (5.18) vypočítat. Dostaneme

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1-\mu_1}{G_1} + \frac{1-\mu_2}{G_2} \right) p_0 b \left[K(e) - D(e) \frac{x^2}{a^2} - H(e) \frac{y^2}{b^2} \right] = \delta - Ax^2 - By^2 \quad (5.20)$$

kde

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (5.21)$$

značí numerickou (bezrozměrovou) excentricitu elipsy a dále

$K(e)$ značí úplný eliptický integrál prvního druhu,

$E(e)$ úplný eliptický integrál druhého druhu argumentu e ,

*) A. I. Lurje uvádí v knize /38/ na str. 322, že na okraji oblasti S je $w_1 + w_2 = \text{konst.}$ Tato podmínka však platí jen pro kruhovou oblast!

$$D(e) = \frac{K(e) - E(e)}{e^2} \quad (5.22)$$

$$H(e) = \frac{E(e) - (1 - e^2)K(e)}{e^2} \quad (5.23)$$

Porovnáme-li koeficienty u x^2 , resp. y^2 , dostaneme

$$C D(e) \frac{1}{a^2} = A, \quad C H(e) \frac{1}{b^2} = B \quad (5.24)$$

kde jsme označili

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \mu_1}{G_1} + \frac{1 - \mu_2}{G_2} \right) p_0 b \quad (5.25)$$

Když obě rovnice (5.24) podělíme, zkrátí se konstanta C a zůstanou pouze funkce e podle (5.21). Bude

$$\frac{(1 - e^2)D(e)}{H(e)} = \frac{A}{B} \quad (5.26)$$

To je rovnice, z níž lze numericky vypočítat numerickou excentricitu e , a tím i poměr poloos dotykové elipsy

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \quad (5.27)$$

Celková síla přenášená mezi oběma tělesy vyjde

$$F = \iint_S p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.28)$$

Je to polovina elipsoidu o poloosách a, b, p_0 , takže

$$F = \frac{2\pi}{3} abp_0 \quad (5.29)$$

Protože známe numerickou excentricitu e z rovnice (5.26), dostaneme z rovnic (5.24) i poloosy a, b . Rovnice (5.29) pak dává největší hodnotu tlaku p_0 pro danou sílu F nebo naopak. Z porovnání absolutních členů v rovnici (5.20) vyloučíme i relativní posuv vzdálených bodů těles (sblížení těles) δ . Výsledné vzorce můžeme upravit s použitím bezrozměrových parametrů

$$\alpha_a = \sqrt[3]{3D(e)} \quad (5.30)$$

$$\alpha_{\delta} = K(e) \sqrt[3]{\frac{9}{8 D(e)}} \quad (5.31)$$

do tvaru

$$a = \alpha_a \left[\left(\frac{1-\mu_1}{G_1} + \frac{1-\mu_2}{G_2} \right) \frac{F}{4\pi A} \right]^{1/3} \quad (5.32)$$

$$\delta = \alpha_{\delta} \left[\left(\frac{1-\mu_1}{G_1} + \frac{1-\mu_2}{G_2} \right) \frac{F \sqrt{2A}}{2\pi} \right]^{2/3} \quad (5.33)$$

Hodnoty numerické excentricity e a parametrů $\alpha_a, \alpha_{\delta}$ odečteme pro daný poměr A/B z tab. 2. Viz též /15/. Je zřejmé, že relativní přiblížení δ obou těles není úměrné síle F , ale mocnině $F^{2/3}$. Ačkoli jsou posuvy malé a materiál je podle předpokladu lineárně pružný, "dotyková" deformační charakteristika $\delta(F)$ je nelineární a princip superpozice neplatí.

Tab. 2 Bezrozměrové parametry pro Hertzovu úlohu

A/B	e	α_a	α_{δ}
0,1	0,9749	1,8017	2,4252
0,2	0,9382	1,6726	2,2362
0,3	0,8928	1,5911	2,1218
0,4	0,8390	1,5309	2,0392
0,5	0,7761	1,4831	1,9744
0,6	0,7025	1,4434	1,9211
0,7	0,6150	1,4096	1,8758
0,8	0,5072	1,3801	1,8365
0,9	0,3620	1,3540	1,8018

Příklad 3

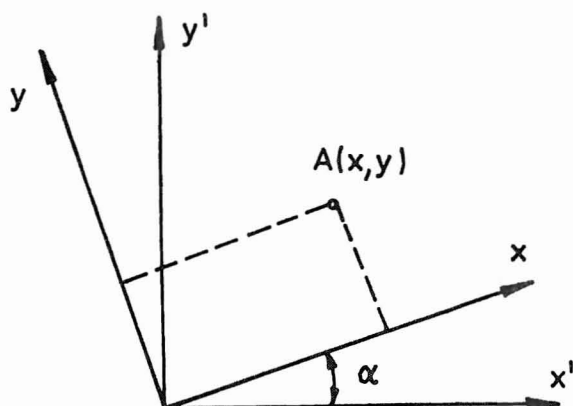
Kvadratickou formu $z = ax^2 + bxy + cy^2$ upravte otočením souřadnicového systému na tvar $z = Ax^2 + By^2$.

Řešení

Původní osy označíme čárkami. Bude tedy

$$z = a(x')^2 + b(x'y') + c(y')^2 \quad (a)$$

Osy x' , y' otočíme do polohy x , y o úhel α (obr. 19). Transformační vztahy budou



OBR. 19

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}\quad (b)$$

Dosazením (a) do (b) dostaneme

$$\begin{aligned}z &= a [x^2 \cos^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \sin^2 \alpha] + \\&+ b [x^2 \sin \alpha \cos \alpha + xy (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - y^2 \sin \alpha \cos \alpha] + \\&+ c [x^2 \sin^2 \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \cos^2 \alpha]\end{aligned}\quad (c)$$

Anulováním činitele u součinu xy dostaneme podmínku

$$2(c-a) \sin \alpha \cos \alpha + b(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0\quad (d)$$

Avšak $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$. Proto

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b}{a-c}\quad (e)$$

Odtud vypočteme

$$\sin 2\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}\quad (f)$$

a dosadíme do (c). Využijeme přitom vztahů

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \\ \sin\alpha \cos\alpha &= \frac{1}{2}\sin 2\alpha\end{aligned}\tag{g}$$

Nakonec dostaneme rovnici vztaženou k hlavním osám

$$z = Ax^2 + By^2\tag{h}$$

kde

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2a} [c(d-a) + a(d-c) + a^2 + b^2 + c^2] = \frac{1}{2}(a+c+d) \\ B &= \frac{1}{2a} [c(d+a) + a(d+c) - a^2 - b^2 - c^2] = \frac{1}{2}(a+c-d) \\ d &= \sqrt{(c-a)^2 + b^2}\end{aligned}$$

Hlavní osy nejsou určeny jednoznačně, k úhlu α lze přičíst celý násobek $\pi/2$. Při lichém násobku $\pi/2$ si koeficienty A , B vymění místo.

Příklad 4

Nechť těleso 1 má v bodě dotyku hlavní poloměry křivosti R_1 , R_1' a těleso 2 obdobně R_2 , R_2' . Úhel mezi rovinami obsahujícími křivosti $1/R_1$, $1/R_2$ je ψ . Dokažte, že v tom případě

$$\begin{aligned}A + B &= \frac{1}{2}(S_1 + S_2) \\ B - A &= \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2 + 2D_1D_2 \cos 2\psi)^{1/2}\end{aligned}$$

kam pro $i = 1, 2$ dosadíme

$$\begin{aligned}S_i &= \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i'} \\ D_i &= \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i'}\end{aligned}$$

Řešení

Zvolíme osy x' , y' tak, aby rovina (x', z) spadala do řezu s křivostí $1/R_1$. Povrch tělesa 1 bude možné v tom případě popsat rovnicí

$$z_1 = \frac{(x')^2}{2R_1} + \frac{(y')^2}{2R_1'}\tag{a}$$

Je to rovnice oskulačního paraboloidu, pro který

$$\partial^2 z_1 / \partial x'^2 = 1/R_1, \quad \partial^2 z_1 / \partial y'^2 = 1/R_1'$$

Obdobně zvolíme osy x'' , y'' pro druhé těleso, takže

$$z = \frac{(x'')^2}{2R_2} + \frac{(y'')^2}{2R_2'} \quad (b)$$

Rovina (x', z) svírá s rovinou (x'', z) úhel ψ . Bude proto

$$x'' = x' \cos \psi + y' \sin \psi \quad (c)$$

$$y'' = -x' \sin \psi + y' \cos \psi$$

Když rovnice (c) dosadíme do (b) a spolu s (a) vytvoříme součet

$z = z_1 + z_2$, dostaneme

$$z = a(x')^2 + b(x'y') + c(y')^2 \quad (d)$$

kde

$$a = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \cos^2 \psi + \frac{1}{2R_2'} \sin^2 \psi$$

$$b = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'} \right) \sin \psi \cos \psi \quad (e)$$

$$c = \frac{1}{2R_1'} + \frac{1}{2R_2} \sin^2 \psi + \frac{1}{2R_2'} \cos^2 \psi$$

Tyto hodnoty dosadíme do vzorců odvozených v příkladu 3. Přitom si všimneme, že platí

$$A + B = a + c \quad (f)$$

$$A - B = d$$

Avšak podle (e)

$$a + c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2'} \right) = \frac{1}{2} (S_1 + S_2) \quad (g)$$

$$d = \sqrt{(a-c)^2 + b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + 2D_1D_2 \cos 2\psi} \quad (h)$$

Dosadíme-li ze vztahů (g) a (h) do (f), dostaneme tvrzení, které jsme měli dokázat, s tou výjimkou, že si A , B vyměnily místa. Vzhledem k poslední větě v příkladu 3 však na tom nezáleží. Rovnice dokazované v tomto příkladu vybírají hlavní osy tak, aby $B > A$.

Diskuse

Jistou nedůvěru může budit předpoklad, že každé z obou dotýkajících se těles je možné nahradit pružným poloprostorem. Oprávněnost tohoto kro-

ku vyplývá pouze ze zkušenosti, že deformace i napětí jsou silně koncentrovány v blízkém okolí dotykového bodu. Přesný důkaz podal teprve roku 1967 Torvik /59/. Ukázal, že chyba nahrazení těles poloprostory je menší než ta, která vzniká předpokladem, že posuvy jsou malé.

Čtenář se jistě podiví, že jsme začali s výkladem prostorové napjatosti a obecného dotyku těles v bodě a nikoli s výkladem rovinné úlohy s aplikací na dotyk válců v povrchové přímce. Ač se to bude zdát paradoxní, volili jsme tuto cestu proto, že prostorové kontaktní úlohy jsou svým způsobem jednodušší než úlohy rovinné.

Z našeho řešení můžeme k rovinné úloze přejít tak, že zvolíme jednu z hlavních křivostí u každého tělesa nulovou. Dostaneme tak případ dvou válců. Bude-li např.

$$\frac{1}{R_1} = 0, \quad \frac{1}{R_2} = 0, \quad \psi = 0$$

budou se oba válce dotýkat podél společné povrchové přímky. Pak vyjde $A = 0$, neboť $S_1 = D_1$, $S_2 = D_2$ (viz zadání 4. příkladu). Dále budeme mít $a/b \rightarrow \infty$ (eliptická dotyková ploška přejde v dlouhý obdélník). Protože $e = 1$ a $E(1) = 1$, vyjde pro poloviční šířku b dotykové plochy rovnice

$$\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} = \left(\frac{1-\mu_1}{G_1} + \frac{1-\mu_2}{G_2} \right) \frac{F}{\pi b^2} \quad (5.34)$$

Dostali jsme ji z druhé z rovnic (5.24) s použitím (5.25) a (5.23).

Přitom

$$F = \frac{1}{2} \pi b p_0 \quad (5.35)$$

značí sílu připadající na jednotku délky válců. Až potud se zdá být vše v pořádku. Jakmile se však pokusíme vypočítat sblížení těles δ porovnaním absolutních členů v rovnici (5.20), zjistíme, že $\delta \rightarrow \infty$ (neboť $K(1) = \infty$).

Tyto výsledky odvodil Dinnik už roku 1909 /8/. Našel, že sblížení dvou válců s rovnoběžnými osami, jež jsou k sobě přitlačovány silou F , vyjde nekonečné. To se zdálo Běljajevovi nemožné /3/. Avšak Krolevets roku 1966 dokázal, že nikoli Běljajev, ale Dinnik měl pravdu /33/. Příčina paradoxu tkví v tom, že dotyková plocha mezi dvěma nekonečnými válci s rovnoběžnými osami je nekonečně dlouhý obdélník, je tedy "nekonečněkrát" větší než dotyková plocha mezi tělesy, jež se v nezatiženém stavu dotýkají pouze v jednom bodě.

Hertzova teorie platí, jak jsme se již zmínili, pro tělesa, jejichž křivosti v místě dotyku nejsou zanedbatelné. Nesmějí být ani nekonečné, neboť dotyk těles hranou nebo rohem se vymyká rozboru v mezích teorie elasticity.

Poznámka

Úplné eliptické integrály prvního, popř. druhého druhu jsou definovány vzorci

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}} \quad (5.36)$$

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2\sin^2\varphi} \, d\varphi \quad (5.37)$$

Lze je vyjádřit hypergeometrickými řadami takto

$$K = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \right]^2 x^{2n} \quad (5.38)$$

$$E = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \right]^2 \frac{x^{2n}}{2n-1} \right\} \quad (5.39)$$

6. ROVNICE KOLOSOVOVA-MUSCHELIŠVILIHO

Půjde-li o rovinné přetvoření, budou posuvy u_3 ve směru souřadnicové osy x_3 nulové. To znamená, že nemá smysl třetí index ($i = 3$) do výpočtu zahrnovat. Vektory \vec{u} , $\vec{\psi}$, popř. \vec{r} v rovnici (3.14) budou spadat do roviny x_1, x_2 .

Přejdeme-li k proměnným x, y, u, v (místo x_1, x_2, u_1, u_2), dostaneme ze vztahu (3.14) tyto dvě skalární rovnice

$$\begin{aligned} 2Gu &= 4(1-\mu)\psi_1 - \frac{\partial}{\partial x}(x\psi_1 + y\psi_2 + \Phi) \\ 2Gv &= 4(1-\mu)\psi_2 - \frac{\partial}{\partial y}(x\psi_1 + y\psi_2 + \Phi) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Dvě neznámé funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ máme vyjádřeny pomocí tří harmonických funkcí $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ a $\Phi(x, y)$. Bez újmy na obecnosti bychom tedy mohli vybrat jednu ze složek ψ_1 , ψ_2 nulovou. Místo toho zvolíme tyto funkce tak, aby mezi nimi platila vazba

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (6.2)$$

Protože jde o harmonické funkce, bude také

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad (6.3)$$

Rovnice (6.2) a (6.3) jsou Cauchyho-Riemannovy podmínky. To znamená, že funkce ψ_1 , ψ_2 mohou být vybrány jako reálná a imaginární část nějaké holomorfní funkce $\varphi(z)$ proměnné $z = x + iy$. Pak tedy

$$\psi_1(x, y) + i\psi_2(x, y) = \varphi(z) \quad (6.4)$$

Snadno se přesvědčíme, že také $(\partial\varphi/\partial x)$, $(-\partial\varphi/\partial y)$ splňují Cauchyho-Riemannovy podmínky. Je totiž

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \quad (6.6)$$

Rovnice (6.5) je splněna, neboť φ je harmonická funkce. Je to vlastně Laplaceova rovnice

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.7)$$

Rovnice (6.6) je zřejmou identitou. Protože platí (6.5) a (6.6), mohou být i uvedené parciální derivace odvozeny z jediné holomorfní funkce $\varphi(z)$. Napíšeme tedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi'(z) \quad (6.8)$$

Když druhou z rovnic (6.1) vynásobíme imaginární jednotkou a sečteme s první rovnicí, dostaneme

$$2G(u+iv) = (3-4\mu)(\psi_1 + i\psi_2) - x \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - y \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \\ - ix \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - iy \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (6.9)$$

Nyní trochu odbočíme. Je dána nějaká funkce $f(x, y)$. Napíšeme ji jako funkci nových proměnných $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Buďe

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \quad (6.10)$$

Avšak

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z) \quad (6.11)$$

Proto

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{2} \quad (6.12)$$

Je tedy

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (6.13)$$

Vzorce (6.13) nyní aplikujeme na funkci $\varphi(z)$, která závisí pouze na z (a nikoli snad na \bar{z}), a pak i na funkci $\bar{\varphi}(\bar{z})$. Budeme mít

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dz} = \varphi'(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi(z) = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (\psi_1 + i\psi_2) = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - i \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + i \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) = \\ = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad (6.14)$$

Obdobně

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{z}} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{z}} = \bar{\varphi}'(\bar{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (\psi_1 - i\psi_2) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad (6.15)$$

S použitím (6.2), (6.3) a (6.15) můžeme část pravé strany rovnice (6.9) uspořádat a zapsat takto:

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + y \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + ix \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + iy \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \\ & = x \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + y \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - ix \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + iy \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \\ & = (x+iy) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - i(x+iy) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \\ & = (x+iy) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) = z \bar{\varphi}'(\bar{z}) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Podle (6.4) a (6.8) upravíme zbývající část. Celkem bude

$$2G(u+iv) = \alpha \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\varphi}(\bar{z}) \quad (6.17)$$

Rovnice (6.17) představuje řešení rovinné úlohy, připisované Kolosovovi-Muschelišvilimu /40/.

Pro rovinné přetvoření je

$$\alpha = 3 - 4\mu \quad (6.18)$$

Rovnice (6.17) platí i pro zobecněnou rovinnou napjatost. Pro ni však musíme dosadit

$$\alpha = \frac{3-\mu}{1+\mu} \quad (6.19)$$

Platí-li (6.17) pro posuvy, dostaneme napětí ze vztahů

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \varphi'(z)] \end{aligned} \quad (6.20)$$

Vzorci (6.20) nebudeme odvozovat, odkazujeme na literaturu /1/, /40/.

7. ROVINNÁ DEFORMACE PRUŽNÉHO POLOPROSTORU

Zmínili jsme se o tom, že bylo možné vybrat jednu z funkcí ψ_1 , ψ_2 v rovnicích (6.1) nulovou. Zkusíme, kam takový postup povede. Bez zřetele k dřívějšímu značení zvolíme v rovnicích (6.1)

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \psi \quad (7.1)$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} 2G u &= -\frac{\partial}{\partial x} (y\psi + \Phi) \\ 2G v &= (3-4\mu)\psi - y \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Z Cauchyho vztahů (2.9) vyjde pro $i = 1, 2$ v obvyklém technickém označení

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Třetí směr ($x_3 = z$) do výpočtů nevstupuje, protože jde o rovinné přetvoření. Když (7.2) dosadíme do (7.3), vyjde

$$\begin{aligned} 2G \varepsilon_x &= -y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ 2G \varepsilon_y &= 2(1-2\mu) \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ G \gamma_{xy} &= (1-2\mu) \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Odtud dosadíme do Hookeova zákona (2.10) a dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = (2G + \lambda) \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_y = \\ &= 2G \varepsilon_x \frac{1-\mu}{1-2\mu} + 2G \varepsilon_y \frac{\mu}{1-2\mu} = \\ &= \frac{1-\mu}{1-2\mu} \left(-y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \\ &+ \frac{\mu}{1-2\mu} \left[2(1-2\mu) \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

Tato rovnice platí pro rovinné přetvoření. Protože ψ , Φ jsou harmonická funkce, je

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (7.6)$$

Když (7.6) dosadíme do (7.5), vyjde

$$\sigma_x = 2\mu \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (7.7)$$

Obdobně vypočteme

$$\sigma_y = 2(1-\mu) \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (7.8)$$

$$\tau_{xy} = (1-2\mu) \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (7.9)$$

Na povrchu poloprostoru $y = 0$ vyjde

$$\sigma_y = 2(1-\mu) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (7.10)$$

$$\tau_{xy} = (1-2\mu) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (7.11)$$

Poslední dvě rovnice platí za předpokladu, že

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (7.12)$$

Vybereme-li funkce Φ , ψ tak, aby platilo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (1-2\mu) \psi \quad (7.13)$$

bude

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{pro} \quad y = 0 \quad (7.14)$$

Tečné napětí nebude na povrchu působit. Kromě toho vyjde posuv V a napětí σ_y na povrchu $y = 0$

$$v(x,0) = \frac{1-\mu}{G} \psi(x,0) \quad (7.15)$$

$$\sigma_y(x,0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,0) \quad (7.16)$$

V obecném bodě vyjdou napětí

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ \tau_{xy} &= -y \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Rovnice (7.17) jsme získali dosazením (7.13) do (7.7) až (7.9).

Zvolme nyní funkci

$$\psi = -\frac{F}{2\pi} \ln \frac{x^2 + y^2}{a^2} \quad (7.18)$$

Snadno se přesvědčíme, že funkce ψ podle (7.18) je harmonická všude kromě počátku; blízké okolí počátku ze svých úvah vyjme. Pak vyjde

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2Fx^2y}{\pi r^4}, \quad \sigma_y = -\frac{2Fy^3}{\pi r^4} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2Fxy^2}{\pi r^4}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Máme na mysli poloprostor, jehož deformace ani napjatost nezávisí na souřadnici z . Proto stačí, zabýváme-li se rovinou (x, y) . Z tvaru rovnic (7.19) tušíme, že by mohlo být výhodné zavést polární souřadnice

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad (7.20)$$

Inverzní vztahy jsou

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta \quad (7.21)$$

Z Mohrových vztahů

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2 \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_\varphi &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2 \tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\tau_{ry} = (-G_x + G_y) \sin\varphi \cos\varphi + \tau_{xy} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \quad (7.22)$$

a z rovnic (7.19), (7.21) vyjde po úpravě

$$G_r = -\frac{2F \sin^2\vartheta}{\pi r}, \quad G_\varphi = 0 \quad (7.23)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0$$

Tento výsledek je překvapivě jednoduchý a platí pro zatížení okraje poloroviny osamělou silou F v počátku, směřující do osy y (obr. 20). Platí totiž, že

$$\int_0^\pi G_r r \cos\vartheta d\vartheta = 0 \quad (7.24)$$

$$\int_0^\pi G_r r \sin\vartheta d\vartheta = -F \quad (7.25)$$

Síla F je měrné (délkové) zatížení. Působí podél osy z rovnoměrně. Kromě této osy není povrch poloпростору zatížen.^{*)}

Chceme-li získat z rovnic (7.2) posuvy, musíme vypočítat funkci Φ . K tomu budeme potřebovat integrál

$$\int \ln \frac{x^2+y^2}{a^2} dy = y \ln \frac{x^2+y^2}{a^2} - \int \frac{2y^2}{x^2+y^2} dy \quad (7.26)$$

Použili jsme metody integrace po částech. Do čitatele integrálu na pravé straně rovnice (7.26) přidáme $2x^2 - 2x^2$, což je ovšem nula. Dostaneme

$$\int \frac{2y^2 + 2x^2 - 2x^2}{x^2+y^2} dy = 2 \int dy - 2x^2 \int \frac{dy}{x^2+y^2} \quad (7.27)$$

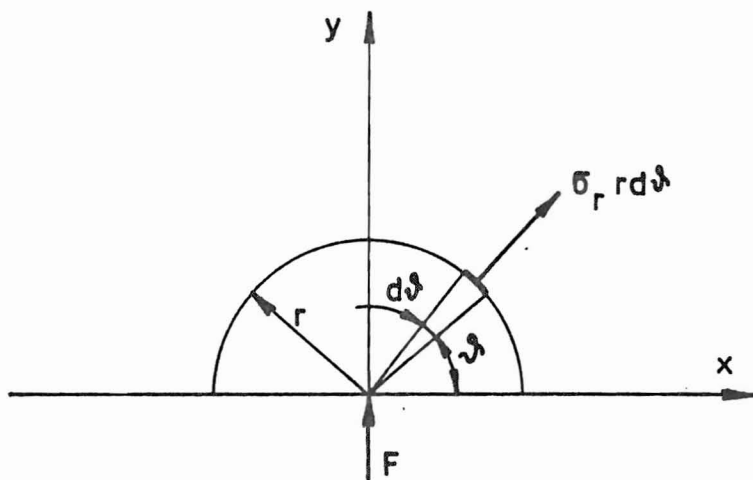
Poslední integrál vede na $\arctg(y/x)$. Celkem vyjde

$$\int \ln \frac{x^2+y^2}{a^2} dy = y \ln \frac{x^2+y^2}{a^2} - 2y + 2x \arctg \frac{y}{x} + C \quad (7.28)$$

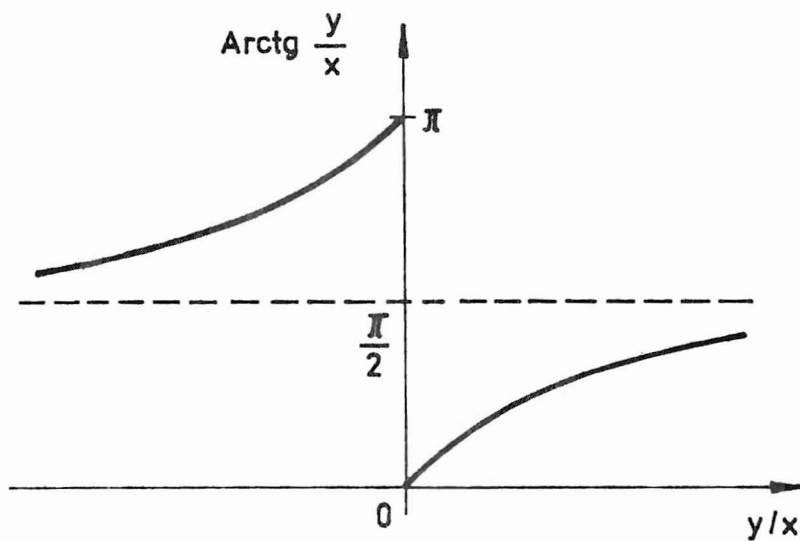
Ne integrační konstantě nezáleží, protože při derivování odpadne.

*) Nezaměňuj souřadnicovou osu z s komplexním číslem $z = x + iy$.
Komplexní proměnné jsme použili v 6. kapitole.

Funkce $\varphi = \operatorname{arctg} f$ je inverzní k funkci $f = \operatorname{tg} \varphi$ a je definována v intervalu $-\pi/2 < \operatorname{arctg} f < \pi/2$. V rovnici (7.28) však má $\operatorname{arctg}(y/x)$ význam úhlu ϑ (obr. 20) a pro ten máme interval $0 < \vartheta < \pi$. Zavedeme proto funkci $\operatorname{Arctg}(y/x)$ podle obr. 21.*) Pak dostaneme



OBR. 20



OBR. 21

*) Obě definice se liší jen pro záporné hodnoty argumentu, a to o úhel π .

$$\Phi = \frac{F(1-2\mu)}{2\pi} \left[y \ln \frac{x^2+a^2}{a^2} - 2y + 2x \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \right] \quad (7.29)$$

a posuvy vyjdou

$$u(x,y) = Fg_1(x,y), \quad v(x,y) = Fg_2(x,y) \quad (7.30)$$

kde

$$g_1(x,y) = \frac{1}{2\pi G} \left[\frac{xy}{r^2} + (1-2\mu) \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \right] \quad (7.31)$$

$$g_2(x,y) = \frac{1}{2\pi G} \left[\frac{y^2}{r^2} - 2(1-\mu) \ln \frac{r}{a} \right] \quad (7.32)$$

Vztahy (7.30) až (7.32) mají smysl, pokud $x, y \neq 0$ (počátek souřadnic je singulárním bodem).

Když se od počátku vzdalujeme po přímce $y = x \operatorname{tg} \alpha$, bude v nekonečnu

$$\lim g_1(x,y) = \frac{1}{2\pi G} [\sin \alpha \cos \alpha + (1-2\mu) \alpha] \quad (7.33)$$

$$\lim g_2(x,y) = \infty \quad (7.34)$$

Posuvy jsou v nekonečnu neohraničené, což ukazuje vztah (7.34). Právě to je příčinou nesnázi při řešení rovinných úloh o dotyku těles.

