

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



VYUŽITÍ MALÝCH POČÍTAČŮ PRO PRÁCI KONSTRUKTÉRA

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1981

V této publikaci se probírají různé metody řešení úloh ze strojní praxe na programovatelných kalkulátorech a mini-počítačích. Uvádějí se příklady úspěšných řešení a jejich programy v jazyku BASIC popř. FORTRAN, ale také některé příklady selhání výpočtových postupů a jeho příčiny. Jde o řešení lineárních algebraických a diferenciálních rovnic, o různé aplikace v pružnosti a v dynamice, o digitální filtrace a zpracování záznamů časově proměnných veličin, o vyhodnocování experimentů, o počítačovou grafiku ap. Je uvedena numericky výhodná metoda výpočtu zobecněné inverzní matice s aplikacemi ve vyrovnávacím počtu. Probírá se volba optimálního stupně polynomu při regresní analýze. Zvláštní pozornost se věnuje Z-transformaci, která usnadňuje pochopení diskrétní Fourierovy transformace a konvoluce. Tyto transformace se uplatňují zejména při analýze náhodných vibrací.

Publikace je určena strojním inženýrům a technikům. Předpokládá se znalost základů maticového počtu.

"Konáme-li po prvé větší výpočty, jaké se vyskytují zvláště v astronomii, vyšší geodesii i jinde, docházíme zpravidla k chybným výsledkům, poněvadž nemáme náležitého cviku v numerickém počítání. Opakující takový výpočet dopouštíme se často nejen týchž omylů, nýbrž i nových, neboť duševní deprese, která se dostavuje v důsledku učiněných omylů, stává se zdrojem omylů nových".

V. Láska a V. Hruška, Teorie a praxe numerického počítání. JČMF, Praha 1934

"Při zjištění nepřípustných odchylek řešení na počítači od známého řešení se domníváme, že jde o věcnou chybu. Předpokládáme přitom, že počítač provádí operace bez chyby".

J. Jinoch, A. Maloušek a J. Vencovský, Počítač a Fortran v technické praxi. SNTL, Praha 1973

"Dobry počtář napíše asi 40 číslic za minutu, čili názorněji řečeno, násobení obvyklým způsobem pětimístného čísla pětimístným číslem trvá mu průměrně asi jednu minutu. Známý počtář Dase potřeboval k vypočítání součinu dvou stómístných čísel při počítání v hlavě skorem 9 hodin. Gauss tvrdil, že dobrý počtář by nepotřeboval k témuž výkonu na papíře více než polovinu času".

V. Láska a V. Hruška, Teorie a praxe numerického počítání. JČMF, Praha 1934

"Operační rychlost počítačů pro technické výpočty se pohybuje od několika tisíc operací za vteřinu (I. a II. generace) do několika set tisíc až miliónů operací za vteřinu (III. generace)".

J. Jinoch, A. Maloušek a J. Vencovský, Počítač a Fortran v technické praxi. SNTL, Praha 1973

O b s a h

Str.

Předmluva	5
1. Obrácená úloha o pevnosti nosníku	7
2. Porovnání numerických metod podle hospodárnosti	19
3. Poznámka k variační formulaci metody konečných prvků	21
4. Metoda dynamické relaxace	25
5. Sběr a zpracování časově proměnných experimentálních dat	34
6. Číslicový RC filtr a signalizace chyb	42
7. Užití Z-transformace	49
8. Fourierův integrál	55
9. Rychlá Fourierova transformace	57
10. Korelace a spektrum	63
11. Chyby při regresní analýze	69
12. Golubova metoda výpočtu zobecněné inverzní matice	77
13. Automatická volba stupnice	88
14. Automatické kreslení ekviskalárních čar	90
15. Příklady	99

Předmluva

Rychlý vývoj číslicových počítačů a jejich široké uplatnění ve všech odvětvích vědy a techniky ve druhé polovině tohoto století vedly k představám, že úkoly formulované na různých pracovištích se budou zadávat a efektivně zpracovávat ve velkých výpočtových střediscích, u nichž bude možné předpokládat větší rentabilitu vynaložených značných investičních prostředků. Zkušenosti posledních let nás poučily o tom, že vývoj půjde asi trochu jiným směrem. Neuvěřitelné rozšíření operačních možností programovatelných kalkulátorů a minipočítačů při relativně nízké ceně vede k tomu, že mnoho menších závodů a pracovišť dává přednost samostatnému vybavení touto "malou" výpočetní technikou před soustavnou, ne vždy dostatečně operativní spoluprací s velkými výpočetními středisky. To má výhodu také v tom, že vybavení počítače periferními jednotkami může být účelně zvoleno podle potřeb pracoviště a že přímý styk řešitelů s počítačem podněcuje zájem o poznání všech možností, které počítač poskytuje a vede tak k lepšímu využití počítače v každodenní práci. Přímá zkušenost s numerickým řešením úloh na počítači vede k novému pohledu na fyzikální skutečnost a na její matematické modelování. Počítač vskutku "vychovává" své uživatele, vede je k větší osobní kázni, pozornosti, důslednosti a k větší angažovanosti.

Existují ovšem i jiné možnosti, jak zkvalitnit a zorganizovat výpočetní práci, např. užitím dálkově připojených terminálů pro práci s velkými počítači, zejména terminálů vybavených vlastní inteligencí, takže je lze zčásti využívat zcela samostatně. Přesto však jsme svědky stoupající oblíbenosti a rozšíření malé výpočetní techniky a s tím souvisejících změn ve způsobu práce inženýrů a techniků. Vzrostly nároky na kvalitu a rozsah teoretických výpočtů, na nichž závisí funkční způsobilost a spolehlivost konstrukcí. Nové metody se uplatňují i při plánování a řízení experimentů a při zpracování experimentálních dat.

Dům techniky ČSVTS v Praze uspořádal proto již roku 1976 celostátní seminář "Modifikace pevnostních výpočtů pro malé digitální počítače". Letos se k této problematice vracíme. Přineseme však poněkud jiný výběr témat. Účelem semináře je vzbudit zájem a poskytnout nejdůležitější informace potřebné k úspěšnému rozvíjení vlastní iniciativy podle potřeb jednotlivých pracovišť. Nejde tedy o soustavný kurs programování ani o kurs numerické matematiky. Na příkladech ukážeme úspěšné i neúspěšné použití různých matematických metod, což myslíme

jednak jako inspiraci, jednak jako varování před nesprávnou vírou, že počítače zmohou všechno. Zmohou ovšem mnoho, především to, co jsme schopni výstižně a správně matematicky formulovat a vhodnými metodami řešit. Málo však zmohou tam, kde nám chybí informace, vědomosti nebo nutná zkušenost.

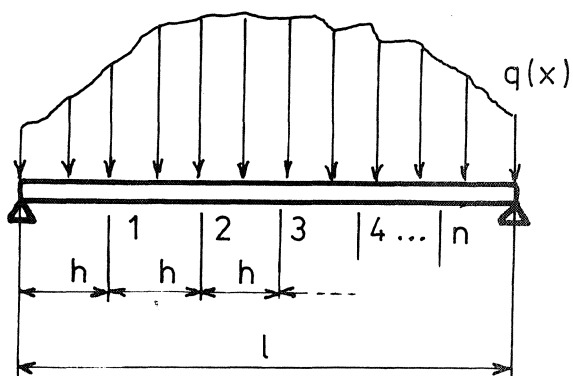
Autor srdečně děkuje pracovníkům Domu techniky ČSVTS v Praze za spolupráci a za mimořádnou ochotu, s jakou se ujali organizování semináře. Zvlášť děkuje Ing. Vladimíru Václavíkovi za pečlivé přehlédnutí rukopisu a všem, kteří se podíleli na vydání tohoto textu.

Prof. Ing. Cyril Höschl

1. OBŘÁCENÁ ÚLOHA O PEVNOSTI NOSNÍKU

Zpravidla je dáno zatížení nosníku, z něhož počítáme vnitřní statické účinky (posouvající síly, ohybové momenty) a podle nich posoudíme pevnost nosníku. Z ohybových momentů vypočítáme ohybová napětí a porovnáme s dovolenou hodnotou. Může však nastat případ, kdy chceme postupovat obráceně: experimentálně určit napětí, a tedy i ohybové momenty, a výpočtem určovat působící zatížení. Tato obrácená úloha se může týkat např. výpočtu neznámého spojitého působení síly na bočnici či žebrovou výztuhu slévárenské formy nebo jiné stěny, výpočtu neznámé přítlačné síly na nějaký nosník či válec pracovního stroje apod.

Nechť např. na nosník podle obr. 1 působí spojitě rozdělená síla $q(x)$, kterou chceme určit a z různých důvodů ji nemůžeme zjistit přímým měřením. Ve stejných vzdálenostech h změříme odporovými snímači poměrná prodloužení $e(x_i)$ ($x_i = ih$; $i = 1, 2, \dots, n$) ve vnějším vlákne nosníku. Nosič bude mít celkem $n+1$ polí, takže $(n+1)h = l$. Poměrná prodloužení přepočítáme na ohybové momenty. Je-li nosník prizmatický, bude mít průřezový modul v ohybu W_0 ve všech řezech stejný, takže ohybové momenty vyjdou z rovnice



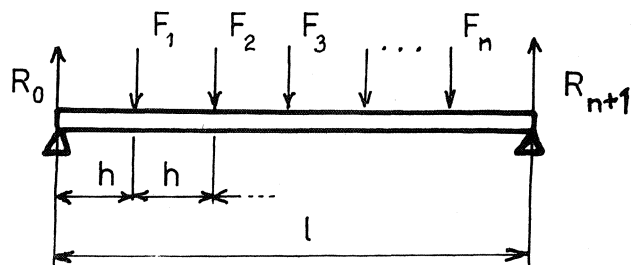
Obr. 1

$$M_i = M(x_i) = W_0 E e(x_i) \quad (1.1)$$

Spojitě zatížení nahradíme soustavou osamělých sil F_i ve stejných bodech, v nichž jsme měřili poměrná prodloužení, tj. položíme

$$F_i = h q(x_i) \quad (1.2)$$

Je zřejmé, že se tím dopouštíme určité nepřesnosti, ale vzhledem k tomu, že nám stačí jen přibližná znalost průběhu $q(x)$, můžeme se domnívat, že síly F_i budou hledaný průběh dostatečně věrně vystihovat, zvláště když volíme n velké, tedy poměr h/l malý.



Obr. 2

Metodou myšleného řezu podle obr. 2 vypočteme, že

$$M_i = R_0 i h - F_1 (i-1) h - F_2 (i-2) h - \dots - F_{i-1} h, \quad (1.3)$$

$$R_0 = \frac{1}{n+1} [n F_1 + (n-1) F_2 + (n-2) F_3 + \dots + F_n]. \quad (1.4)$$

Vyloučením reakce R z těchto rovnic získáme závislost mezi ohybovými momenty M_i a silami F_j , kterou zapíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_n \end{Bmatrix} = \frac{h}{n+1} \begin{bmatrix} n & & & & & & & \\ & n-1 & & & & & & \\ & & 2(n-1) & & & & & \\ & & & 2(n-2) & & & & \\ & & & & 3(n-2) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 2(n-1) & \\ & & & & & & & n-1 \\ & & & & & & & & n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

Souměrná matice

Zkráceně

$$\{M\} = [A] \{F\} \quad (1.6)$$

Protože vektor na levé straně jsme získali výpočtem podle (1.1), můžeme z poslední rovnice vypočítat

$$\{F\} = [A]^{-1} \{M\} \quad (1.7)$$

Postup je tedy velmi jednoduchý. Zvolme např. $n = 9$. Pak

$$[A] = \frac{h}{10} \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 16 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 14 & 21 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 20 & 15 & 10 & 5 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 14 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Abychom měli pro kontrolu nějaký příklad, zvolíme $F_i = 1000 \text{ N}$ ($i = 1, 2, \dots, 9$), $h = 0,2 \text{ m}$. Z rovnice (1.6) vyjde vektor $\{M\}$ (v jednotkách N.m)

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} 900 \\ 1600 \\ 2100 \\ 2400 \\ 2500 \\ 2400 \\ 2100 \\ 1600 \\ 900 \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Když na počítači Hewlett-Packard 9830 A vypočteme pomocí rovnice (1.7) a hodnot (1.8) a (1.9) vektor $\{F\}$, dostaneme přesně původní zadané hodnoty, totiž $F_i = 1000$ (pro všechna i).

Nyní dosadíme za vektor $\{M\}$ pokusně zjištěné hodnoty. Abychom si metodu předem vyzkoušeli, budeme pokus jenom simulovat. Od hodnot (1.9) odečteme náhodné chyby, které vybereme tak, aby relativní chyby byly menší než asi 5 %, což je předpokládaná chyba tenzometrického měření. V následujícím vztahu (1.10) uvedeme takto upravený vektor ohybových momentů $\{\tilde{M}\}$ i výsledek řešení

$$\{\tilde{F}\} = [A]^{-1} \{\tilde{M}\}$$

$$\{\tilde{M}\} = \begin{Bmatrix} 925 \\ 1550 \\ 2175 \\ 2300 \\ 2600 \\ 2475 \\ 2075 \\ 1525 \\ 875 \end{Bmatrix} \quad \{\tilde{F}\} = \begin{Bmatrix} 1500 \\ 0 \\ 2500 \\ -875 \\ 2125 \\ 1375 \\ 750 \\ 500 \\ 1125 \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Ačkoli chyba prvků ve vektoru $\{\tilde{M}\}$ proti původním hodnotám $\{M\}$ nepřesáhla 4,7 %, změnilo se řešení k nepoznání; výsledek je zcela nepravděpodobný, takže naše metoda je naprosto nespolehlivá. Přitom počítač HP 9830 A počítá s velkou numerickou přesností a bez chyby, jak se můžeme přesvědčit dosazením vektoru $\{\tilde{F}\}$ podle (1.10) do vztahu (1.6). Vyjde přesně vektor $\{\tilde{M}\}$ podle (1.10). Také součin $[A]^{-1}[A]$ dá bez chyby jednotkovou matici. Determinant soustavy není nijak malý. V čem je tedy chyba? Proč metoda selhává?

Zdá se, že je ve špatné podmíněnosti matice $[A]$ (1.8). Je vžitý názor, že podmíněnost matice souvisí s velikostí determinantu matice a že špatně podmíněnou matici nelze bez větší chyby invertovat. Chybné výsledky řešení soustavy lineárních rovnic by pak byly způsobeny zaokrouhlovacími chybami při inverzi matice. Na našem příkladu jsme však viděli, že to nemusí být pravda. Výsledky mohou být chybné i při dokonalé, bezchybné inverzi matice soustavy.

Podmíněnost matice je sice vlastností této matice, avšak tato vlastnost se projevuje teprve v souvislosti s řešením celé soustavy rovnic. Dokážeme, že špatná podmíněnost matice může mít katastrofální vliv na přesnost výpočtu, ačkoli sama inverze matice bude ideálně přesná.

V našem případě šlo o řešení soustavy (1.6) s vektorem $\{\tilde{M}\}$ zatíženým chybami $\{\varepsilon\} = \{M\} - \{\tilde{M}\}$, tedy o soustavu

$$[A]\{\tilde{F}\} = \{M\} - \{\varepsilon\} \quad (1.11)$$

V učebnicích maticové algebry je popsán způsob, jak můžeme diagonalizovat matici $[A]$. Nejprve najdeme vlastní čísla λ a vlastní vektory $\{x\}$ řešením homogenní soustavy rovnic

$$[A]\{x\} = \lambda \{x\}. \quad (1.12)$$

Protože $[A]$ je souměrná matice, jsou hodnoty λ reálné. Dostaneme je řešením algebraické rovnice

$$\det([A] - \lambda [I]) = 0. \quad (1.13)$$

Ke každé vlastní hodnotě λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) najdeme vlastní vektor $\{u\}_i$ tak, aby

$$[A]\{u\}_i = \lambda_i \{u\}_i, \quad \{u\}_i^T \{u\}_i = 1 \quad (1.14)$$

Pak matice sestavená z těchto vlastních vektorů

$$[U] = [u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_n] \quad (1.15)$$

je modální matice a transformuje matici $[A]$ na diagonální matici $[\Lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$

$$[U]^T [A] [U] = [\Lambda]. \quad (1.16)$$

V rovnici (1.11) zavedeme novou proměnnou $\{\tilde{P}\}$ podle vztahu

$$\{\tilde{F}\} = [U]\{\tilde{P}\}. \quad (1.17)$$

Vyjde

$$[A][U]\{\tilde{P}\} = \{M\} - \{\varepsilon\}. \quad (1.18)$$

Rovnici (1.18) vynásobíme zleva maticí $[U]^T$. Se zřetelem k vztahu (1.16) dostaneme

$$[\Lambda]\{\tilde{P}\} = [U]^T \{M\} - [U]^T \{\varepsilon\}. \quad (1.19)$$

Kdybychom počítali s původním bezchybným vektorem $\{M\}$, bylo by $\{\varepsilon\} = \{0\}$, $[U]^T \{F\} = \{P\}$, takže

$$[\Lambda]\{P\} = [U]^T \{M\}. \quad (1.20)$$

Odečtením obou posledních rovnic dostaneme pro chybu výsledku $\{\delta\} = \{P\} - \{\tilde{P}\}$ vztah

$$[A]\{\delta\} = [U]^T\{\varepsilon\} \quad (1.21)$$

Pro i -tý řádek máme */

$$\lambda_i \delta_i = u_{1i} \varepsilon_1 + u_{2i} \varepsilon_2 + \dots + u_{ni} \varepsilon_n. \quad (1.22)$$

Odtud

$$\delta_i = b_i / \lambda_i, \quad (1.23)$$

kde b_i značí pravou stranu rovnice (1.22). Vidíme, že chyba výsledku δ_i může být mnohem větší než chyba pravé strany b_i , je-li $|\lambda_i| \ll 1$ a to i tehdy, máme-li matici $[A]$ vypočítanou s ideální přesností.

I kdybychom tedy libovolně zpřesňovali inverzi matice $[A]$, nezměnilo by se nic na nepoužitelnosti naší metody, protože matice $[A]$ má tu vlastnost, že kondiční číslo

$$K = \frac{|\lambda|_{\max}}{|\lambda|_{\min}} \gg 1. \quad (1.24)$$

Připomeňme si, jaký je vztah mezi zatížením $q(x)$ a ohybovým momentem $M(x)$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x). \quad (1.25)$$

Protože veličina $\{F\}$ zastupuje v rovnici (1.6) spojitě zatížení $q(x)$, znamená maticový operátor $[A]$ dvojitou integraci a inverzní operátor $[A]^{-1}$ v rovnici (1.7) dvojitou derivaci. Nespolehlivost metody zřejmě souvisí s tím, že se derivacemi každá chyba zveličuje.

Vnucuje se myšlenka, zda by nebylo možné řešit obrácenou úlohu přímo numerickým derivováním podle (1.25). Funkce $q(x)$ a $M(x)$ máme přitom ovzorkovány hodnotami $M_i = M(x_i)$ a $q_i = q(x_i) = F_i/h$. Pro druhou derivaci známe diferenční vztah

$$M_i'' = \frac{1}{h^2} (M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}) + O(h^2) \quad (1.26)$$

*/ Označili jsme u_{ij} prvek v i -tém řádku a j -tém sloupci matice $[U]$.

pro $i = 1, 2, \dots, n$ s tím, že $M_0 = 0$, $M_{n+1} = 0$. Aplikujeme-li tento vzorec na posloupnost \tilde{M}_i složek vektoru $\{\tilde{M}\}$, výsledek znásobíme $h = 0,2$ a změnímme znaménko, dostaneme přesně vektor $\{\tilde{F}\}$ podle (1.10). To potvrdilo naši hypotézu o významu inverzního operátoru $[A]^{-1}$. Chceme-li dostat užitečnější vztahy, musíme spojit numerickou derivaci s číslicovou filtrací.

Vycházíme z intuitivní představy, že funkce $M(x)$ je do značné míry hladká, neboť vznikla dvojnásobnou integrací spojitě funkce $Q(x)$; kdežto chyby $\varepsilon(x_i)$ jsou chaotické, neboť vznikly náhodnými chybami při tenzometrickém měření. Proložíme proto vždy pět bodů

$$M_{i-2}, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, M_{i+2}$$

kvadratickou parabolou, která představuje hladkou křivku

$$m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (1.27)$$

tak, aby vektor reziduálních hodnot $r = M - m$ v daných pěti bodech měl minimální normu. Pro tento vektor máme soustavu rovnic v maticovém zápisu ^{*}/

$$\begin{Bmatrix} r_{i-2} \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ r_{i+2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{i-2} \\ M_{i-1} \\ M_i \\ M_{i+1} \\ M_{i+2} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2h & 4h^2 \\ 1 & -h & h^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 \\ 1 & 2h & 4h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}. \quad (1.28)$$

Zkráceně

$$\{r\} = \{m\} - [H]\{a\} \quad (1.29)$$

^{*}/ Bez újmy na obecnosti zvolíme $x_i = 0$, takže např. $x_{i-2} = -2h$

Čtverec normy

$$\begin{aligned} \|r\|^2 = r^2 &= \{r\}^T \{r\} = \\ &= \{m\}^T \{m\} - 2\{a\}^T [H]^T \{m\} + \{a\}^T [H]^T [H] \{a\} \end{aligned} \quad (1.30)$$

bude minimální, když

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial\{a\}} = \{0\}. \quad (1.31)$$

Odtud

$$\{a\} = [B] \{m\}, \quad (1.32)$$

kde

$$[B] = ([H]^T [H])^{-1} [H]^T \quad (1.33)$$

je zobecněnou inverzní maticí k matici $[H]$ a je typu 3×3 .

Za derivaci v bodě i vezmeme nyní hodnotu směrnice tečny k parabole (1.27); tou jsme na intervalu $(x_i - 2h, x_i + 2h)$ přibližně nahradili neznámou přesnou funkci $M(x)$. Bude tedy

$$M_i' = m'(x_i) = m'(0) = a_1 \quad (1.34)$$

Proto stačí vypočítat jen druhý řádek ze soustavy (1.32). Dostaneme

$$\begin{aligned} M_i' = m'(x_i) = a_1 &= \\ &= \frac{1}{10h} (-2M_{i-2} - M_{i-1} + M_{i+1} + 2M_{i+2}). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Tohoto vzorce použijeme pro $i = 2, 3, \dots, n-1$. Na koncích intervalu použijeme obdobných vzorců odvozených pouze ze čtyřbodové korekce (parabolu prokládáme metodou nejmenších čtverců jen čtyřmi body místo pěti). Vyjde

$$M_1' = \frac{1}{20h} (-11M_0 + 3M_1 + 7M_2 + M_3), \quad (1.36)$$

$$M_n' = \frac{1}{20h} (-M_{n-2} - 7M_{n-1} - 3M_n + 11M_{n+1}). \quad (1.37)$$

$$\{M''\} = [D]^2 \{M\} \quad (1.42)$$

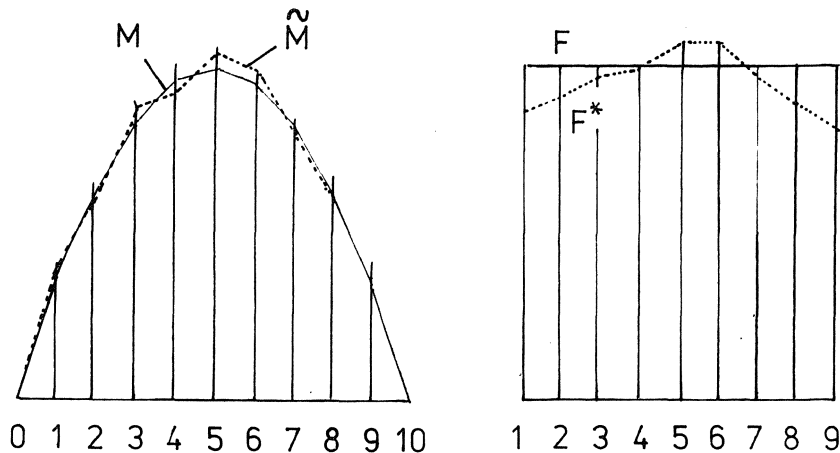
a tedy

$$\{F^*\} = -h [D]^2 \{M\} \quad (1.43)$$

Výnecháme-li hodnoty F_0^* a F_{n+1}^* , dostaneme pro hledaný vektor

$$\{F^*\} = \begin{Bmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ \vdots \\ F_9^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 866,25 \\ 902,5 \\ 966,25 \\ 996,25 \\ 1067,5 \\ 1063,75 \\ 975,0 \\ 887,125 \\ 798,125 \end{Bmatrix} \quad (1.44)$$

Největší odchylka od očekávaného vektoru $\{F\}$ činí asi 20 %, v průměru je však mnohem menší. Srovnání přesných a porušených průběhů veličin F_i a M_i poskytuje obr. 3. Je zřejmé, že se podařilo filtrací naměřených dat zachránit před znehodnocením podstatnou část vstupní informace a získat užitečné výsledky. Výpočet můžeme uskutečnit i bez maticové algebry opětovným užitím vztahů (1.35) až (1.39). Takové výpočty lze snadno realizovat i na programovatelných kapesních kalkulačích.



Obr. 3

2. POROVNÁNÍ NUMERICKÝCH METOD PODLE HOSPODÁRNOSTI

Uživatelé programovatelných kalkulátorů a minipočítačů se často domnívají, že každá metoda, která vede k cíli je dobrá, neboť u těchto počítačů není hodina "strojového" času tak drahá jako u velkých počítačů. Je to konec konců jedno, trvá-li výpočet kratší nebo delší dobu. Proto se k hospodárnosti použitých algoritmů tolik nepřihlíží.

Je však velmi ošemetné, pustíme-li otázku úspornosti algoritmů úplně se zřetele. Ukážeme to na příkladu řešení lineární soustavy algebraických rovnic.

Nejméně vhodná metoda k řešení soustavy lineárních algebraických rovnic je Cramerova. A přece se jí na školách (patrně z metodických důvodů) věnuje největší pozornost, často se ani jiná metoda neprobírá. Kdyby si nějaký řešitel, sveden svým školním vzděláním, sestavil program podle této metody, neshledal by nic divného, pokud by řešil soustavu s malým počtem neznámých. S rostoucí velikostí soustavy by se však nápadně prodlužovaly výpočtové časy a mohlo by se stát, že by se řešitel nedočkal výsledku ani do konce života.

Uveďme jako příklad řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\x_1 - 3x_2 - x_3 &= 2.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Podle Cramerova pravidla určíme každou neznámou jako podíl determinantů

$$x_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}; \quad x_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$x_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Vypočteme $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Kolik jsme k tomu potřebovali matematických operací? K výpočtu determinantu n -tého řádu potřebujeme sečíst $n!$ součinů vytvořených permutacemi n činitelů. Determinantů je celkem $n+1$. Bude-li trvat operace sečítání a násobení zhruba stejně dlouho, je to celkem $(n+1)(n+1)!$ operací; ostatní operace zanedbáme. Kdyby náš počítač uskutečnil sto tisíc operací za sekundu, potřebovali bychom čas v sekundách resp. minutách

$$t_s = (n+1)(n+1)! / 10^5, \quad t_m = t_s / 60$$

popř. v hodinách, dnech nebo rocích

$$t_h = t_m / 60, \quad t_d = t_h / 24, \quad t_r = t_d / 365.$$

Zaokrouhlené výsledky pro některá n (n = počet neznámých v soustavě rovnic) uvádí tabulka 1. Zatím co řešení soustavy s pěti neznámými by netrvalo ani pět setin vteřiny, soustava o deseti neznámých by vyžadovala už bezmála půldruhé hodiny a k řešení soustavy o patnácti neznámých by už nestačilo ani celé století.

Tab. 1 Výpočet času t k řešení lineární soustavy rovnic

Počet neznámých	5	10	15	20
Cramer	0,043 s	1,22 h	106 r	$3,4 \cdot 10^8$ r
Gauss	0,0013 s	0,0086 s	0,027 s	0,061 s

Užijeme-li místo toho Gaussovy eliminační metody, budou časy potřebné k výpočtu podstatně kratší. Podstata metody spočívá v tom, že se matice soustavy postupně transformuje na trojúhelníkovou matici. Kombinacemi první a druhé resp. první a třetí rovnice (2.1) dostaneme nejprve

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

a pak eliminací druhé proměnné z druhého a třetího řádku

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tak jsme dostali soustavu s trojúhelníkovou maticí. Nyní - při "zpětném chodu" - vypočteme postupně x_3 , x_2 , x_1 . Ve skutečnosti bývá postup doplněn ještě výběrem hlavního prvku, tj. případným přeskupením sloupců tak, aby se na diagonálu v příslušném řádku dostal vždy prvek s největší absolutní hodnotou; tím se zmenšují zaokrouhlovací chyby. Gaussova metoda vyžaduje celkem $n^3/3 + n^2 - n/3$ násobení a $n^3/3 + n^2 - 5n/6$ sečítání, tedy celkem $2n^3/3 + 2n^2 - 7n/6$ operací. Příslušné časy jsou rovněž uvedeny v tabulce 1. Pro patnáct neznámých, pro které by aplikace Cramerova pravidla vyžadovala celé století výpočtového času, potřebuje Gaussova metoda sotva tři setiny vteřiny.

Zbývá zodpovědět otázku, zda lze vůbec s dostupnou výpočetní technikou vypočítat determinant např. dvacátého řádu. Ovšemže to lze a to velmi snadno. Nemůžeme však postupovat podle definice, tj. sestavovat permutace činitelů, ale musíme determinant nejprve transformovat užitím dovolených operací do trojúhelníkového tvaru. Pod hlavní diagonálou pak máme pouze nuly a determinant vyčíslíme jako součin prvků na hlavní diagonále. Protože algoritmus se podobá Gaussově postupné eliminaci neznámých ze soustavy lineárních rovnic, jsou i časy srovnatelné, tj. v našem příkladu by šlo o zlomky vteřiny. */

3. POZNÁMKA K VARIACNÍ FORMULACI METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Chceme řešit metodou konečných prvků průhyb nosníku. Je-li nosník prizmatický, prostě podepřený a zatížený konstantní spojitě rozdělenou silou \bar{q} [$N m^{-1}$], platí pro něj diferenciální rovnice

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} = \frac{\bar{q}}{EJ} \quad (3.1)$$

Zde EJ je ohybová tuhost, \bar{x} vzdálenost od levé podpory, \bar{w} průhyb. Substitucemi

$$\bar{x} = x \ell, \quad \bar{w} = w \ell, \quad \bar{q} = q EJ / \ell^3 \quad (3.2)$$

*/ Vývojové diagramy a programy viz např. OLEHLA, M. - TIŠER, J.: Praktické použití Fortranu. 2. vyd., Praha, Nakladatelství dopravy a spojů 1979.

přejde rovnice (3.1) do bezrozměrového tvaru

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (3.3)$$

Bez újmy na obecnosti zvolíme $q = 1$ a dostaneme

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 1 = 0 \quad (3.4)$$

s okrajovými podmínkami

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 0. \quad (3.5)$$

Diferenciální rovnice (3.4) s okrajovými podmínkami (3.5) minimalizuje funkcionál

$$F = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (w'')^2 - w \right] dx. \quad (3.6)$$

Přesvědčíme se o tom tak, že funkci $w(x)$ pozměníme o variaci $\delta w(x) = \varepsilon \cdot \psi(x)$; $|\varepsilon| \ll 1$; $\psi(x)$ je nějaká "rozumná" funkce s okrajovými hodnotami $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 0$. Dosazením $w + \delta w$ za w do rovnice (3.6) dostaneme

$$F + \delta F = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (w'' + \delta w'')^2 - w - \delta w \right] dx. \quad (3.7)$$

Protože $(w'' + \delta w'')^2 = (w'')^2 + 2w''\delta w''$, dostaneme odečtením rovnice (3.6) od rovnice (3.7)

$$\delta F = \int_0^1 (w''\delta w'' - \delta w) dx. \quad (3.8)$$

První člen na pravé straně budeme dvakrát integrovat per partes

$$\begin{aligned} \int_0^1 w''\delta w'' dx &= [w''\delta w']_0^1 - \int_0^1 w'''\delta w' dx = \\ &= [w''\delta w']_0^1 - [w'''\varepsilon w]_0^1 + \int_0^1 w'''\varepsilon w dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vzhledem k tomu, že $\delta W(0) = 0$, $\delta W(1) = 0$, vymizí předposlední člen. Aby vymizel i první člen na pravé straně, musí na okrajích definičního intervalu vymizet buď W'' (tedy křivost, tj. i ohybový moment) nebo $\delta W'$ (sklon křivky znázorňující variaci). Vzhledem k prostému podepření nosníku vymizí na okrajích W'' . Tedy

$$\int_0^1 W'' \delta W'' dx = \int_0^1 W'' \delta W dx. \quad (3.10)$$

Pak z rovnice (3.8) plyne, že

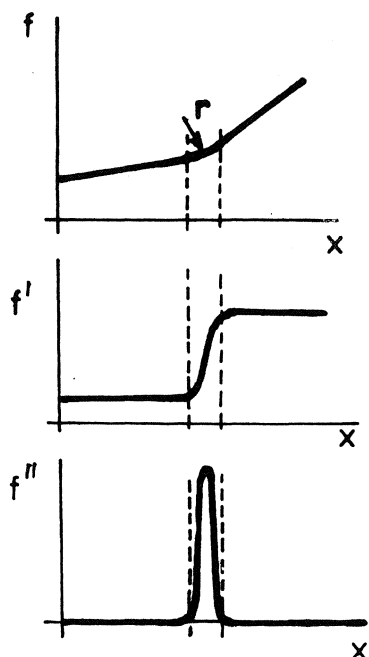
$$\delta F = \int_0^1 \left(\frac{d^4 W}{dx^4} - 1 \right) \delta W dx. \quad (3.11)$$

Nutnou podmínkou pro minimum funkcionálu F je vymizení jeho variace δF , tedy $\delta F = 0$. Protože "váhová funkce" $\delta W(x)$ v rovnici (3.11) je libovolná, musí se integrand rovnat nule, což je právě rovnice (3.4).^{*}

Metoda konečných prvků spočívá v tom, že definiční interval rozdělíme na několik podintervalů a v každém z nich aproximujeme skutečný průběh funkce $W(x)$ nějakým polynomem pokud možno nízkého stupně. Koeficienty těchto polynomů stanovíme tak, aby byla zachována potřebná spojitost a popř. i hladkost náhradní funkce a aby funkcionál F byl minimální. Hodnotu tohoto funkcionálu počítáme jako součet integrálů na jednotlivých podintervalech, tj. jako součet příspěvků z jednotlivých konečných prvků.

Kdybychom zvolili v našem případě po částech lineární náhradu, vyšly by první derivace nespojitě a druhé derivace nulové až na body nespojitosti, kde by druhé derivace nebyla definována. Pokud bychom ji definovali tak, že bychom přímé úseky náhradní funkce spojili kruhovými obloučky, jejichž poloměr by v limitě klesal bez omezení k nule, rostla by druhé derivace do nekonečna (obr. 4). Při přechodu přes tyto zlomy by pak vznikala neurčitý příspěvek k integrálu F podle (3.6); jinými

^{*}/ Snadno srozumitelný úvod k variačním metodám najde čtenář v knize ELSGOLC, L. E.: Variační počet. Praha, SNTL 1965. Podrobný výklad viz REKTORYS, K.: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. Praha, SNTL 1974.



Obr. 4

slovy, součet integrálů nad jednotlivými prvky by nedával totéž co stejný integrál nad celým nosníkem. Proto by užití lineární aproximace vedlo k hrubé chybě. Náhradní funkce popisující průhyb musí být tedy nejen spojitá, ale i hladká, tj. spojitá i v první derivaci. Musíme tedy použít jako "náhradové funkce" polynom třetího stupně.

Jestliže však danou diferenciální rovnici (3.4) čtvrtého řádu rozepíšeme na ekvivalentní soustavu dvou rovnic druhého řádu

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= y, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= 1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

dostaneme funkcionál závislý na dvou funkcích $w(x)$, $y(x)$ ve tvaru

$$F^* = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 + y' w' + w \right) dx. \quad (3.13)$$

Změníme-li funkci y o δy , w o δw , snadno vypočteme, že

$$\delta F^* = \int_0^1 (y \delta y + y' \delta w' + w' \delta y' + \delta w) dx. \quad (3.14)$$

Integrací per partes odtud vyjde variace

$$\delta F^* = \int_0^1 [(y - w'') \delta y - (y'' - 1) \delta w] dx. \quad (3.15)$$

Má-li tato hodnota vymizet pro libovolné funkce δy , δw , musí být $y - w'' = 0$, $y'' - 1 = 0$. To jsou však právě rovnice (3.12). Píšeme tedy podmínku $\delta F^* = 0$ pro stacionární hodnotu funkcionálu (3.13), v němž je nejvyšší první derivace, takže náhrada pro funkce $y(x)$, $w(x)$ může být po částech lineární a nemusí být hladká. Stačí, je-li spojitá.

Tato výhoda je vyvážena jinou nevýhodou, že totiž určujeme dvě neznámé funkce, kdežto dříve jsme měli jen jednu. Ale to není tak nepříjemné. Funkce $y(x)$ má význam ohybového momentu, jehož průběh beztak potřebujeme znát pro dimenzování nosníku.

Na tomto příkladu jsme ukázali, že zdánlivě složitější formulace úlohy pomocí dvou rovnic (3.12) místo jedné rovnice (3.4) může vést k jednoduššímu řešení. Jiný takový příklad ukážeme detailněji v další kapitole. ^{*}/

4. METODA DYNAMICKÉ RELAXACE

Budeme nyní hledat statický průhyb nosníku zcela neobvyklým způsobem. Začneme s jinou úlohou, totiž s tlumeným kmitáním nosníku. Tato druhá úloha je zdánlivě mnohem složitější. Ukáže se však, že algoritmus k jejímu řešení není tak složitý a že dovoluje řešit stejně snadno i některé nelineární úlohy (nosník jednostranně opřený o nelineárně pružný podklad). Statický průhyb dostaneme jako ustálený tvar výkmitové čáry, když se přechodové kmitání utlumí. Numerický výpočet se uskutečňuje diferenční metodou. Obdobně lze řešit i průhyb desek. ^{**}/

Průhyb spojitě zatíženého pružného nosníku je popsán soustavou rovnic

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x), \quad (4.1)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E(x)J(x)}. \quad (4.2)$$

Rovnice (4.1) vyplývá z podmínky rovnováhy uvolněného elementu nosníku o délce dx , rovnice (4.2) vyjadřují kompatibilitu deformací užitím Bernoulliho-Navierovy hypotézy. Podle ní zůstávají průřezy při ohybu rovinné a střednice jimi prochází vždy kolmo.