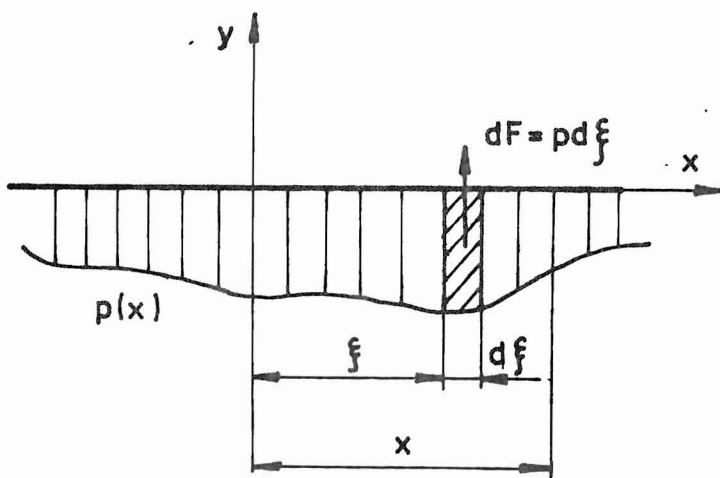
Je-li okraj poloroviny (povrch poloprostoru) zatížen tlakem $p(x)$ budou okrajové podmínky

$$\sigma_y(x,0) = -p(x), \quad \tau_{yx}(x,0) = 0 \quad (7.35)$$

Řešení můžeme dostat z rovnic (7.30) s použitím principu superpozice. Stačí, abychom v místě $x = \xi$ zavedli elementární osamělou sílu $dF = p(\xi) d\xi$ a určili odpovídající průhyb du , resp. dv , ve vzdálenosti $(x - \xi)$ od působící elementární síly (obr. 22). Sečtením (integrací) účinků všech elementárních sil dostaneme

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-\xi, y) p(\xi) d\xi \quad (7.36)$$

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x-\xi, y) p(\xi) d\xi \quad (7.37)$$



OBR. 22

Diskuse

Posuvy u , v z rovnic (7.30) dávají deformaci tělesa, ale nikoli jeho přemístění jako absolutně tuhého tělesa, při němž se deformace nemění. Řešení (7.30) můžeme proto doplnit libovolným posunutím a otočením tělesa jako absolutně tuhého celku. Všimněme-li si např. posuvů na povrchu $y = 0$, bude $g_1(x, 0) = 0$ pro $x > 0$ a $g_1(x, 0) = (1 - 2\mu)/2G$ pro $x < 0$. Tuto zřejmou nesymetrii odstraníme tím, že celý poloprostor (polorovinu) posuneme jako tuhý celek o $u_0 = -F(1 - 2\mu)/4G$. Pak se ovšem body pravé poloosy $x > 0$ budou posouvat vlevo a body levé poloosy $x < 0$ vpravo. Přitom jde o konstantní posuv, při němž $\epsilon_x = 0$, $\epsilon_y = 0$. To souhlasí s napětími podle (7.19), neboť pro $y = 0$ je také $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$. Je to zdánlivě nesmyslné, protože v počátku se střetnou hmotné body, které se sem budou posouvat z obou stran. Avšak počátek jsme ze svých úvah vyloučili, neboť jde o singulární bod.

Další nepříjemné zjištění je, že posuvy v nekonečnu jsou vždy nekonečné [srov. s rovnicí (7.34)]. Vyhledáme na ose $x = 0$ fixní bod, který se ve směru osy y neposune. Pro $x = 0$ bude

$$g_2(0, y) = \frac{1}{2\pi G} \left[1 - 2(1 - \mu) \ln \frac{y}{a} \right] \quad (7.38)$$

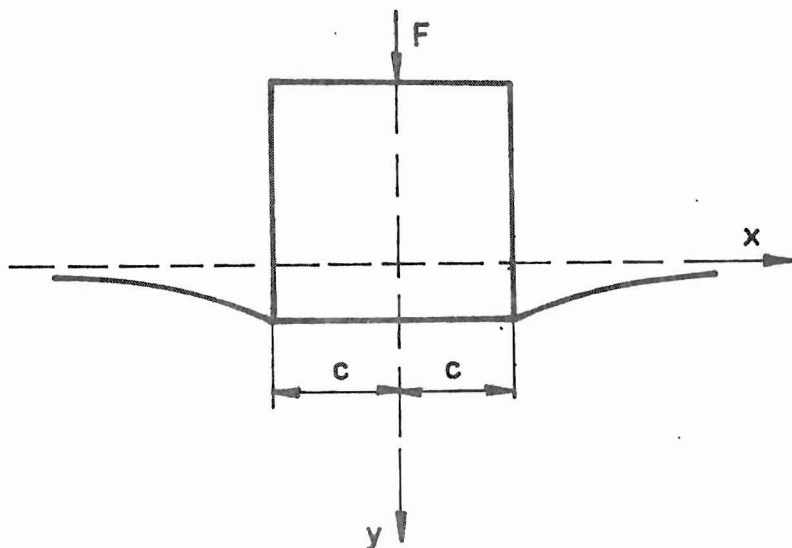
Má-li být tato hodnota nulová, musí být

$$y = a \exp \left[\frac{1}{2} (1 - \mu) \right] \quad (7.39)$$

Pro $\mu = 0,3$ je to $y \doteq 2,0427 a$. Bod o této souřadnici se tedy ve směru osy y neposune a všechny posuvy $v(x, y)$ se vztahují k němu. Avšak tento bod můžeme zvolit jakkoli, neboť a je libovolná integrační konstanta. To souhlasí s tvrzením, že k řešení (7.30) můžeme připočítat jakékoli konstanty. Deformace můžeme tedy určit jen relativně k nějakému fixnímu bodu, který nemůže být v nekonečnu.

Příklad 5

Vypočítejte rozdělení tlaku mezi absolutně tuhým hranolem a pružným poloprostorem, je-li tento hranol rovnoměrně vtlačován do poloprostoru na intervalu $-c \leq x \leq c$ (obr. 23). Předpokládejte, že mezi hranolem a povrchem poloprostoru není žádné tření a že poloprostor je ve stavu rovinné deformace.



OBR. 23

Řešení

Z rovnic (7.30) a (7.36), (7.37) vyplývá, že posuvy na povrchu $y = 0$ poloprostoru zatíženého tlakem $p(x)$ na intervalu $-c < x < c$ lze napsat ve tvaru

$$u(x) = -\frac{1-2\mu}{4G} \int_{-c}^c \operatorname{sign}(x-\xi) p(\xi) d\xi \quad (a)$$

$$v(x) = -\frac{1-\mu}{\pi G} \int_{-c}^c \ln \left| \frac{x-\xi}{a} \right| p(\xi) d\xi \quad (b)$$

Posuvy $u(x)$ jsme upravili na základě předchozí diskuse tak, aby byly symetrické k ose $x = 0$. Úloze bude vyhovovat takové řešení $p(\xi)$, které dá $V = \text{konst}$ na intervalu $-c < x < c$. Lze ukázat, že této podmínce vyhovuje funkce $p(\xi)$

$$p(\xi) = \frac{F}{\pi \sqrt{c^2 - \xi^2}} \quad (c)$$

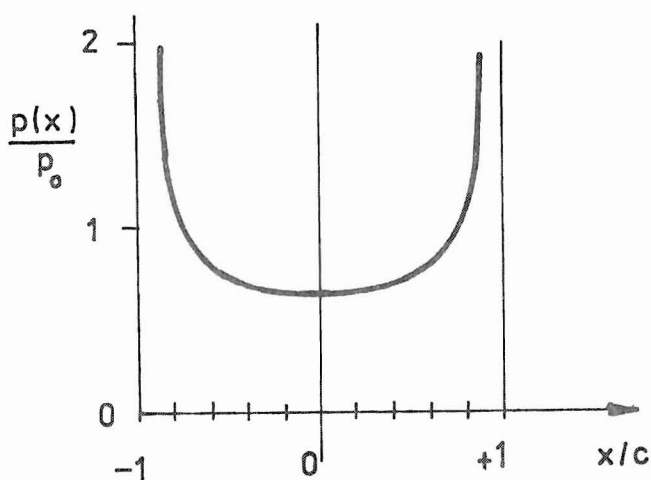
Střední hodnota tlaku je

$$p_0 = \frac{F}{2c} \quad (d)$$

a poměr

$$\frac{p(x)}{p_0} = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - (x/c)^2}} \quad (e)$$

je znázorněn na obr. 24 jako funkce poměru x/c .



OBR. 24

Je zřejmé, že tlak není rovnoměrný, ale že je silně koncentrován u hran $x = \pm c$. Tyto body jsou singulární, neboť v nich roste tlak $p(x)$ bez omezení, blížíme-li se k těmto bodům od počátku souřadnic, a pak nespojitě klesá k nule. Hloubku zatláčení hranolu lze přitom určit jen relativně k nějakému jinému, libovolnému bodu. Absolutní velikost této hloubky určit nelze.

Příklad 6

Dokažte, že rozdělení tlaku $p(x) = F / \pi \sqrt{c^2 - x^2}$ působícího na nekonečný pás $-c < x < c$ na povrchu $y = 0$ pružného poloprostoru dává v tomto pásu ve směru osy y skutečně konstantní posuv.

* Viz příklad 6.

Řešení

Jde o rovinné přetvoření, takže stačí zabývat se jen polorovinou $x, y \geq 0$. Z příkladu 5, rovnice (b) a (c), usuzujeme, že je třeba dokázat platnost vztahu

$$\int_{-c}^c \ln \left| \frac{x-\xi}{a} \right| p(\xi) d\xi = \text{konst} \quad (\text{a})$$

pro nějaké pevně zvolené $x \in (-c, c)$. Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit c za délkovou jednotku, takže budeme dokazovat vztah

$$\int_{-1}^1 \ln \left| \frac{x-\xi}{a} \right| \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \text{konst} = I(x, a) \quad (\text{b})$$

Označením $I(x, a)$ naznačujeme, že řešení bude záviset nejen na x , ale také na délce a , kterou můžeme považovat za parametr. K výpočtu integrálu $I(x, a)$ použijeme obratu, který nás ihned dovede k cíli. Budeme rovnici (b) derivovat podle parametru. Vyjde

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(x, a)}{\partial a} &= \int_{-1}^1 \left(\frac{a}{x-\xi} \right) \left(-\frac{x-\xi}{a^2} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{1}{a} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ &= -\frac{1}{a} [\arcsin \xi]_{-1}^1 = -\frac{\pi}{a} \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Integrací vztahu (c) dostaneme

$$I(x, a) = -\pi \ln a + C \quad (\text{d})$$

Integrační konstanta C by mohla být funkcí x . Avšak

$$\frac{\partial I(x, a)}{\partial x} = \int_{-1}^1 \frac{1}{x-\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0 \quad \text{pro } -1 < x < +1 \quad (\text{e})$$

Vztah (e) se najde např. v literatuře /56/ na str. 101. Proto je C skutečnou konstantou nezávislou na x . Její hodnotu určíme, když zvolíme $a = 1$, $x = 0$. Bude

$$I(0, 1) = \int_{-1}^1 \ln |\xi| \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (\text{f})$$

Metodou integrace per partes dostaneme hlavní hodnotu integrálu

$$I(0,1) = [\ln|\xi| \arcsin \xi]_{-1}^{-\varepsilon} + [\ln|\xi| \arcsin \xi]_{\varepsilon}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\arcsin \xi}{\xi} d\xi \quad (\lim \varepsilon \rightarrow 0)$$

(g)

Členy v hranatých závorkách se po dosazení mezí zčásti anulují, zčásti zruší. Zbývající člen obsahuje integrál, který lze vypočítat tak, že čitatel rozvine-
me v řadu a pak integrujeme člen po členu. Vyjde

$$I(0,1) = - \int_{-1}^1 \frac{\arcsin \xi}{\xi} d\xi = -2 - \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 11} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 13} \approx -2,178$$

(h)

Srovnáním se vztahem (d) dostaneme $C \approx -2,178$.

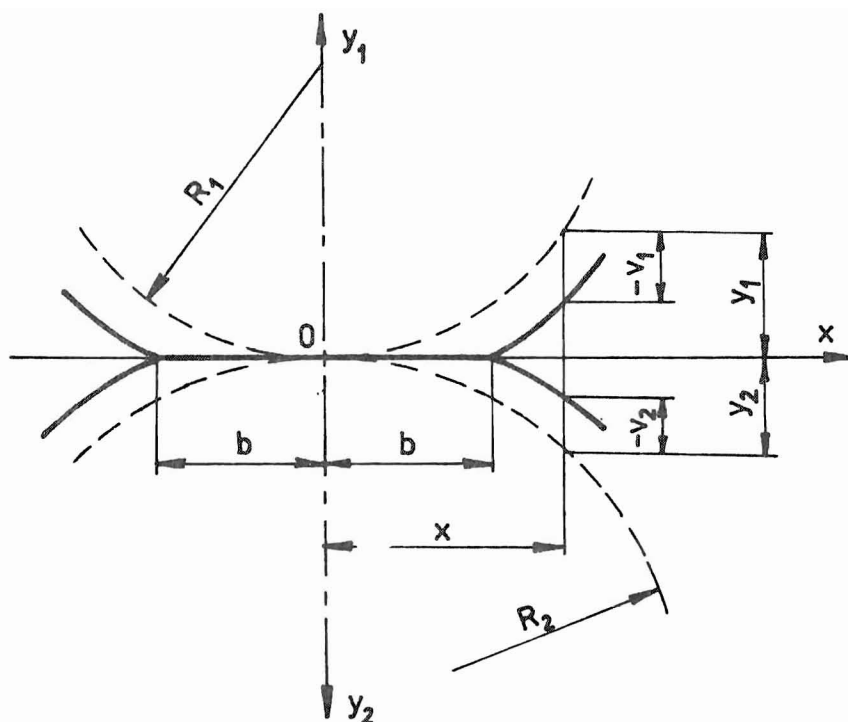
Platnost vztahu (e) jsme nedokazovali. Integrand lze rozšířit do komplexní roviny a použít věty o reziduích. Existuje pak jeden pól v bodě $(x, 0)$ a dva body rozvětvení $(\pm 1, 0)$. Důkaz ponecháváme čtenáři.

Právě tak by bylo třeba se přesvědčit o tom, že řada (h) konverguje. Ani to nebudeme dokazovat, odkážeme však na literaturu /50/, kde je tento integrál uveden.

8. ROVINNÁ HERTZOVA ÚLOHA

Podél společné povrchové přímky se dotýkají dva pružné válce o křivostech $1/R_1$, popř. $1/R_2$. Jsou k sobě přitlačovány silou F . Zvolíme souřadnicové systémy x, y_1 pro těleso 1 a x, y_2 pro těleso 2 (obr. 25). Normála k společné tečně v bodě x protne povrchy válců ve vzdálenostech

$$y_1 = \frac{x^2}{2R_1} \quad , \quad y_2 = \frac{x^2}{2R_2} \quad (8.1)$$



OBR. 25

Tyto rovnice jsme získali tím, že jsme povrchy válců nahradili oskulačními parabolickými válcovými plochami. Bude tedy

$$y = y_1 + y_2 = x^2 \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) \quad (8.2)$$

Budou-li válce k sobě přitlačováni, přetvoří se tak, jak je znázorněno na obr. 25. Tělesa se budou dotýkat na intervalu $-b < x < +b$. Na tomto intervalu bude působit tlak $p(x)$ a bude splněna deformační podmínka

$$y_1 + y_2 + v_1 + v_2 = \text{konst} = C_0 \quad (8.3)$$

Na rozdíl od prostorové Hertzovy úlohy nelze tuto konstantu určit. S použitím (8.2) dostaneme

$$v_1 + v_2 = C_0 - \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) x^2 \quad (8.4)$$

pro $-b \leq x \leq +b$. Pro v_1 , resp. v_2 platí vzorec (b) z příkladu 5. Ukáže se, že podmínce (8.4) vyhovuje funkce

$$p(\xi) = \frac{2F}{\pi b^2} \sqrt{b^2 - \xi^2} \quad (8.5)$$

a že vyjde

$$V_1 = C_1 - \frac{1-\mu_1}{\pi G_1} F \frac{x^2}{b^2} \quad (8.6)$$

$$V_2 = C_2 - \frac{1-\mu_2}{\pi G_2} F \frac{x^2}{b^2} \quad (8.7)$$

Když (8.6), (8.7) a (8.2) dosadíme do podmínky (8.4), vyjde porovnáním koeficientů u x^2 vztah

$$\left(\frac{1-\mu_1}{G_1} + \frac{1-\mu_2}{G_2} \right) \frac{F}{\pi b^2} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \quad (8.8)$$

Odtud můžeme vypočítat šířku b poloviny dotykového pásu. Vidíme, že jsme dostali rovnici (5.34), což potvrzuje správnost našeho řešení. Sblížení těles nelze určit.

Podrobný výklad lze nalézt v práci H. Poritského /48/. Úloha je tam zobecněna o předpoklad, že povrch není hladký, takže se v místě dotyku přenáší i tečná reakce. Tak je tomu u ozubených kol, železničních kol apod.*)

Otázka sblížení těles, která se dotýkají za podmínek rovinné deformace, je v některých případech řešitelná. Jde o soustavy tuhých a pružných těles, přičemž posuv tuhých těles je předepsán. Např. na obr. 26 je elastický váleček stlačován mezi dvěma absolutně tuhými čelistmi. Řešení podali Sternberg a Turteltaub /55/. Přítlačnou sílu označíme F , vzájemné sblížení čelistí δ . Nejprve vypočteme bezrozměrový parametr

$$\gamma = \sqrt{\frac{2(1-\mu)F}{\pi GR}} \quad (8.9)$$

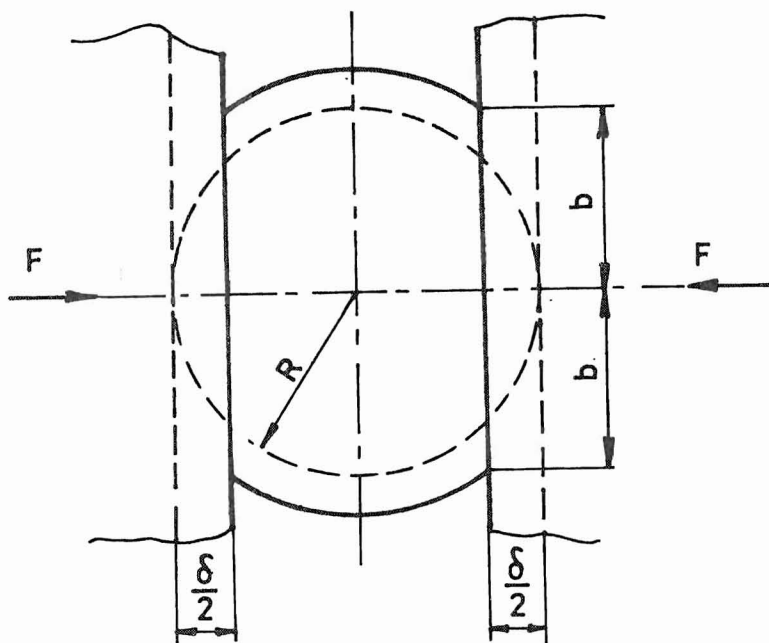
Pak pro maximální tlak p_0 v dotykové ploše dostaneme vztah

$$\frac{1-\mu}{G} p_0 = \gamma + \frac{3}{16} \gamma^3 + O(\gamma^5) \quad (8.10)$$

Poslední člen naznačuje, že vztah (8.10) platí, pokud zbytek řádové velikosti γ^5 můžeme zanedbat. Sblížení čelistí vyjde ze vztahu

$$\frac{\delta}{R} = \gamma^2 \left[\ln\left(\frac{4}{\gamma}\right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{9}{32} \gamma^4 + O(\gamma^6 \ln \gamma) \quad (8.11)$$

* V práci /48/ je přítlačná síla označena $2F$.



OBR. 26

Délka dotykové oblasti je dána poměrem

$$\frac{b}{R} = \gamma - \frac{1}{4} \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \gamma^2 + o(\gamma^3) \quad (8.12)$$

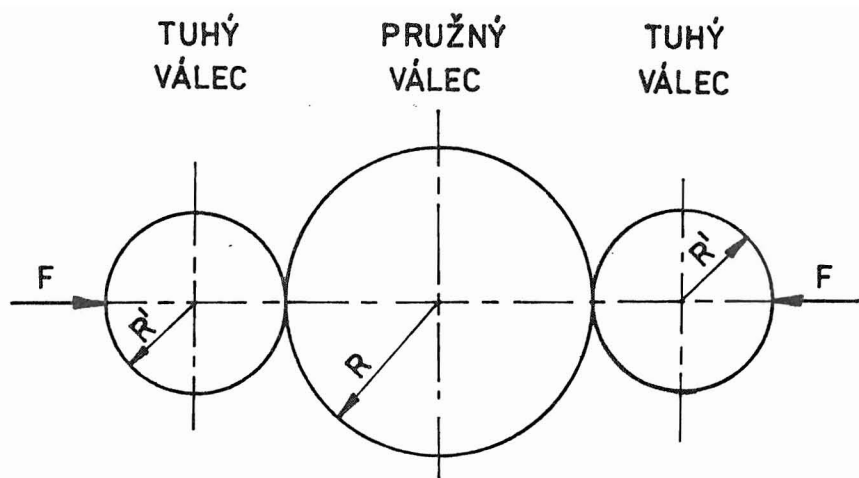
Vzeme-li v rovnicích (8.10) a (8.12) na pravé straně jen první člen, dostaneme totéž, co ze vzorců (8.5), (8.8) (Hertzovo řešení).

Jde-li o pružný váleček o poloměru R , který je stlačován dvěma absolutně tuhými stejnými válci o poloměrech R' , (obr. 27), budou platit vzorce

$$\gamma = \sqrt{\frac{2(1-\mu)F}{\pi G R (1+R/R')}} \quad (8.13)$$

a

$$\frac{\delta}{R} \approx \gamma^2 \left[\ln\left(\frac{4}{\gamma}\right) - \frac{1}{2} \right] \quad (8.14)$$



OBR. 27

Příklad 7

Přesvědčte se, že rozdělení tlaku (8.5) odpovídá skutečně výsledné síle F .

Řešení

Máme dokázat, že

$$\int_{-b}^b p(\xi) d\xi = F, \quad \int_{-b}^b \xi p(\xi) d\xi = 0 \quad (a)$$

Podle (8.5) má tedy platit, že

$$\frac{2F}{\pi b^2} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - \xi^2} d\xi = F \quad (b)$$

Se substitucí

$$\xi = b \sin \varphi, \quad d\xi = b \cos \varphi d\varphi \quad (c)$$

dostaneme

$$\frac{2F}{\pi b^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (b \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{2F}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = F \quad (d)$$

Druhý ze vztahů (a) musí evidentně platit, neboť (8.5) je sudá funkce.

9. ŠTAJERMANOVA TEORIE

Stejně jako u prostorové úlohy můžeme i nyní poznamenat, že vzorce uvedené v 8. kapitole platí za předpokladu, že povrchy dotýkajících se těl lze nahradit oskulačními kvadratickými plochami. Je-li dotyk vyššího řádu, pak rovnici (8.2) je třeba nahradit jinou, výstižnější. Bude např.

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2n!} [y_1^{(2n)}(0) + y_2^{(2n)}(0)] x^{2n} \quad (9.1)$$

Zde n je přirozené číslo, výraz $y_i^{(2n)}$ znamená $2n$ -tou derivaci funkce $y_i(x)$, $i = 1, 2$. Podle Štajermana /56/ je pak poloviční šířka dotykového pásu rovna

$$b = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot 2n \sqrt{\frac{(\nu_1 + \nu_2) F}{2n [y_1^{(2n)}(0) + y_2^{(2n)}(0)]}} \quad (9.2)$$

kde

$$\nu_i = \frac{2}{\pi E_i} (1 - \mu_i^2) \quad (i = 1, 2) \quad (9.3)$$

a tlak je rozdělen na intervalu $-b < x < b$ podle vztahu

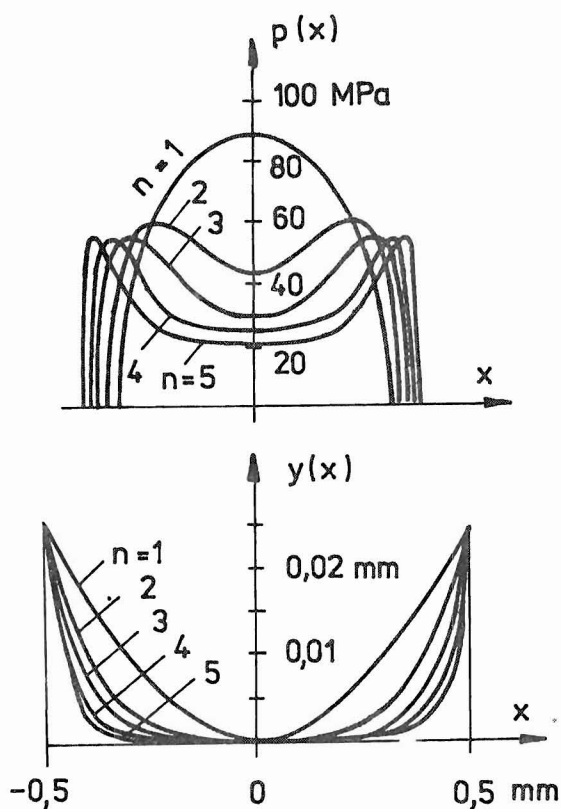
$$p(x) = \frac{F}{\pi b^2} \sqrt{b^2 - x^2} \left[\frac{2n}{2n-1} + \frac{2n(2n-2)}{(2n-1)(2n-3)} \frac{x^2}{b^2} + \dots + \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1} \frac{x^{2n-2}}{b^{2n-2}} \right] \quad (9.4)$$

Průběh funkce $y(x)$ podle (9.1) a tlaku $p(x)$ podle (9.4) je znázorněn na obr. 28. Funkce $y(x)$ byla normalizována tak, aby pro $x = 0,5 \text{ mm}$ vyšlo $y = 0,025 \text{ mm}$. Síla $F = 1 \text{ N mm}^{-1}$, $E_i = 2 \cdot 10 \text{ MPa}$, $\mu_i = 0,3$. Je zřejmé, že se s rostoucím n průběh tlaku čím dál tím více blíží průběhu znázorněnému na obr. 24. Ten bychom však dostali jen za předpokladu absolutně tuhého razníku ($\nu_1 = 0$) a pro $n \rightarrow \infty$.

Snadno se můžeme přesvědčit, že vzorec (9.2) přejde pro $n = 1$ do tvaru (8.8). Stačí si uvědomit, že

$$\frac{1-\mu}{G} = \frac{2(1-\mu^2)}{E} \quad (9.5)$$

$$y_1''(0) = \frac{1}{R_1}, \quad y_2''(0) = \frac{1}{R_2}$$



OBR. 28

Jě zajímavě porovnat tyto výsledky platné pro rovinné přetvoření s případem vtlačování rotačně symetrického pružného tělesa (razníku) do pružného poloprostoru. Zavedeme-li válcové souřadnice r, φ, z_i s počátkem v bodě dotyku tak, aby osa z_i spadala do směru normály a směřovala dovnitř i -tého tělesa ($i = 1, 2$), bude mezera mezi oběma tělesy popsána rovnicí

$$z = z_1 + z_2 = \frac{1}{2n!} [z_1^{(2n)}(0) + z_2^{(2n)}(0)] r^{2n} \quad (9.6)$$

Označme

$$A = \frac{1}{2n!} [z_1^{(2n)}(0) + z_2^{(2n)}(0)] \quad (9.7)$$

Pak rovnice (9.6) nabývá tvaru $z = Ar^{2n}$ a deformační podmínka je

$$w_1 + w_2 = \delta - Ar^{2n} \quad (9.8)$$

pro $r \in S$, kde S je dotyková oblast (v tomto případě kruh). Je to obdoba rovnice (5.13). Poloměr hranice dotykové oblasti vyjde $\sqrt{56}$

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{4n} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) 2n} \cdot \frac{F(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{A}} \quad (9.9)$$

a sblížení těles

$$\delta = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)(2n-2) 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)(2n-1)} A a^{2n} \quad (9.10)$$

Pro rozdělení tlaku máme vztah poněkud komplikovanější, a to

$$p(r) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)(2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)(2n-1)} \frac{2n+1}{2} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{2n-2} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-4} + \frac{3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-6} + \dots \\
& \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-7)(2n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-6)(2n-4)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \\
& + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-5)(2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)(2n-2)} \left] \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \frac{F}{\pi a^2}
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Vztah (9.11) platí jen pro $0 \leq r < a$. Vně tohoto kruhu je $p = 0$.