^{*}/ Metodou konečných prvků jsme se podrobně zabývali na semináři v Domě techniky ČSVTS v Praze roku 1976.

^{**}/ Viz RUSHTON, K. R.: Dynamic relaxation solutions of elastic plate problems - "Journal of Strain Analysis" sv. 3 (1968), s. 23, nebo od téhož autora: Large deflections of plates with unsupported edges. Tamtéž sv. 7 (1972), s. 44.

Rovnici (4.1) doplníme o setrvačnou a tlumicí sílu. Dostaneme tak pohybovou rovnici

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q(x) + c \frac{\partial W}{\partial t} + \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (4.3)$$

Zde c značí součinitel útlumu, ρ hustotu a S průřez. Kdyby byl nosník prizmatický, byla by ohybová tuhost EJ konstantní, nezávislá na x . Pak podle (4.2) a (4.3)

$$EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = q - c \frac{\partial W}{\partial t} - \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (4.4)$$

Předpokládejme, že nosník je prostě podepřený. Při jeho volném kmitání bude $q = 0$ a první vlastní tvar kmitu bude možno popsat rovnicí ^{*}/

$$W(x, t) = a \sin \frac{\pi x}{l} \cdot e^{i\omega t}. \quad (4.5)$$

Exponenciální funkce představuje harmonické kmitání s kruhovou frekvencí ω . Je totiž

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (4.6)$$

a lze si představit, že fyzikální význam má jenom reálná část v rovnici (4.5). Dosazením (4.5) do (4.4) dostaneme (pro $q = 0$)

$$\left(EJ \frac{\pi^4}{l^4} + ic\omega - \rho S \omega^2 \right) a = 0. \quad (4.7)$$

Kdyby nebylo kmitání tlumené (tj. kdyby $c = 0$), dostali bychom odtud vlastní kruhovou frekvenci

$$\Omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}. \quad (4.8)$$

Pro tlumený pohyb se musí rovnat nule celá oblá závorka, takže bude

^{*}/ V následujících rovnicích značí i imaginární jednotku.

$$\omega^2 - i \frac{c}{\rho S} \omega - \frac{\pi^4 E J}{l^4 \rho S} = 0. \quad (4.9)$$

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme

$$\omega = i \frac{c}{2\rho S} \pm \sqrt{-\frac{c^2}{4\rho^2 S^2} + \frac{\pi^4 E J}{l^4 \rho S}}. \quad (4.10)$$

Na pravé straně bude tedy obecně komplexní číslo, které můžeme zkráceně zapsat jako ^{*}/

$$\omega = \alpha + i\beta. \quad (4.11)$$

Z rovnice (4.5) pak vyjde

$$w(x, t) = a \sin \frac{\pi x}{l} e^{i\alpha t} e^{-\beta t}. \quad (4.12)$$

Součin exponenciálních funkcí představuje tlumený pohyb, neboť

$$e^{i\alpha t} e^{-\beta t} = e^{-\beta t} (\cos \alpha t + i \sin \alpha t). \quad (4.13)$$

Vymizí-li hodnota α , stane se pohyb aperiodický. Na hranici tohoto aperiodického pohybu bude mít tlumení kritickou hodnotu c_{kr} . Při něm bude diskriminant pod odmocninou v rovnici (4.10) nulový, takže

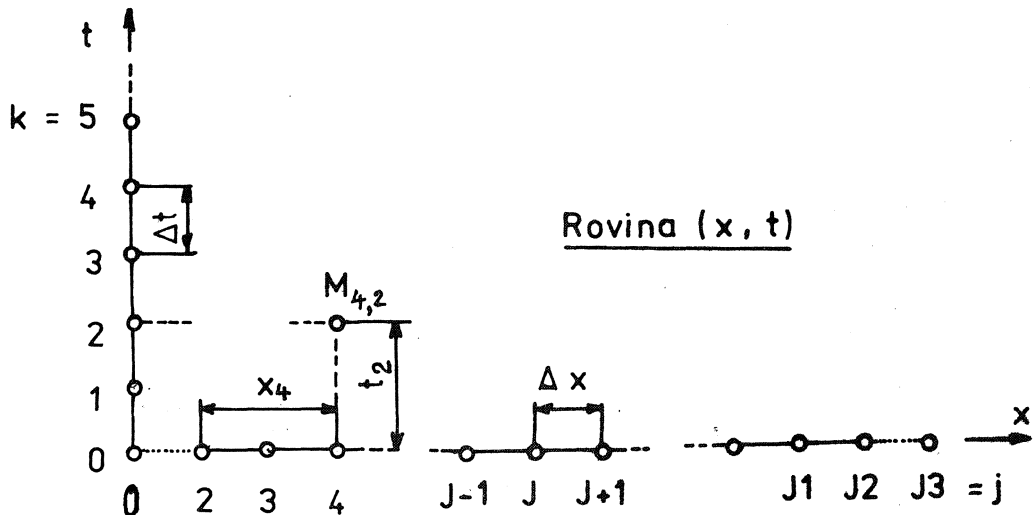
$$c_{kr} = \frac{2\pi^2}{l^2} \sqrt{E J \rho S} = 2\rho S \Omega. \quad (4.14)$$

Je výhodné, zvolíme-li pro náš nosník právě kritické tlumení (nebo nějakou hodnotu nepříliš od něho různou). Nosník se pak pod zatížením $q(x)$ prohne, ale jeho výkmit se rychle ustálí v poloze, která odpovídá statickému průhybu, aniž bude "překmitávat" přes tuto polohu. Považujeme-li pohyb za utlumený, když $\beta t = 3$ (neboť $e^{-3} \approx 0,05 \ll 1$), bude celý výkmit trvat

^{*}/ Ve skutečnosti jde o dva takové výrazy, neboť rovnice (4.9) má obecně dva kořeny.

$$T = \frac{3}{\beta} = \frac{6\rho S}{C_{kr}} = \frac{3\ell^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho S}{EJ}} = \frac{3}{\Omega} \quad (4.15)$$

Uvedené tvrzení by bylo zcela správné, kdyby šlo skutečně jen o průhybovou čáru ve tvaru sinusovky $a \sin(\pi x / \ell)$ podle předpokladu (4.5). Ve skutečnosti bude mít průhyb obecnější tvar a při kmitání se uplatní i vyšší harmonické složky. Protože jde nakonec o statickou úlohu, bude mít první harmonická složka dominantní význam a závěry, ke kterým jsme došli, budou i tehdy přibližně platit.



Obr. 5

Nyní přikročíme k numerickému řešení dané úlohy. Derivace nahradíme přibližně centrálními diferencemi. Vzdálenost x rozdělíme na stejné díly Δx , kdežto čas budeme měřit po intervalech Δt (obr. 5). Protože proměnné veličiny závisí jednak na x , jednak na t , připojíme ke každé veličině dva indexy. První bude značit číslo uzlu na ose x , druhý na ose t . Takže např. $M_{4,2}$ bude znamenat ohybový moment v místě $x = x_4$ a v čase $t = t_2$ (obr. 5). Obecně tyto indexy označíme j, k . Jejich hodnoty určují uzlový bod sítě v rovině x, t . Pak budou platit tyto vztahy ^{*}/

^{*}/ Odvodíme je snadno z Taylorovy řady. Viz např. PRAGEROVÁ, A.: Diferenční rovnice. Praha, SNTL 1971, popř. REKTORYS, K.: Přehled užití matematiky. Praha, SNTL 1968. Výraz $O(\Delta x^2)$ píšeme místo přesnějšího $O((\Delta x)^2)$. Je to rychlost konvergence při limitním přechodu $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)_{j,k} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (M_{j-1,k} - 2M_{j,k} + M_{j+1,k}) + O(\Delta x^2), \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)_{j,k} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{j,k} = \frac{1}{2\Delta t} (v_{j,k+1} - v_{j,k-1}) + O(\Delta t^2). \quad (4.17)$$

V nich jsme zavedli rychlost $v = \partial W / \partial t$ jako novou proměnnou. Pro ni bude platit vztah

$$v_{j,k} = \frac{1}{2\Delta t} (W_{j,k+1} - W_{j,k-1}) + O(\Delta t^2). \quad (4.18)$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnic (4.2) a (4.3). Vyjde

$$W_{j-1,k} - 2W_{j,k} + W_{j+1,k} = -\frac{M_{j,k}}{E_j J_j} \Delta x^2, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} M_{j-1,k} - 2M_{j,k} + M_{j+1,k} &= -Q_j \cdot \Delta x^2 + C v_{j,k} \cdot \Delta x^2 + \\ &+ \rho S (v_{j,k+1} - v_{j,k-1}) \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Nadále budeme předpokládat, že modul pružnosti se nemění, takže $E_j = E = \text{konst.}$ Poslední tři rovnice ještě nepatrně upravíme. Z rovnice (4.18) vypočteme

$$W_{j,k+1} = W_{j,k-1} + 2\Delta t v_{j,k}. \quad (4.21)$$

Index k v rovnici (4.19) zvětšíme o jednotku a vypočteme

$$M_{j,k+1} = -\frac{E J_j}{\Delta x^2} (v_{j-1,k} - 2W_{j,k} + W_{j+1,k}). \quad (4.22)$$

Konečně v rovnici (4.20) nahradíme výraz $v_{j,k}$ aritmetickým průměrem sousedních hodnot (abychom mohli poslední dva členy sloučit), tedy

$$v_{j,k} = \frac{1}{2} (v_{j,k+1} + v_{j,k-1}). \quad (4.23)$$

Pak zmenšíme index k o jednotku a vypočteme

$$v_{j,k} = \frac{1}{1 + \frac{c \Delta t}{\rho S}} \left[\left(1 - \frac{c \Delta t}{\rho S}\right) v_{j,k-2} + \frac{2 \Delta t}{\rho S \Delta x^2} (M_{j-1,k-1} - 2M_{j,k-1} + M_{j+1,k-1}) + \frac{2 \Delta t}{\rho S} q_j \right] \quad (4.24)$$

Postup výpočtu je nyní takový

- (1) pro okamžik $t = (k-1)\Delta t$ vypočteme z rovnice (4.24) rychlost $v_{j,k}$ v příštím okamžiku $t = k\Delta t$;
- (2) tuto rychlost dosadíme do rovnice (4.21) a vypočteme průhyb v okamžiku $t = (k+1)\Delta t$;
- (3) podle (4.22) vypočteme ohybový moment v témže okamžiku.
- (4) Zvětšíme k o jednotku a znovu počítáme od bodu (1).

Okrajové podmínky se vsunou mezi body (2) a (3) resp. (3) a (4).

Nyní ještě několik poznámek k praktickému výpočtu. Za tlumení zvolíme hodnotu podle (4.14) bez ohledu na to, zda je nosník skutečně prostě podepřen nebo jinak uložen. Protože nejde o dynamickou, ale o statickou úlohu, můžeme hmotnost nosníku volit libovolně, např. $\rho(x) S(x) = \text{konst} = 1 \text{ kg m}^{-1}$. Pak bude číselně $c_{kr} = 2\Omega = 2\pi^2 \sqrt{EJ_1} / \ell$. Za plošný moment setrvačnosti dosadíme nějakou odhadnutou reprezentativní hodnotu J_1 (je-li moment setrvačnosti průřezu $J(x)$ proměnlivý, jinak samozřejmě dosadíme jeho skutečnou hodnotu).

Protože metoda centrálních diferencí je jen podmíněně stabilní, musíme volit časový krok dostatečně malý; zpravidla postačí zvolit ^{*}/

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \Delta x^2 \sqrt{\frac{\rho S}{EJ_1}} = \frac{\pi^2 \Delta x^2}{2\ell^2 \Omega} \quad (4.25)$$

Je-li $\rho S = 1$, je číselně

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \Delta x^2 / \sqrt{EJ_1} \quad (\rho S = 1). \quad (4.26)$$

^{*}/ CRANDALL, S. H.: Numerical treatment of a fourth order parabolic partial differential equation. - "Journ. Assoc. Comp. Mach." sv. 1 (1954), s. 111-118. - Nerovnost (4.25) by platila přesně pro prizmatický nosník ($EJ(x) = EJ_1 = \text{konst}$).

Potřebný počet iterací N je pak podle (4.15) a (4.25)

$$N = \frac{T}{\Delta t} = \frac{6l^2}{\pi^2 \Delta x^2} \quad (4.27)$$

Protože nosník nebude obecně ani prizmatický, ani prostě podepřený, jsou tyto hodnoty jenom informativní. Zjistíme-li, že řešení diverguje, zmenšíme Δt a řešíme znovu. Podobně se může stát, že ani po N časových krocích nebude řešení ustálené. Potřebný limitní počet kroků pak najdeme touto úvahou: vyhledáme počet N_1 iterací, jichž bylo třeba k dosažení prvního extrému rychlosti v (např. pro $j = 5$; za tím účelem si dáme vždy po 40 krocích vytisknout mezivýsledky). Tomu odpovídá největší kinetická energie, tedy zhruba čtvrtina prvního kmitu. Odhadneme-li, že k ustálení je třeba asi dvou tlumených kmitů, bude $N \cong 8N_1$.

Připojujeme program v jazyku BASIC, upravený pro výpočet nosníku volně uloženého na pružném podkladu. Uložení je jednostranné, takže reakce z podkladu se přenáší jen tehdy, je-li průhyb kladný

$$\begin{aligned} q_R &= -kW & \text{pro } w > 0, \\ q_R &= 0 & \text{pro } w \leq 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Později ukážeme, jak lze program zobecnit i na jiné případy.

VSTUPNÍ VELIČINY

DELTA X = D1, MODUL PRUŽNOSTI V TAHU-TLAKU = E, MOMENT SETRVAČNOSTI PRŮŘEZU = I(J), REFERENČNÍ HODNOTA MOMENTU SETRVAČNOSTI = I1, PRŮHYB = W(J), RYCHLOST = V(J), OHYBOVÝ MOMENT = M(J), ZATÍŽENÍ = Q(J), MODUL PODKLADU = K, SOUČINITEL ÚTLUMU = C, POČET ITERACÍ = M 2

```
ØØ1Ø FOR Y1 = 1 TO J3
```

```
ØØ2Ø W(Y1) = Ø
```

```
ØØ3Ø M(Y1) = Ø
```

```
ØØ4Ø V(Y1) = Ø
```

```
ØØ5Ø NEXT Y1
```

```
Ø1ØØ REM VYPOCET KONSTANT
```

```
Ø11Ø D2 = D1 * D1
```

```
Ø12Ø T1 = Ø.25 * D2 / (SQR (E * I1))
```

```
Ø13Ø D3 = 2 * T1 / D2
```

```

Ø14Ø D4 = 1/D2
Ø15Ø D5 = E * D4
Ø16Ø K1 = 1/ (1 + C * T1)
Ø17Ø B1 = 1 - C * T1
Ø18Ø I7 = Ø
Ø20Ø REM HLAVNI ITERACNI SMYCKA
Ø21Ø FOR M1 = 1 TO M2
Ø22Ø FOR J = 2 TO J2
Ø23Ø REM POHYBOVA ROVNICE
Ø24Ø Z = D3 * (M(J - 1) - 2 * M(J) + M(J + 1)) + 2 * T1 * Q(J)
Ø25Ø IF W(J) < Ø THEN Ø27Ø
Ø26Ø Z = Z - 2 * T1 * K * W(J)
Ø27Ø V(J) = K1 * (B1 * V(J) + Z)
Ø28Ø NEXT J
Ø30Ø FOR J = 2 TO J2
Ø31Ø W(J) = W(J) + 2 * T1 * V(J)
Ø32Ø NEXT J
Ø40Ø REM OKRAJOVE PODMINKY NULOVI MOMENT
Ø41Ø W(1) = 2 * W(2) - W(3)
Ø42Ø W(J3) = 2 * W(J2) - W(J1)
Ø50Ø REM VYPOCET MOMENTU
Ø51Ø FOR J = 2 TO J2
Ø52Ø M(J) = - D5 * I(J) * W (J + 1) - 2 * W(J) + W (J - 1)
Ø53Ø NEXT J
Ø54Ø REM OKRAJOVE PODMINKY NULOVA POSOUVAJICI SILA
Ø55Ø M(1) = M(3)
Ø56Ø M(J3) = M(J1)
Ø60Ø REM KONVERGENCE TISKNE PO 40 ITERACICH
Ø61Ø I7 = I7 + 1
Ø62Ø IF I7 < 4Ø THEN Ø7ØØ
Ø63Ø PRINT M1, W(5), V(5), M(5)
Ø64Ø I7 = Ø
Ø70Ø NEXT M1

```



```

Ø80Ø PRINT "PRUHYB MOMENT ZATIZENI RYCHLOST"
Ø81Ø FOR J1 = 1 TO J3
Ø82Ø PRINT W(J1), M(J1), Q(J1), V(J1)
Ø83Ø NEXT J1
Ø84Ø END

```

Poznámky k programu

Aby se spolehlivě předešlo divergenci, je volen poloviční časový krok vzhledem k mezímí hodnotě (4.26). V programu je označen T_1 a počítá se v řádku Ø12Ø. Kdyby řešení přesto divergovalo, což se může stát při nevhodném odhadu referenční hodnoty plošného momentu setrvačnosti I_1 , zaměníme v tomto řádku součinitel Ø.25 za menší. Kdyby byla naopak konvergence pomalá, můžeme jej zvětšit. V řádku Ø25Ø se program větví v souladu s podmínkou (4.28). Kdyby reakce podkladu byla popsána nelineární funkcí ($F(W(J))$), která by musila být v programu definována, nahradili bychom řádek Ø26Ø jiným $Z = Z - 2 * T_1 * F(W(J))$. Okrajové podmínky vyjadřují, že na volném konci nosníku jsou ohybový moment i posouvající síla nulové. Kdyby byl nosník uložen jinak, bylo by nutné podmínky upravit. Např. pro kloubově uložený nosník by se vynechaly řádky Ø55Ø a Ø56Ø a místo nich by se zařadily řádky

$$Ø4Ø3 \quad W(2) = 0$$

$$Ø4Ø6 \quad W(J2) = 0$$

Kdybychom chtěli popsanou metodou řešit dynamickou, nikoli statickou úlohu, tedy přechodový stav kmitání vynucený náhlým přiložením zatížení $Q(J)$, musili bychom zvolit skutečné tlumení, nikoli kritické, a do výpočtu bychom musili dosadit skutečné hodnoty $Q \dot{S}(x)$.

Nyní ještě odpovíme na otázku, zda a proč je metoda dynamické relaxace výhodnější než přímé řešení statické úlohy diferenční metodou. Především proto, že jde o iterační metodu, která rychle konverguje a dovoluje bez velkých nesnází zahrnout do výpočtu nelineární vratné síly. Zadání vstupních dat je přitom velmi jednoduché i u neprizmatického nosníku. Nároky na operační paměť počítače jsou velmi malé.

5. SBĚR A ZPRACOVÁNÍ ČASOVĚ PROMĚNNÝCH EXPERIMENTÁLNÍCH DAT

Číslicového počítače lze použít k "vzorkování" spojitě proměnných funkcí času, které získáváme z různých experimentálních zařízení nejčastěji v podobě elektrických veličin. Zpravidla bývá takovou veličinou napětí. Tím odpadá pracné a zdoluhavé zapisování mezivýsledků před jejich dalším výpočtovým zpracováním.

Mění-li se nějaká veličina v čase spojitě, nazýváme ji analogovou (neboť s takovými veličinami pracujeme na analogových počítačích). Odečítáme-li hodnotu analogové veličiny v určitých ekvidistantních okamžicích, získáváme její "vzorek". Označíme-li analogovou veličinu $x(t)$, je její vzorek $x_i = x(t_i)$; $t_i = i\Delta t$; $i = 0, 1, 2, \dots$. Vyjádříme-li prvky tohoto souboru (přibližně) číslicovými údaji, mluvíme o analogo-číslíkové přeměně (převodu). Vzhledem k velké operační rychlosti počítače může být vzorkování analogové funkce velmi "husté", tzn. můžeme volit velmi malý časový krok, ba dokonce můžeme odečítat v rychlém časovém sledu údaje z mnoha čidel či snímačů (resp. z mnoha výstupních kanálů příslušných měničů) za sebou a získat tak po jejich zpracování přehled o všech sledovaných veličinách zároveň. Je-li např. operační rychlost našeho zařízení půl miliónu bitů za sekundu (bit = binary digit = jednotka ve dvojkové soustavě), můžeme snímat asi 300 signálů prakticky najednou s vzorkovací frekvencí 100 za sekundu, přičemž pro jeden údaj bude vyhrazeno 15 bitů. Je totiž

$$300 \times 100 \times 15 = 450\,000 \text{ bitů za sekundu.}$$

K analogo-číslíkové přeměně (analog-to-digital conversion, zkratka ADC) lze užít buď přímo reciproké dvojkové soustavy nebo binárních kódů pro čísla v desítkové soustavě (binary coded decimal, zkratka BCD).

Uvedeme příklad patnáctibitové soustavy ADC. Analogový signál se převede na číslo a z intervalu $-1 < a < +1$, přičemž první binární znak α_0 rozhoduje o znaménku, zbývajících čtrnáct znaků $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{14}$ o velikosti čísla podle vzorce

$$a = (-1)^{\alpha_0} \sum_{i=1}^{14} \frac{\alpha_i}{2^i} \quad (5.1)$$

Příklady

<u>Binární číslo</u>	<u>Značí</u>
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	$2^{-4} \doteq 0,5$
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1	$2^{-14} \doteq 6,1035 \cdot 10^{-5}$
1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- 0,5
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	- 0,99993896

Poslední číslo je součtem geometrické řady

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{14}} \right) = - \left(1 - 2^{-14} \right).$$

Při tomto způsobu můžeme dosáhnout přesnosti na 4 až 5 platných cifer.

Číslicové voltmetry mívají 4 bity na jednu číslici v desítkové soustavě a jsou v systému BCD kódovány takto:

<u>Binární kód</u>	<u>Číslice</u>	<u>Binární kód</u>	<u>Číslice</u>
0 0 0 0	0	0 1 0 1	5
0 0 0 1	1	0 1 1 0	6
0 0 1 0	2	0 1 1 1	7
0 0 1 1	3	1 0 0 0	8
0 1 0 0	4	1 0 0 1	9

Před čtyři bity binárního kódu se přidávají podle typu počítače ještě dva nebo čtyři nulové bity, aby se dosáhlo kompatibility s počítačem. Pak např. záznam

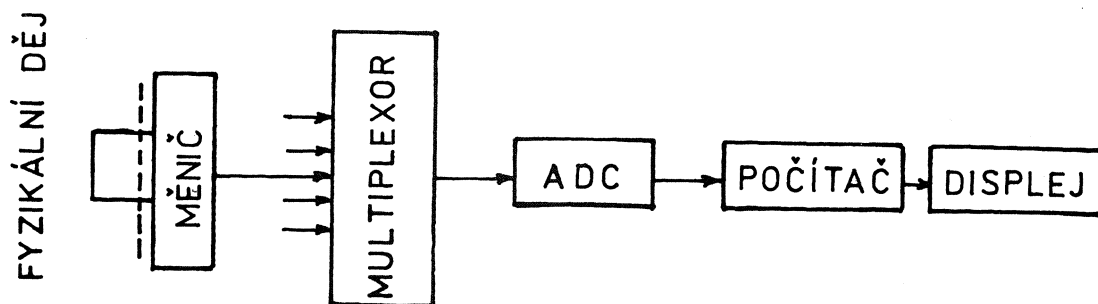
000001 001001 000000 000010 000111 001000

znamená číslo 190278 apod.

Rozdíl mezi oběma způsoby je v tom, že zpracování BCD systému se snadno programuje, avšak binární ADC systém je ekonomičtější, zpracovávají-li se velké soubory dat.

Na obr. 6 je zakresleno uspořádání analyzátoru pro sběr časových dat v reálném čase. Fyzikální veličiny se nejprve přeměňují na

elektrická časově proměnná napětí, snímaná postupně elektronickým přepínačem (multiplexorem). Soubor analogových údajů z multiplexoru se digitalizuje v analogo-číslíkovém převodníku (měniči) a zpracovává dále na počítači.



Obr. 6

Existují však i mnohem důmyslnější soustavy pro snímání a zpracování analogových veličin mimo reálný čas. Např. paralelně snímaná data se přemění v sériové uspořádání, jednotlivé bity se "značkují" dvěma nastavenými frekvencemi elektromagnetických vln (jedna značí binární znak 0 a druhá 1) a po bezdrátovém přenosu z daného stroje (vozidla, letadla, družice) se zaznamenávají na magnetickou pásku. Ve výpočetním středisku se pak záznam dekóduje a zpracovává bez zřetele na probíhající fyzikální proces. K rozlišení jednotlivých "slov" a jejich sekvencí se zařazují kódovací znaky. Jiný způsob se zakládá na tom, že analogové výstupy z měniče se vedou do napěťově řízených oscilátorů a přeměňují na frekvenci úměrnou přiváděnému napětí a to tak, že každému kanálu je přiděleno určité frekvenční pásmo, podle něhož se později po bezdrátovém přenosu sériový záznam opět rozděluje na paralelní a zpracovává obdobně jako při ostatních způsobech. Konečným výstupem je vždy magnetická páska se souborem číslíkových údajů kalibrovaných tak, aby - zpravidla v soustavě pohyblivé desetinné čárky - popisovaly měřenou fyzikální veličinu ve zvolených jednotkách.

Je zřejmé, že popsany způsob je složitý a že výsledek může být zatížen různými chybami. Pomineme-li chyby vzniklé hrubou poruchou některých čidel, snímačů nebo přístrojů, mohou to být zejména tyto chyby:

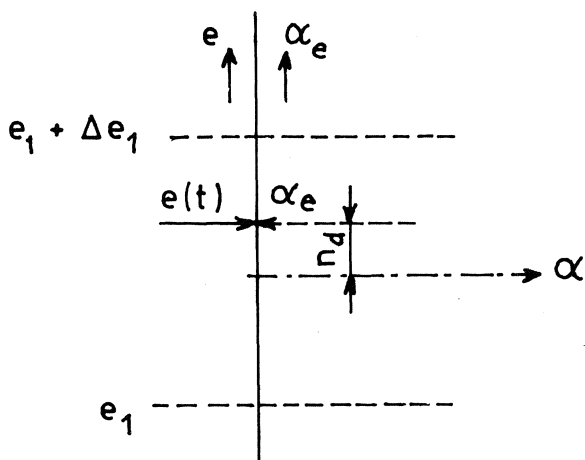
1. Číslíkový šum

Měřená veličina se mění spojitě, kdežto binární číslo na výstupu analogo-číslíkového převodníku se mění po skocích. Je-li napětí analogového signálu $e = e(t)$, přiřadí mu převodník číslo α takové, že hodnota α bude společná pro celý interval $e_1 < \alpha < e_1 + \Delta e$.

Přesná hodnota by měla být

$$\alpha_e = R(e - e_0), \quad (5.2)$$

kde e_0 je prahová hodnota (korekce nuly),
 R převodní činitel.



Obr. 7

Na displeji nebo ve výpisu
z tiskárny však přečteme

$$\alpha = \alpha_e - n_d, \quad (5.3)$$

kde n_d je chyba diskretizace
(obr. 7). Tato chyba bude zhruba
rovnoměrně rozdělená a bude
představovat v zaznamenaném sou-
boru náhodný šum. Je to obdoba
zaokrouhlovací chyby.

2. Štěrbinová chyba

Přeměna elektrického napětí $e(t)$ na číslicový údaj $\alpha = x_i$ ne-
probíhá okamžitě, ale v určitém, byť nepatrném časovém intervalu -
"oknu". Není-li toto okno úzké vzhledem k vzorkovacímu intervalu,
vzniká chyba. Obdobnou chybu způsobuje pohyb štěrbinové uzávěrky při
fotografování rychlých dějů.

3. Třes

Není-li interval Δt mezi jednotlivými daty x_i konstantní,
ale mění se nahodile v určitém rozmezí, vzniká chyba zejména při posu-
zování fáze a spektrální výkonové hustoty při vysokých frekvencích.
Chybu lze porovnat s třesením filmového obrazu při nerovnoměrném pohybu
filmu v promítací kameře.

4. Nonlinearity

Vznikají buď chybným seřazením nebo přehlacením některého zesilova-
če, převodníku apod., avšak také úplným nebo chvilkovým selháním někte-
rého prvku [vynecháním některých bitů, nulovou hysterezí ADC (při pře-
chodu přes nulu se mění prahová hodnota e_0 v rovnici (5.2)) atd.].

Avšak i při bezchybném sběru a vzorkování časových dat nemusí být výsledek reprezentativní pro daný fyzikální děj. Je-li do procesu zpracování dat zařazena integrace, může se stát, že výsledná posloupnost je zatížena lineárním nebo pomalu se měnícím parazitním časovým průběhem, jako by k dané funkci $x(t)$ byla superponována nějaká "cizí" funkce $\varphi(t)$ popsaná polynomem nízkého stupně

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.4)$$

Místo správných údajů x_i pak máme soubor

$$\xi_i = x_i + \sum_{k=0}^n a_k (i \Delta t)^k \quad 5.5$$

Tato chyba bývá způsobena nesprávnou kalibrací nuly (lineární trend) nebo zesílením nízkofrekvenčního šumu (proměnlivý trend). Chybu lze přibližně odstranit tak, že na záznamu určité délky $i = 0, 1, 2, \dots, m$ odhadneme hodnoty $\varphi_i = \varphi(t_i)$ a pak odečteme. K tomu použijeme jako kritéria metodu nejmenších čtverců. Půjde o to, aby součet čtverců odchylek $\xi_i - \varphi(t_i)$ byl minimální. Označíme-li

$$S = \sum_{i=0}^m [\xi_i - \sum_{k=0}^n a_k (i \Delta t)^k]^2, \quad (5.6)$$

budeme požadovat, aby

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0 \quad \text{pro } i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.7)$$

$$m > n.$$

Zvolíme-li m sudé, můžeme číslování formálním posunutím změnit tak, aby

$$i = -\frac{m}{2}, -\frac{m}{2} + 1, \dots, 0, \dots, \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2}$$

Např. pro $m = 40$ bude $i = -20, -19, -18, \dots, -1, 0, 1, \dots, 18, 19, 20$. Pak odpadnou součty lichých mocnin i a výrazy pro součinitele a_i se zjednoduší.

Pro lineární polynom (5.4) např. dostaneme

$$a_0 = \frac{\sum \xi_i}{N}, \quad a_1 = \frac{\sum i \xi_i}{\sum i^2 \Delta t}, \quad (5.8)$$

kde

$$\sum i^2 = \sum_{i=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} i^2 = \frac{N(N^2-1)}{12}, \quad N = m+1.$$

Podobně pro $n = 2$ (kvadratický polynom) vyjde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum i^2 \sum i^2 \xi_i}{(\sum i^2)^2 - N \sum i^4}, & a_1 &= \frac{\sum i \xi_i}{\sum i^2 \Delta t}, \\ a_2 &= \frac{\sum i^2 \sum \xi_i - N \sum i^2 \xi_i}{[(\sum i^2)^2 - N \sum i^4] (\Delta t)^2}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

kde

$$\sum i^4 = \frac{N(N^2-1)(2N^2-7)}{240}$$

Konečně pro $n = 3$ (kubický polynom) máme součinitele

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum \xi_i \sum i^4 - \sum i^2 \sum i^2 \xi_i}{N \sum i^4 - (\sum i^2)^2}, \\ a_1 &= \frac{\sum i^4 \sum i^3 \xi_i - \sum i^2 \sum i \xi_i}{[(\sum i^4)^2 - \sum i^2 \sum i^6] \Delta t}, \\ a_2 &= \frac{\sum i^2 \sum \xi_i - N \sum i^2 \xi_i}{[(\sum i^2)^2 - N \sum i^4] (\Delta t)^2}, \\ a_3 &= \frac{\sum i^4 \sum i \xi_i - \sum i^2 \sum i^3 \xi_i}{[(\sum i^4)^2 - \sum i^2 \sum i^6] (\Delta t)^3}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

kde

$$\sum i^6 = \frac{N(N^2-1)(3N^4-18N^2+31)}{1344}.$$

Poznamenejme ještě, že záznam časových dějů musí být dostatečně dlouhý nejen proto, abychom mohli posoudit stacionárnost děje, ale také proto, abychom mohli spolehlivě uskutečnit např. harmonickou (frekvenční) analýzu. Není-li vzorkovací frekvence dostatečně vysoká vzhledem k nejvyšší pozorované frekvenci, může vzniknout stroboskopický efekt. Je-li nejvyšší pozorovaná frekvence f_{\max} , měl by být časový krok vzorkování

$$\Delta t \leq 2/(5f_{\max}). \quad (5.11)$$

Stroboskopický efekt vysvětlíme na příkladu. Chceme vzorkovat sinusovou funkci

$$x = \sin 2\pi f t. \quad (5.12)$$

Bude-li $t = k \Delta t$ ($k = 0, 1, \dots$) a zvolíme-li frekvenci

$$f = f_N(n+p), \quad (5.13)$$

kde n je celé číslo, $f_N = 1/2\Delta t$ je tzv. Nyquistova mezní frekvence^{*} a $0 \leq p < 1$, pak

$$\begin{aligned} x_k &= x(k\Delta t) = \sin 2\pi f k \Delta t = \sin 2\pi k \Delta t \frac{n+p}{2\Delta t} = \\ &= \sin [\pi k (n+p)] = \sin \pi k n \cos \pi k p + \\ &+ \cos \pi k n \sin \pi k p = \cos \pi k n \sin \pi k p, \end{aligned} \quad (5.14)$$

neboť $\sin \pi k n = 0$. Označíme-li

$$f^* = \frac{p}{2\Delta t} = p f_N \quad (5.15)$$

a dosadíme do (5.14), dostaneme

^{*}/ Nyquistova frekvence je mezní v tom smyslu, že potřebujeme více než dva body na jednu periodu ovzorkované harmonické vlny, abychom byli schopni posoudit její frekvenci.

(a) pro sudé n

$$x_k = \sin 2\pi f^* t_k, \quad (5.16)$$

kde $t_k = k\Delta t$;

(b) pro liché n

$$\begin{aligned} x_k &= \cos \pi k \sin \pi k p = \sin (\pi k - \pi k p) = \\ &= \sin [2\pi (f_N - f^*) t_k], \end{aligned} \quad (5.17)$$

kde $f_N = 1/2\Delta t$ je Nyquistova frekvence.

Je-li tedy $f > f_N$, vypočteme podíl f/f_N a stanovíme n, p . Je-li n sudé, je zdánlivá frekvence $f^* = p f_N$ podle (5.15) a (5.16); je-li n liché, je zdánlivá frekvence $(1-p)f_N$ podle (5.17).

Stroboskopický efekt můžeme pozorovat na filmovém záznamu pohybu ozubených kol. Skutečná frekvence je zde dána součinem počtu zubů a počtu otáček za sekundu. Snímá-li filmová kamera 32 obrázků za sekundu, je Nyquistova frekvence $f_N = 16 \text{ s}^{-1}$. Kdybychom filmovali pohyb pastorku se 16 zuby, pak každá rychlost rotačního pohybu větší než 1 otáčka za sekundu by způsobovala stroboskopické zkreslení. Na filmovém plátně bychom získali dojem, že kolo se otáčí s nějakou frekvencí f^* , pro niž by platilo, že $0 \leq f^* < 16$. Na plátně bychom tedy pozorovali pohyb se zdánlivou úhlovou rychlostí ω^* ($0 \leq \omega^* < 2\pi$). Skutečnou úhlovou rychlost ω bychom z filmového záznamu nemohli posoudit.

Příklad

Položme si otázku, jaká by byla posloupnost x_i , kterou bychom získali vzorkováním harmonické funkce s Nyquistovou frekvencí $f = f_N$?

Zřejmě by platilo, že

$$x = A \sin (2\pi f_N t + \varphi),$$

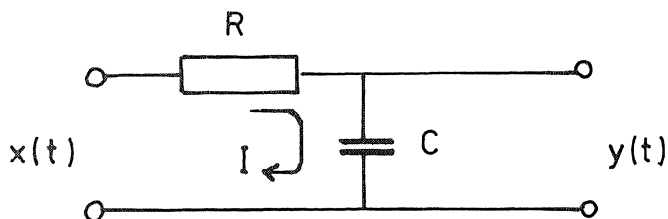
je-li φ nějaký fázový úhel nezávislý na čase. Pak

$$\begin{aligned} x_i &= x(t = i\Delta t) = A \sin \left(2\pi \frac{1}{2\Delta t} i\Delta t + \varphi \right) = \\ &= A \sin (\pi i + \varphi) = A (-1)^i \sin \varphi. \end{aligned}$$

Dostali bychom tedy alternující posloupnost hodnot $-a, +a, -a, +a, -a, \dots$, kde $a = A \sin \varphi$. Tedy $0 \leq |a| \leq A$. Pro $\varphi = 0$ bychom měli jen řadu nul.

6. ČÍSLICOVÝ RC FILTR A SIGNALIZACE CHYB

S číslicovou digitální filtrací jsme se již setkali při řešení obrácené úlohy o nosníku v první kapitole. Tam jsme viděli, že filtrací lze zachránit podstatnou část informací ze vstupních dat zatížených náhodnými chybami, které by bez použití filtrace úplně znehodnotily další výpočet. Je však třeba připomenout, že filtrace přináší i riziko vyloučení užitečné části informací, takže úspěch je do značné míry závislý na zkušenosti a intuici řešitele.



Obr. 8

Filtr je nějaké zařízení nebo fyzikální proces, který působí na časově proměnnou veličinu a zcela určitým způsobem její průběh mění. Máme-li např. na vstupu RC-obvodu na obr. 8 napětí $x(t)$, dostaneme na výstupu napětí $y(t)$ o jiném časovém průběhu, tedy s jinou "historií".