Průběhy tlaků pro různá n se podobají těm, které jsme znázornili na obr. 28. Rozdíl mezi rovinným a rotačně symetrickým případem je ten, že u rotačně symetrického razníku můžeme vypočítat jeho sblížení s pružným poloprostorem, což je v rovinné úloze vyloučeno. Z rovnic (9.9) a (9.10) vidíme, že

$$\delta \sim F \frac{2n}{2n+1} \tag{9.12}$$

Pro $n = 1$ je sblížení δ úměrné třetí odmocnině z kvadrátu síly F

$$\delta \sim F^{2/3} \quad \text{pro } n = 1 \tag{9.13}$$

Roste-li n nade všechny meze, blíží se (9.12) přímé úměře

$$\delta \sim F \quad \text{pro } \lim n \rightarrow \infty \tag{9.14}$$

Tato přímá úměra skutečně platí pro případ vtlačování tuhého válce do pružného poloprostoru. V tom případě je dotyk stacionární, a = poloměr válce. Je-li vtlačovaný válec absolutně tuhý, vyjde

$$\delta = \frac{1 - \mu^2}{4E} \frac{F}{a} \tag{9.15}$$

K zajímavému výsledku došli Polya a Szego /47/.*) Je-li do pružného poloprostoru vtlačován absolutně tuhý razník s plochým čelem nekruhového průřezu, pak jeho sblížení s pružným poloprostorem (jeho posuv) není nikdy větší než posuv rotačně symetrického absolutně tuhého válce o stejném průřezu a při stejné přítláčné síle.

*) Autoři se v citované práci zabývají kapacitou kondenzátoru. Nerovnosti, které odvozují, vedou u kontaktních úloh k závěru, který uvádíme.

10. KONTAKTNÍ ÚLOHY SE TŘENÍM

Až dosud jsme se zabývali "normálními úlohami", ve kterých se předpokládalo, že povrch těles je dokonale hladký. V dotykové oblasti se mezi tělesy přenáší síla jen jako tlak kolmý k povrchu. Skutečná tělesa jsou však drsná. Mezi dvěma body v dotykové oblasti, z nichž jeden patří k tělesu 1 a druhý k tělesu 2, může dojít k relativnímu posuvu $\vec{V}(\vec{x})$. Přitom \vec{x} je polohový vektor jednoho z obou bodů. Takový posuv provází smykové tření. Je-li relativní posuv nulový, mluvíme o adhezi. Tření umožňuje, aby se dotykovou oblastí přenášely síly i jinak než kolmo působícím tlakem. Napěťový vektor $\vec{p}(\vec{x})$ bude mít obecně složku normálovou $p_n(\vec{x})$ a tečnou $p_t(\vec{x})$. U klasických problémů, jimiž jsme se až dosud zabývali, bylo $p_t(\vec{x}) = 0$.

Aby se výpočty přesprávilš nekomplikovaly, předpokládá se zpravidla platnost nejjednoduššího Amontonsova-Coulombova zákona tření, podle něhož

$$|p_t(\vec{x})| \leq f p_n(\vec{x}) \quad (10.1)$$

Z povahy dotyku vyplývá, že $p_n(\vec{x}) \geq 0$, tj. normálová složka silového působení může být jen tlaková, nikoli tahová. Může být ovšem i nulová. Označili jsme f součinitel smykového tření.* Považujeme jej za konstantní.

Působí-li tření, rozdělí se dotyková oblast obecně na dvě části, na část adheze a relativního skluzu. Jedna nebo druhá část může chybět. Přitlačujeme-li k sobě tělesa symetrická ke společné tečné rovině, bude v celé oblasti dotyku dokonalá adheze. Smýkáme-li jedno těleso po druhém, půjde pouze o skluz. Zvláštní případ je valení těles. Tu je část dotykové oblasti ve stavu adheze, část ve skluzu (příklady viz obr. 29).

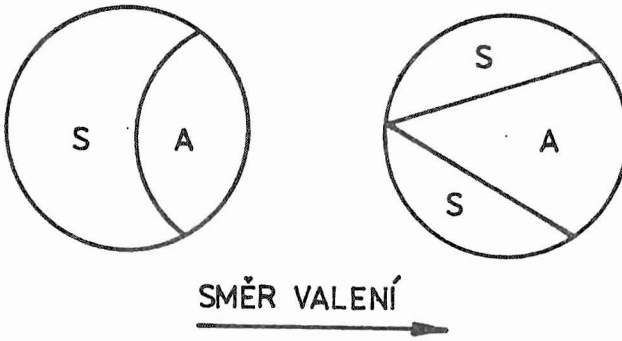
Na příkladu valení železničního kola ukážeme, jak složité poměry v dotyku kola s kolejnicí nastávají. Souřadnicový systém vztáhneme ke kolejnici. Jednotkové, vzájemně ortogonální vektory \vec{n} , \vec{r} , \vec{s} zvolíme tak, že vektor \vec{n} bude kolmý k dotykové ploše a bude směřovat k ose kola, vektory \vec{r} a \vec{s} budou oba v rovině dotykové oblasti (ve společné tečné rovině kola a kolejnice), přičemž \vec{r} bude směřovat podél kolejnice ve směru valení kola. Jsou zřejmé z obr. 30 a 31.

Nevšímáme-li si deformací soustředěných do malého okolí dotykové plochy, lze pohyb kola popsat tak, jak by kolo bylo absolutně tuhé. Kolo rotuje kolem své osy úhlovou rychlostí $\vec{\omega} = \{\omega_n, 0, \omega_s\}$ a ještě se obecně posouvá tak, že body na ose kola konají translační pohyb

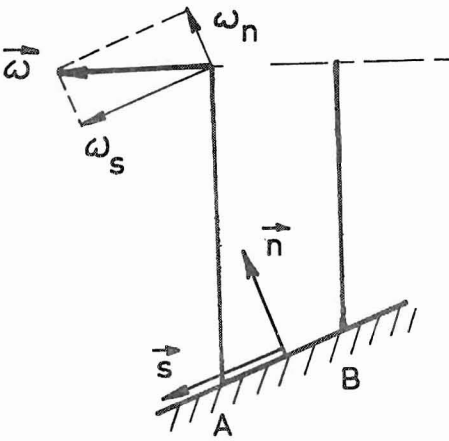
* Součinitel adheze a součinitel smykového tření se tedy v Amontonsově-Coulombově zákonu (10.1) nerozlišují.

A - ADHEZE

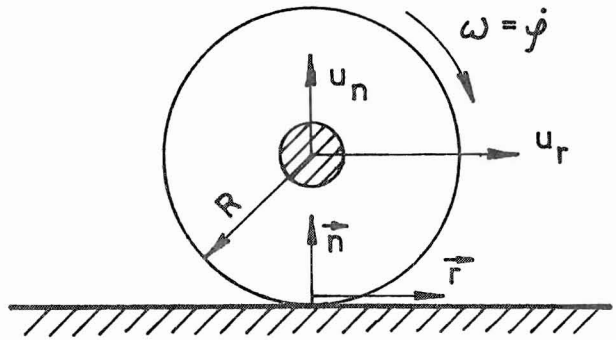
S - SKLUZ.



OBR. 29



OBR. 30



OBR. 31

s posuvem $\vec{u} = \{u_n, u_r, u_s\}$. Místo posuvu \vec{u} můžeme pohyb popsat též rychlostí $\dot{\vec{u}} = \{\dot{u}_n, \dot{u}_r, \dot{u}_s\}$. Úhlovou rychlost $\vec{\omega}$ můžeme naopak nahradit úhlem otočení kola $\vec{\varphi}$, přičemž $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$. Tečkou označujeme časovou derivaci.

Protože obvodová rychlost v bodě B je menší než v bodě A (obr. 30), vytvoří se nutně skluzová oblast. Za jakých okolností lze hovořit o valení kola? To je zřejmě třeba nějak definovat, neboť velikost skluzové oblasti může být relativně velmi různá. Říkáme, že se kolo odvaluje nebo valí, když zároveň platí:

$$\omega_s R = \dot{u}_r [1 + O(\varepsilon)]$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_s &= O(\varepsilon \ddot{u}_r) \\ \ddot{u}_r &\neq 0 \\ \omega_n, \dot{u}_n &\text{ jakékoli} \end{aligned} \quad (10.2)$$

Přítom R značí poloměr kola, ε je reprezentativní poměrná deformace ve skluzové oblasti. Symbolem $O(x^n)$ označujeme řádový odhad nějaké funkce $f(x)$ takové, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x^n} \right| < \infty \quad (10.3)$$

Při ustáleném pohybu lze rovnice popisující pohyb uvést do takového tvaru, že se v nich nevyskytuje ani čas, ani vzdálenost tělesa od výchozí polohy. K tomu bývá nutné zvolit systém souřadnic spjatý s pohybem dotykové oblasti spíše než s nehybnou kolejnicí. V opačném případě je pohyb neustálený.

Při valení kola po kolejnici jsou splněny podmínky (10.2) a existuje oblast adheze. Stlačujeme-li kolo tak, že

$$\vec{\psi} = 0, \quad u_s = u_r = 0, \quad u_n < 0 \quad (10.4)$$

jde o Hertzovu kontaktní úlohu. Dopadne-li kolo na kolejnici v okamžiku $t = 0$ kolmo a opět se odrazí, je

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= 0, \quad \dot{u}_s = \dot{u}_r = 0 \\ \dot{u}_n &\begin{cases} < 0 & \text{pro } t < 0 \\ > 0 & \text{pro } t > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Takto řešil Hertz úlohu o rázu dvou těles. Předpokládal dokonale hladký povrch a kinetostatické namáhání (kvazistatický případ).

Při posuvném smyku je

$$\vec{\psi} = 0, \quad u_s = 0, \quad u_r \neq 0 \quad (10.6)$$

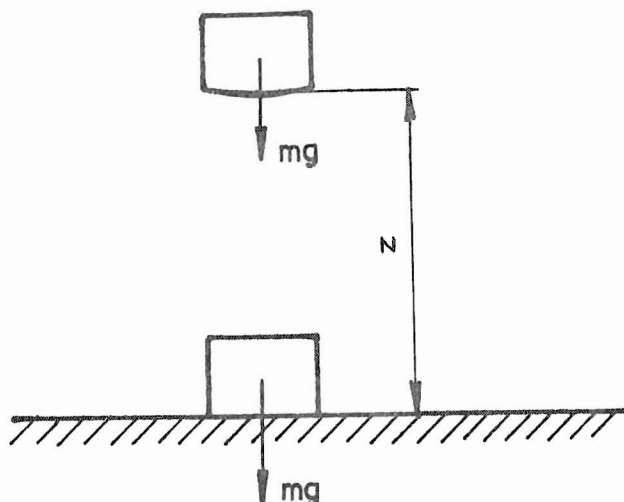
To odpovídá pohybu zablokovaného kola. O vrtném pohybu hovoříme tehdy, je-li

$$u_s = u_r = 0, \quad \omega_s = 0, \quad \omega_n \neq 0 \quad (10.7)$$

Většinou však nejde o žádné takto definované pohybové stavy, ale o zcela obecný neustálený pohyb. Jeho rozbořem se nebudeme zabývat; odkazujeme na literaturu /26/, /27/, popř. /28/. Vliv mazání na rozdělení tlaku v kontaktní oblasti se probírá v lit. /9/. O vlivu tření na lisované, popř. zatepla sestavené spoje s přesahem poloměrů pojednáme později.

11. VARIČNÍ FORMULACE KONTAKTNÍCH ÚLOH

Představme si závaží o hmotnosti m (obr. 32), které se může pohybovat pouze svisle na dráze $z \geq 0$. Rovina $z = 0$ představuje tuhou nepohyblivou podložku.



OBR. 32

Je-li $z > 0$, může být variace δz volena jakkoli (kladná i záporná). Leží-li těleso na podložce, je $z = 0$ a variace může být jenom nezáporná ($\delta z \geq 0$). Akční silou je zde síla tíže $F = -mg$. Záporné znaménko značí, že síla směřuje proti kladné ose z . Virtuální práce tedy je

$$\delta W = -mg\delta z \quad (11.1)$$

a může být kladná i záporná, je-li $z > 0$ (stav nerovnováhy). Spočívá-li těleso na podložce, je

v rovnováze ($z = 0$). V tom případě může být jen $\delta W \leq 0$ pro všechna přípustná δz . Přitom

$$W = -mgz \quad (11.2)$$

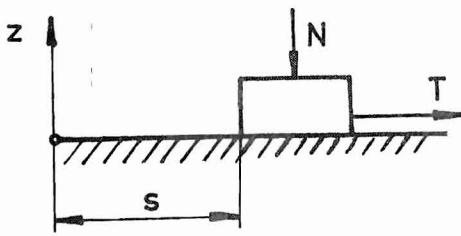
představuje potenciálovou funkci. Potenciální energie je

$$V = -W = mgz \quad (11.3)$$

takže za rovnováhy $\delta V \geq 0$. To je však podmínka minima funkce $V(z)$ /24/ pro stabilní rovnovážný stav. Princip minima celkové potenciální energie tedy platí, ale místo obvyklé podmínky $\delta V = 0$ pro stacionární hodnotu funkcionálu V máme nyní nerovnost $\delta V \geq 0$.

Začali jsme hovořit o funkcionálu místo o funkci. Takovým nepřipustným způsobem jsme povýšili poznatek o soustavě na obr. 32 s jedním stupněm volnosti na obecný princip mechaniky. Nemohli bychom to učinit, kdyby nebylo známo jiné, rigorózní odvození téhož principu /36/.

Ukážeme, že ke stejné "variační nerovnosti" vede i úloha o mechanické soustavě se smykovým třením. Na obr. 33 je znázorněno těleso přitlačované silou N k drsné podložce ($z = 0$). Tečná reakce je za působení horizontální síly T nenulová.



OBR. 33

Uvážíme, jaké síly působí na těleso za rovnováhy. Je-li síla pozitivní, může existovat rovnováha jen při $z = 0$. Platí-li Amontonsův-Coulombův zákon tření, nemůže horizontální síla T převýšit hodnotu fN . Za pohybu bude přírůstek Δs dráhy s nenulový a $T = \pm fN$ (znaménko se volí podle smyslu Δs). Tyto poznatky, platné pro rovnovážný stav, můžeme shrnout takto:

$$\text{Je-li } N > 0, \text{ musí být } z = 0 \quad (11.4)$$

$$|T| \leq fN \quad (11.5)$$

$$\Delta s \neq 0 \Rightarrow T = fN \frac{\Delta s}{|\Delta s|} \quad (11.6)$$

Jak je to s energiemi? Práce, kterou vykoná vertikální akční síla, je $-Nz$. Práce horizontální síly je $T\Delta s$. Práce disipativní třecí síly je $-fN|\Delta s|$. Princip virtuálních prací dává pro $z \cong 0$ podmínku rovnováhy

$$\delta W = -N\delta z + T\delta(\Delta s) - fN\delta|\Delta s| \leq 0 \quad (11.7)$$

Rozebereme nyní tuto nerovnost. Je-li $z > 0$, $\delta(\Delta s) = 0$, je $\delta W = -N\delta z$. Protože δz můžeme volit kladné i záporné, nemůže nerovnost (11.7) obecně platit. Nemůže být proto ani rovnováha; výjimkou je případ nezatíženého tělesa ($N = 0$), které by dalo $\delta W = 0$. To je triviální případ rovnováhy. Zvolme nyní $z = 0$. Pak musí být $\delta z \cong 0$, takže podmínka rovnováhy $\delta W = -N\delta z \leq 0$ dá $N \cong 0$ ve shodě s (11.4).

Ponechme $z = 0$, $\delta z = 0$. Pak za rovnováhy bude

$$\delta W = T\delta(\Delta s) - fN\delta|\Delta s| \leq 0 \quad (11.8)$$

Zvolíme-li $\Delta s \neq 0$, bude *)

$$\delta|\Delta s| = \frac{\Delta s}{|\Delta s|} \delta(\Delta s) \quad (11.9)$$

a $\delta(\Delta s)$ bude libovolné (avšak nekonečně malé). Dosadíme-li (11.9) do (11.8), dostaneme

*) Vztah (11.9) odvodíme diferenciací identity $|\Delta s|^2 = (\Delta s)^2$.

$$\left(T - fN \frac{\Delta S}{|\Delta S|} \right) \delta(\Delta S) \leq 0 \quad (11.10)$$

Vzhledem k libovolnosti $\delta(\Delta S)$ může tato nerovnost platit jen tehdy, bude-li se oblá závorka rovnat nule. To je však totožné s podmínkou (11.6).

Zvolme nyní $\Delta S = 0$. Pak $\delta|\Delta S| = |\delta(\Delta S)|$. Zvolíme $\delta(\Delta S) = kT$, $k > 0$, což je méně příznivý případ, jak usoudíme podle znamének členů v nerovnosti (11.8). Když tuto hodnotu dosadíme do (11.8), bude

$$kT^2 - fNk|T| \leq 0 \quad (11.11)$$

Mohou nastat dva případy. Buď $T = 0$, pak samozřejmě platí, že $T < fN$ ($N > 0$). Je-li $T \neq 0$, pak - protože $T^2 = |T|^2$ - z (11.11) dostaneme

$$|T| \leq fN \quad (11.12)$$

To je však podmínka (11.5). Tím jsme všechny tři podmínky (11.4) až (11.6) odvodili z jediného variačního principu (11.7). To je jistě pozoruhodný úspěch. Zavedeme-li konečně místo potenciálové funkce W potenciální energii $V = -W$, bude za rovnováhy

$$V(z, \Delta S) = Nz - T\Delta S + fN|\Delta S| \quad (11.13)$$

minimální, ovšem s omezující podmínkou $z \geq 0$. Podmínka minima je vyjádřena nerovností

$$\delta V(z, \Delta S) \geq 0, \quad z \geq 0 \quad (11.14)$$

Je třeba si uvědomit, že potenciální energii V podle (11.13) nemůžeme derivovat podle ΔS , je-li $\Delta S = 0$. To je pochopitelné, neboť síla T může v tomto případě nabývat jakékoli hodnoty z intervalu $-fN \leq T \leq fN$. Za pohybu však derivovat můžeme, dostaneme

$$\frac{\partial V(z, \Delta S)}{\partial \Delta S} = -T + fN \frac{\Delta S}{|\Delta S|} \quad (11.15)$$

Jde-li o pružné těleso, můžeme variační princip (11.14) ponechat, vyjádříme-li

$$V = E + A + R \quad (11.16)$$

za vedlejších podmínek

$$q = 0, \quad d \geq 0 \quad (11.17)$$

Přitom

- \bar{E} je elastická deformační energie (objemový integrál)
A je potenciál vnějších sil (u povrchových sil jde o povrchový integrál)
R je třecí energie (povrchový integrál, jehož integrand nelze obecně derivovat)
 $g = 0$ je podmínka předepsaných posuvů (na části povrchu)
 $d \geq 0$ je podmínka neprostupnosti těles.

Vztahy (11.17) představují okrajové podmínky.

Protože variační princip i okrajové podmínky obsahují nerovnosti, vede snaha po využití variačních principů k numerickým metodám známým z teorie matematického programování. Výsledky však nejsou dosud příliš atraktivní, takže se jimi nebudeme zabývat. Uvedeme pouze krátký výklad o aplikaci metody konečných prvků.

12. VYUŽITÍ METODY KONEČNÝCH PRVKŮ K ŘEŠENÍ KONTAKTNÍCH ÚLOH

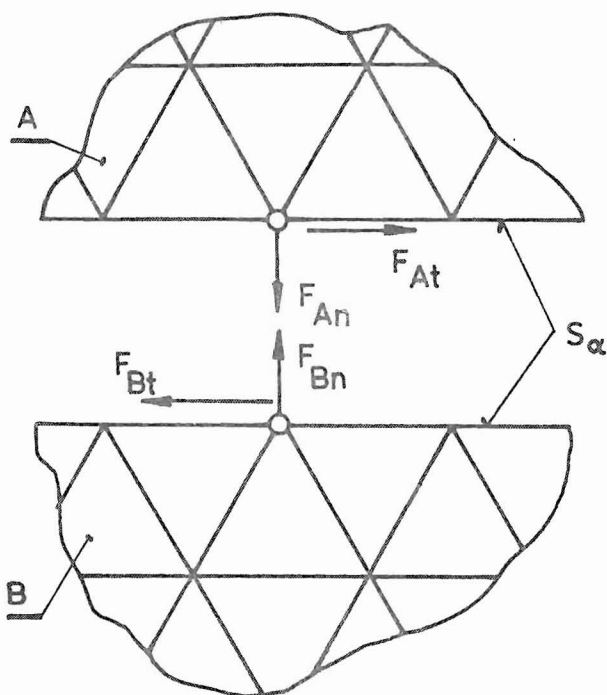
Metody konečných prvků užili k řešení dotykových úloh různí autoři; nejčastěji se však omezili na případy s dokonale hladkými povrchy, nebo naopak s dokonalou adhezí. Obecnější metodu odvodili pro rotačně symetrická tělesa Wilson a Parsons /61/. Dotyk rovinných těles řešili Chan a Tuba /4/. Ačkoli zahrnuli do svých úvah i smykové tření, aplikovali svou metodu na řešení napjatosti v zámku turbínové lopatky (ve "stromečku") bez tření. Wright a O'Connor /62/ řešili rovinnou úlohu o dlouhé obdélníkové desce sevřené ve střední části dvěma pružnými bloky. Když se deska zatíží dostatečně velkým tahem, dojde na okrajích dotykových ploch k uvolnění dotyku, a to i v případě, že se zanedbá příčná kontrakce (Poissonovo číslo $\mu = 0$). Zde se uplatňuje vliv třecích sil na deformaci rohů pružných bloků, mezi nimiž je deska sevřena. Ohte /43/ podal řešení dotykové úlohy jednak rovinné, jednak rotačně symetrické. Šlo o vtlačování pružného razníku s plochým čelem do pružné poloroviny, resp. poloprostoru. Stacionární dotyková oblast se dělí na adhezní a na skluzovou část. Z dalších významných prací citujeme ještě /37/, /44/.

Zvláštností postupu řešení úloh metodou konečných prvků vysvětlíme jen na jednoduché rovinné úloze. Na povrchu obou těles odhadneme množinu uzlů, které přijdou během zatěžování do kontaktu. V úlohách se stacionár-

ním dotykem je to snadné. V ostatních případech oblast dotyku S_α odhadneme (nevadí, je-li odhadnutá oblast větší než skutečná, rozdíl by však neměl být velký). Abychom se vyhnuli interpolaci, volíme uzly tak, aby byly při dotyku koincidentní (s přesností rovnou řádové velikosti posuvů, které předpokládáme tak malé, aby platila lineární teorie pružnosti pro každé z obou těles). Do jiné množiny S_β budou spadat uzly zatížené vnějšími silami. Pro jednoduchost budeme předpokládat proporcionální (prosté) zatěžování, takže se vektor sil $\{F_\beta\}$ bude měnit úměrně k parametru $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$. *)

$$\{F_\beta\} = \lambda \{F\}, \quad \{F\} = \text{konst} \quad (12.1)$$

Předpokládáme, že matice tuhosti byly již regularizovány předepsáním okrajových podmínek. Tzv. volné uzly, jež nepatří do oblasti kontaktu a v nichž není předepsán ani posuv, ani síla, eliminujeme předem statickou kondenzací (viz příklad 8). Tím se vytvoří "superelementy", jejichž hranice obsahují uzly pouze v oblastech S_α, S_β . Posuvy, resp. síly, v uzlech v kontaktní oblasti rozložíme na složky ve směru společné tečny a kolmo k němu (obr. 34). Na obr. 34 jsme zakreslili pouze složky



OBR. 34

síl. Posuvy bychom mohli zakreslit zcela obdobně; stačí si představit, že znak "F" zaměníme za "u". Uzly vyznačené kroužkem budou koincidentní, půjde-li o adhezi nebo skluz. V tom případě musí mít společný normálový posuv ($u_{An} + u_{Bn} = 0$), kdežto tečné posuvy se mohou nepatrně lišit (o vzdálenost řádově menší, než je charakteristický rozměr prvků). Uzly se však mohou také oddálit ($u_{An} + u_{Bn} < 0$), jestliže se v daném místě dotyk uvolní. Proto oba uzly číslováme samostatně, každému z nich ponecháme oba stupně volnosti.

*) Podrobnější výklad obsahuje práce /22/.

V každém uzlu z oblasti S_α může nastat jeden z těchto tří stavů: (1) adheze, (2) skluz, (3) uvolněný dotyk. Abychom správně vystihli vliv historie zatěžování (nezapomeňme, že tření vnáší do soustavy nevratnou disipaci mechanické energie), řešíme úlohu po přírůstcích (krok za krokem). Přírůstky označíme symbolem δ . Matematické vyjádření podmínek styku je zřejmé z tab. 3. Přitom jsme označili

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases} \quad (12.2)$$

f je součinitel tření (stejný pro adhezi i skluz).

Tab. 3 Podmínky dotyku těles (srov. s obr. 34)

Oblast	Síly	Posuvy
(1) adheze	$F_{An} - F_{Bn} = 0$ $F_{At} - F_{Bt} = 0$ $ F_{At} + f F_{An} < 0$ $F_{An} < 0$	$u_{An} + u_{Bn} = \delta_m$ $\delta u_{At} + \delta u_{Bt} = 0$
(2) skluz	$F_{An} - F_{Bn} = 0$ $F_{At} - F_{Bt} = 0$ $F_{At} = f F_{An} \text{sign}(\delta u_{Bt} + \delta u_{At})$ $F_{An} < 0$	$u_{An} + u_{Bn} = \delta_m$ $\delta u_{At} + \delta u_{Bt} \neq 0$
(3) uvolněný dotyk	$F_{An} = 0$ $F_{At} = 0$ $F_{Bn} = 0$ $F_{Bt} = 0$	$u_{An} + u_{Bn} < \delta_m$ δ_m je vzdálenost uzlů A, B v neza- tíženém stavu

Pro celou soustavu, která nyní obsahuje pouze dva superelementy, máme vztah

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & | & K_{\alpha\beta} \\ \hline K_{\beta\alpha} & | & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_\alpha \\ \lambda F \end{Bmatrix} \quad (12.3)$$

Když ji rozepíšeme, dostaneme tyto dvě maticové rovnice (závorky u matic a vektorů budeme pro stručnost vynechávat)

$$K_{\alpha\alpha} u_\alpha + K_{\alpha\beta} u_\beta = F_\alpha \quad (12.4)$$

$$K_{\beta\alpha} u_\alpha + K_{\beta\beta} u_\beta = \lambda F \quad (12.5)$$

Protože nás posuvy uzlů v oblasti S_β prozatím nezajímají, eliminujeme je tak, že vypočteme

$$u_\beta = \lambda K_{\beta\beta}^{-1} F - K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha} u_\alpha \quad (12.6)$$

a dosadíme do (12.4). Dostaneme

$$\mathcal{K} u_\alpha = F_\alpha - \lambda Q \quad (12.7)$$

kde

$$\mathcal{K} = K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta} K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha} \quad (12.8)$$

$$Q = K_{\alpha\beta} K_{\beta\beta}^{-1} F \quad (12.9)$$

Matici tuhosti \mathcal{K} i vektor Q můžeme vypočítat předem, neboť matici tuhosti v rovnici (12.3) známe a subvektor F rovněž [srov. s (12.1)]. Rovnice (12.7) je pro další výpočet, v němž se berou do úvahy podmínky dotyku těles, výchozím vztahem. V inkrementálním tvaru budeme mít

$$\mathcal{K} \delta u_\alpha = \delta F_\alpha - \delta \lambda \cdot Q \quad (12.10)$$

Můžeme si položit otázku, jaký je fyzikální význam vektoru Q ? Z rovnice (12.7) vidíme, že bude $F_\alpha = Q$, jestliže zvolíme $u_\alpha = 0$, $\lambda = 1$. Jestliže bychom tedy znemožnili posuvy uzlů v dotykové oblasti S_α , vznikly by v nich při plném zatížení silami F reakce Q . Jsou to síly, které by se do uzlů přenášely z rámu, na který bychom uzly připevnili.

Posuvy u_α a síly F_α seřadíme podle kvality dotyku, jak je zachycuje tab. 1. Bude

$$u_{\alpha} = \begin{Bmatrix} u_{\alpha}^{(1)} \\ u_{\alpha}^{(2)} \\ u_{\alpha}^{(3)} \end{Bmatrix}, \quad F_{\alpha} = \begin{Bmatrix} F_{\alpha}^{(1)} \\ F_{\alpha}^{(2)} \\ F_{\alpha}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (12.11)$$

Index v oblé závorce značí, zda jde o adhezi (1), o skluz (2) nebo o uvolněný dotyk (oddálení) (3). Každý ze subvektorů ve vztazích (12.11) dále rozdělíme tak, abychom měli za sebou normálové a pak tečné složky tělesa A a potom ještě tělesa B. Takže pro $k = 1, 2$ nebo 3 dostaneme

$$u_{\alpha}^{(k)} = \begin{Bmatrix} u_{A_n}^{(k)} \\ u_{A_t}^{(k)} \\ u_{B_n}^{(k)} \\ u_{B_t}^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad F_{\alpha}^{(k)} = \begin{Bmatrix} F_{A_n}^{(k)} \\ F_{A_t}^{(k)} \\ F_{B_n}^{(k)} \\ F_{B_t}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (12.12)$$

Protože musí být splněny vztahy mezi posuvy podle posledního sloupce tab. 1, budou všechny přírůstky posuvů δu_{α} známy, podaří-li se najít prvky vektoru $\delta \tilde{u}_{\alpha}$ definovaného takto

$$\delta \tilde{u}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \delta u_{A_n}^{(1)T} & \delta u_{A_t}^{(1)T} & \delta u_{A_n}^{(2)T} & \delta u_{A_t}^{(2)T} \\ \delta u_{B_t}^{(2)T} & \delta u_{A_n}^{(3)T} & \delta u_{A_t}^{(3)T} & \delta u_{B_n}^{(3)T} & \delta u_{B_t}^{(3)T} \end{bmatrix}^T \quad (12.13)$$

Symbolem T vyznačujeme transpozici. S přihlédnutím k tab. 1 soudíme, že pro přírůstky posuvů bude platit vztah

$$\delta u_{\alpha} = N \delta \tilde{u}_{\alpha} \quad (12.14)$$

v němž

$$N = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (12.15)$$

Symbol I znamená jednotkovou submatici, symbol 0 nulovou submatici.

Využijeme-li fyzikálních podmínek v dotykové oblasti podle druhého sloupce tab. 1, dostaneme vztah

$$M \delta F_{\alpha} = 0 \quad (12.16)$$

v němž

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm f & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Připomeňme, že v pravém dolním poli matice M je jednotková, a nikoli nulová matice, přestože máme pro uvolněný dotyk nulové síly F_{An} až F_{Bc} . Rovnice (12.16) totiž platí pro přírůstky sil, a ty by jinak mohly být libovolné.

Další postup je již snadný. Z rovnic (12.14) a (12.16) dosadíme do (12.10). Za tím účelem znásobíme rovnici (12.10) maticí M (zleva). Vzhledem k platnosti (12.16) odpadne na pravé straně první člen. Dostaneme

$$M \mathcal{K} \delta u_{\alpha} = -\delta_{\lambda} M Q \quad (12.17)$$

a po dosazení z rovnice (12.14) vypočteme

$$\delta \tilde{u}_{\alpha} = -\delta_{\lambda} (M \mathcal{K} N)^{-1} M Q \quad (12.18)$$

Tím jsme získali pro přírůstek $\delta F = F \delta_{\lambda}$ zatěžujících sil F_{β} odpovídající přírůstek $\delta \tilde{u}_{\alpha}$ posuvů. Výsledek můžeme dosadit do (12.14) a pak do inkrementálního tvaru rovnice (12.6), totiž do vztahu

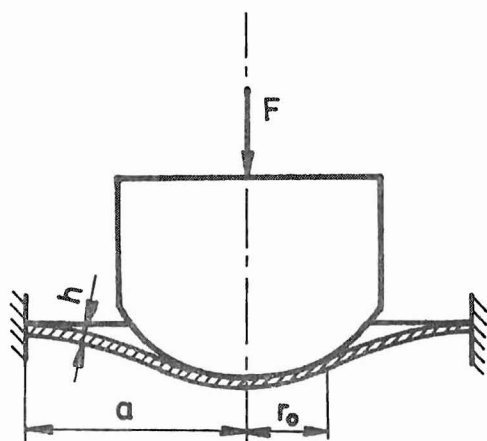
$$\delta u_{\beta} = K_{\beta\beta}^{-1} F \delta_{\lambda} - K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha} \delta u_{\alpha} \quad (12.19)$$

Tím dostaneme přírůstky posuvů ve všech uzlech. To platí za předpokladu, že se rozdělení uzlů do tříd (1) až (3) podle tab. 1 během daného výpočtového kroku nezměnilo. V okamžiku, kdy se tak stane, musíme krok ukončit a pokračovat s novým rozdělením vektorů na subvektory. V tomto "hlídání" výpočtového procesu tkví hlavní programátorská nesnáz. Jiná nesnáz je ve špatné podmíněnosti matice $(M \mathcal{K} N)$. Obě nesnáze však lze překonat, jak ukazují úspěšně vyřešené úlohy, které jsme na počátku kapitoly citovali.

13. KONTAKTNÍ ÚLOHY O DESKÁCH A SKOŘEPINÁCH

Těchto úloh, v nichž se s jinými tělesy nebo mezi sebou dotýkají tenkostěnné desky či skořepiny, bylo řešeno velmi mnoho. Jejich přehled podává - do jisté míry - monografie Grigoljuka a Tolkačeva /16/. Velmi často bývá řešení založeno na Kirchhoffově teorii desek, popř. skořepin. Přitom se nebere v úvahu změna tloušťky stěny vlivem příčné kontrakce. To by mohlo nepříznivě ovlivňovat řešení úloh, u nichž vzniká sevření jako důsledek malého přesahu poloměrů, neboť tento přesah může být srovnatelný s velikostí posuvů působených příčnou kontrakcí. V jiných případech jsou předpoklady Kirchhoffovy teorie zcela přijatelné.

V této kapitole uvedeme jen některé příklady. Např. do vetknuté tenké kruhové desky bude vtlačován rotačně symetrický razník, jehož meridiální křivost lze vyjádřit řadou (obr. 35)



OBR. 35

$$\chi(r) = \frac{1}{R} = \quad (13.1)$$

$$= \chi_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{a}\right)^n$$

Razník je absolutně tuhý, deska pružná. Přítlačná síla je F . Podle teorie tenkých pružných desek, v níž se předpokládá, že si úsečky kolmé k ohybové ploše při deformaci zachovávají tuto kolmost nezávisle na velikosti průhybu a že zůstávají přímé, vyjde radiální, resp. obvodový měrný ohybový moment /58/

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (13.2)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \quad (13.3)$$

Přitom

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (13.4)$$

značí ohybovou tuhost desky a $w(r)$ její průhyb. Pro tento průhyb dává Kirchhoffova teorie desek rovnici (/58/, str. 69)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p}{D} \quad (13.5)$$

Zde p je tlak působící na desku. Tlak nemusí být konstantní, je však rozdělen rotačně symetricky.

Dotýká-li se daný razník desky v kruhové oblasti $0 < r < r_0$, musí na tomto intervalu platit, že

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\alpha(r) \quad (13.6)$$

Funkce $\alpha(r)$ má tvar (13.1). Integrací dostaneme

$$\frac{dw}{dr} = - \int_0^r \alpha(r) dr = -\alpha_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_n \frac{r^{n+1}}{a^n} \quad (13.7)$$

Tuto hodnotu můžeme dosadit do rovnice (13.5). Dostaneme průběh dotykového tlaku rovněž ve tvaru řady, a to

$$p(r) = D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n n^2 (n+2)}{n+1} \frac{r^{n-2}}{a^n} \quad (13.8)$$

Rovnice (13.8) platí pro $0 < r < r_0$, avšak jen tehdy, vyjde-li na celém intervalu $p(r) \geq 0$. Vně dotykové oblasti žádný tlak nepůsobí. Hranici $r = r_0$ musíme zatím ze svých úvah vynechat, neboť tam nemusí rovnice (13.6) platit. Pro $r > r_0$ se bude křivost meridiánů desky a razníku lišit.

Pozoruhodné na řešení (13.8) je to, že pro razník s kulovým povrchem $\alpha(r) = \alpha_0 = \text{konst}$ máme podle (13.1) $c_n = 0$ pro všechna n , a tedy $p = 0$. To znamená, že se silové působení v tom případě soustředí pouze na liniové zatížení kružnice o poloměru r_0 .

$$q_0 = \frac{F}{2\pi r_0} \quad (13.9)$$

Zajímavé je, že k řešení (13.8) jsme nepotřebovali znát poloměr r_0 , kdežto řešení (13.9) je na tomto poloměru závislé. Zatížení (13.9) dávkou, jak známo, meridiální křivost α_0 v intervalu $0 < r < r_0$ konstantní *)

$$\alpha_0 = \frac{F}{8\pi D} \left[2 \ln \frac{a}{r_0} + \frac{r_0^2}{a^2} - 1 \right] \quad (13.10)$$

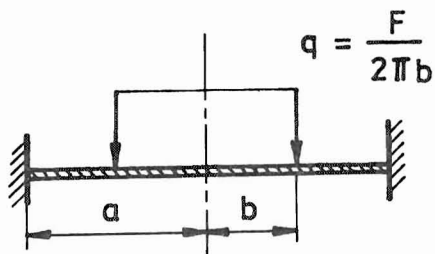
Křivost α_0 známe; vztah (13.10) umožňuje získat r_0 , je-li α_0 dáno (nebo naopak). Z rovnice (13.9) pak vypočteme q_0 .

Průběh tlaku $p(r)$, a tedy i namáhání desky v dotykové oblasti $0 < r < r_0$ jsme získali snadno, ale o namáhání a průhybu desky vně této oblasti nevíme dosud nic.

*) Získáme ji dvojí derivací rovnice (80) z knihy /58/, str. 81. Srovnej též s obr. 36 a s rovnicí (13.14).

Existuje ještě jiný způsob řešení, který dá odpověď zároveň i na tuto otázku; poskytnete totiž výsledky pro celou desku. Řešení využívá princip superpozice.

Nejprve vyřešíme úlohu o desce zatížené silou F rovnoměrně rozdělenou na kružnici o poloměru b (obr. 36). Podle /58/, str. 81, dostaneme průhyb



OBR. 36

$$w(r) = \frac{F}{8\pi D} \left[(a^2 - r^2) \frac{a^2 + b^2}{2a^2} + (b^2 + r^2) \ln \frac{r}{a} \right] \quad \text{pro } r > b \quad (13.11)$$

$$w(r) = \frac{F}{8\pi D} \left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - b^2)}{2a^2} \right] \quad \text{pro } r < b \quad (13.12)$$

Křivost $\varkappa(r) = d^2w/dr^2$ vyjde

$$\varkappa(r) = -\frac{F}{8\pi D} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r}{a} + 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad \text{pro } r > b \quad (13.13)$$

$$\varkappa(r) = -\frac{F}{8\pi D} \left(2 \ln \frac{b}{a} + 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) = \text{konst.} \quad \text{pro } r < b \quad (13.14)$$

Nyní nahradíme sílu F elementární silou $2\pi b p(b) db$, která vzniká působením tlaku $p(r)$ na úzké mezikružší o poloměru $r = b$ a šířce db . Pak integrujeme, a to tak, že na intervalu $0 < b < r$ použijeme vztah (13.13) a na intervalu $r < b < r_0$ vztah (13.14). Oba vztahy přitom poněkud podrobněji rozepíšeme [dosadíme $\ln(b/a) = \ln b - \ln a$ atd.]
Vyjde

$$\begin{aligned} \varkappa(r) = & -\frac{1}{4D} \int_0^r (2\ln r - \underline{2\ln a + 1 + 2\ln b} - 2\ln b + 1 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{r^2}) p b db - \\ & - \frac{1}{4D} \int_r^{r_0} (2\ln b - 2\ln a + 1 - \frac{b^2}{a^2}) p b db \end{aligned} \quad (13.15)$$

Podtržené členy se opakují v obou integrálech, takže je můžeme zahrnout do jediného integrálu na intervalu $(0, r_0)$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \varkappa(r) = & -\frac{1}{4D} \int_0^r (2\ln \frac{r}{b} + 1 - \frac{b^2}{r^2}) p b db - \\ & - \frac{1}{4D} \int_0^{r_0} (2\ln \frac{b}{a} + 1 - \frac{b^2}{a^2}) p b db \end{aligned} \quad (13.16)$$

Pozoruhodné je, že vzorec (13.16) platí nejen na intervalu $0 \leq r < r_0$, ale také na intervalu $r_0 < r < a$. V tomto druhém případě můžeme vzít horní mez prvního integrálu r_0 , neboť $p(b) = 0$ pro $b > r_0$.

Předpokládáme-li, že se deska a razník dotýkají v oblasti $0 \leq r < r_0$, bude křivost $\varkappa(r)$ na tomto intervalu známá a shodná s křivostí razníku.^{*)} Rovnice (13.16) je pak Volterrovou integrální rovnicí (prvého druhu) pro neznámou funkci $p(r)$, $r < r_0$. Vazbu mezi silou F a poloměrem r_0 představuje rovnice statické ekvivalence

$$F = 2\pi \int_0^{r_0} p(b) b db \quad (13.17)$$

Řešením integrální rovnice (13.16) dostaneme funkci $p(r)$. Z téže rovnice pak vypočteme i funkci $\varkappa(r)$ pro $r_0 < r < a$ (pro interval $0 \leq r < r_0$ je známa).

Z rovnic

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\varkappa(r), \quad \frac{dw}{dr} = -\int_0^r \varkappa(b) db \quad (13.18)$$

dosadíme do (13.2) a (13.3) a dostaneme namáhání desky (v oblasti dotyku i ve vnější části). Další integrací druhé z rovnic (13.18) dostaneme průhyb.

*) Je-li křivost meridiánu razníku v některém místě $\varkappa(r) = 1/R$, je křivost desky v témže místě $1/(R+h/2)$. Tento rozdíl zanedbáváme, neboť $h \ll R$.

Příklad 8

Pro razník s kulovým čelem máme $\alpha(r) = \alpha_0 = \text{konst.}$ Rovnice (13.16) dává pro $0 \leq r < r_0$

$$\int_0^r \left(2 \ln \frac{r}{b} + 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p(b) b db = -A - 4D \alpha_0 \quad (\text{a})$$

kde

$$A = \int_0^{r_0} \left(2 \ln \frac{b}{a} + 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) p(b) b db \quad (\text{b})$$

Pro derivování integrálu podle parametru máme vzorec

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^{U(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_0^{U(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f[U(\alpha), \alpha] \frac{dU(\alpha)}{d\alpha} \quad (\text{c})$$

V našem případě bude mít tento vzorec tvar

$$\frac{d}{dr} \int_0^r f(b, r) db = \int_0^r \frac{\partial f(b, r)}{\partial r} db + f(r, r) \quad (\text{d})$$

kde

$$f(b, r) = \left(2 \ln \frac{r}{b} + 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p(b) \cdot b \quad (\text{e})$$

Zřejmě $f(r, r) = 0$. Derivací rovnice (a) podle parametru r tedy dostaneme (pro $r > 0$)

$$\int_0^r \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p(b) b db = 0 \quad (\text{f})$$

a další derivací (pro $r > 0$)

$$\int_0^r b^3 p(b) db = p(r) \cdot r^4 \quad (\text{g})$$

Označme $b^3 p(b) = \psi(b)$. Tento výraz dosadíme do (g) a derivujeme podle b . Vyjde

$$\psi(r) = \frac{d}{dr} (\psi r) = r \frac{d\psi}{dr} + \psi \quad (\text{h})$$

Protože ψ se na obou stranách rovnice (h) ruší a $r > 0$, musí být $d\psi/dr = 0$. Pak ale $\psi = C = \text{konst}$, takže $p(r) = C/r^3$. Kdyby $C \neq 0$, nedala by rovnice (13.17) konečnou sílu F . Proto je $C = 0$. To ovšem znamená, že také $p(r) = 0$ pro $r < r_0$.

Silové působení je tedy nulové pro $r < r_0$ i pro $r > r_0$. Síla se zřejmě může přenášet jenom na kružnici $r = r_0$. Položíme tedy

$$p(r) = q_0 \delta(r - r_0) \quad (\text{i})$$

kde $\delta(r)$ je Diracova zobecněná funkce a q_0 je délkové zatížení; působí rovnoměrně na kružnici $r = r_0$. Funkci $\delta(r)$ budeme definovat tak, aby

$$\int_0^{r_0} f(x) \delta(x - r_0) dx = f(r_0) \quad (\text{j})$$

Jinými slovy, počítáme s limitou (pro $\epsilon > 0$)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{r_0 + \epsilon} f(x) \delta(x - r_0) dx = f(r_0) \quad (\text{k})$$

Definici (j) jsme zavedli intuitivně. Tak totiž dosáhneme toho, že z rovnice (13.17) dostaneme celou výslednici F elementárních sil $2\pi b p(b) db$, bude-li $p(b)$ dáno rovnicí (i). Zřejmě musí vyjít $F = 2\pi r_0 q_0$. Skutečně, dosadíme-li výraz (i) do rovnice (13.17), dostaneme - za předpokladu platnosti (j) - vztah (13.9)

Protože ve vztahu (a) je $r < r_0$, bude levá strana nulová,^{*)} Musí být proto nulová i pravá strana, takže $A = -4 D x_0$. Z rovnice (b) a (i) máme

$$A = \left(2 \ln \frac{r_0}{a} + 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) q_0 r_0 \quad (\text{l})$$

takže nakonec vyjde

$$F = - \frac{8 D x_0}{2 \ln \frac{r_0}{a} + 1 - \frac{r_0^2}{a^2}} \quad (\text{m})$$

shodně se vztahem (13.10).

Příklad 9

Nyní budeme předpokládat, že razník má meridián ve tvaru paraboly čtvrtého stupně takový, že jeho křivost lze popsat rovnicí

*) Pro $r < r_0$ je $\delta(r - r_0) = 0$, a tedy i $p(r) = 0$.

$$\alpha(r) = \alpha_0 - c_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad (\text{a})$$

Z rovnice (13.16) tentokrát dostaneme

$$\int_0^r \left(2 \ln \frac{r}{b} + 1 - \frac{b^2}{r^2}\right) p(b) b db = -A - 4D\alpha_0 + 4Dc_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad (\text{b})$$

Význam konstanty A je stejný jako v příkladu 8.

Řešení rovnice (b) dostaneme jako součet dvou členů. První člen odpovídá konstantní křivosti α_0 . Tehdy vyjde $A + 4D\alpha_0 = 0$, $p(r) = q_0 \delta(r-r_0)$. Druhý člen bude řešením rovnice

$$\int_0^r \left(2 \ln \frac{r}{b} + 1 - \frac{b^2}{r^2}\right) p(b) b db = 4Dc_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad (\text{c})$$

Předpokládejme, že $p = p_0 = \text{konst.}$ Pak

$$2p_0 \int_0^r b \ln \frac{r}{b} db + p_0 \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^2\right) = 4Dc_2 \cdot \frac{r^2}{a^2} \quad (\text{d})$$

Integrál v rovnici (d) lze řešit metodou per partes. Dostaneme

$$2 \int_0^r x \ln \frac{r}{x} dx = \left[x^2 \ln \frac{r}{x} \right]_{x=0}^{x=r} + \int_0^r x dx = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x + \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} r^2 \quad (\text{e})$$

Rovnice (d) proto dává

$$p_0 = \frac{16}{3} \frac{Dc_2}{a^2} \quad (\text{f})$$

Výsledný tlak mezi razníkem a deskou tedy je

$$p(r) = q_0 \delta(r-r_0) + \frac{16 Dc_2}{3a^2} \quad (\text{g})$$

Z rovnice (g) a (13.17) vyjde

$$q_0 = \frac{1}{r_0} \left(\frac{F}{2\pi} - \frac{8 Dc_2 r_0^2}{3a^2} \right) \quad (\text{h})$$

Když (g) dosadíme do vzorce pro výpočet konstanty A [příklad 8, rovnice (b)] a výsledek porovnáme s výrazem $-4D\alpha_0$, dostaneme rovnici vazby

mezi silou F a poloměrem r_0 ve tvaru

$$\frac{F}{8\pi D\alpha_0} \left(2\ln \frac{r_0}{a} + 1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) = -1 + \frac{2}{3} \frac{c_2}{\alpha_0} \frac{r_0^2}{a^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{a^2} \right) \quad (i)$$

Pro zvolený poměr $r_0/a < 1$ lze z rovnice (i) snadno vypočítat sílu F .

Řešení má smysl, pokud $q_0 \geq 0$, $p \geq 0$. Mezi deskou a razníkem se totiž nemůže přenášet tahová síla, neboť obě tělesa se o sebe pouze opírají a nejsou nijak spojena.

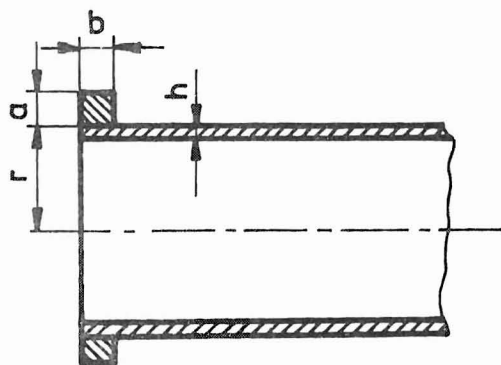
Poznamenejme, že volbou

$$c_2 = \frac{3Fa^2}{16\pi D r_0^2} \quad (j)$$

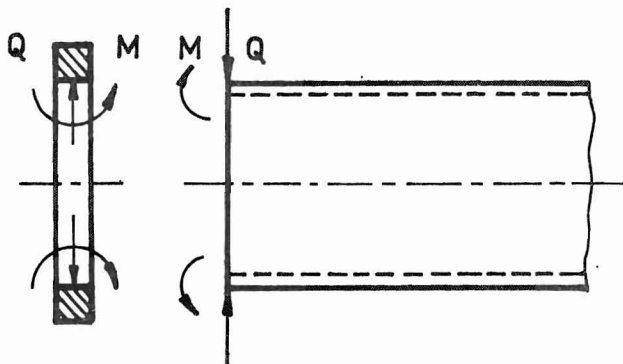
můžeme soustředěné liniové zatížení q_0 na hranici dotykové oblasti anulovat. To je zřejmé z rovnice (h).

Příklad 10

Na konec polonekonečné tenkostěnné trubky je navlečen tenký prstenec s přesahem poloměrů δ (obr. 37). Určete napjatost a deformaci trubky i prstence.



OBR. 37



OBR. 38

Řešení

Budeme předpokládat, že rozměry a , b , h jsou velmi malé ve srovnání s poloměrem r a že materiál obou částí je stejný. Jejich vzájemné působení je znázorněno na obr. 38. Na prstenec, resp. na trubku, kterou můžeme považovat za tenkostěnnou rotačně souměrnou skořepinu, přenáší se

příčná (radiální) síla Q [N/m] a ohybový moment M [Nm/m = N]. Jejich účinkem se prstenec roztáhne o posuv

$$\delta_1 = \frac{Qr^2}{abE} \quad (a)$$

a jeho průřezy se otočí kolem střednice o úhel

$$\psi_1 = \frac{12 Mr^2}{a^3 b E} \quad (b)$$

Radiální posuv $W(x)$ ve vzdálenosti x od okraje skořepiny vyjde (/58/, str. 518)

$$W = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [\beta M (\cos \beta x - \sin \beta x) - Q \cos \beta x] \quad (c)$$

kde

$$D = Eh^3/12(1-\mu^2) \quad \text{je ohybová tuhost skořepiny a}$$

$$\beta = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)/r^2 h^2} \quad \text{je charakteristická konstanta}$$

(má rozměr m^{-1} , takže βx je bezrozměrová hodnota).

Z rovnice (c) vypočteme zmenšení poloměru skořepiny na okraji $x = 0$, jakož i úhel jeho otočení. Vyjde

$$\delta_2 = \frac{1}{2\beta^3 D} (Q - \beta M)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2\beta^2 D} (Q - 2\beta M) \quad (d)$$

Z deformačních podmínek

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta \quad (e)$$

$$\psi_1 = \psi_2$$

vyjdou staticky neurčité veličiny

$$M = \frac{2\beta^2 D \delta}{2AB - 1} \quad (f)$$

$$Q = \frac{4\beta^2 B D \delta}{2AB - 1} \quad (g)$$

kde A , B značí výrazy

$$A = 1 + \frac{\beta^3 h^3 r^2}{6(1-\mu^2)ab}, \quad B = 1 + \frac{\beta h^3 r^2}{(1-\mu^2)a^3 b} \quad (h)$$

Poznámka

Kdyby měl nalisovaný kroužek na obr. 37 poněkud větší rozměry, musila by se analýza tohoto případu pozměnit. Kdyby např. bylo b sice malé, ale a velké, mohli bychom teorii prstence nahradit teorií mezikruhové tenké desky. Kdyby bylo naopak a malé, ale b velké, šlo by o spojení dvou tenkostěnných skořepin. To by byla poněkud obtížnější úloha /34/.

14. VÁLCE PRACOVNÍCH STROJŮ, KALANDRY A VÁLCOVACÍ STOLICE

Jde o značně speciální tematiku, takže se omezíme jen na citování některých pramenů. Podrobnostmi se nebudeme zabývat.

Přítlak mezi dvěma tenkostěnnými válci s pryžovým povlakem a s rovnoběžnými osami je řešen v práci /21/. Protože konce válců jsou vyztuženy vestavěnými čely, nastává u čel koncentrace tohoto přítlaku. Mezi povlakem a pracovním válcem může nastat v dotykové ploše skluz, který má za následek vznik trvalého průhybu. O tom pojednává práce E.J. Patuly /46/.

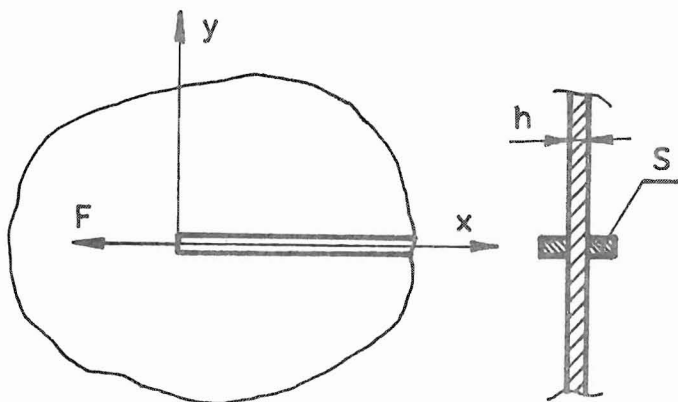
Kontaktní úlohu o válci s tuhým jádrem a s elastickým povlakem, do kterého je podél společné povrchové přímky rovnoměrně zatlačován jiný tuhý válec, řešili Hahn a Levinson /17/. Obdobnou úlohu o povlaku z polymeru řešili Staržinskij, Možarovskij a Osipenko /54/.

O'Connor a Weinstein pojednali v práci /42/ o válcování tenkých pásů z hlediska vzniku geometrických úchylek (porušení tvaru a rovinnosti). O přítlaku a deformacích válců ve válcovací stolici "kvarto" psali Krzyż, Skrzypek a Szuwalski /35/.

Existuje mnoho literatury, která o válcích pracovních strojů pojednává spíše z technologického hlediska. Zde jsme citovali jen výběr prací, které daný problém pojímají alespoň zčásti jako kontaktní úlohu.

15. VZÁJEMNÉ PŮSOBNÍ ŽEBRA A DESKY

Mezi kontaktní úlohy se někdy řadí i rozbor vzájemného působení žebra a desky, popř. panelu. Může jít i o soustavu žebér zatížených na konci osamělými silami. Otázkou je, jak se tyto síly přenášejí do desky, kterou žebra vyztužují. Uvedeme zde pouze zjednodušené řešení jedné takové úlohy. Nekonečná tenká pružná deska je opatřena jedním polonekonečným žebrem, symetrickým ke střední rovině desky. Počátek souřadnic zvolíme v počátečním průřezu žebra a osu x ve směru žebra. Rovina x, y bude střední rovinou desky, v níž budeme předpokládat rovinnou napjatost. Posuvy desky v nekonečnu budou nulové. V počátečním průřezu žebra bude působit osamělá síla F (obr. 39).