Vestavěný odpor R tvoří spolu s kondenzátorem C elektrický filtr. Jeho činnost je popsána známými zákony

$$RI = x(t) - y(t), \quad (6.1)$$

$$C \frac{dy}{dt} = I \quad (6.2)$$

Rovnice (6.1) představuje Ohmův zákon. Spád napětí na ohmickém odporu R je dán rozdílem napětí na vstupu $x(t)$ a na výstupu $y(t)$ a je úměrný procházejícímu proudu I . Rovnice (6.2) vyjadřuje poznatek, že proud přicházející ke kondenzátoru je úměrný jeho kapacitě a časové změně (derivaci) napětí na jeho elektrodách (deskách, polepech). Dosažením (6.2) do (6.1) dostaneme diferenciální rovnici prvního řádu

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t) \quad (6.3)$$

Je-li na vstupu střídavý proud popsáný reálnou částí komplexní funkce

$$x = X e^{i2\pi ft}, \quad (6.4)$$

bude mít funkce $y(t)$ tvar

$$y = Y e^{i2\pi ft} \quad (6.5)$$

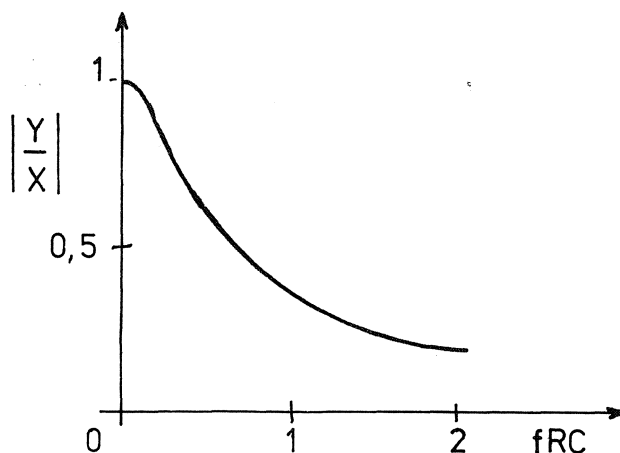
když

$$Y = \frac{X}{1 + i2\pi fRC} \quad (6.6)$$

O tom se snadno přesvědčíme dosazením z rovnic (6.4) a (6.5) do (6.3). Poměr amplitud na výstupu $|Y|$ a na vstupu $|X|$ bude

$$\frac{|y|}{|x|} = \left| \frac{Y}{X} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2}} \quad (6.7)$$

Na výstupu bude tím menší napětí, čím větší bude frekvence f napětí na vstupu (obr. 9). Filtr na obr. 8 je tedy dolní propust.



Obr. 9

Rovnice (6.3) dává návod, jak sestrojít obdobný filtr, který by působil na nějakou posloupnost číselných dat $x_i = x(i\Delta t)$ a měnil ji v posloupnost y_i . Diferenční přepis rovnice (6.3) užitím vzorce (4.17) dá

$$\frac{RC}{2\Delta t} (y_{k+1} - y_{k-1}) + y_k = x_k \quad (6.8)$$

Odtud

$$y_{k+1} = y_{k-1} - \frac{2\Delta t}{RC} (y_k - x_k). \quad (6.9)$$

Rekurentní filtry druhého řádu mají obecný tvar

$$y_k = h_1 y_{k-1} + h_2 y_{k-2} + g(x_k). \quad (6.10)$$

Je tedy v našem případě

$$h_1 = -\frac{2\Delta t}{RC}, \quad h_2 = 1, \quad g(x_k) = \frac{2\Delta t}{RC} x_{k-1}.$$

Snadno dokážeme, že filtr (6.9) není stabilní, takže by vedl k neomezeně rostoucím numerickým chybám. Výsledky výpočtu by vůbec neodpovídaly fyzikálnímu filtru složenému z ohmického odporu a z kondenzátoru podle obr. 8.

Vysvětlíme, jak by k tomu došlo. Kdyby počáteční hodnoty y_0 , y_1 byly zatíženy nějakou malou (např. zaokrouhlovací) chybou, přičetlo by se k partikulárnímu řešení rovnice (6.10) ještě obecné řešení homogenního problému

$$y_k - h_1 y_{k-1} - h_2 y_{k-2} = 0, \quad (6.11)$$

závislé na chybách počátečních hodnot. Vyjádříme-li řešení rovnice (6.11) geometrickou řadou

$$y_k = \lambda y_{k-1}, \quad (6.12)$$

dostaneme dosazením do (6.11) charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - h_1 \lambda - h_2 = 0. \quad (6.13)$$

Odtud vypočteme

$$\lambda = \frac{h_1}{2} \pm \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + h_2}. \quad (6.14)$$

Je-li $h_2 \geq -h_1^2/4$, jsou kořeny λ reálné. Nemá-li počáteční chyba narůstat, má-li naopak vymizet, musí být $|\lambda| < 1$. To je podmínka stability. Nebude-li splněna, bude se chyba při každém kroku zvětšovat geometrickou řadou s kvocientem λ .^{*}

^{*}/ Pro $|\lambda| = 1$ by zůstala absolutní hodnota chyby nezměněná.

Na hranicích stability bude $\lambda = 1$ resp. $\lambda = -1$. Z rovnice (6.14) pak bude

$$\left(\pm 1 - \frac{h_1}{2}\right)^2 = \frac{h_1^2}{4} + h_2$$

čili

$$1 = h_2 \pm h_1. \quad (6.15)$$

To je rovnice dvou přímek vymežujících pro oblast stability klín v rovině (h_1, h_2) .

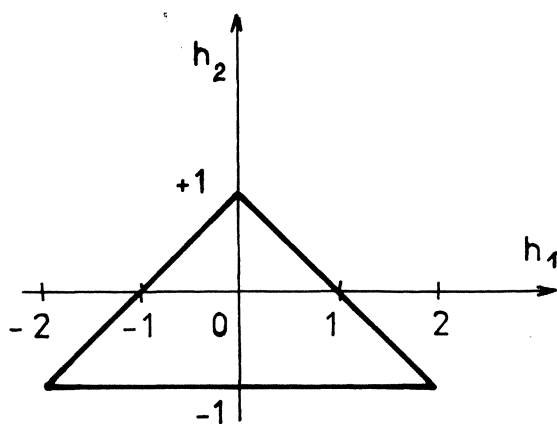
Je-li $h_2 < h_1^2/4$, budou kořeny komplexně sdružené. Jejich modul (absolutní hodnota) bude

$$|\lambda| = \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 + \left[\sqrt{-(h_2 + \frac{h_1^2}{4})}\right]^2 = -h_2 \quad (6.16)$$

a z podmínky $|\lambda| = 1$ vyjde na hranici stability $h_2 = -1$. To je rovnice přímky rovnoběžné s osou h_1 .

Filtr (6.10) bude proto stabilní jen uvnitř trojúhelníku znázorněného na obr. 10. Tuto podmínku filtr (6.9) nesplňuje. Nezbyvá tedy, chceme-li dostat rozumné výsledky, než užít jiného způsobu přepisu diferenciální rovnice (6.3) na diferenční rovnici.

Nejjednodušší vzorec pro stabilní číslicovou RC filtraci dostaneme, když uijeme vzorce



Obr. 10

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (6.17)$$

který sice konverguje pomaleji než vzorec (4.17), ale vede k diferenční rovnici prvního řádu

$$y_k = \left(1 - \frac{\Delta t}{RC}\right) y_{k-1} + \frac{\Delta t}{RC} x_k, \quad (6.18)$$

kteřá má výhodné vlastnosti. Označíme-li zkráceně

$$1 - \frac{\Delta t}{RC} = \alpha, \quad (6.19)$$

bude rekurentní vzorec RC filtru

$$y_k = \alpha y_{k-1} + (1 - \alpha) x_k \quad (6.20)$$

a bude stabilní pro $0 \leq \alpha < 1$.

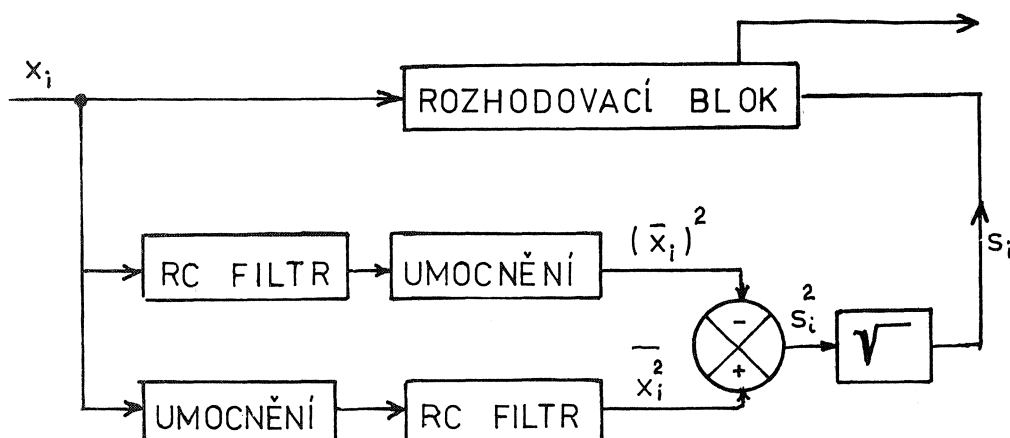
Obdobně bychom mohli sestavit horní propust; platilo by pro ni, že

$$y_k = \beta y_{k-1} + (1 + \beta) x_k, \quad (6.21)$$

když $-1 < \beta \leq 0$.

Je-li $\alpha = 0$ nebo $\beta = 0$, filtr nepracuje (nemění vstupní posloupnost). Kdyby naopak bylo $\alpha \rightarrow 1$ nebo $\beta \rightarrow -1$, byl by výstup prakticky nezávislý na vstupních hodnotách, tj. vstupní hodnoty by byly zcela odfiltrovány a veškerá vstupní informace by byla zmařena.

Dolní propusti můžeme užít k eliminaci chybných dat. Vyskytne-li se ve sledovaném souboru nějaký hrubě chybný údaj ("ulítlá hodnota"), což může vzniknout náhodným selháním některého článku v celém řetězu registrace a zpracování vstupních veličin (např. kazem na magnetické pásce, účinkem cizího indukovaného impulsu atd.), mohl by tento údaj znehodnotit výpočet. Abychom tomu předešli, vkládáme před vlastní výpočet program, podle kterého se posloupnost měřených hodnot x_i sleduje a "hlídá". Děje se to např. podle schématu na obr. 11.



Obr. 11

Vstupní hodnoty se jednak filtrují a pak umocňují, takže vzniká posloupnost čtverců filtrovaných hodnot $(\bar{x}_i)^2$, jednak nejdříve umocňují a pak filtrují, čímž vzniká posloupnost \bar{x}_i^2 . Tyto hodnoty se od sebe odečítají, takže bude

$$\Delta_i^2 = |\bar{x}_i^2 - (\bar{x}_i)^2| \quad (6.22)$$

Po odmocnění se zkoumá, zda příští hodnota na vstupu x_{i+1} je v mezích

$$\bar{x}_i - \xi \Delta_i < x_{i+1} < \bar{x}_i + \xi \Delta_i, \quad (6.23)$$

kde ξ se volí v intervalu 3 až 5, obvykle $\xi = 4$. Je-li podmínka (6.23) splněna, údaj x_{i+1} se propustí beze změny. Není-li tato podmínka splněna, údaj se pozastaví a nahradí novým na základě lineární extrapolace

$$\hat{x}_{i+1} = x_i + (x_i - x_{i-1}) = 2x_i - x_{i-1}. \quad (6.24)$$

Je nutné kontrolovat, zda k této korekci nedochází víckrát za sebou. Mohlo by se totiž stát, že extrapolovaná hodnota by způsobila chybné ocenění následujících dat a tím jejich nesprávné vyloučení z výpočtu a "vykolejení" celého procesu. Jestliže k tomu dojde, musí rozhodovací jednotka hlásit chybu. ^{*}/

Jiný způsob detekce chyb spočívá v tom, že čtyřmi body x_{t-2} , x_{t-1} , x_{t+1} , x_{t+2} v okolí výpočetního bodu x_t proložíme kubickou parabolou. Posuneme-li počátek do výpočetního bodu (tj. zvolíme $t = 0$), bude pro $\Delta t = 1$

$$\begin{aligned} x_{-2} &= a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \\ x_{-1} &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ x_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ x_2 &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \end{aligned} \quad (6.25)$$

^{*}/ Podrobněji viz např. OTNES, R. K. - ENOCHSON, L.: Digital time series analysis. New York, John Wiley 1972.

Řešením vyjdou koeficienty kubické paraboly $x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{6} (-x_{-2} + 4x_{-1} + 4x_1 - x_2), \\ a_1 &= \frac{1}{12} (x_{-2} - 8x_{-1} + 8x_1 - x_2), \\ a_2 &= \frac{1}{6} (x_{-2} - x_{-1} - x_1 + x_2), \\ a_3 &= \frac{1}{12} (-x_{-2} + 2x_{-1} - 2x_1 + x_2). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Odchylka ve výpočetním bodu $t = 0$ je

$$\bar{\delta}_0 = a_0 - x_0 = \frac{1}{6} (-x_{-2} + 4x_{-1} - 6x_0 + 4x_1 - x_2). \quad (6.27)$$

V obecném bodu

$$\delta_t = \frac{1}{6} (-x_{t-2} + 4x_{t-1} - 6x_t + 4x_{t+1} - x_{t+2}). \quad (6.28)$$

Tato rovnice představuje filtr, kterým z posloupnosti x_t dostaneme posloupnost δ_t . Průběh této posloupnosti citlivě indikuje jakoukoli chybu porušující předpokládanou hladkost původního souboru x_t . Kritériem přípustnosti chyb je podmínka

$$|\delta_t| < \epsilon. \quad (6.29)$$

Hodnotu ϵ zvolíme po pečlivé úvaze. Zpravidla to bývá 0,002 až 0,005krát maximální "výkmit" posloupnosti x_t proti střední hodnotě. ^{*}

Všimneme-li si vzorce (6.28) blíže, shledáme, že je úměrný čtvrté diferenci (konstanta úměrnosti je $-1/6$)

$$\delta^4 x_t = x_{t-2} - 4x_{t-1} + 6x_t - 4x_{t+1} + x_{t+2}. \quad (6.30)$$

^{*}/ NYMAN, D.: The interpolation error operator: time series error detection and correction. - "Geophysics" sv. 42 (1977), č. 4, s. 773-777.

Skutečně, v diferenční tabulce zazáří každá chyba ve čtvrtém sloupci jako hvězda na temné obloze. Uvedeme příklad diferenční tabulky kvadratické funkce $x = t^2$ s porušenou hodnotou pro $t = 6$

t	x_t	$\delta^1 x_t$	$\delta^2 x_t$	$\delta^3 x_t$	$\delta^4 x_t$
1	1				
2	4	3			
3	9	5	2	0	0
4	16	7	2	0	-1
5	25	9	1	-1	4
→ 6	35	10	4	3	-6 ←
7	49	14	1	-3	4
8	64	15	2	1	-1
9	81	17	2	0	0
10	100	19	2	0	
11	121	21			

Poznámka

Diferenční tabulku sestavujeme tak, že v každém sloupci jsou rozdíly sousedních hodnot předcházejícího sloupce. Podle (6.30) a uvedené tabulky je

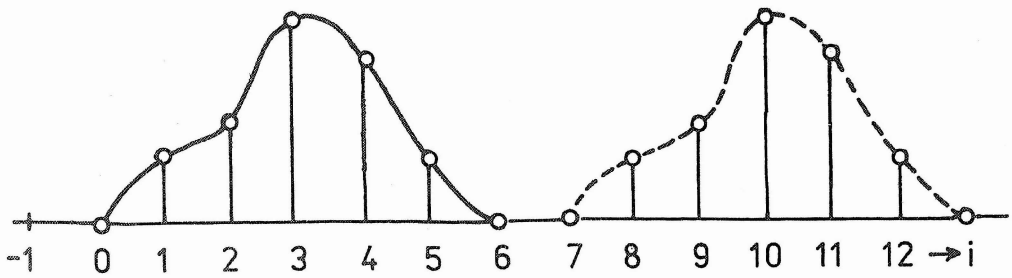
$$\delta^4 x_6 = -6 = 16 - 4 \cdot 25 + 6 \cdot 35 - 4 \cdot 49 + 64.$$

7. UŽITÍ Z-TRANSFORMACE

Dříve než se budeme zabývat Fourierovou transformací, která má velký význam při studiu náhodně buzených vibrací a jiných procesů, vysvětlíme, v čem spočívá tzv. Z-transformace posloupnosti $g_i = g(i\Delta t)$, $\Delta t = \text{konst.}$

Nechť je dána např. posloupnost $g_i = 0$ pro $i \leq 0$ nebo $i > 5$ a nechť podle obr. 12

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 1,5, \quad g_3 = 3, \quad g_4 = 2,5, \quad g_5 = 1.$$



Obr. 12

Této posloupnosti přiřadíme polynom proměnné z takový, že hodnoty g_i budou součiniteli u mocnin z^i . Bude tedy

$$G(z) = z + 1,5 z^2 + 3 z^3 + 2,5 z^4 + z^5. \quad (7.1)$$

Jaký má tato - na první pohled podivná - transformace dané posloupnosti [ovzorkované funkce $g(t)$] význam?

Především si všimněme, že násobením z^k se celá posloupnost posune - aniž se změní - o k intervalů vpravo (k je celé kladné číslo; je-li záporné, vznikne posuv doleva). Např. součin

$$z^7 G(z) = z^8 + 1,5 z^9 + 3 z^{10} + 2,5 z^{11} + z^{12} \quad (7.2)$$

odpovídá čárkovanému průběhu na obr. 12.

Funkce znázorněná na obr. 12 by mohla představovat nějakou napěťovou vlnu, která se šíří pružným prostředím. Kdyby druhá taková vlna vznikala o $3 \Delta t$ později než první, dostali bychom superpozicí výslednou vlnu. Kdybychom ji popsali např. v okamžiku $t = 9 \Delta t$ po vzniku první vlny, bylo by

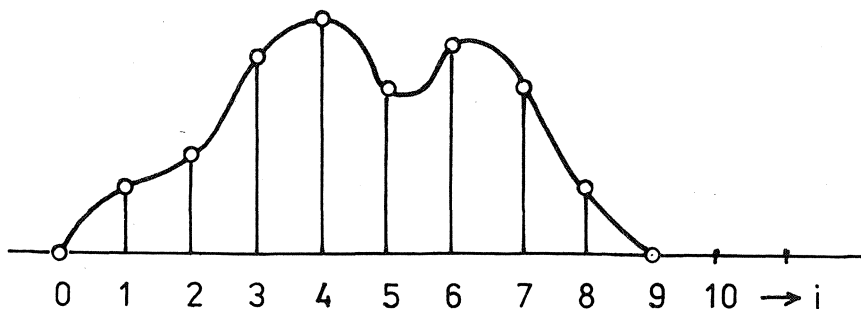
$$Y(z) = G(z) + z^3 G(z) = (1 + z^3) G(z). \quad (7.3)$$

Mohli bychom psát, že

$$Y(z) = X(z) G(z) \quad (7.4)$$

kde $X(z) = 1 + z^3$ značí posloupnost vstupních impulsů a $G(z)$ odezvu na jednotkový impuls. Vyšlo by (obr. 13)

$$Y(z) = z + 1,5 z^2 + 3 z^3 + 3,5 z^4 + 2,5 z^5 + 3 z^6 + 2,5 z^7 + z^8 \quad (7.5)$$



Obr. 13

Kdyby po dalším intervalu $2\Delta t$ vznikla třetí, v průběhu podobná napěťová vlna s polovičními výchylkami, byla by výsledná vlna popsána opět rovnicí (7.4), v níž by bylo $X(Z) = 1 + Z^3 + 0,5 Z^5$.

Rovnice (7.4) představuje filtraci vstupní posloupnosti $X(Z)$ na výstupní posloupnost $Y(Z)$. Jinou takovou filtraci představuje rovnice (1.35). Zde vstupní vektor $X(Z)$ představuje ohybové momenty

$$X(Z) = M_0 + M_1 Z + M_2 Z^2 + \dots + M_k Z^k + \dots, \quad (7.6)$$

výstupní vektor $Y(Z)$ jejich derivace, tedy posouvající síly (neboť $T = (dM/dx)$), takže

$$Y(Z) = T_0 + T_1 Z + T_2 Z^2 + \dots + T_k Z^k + \dots. \quad (7.7)$$

Přenosovou funkci $G(Z)$ dostaneme jako polynom

$$G(Z) = (2 Z^{-2} + Z^{-1} - Z - 2 Z^2) \frac{1}{10 \hbar}. \quad (7.8)$$

Dosazením do (7.4) dostaneme (porovnáním koeficientů u k -té mocniny)

$$T_k = \frac{1}{10 \hbar} (-2 M_{k-2} - M_{k-1} + M_{k+1} + 2 M_{k+2}), \quad (7.9)$$

což je rovnice (1.35). Všimněme si, že koeficienty jsme do polynomu $G(Z)$ zařadili v opačném pořadí než jsou v závorce v rovnici (1.35).

Podobně můžeme popsat RC filtr (6.20) transformací (7.4), zvolíme-li

$$G(Z) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha Z} \quad (7.10)$$

Je-li $|\alpha Z| < 1$, bude možno poslední výraz upravit dělením

$$G(Z) = (1-\alpha)(1+\alpha Z+\alpha^2 Z^2+\alpha^3 Z^3+\dots) \quad (7.11)$$

Potom

$$Y(Z) = G(Z)X(Z) = (1-\alpha) [x_0 + (\alpha x_0 + x_1) Z + (\alpha^2 x_0 + \alpha x_1 + x_2) Z^2 + \dots] \quad (7.12)$$

Příklad

Aplikujme RC filtr (6.20) nebo vzorec (7.12) na soubor $\{x_k\} = \{0, 1, 2, 2, 3, 2, 4, \dots\}$. Oběma způsoby dostaneme pro $\alpha = 0,6$ hodnoty uvedené v tabulce

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	0	1	2	2	3	2	4
y_k	0	0,4	1,04	1,424	2,0544	2,03264	2,819584 ...

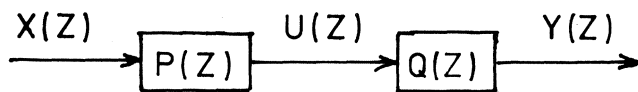
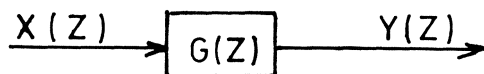
Je tedy zřejmé, že digitální filtraci dostaneme pomocí Z-transformace jako součin polynomů. Mocniny Z mohou být i záporné. Jsou-li v polynomu obsaženy záporné mocniny, znamená to, že některé hodnoty existovaly i před počátkem děje (pro $t < 0$). Protože funkce $G(Z)$ představuje odezvu na jednotkový impuls v čase $t = 0$, pak záporná mocnina v tomto polynomu by znamenala existenci odezvy ještě před vznikem impulsu. To je fyzikálně nemožné. Mluvíme pak o nerealizovatelném filtru. Při zpracování zaznamenané posloupnosti si však můžeme počátek formálně posunout kamkoli; pak známe i data pro záporné časy a můžeme s nimi počítat. Nerealizovatelnost filtru není tedy na závadu, nepracujeme-li se souborem dat v reálném čase.

Rozložíme-li polynom $G(Z)$ na součin dvou polynomů

$$G(Z) = P(Z) \cdot Q(Z), \quad (7.13)$$

můžeme filtr $G(Z)$ nahradit dvěma sériově řazenými filtry podle obr. 14

$$\begin{aligned} U(Z) &= P(Z) X(Z), \\ Y(Z) &= Q(Z) U(Z). \end{aligned} \quad (7.14)$$



Obr. 14

Všimněme si, jak probíhá násobení polynomů v rovnici (7.4)

$$\begin{aligned}
 (x_0 + x_1 Z + x_2 Z^2 + \dots) \cdot (g_0 + g_1 Z + g_2 Z^2 + \dots) = \\
 = y_0 + y_1 Z + y_2 Z^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Porovnáním součinitelů u stejných mocnin Z dostaneme

$$y_0 = x_0 g_0$$

$$y_1 = x_1 g_0 + x_0 g_1$$

$$y_2 = x_2 g_0 + x_1 g_1 + x_0 g_2$$

$$y_3 = x_3 g_0 + x_2 g_1 + x_1 g_2 + x_0 g_3 \quad (7.15)$$

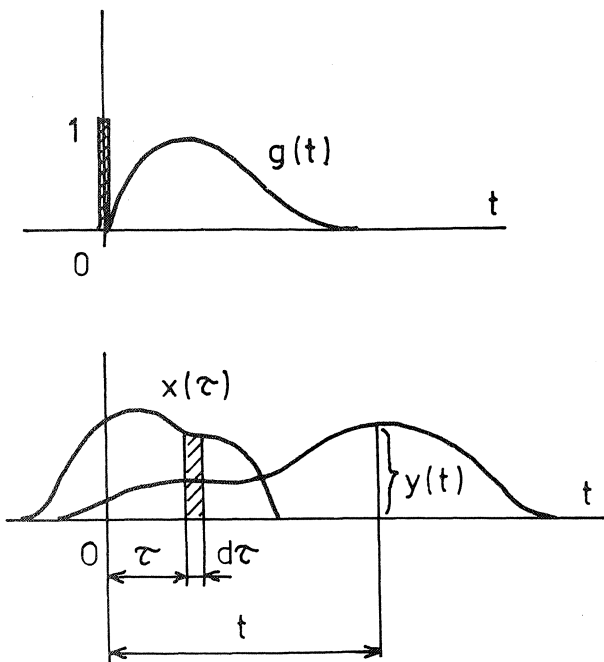
$$y_k = \sum_{i=0}^k x_{k-i} g_i$$

Vztah (7.15) se nazývá konvoluce. Je to diskretní obdoba konvolučního integrálu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad (7.16)$$

Zvolíme-li formálně za $(t-\tau)$ novou proměnnou, můžeme - po změně označení - převést rovnici (7.16) na ekvivalentní tvar

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad (7.17)$$



Obr. 15

Je-li $g(t)$ odezvou na jednotkový impuls v okamžiku $t = 0$, pak $y(t)$ představuje odezvu na funkci $x(t)$, jak je zřejmé z obr. 15. Impuls $x(\tau)d\tau$ v okamžiku τ způsobí v čase t odezvu $x(\tau)d\tau \cdot g(t-\tau)$. Výsledná odezva v čase t je pak dána součtem účinků všech impulsů, tedy integrálem (7.17).

Vše, co bylo dosud řečeno, předpokládá platnost zákona superpozice. Jde-li např. o šíření napěťových vln, musí platit Hookeův zákon a posuvy musí být malé, aby platila lineární teorie pružnosti.

Pro pozorného čtenáře zůstává záhadou, jaký význam

(matematický nebo fyzikální) má proměnná Z v uvedené transformaci. Pojednáme o tom v příští kapitole. Uvedeme ještě program ve FORTRANU pro finitní diskretní konvoluci, tj. pro výpočet hodnot y_k podle rovnice (7.4), mají-li všechny polynomy jen konečnou délku. */ Program respektuje i zvláštnosti na obou koncích daných souborů a je natolik srozumitelný, že nepotřebuje komentáře.

```

C PROGRAM PRO DISKRETNÍ KONVOLUCI
DIMENSION X (LX), G (LG), Y (LY)
DO 1Ø I = 1, LY
1Ø Y(I) = Ø.
DO 2Ø I = 1, LX
DO 2Ø J = 1, LG
2Ø Y (I + J - 1) = Y (I + J - 1) + X (I) * G (J)
END

```

*/ S nekonečnou délkou nelze v počítači pracovat. V následujícím programu musí být $LY \geq LX + LG - 1$.

8. FOURIERŮV INTEGRÁL

Z-transformaci jsme definovali výrazem (t je celé číslo)

$$X(Z) = \sum_t x_t Z^t. \quad (8.1)$$

Proměnná Z neměla až dosud žádný specifický význam. Nyní zvolíme $Z = e^{i\omega}$ a dostaneme

$$X(Z) = X(e^{i\omega}) = \sum_t x_t e^{i\omega t}. \quad (8.2)$$

Bude-li pro $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ platit, že $\lim \Delta t \rightarrow 0$, přejde součet (8.2) ve Fourierův integrál

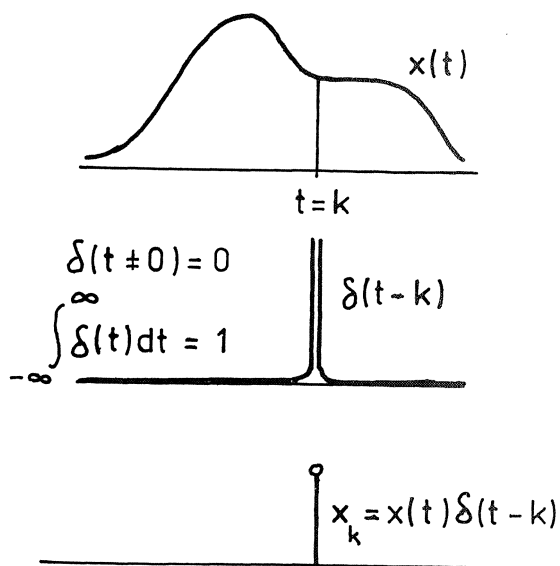
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt. \quad (8.3)$$

Dosadíme-li naopak do (8.3) vzorkovanou funkci $x(t)$, totiž (obr. 16)

$$x(t) = \sum_k x_k \delta(t - k), \quad (8.4)$$

kde $\delta(t)$ znamená Diracovu funkci, dostaneme součet (8.2). V rovnicích (8.1) a (8.4) jsme zvolili $\Delta t = 1$, což není na závadu, neboť jednotku času můžeme volit libovolně malou. Tak jsme dostali přímou souvislost mezi Z-transformací a Fourierovým integrálem. Vzorec (8.2) představuje diskretní podobu tohoto integrálu.

Tato souvislost má dalekosáhlý význam. Fourierův integrál lze mnohdy jen obtížně vypočítat, často je výpočet v uzavřeném tvaru nemožný. Ale Z-transformace je velmi snadná, triviální záležitost. Je-li



Obr. 16

dán soubor dat x_t , můžeme polynom $X(z)$ podle (8.1) ihned napsat. Můžeme jej pak interpretovat buď pomocí hodnot x_t jako funkci času nebo po dosazení $z = e^{i\omega}$ jako funkci kruhové frekvence. Poznamenejme, že změně ω od nuly do 2π odpovídá úplný oběh bodu z na jednotkové kružnici ve smyslu proti hodinovým ručičkám, neboť $z = e^{i\omega} = \cos \omega t + i \sin \omega t$. ^{**/}

V minulé kapitole jsme ukázali, že konvoluci v časové oblasti přísluší násobení polynomů ve frekvenční oblasti. To je známá věta o konvoluci, kterou zde dostáváme jako samozřejmý důsledek Z-transformace. ^{***/}

Z-transformace spočívá v tom, že k hodnotám souboru dat v časové oblasti přiřazujeme mocniny proměnné z . Pak inverzní transformace bude spočívat v tom, že součinitele u různých mocnin z ztotožníme s odpovídajícími prvky souboru v časové oblasti. Zkoumejme, jak se to projeví při inverzní Fourierově transformaci

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (8.5)$$

Nejprve si všimněme, že integrace z^n na jednotkové kružnici dá vždy nulu, pokud není $n = 0$. Platí totiž

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos n\omega - i \sin n\omega) d\omega = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0, \\ 0 & \text{pro } n \neq 0 \end{cases} \quad (n \text{ celé}). \end{aligned} \quad (8.6)$$

V diskretní podobě má integrál (8.5) tvar (t je celé číslo)

$$x_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\dots + x_{-1} e^{-i\omega} + x_0 + x_1 e^{i\omega} + x_2 e^{2i\omega} + \dots) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (8.7)$$

^{**/} V Gaussově rovině vynášíme na osu úseček reálnou část, na osu pořadnic imaginární část. Pak z představuje bod na kružnici s poloměrem rovným jedné.

^{***/} K tomu srovnej rovnice (7.4) a (7.15).

Je zřejmé, že bude nenulový pouze člen obsahující x_t . Takže

$$x_t = \frac{1}{2\pi} x_t \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = x_t. \quad (8.8)$$

Zpětná Fourierova transformace je tedy skutečně jen přiřazování součinitelů u mocnin proměnné z . */

9. RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE

Napíšeme-li

$$X(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \dots, \quad (9.1)$$

máme zároveň soubor dat v časové oblasti x_0, x_1, x_2, \dots , který představuje ovzorkovanou funkci času $x(t)$, i jeho Fourierovu transformaci $X(\omega)$. Vyneseme-li do diagramu hodnoty x_0, x_1, x_2, \dots , pro $t = 0, 1, 2, \dots$, máme časový průběh. Vyneseme-li $X(z(\omega))$ pro různé hodnoty ω , když $z = e^{i\omega}$, máme Fourierovu transformaci, tj. závislost obrazu X na kruhové frekvenci ω . Potíž je v tom, že ω se mění spojitě, ale do počítače mohou vstupovat jen diskrétní číselné údaje. Musíme proto uvážit, jak ze spojitě proměnné hodnoty ω vytvoříme posloupnost ω_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Asi bude výhodné volit konstantní interval $\Delta\omega$. Nejnižší frekvence je zřejmě $\omega_0 = 0$. Poznamenejme, že $z(0) = e^0 = 1$. Nejvyšší frekvenci $\omega = 2\pi$ už nepotřebujeme brát, neboť vzhledem k periodicitě funkce $e^{i\omega}$ je

$$X(z(2\pi)) = X(z(0)). \quad (9.2)$$

Proto vezmeme

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M} k \quad [k = (0, 1, 2, \dots, M-1)] \quad (9.3)$$

*/ V některé matematické literatuře se užívá v Z-transformaci záporných mocnin z ; pak se mění znaménka v exponentech v transformacích (8.3) a (8.5). Viz např. oborovou encyklopedii APLIKOVANÁ matematika I/II, Praha, SNTL 1977-8.

kde M je nějaké kladné celé číslo. Abychom zjednodušili zápis, označíme

$$X_k = X(Z(\omega_k)); \quad W = e^{i2\pi/M} \quad (9.4)$$

Pro zvláštní případ čtyřbodové časové funkce ($N = 4$) dostaneme z rovnice (9.1) v maticovém tvaru

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (9.5)$$

Není nutné volit vždy $M = N$, ale je to výhodné. Matice v rovnici (9.5) je pak čtvercová a lze ji invertovat

$$\begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & W^{-6} \\ 1 & W^{-3} & W^{-6} & W^{-9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (9.6)$$

Protože W^{-1} je komplexně sdružené s W , jsou matice v rovnicích (9.5) a (9.6) vzájemně komplexně sdružené. Není tedy žádný podstatný rozdíl mezi funkcemi z časové a frekvenční oblasti. Symetrie by byla ještě zřejmější, kdybychom - jak se to někdy dělává - rozdělili činitel $1/N$ v rovnici (9.6) mezi obě rovnice (9.5) a (9.6) a nahradili je tak dvěma stejnými výrazy $1/\sqrt{N}$. To nás vede k poznatku, že ve všech větvích lze zaměnit vzhledem k dualitě označení "časová" a "frekvenční" oblast, aniž se změní jejich platnost.

Diskretní Fourierova transformace $X(Z(\omega))$ má oproti spojitému Fourierovu integrálu tu vlastnost, že je periodická (srov. s rovnicí (9.2)). Proto stačí sledovat jen interval $-\pi \leq \omega < \pi$. Zvolíme-li např. $N = 8$, budeme sledovat posloupnost

$$X_4, X_5, X_6, X_7, X_0, X_1, X_2, X_3 \quad (9.7)$$

odpovídající hodnotám ω

$$-\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \quad (9.8)$$

Tento posun má za následek, že při dostatečně hustém vzorkování funkce $x(t)$ budou hodnoty na obou koncích posloupnosti (9.7) malé. Jsou-li hodnoty $x(t)$ reálné, je posloupnost reálných částí X_k osově souměrná (sudá) k počátku X_0 . Imaginární části jsou středově souměrné (liché) k témuž počátku. Protože jsme zvolili N sudé, není nulový bod přesně uprostřed. Z důvodů, které ihned poznáme, zvolíme však N sudé.

Násobení matice N -tého řádu vektorem podle (9.5) vyžaduje $2N^2 - N$ násobení a sečítání. Ukážeme nyní obrat, nazývaný rychlá Fourierova transformace, který sníží počet těchto matematických operací na $N \log_2 N$. Kdyby $N = 1024$, byl by tento počet 10 240 ve srovnání s $2N^2 - N = 2 096 128$. Počet potřebných operací se tedy v tomto případě zmenší asi na půl procenta.

Hlavní myšlenkou v rychlé Fourierově transformaci je zdvojování. Máme-li dán nějaký soubor hodnot v časové oblasti $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ a jeho Fourierovu transformaci, $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_{N-1})$ a pak ještě jiný takový soubor, $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1})$ a jeho Fourierův obraz $(Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1})$, utvoříme z nich nový soubor zdvojením podle předpisu

$$z_t = (x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{N-1}, y_{N-1}) \quad (9.9)$$

a budeme hledat jeho Fourierův obraz. Za N přitom zvolíme nějaké číslo, které je mocninou čísla 2, např. $N = 2^3 = 8$.

Začneme tím, že náš osmibodový soubor x_0 až x_7 rozdělíme na osm souborů po jedné hodnotě. Fourierova transformace každého takového "souboru" (x_k) je právě hodnota X_k . Nyní vytvoříme poloviční počet (tj. čtyři) zdvojených souborů (x_0, x_4) , (x_1, x_5) , (x_2, x_6) , (x_3, x_7) . Dalším zdvojením vzniknou dva soubory po čtyřech prvcích (x_0, x_2, x_4, x_6) , (x_1, x_3, x_5, x_7) a konečně osmibodový soubor $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$.

Prozkoumáme nyní podrobněji, co se při takovém zdvojování děje. Označíme

$$V = e^{i2\pi/2N} = \sqrt{W},$$

$$V^N = e^{i\pi} = -1. \quad (9.10)$$

Transformace dvou N -bodových souborů dá

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j V^{2jk} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (9.11)$$

$$Y_k = \sum_{j=0}^{N-1} y_j V^{2jk} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (9.12)$$

Transformace zdvojeného souboru (9.9) je pak podle definice

$$Z_k = \sum_{\ell=0}^{2N-1} z_\ell V^{\ell k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1). \quad (9.13)$$

Výpočet podle tohoto vzorce rozdělíme na dvě části; jedna bude platit pro $k = 0, 1, \dots, N-1$ a druhá pro $k = N, N+1, \dots, 2N-1$. Nejprve tedy vypočteme

$$Z_k = \sum_{\ell=0}^{2N-1} z_\ell V^{\ell k} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (9.14)$$

Všimneme si, že x_j násobíme v souboru (9.9) sudými mocninami V a y_j lichými mocninami. Bude proto vhodné napsat poslední výraz ve tvaru

$$Z_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j V^{2jk} + V^k \sum_{j=0}^{N-1} y_j V^{2jk} = X_k + V^k Y_k. \quad (9.15)$$

Druhou polovinu hodnot Z_k dostaneme ze vzorce

$$\begin{aligned} Z_k &= \sum_{\ell=0}^{2N-1} z_\ell V^{\ell k} \quad (k = N, N+1, \dots, 2N-1) \\ &= \sum_{\ell=0}^{2N-1} z_\ell V^{\ell(m+N)} \quad (\ell - N = m = 0, 1, \dots, N-1) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} z_{m+N} V^{m(m+N)} (V^N)^m. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Protože $V^N = -1$ podle (9.10), dá poslední výraz

$$\begin{aligned} Z_k &= \sum_{\ell=0}^{2N-1} z_{\ell} V^{\ell m} (-1)^{\ell} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j V^{2j m} - V^m \sum_{j=0}^{N-1} y_j V^{2j m} \\ &= X_m - V^m Y_m, \end{aligned} \quad (9.17)$$

takže (po dosazení $m = k - N$)

$$Z_k = X_{k-N} - V^{k-N} Y_{k-N} \quad (k = N, N+1, \dots, 2N-1). \quad (9.18)$$

Wzorce (9.15) a (9.18) popisují celý algoritmus výpočtu Fourierova obrazu zdvojeného souboru. Aplikujeme jej postupně, jak jsme naznačili. Z uvedeného návodu je zřejmé, proč musí být N voleno jako celá mocnina čísla 2. Tomu lze prakticky vždy vyhovět.