OBR. 39

Vzhledem k souhlasné orientaci žebra a síly lze soudit, že posuvy $u(x, y)$ ve směru osy x budou mnohem významnější než posuvy $v(x, y)$ ve směru osy y . Totéž lze předpokládat o napětích. Neučiníme tedy podstatnou chybu, když posuvy a napětí působící ve směru osy y zanedbáme. Fyzikálně to znamená, že skutečnou izotropní desku nahradíme ortotropní deskou pružnou ve směru osy x , ale absolutně tuhou ve směru osy y . Do výpočtu deformací a napjatosti desky pak vstoupí pouze posuvy $u(x, y)$ a napětí $\sigma_x(x, y)$, $\tau_{yx}(x, y)$.

Pro ně bude platit rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (15.1)$$

a Hookeův zákon

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yx} = G \frac{\partial u}{\partial y} \quad (15.2)$$

V žeburu bude posuv $u(x,0)$ ($x > 0$) a napětí v tahu

$$\sigma_1 = E_1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{y=0} \quad (15.3)$$

Zde E , popř. $G = E/2(1+\mu)$ jsou moduly pružnosti desky, E_1 je modul pružnosti v tahu či tlaku žebra. Průřez žebra je S_1 . Z rovnováhy elementu žebra o délce dx dostaneme podmínku

$$S_1 \frac{d\sigma_1}{dx} + q = 0 \quad (15.4)$$

v níž q [Nm^{-1}] je měrná síla přenesená z desky do žebra ve směru osy x . K rovnicím (15.1) až (15.4) se druží ještě okrajové podmínky pro funkci $\sigma_1(x)$

$$S_1 \sigma_1(0) = F, \quad \sigma_1(\infty) = 0 \quad (15.5)$$

a rovnice vzešlá ze zákona o akci a reakci

$$\frac{1}{2h} q(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_{yx}(x, \varepsilon) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_{yx}(x, -\varepsilon) \quad (15.6)$$

pro $\varepsilon > 0$. Tato rovnice popisuje vzájemné působení žebra a desky. Na element žebra o délce dx působí deska silou $q(x)dx$. Opačně působící reakce se přenesou podél řezu $x > 0$, $y = 0$ do desky, a to z jedné poloviny do části $y > 0$, z druhé poloviny do části $y < 0$. V řezu $y = 0$ vzniká proto nespojitá změna τ_{yx} . Rozdíl limit shora a zdola je právě q/h .

Rovnice (15.1) až (15.6) by měly stačit k řešení úlohy. Když vztahy (15.2) dosadíme do (15.1), vyjde

$$2(1+\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (15.7)$$

Zavedeme bezrozměrové proměnné

$$\xi = \frac{x}{h\sqrt{2(1+\mu)}}, \quad \eta = \frac{y}{h} \quad (15.8)$$

a dostaneme místo $u(x,y)$ funkci $u(\xi, \eta)$, pro níž bude platit Laplaceova rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad (15.9)$$

Funkce $u(\xi, \eta)$ bude zřejmě harmonická. Můžeme ji proto považovat za reálnou část nějaké holomorfní funkce

$$\varphi(z) = u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta) \quad (15.10)$$

komplexní proměnné z)

$$z = \xi + i\eta \quad (15.11)$$

Rovnice (15.2) a (15.8) dají

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{E}{h\sqrt{2(1+\mu)}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (15.12)$$

$$\tau_{yx} = \frac{E}{h \cdot 2(1+\mu)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (15.13)$$

Zavedeme funkce S)

$$S = \frac{2(1+\mu)h}{E} \tau_{yx} = \frac{h}{G} \tau_{yx} \quad (15.14)$$

$$T = \frac{h\sqrt{2(1+\mu)}}{E} \sigma_x \quad (15.15)$$

Pak bude

$$T = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad S = \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (15.16)$$

Je-li $\varphi(z) = u + iv$, kde u a v jsou reálné funkce, pak pro derivaci máme

$$\varphi'(z) = \frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - i \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (15.17)$$

\ast) Není tedy $z = x + iy$. Změnu označení si vynutila transformace (15.8).

Funkce $\varphi(z)$ bude holomorfní v celé rovině ξ, η , snad s výjimkou poloosy $\xi \geq 0, \eta = 0$.

x) Symboly S a T naznačují, že jde o napětí smykové a tahové (tlakové).

Funkce u , v splňují totiž Cauchyho-Riemannovy podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} \quad (15.18)$$

Když z rovnice (15.16) dosadíme do (15.17), budeme mít

$$\psi(z) = \varphi'(z) = T - iS \quad (15.19)$$

Ze symetrie vyplývá, že

$$T(\xi, \eta) = T(\xi, -\eta) \quad (15.20)$$

a z rovnice (15.6), že pro $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\xi, \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\xi, -\varepsilon) = \frac{q(\xi)}{G} \quad (15.21)$$

Zapišme tuto rovnici stručněji ve tvaru

$$S^+(\xi) - S^-(\xi) = \frac{q(\xi)}{G} \quad (15.22)$$

Vzhledem k platnosti (15.20) se poslední vztah nezmění, přidáme-li na levou stranu $iT^+(\xi) - iT^-(\xi)$. S přihlédnutím k rovnici (15.19) dostaneme

$$\psi^+(\xi) - \psi^-(\xi) = i \frac{q(\xi)}{G} \quad (15.23)$$

Podle (15.6) a (15.14) je $S^+(\xi) + S^-(\xi) = 0$. Když tento výsledek spolu s (15.19) dosadíme do rovnice

$$\psi^+(\xi) + \psi^-(\xi) = 2T(\xi, 0) \quad (15.24)$$

bude tato rovnice splněna. Dostali jsme tak vztahy pro rozdíl i součet limitních hodnot funkce $\psi(\xi, 0)$ počítaných jednak zleva, jednak zprava. Toto označení se vztahuje k pozorovateli, který se pohybuje po ose úseček ve směru rostoucího ξ .

Vztahy (15.23) a (15.24) nás inspirují k tomu, abychom funkci $\psi(z)$ napsali ve tvaru integrálu Cauchyho typu (/40/, str. 236)

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\omega(t)}{t-z} dt \quad (15.25)$$

Funkci $\omega(t)$ neznáme. Funkce (15.25) bude holomorfní všude s výjimkou poloosy $\xi \geq 0$, $\eta = 0$. Na ní dostaneme limity zleva a zprava ("hraniční" hodnoty) ze vzorců Plemeljových-Sochockého (/40/, str. 245)

$$\psi^+(\xi) - \psi^-(\xi) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\omega(t)}{t-\xi} dt \quad (15.26)$$

$$\psi^+(\xi) - \psi^-(\xi) = \omega(\xi) \quad (15.27)$$

Porovnáme-li vzorce (15.23) a (15.24) se vzorci (15.26) a (15.27), dojdeme k závěru, že na poloose $\xi \geq 0$, $\eta = 0$ musí platit vztahy

$$\omega(\xi) = -i \frac{q(\xi)}{G} \quad (15.28)$$

$$T(\xi, 0) = -\frac{1}{2\pi G} \int_0^{\infty} \frac{q(t)}{t-\xi} dt \quad (15.29)$$

Integrací rovnice (15.4) s přihlédnutím k druhé okrajové podmínce (15.5) dostaneme

$$S_1 \sigma_1(x) = - \int_x^{\infty} q(t) dt \quad (15.30)$$

Podle (15.2) a (15.3) musí platit, že

$$\sigma_1(x) = \frac{E_1}{E} \sigma_x(x, 0) \quad (15.31)$$

Z rovnice (15.15) však máme

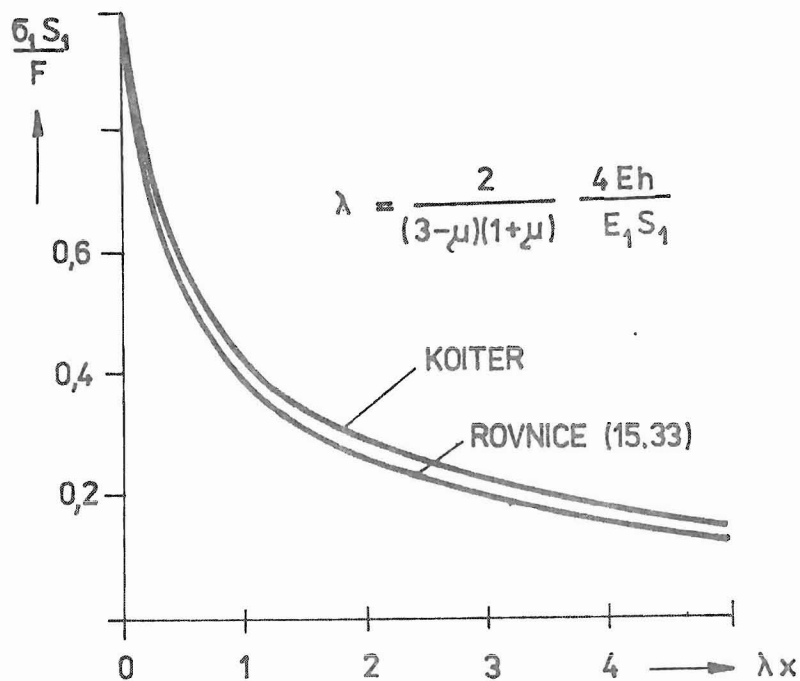
$$\sigma_x(x, 0) = \frac{E}{h\sqrt{2(1+\mu)}} T(x, 0) = -\frac{E}{h\sqrt{2(1+\mu)}} \frac{1}{2\pi G} \int_0^{\infty} \frac{q(t)}{t-x} dt \quad (15.32)$$

Když tento výraz dosadíme do (15.31) a odtud do (15.30), dostaneme integrální rovnici pro neznámou funkci $q(x)$ ve tvaru

$$\frac{E_1 S_1}{E h} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t)}{t-x} dt = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \int_x^{\infty} q(t) dt \quad (15.33)$$

Stejnou úlohu, avšak pro izotropní desku ve stavu rovinné napjatosti, řešil Koiter /30/. Dostal rovněž integrální rovnici (15.33), avšak s tím rozdílem, že místo činitele $1/\sqrt{2(1+\mu)}$ na pravé straně rovnice dostal

činitel $2/[(3-\mu)(1+\mu)]$. Protože $\mu \in (0; 0,5)$, je poměr obou činitelů v mezích 1,06 až 1,09. Podle toho lze posoudit chybu vzniklou předpokladem, že deska je ve směru kolmém k žebřu absolutně tuhá. Řešení rovnic (15.30) a (15.33) je znázorněno na obr. 40 a porovnáno s přesným řešením Koiterovým, které je značně složitější. Je zřejmé, že i za předpokladu, že je deska ortotropní, dostaneme prakticky upotřebitelný výsledek. Na tomto příkladu jsme chtěli ukázat, že vhodná, byť poněkud odvážná zjednodušení úlohy mohou dát užitečná řešení. Ovšem o tom, která zjednodušení jsou vhodná a ještě přijatelná, může rozhodnout jen zkušenost.



OBR. 40

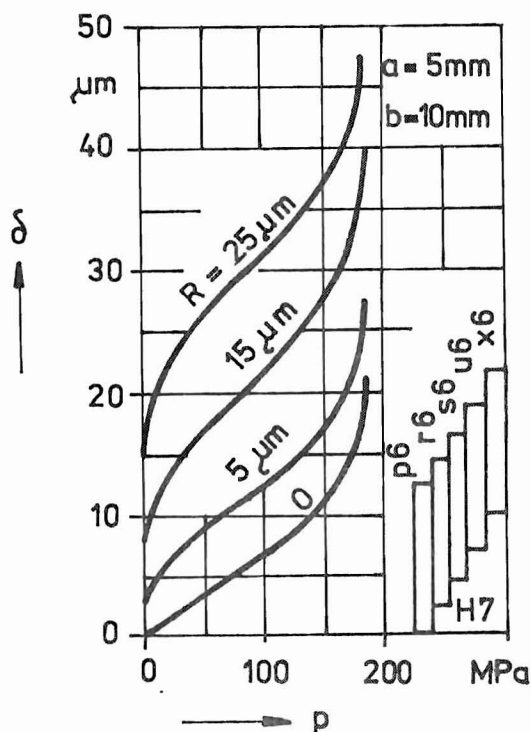
16. VLIV NEROVNOSTÍ POVRCHŮ NA PŘEDPĚTÍ SPOJŮ

Zabývejme se případem mezikruhového kotouče o poloměrech a , b , do kterého je zalisován (nebo po předchozím ohřevu kotouče vsazen) plný čep, jehož poloměr je $a+\delta$. Rozdíl poloměrů δ představuje přesah, jehož vlivem vznikne ve spoji čepu a kotouče (po eventuálním vyrovnání

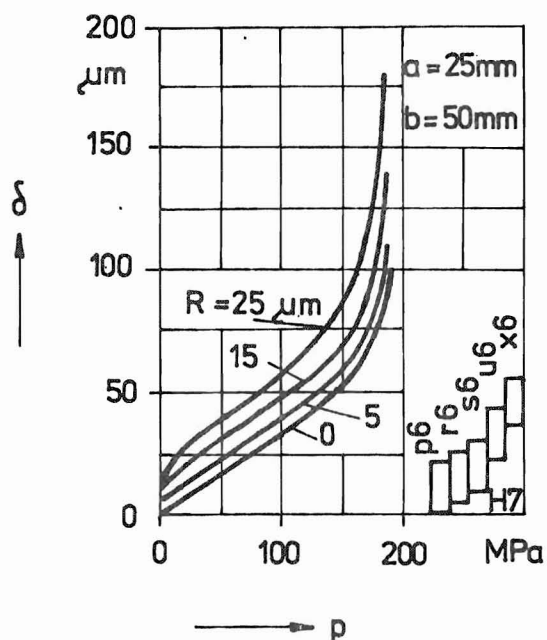
teplot) předpětí. Toto předpětí se zpravidla počítá z Lamého vzorců odvozených pro rovinnou napjatost. Výsledek výpočtu může být proto věrohodný jen za předpokladu, že osově napětí je skutečně nulové, že čep je právě tak dlouhý, jak je kotouč tlustý, takže z kotouče nevyčnívá, a že geometrie obou částí je dokonalá. Tím míníme i to, že povrch je ideálně hladký. V praxi většinou ani jeden z těchto předpokladů dostatečně přesně neplatí. S tím se konstruktéři vyrovnávají tak, že počítají s jakousi efektivní velikostí přesahu; berou do výpočtu menší přesah, než jaký se zjistí měřením. Také tehdy, počítá-li se s tím, že se čep v kotouči nesmí při zatížení silou nebo silovou dvojicí ani posunout, ani pootočit, vychází konstruktér z jakési prakticky ověřené, ale fyzikálně neopodstatněné hodnoty součinitele adheze, resp. součinitele smykového tření. O skutečné velikosti tohoto součinitele neví přitom nic. Neví ovšem nic ani o skutečném rozdělení tlaku v daném svěrném spojení. Experiment mu může pomoci jen částečně. Můžeme např. změřit průběh síly potřebné k zalisování čepu nebo sílu potřebnou k jeho vylisování. Pomocí vestavěných tenzometrických čidel nebo užitím Sachsovy metody odvrtávání malé díry /51/ se můžeme pokusit zjistit tlak v daném místě dotykové plochy. Potíž je však v tom, že tato díra i čidlo narušují už svou existencí průběh napjatosti ve svém okolí a že čidlo nelze spolehlivě cejchovat. Síla potřebná k zalisování, resp. k uvolnění čepu se dá změřit poměrně přesně, ale podle ní nemůžeme usoudit, jaký podíl připadá na tlak v kontaktní ploše a jaký na tření. Hodnoty, které vstupují do výpočtů, jsou tedy značně nejisté. Ostatně ani tehdy, kdybychom přesně znali průběh tlaku a tření ve spoji, nebudeme ještě znát jeho napjatost. A i kdybychom ji znali - což už není zásadní nesnáze - sotva bychom dovedli bez dalších zkušeností a zkoušek správně odhadnout to, co konstruktéra zpravidla nejvíce zajímá, totiž mez únavy, popř. životnost spoje. Zkušenost nás poučuje, že nikoli tato napjatost, ale třecí koroze má pro životnost rozhodující význam. Jen výjimečně, u zcela chybně navržených spojů tomu bývá naopak.

Složité jevy v lisovaných spojích (a ve spojích s přesahem sestavených zatepla) můžeme částečně separovat a lépe prozkoumat spíše teoreticky než prakticky. Jediné, co k tomu potřebujeme, je volba složitějšího matematického modelu, do kterého zahrneme jen některý z předpokládaných vlivů. Ten ovšem musíme realisticky odhadnout. Můžeme např. ponechat v platnosti všechny zjednodušující předpoklady Lamého teorie s tou výjimkou, že dotyková plocha bude drsná, že na ní budou četné mikroskopické nerovnosti, výstupky a prohlubeniny. Při měření průměru mikrometrickým šroubem zjistíme průměr kružnice opsané přes vrcholky všech nerovností. Takto zjištěný přesah bude nutně větší než ten, který se prakticky projeví vytvářením předpětí. Při dotyku totiž nerovnosti do sebe částečně zapadnou, aniž se deformují. Pak se však začnou plasticky přetvářet (nebo i ulamovat, jsou-li křehké), neboť na vrcholcích nerovností

vznikají velké lokální koncentrace kontaktních napětí. Tím se ztrácí další část přesahu. Na vytváření předpětí se podílí už jen jeho zbytek. Profil nerovnosti povrchu můžeme detailně proměřovat. Zvolíme-li určitý model nerovností povrchů, daný prakticky výškou povrchových nerovností R (v mikrometrech), což je radiální vzdálenost mezi nejvyššími vrcholky a nejnižšími prohlubněmi, můžeme pro daný materiál, jehož mechanické hodnoty známe, výpočtem předpovědět ztrátu přesahu, která vzniká popsáním způsobem. Tak postupovali Yoshimoto, Tsukizoe a Watanabe /63/. Počítali měrný tlak p ve styku ocelového čepu s poloměrem $a = 5$ mm, resp. $a = 25$ mm, a s pouzdem o vnějším poloměru $b = 2a$. Geometrický (měřený) přesah poloměrů δ přitom přepočítávali na efektivní přesah za předpokladu, že se vrcholky nerovností plasticky přetvářejí a že se nakonec plasticky přetváří i materiál celého pouzdra. Zvolili ocel s mezí kluzu $\sigma_k = 270$ MPa. Výsledky jejich výpočtů jsou zakresleny na obr. 41 a obr. 42.

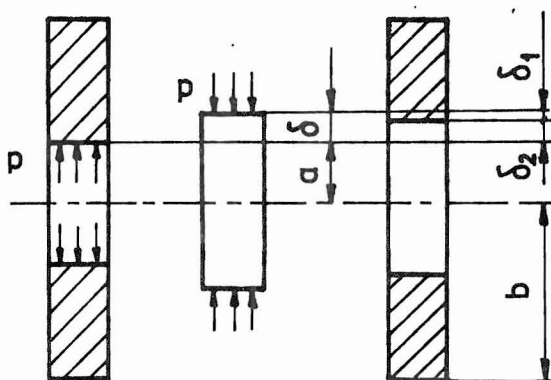


OBR. 41



OBR. 42

Případ $R = 0$ odpovídá dokonale hladkému povrchu, kdy se uplatní celý přesah poloměrů δ . Pro elastickou oblast namáhání se přesah δ rozdělí na stlačení δ_1 čepu a na roztážení δ_2 díry v pouzdře (obr. 43).



OBR. 43

Tedy

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (16.1)$$

Lamého vzorce pro tento případ dají

$$\delta_1 = \frac{pa}{E} (1 - \mu) \quad (16.2)$$

$$\delta_2 = \frac{pa}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \mu \right) \quad (16.3)$$

Z rovnic (16.2) a (16.3) dosadíme do (16.1) a dostaneme *)

$$\delta = \frac{pa}{E} \left[(1 - \mu) + \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \mu \right) \right] = \frac{pa}{E} \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \quad (16.4)$$

Odtud vypočteme tlak v dotykové ploše

$$p = \frac{E\delta}{2a} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (16.5)$$

*) Přesah průměrů je tedy 2δ . Konstrukteři počítají raději s průměry než s poloměry. Obě hodnoty nelze zaměňovat. Proto je někdy lépe udávat poměrný přesah δ/a . 1000 promile, což je hodnota nezávislá na tom, počítáme-li s poloměry nebo s průměry.

Pro dané hodnoty máme (v jednotkách μm , mm , MPa)

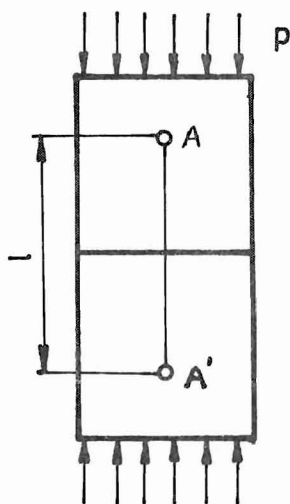
$$p = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} \delta}{2a} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 75 \frac{\delta}{a} \quad (16.6)$$

Je-li $a = 5 \text{ mm}$, $\delta = 10 \mu\text{m}$, vyjde $p = 150 \text{ MPa}$. Je-li $a = 25 \text{ mm}$, $\delta = 50 \mu\text{m}$, je rovněž $p = 150 \text{ MPa}$. Tyto teoretické hodnoty platné pro elastický materiál určují směrnici tečny v počátku křivky $R = 0$ na obr. 41, popř. na obr. 42. Mezní přetlak při totálně plastickém stavu pouzdra je [podle rovnice (20.8)]

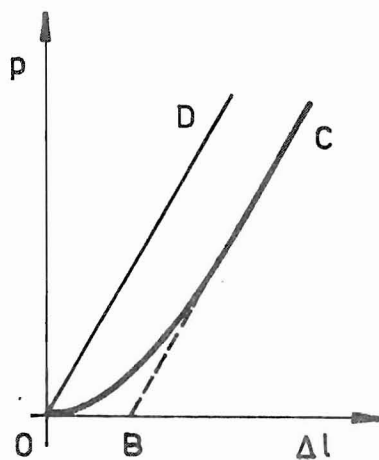
$$p_m = \sigma_k \ln \frac{b}{a} \quad (16.7)$$

Vyjde $p_m = 270 \cdot \ln 2 \doteq 187 \text{ MPa}$. Tlak p nemůže být vyšší než tato hodnota. Na obr. 41 a obr. 42 jsou zakreslena také toleranční pásma pro uložení H7/p6 až H7/x6. Je zřejmé, že pro danou toleranci uložení může být dostát velmi různé hodnoty tlaku v dotykové ploše a že vliv povrchových nerovností je významný zejména u spojů s malým průměrem čepu (hřídele).

Náhrada teoretického přesahu δ jeho efektivní hodnotou znamená totéž co nahrazení skutečné, nelineární deformační charakteristiky povrchových vrstev charakteristikou lomenou. Vysvětlíme to na příkladu dvou hranolů, které k sobě rovnoměrně přitlačujeme. Vzdálenost l bodů A , A' (obr. 44) se vlivem tlaku p zmenší o Δl , přičemž vlivem povrchových nerovností je tato změna nelineární (obr. 45). Teprve při větších hodno-



OBR. 44



OBR. 45

tách tlaku p se průběh deformační křivky jeví jako lineární (přímá část v okolí bodu C). Nahradíme-li křivku OC úsečkou OB a polopřímku BC , pak úsečka OB představuje "ztrátu" na přesahu $\Delta \ell$. Místo abychom počítali s teoretickým lineárním průběhem OD , posuneme počátek souřadnic do bodu B odečtením ztráty OB vzniklé "omačkáním" povrchových nerovností a počítáme s lineárním průběhem BC . Tímto způsobem však nepodchytíme nelinearitu, která vzniká při malých tlacích p a která je patrná na obr. 41 a 42 při $R > 0$.

Lamého teorie platí pro rotačně symetrická válcová tělesa. Obdobnou rovinnou úlohu pro tělesa nerotačních tvarů řešil Tarabasov /57/.

17. JINÉ PŘÍČINY NESHOD S LAMÉHO TEORIÍ

Je-li náboj nalisován na hřídel, nebývá napjatost náboje - tímméně ovšem hřídele - rovinná. Odchylka vzniká jednak třením, takže v dotykové ploše působí smykové napětí ve směru osy, jednak tím, že hřídel z náboje vyčnívá. Další příčinou nesouhlasu Lamého teorie se skutečností mohou být geometrické odchylky od rotačně symetrického válcového tvaru (o jiných geometrických odchylkách jsme již pojednali v předchozí kapitole) a odchylky od Hookeova zákona.

Rankin /49/ počítal radiální posuvy na povrchu nekonečného hřídele (elastického rotačně symetrického válce s plným průřezem) o poloměru a , zatíženého v pásu o délce 2ℓ rovnoměrným tlakem p . Ve válcových souřadnicích r , φ , z vznikají posuvy $u(r, z)$, $v = 0$, $w(r, z)$. Průměrné stlačení

$$\bar{\delta}_1 = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} |u(a, z)| dz \quad (17.1)$$

je nezávislé na souřadnici z a lze je porovnat s Lamého vzorcem (16.2). Vyjde

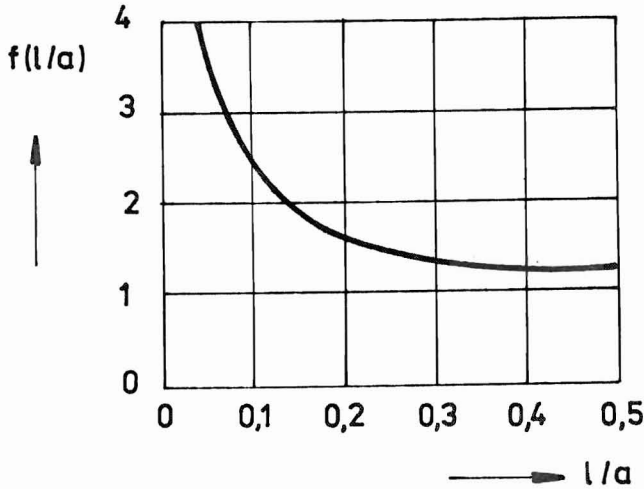
$$\delta_1 = \bar{\delta}_1 f.(\ell/a) \quad (17.2)$$

Ve skutečném spoji náboje s hřídelem nebude tlak p rovnoměrný, nicméně korekce (17.2) by mohla být dost přesná k odhadu vlivu vyčnívajících konců hřídele na jeho poddajnost. Spíše než s přesahem δ_1 podle vzorce

(16.2) bychom tedy měli počítat (u hřídele s vyčnívajícími konci) se střední hodnotou přesahu $\bar{\delta}_1$ vypočtenou ze vzorce

$$\bar{\delta}_1 = \frac{\delta}{f(l/a)} \quad (17.3)$$

Funkce $f(l/a)$ je převzata z práce /49/ a znázorněna na obr. 46.

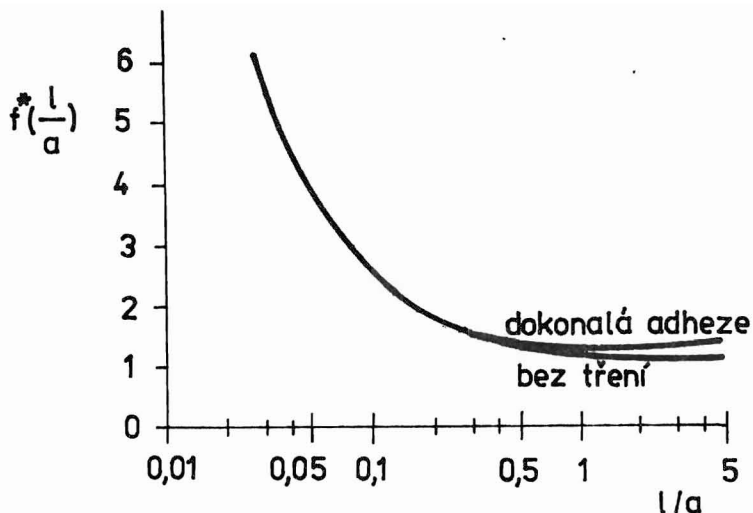


OBR. 46

Obdobnou úlohu pro polonekonečný hřídel, zatížený na povrchovém pásu u konce hřídele rovnoměrným tlakem, řešili Tranter a Craggs /60/. Jejich práce poskytuje - ovšem jen do jisté míry - představu o tom, jaký je rozdíl v napjatosti a deformacích, vyčnívá-li hřídel z náboje jen na jedné straně nebo na obou stranách.

Vliv adheze hodnotili Conway a Farnham /5/. Dotykovou plochu rozdělili na úzké pásy, v nichž

předpokládali rovnoměrné rozdělení tlaku. Spojitý průběh tlaku tedy nahradili stupňovitým. Pro posuvy ve středních kružnicích těchto pásů odvodili analyticky příčinkové činitele a s jejich pomocí řešili úlohu dále numericky. Předpokládali, že náboj je absolutně tuhý a dotyková plocha buď dokonale hladká (nulové smykové napětí), nebo v ní naopak nastává dokonalá adheze (nulový osový posuv). Efektivní přesah je tentokrát počítán z průměrné hodnoty tlaku \bar{p} , která připadá na daný radiální posuv $\bar{\delta}_1$. Jestliže se do Lamého vzorce (16.2) dosadí za p hodnota \bar{p} , vyjde přesah $\bar{\delta}_1$. Pro efektivní přesah $\bar{\delta}_1$ bude opět platit vzorec (16.2), kam však nyní za funkci $f(l/a)$ dosadíme z obr. 47 funkci $f^*(l/a)$.



OBR. 47

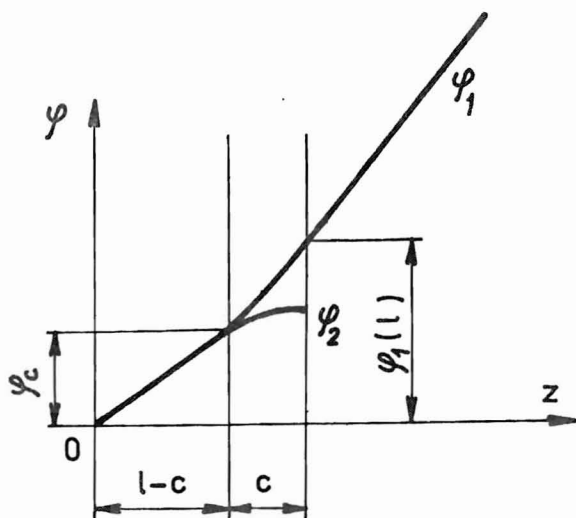
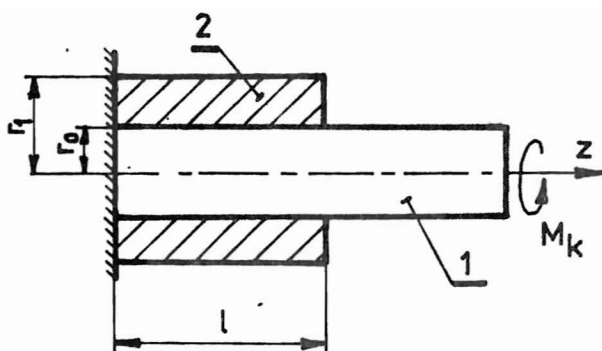
18. ÚTLUM V TORZNĚ NAMÁHANÝCH LISOVANÝCH SPOJÍCH

Ukážeme, že tření v dotykové ploše mezi hřídelem a nábojem, který je na hřídel nasazen s přesahem poloměrů, způsobuje nelinearitu v deformační charakteristice spoje a s tím související útlum při možném torzním kmitání. Tento útlum je prakticky nezávislý na frekvenci.

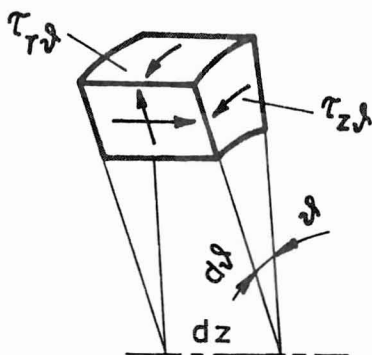
Existuje-li u obou částí - u hřídele i u náboje - rotační symetrie, pak nenulové jsou pouze obvodové posuvy. Žádná veličina nezávisí na obvodové souřadnici, takže úlohu lze řešit v rovině r, z jako dvojrozměrnou (r je radiální, z osová souřadnice). Podrobnosti obsahuje literatura /19/, /25/.

V této kapitole uvedeme značně zjednodušené řešení, které sice nemá potřebnou přesnost, ale lze je snadno sledovat. Budeme řešit případ hřídele (1) s nábojem (2) podle obr. 48. Obě části budou na levém konci dokonale vetknuty; na pravém konci hřídele, který z náboje vpravo vyčnívá, působí krouticí moment, Úlohu budeme řešit za těchto předpokladů:

- (a) Pro hřídel i náboj platí Coulombova hypotéza zachování přímosti radiálních paprsků. To znamená, že se každý průřez při kroucení pootočí jako celek. U obou uvolněných částí je tato hypotéza v souladu se



OBR. 48



OBR. 49

Saint-Venantovou teorií krutu, neboť jde o prizmatické části kruhového, resp. mezikruhového průřezu.

V sestavě však nebude tato teorie platit, neboť není splněna podmínka nezátíženosti bočních plášťů těles (v dotykové ploše se budou přenášet smyková napětí).

- (b) V dotykové ploše platí Amontonsův-Coulombův zákon smykového tření.
- (c) V dotykové ploše je rovnoměrný tlak vzniklý účinkem přesahu poloměrů hřídele a náboje.

Ani jeden z těchto předpokladů nebude přesně platit. V hřídeli a v náboji nebude působit jen napětí $\tau_{z\phi} = \tau_{\phi z}$, jak předpokládá Saint-Venantova teorie, ale také napětí $\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r}$ (obr. 49). Součinitel adheze se bude lišit od součinitele smykového tření a ten se bude měnit mimo jiné s počtem zatěžovacích cyklů. Ani rovnoměrný tlak se nepodaří ve spoji vyvodit, neboť by to znamenalo, že by se přesah poloměrů musil v osové směru měnit a musil by být velmi přesně vyroben. Přesto však se lze domnívat, že řešení získaná za uvedených zjednodušení dají alespoň kvalitativně věrný popis vlastností spoje.

Smykové napětí $\tau_{r\phi}$ v dotykové ploše označíme jednoduše τ (bez indexu) a tlak v téže ploše p .

Podle Amontonsova-Coulombova zákona musí být

$$\tau \leq f p = \tau_m \quad (18.1)$$

kde f je součinitel tření a τ_m mezní hodnota smykového napětí τ . Deformace hřídele bude podle předpokladu (a) dokonale popsána funkcí $\varphi_1(z)$, tj. otočením průřezu hřídele v závislosti na vzdálenosti od místa vetknutí. Podobně funkce $\varphi_2(z)$ postačí k popisu deformace náboje. Předpokládaný průběh těchto funkcí je zakreslen na obr. 48. Vycházíme z představy, že v nezatiženém spoji ($M_k = 0$) je $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ a že krouticí moment M_k monotónně vzrůstá až do své konečné hodnoty. Obr. 48 odpovídá tomuto konečnému stavu.

Je zřejmé, že na okraji náboje vznikne "prokluzové pásmo", pás o šířce c , v němž se oba povrchy navzájem pootočí. Ve zbytku dotykové plochy bude dokonalá adheze, což znamená, že se průřezy hřídele i náboje budou otáčet společně jako celek. Skluz tedy nastane na intervalu

$$(\ell - c) < z \leq \ell \quad (18.2)$$

a bude tam

$$\varphi_1 > \varphi_2 \quad (18.3)$$

Pro oblast adheze máme

$$0 \leq z \leq (\ell - c) \quad (18.4)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (18.5)$$

Bude-li materiál obou částí stejný, bude se soustava hřídele s nábojem v oblasti adheze deformovat tak, jako by byla vyrobena vcelku a namáhána krouticím momentem M_k , takže

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{2M_k}{\pi r_1^4 G} z \quad (0 \leq z \leq \ell - c) \quad (18.6)$$

Otočení průřezu rozdělujícího oblast adheze od oblasti skluzu bude

$\varphi_c = \varphi(z = \ell - c)$, tedy

$$\varphi_c = \frac{2M_k}{\pi r_1^4 G} (\ell - c) \quad (18.7)$$

Od tohoto průřezu směrem vpravo musíme posuzovat deformace hřídele a náboje samostatně. Tam se mezi nábojem a hřídelem přenáší měrný moment

$$m_k = 2\pi r_0^2 \tau_m \quad (18.8)$$

vlivem smykového tření. V řezu $z = l - c$ byl v hřídeli krouticí moment

$$M_{k1c} = M_k \frac{r_0^4}{r_1^4} \quad (18.9)$$

a bude se s rostoucí souřadnicí z zvětšovat až do hodnoty M_k pro $z \geq l$. V náboji bude v témže řezu krouticí moment

$$M_{k2c} = M_k \frac{r_1^4 - r_0^4}{r_1^4} \quad (18.10)$$

a bude s rostoucí souřadnicí z klesat k nule (pro $z = l$ bude $M_{k2} = 0$).

Pro $(l - c) < z \leq l$ tedy bude krouticí moment v hřídeli

$$M_{k1} = M_{k1c} + m_k (z - l + c) \quad (18.11)$$

a v náboji

$$M_{k2} = M_{k2c} - m_k (z - l + c) \quad (18.12)$$

Ovšemže musí být $M_k = M_{k1} + M_{k2}$, což vyplývá z metody myšleného řezu. Z podmínky vymizení krouticího momentu v náboji na jeho konci, totiž z rovnice $M_{k2}(z = l) = 0$, dostaneme

$$c = \frac{M_{k2}}{m_k} = \frac{M_k}{2\pi r_0^2 \tau_m} \frac{r_1^4 - r_0^4}{r_1^4} \quad (18.13)$$

Zkrut hřídele $d\varphi_1/dz = M_{k1}/G J_p$, kde $J_p = \pi r_0^4/2$ je polární kvadratický moment průřezu. Z rovnice (18.11) tak odvodíme

$$\varphi_1 = \frac{2}{\pi r_0^4 G} \left[M_{k1c} z + \frac{1}{2} m_k (z - l + c)^2 + C_1 \right] \quad (18.14)$$

Obdobně odvodíme z rovnice (18.12)

$$\varphi_2 = \frac{2}{\pi (r_1^4 - r_0^4) G} \left[M_{k2c} z - \frac{1}{2} m_k (z - l + c)^2 + C_2 \right] \quad (18.15)$$

Když $z = l - c$, musí být $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_c$. Tyto dvě podmínky budou zřejmě splněny, bude-li $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Abychom se o tom přesvědčili, stačí dosadit z rovnic (18.7), (18.9) a (18.10) do (18.14) a (18.15). S použitím (18.7), (18.13) lze rovnice (18.14) a (18.15) upravit do tvaru

$$\varphi_1(z) = \varphi_c \frac{2cz + \left(\frac{r_1^4}{r_0^4} - 1\right)(z - \ell + c)}{2c(\ell - c)} \quad (18.16)$$

$$\varphi_2(z) = \varphi_c \frac{c(2\ell - c) - (\ell - z)^2}{2c(\ell - c)} \quad (18.17)$$

Obě tyto rovnice platí jen pro $\ell - c < z \leq \ell$, tedy pro oblast skluzu. Pro $z \geq \ell$ bude

$$\varphi_1(z) = \varphi_c \frac{2z + \left(\frac{r_1^4}{r_0^4} - 1\right)c}{2(\ell - c)} + \frac{2M_k}{\pi r_0^4 G} (z - \ell) \quad (18.18)$$

Také tuto rovnici můžeme s použitím (18.7) ještě poněkud zjednodušit. Bude (pro $z \geq \ell$)

$$\varphi_1(z) = \varphi_c \frac{2z - c + \frac{r_1^4}{r_0^4} (2z - 2\ell + c)}{2(\ell - c)} \quad (18.19)$$

Pro větší názornost zavedeme do vzorce (18.13) jmenovité napětí v hřídeli

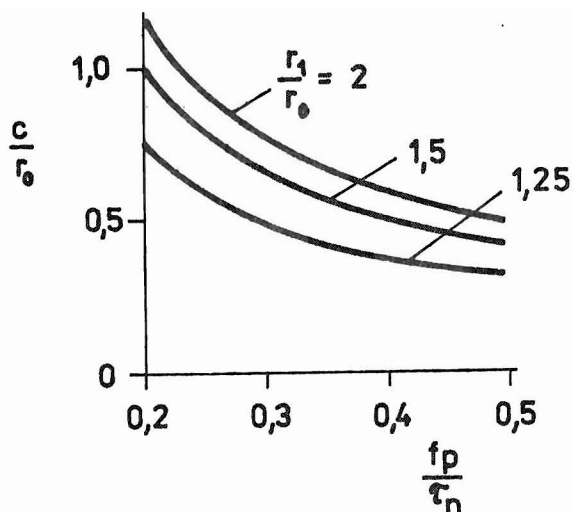
$$\tau_n = \frac{2M_k}{\pi r_0^3} \quad (18.20)$$

a za τ_m dosadíme f_p . Dostaneme

$$\frac{c}{r_0} = \frac{1}{4} \frac{\tau_n}{f_p} \left(1 - \frac{r_0^4}{r_1^4}\right) \quad (18.21)$$

Tato závislost je graficky znázorněna na obr. 50. Vzorec (18.21) nedává věrohodné hodnoty, protože deformační model spoje vycházející z Coulombovy hypotézy (a) nevystihuje správně poddajnost částí, zejména náboje. Přesnější teorie, která realističtěji popisuje napjatost, dává pro šířku c skluzové oblasti hodnoty asi o 20 % až 50 % menší. Chyba je relativně malá při malém poměru f_p / τ_n . Kvalitativní závěry však platí: šířka skluzové oblasti je tím menší, čím větší je sevření hřídelle nábojem a smykové tření (tj. tlak v dotykové ploše a součinitel tření), čím menší je namáhání (jmenovité napětí) a čím tenčí je náboj (poměr r_1 / r_0 menší).

Vypočteme práci, jaká se rozptýlí třením ve skluzové oblasti, vzroste-li namáhání z nuly na hodnotu M_k . Předpokládáme, že v nezatiženém



OBR. 50

stavu bylo zkroucení nulové. Zřejmě bude

$$A_0 = m_k \int_{l-c}^l [\varphi_1(z) - \varphi_2(z)] dz \quad (18.22)$$

Dosaďme-li sem z rovnic (18.8), (18.16) a (18.17), dostaneme

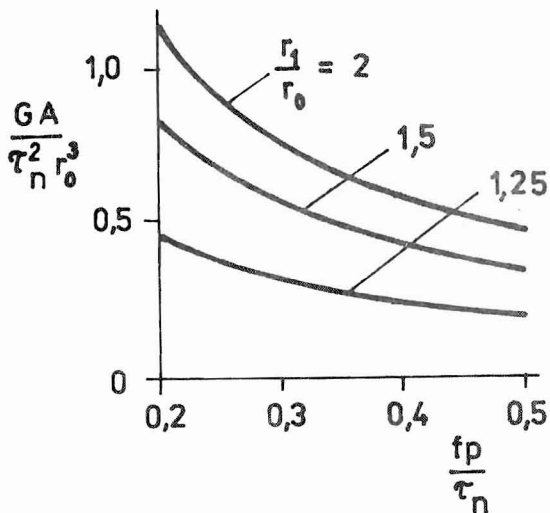
$$A_0 = \frac{m_k c^2 \varphi_c}{6(l-c)} \frac{r_1^4}{r_0^4} \quad (18.23)$$

S použitím rovnic (18.7), (18.8), (18.13) a (18.20) můžeme rovnici (18.23) upravit takto

$$A_0 = \frac{\pi}{48} \frac{r_0^3 \tau_n^3}{G f_p} \left(1 - \frac{r_0^4}{r_1^4}\right)^2 \quad (18.24)$$

Při střídavém namáhání kroučícím momentem M_k se za jeden cyklus rozptýlí práce $A = 4A_0$, neboť ke změně smyslu relativního posuvu povrchu náboje a hřídele dojde vždy po půl periodě a celkový relativní úhel má rozkmit $2(\varphi_1 - \varphi_2)_{\max}$. Bude tedy za jednu periodu ztracena práce A , pro niž máme vztah podle (18.24)

$$\frac{GA}{r_0^3 \tau_n^2} = \frac{\pi}{12} \frac{\tau_n}{f_p} \left(1 - \frac{r_0^4}{r_1^4}\right)^2 \quad (18.25)$$



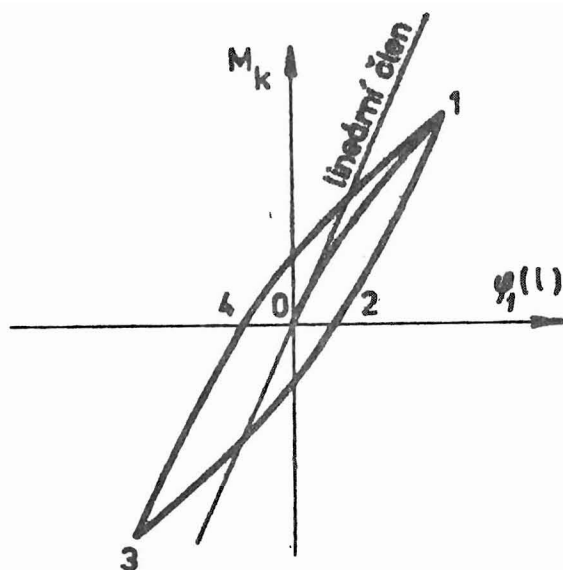
OBR. 51

Tento vztah je znázorněn na obr. 51. Také tyto hodnoty jsou příliš velké, skutečné ztráty třením budou menší. Avšak rozdíl proti podrobnějšímu řešení není tak velký jako u obr. 50. Zejména při malém poměru f_p / τ_n nečiní tento rozdíl více než asi 15 %, avšak s rostoucím poměrem f_p / τ_n vzrůstá. Potvrzuje se, že útlum při střídavém torzním namáhání klesá s rostoucí mezní hodnotou smykového tření ($\tau_m = f_p$), s klesajícím namáháním (s klesající amplitudou jmenovitého napětí τ_1) a je menší u tenkých nábojů (při malém poměru r_1 / r_0).

Rozptyl energie smykovým třením nutně souvisí s vytvořením hysterezní smyčky v pracovním diagramu. Tím myslíme deformační charakteristiku, v níž na osu úseček vynášíme deformační veličinu (v daném případě úhel φ_1 v některém průřezu vyčnívajícího konce hřídele) a na osu pořadnic silovou veličinu (krouticí moment). Pro jednoduchost se zaměříme na sledování úhlu φ_1 v řezu $z = l$. Z rovnic (18.14), (18.8) a (18.9) vypočteme

$$\frac{\pi r_0^4}{2} G \varphi_1(l) = M_k \frac{r_0^4}{r_1^4} l + \frac{M_k^2}{4 \pi r_0^2 f_p} \left(1 - \frac{r_0^4}{r_1^4}\right) \quad (18.26)$$

Ihned je zřejmé, že vztah mezi $\varphi_1(l)$ a M_k je nelineární. Kromě lineárního členu je na pravé straně ještě kvadratický člen. Když tuto závislost znázorníme na obr. 52, dostaneme parabolu 01. Bod 1 odpovídá maximálnímu namáhání, při němž se relativní skluz v dotykové ploše zastaví. Pak se začne namáhání zmenšovat. Zmenšování začne za podmínek obnovené adheze, záhy se však opět od okraje náboje rozšíří nové prokluzové pásmo. Relativní pohyb obou povrchů má však nyní opačný smysl. Když namáhání klesne k nule, zůstane ve spoji vlastní pnutí a trvalá deformace odpovídající bodu 2 na obr. 52. Pak namáhání klesá do záporných hodnot, až nabývá minima $M_{k \min} = -M_{k \max}$. Tehdy se relativní pohyb povrchů ve skluzové oblasti opět zastaví, obnoví se tedy znovu na okamžik adheze (bod 3 na obr. 52). Pak se celý proces opakuje v opačném smyslu (křivka 341). Vytvoří se uzavřená smyčka, jejíž obsah se rovná energii A rozptýlené za jeden cyklus (smyčka 1 2 3 4 1).



OBR. 52

Diskuse

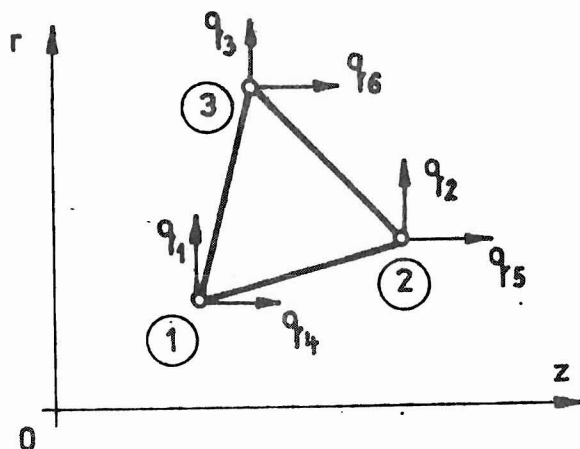
V této kapitole jsme si nekladli za cíl odvodit vzorce popisující věrně fyzikální realitu, ale ukázat podstatné rysy této reality co nej-jednodušším způsobem. Předpokladem o zachování přímosti radiálních paprsků, který je základem Coulombovy (nesprávné) teorie krutu, jsme ze hry vyloučili smykové napětí $\tau_{r\varphi}$. Zůstalo jen napětí $\tau_{z\varphi}$. Coulombova teorie však platí jen pro krut prizmatických hřídelů kruhového a mezikruhového průřezu. Pro obecné průřezy ji opravil Saint-Venant. V daném případě neplatí ani tato Saint-Venantova teorie. Je třeba ji dále zobecnit tak, aby platila i pro hřídele proměnného průřezu (neprizmatické hřídele). Pak ovšem nelze deformaci popsat pouhými dvěma funkcemi $\psi_1(z)$,

$\psi_2(z)$, jak jsme to mohli učinit my. Je nutné ji popsat obvodovými posuvy $u_{\varphi} = u_{\varphi}(r, z)$. Řešení pak nelze získat v uzavřeném tvaru, jako se to podařilo nám. Je uvedeno v lit. /19/ a /25/.

19. ŘEŠENÍ ROTAČNĚ SYMETRICKÝCH LISOVANÝCH SPOJŮ METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

Použijeme metodu vypracovanou pro rotačně symetrická tělesa. Úlohu řešíme v osovém řezu v rovině r, z jako dvourozměrnou. Nenulové posuvy jsou pouze radiální posuv u_r a osový posuv u_z . Ptáme se, jaká napjatost vznikne po sestavení náboje a hřídele vlivem přesahu poloměrů.

Zvolíme-li v nejjednodušším případě trojúhelníkové konečné prvky (obr. 53), budou tvarové (interpolační) funkce lineární



OBR. 53

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= a_0 + a_1 r + a_2 z \\ u_z(r, z) &= a_3 + a_4 r + a_5 z \end{aligned} \quad (19.1)$$

Tuto soustavu rovnic zapíšeme maticově ve tvaru

$$\{u(r, z)\} = [U(r, z)]\{a\} \quad (19.2)$$

kde \ast)

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix}, \quad [U] = \begin{bmatrix} 1 & r & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & z \end{bmatrix}$$

$$\{a\} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]^T$$

\ast) Symbolem "T" vpravo nahoře vyznačujeme transpozici.

Nenulové poměrné deformace jsou

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (19.3)$$

Když vztahy (19.1) dosadíme do (19.3), dostaneme

$$\{\varepsilon(r, z)\} = [F(r, z)]\{a\} \quad (19.4)$$

kde

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_\varphi \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz}]^T$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/r & 1 & z/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matici $\{a\}$ konstant polynomů (19.1) vypočteme tak, aby posuvy uzlových bodů 1 až 3 na obr. 53 souhlasily s interpolační formulí. Buďte tedy

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} \quad (19.5)$$

čili

$$\{q\} = [S]\{a\} \quad (19.6)$$

Odtud vypočteme

$$\{a\} = [S]^{-1}\{q\} \quad (19.7)$$

a z rovnice (19.4) dostaneme

$$\{\varepsilon(r, z)\} = [B(r, z)]\{q\} \quad (19.8)$$

kde

$$[B] = [F][S]^{-1} \quad (19.9)$$

Zavedeme vektor napětí

$$\{\sigma\} = [\sigma_r \quad \sigma_\varphi \quad \sigma_z \quad \tau_{rz}] \quad (19.10)$$

svázaný s vektorem $\{\varepsilon\}$ Hookeovým zákonem

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad (19.11)$$

kde

$$[E] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (19.12)$$

je matice elastických modulů pro izotropní materiál.

Deformační energie v trojúhelníkovém prvku na obr. 53 je

$$\frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T \int_V [B]^T [E] [B] dV \{q\} \quad (19.13)$$

přičemž

$$dV = 2\pi r dS \quad (19.14)$$

je objem elementárního prstence o průřezu dS . Je-li S plocha trojúhelníku na obr. 53, bude

$$\frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (19.15)$$

kde se matice tuhosti $[K]$ vypočte ze vzorce

$$[K] = 2\pi \int_S r [B]^T [E] [B] dS \quad (19.16)$$

integrací přes plochu S . Je to elementární matice tuhosti pro prvek, který má tvar rotačního tělesa vzniklého rotací trojúhelníku na obr. 53 kolem osy z . Protože se v matici $[F]$ vyskytuje poloměr r ve jmenovateli, nesmí žádný z uzlů ležet na ose rotační symetrie. Kdyby tomu tak bylo, musil by se takovému uzlu předem přisoudit nulový radiální posuv a výpočet podle toho upravit. Podrobnostmi se nebudeme zabývat.

Celková potenciální energie je součtem deformační energie a potenciální energie vnějších sil, takže

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} - \{q\}^T \{f\} \quad (19.17)$$

Tato energie nabývá za stabilní rovnováhy minimální hodnoty. Zde $\{f\} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_6]^T$ je vektor zobecněných sil působících v uzlech. Změníme-li nyní vektor posuvů $\{q\}$ o virtuální přírůstek $\{\delta q\}$, změní se deformační energie o $\{\delta q\}^T [K] \{q\}$ a práce vnějších sil o $\{\delta q\}^T \{f\}$.
Z principu virtuálních prací $\delta U = 0$, tj. z rovnice

$$\{\delta q\}^T [K] \{q\} - \{\delta q\}^T \{f\} = \{0\} \quad (19.18)$$

ihned vyplývá, že

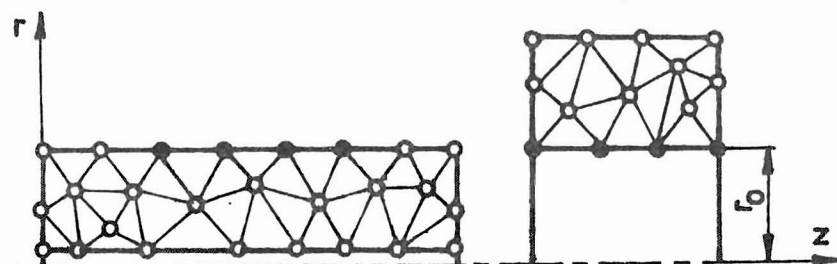
$$[K] \{q\} = \{f\} \quad (19.19)$$

neboť virtuální změna vektoru posuvů byla libovolná.

Předpokládali jsme, že vnější síly působí pouze v uzlech. Není-li tomu tak, jde-li např. o síly objemové nebo povrchové, přepočteme je na zobecněné síly v uzlech tak, aby virtuální práce objemových a povrchových sil byla stejná jako práce zobecněných sil v uzlech.

Rovnice (19.19) platí pro jeden element. Budeme-li podobně postupovat i v případě celé soustavy, dostaneme rovněž výslednou rovnici ve tvaru (19.19), avšak matice a vektory se budou týkat celé soustavy. V podrobnostech odkazujeme na literaturu, např. /6/, /64/.

Na obr. 54 je naznačena triangulace v rovině r , z dutého hřídele



OBR. 54

a náboje. Předpokládáme, že jde o rotačně symetrická tělesa s obecným tvarem meridiánu. Nemusí jít tedy jen o válce jako na obr. 54, ale o dotykové ploše budeme předpokládat, že je válcová a má poloměr r_0 u náboje a $r_0 + \delta$ u hřídele. Velikost δ představuje přesah obou poloměrů.