Rychlá Fourierova transformace způsobila převrat zvláště při výpočtech náhodných vibrací v mechanice, ale také v jiných odvětvích fyziky. Za autory se v literatuře uvádějí Cooley a Tukey (1965). Algoritmus rychlé Fourierovy transformace však nezávisle odvodil už roku 1962 a po léta užíval Vern Herbert (Chevron Standard Ltd., Calgary, Kanada), aniž jej publikoval. ^{*}/

Připojujeme program pro rychlou Fourierovu transformaci v jazyku FORTRAN. ^{**}/ Vyvoláme-li tento program (subroutinu) dvakrát, dostaneme původní soubor dat. Musíme však volit SIGNI = 1. v prvním případě, SIGNI = -1. v druhém případě. Hodnota LX musí být celou mocninou dvojky. Soubor dat je uspořádán do vektoru CX. Předpokládá se výpočet s komplexní proměnnou.

^{*}/ Viz IEEE Trans. Audio Electrostat., zvláštní vydání věnované rychlé Fourierově transformaci; June 1967.

^{**}/ Viz CLAERBOUT, J. F.: Fundamentals of geophysical data processing. New York, McGraw-Hill 1976.

SUBROUTINE FFT (LX, CX, SIGNI)

```

C   RYCHLA FOURIEROVA TRANSFORMACE
C           LX
C   CX = SQRT (1/LX) SUM ((X(J) * EXP (2*PI*SIGNI*I*(J-1) * (K-1)/LX))
C           J=1
C   FOR K = 1, 2, ..., LX = 2 * * INTEGER
COMPLEX CX (LX), CARG, CEXP, CW, CTEMP
J = 1
SC = SQRT (1./LX)
DO 3Ø I = 1, LX
IF (I.GT.J) GOTO 1Ø
CTEMP = CX (J) * SC
CX (J) = CX(I) * SC
CX (I) = CTEMP
1Ø M = LX/2
2Ø IF (J.LE.M) GOTO 3Ø
J = J - M
M = M/2
IF (M.GE.1) GOTO 2Ø
3Ø J = J + M
L = 1
4Ø ISTEP = 2 * L
DO 5Ø M = 1, L
CARG = (Ø., 1.) * (3.14159265 * SIGNI * (M - 1)) /L
CW = CEXP (CARG)
DO 5Ø I = M, LX, ISTEP
CTEMP = CW * CX (I + L)
CX (I + L) = CX(I) - CTEMP
5Ø CX(I) = CX(I) + CTEMP
L = ISTEP
IF (L.LT.LX) GOTO 4Ø
RETURN
END

```

10. KORELACE A SPEKTRUM

Fourierova transformace převádí posloupnost X_0, X_1, X_2, \dots z časové oblasti do posloupnosti X_0, X_1, X_2, \dots ve frekvenční oblasti. Uspořádaná posloupnost hodnot nějaké veličiny jakožto funkce kmitočtu, popř. vlnové délky nebo kruhové frekvence se nazývá spektrum.[⊗] Protože veličiny X_0, X_1, X_2, \dots jsou komplexní, budeme za spektrum daného souboru považovat posloupnost

$$|X_0|^2, |X_1|^2, |X_2|^2, \dots \quad (10.1)$$

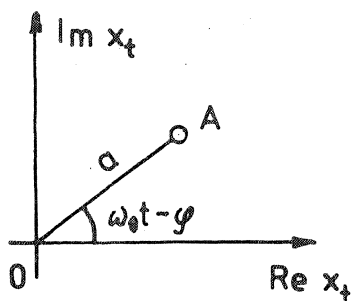
Je to tedy posloupnost čtverců amplitud transformovaného souboru. Je-li původní soubor (x_i) složen z reálných čísel, je $\operatorname{Re}(X_i)$ sudou funkcí a $\operatorname{Im}(X_i)$ lichou funkcí ω . Posloupnost $(|X_i|^2)$ je však vždy sudá. To znamená, že u kmitavého pohybu nemá smysl rozlišovat kladnou a zápornou kruhovou frekvenci.

Jde-li však o rotační pohyb, má ω význam skutečně úhlové rychlosti a vstupní soubor dat je složen z komplexních čísel. Pak je nutné rozlišovat kladnou a zápornou úhlovou rychlost. Např. poloha bodu A na obr. 17 je dána komplexním číslem

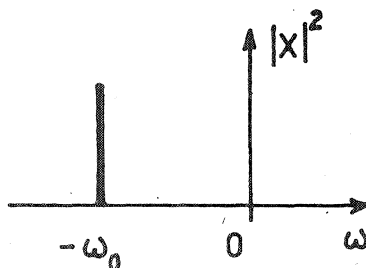
$$x_t = a \cos(\omega_0 t - \varphi) + i a \sin(\omega_0 t - \varphi). \quad (10.2)$$

Fourierova transformace (8.3) dá

$$\begin{aligned} X_\omega &= a \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_0 t - \varphi)} e^{i\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} \exp i [(\omega_0 + \omega)t] e^{-i\varphi} dt = \\ &= a e^{-i\varphi} \cdot \delta(\omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (10.3)$$



Obr. 17



Obr. 18

[⊗]/ Porovnej s ČSN 01 1400, Názvosloví mechanického kmitání a rázů.

Zde $\delta(\omega)$ značí Diracovu funkci. Spektrum má jedinou nenulovou hodnotu $|X_\omega|^2 = a^2$ v bodě $\omega = -\omega_0$ (obr. 18). Kdybychom změnili smysl ω , dostali bychom tuto hodnotu v bodě $\omega = +\omega_0$. To by odpovídalo rotaci vektoru OA na obr. 17 v opačném smyslu. Spektrum není v tomto případě ani sudou ani lichou funkcí ω .

Abychom se tedy zbytečně neomezovali, budeme předpokládat, že soubor vstupních dat sestává z komplexních čísel.

Pokusme se nyní posoudit, zda nelze k výpočtu spektra užít Z-transformace. Podle definice hledáme výraz

$$R(\omega) = |X(\omega)|^2 = \overline{X(\omega)} \cdot X(\omega). \quad (10.4)$$

Pruhem jsme označili komplexně sdružené číslo. Kdyby šlo např. o tříbodový soubor, bylo by

$$R(\omega) = (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 e^{-i\omega} + \bar{x}_2 e^{-2i\omega})(x_0 + x_1 e^{i\omega} + x_2 e^{2i\omega}). \quad (10.5)$$

Použijeme-li označení $Z = e^{i\omega} = Z(\omega)$, bude

$$R(Z(\omega)) = (\bar{x}_0 + \bar{x}_1 \frac{1}{Z} + \bar{x}_2 \frac{1}{Z^2})(x_0 + x_1 Z + x_2 Z^2) \quad (10.6)$$

čili

$$R(z) = \bar{X}\left(\frac{1}{z}\right) \cdot X(z). \quad (10.7)$$

Po rozepsání

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{\bar{x}_2 x_0}{z^2} + \frac{\bar{x}_1 x_0 + \bar{x}_2 x_1}{z} + (\bar{x}_0 x_0 + \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2) + \\ &+ (\bar{x}_0 x_1 - \bar{x}_1 x_2) z + \bar{x}_0 x_2 z^2 = \\ &= \frac{r_2}{z^2} + \frac{r_1}{z} + r_0 + r_1 z + r_2 z^2. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Obecně může mít soubor N prvků a součinitel u z^k je

$$r_k = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{x}_j x_{j+k} \quad (10.9)$$

Vzorec (10.9) je předpisem pro výpočet autokorelace.^{*}/

Jaký je význam hodnot r_k ?

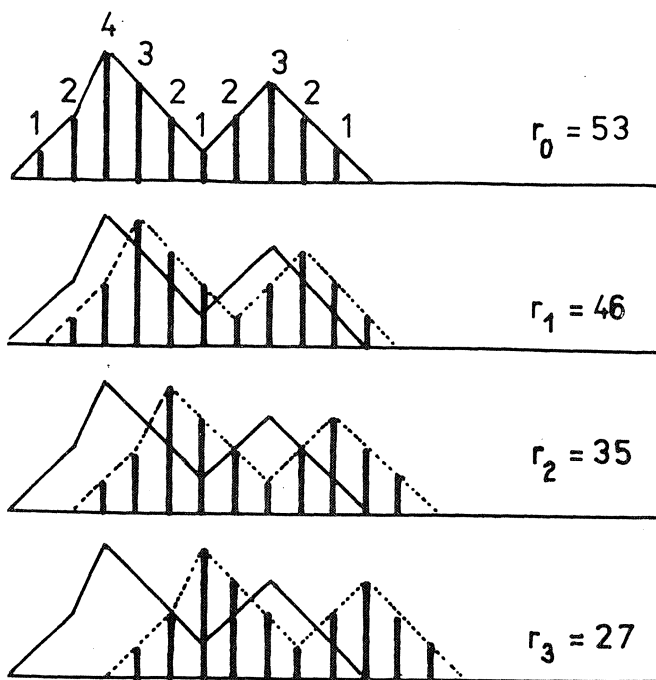
Index k značí počet kroků Δt , o který je posloupnost x_{j+k} posunuta vzhledem k posloupnosti \bar{x}_j při vytváření součinů v součtu (10.9).

Na obr. 19 je uveden příklad souboru reálných dat (1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1).

Nenulové hodnoty r_k zde dostaneme pro $k = -9, -8, -7, \dots, 7, 8, 9$. Z nich jsou na obr. 19 zakresleny posunuté funkce pro $k = 0$ až 3.

Z názoru je zřejmé, že r_k je mírou "podobnosti" mezi posunutou a původní posloupností. Celkem vyjde

$$r_k = (1, 4, 11, 19, 25, 26, 27, 35, 46, 53, 46, 35, 27, 26, 25, 19, 11, 4, 1).$$



Obr. 19

V tomto souboru je jeden maximální prvek, a to $r_0 = 53$. Kdyby byla posloupnost x_j periodická s periodou n , tj. kdyby $x_{j+n} = x_j$, opakovalo by se lokální maximum v posloupnosti r_k , takže $r_{\max} = r_0 = r_n = r_{2n} = \dots$. Protože posunutí druhé posloupnosti vpravo proti první lze považovat za posunutí první posloupnosti vlevo proti druhé (a obě posloupnosti \bar{x}_j, x_j jsou stejné, neboť jde o reálná čísla), musí být $r_{-k} = r_k$, což se výpočtem potvrdilo.

^{*}/ Pro spojitou funkci $x(t)$ (stacionární proces) se definuje autokorelační funkce vztahem

$$r(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} dt.$$

Když ovzorkujeme tzv. "bílý šum", dostaneme posloupnost natolik chaotickou, že bude $r_k \approx 0$ pro $k \neq 0$ (jakkoli posunutá posloupnost se původní posloupnosti téměř vůbec nepodobá). Je to posloupnost náhodných čísel (kladných i záporných). ^{**/}

Pro reálné soubory bude tedy $r_{-k} = r_k$, takže (10.8) dá

$$R(z) = r_0 + r_1 \left(z + \frac{1}{z} \right) + r_2 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right). \quad (10.10)$$

Protože

$$z^k + \frac{1}{z^k} = e^{ik\omega} + e^{-ik\omega} = 2\cos k\omega, \quad (10.11)$$

bude nakonec

$$R(z) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} r_k \cos k\omega - r_0. \quad (10.12)$$

Poslední rovnice, která je jednoduchým a přirozeným důsledkem výpočtů užitím Z-transformace, vyjadřuje větu, jež se dokazuje pro spojité funkce mnohem složitěji. Podle ní se dvojnásobek kosinové Fourierovy transformace autokorelační funkce rovná spektrální výkonové hustotě. ^{***/} Uvedená věta platí pro reálné funkce času, jimž přísluší sudá autokorelační funkce. Spektrální výkonová hustota je pak čtvercem amplitud Fourierovy transformace $|X(\omega)|^2$ a je tedy určena spektrem $R(z)$.

Souvislost těchto pojmů objasníme pro spojitou funkci $x(t)$; nechť tato funkce představuje rychlost kmitající hmoty zavěšené na hydraulickém tlumiči s lineární charakteristikou, takže $F(t) = kx(t)$ je síla v tlumiči (k nezávisí ani na x ani na t). Elementární práce vykonaná tlumičem je $dA = kx^2 dt$. Předpokládejme, že $k = 1 \text{ N m}^{-1} \text{ sec}$. Pak práce rozptýlená tlumičem (během časového přírůstku $t_2 - t_1$) bude

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt. \quad (10.13)$$

^{**/} Ideální bílý šum je fyzikálně nerealizovatelný; je to zvláštní případ stacionárního procesu na intervalu $-\infty < t < \infty$.

^{***/} Viz např. KOŽEŠNÍK, J.: Kmitání mechanických soustav. Praha, Academia 1979 (str. 470).

Průměrný výkon dostaneme, budeme-li tuto práci dělit časovým přírůstkem

$$P = \frac{\Delta A}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt. \quad (10.14)$$

Položme počátek do středu časového intervalu, jehož délku označíme

$T = t_2 - t_1$. Bude

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt. \quad (10.15)$$

Protože kmit $x(t)$ si lze myslet rozdělen do harmonických složek užitím Fourierovy řady nebo - pro neperiodické funkce - užitím Fourierova integrálu, může nás zajímat, jak se která harmonická složka s kruhovou frekvencí ω podílí na celkovém výkonu. Zavedeme proto spektrální výkonovou hustotu $S(2\pi f)$ takovou, že výkon ve frekvenčním pásmu od $f = \omega/2\pi$ do $f + df$ bude právě $dP = S(2\pi f) df = S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$. Pak ovšem

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (10.16)$$

Abychom mohli porovnat poslední dva výrazy, převedeme integrand v rovnici (10.15) do frekvenční oblasti. Nejprve si uvědomíme, že $x^2 = \overline{x \cdot x}$ a že podle (8.5)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (10.17)$$

Pak místo (10.15) můžeme psát

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] \overline{x(t)} dt. \quad (10.18)$$

Zaměníme pořadí integrace. Protože podle (8.3) ^{*}/

^{*}/ U stacionárních procesů není limita (10.19) definována, existují však limity (10.20) a (10.21). Proto zavádíme v rovnici (10.19) Fourierovu transformaci $X_T(\omega)$ na konečném intervalu $\langle -T/2, T/2 \rangle$.

$$\overline{X(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{X_T(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (10.19)$$

bude pro $\lim T \rightarrow \infty$

$$P = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X_T(\omega)} X_T(\omega) d\omega \quad (10.20)$$

Porovnáním (10.16) a (10.20) dostaneme pro spektrální výkonovou hustotu

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} R_T(\omega) \quad (10.21)$$

Tím se potvrzuje význam spektra $R(\omega)$. Činitel $1/T$ souvisí s tím, že u stacionárních (tedy nekonečných) procesů by nebyly bez tohoto činitele některé integrály na nekonečném intervalu definovány [viz poznámky k rovnicím (10.9) a (10.19)]

Účelem této kapitoly bylo ukázat, jak Z-transformace přispívá k objasnění některých matematických vět a pojmů užívaných v teorii náhodných procesů a jak usnadňuje číslíkové zpracování souborů dat vzniklých ovzorkováním časově proměnných veličin. */

Příklad

Dokažte, že posloupnost

$$\frac{2}{\pi} \left(\dots, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \right)$$

dává stejnou autokorelační posloupnost jako bílý šum, ačkoli daná posloupnost je deterministická.

*/ Podrobnou teorii Z-transformace obsahuje např. publikace
VÍCH, R.: Z-Transformation, Theorie und Anwendung. Berlin,
Verlag-Technik 1964.

Poznámka

$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots$. Vyjde $r_k = (\dots, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$. K dané posloupnosti lze vypočítat autokorelační posloupnost; obrácená úloha je však mnohoznačná.

11. CHYBY PŘI REGRESNÍ ANALÝZE

V souborech programů tvořících software minipočítačů a stolních kalkulátorů bývá obsažen i program pro regresní analýzu pomocí polynomů.*/ Dokonce i mnohé kapesní kalkulátory bývají vybaveny vestavěným programem pro stanovení součinitelů regresní přímky. Snad si tím lze vysvětlit, že ve výzkumných zprávách i v technické literatuře se čím dál tím častěji setkáváme s křivkami, jež se prokládají metodou nejmenších čtverců souborem bodů představujících experimentálně zjištěná data nějaké funkční závislosti. To nahrazuje dříve obvyklé kreslení křivek "od oka". To je potěšitelná skutečnost, neboť užitím regresní analýzy se minimalizují podle zvoleného kritéria subjektivní chyby. Stává se však, že uživatelé těchto počítačů nerozumějí detailně tomu, co se vlastně při regresní analýze děje s vloženými daty, zejména se nedovedou rozhodnout pro správný kompromis mezi dvěma protichůdnými požadavky. Na jedné straně totiž chceme, aby křivka co nejvěrněji vystihovala zkoumanou funkční závislost, kterou předem neznáme - alespoň ne do všech podrobností. Kdybychom tento požadavek přehnali, dosáhli bychom volbou dostatečně vysokého stupně regresního polynomu toho, že by regresní křivka procházela všemi body. Pak by již nešlo o regresi, ale o polynomiální interpolaci. To by však znamenalo, že se budou "kopírovat" i všechny chyby měření, ba že se budou i zveličovat, neboť polynomy vysokého stupně budou dávat křivku "hadovitého tvaru". Na druhé straně požadujeme, aby se metodou nejmenších čtverců co nejlépe vyrovnaly (odstranily) měřičské chyby. Kdybychom kladli příliš velký důraz na tento požadavek, odstranili bychom spolu s těmito chybami i podstatnou část informací, které potřebujeme znát. Totiž tím, že bychom volili příliš nízký stupeň regresního polynomu, bychom získali o skutečné funkční závislosti nesprávnou představu (považovali bychom např. za lineární i takovou funkci, která lineární není).

*/ Přesněji řečeno, jde o aproximaci funkcí metodou nejmenších čtverců pomocí polynomů.

Jinou častou chybou je to, že se programů uvedených většinou bez podrobnějšího komentáře používá mechanicky, neuváženě. Program pro regresní analýzu pomocí polynomů bývá sestaven tak, že se daným souborem dat prokládá nejprve lineární polynom, pak kvadratický, kubický atd. To znamená, že výsledkem je řešení ve tvaru

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n. \quad (11.1)$$

Konečný stupeň polynomu n volí buď uživatel nebo počítač. Víme-li však, že hledaná závislost musí mít (z fyzikálních důvodů) určité vlastnosti, musíme je při volbě regresní křivky respektovat. Jde-li např. o lichou funkci, musí vymizet na pravé straně rovnice (11.1) všechny sudé funkce. Musíme proto předem ze svých úvah vyloučit všechny sudé mocniny a položit $a_0 = 0$, $a_2 = 0$ atd. Neučiníme-li tak, nedostaneme přesnější výsledky, ale právě naopak; nevyužijeme-li všechny informace, jež se vztahují k řešenému problému, zatížíme řešení větší chybou.