Uzlové body volíme tak, aby se po spojení obou částí vytvořila jednotná síť, tedy aby černě vyznačené uzly splýnuly. Pro hřídel bude platit rovnice (19.19) ve tvaru

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{aa} & K_{ab} \\ \hline K_{ba} & K_{bb} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b - f^* \end{Bmatrix} \quad (19.20)$$

Do subvektoru q_a zahrneme všechny posuvy, které si i po spojení obou částí zachovají samostatnost. Do subvektoru q_b zařadíme posuvy, které budou po spojení s nábojem pro obě části společné. Bude-li dotyková plocha hladká (bez tření), budou to pouze radiální posuvy v uzlech vyznačených černě. Lze-li předpokládat dekonalou adhezi, budou to všechny posuvy těchto uzlů.

Případ, kdy působí malé tření a dotyková plocha se rozdělí na oblasti se skluzem a s adhezí, vyžaduje postup, který jsme naznačili ve 12. kapitole. Zde se omezíme na dotyk v hladké ploše.

Subvektory f_a , f_b představují vnější zobecněné síly. Subvektor f^* představuje vnitřní zobecněnou reakci přenášenou z náboje na hřídel.

Pro náboj dostaneme obdobně maticovou rovnici

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{cc} & K_{cd} \\ \hline K_{dc} & K_{dd} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q_c \\ q_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_c + f^* \\ f_d \end{Bmatrix} \quad (19.21)$$

Do subvektoru q_c jsme zahrnuli posuvy, které budou po spojení těles společné. Počet řádků tohoto subvektoru je stejný jako u subvektoru q_b . Je to také řád submatic K_{bb} a K_{cc} .

Je-li dotyková plocha hladká, budou subvektory q_b , q_c obsahovat pouze radiální posuvy. Deformační podmínka je

$$\{q_c\} - \{q_b\} = \{\delta\} \quad (19.22)$$

Nezávisí-li přesah na souřadnici z , jsou všechny prvky vektoru $\{\delta\}$ stejné a rovny δ .

Vytvoříme vektor posuvů pro celou soustavu

$$\{q\} = [q_a^T \mid q_b^T \mid q_c^T]^T \quad (19.23)$$

Subvektor $\{q_c\}$ do vektoru $\{q\}$ nevstupuje, neboť podle (19.22) je závislý na subvektoru $\{q_b\}$. Rovnice (19.20) a (19.21) rozšíříme takto

$$\left[\begin{array}{c|c|c} K_{aa} & K_{ab} & 0 \\ \hline K_{ba} & K_{bb} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q_a \\ q_b \\ q_d \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_a \\ f_b - f^* \\ 0 \end{array} \right\} \quad (19.24)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & K_{cc} & K_{cd} \\ \hline 0 & K_{dc} & K_{dd} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q_a \\ q_b \\ q_d \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ f_c + f^* - K_{cc} \delta \\ f_d - K_{dc} \delta \end{array} \right\} \quad (19.25)$$

Tyto dvě rovnice sečteme a dostaneme

$$\left[\begin{array}{c|c|c} K_{aa} & K_{ab} & 0 \\ \hline K_{ba} & K_{bb} + K_{cc} & K_{cd} \\ \hline 0 & K_{dc} & K_{dd} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q_a \\ q_b \\ q_d \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} f_a \\ f_b + f_c - K_{cc} \delta \\ f_d - K_{dc} \delta \end{array} \right\} \quad (19.26)$$

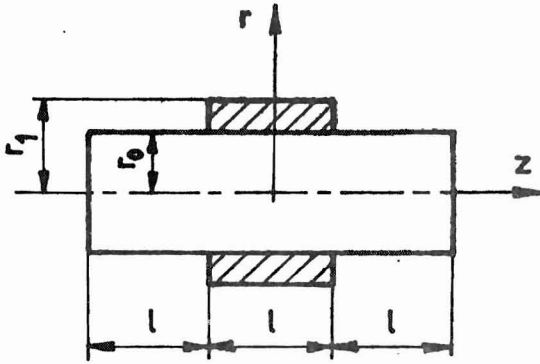
Na levé straně je nyní matice tuhosti platná pro soustavu obou těles po jejich spojení. Na pravé straně je vektor zobecněných sil, v němž se nyní vyskytují už jen známé prvky (f_a až f_d i přesah δ známe). Z rovnice (19.26) můžeme proto vypočítat všechny posuvy hřídele a také všechny posuvy náboje s výjimkou radiálních posuvů $\{q_c\}$ v dotykové ploše (osové posuvy jsou zahrnuty do subvektoru $\{q_d\}$). Ty dopočítáme dodatečně z rovnice (19.22). Známe-li posuvy, známe i poměrné deformace a napětí. Kromě toho jsme schopni - výpočtem ze vztahů (19.19) rozepsaných pro jednotlivé konečné elementy - určit i všechny vnitřní reakce přenášené v uzlových bodech.

Zajímají-li nás pouze vnitřní reakce $\{f^*\}$ v dotykové ploše, vypočteme je ze vztahu (19.20). Vyjde

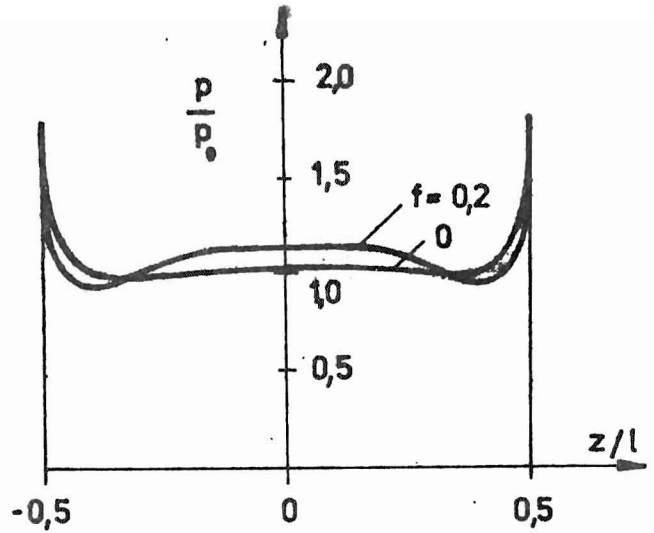
$$\{f^*\} = \{f_b\} - [K_{ba}]\{q_a\} - [K_{bb}]\{q_b\} \quad (19.27)$$

Řešení má smysl, pokud všechny prvky tohoto vektoru vyjdou nezáporné.

Fredriksson /11/, /12/ řešil metodou konečných prvků některé zajímavé úlohy o spojích s přesahem. Pro ilustraci uvedeme výsledky jeho výpočtu, které se týkají hřídele s nasazeným nábojem podle obr. 55. Uvažoval přitom i vliv tření, jehož součinitel bral buď $f = 0$, nebo $f = 0,2$.



OBR. 55



OBR. 56

Jeho řešení platí pro tyto poměry a hodnoty *)

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{2}{3}, \quad \frac{l}{r_1} = \frac{4}{3}, \quad \frac{\delta}{r_0} = 0,0002$$

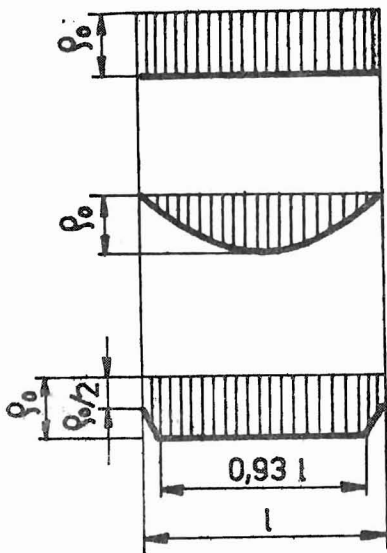
$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \mu = 0,3$$

Na obr. 56 je zakreslen průběh radiálního tlakového napětí v dotykové ploše v poměru k jmenovitému tlaku

$$p_0 = \frac{E\delta}{2r_0} \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,0002}{2} \left(1 - \frac{4}{9}\right) \doteq 11,1 \text{ MPa}$$

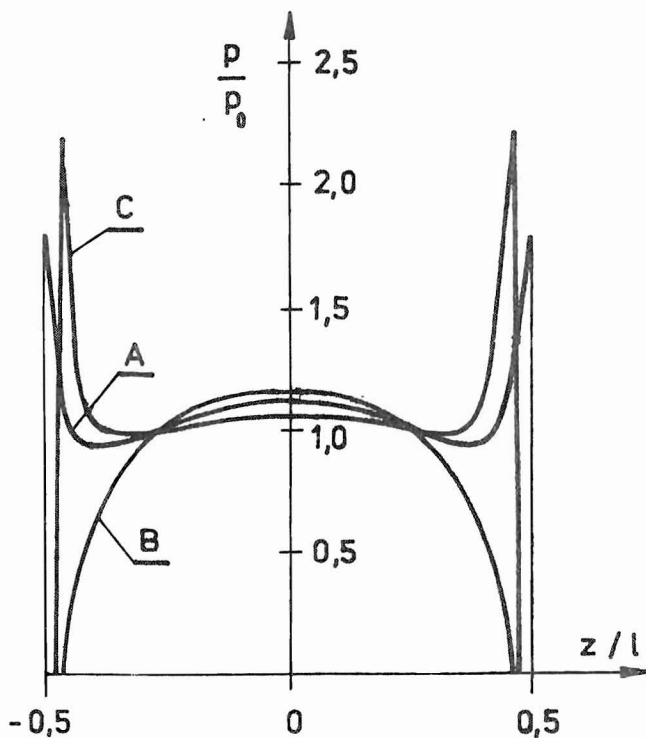
a to pro hladký spoj i spoj se třením. V tomto druhém případě se předpokládá souměrnost k rovině $z = 0$, která vzniká např. při sestavení spoje zatepla (s rozdílem teplot náboje a hřídele). Přesah se plně uplatní až po úplném vyrovnání teplot. Autor dále zkoumal vliv "odlehčení" konců náboje úpravou přesahu podle schémat na obr. 57. V prvním případě jde o rovnoměrný přesah, $\varphi_0 = \delta/r_0 = 0,0002$ (konce neodlehčeny). V druhém případě jde o parabolický průběh poměrného přesahu $\varphi(z) = \delta(z)/r_0$ takový, že poměrný přesah je nulový na koncích náboje a maximální hodnoty $\varphi = \varphi_0$ dosahuje právě uprostřed v řezu $z = 0$. Ve

*) Poměrný přesah nelze citovat s jistotou, protože v originální práci /11/ se tato hodnota uvádí na třech místech textu a vždy jinak (dvakrát jde o tiskovou chybu).



OBR. 57

napětí.^{x)} V případech B a C (odlehčené náboje) lze na obr. 58 pozorovat,



OBR. 58

třetím případě je přesah konstantní s výjimkou konců, kde je kuželové sražení, při němž přesah klesá až na polovinu své původní hodnoty. Změna tlaku v dotykové ploše působená těmito úpravami je znázorněna na obr. 58. Je zřejmé, že při parabolickém průběhu přesahu byla koncentrace tlaku na obou koncích náboje eliminována, avšak kónické sražení přesahu tuto tlakovou špičku neodstraňuje, jen ji posouvá dál od okraje náboje. Absolutní velikost této špičky je dokonce větší než u neodlehčeného náboje. Tomuto rozdílu však nelze přiřkládat velkou váhu, neboť metoda konečných prvků, přestože těchto prvků bylo v dané úloze 410 (v jednom kvadrantu), nedává příliš spolehlivé hodnoty pro lokálně úzce omezenou vysokou špičku

že tlak poklesne k nule ještě dříve než na okraji $|z/l| = 0,5$. Dotyková oblast je tedy nepatrně kratší než l .

Z obr. 58 plyne důležité poučení: "špičku" (koncentraci) tlaku, a tím i koncentraci jiných napětí, působí hrana náboje. Ta se neodstraní kuželovým přechodem. Odlehčení náboje by mělo být proto vyrobeno tak, aby v celé dotykové ploše byla zachována hladkost.

x) Síť byla u okrajů náboje zhuštěná, měla 504 stupňů volnosti a 21 uzlových bodů v dotykové ploše.

20. VLIV PLASTICKÝCH DEFORMACÍ NÁBOJE NA NAPJATOST LISOVANÉHO SPOJE

Je-li přesah poloměrů velký, stává se, že napětí v nejvíce namáhaném místě náboje, popř. i hřídele, překročí mez plastických deformací. Protože napjatost v náboji je méně příznivá než v hřídeli, zplastizuje se zpravidla jen vnitřní válcová vrstva materiálu v náboji. Projeví se to navenek tím, že čelo náboje ztratí u vnitřního okraje rovinnost (viz příklad 12). Uvnitř spoje to má za následek, že tlak v dotykové ploše vzroste méně než odpovídá Lamého teorii odvozené pro elastický stav. Jen výjimečně, když je hřídel měkký a náboj tvrdý (když hřídel má nízkou a náboj vysokou mez plastických deformací), mohou se plastické deformace objevit i v hřídeli, zejména v dutém hřídeli.

V této kapitole budeme předpokládat, že se plasticky přetvoří pouze náboj, a to jen v okolí dotykové plochy. Totální zplastizování celého náboje je sice možné, ale málo pravděpodobné. Sotva k němu dojde ihned po sestavení rozumně navrženého spoje, tedy bez spolupůsobení vnějšího zatížení. Budeme s tím však počítat jako s mezním případem.

Omezíme se na výpočet radiálního posuvu δ_2 náboje na poloměru r_0 , což je poloměr dotykové plochy, působením tlaku p v této ploše. Závislost $\delta_2(p)$ bude vlivem plastických deformací nelineární. Bude-li namáhání pouze elastické, přejde tento vztah v přímou úměrnost (16.3).

Protože náboj je rotačně symetrický, zvolíme v něm válcové souřadnice r, φ, z . Žádná proměnná nebude záviset na obvodové úhlové souřadnici. Nenulové budou pouze posuvy $u_r = u_r(r, z)$, $u_z = u_z(r, z)$. Abychom nemusili psát u těchto posuvů indexy, označíme je krátce jako u, W , takže bude

$$u = u_r = u(r, z) \quad W = u_z = W(r, z) \quad (20.1)$$

Cauchyho kinematické vztahy dají poměrná prodloužení

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (20.2)$$

Tyto vztahy budou platit, ať jsou deformace elastické, nebo plastické. Podobně bude vždy platit i diferenciální rovnice rovnováhy pro radiální složky sil

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0 \quad (20.3)$$

Konstitutivní vztahy, které vzájemně svazují poměrné deformace (20.2) a napětí v rovnici (20.3), budou ovšem jiné v elastické a jiné v plastické oblasti.

Čela náboje nebývají zatížena. Je-li mimoto dotyková plocha dokonalé hladká, je pružně deformovaný náboj ve stavu rovinné napjatosti.^{*)} Budeme předpokládat, že náboj je ve směru osy krátký (že jde o tenký kotouč), takže napjatost zůstane rovinná i při elasticko-plastické deformaci. Bude tedy

$$\sigma_z \cong 0 \quad (20.4)$$

Pokud je $\sigma_\varphi > 0 \cong \sigma_r$, dává Trescova podmínka plasticity

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_k \quad (20.5)$$

kde σ_k je (idealizovaná) mez plastických deformací při jednoosém tahu u materiálu bez zpevnění, velmi jednoduché řešení rovnice (20.3) pro plastickou oblast. Z rovnice (20.5) dosadíme do (20.3) a dostaneme

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_k \frac{1}{r} = 0 \quad (20.6)$$

Je-li celý průřez plastický, bude $p = p_m$ (mezní tlak). Integrací rovnice (20.6)

$$\int_{-p_m}^0 d\sigma_r = \sigma_k \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} \quad (20.7)$$

vypočteme

$$p_m = \sigma_k \ln \frac{r_1}{r_0} \quad (20.8)$$

O tom, za jakých podmínek může náboj opravdu celý přejít do plastického stavu, se zmíníme později.

Povzbuzení tímto jednoduchým výsledkem a jeho elegantním odvozením, zkusíme aplikovat Trescovu podmínku plasticity i pro náboj, který se bude plasticky deformovat pouze na intervalu $r_0 \leq r < \varrho$, přičemž $\varrho < r_1$. Zbytek průřezu bude v elastickém stavu.

Mezní čára $F(\sigma_r, \sigma_\varphi) = 0$, která odděluje v rovině napětí $(\sigma_r, \sigma_\varphi)$ elastickou oblast od plastické oblasti, je šestiúhelník s těmito stranami

*) A to nejen ve stavu zobecněné rovinné napjatosti! Jak známo, průřezy kolmé k ose si zachovávají při pružných deformacích náboje rovinnost, neboť $\varepsilon_z = -\mu(\sigma_r + \sigma_\varphi)/E = \text{konst.}$ Viz též rovnice (20.14) a (20.15).

[/18/, str. 23, rovnice (3.16)]

$$\begin{aligned}
 F_1 &\equiv \sigma_r - \sigma_k = 0 & F_4 &\equiv -\sigma_r - \sigma_k = 0 \\
 F_2 &\equiv \sigma_\varphi - \sigma_k = 0 & F_5 &\equiv -\sigma_\varphi - \sigma_k = 0 \\
 F_3 &\equiv \sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_k = 0 & F_6 &\equiv -\sigma_\varphi + \sigma_r - \sigma_k = 0
 \end{aligned}
 \tag{20.9}$$

Soubor funkcí F_1 až F_6 tvoří Koiterův zobecněný plastický potenciál. Zmíněný šestiúhelník má strany $F_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$. Uvnitř tohoto šestiúhelníku je vždy $F_i < 0$. Na jeho hranici je $F_i = 0$ alespoň pro některé i . Vnitřek šestiúhelníku představuje elastickou oblast. Vždy je $F_i \leq 0$. Napjatost, která by dala $F_i > 0$, nemůže nastat. K tomu vede předpoklad, že se materiál plastickými deformacemi nezpevňuje. Materiál o této vlastnosti bývá označován jako "ideálně plastický". Nejvíce se mu blíží oceli s prodlevou na mezi kluzu.

Jak později ukážeme, bude v elastické i v plastické oblasti platit^{*)}

$$\sigma_r \leq 0, \quad \sigma_\varphi > 0, \quad \sigma_\varphi > |\sigma_r|
 \tag{20.10}$$

O vzniku plastické deformace proto rozhodne pouze podmínka $F_3 = 0$, tedy rovnice (20.5)

Rovnici (20.6) budeme nyní integrovat s okrajovou podmínkou

$$\sigma_r(r = r_0) = -p
 \tag{20.11}$$

Vyjde (pro $r_0 < r < \rho$)

$$\sigma_r = -p + \sigma_k \ln \frac{r}{r_0}
 \tag{20.12}$$

a z rovnice (20.5)

$$\sigma_\varphi = -p + \sigma_k \left(1 + \ln \frac{r}{r_0}\right)
 \tag{20.13}$$

V elastické oblasti platí Lamého řešení

$$\sigma_r = A - B \frac{1}{r^2}
 \tag{20.14}$$

$$\sigma_\varphi = A + B \frac{1}{r^2}
 \tag{20.15}$$

*) Pokud nenastane mezní stav (20.24), což nepředpokládáme.

s integračními konstantami A , B . Pro ně máme okrajové podmínky

$$\sigma_r(r_1) = 0 \quad \sigma_\varphi(\varrho) - \sigma_r(\varrho) = \sigma_k \quad (20.16)$$

První z těchto podmínek říká, že vnější válcový povrch náboje je bez napětí. Druhá podmínka vyjadřuje skutečnost, že válcová plocha $r = \varrho$ je rozhraním mezi elastickou a plastickou oblastí. Musí zde proto platit podmínka plasticity (20.5). Vyjde

$$\sigma_r = -\frac{\sigma_k}{2} \left[\left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 - \left(\frac{\varrho}{r_1} \right)^2 \right] \quad (20.17)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_k}{2} \left[\left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 + \left(\frac{\varrho}{r_1} \right)^2 \right] \quad (20.18)$$

Rovnice (20.17) a (20.18) platí pro interval $\varrho < r \leq r_1$, tedy pro elastickou oblast.

Napjatost bychom tedy znali v celém náboji, kdybychom věděli, jaký je poloměr ϱ elasticko-plastického rozhraní. Na něm (a ovšem nejenom na něm) musí platit zákon akce a reakce, tj. radiální napětí σ_r musí být na poloměru $r = \varrho$ spojitě. To vyžaduje, aby platilo

$$-p + \sigma_k \ln \frac{\varrho}{r_0} = -\frac{\sigma_k}{2} \left[1 - \left(\frac{\varrho}{r_1} \right)^2 \right] \quad (20.19)$$

To je transcendentní rovnice pro neznámou ϱ . Označíme-li

$$Q = \frac{r_0}{r_1}, \quad \xi = \frac{\varrho}{r_0} \quad (20.20)$$

bude možno upravit (20.19) do tvaru

$$2 \ln \xi - (Q\xi)^2 + \left(1 - \frac{2p}{\sigma_k} \right) = 0 \quad (20.21)$$

Rovnici (20.21) řešíme numericky. Pak vypočteme $\varrho = \xi r_0$.*) S touto hodnotou vyjde napětí v plastické oblasti z rovnic (20.12) a (20.13) a v elastické oblasti z rovnic (20.17) a (20.18). Napjatost je tedy vyřešena.

*) Je ovšem možný i obrácený postup: zvolit $\xi = \varrho/r_0$ a vypočítat tlak p , který tomu odpovídá. Vztah (20.21) je pro neznámou p lineární.

Kdyby byl náboj celý v plastickém stavu, bylo by $\xi = r_1/r_0 = 1/Q$. Mezní tlak by vyšel z rovnice (20.8), a to

$$p_m = -\sigma_r(r_0)_{max} = \sigma_k \ln\left(\frac{1}{Q}\right) = -\sigma_k \ln Q \quad (20.22)$$

Je to záporné radiální napětí, které nemůže být v absolutní hodnotě větší než σ_k (neboť $F_4 \leq 0$). Má-li být opravdu $p \leq \sigma_k$, musí být $\ln Q \geq -1$. Náboj může být proto celý v plastickém stavu jen pro

$$Q \geq e^{-1} \doteq 0,3679 \quad (20.23)$$

Jinými slovy, rovnice (20.22) platí jen tehdy, platí-li také podmínka (20.23), tj. je-li $r_1 \leq 2,7183 r_0$.

Co když tato podmínka neplatí? Pak musí být

$$Q > 0,3679, \quad p_m = \sigma_k \quad (20.24)$$

V tomto případě zůstane vnější část náboje i při mezním tlaku v dotykové ploše elastická; materiál bude z náboje "vytékat" u vnitřního okraje v axiálním směru (za podmínky $\sigma_\varphi = 0$, $\sigma_r = -\sigma_k$, tj. $F_3 = F_4 = 0$).

Nadále budeme předpokládat, že mezní stav, při němž deformace neomezeně rostou, aniž tlak v dotykové ploše dále vzrůstá, nenastane. Pak bude možné vypočítat zvětšení δ_2 poloměru r_0 díry náboje i pro elasticko-plastický stav. (Index "2" odpovídá označení, které jsme použili v kap. 16.) Výpočet posuvů vyžaduje aplikaci Misesova zákona normality (zákonu plastického tečení).

Zkušenost nás poučuje, že změna objemu bývá vždy elastická a že plastické deformace souvisejí jen se změnou tvaru (takže se často předpokládá, že za plastických deformací je objem konstantní). Proto bývá výhodné rozdělit tenzor napjatosti na tzv. kulový tenzor a deviator. V daném případě máme

$$\begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_r & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (20.25)$$

kde

$$\Delta = \frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_\varphi) \quad (20.26)$$

Připomeňme, že $\sigma_2 = 0$. Vyjde tedy

$$\begin{aligned}
\Delta_r &= \frac{2}{3} G_r - \frac{1}{3} G_\varphi \\
\Delta_\varphi &= \frac{2}{3} G_\varphi - \frac{1}{3} G_r \\
\Delta_z &= -\frac{1}{3} G_r - \frac{1}{3} G_\varphi
\end{aligned}
\tag{20.27}$$

Obdobně vypočteme i složky deviatoru přetvoření

$$\begin{aligned}
e_r &= \varepsilon_r - e = \frac{2}{3} \varepsilon_r - \frac{1}{3} \varepsilon_\varphi - \frac{1}{3} \varepsilon_z \\
e_\varphi &= \varepsilon_\varphi - e = \frac{2}{3} \varepsilon_\varphi - \frac{1}{3} \varepsilon_z - \frac{1}{3} \varepsilon_r \\
e_z &= \varepsilon_z - e = \frac{2}{3} \varepsilon_z - \frac{1}{3} \varepsilon_r - \frac{1}{3} \varepsilon_\varphi
\end{aligned}
\tag{20.28}$$

a také složky kulového tenzoru přetvoření

$$e = \frac{1}{3} (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V}
\tag{20.29}$$

které, jak vidíme, jsou třetinou poměrné změny objemu. Snadno se dosazením přesvědčíme, že platí vztah

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = 2e - e_z.
\tag{20.30}$$

Je totiž

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = \frac{2}{3} (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) - \frac{2}{3} \varepsilon_z + \frac{1}{3} \varepsilon_r + \frac{1}{3} \varepsilon_\varphi
\tag{20.31}$$

Vztah (20.31), a tedy i (20.30) platí identicky. Vztah (20.30) budeme později potřebovat.

Vrátíme se nyní k výpočtu posuvů. Pro objemové změny platí Hookeův zákon

$$\dot{s} = 3K\dot{e}
\tag{20.32}$$

Tečkou označujeme derivaci podle času. Místo toho bychom mohli psát diferenciální přírůstky, takže by bylo

$$ds = 3Kde
\tag{20.33}$$

Změna kulového tenzoru napjatosti (změna "hydrostatického napětí") je úměrná změně poměrného zvětšení objemu a konstantou úměrnosti je modul objemové pružnosti K .

Protože plastické deformace vznikají za podmínky $F_3 = 0$, dá Misesův zákon /18/ tyto rychlosti plastických poměrných deformací

$$\dot{\epsilon}_\varphi^p = \lambda \frac{\partial F_3}{\partial G_\varphi}, \quad \dot{\epsilon}_r^p = \lambda \frac{\partial F_3}{\partial G_r}, \quad \dot{\epsilon}_z^p = \lambda \frac{\partial F_3}{\partial G_z} \quad (20.34)$$

Zde $\lambda > 0$ je dosud neurčený parametr (není to tedy žádná materiálová konstanta). Protože $F_3 = G_\varphi - G_r - G_z$, je

$$\dot{\epsilon}_\varphi^p = \lambda, \quad \dot{\epsilon}_r^p = -\lambda, \quad \dot{\epsilon}_z^p = 0 \quad (20.35)$$

Je zřejmé, že $\dot{\epsilon}^p = 1/3(\dot{\epsilon}_r^p + \dot{\epsilon}_\varphi^p + \dot{\epsilon}_z^p) = 0$, takže složky (20.35) tenzoru rychlosti poměrných deformací jsou zároveň složky příslušného deviatoru

$$\dot{\epsilon}_\varphi^p = \lambda, \quad \dot{\epsilon}_r^p = -\lambda, \quad \dot{\epsilon}_z^p = 0 \quad (20.36)$$

Poněvadž celkové deformace jsou součtem deformací elastických a plastických, budou elastické složky deviatoru rychlostí poměrných deformací

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\varphi^e &= \dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_\varphi^p = \dot{\epsilon}_\varphi - \lambda \\ \dot{\epsilon}_r^e &= \dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_r^p = \dot{\epsilon}_r + \lambda \\ \dot{\epsilon}_z^e &= \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_z^p = \dot{\epsilon}_z \end{aligned} \quad (20.37)$$

Pro ně platí Hookeův zákon v jednoduchém tvaru (viz např. /20/, str. 78)

$$\begin{aligned} \dot{s}_\varphi &= 2G \dot{\epsilon}_\varphi^e = 2G(\dot{\epsilon}_\varphi - \lambda) \\ \dot{s}_r &= 2G \dot{\epsilon}_r^e = 2G(\dot{\epsilon}_r + \lambda) \\ \dot{s}_z &= 2G \dot{\epsilon}_z^e = 2G \dot{\epsilon}_z \end{aligned} \quad (20.38)$$

Podmínku plasticity $F_3 = 0$ můžeme derivovat podle času a dostaneme

$$\dot{F}_3 = \dot{G}_\varphi - \dot{G}_r = 0 \quad (20.39)$$

Když sem dosadíme z rovnice (20.25) (po jejím rozepsání), bude

$$\dot{s}_\varphi - \dot{s}_r = 0 \quad (20.40)$$

S použitím (20.38) odtud dostaneme $2G(\dot{\epsilon}_\varphi - \lambda - \dot{\epsilon}_r - \lambda) = 0$, čili

$$\lambda = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_r) \quad (20.41)$$

S touto hodnotou dají rovnice (20.38)

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_r &= \dot{\delta}_\varphi = G (\dot{e}_\varphi + \dot{e}_r) \\ \dot{\delta}_z &= 2G \dot{e}_z\end{aligned}\quad (20.42)$$

Integrací rovnic (20.42) a (20.32) získáme vztahy

$$\begin{aligned}e_\varphi + e_r &= \frac{1}{G} \delta_r + C_1 \\ e_z &= \frac{1}{2G} \delta_z + C_2 \\ e &= \frac{1}{3K} \delta + C_3\end{aligned}\quad (20.43)$$

Integrační konstanty C_1 až C_3 vyjdou z podmínky spojitosti deviatóru přetvoření a kulového tenzoru přetvoření na poloměru $r = \varrho$, který dělí elastickou a plastickou oblast. Ze vztahů (20.27) vypočteme složky deviatóru napětí jednak s použitím vzorců (20.12) a (20.13), jednak s použitím vzorců (20.17) a (20.18); pokaždé dosadíme $r = \varrho$. Prvé z nich dosadíme do vzorců (20.43), druhé do Hookeova zákona

$$(e_\varphi + e_r) = \frac{1}{2G} (\Delta_\varphi + \Delta_r) \quad e_z = \frac{1}{2G} \Delta_z \quad (20.44)$$

Porovnáním hodnot (20.44) s prvými dvěma vztahy (20.43) dostaneme C_1 , C_2 . Obdobně vypočteme ze vztahů pro kulové tenzory integrační konstantu C_3 . S označením (20.20) nakonec vyjde (srov. s lit. /29/)

$$\begin{aligned}e_r + e_\varphi &= \frac{G_k}{6G} \left[(Q_\xi)^2 - 2 \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) \right] \\ e_z &= \frac{G_k}{6G} \left[-(Q_\xi)^2 + 2 \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) \right] \\ e &= \frac{G_k}{9K} \left[(Q_\xi)^2 - 2 \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) \right]\end{aligned}\quad (20.45)$$

Naším cílem jsou posuvy $u = u(r, z)$; k jejich výpočtu se znamenitě hodí rovnice (20.30), neboť s použitím (20.2) dává

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 2e - e_z \quad (20.46)$$

Pravou stranu této rovnice známe, takže můžeme integrovat. Nejprve dosadíme za e a e_z z rovnic (20.45). Pamatujíc, že

$$\frac{2}{9K} + \frac{1}{6G} = \frac{1-\mu}{E} \quad (20.47)$$

dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{1-\mu}{E} \sigma_k \left[(Q\xi)^2 - 2 \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) \right] \quad (20.48)$$

Integrací vyjde radiální posuv $u = u_p$ v plastické oblasti (t.j. pro $r_0 \leq r < \rho$)

$$u_p = \frac{1-\mu}{E} \sigma_k \left\{ \frac{f(z)}{r} + \frac{r}{2} \left[(Q\xi)^2 - 1 - 2 \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) \right] \right\} \quad (20.49)$$

Funkci $f(z)$ zastupující integrační "konstantu" zatím neznáme. Pro elastickou oblast $\rho < r \leq r_1$ máme $u = u_e$, kde podle (20.2)

$$\begin{aligned} u_e &= r \varepsilon_\varphi = \frac{r}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r) = \\ &= \frac{\sigma_k r}{2E} \left[(1+\mu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + (1-\mu)(Q\xi)^2 \right] \end{aligned} \quad (20.50)$$

K odvození vztahu (20.50) jsme použili (20.17) a (20.18). Spojitost posuvů na rozhraní $r = \rho$ elastické a plastické oblasti vyžaduje, aby

$$u_e(\rho) = u_p(\rho) \quad (20.51)$$

Odtud vypočteme neznámou funkci $f(z)$. Vyjde

$$f(z) = \frac{\rho^2}{1-\mu} = \text{konst.} \quad (20.52)$$

Tuto hodnotu dosadíme do (20.49). Když ještě položíme $r = r_0$, vyjde poměrné zvětšení poloměru r_0 (při elasticko-plastické deformaci náboje)

$$\frac{u(r_0)}{r_0} = \frac{\delta_2}{r_0} = \frac{\sigma_k}{E} \left[\xi^2 - (1-\mu) \frac{p}{\sigma_k} \right] \quad (20.53)$$

Hodnotu ξ jsme získali řešením transcendentní rovnice (20.21). Tak jsme dostali hledanou deformační charakteristiku náboje, kterou potřebujeme do deformační podmínky (16.1).

Diskuse

Ukážeme, že rovnicemi (20.45) nejsou určeny všechny složky poměrných deformací. Označme

$$\begin{aligned} \epsilon_r + \epsilon_\varphi &= a_1 \\ \epsilon_z &= a_2 \\ \epsilon &= a_3 \end{aligned} \tag{a}$$

Podle (20.28) bude

$$\begin{aligned} \epsilon_r + \epsilon_\varphi - 2\epsilon_z &= 3a_1 \\ -\epsilon_r - \epsilon_\varphi + 2\epsilon_z &= 3a_2 \\ \epsilon_r + \epsilon_\varphi + \epsilon_z &= 3a_3 \end{aligned} \tag{b}$$

Ihned je zřejmé, že první dvě rovnice jsou rozporné, pokud není $a_1 = -a_2$. Skutečně, tato podmínka je splněna, neboť

$$\epsilon_r + \epsilon_\varphi + \epsilon_z = 0 \tag{c}$$

Tím rozpor mezi oběma rovnicemi zmizel, ale zůstala jejich lineární závislost. To však znamená, že proměnné ϵ_r , ϵ_φ nelze v soustavě rovnic (b) separovat. Lze vypočítat pouze ϵ_z a pak ještě součet $\epsilon_r + \epsilon_\varphi$. To je všechno.

Separovat proměnné ϵ_r , ϵ_φ lze teprve poté, co využijeme podmínky (20.51) spojitosti radiálních posuvů. Pak je možné - dosazením řešení (20.49) spolu s (20.52) do rovnice (20.2) - vypočítat i ϵ_r a ϵ_φ .

Tato skutečnost je v souladu s tím, že plastické poměrné deformace nejsou danou napjatostí, splňující podmínku plasticity, ještě určeny. Jde totiž o materiál bez deformačního zpevnění. Namáháme-li zkušební tyč z takového materiálu tahem, můžeme ji libovolně (ovšem v mezích platnosti teorie) plasticky prodlužovat při nezměněném napětí $\sigma = \sigma_k$. Závislost $\epsilon(\sigma)$ není v tomto případě jednoznačná. Deformace je určena teprve kinematickou vazbou (pohybem čelistí zkušebního stroje). Takovou kinematickou vazbou je v našem případě právě neporušená souvislost elastické a plastické oblasti, tedy rovnice (20.51). Teprve ta umožní zkompletovat výpočet deformací. Avšak napjatost, jak jsme viděli, lze vyřešit poměrně snadno.

Poznámka

Zde uvedená teorie předpokládá, že v náboji je rovinná napjatost. Ze stejného předpokladu vychází i DIN 7190, Berechnung und Anwendung von Presspassungen. Jejím základem je práce Lundbergova z roku 1944, v níž se předpokládá, že materiál je nestlačitelný, že pro něj platí Misesova podmínka plasticity a že se plastické deformace řídí Henckeho deformační teorií. Avšak teorie plastického potenciálu by v daném případě

samozejmě vedla k rovnicím Prandtlovým-Reussovým /18/, a nikoli k rovnicím Henckyho. Kromě toho skutečný materiál není nestlačitelný. Rovnice, které Lundberg dostal, jsou značně složité a do DIN 7190 jsou zpracovány ve tvaru četných nomogramů. Tím se tato norma stává - ve vztahu k aplikaci číslicových počítačů - velmi nepraktickou. Námí uvedené Kollmannovo řešení tyto nedostatky překonává.

Příklad 11

Vypočtete zvětšení vnitřního poloměru r_0 náboje, jehož poloměry jsou $r_0 = 50$ mm, $r_1 = 80$ mm, účinkem tlaku $p = 90$ MPa, který působí na vnitřní válcový povrch. Idealizovaná mez kluzu materiálu je $\sigma_k = 240$ MPa, modul pružnosti v tahu $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, Poissonovo číslo $\mu = 0,3$.

Řešení

V daném případě je $Q = r_0/r_1 = 50/80 = 0,625$. První plastické deformace by vznikly při tlaku $p = p_1$. Podle (20.5) a Lamého vzorců

$$\sigma_\varphi(r_0) = p \frac{1+Q^2}{1-Q^2}, \quad \sigma_r(r_0) = -p \quad (a)$$

vyjde

$$p_1 = \frac{1-Q^2}{2} \sigma_k = \frac{1 - 0,625^2}{2} \cdot 240 = 73,125 \text{ MPa} \quad (b)$$

Daný tlak je asi o 23 % větší. Rovnice (20.21) dá

$$2 \ln \xi - 0,390625 \xi^2 + 0,25 = 0 \quad (c)$$

a odtud

$$\xi \doteq 1,13494 \quad (d)$$

Poloměr hranice mezi plastickou a elastickou oblastí vyjde

$$\varrho = \xi r_0 \doteq 1,13494 \cdot 50 = 56,747 \text{ mm} \quad (e)$$

Plastická oblast tedy představuje válcovou vrstvu o tloušťce asi 6,7 mm, přiléhající k díře náboje $\varnothing 100$ mm. Z rovnice (20.53) dostaneme

$$u(r_0) = 50 \cdot \frac{240}{2 \cdot 10^5} \left(1,13494^2 - 0,7 \cdot \frac{90}{240} \right) \doteq 0,0615 \text{ mm} \quad (f)$$

Poměrné zvětšení poloměru tedy je

$$\frac{u(r_0)}{r_0} \cdot 1000 \doteq \frac{0,0615}{50} \cdot 1000 = 1,23 \text{ promile} \quad (\text{g})$$

Kdyby nevznikly plastické deformace, vyšlo by podle (16.3)

$$\begin{aligned} \frac{u(r_0)}{r_0} \cdot 1000 &= 1000 \frac{p}{E} \left[\frac{1+Q^2}{1-Q^2} + \mu \right] = \\ &= 1000 \frac{90}{2 \cdot 10^5} \left[\frac{1 + 0,625^2}{1 - 0,625^2} + 0,3 \right] = \\ &= 1,162 \text{ promile} \end{aligned} \quad (\text{h})$$

Rozdíl řešení (g) a (h) představuje odchylku od lineární deformační charakteristiky způsobenou plastickými deformacemi.

Příklad 12

U náboje z předchozího příkladu posuďte deplanaci čela náboje.

Řešení

Je-li namáhání elastické, zůstávají čela rovinná. Kdyby byl materiál dokonale elastický, což označíme hvězdičkou, byly by radiální posuvy na okrajích náboje (podle Lamého teorie)

$$\begin{aligned} u^*(r_0) &= \frac{p r_0}{E} \left(\frac{1+Q^2}{1-Q^2} + \mu \right) = \\ &= \frac{90 \cdot 50}{2 \cdot 10^5} \left(\frac{1 + 0,625^2}{1 - 0,625^2} + 0,3 \right) \doteq 0,058 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned} u^*(r_1) &= \frac{2 p r_1}{E} \frac{Q^2}{1-Q^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 90 \cdot 80}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{0,625^2}{1 - 0,625^2} \doteq 0,0462 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Osové poměrné prodloužení by vyšlo konstantní (nezávislé na poloměru), a to

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^* &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_\varphi + \sigma_r) - \mu \frac{2p}{E} \frac{Q^2}{1-Q^2} = \\ &= -0,3 \cdot \frac{2 \cdot 90}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{0,625^2}{1 - 0,625^2} = -0,000\ 1731 = -0,1731 \text{ promile}\end{aligned}\quad (c)$$

Protože je tato hodnota záporná, jde o zúžení (ztenčení) náboje. Rovnice (a) až (c) jsou odvozeny ze známé teorie elastických tlustostěnných nádob, kterou najdeme v každé učebnici pružnosti a pevnosti, popř. v příručkách.

Nyní vypočteme tyto deformace pro elasticko-plastický stav. Posuv na poloměru r_0 vyšel (jak víme z předchozího příkladu)

$$u(r_0) = 0,0615 \text{ mm} \quad (d)$$

a posuv na poloměru r_1 vyjde podle (20.50)

$$\begin{aligned}u(r_1) &= \frac{240 \cdot 80}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \left[1,3 \left(\frac{56,747}{80} \right)^2 + 0,7 \cdot (0,625 \cdot 1,13494)^2 \right] = \\ &= 0,0483 \text{ mm}\end{aligned}\quad (e)$$

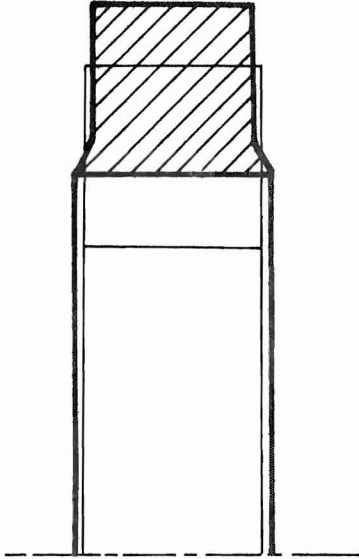
S použitím (20.17) a (20.18) vypočteme poměrné osově prodloužení v elastické oblasti

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^e &= -\mu \frac{1}{E} (\sigma_r + \sigma_\varphi) = -\frac{\mu \sigma_k}{E} \left(\frac{Q}{r_1} \right)^2 = \\ &= -\frac{0,3 \cdot 240}{2 \cdot 10^5} \left(\frac{56,747}{80} \right)^2 \doteq -0,000181 = \\ &= -0,181 \text{ promile}\end{aligned}\quad (f)$$

Pro plastickou oblast platí (20.45). Extrémní poměrné prodloužení vyjde na poloměru $r = r_0$, a to

$$\begin{aligned}\varepsilon_z^p(r_0) &= e_z(r_0) + e(r_0) = (2-\mu) \frac{\sigma_k}{E} \left[(Q\xi)^2 - 2 \ln \xi \right] = \\ &= 1,7 \frac{240}{2 \cdot 10^5} \left[(0,625 \cdot 1,13494)^2 - 2 \ln 1,13494 \right] \doteq \\ &\doteq 0,000\ 510 = 0,510 \text{ promile}\end{aligned}\quad (g)$$

Tato hodnota je kladná, takže jde o rozšíření náboje u vnitřní díry. Posuvy jsou ve dvousetnásobném relativním zvětšení znázorněny na obr. 59. Je zřejmé, že plastickou oblast lze experimentálně rozeznat odchylkou od rovinnosti čela náboje. Měření však musí mít velkou citlivost, neboť u náboje širokého např. 30 mm (obr. 59) je maximální rozdíl Δh tlouštěk náboje



OBR. 59

$$\begin{aligned} \Delta h &= 30 \cdot (0,000\ 510 - 0,000\ 181) \doteq \\ &\doteq 0,01 \text{ mm} \end{aligned} \quad (h)$$

Příklad 13

Dokažte, že složky tenzoru poměrných deformací, a tedy i deviatoru deformací, musí být na hranici elastické a plastické oblasti spojité.

Řešení

Protože se náboj neporuší, musí být posuvy u , w spojité. To zna-

mená, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\varrho - \varepsilon, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\varrho + \varepsilon, z) \quad (a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(\varrho - \varepsilon, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(\varrho + \varepsilon, z) \quad (b)$$

Z rovnice (b) je ihned zřejmá spojitost osového poměrného prodloužení

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (c)$$

a z rovnice (a) spojitost obvodového poměrného prodloužení

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \quad (d)$$

Poněvadž jde o rovinnou napjatost ($\sigma_z = 0$), je radiální napětí v elastické oblasti dáno vzorcem

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\varphi) \quad (e)$$

Vztah (e) musí platit i na hranici $r = \varrho$, neboť až tam zasahuje elastická oblast. Podle Newtonova zákona akce a reakce musí být radiální napětí σ_r na poloměru $r = \varrho$ spojitě. Je-li spojitá levá strana rovnice (e), musí být spojitá i její pravá strana. Ukázali jsme, že na pravé straně vztahu (e) je na poloměru $r = \varrho$ spojitě ε_φ . Musí tam tedy být spojitě i ε_r ; jinak by rovnice (e) nemohla platit. Na poloměru $r = \varrho$ jsou proto spojitě všechny poměrné deformace.

LITERATURA

- /1/ BABUŠKA, I. - REKTORYS, K. - VYČICHLLO, F.: Matematická theorie rovinné pružnosti. Praha, Nakladatelství ČSAV 1955.
- /2/ BATRA, R.C.: Quasistatic indentation of a rubber-covered roll by a rigid roll. "International Journal for Numerical Methods in Engineering" 17 (1981), č. 12, s. 1823-1833.
- /3/ BELJAJEV, N.M.: Trudy po teorii uprugosti i plastičnosti. Moskva, Gostechizdat 1957.
- /4/ CHAN, S.K. - TUBA, I.S.: A finite element method for contact problems of solid bodies. "International Journal of Mechanical Sciences" 13 (1971), s. 615-639.
- /5/ CONWAY, H.D. - FARNHAM, K.A.: Contact stresses between cylindrical shafts and sleeves. "International Journal of Engineering Science" 5 (1967), s. 541-554.
- /6/ COOK, R.D.: Concepts and applications of finite element analysis. New York, John Wiley 1981.
- /7/ COOPER, D.H.: Hertzian contact stress deformations coefficients. "ASME Journal of Applied Mechanics" 36 (1969), s. 296-303.
- /8/ DINNIK, A.N.: Izbrannyje trudy. Tom 1. Kijev, Izd. AN-USSR 1952.
- /9/ DOWSON, D. - HIGGINSON, G.R.: Elasto-hydrodynamic lubrication. London, Pergamon Press 1966.
- /10/ DUNDURS, J. - STIPPES, M.: Role of elastic constants in certain contact problems. "ASME Journal of Applied Mechanics" 37 (1970), č. 4, s. 965-970.
- /11/ FREDRIKSSON, B.: An analysis of an elastic shrink fit problem. Rep. No. LiTH-IKP-R-057, Institut of Technology, Department of Mechanical Engineering, září 1977.

- /12/ FREDRIKSSON, B.: Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems. "Computers & Structures" 6 (1976), s. 281-290.
- /13/ GALIN, L.A.: Kontaktnyje zadači teorii uprugosti. Moskva, Gostechizdat 1953.
- /14/ GANGAL, M.D.: Direct finite element analysis of elastic contact problems. "International Journal for Numerical Methods in Engineering" 5 (1972), č. 1, s. 145-148.
- /15/ GLADWELL, G.M.L.: Contact problems in the classical theory of elasticity. Alphen aan den Rijn, Sijthoff & Noordhoff 1980.
- /16/ GRIGOLJUK, E.I. - TOLKAČEV, V.M.: Kontaktnyje zadači teorii plastin i oboloček. Moskva, Mašinostrojenie 1980.
- /17/ HAHN, H.T. - LEVINSON, M.: Indentation of an elastic layer bonded to a rigid cylinder (Part I, Part II). "International Journal of Mechanical Sciences" 16 (1974), č. 7, s. 489-514.
- /18/ HÖSCHL, C.: Mezní plastické stavy. Publikace č. 60-644-83 (2561), Praha, DT ČSVTS Praha 1983.
- /19/ HÖSCHL, C.: Napjatost, tuhost a útlum ve spojích s přesahem namáhaných krutem. "Strojírenství" 23 (1973), č. 9, s. 515-520.
- /20/ HÖSCHL, C.: Principy a zákony mechaniky poddajných těles. 1. část. Publikace č. 60-537-78 (1491), Praha, DT ČSVTS Praha 1978.
- /21/ HÖSCHL, C.: Přítlak mezi dvěma válci s pryžovým povlakem. "Strojírenství" 10 (1960), č. 12, s. 901-906.
- /22/ HÖSCHL, C.: Rovinné dotykové úlohy s konstrukčním tlumením. Zpráva ÚT-ČSAV č. Z 513/76, Praha 1976.
- /23/ HÖSCHL, C.: Tvarová pevnost lisovaných spojů. "Strojírenství" 7 (1957), č. 1, s. 3-8.
- /24/ HÖSCHL, C.: Užití malých počítačů v dynamice soustav. Publikace č. 60-643-83 (DT 2420), Praha, DT ČSVTS Praha 1983.
- /25/ HÖSCHL, C. - SLAVÍKOVÁ, J.: Tuhost a útlum v torzně namáhaných svěrných spojeních. "Strojírenství" 31 (1981), č. 3, s. 154-159.
- /26/ KALKER, J.J.: A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. "Vehicle system dynamics" 11 (1982), č. 1, s. 1-13.
- /27/ KALKER, J.J.: A survey of the mechanics of contact between solid bodies. "Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" 57 (1977), č. 5, s. T3-T17.

- /28/ KALKER, J.J.: The computation of three-dimensional rolling contact with dry friction. "International Journal for Numerical Methods in Engineering" 14 (1979), s. 1293-1307.
- /29/ KOBRIN, M.M.: Pročnosť pressovych sojedinenij pri povtorno-pere-
mennoj nagruzke. Moskva, Gosudarstvennoje naučno-techničeskoje
izdatelstvo mašinostroitelnoj literatury 1954.
- /30/ KOITER, W.T.: On the diffusion of load from a stiffener into
a sheet. "The Quarterly Journal of Mechanics and Applied
Mathematics" 8 (1955), č. 2, s. 164-178.
- /31/ KOLLMANN, F.G.: Die Auslegung elastisch-plastisch beanspruchter
Querpressverbände. "Forschung im Ingenieurwesen" 44 (1978), č. 1,
s. 1-36.
- /32/ KOLLMANN, F.G.: Rotating elasto-plastic interference fits. "ASME
Journal of Mechanical Design" 103 (1981), č. 1, s. 61-66.
- /33/ KROLEVETS, M.S.: Issledovanije metodov rešenija kontaktnoj zadači
teorii uprugosti. "Prikladnaja Mechanika" 2 (1966), č. 11, s. 68-82.
- /34/ KOVNERISTOV, G.B. - SPIRINA, N.I.: Kontaktnyje naprjaženija vzaimo-
deystvija cilindričeskoj oboločki s bandažom. "Prikladnaja mehani-
ka" 15 (1979), č. 2, s. 65-70.
- /35/ KRZYŚ, W. - SKRZYPEK, J. - SZUWALSKI, K.: Metoda obliczania ugieć
walców walcarki "Kvarto". "Archiwum budowy maszyn" 23 (1976), č. 3,
s. 407-421.
- /36/ LANCZOS, C.: The variational principles of mechanics. 4. ed.
Toronto, University of Toronto Press 1970.
- /37/ LINDEMAN, R.A.: Finite element computer program for the solution of
nonlinear axisymmetric contact problems with interference fits.
NWL Technical report TR 3148, Naval Weapons Laboratory, Dahlgren,
Virginia 22448, June 1974.
- /38/ LURJE, A.I.: Prostranstvennyje zadači teorii uprugosti. Moskva,
Gos. Izd. Techniko-teoretičeskoj literatury 1955.
- /39/ MINDLIN, R.D.: Compliance of elastic bodies in contact "ASME
Journal of Applied Mechanics" 16 (1949), s. 259-268.
- /40/ MUSCHELIŠVILI, I.N.: Nekotoryje osnovnyje zadači matematičeskoj
teorii uprugosti. 5. vyd. Moskva, Nauka 1966.
- /41/ NEUBER, H.: Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der
Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel.
"Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" 14 (1934),
s. 203.

- /42/ O'CONNOR, H.W. - WEINSTEIN, A.S.: Shape and flatness in thin strip rolling. "ASME Journal of Engineering in Industry" 94 (1972), č. 4, s. 1113-1123.
- /43/ OHTE, S.: Finite element analysis of elastic contact problems. "Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers" 16 (1973), č. 95, s. 797-804.
- /44/ OKAMOTO, Noriaki - NAKAZAWA, Masaru: Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions. "International Journal for Numerical Methods in Engineering" 14 (1979), s. 337-357.
- /45/ PAPKOVIČ, P.F.: Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques. "Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences" 195 (1932), s. 513-515 a 754-756.
- /46/ PATULA, E.J.: A possible mechanism for causing eccentricity in sleeved backup rolls on cold-rolling mills. "ASME Journal of Engineering for Industry" 97 (1975), č. 3, s. 1053-1059.
- /47/ POLYA, G. - SZEGO, G.: Inequalities for the capacity of a condenser. "American Journal of Mathematics" 67 (1945), s. 1-32.
- /48/ PORITSKY, H.: Stresses and deflections of cylindrical bodies in contact with application to contact of gears and of locomotive wheels. "ASME Journal of Applied Mechanics" 17 (1950), 191-201.
- /49/ RANKIN, A.W.: Shrink fit stresses and deformations. "ASME Journal of Applied Mechanics" 11 (1944), s. A77-A85.
- /50/ REKTORYS, K.: Přehled užité matematiky. Praha, SNTL 1973.
- /51/ SACHS, G.: Der Nachweis innerer Spannungen in Stangen und Röhren. "Zeitschrift für Metallkunde" 19 (1927), s. 352-357.
- /52/ SCHWARTZ, L.: Matematické metody ve fyzice. Překlad z francouzského originálu. Praha, SNTL 1972.
- /53/ SOVĚTŠENKO, B.F. - MAKSAK, V.I.: Kontaktnaja žestkost' v mašinstrojenii i priborostrojenii. Sevastopol' 1973.
- /54/ STARŽINSKIJ, V.E. - MOŽAROVSKIJ, V.V. - OSIPENKO, S.A.: K rasčetu kontaktnych naprjaženij v polimernoj oblicovke. "Problemy pročnosti" (1974), č. 11, s. 111-115.
- /55/ STERNBERG, E. - TURTELTAUB, M.J.: Compression of an elastic roller between two rigid plates. In: Sedov, L.I. aj. red.: Mechanika splošnoj sredi i rodstvennyje problemy analiza. Moskva, Nauka 1972, s. 495-515.
- /56/ ŠTAJERMAN, I.Ja.: Kontaktnaja zadača teorii uprugosti. Moskva, Gostechizdat 1949.

- /57/ TARABASOV, N.D.: Rasčety naprjaženných posadok v mašinostrajenii. Moskva 1961.
- /58/ TIMOŠENKO, Š.P. - WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Plastinki i oboločki. Překlad z anglického originálu. Moskva, Nauka 1966.
- /59/ TORVIK, P.J.: Note on the boundary conditions for contact problems. "ASME Journal of Applied Mechanics" 34 (1967), s. 761-763.
- /60/ TRANIER, C.J. - CRAGGS, J.W.: Stresses near the end of a long cylindrical shaft under non-uniform pressure loading. "Philosophical Magazine" 38 (1947), Series 7, s. 214-225.
- /61/ WILSON, E.A. - PARSONS, B.: Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements. "International Journal for Numerical Methods in Engineering" 2 (1970), s. 387-395.
- /62/ WRIGHT, G.P. - O'CONNOR, J.J.: Finite element analysis of alternating axial loading of elastic rectangular blocks with finite friction. "International Journal of Engineering Science" 9 (1971), s. 555-570.
- /63/ YOSHIMOTO, G. - TSUKIZOE, T. - WATANABE, Y.: The influence of the surface roughness on fits. Part II. "Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers" 26 (1960), s. 387-394.
- /64/ ZIENKIEWICZ, O.C.: The finite element method in engineering science. New York, McGraw-Hill 1971.

Název:	Stavba strojů 102 KONTAKTNÍ ÚLOHY A LISOVANÉ SPOJE
Autor:	Prof. Ing. Cyril Höschl Ústav termomechaniky ČSAV, Praha
Počet stran:	140
Náklad:	180 výtisků
Formát:	A4
Číslo publikace:	60 - 606 - 85 (3053)
Vydal a rozmnožil:	Dům techniky ČSVTS Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23
Rok vydání:	1985 DT 01 - 479/85
Cena publikace:	190 Kčs (cenový výměr Domu tech- niky ČSVTS Praha č. 146 z 19.6.1985)