Abychom ukázali, jak se takových chyb vyvarovat, probereme detailně výpočet koeficientů regresní funkce metodou nejmenších čtverců a výpočet středních chyb popř. intervalů spolehlivosti pro tyto koeficienty. Uvedeme také objektivní kritéria pro volbu žádoucího stupně polynomické aproximace.

Předpokládejme, že určitý fyzikální jev je přesně popsán rovnicí

$$Y(t) = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + \dots + A_n f_n(t). \quad (11.2)$$

Funkce $f_1(t)$ až $f_n(t)$ známe, ale součinitele A_1 až A_n chceme teprve určit. Proto uskutečnime opakovaná měření pro $t = t_1, t_2, \dots, t_m$ a volíme $m > n$, abychom měli větší "jistotu", pokud jde o správnost výchozího předpokladu i o správnost výsledků. Protože naše měření jsou zatížena chybami, získáme hodnoty $y(t)$ místo správných hodnot $Y(t)$. Také koeficienty A_1 až A_n můžeme pouze odhadnout, neboť přesné hodnoty neznáme. Odhadnuté hodnoty budeme značit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Použijeme zkráceného zápisu

$$y_i = y(t_i); \quad f_{ij} = f_j(t_i) \quad (11.3)$$

pro $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$. Z pokusů dostaneme pro hledané součinitele a_1 až a_n přeuročenou soustavu rovnic

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & & f_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (11.4)$$

Stručně ji zapíšeme takto

$$\{y\} = [F]\{a\} \quad (11.5)$$

Matice $[F]$ je typu $m \times n$, $m > n$. Protože měření nejsou přesná (ani součinitele $\{a\}$ neznáme přesně), budou si rovnice v této soustavě obecně odporovat. Rozdíl $[F]\{a\} - \{y\}$ nebude dávat nulový vektor, ale nějaký reziduální vektor

$$\{r\} = [F]\{a\} - \{y\} \quad (11.6)$$

Je třeba odpovědět na otázku, jak máme odhadnout součinitele $\{a\}$. Jedním z možných způsobů je žádat, aby norma vektoru $\|r\|$ resp. její čtverec

$$\|r\|^2 = \{r\}^T \{r\} = \sum_{i=1}^m r_i^2 \quad (11.7)$$

byly minimální. Dosazením z rovnice (11.6) dostaneme

$$\|r\|^2 = \{a\}^T [F]^T [F] \{a\} - 2 \{a\}^T [F]^T \{y\} + \{y\}^T \{y\} \quad (11.8)$$

Horní index T znamená transpozici matice. Jestliže čtenář maticovému zápisu (11.8) a (11.9) dobře nerozumí, ať si tyto výrazy rozepíše a porovná s výpočtem uskutečněným pomocí součtu r_i^2 podle (11.7).

Výraz (11.8) budeme derivovat podle jednotlivých součinitelů a_1 až a_n a derivace sestavíme do vektoru. Vyjde

$$\frac{\partial \|r\|^2}{\partial \{a\}} = 2 [F]^T [F] \{a\} - 2 [F]^T \{y\} \quad (11.9)$$

Nutná podmínka pro minimum $\|r\|^2$ je, aby se tyto derivace rovnaly nule. Po zkrácení dvěma

$$[F]^T [F] \{a\} - [F]^T \{y\} = \{0\} \quad (11.10)$$

To je soustava tzv. normálních rovnic. Výsledkem řešení je

$$\{a\} = ([F]^T [F])^{-1} [F]^T \{y\}. \quad (11.11)$$

Poznamenejme ještě, že podle (11.10) je

$$[F]^T ([F]\{a\} - \{y\}) = \{0\} \quad (11.12)$$

čili - s přihlédnutím k (11.6) -

$$[F]^T \{r\} = \{0\}. \quad (11.13)$$

Složky reziduálního vektoru r_1, r_2, \dots, r_m tedy už nejsou nezávislé. Vzhledem k odhadu $\{a\}$ podle (11.11) splňují tyto hodnoty rovnici (11.13), tj. soustavu m rovnic

$$\sum_{i=1}^m f_{ij} r_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (11.14)$$

Jak je to s chybami popsaného řešení? O měřických chybách budeme předpokládat, že mají normální (Gaussovo) rozdělení. To znamená, že kladná chyba je stejně pravděpodobná jako záporná chyba o stejné absolutní hodnotě a že chyba je tím pravděpodobnější, čím má menší absolutní hodnotu. Je zvykem definovat

$$\underline{\text{přesná hodnota}} = \underline{\text{přibližná hodnota}} + \underline{\text{chyba}}. \quad \text{*/}$$

Je-li přesná hodnota U a měřená u , pak chyba této hodnoty

$$\varepsilon = U - u \quad (11.15)$$

Opakujeme-li měření N -krát, dostaneme N hodnot

$$\varepsilon^{(i)} = U - u^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11.16)$$

Bude-li N dostatečně velké, pak podle prvního z uvedených předpokladů bude střední hodnota (aritmetický průměr)

$$m \varepsilon^{(i)} = \frac{1}{N} (\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \dots + \varepsilon^{(N)}) = 0. \quad (11.17)$$

*/ V některých monografiích se chyba definuje s opačným znaménkem.

Zde m značí operátor, kterým se z daného souboru vytváří aritmetický průměr. Kdybychom měřili několik veličin u_1, u_2, \dots, u_m , mohli bychom z nich utvořit vektor $\{u\}$ typu $m \times 1$ a psát

$$m\{u\} = \frac{1}{N} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \dots + u_1^{(N)} \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \dots + u_2^{(N)} \\ \vdots \\ u_m^{(1)} + u_m^{(2)} + \dots + u_m^{(N)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{Bmatrix} \sum u_1 \\ \sum u_2 \\ \vdots \\ \sum u_m \end{Bmatrix} \quad (11.18)$$

Nyní ještě zavedeme operátor \mathcal{D} , který z daného vektoru $\{u\}$ vytvoří kovarianční matici

$$\mathcal{D}\{u\} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \sum u_1^2 & \sum u_1 u_2 & \sum u_1 u_m \\ \sum u_2 u_1 & \sum u_2^2 & \sum u_2 u_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum u_m u_1 & \sum u_m u_2 & \sum u_m^2 \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

Aplikujeme-li operátor \mathcal{D} na vektor chyb $\{\varepsilon\}$, budou na diagonále rozptyly měřených hodnot, neboť podle definice

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N} [(\varepsilon_i^{(1)})^2 + (\varepsilon_i^{(2)})^2 + \dots + (\varepsilon_i^{(N)})^2] = \frac{1}{N} \sum \varepsilon_i^2 \quad (11.20)$$

Mimodiagonální prvky budou při nezávislých chybách a při velkém N nulové, protože kladné chyby jsou stejné časté jako záporné a ve smíšených součinech se v součtu ruší. Bude-li rozptyl všech měření stejný, bude podle toho

$$\mathcal{D}\{\varepsilon\} = \sigma^2 [I], \quad (11.21)$$

kde $[I]$ je jednotková matice. Mezi oběma operátory existuje souvislost, kterou pochopíme, srovnáme-li výrazy (11.18) a (11.19)

$$\mathcal{D}\{u\} = m(\{u\}\{u\}^T) \quad (11.22)$$

V naší úloze jsou chyby jednotlivých měření

$$\{\varepsilon\} = \{Y\} - \{y\}. \quad (11.23)$$

Chyby součinitelů budou obdobně

$$\{e\} = \{A\} - \{a\}. \quad (11.24)$$

Protože $\{Y\} = [F]\{A\}$ (přesně), dostaneme pomocí (11.6) z rovnice (11.23)

$$\{\varepsilon\} = [F](\{A\} - \{a\}) + \{r\} = [F]\{e\} + \{r\}. \quad (11.25)$$

Tuto rovnici znásobíme zleva maticí $[F]^T$. S přihlédnutím k vztahu (11.13) vynecháme poslední člen, neboť to bude nulový vektor. Takže

$$[F]^T\{\varepsilon\} = [F]^T[F]\{e\}. \quad (11.26)$$

To je soustava rovnic, která váže skutečné chyby měření a skutečné chyby součinitelů. Skutečné chyby však neznáme, musíme se spokojit s jejich odhadem.

Aplikujeme-li na poslední rovnici operátor m , dostaneme

$$[F]^T m \{\varepsilon\} = [F]^T [F] m \{e\}. \quad (11.27)$$

Vzhledem k platnosti (11.17) bude $m \{\varepsilon\} = \{0\}$, takže

$$m \{e\} = \{0\}. \quad (11.28)$$

To znamená, že při mnohokrát opakovaném měření dá aritmetický průměr odhadnutých součinitelů a_i přesnou hodnotu A_i (aritmetický průměr chyb e_i vymizí pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$). Proto odhad součinitelů $\{a\}$ podle (11.11) považujeme za nestranný.

Aplikujeme-li na vektor $\{e\}$ operátor \mathcal{Q} , dostaneme výpočtem z rovnice (11.26)

$$\mathcal{Q}\{e\} = \mathcal{Q}([F]^T[F])^{-1}[F]^T\{\varepsilon\}. \quad (11.29)$$

Podle (11.22) to bude

$$\mathcal{Q}\{e\} = m([F]^T[F])^{-1}[F]\{\varepsilon\}\{\varepsilon\}^T[F]([F]^T[F])^{-1} \quad (11.30)$$

Protože

$$[C] = [F]^T[F] \quad (11.31)$$

je souměrná matice, musí být $[C]^{-T} = [C]^{-1}$. Pak podle (11.30)

$$\mathcal{D}\{e\} = [C]^{-1} [F]^T m\{\varepsilon\} \{ \varepsilon \}^T [F] [C]^{-1}. \quad (11.32)$$

Podle (11.21) a (11.22) je však

$$m\{\varepsilon\} \{ \varepsilon \}^T = \mathcal{D}\{\varepsilon\} = \sigma^2 [I]. \quad (11.33)$$

Proto podle (11.32) a (11.31)

$$\mathcal{D}\{e\} = \sigma^2 [C]^{-1} [F]^T [F] [C]^{-1} = \sigma^2 [D]^{-1}. \quad (11.34)$$

To znamená, že matice

$$[D] = [C]^{-1} = ([F]^T [F])^{-1} \quad (11.35)$$

znásobená rozptylem σ^2 představuje kovarianční matici chyb $\{e\}$ součinitelů $\{a\}$. Na její diagonále jsou rozptyly těchto součinitelů (srovnej (11.19) a (11.20)):

$$\mathcal{D}\{e\} = \sigma^2 [D] = \begin{bmatrix} \sigma_{a_1}^2 & * & \dots & * \\ * & \sigma_{a_2}^2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \sigma_{a_n}^2 \end{bmatrix} \quad (11.36)$$

Mimo diagonálu jsou nějaká čísla $*$, vyjadřující statistickou vazbu mezi součiniteli a_i , a_j , která nás nezajímá. Střední chyby jednotlivých součinitelů dostaneme odmocněním diagonálních prvků v matici (11.36).

Skutečné chyby ani jejich rozptyly neznáme. Za chyby $\{\varepsilon\} = [F]\{A\} - \{y\}$ vezmeme proto přibližně vektor $\{r\} = [F]\{a\} - \{y\}$ určený pomocí odhadnutých součinitelů $\{a\}$ místo přesných součinitelů $\{A\}$. Složky vektoru $\{r\}$ však nejsou nezávislé, neboť pro ně platí n rovnic (11.14). To znamená, že k odhadu chyby můžeme použít jenom taková měření, jejichž počet $m > n$. Říkáme, že pro určení chyb máme $m-n$ stupňů volnosti. Proto součet $\sum r_i^2$ nedělíme počtem měření m , ale jen činitelem $m-n$. Odhad s^2 rozptylu σ^2 tedy vyjde ze vzorce ^{*}/

^{*}/ Pro $m = n$ bude čitatel i jmenovatel v rovnici (11.37) nulový. Rozptyl tedy nebude možno odhadnout. Musí být $m > n$.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^m r_i^2}{m-n} = \frac{1}{m-n} \{r\}^T \{r\} \quad (11.37)$$

Chceme-li, můžeme ještě dosadit z rovnice (11.6) a (11.11). Po úpravě dostaneme

$$s^2 = \frac{1}{m-n} (\{y\}^T - \{a\}^T [F]^T) \{y\} \quad (11.38)$$

Pro odhad středních kvadratických chyb součinitelů a_i platí podle rovnice (11.36)

$$s_{a_i} = s \sqrt{d_{ii}} \quad (11.39)$$

Počítáme-li regresní křivku z posloupnosti funkcí $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ podle (11.2), sledujeme přitom, zda se přibráním další funkce významně zmenší odhad rozptylu s^2 podle (11.38). Zůstane-li stejný nebo dokonce vzroste, vynecháme člen s funkcí, kterou jsme na-
posledy přidali. Při polynomiální regresi je to Gramův polynom n -tého stupně. Tím je rozhodnuto o tom, jakého stupně má nejspíše být regresní funkce, aby měla rozumný vliv na vyrovnání chyb.

Jiným kritériem mohou být intervaly spolehlivosti pro součinitele a_i . Na hladině významnosti 0,05 je to např. interval

$$\langle a_i - 1,96 s_{a_i} ; a_i + 1,96 s_{a_i} \rangle \quad (11.40)$$

Obsahuje-li tento interval nulu, prohlásíme součinitel a_i za nevý-
znamně různý od nuly a příslušný člen z řady (11.2) vynecháme.

Často mají různá měření y_i různou váhu w_i . To znamená, že také normální rovnice v soustavě (11.10) budou mít různou váhu w_i . Abychom do těchto rovnic váhu snadno dostali, sestavíme z váhových součinitelů w_i diagonální matici

$$[W] = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & w_m \end{bmatrix} \quad (11.41)$$

Místo normy (11.7) budeme minimalizovat výraz

$$\{r\}^T [W] \{r\} = \{a\}^T [F]^T [W] [F] \{a\} - 2 \{a\}^T [F]^T [W] \{y\} + \{y\}^T [W] \{y\} \quad (11.42)$$

a dostaneme místo (11.11) výsledek

$$\{a\} = ([F]^T [W] [F])^{-1} [F]^T [W] \{y\} \quad (11.43)$$

Matice (11.35) tedy bude

$$[D] = ([F]^T [W] [F])^{-1} \quad (11.44)$$

a místo (11.38) dostaneme */

$$\Delta^2 = \frac{1}{m-n} (\{y\}^T - \{a\}^T [F]^T) [W] \{y\} \quad (11.45)$$

Můžeme-li předpokládat, že měříme pokaždé se stejnou přesností, je váha úměrná počtu opakovaných měření. Není-li tomu tak, bere se váha úměrná převrácené hodnotě rozptylu, tj. nepřímo úměrná čtverci střední kvadratické chyby. To vyplývá z Gaussova zákona normálního rozdělení. Čím je tedy menší rozptyl opakovaného měření, tím větší váhu mu přisoudíme. Na konstantě úměrnosti nezáleží; výsledek se nezmění, znásobíme-li všechny váhové součinitele stejným číslem.

12. GOLUBOVA METODA VÝPOČTU ZOBECNĚNÉ INVERZNÍ MATICE

V nejrůznějších úlohách vyrovnávacího počtu se setkáváme s výpočtem zobecněné inverzní matice

$$[G] = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \quad (12.1)$$

*/ Odhad rozptylu normálního rozdělení chyby ε_i dává v tomto případě $\Delta_i^2 = \Delta^2 / W_i$.

k obdélníkové matici $[A]$ typu $m \times n$, $m > n$. Dospějeme k ní při řešení přeурčené soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců, jak jsme to ukázali na příkladu soustavy (11.5). Dostali jsme řešení (11.11), v němž na pravé straně vystupuje zobecněná inverzní matice k matici $[F]$.

Máme-li tedy přeурčenou soustavu rovnic

$$[A]\{x\} = \{b\}, \quad (12.2)$$

je její řešení metodou nejmenších čtverců

$$\{x\} = [G]\{b\}, \quad (12.3)$$

kde $[G]$ se vypočítá podle předpisu (12.1). Klíčovou roli v tomto výpočtu hraje inverze souměrné matice $([A]^T[A])$. V minulé kapitole jsme viděli, že její inverze

$$[D] = ([A]^T[A])^{-1} \quad (12.4)$$

násobená rozptylem náhodných hodnot $\{b\}$ dává na diagonále rozptyly hodnot $\{x\}$. ^{**/}

Často se stává, zvláště jde-li o regresní analýzu s lineární kombinací neortogonálních funkcí nezávisle proměnné, že matice $([A]^T[A])$ je špatně podmíněná a výpočet její inverze zatížen velkými zaokrouhlovacími chybami. ^{**/} Byl proto sestaven algoritmus výpočtu inverzní matice $([A]^T[A])^{-1}$, který pracuje přímo s maticí $[A]$ a nikoli se součinem $[A]^T[A]$. Tak se dosahuje podstatného zvýšení přesnosti výpočtu (asi jaké by odpovídalo zdvojnásobení počtu platných cifer).

Všimněme si nejprve matice tvaru

$$[R] = \left([I] - 2 \frac{\{v\}\{v\}^T}{\{v\}^T\{v\}} \right). \quad (12.5)$$

^{**/} Srovnej s rovnicí (11.36), kde šlo o rozptyly prvků vektoru $\{a\}$. Ten nyní značíme obecněji $\{x\}$.

^{**/} Jde zejména o regresní funkci ve tvaru polynomu

$$y(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_n t^n$$

Podrobněji viz RALSTON, A.: Základy numerické matematiky. Praha, Academia 1973.

Je zřejmě souměrná, neboť $[R]^T = [R]$. Je ortogonální, protože

$$[R]^T[R] = [I]. \quad (12.6)$$

To znamená, že transformací

$$\{y\} = [R]\{x\} \quad (12.7)$$

se délka vektoru nezmění. Je totiž

$$\|y\|^2 = \{y\}^T\{y\} = \{x\}^T[R]^T[R]\{x\} = \{x\}^T\{x\} = \|x\|^2. \quad (12.8)$$

Matice $[R]$ má ještě jednu důležitou vlastnost. Násobíme-li ji zprava vektorem $\{v\}$, dostaneme

$$\begin{aligned} [R]\{v\} &= \{v\} - 2 \frac{\{v\}\{v\}^T\{v\}}{\{v\}^T\{v\}} = \{v\} - 2 \frac{\{v\}\|v\|^2}{\|v\|^2} = \\ &= \{v\} - 2\{v\} = -\{v\}. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, aby jedna osa byla rovnoběžná s vektorem $\{v\}$, pak operátor $[R]$ změní tuto souřadnici na opačnou (změní její znaménko), kdežto ostatní souřadnice ponechá beze změny. ^{*}/ Způsobuje tedy zrcadlení (reflexi, odtud označení $[R]$).

Householderova transformace spočívá v tom, že se hledá reflexní matice $[R]=[H]$, která by způsobovala eliminaci poddiagonálních prvků z jednoho sloupce. Označme $[H_i]$ matici, která takto změní i -tý sloupec. Například bude platit, že

$$[H_3] \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & k \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & n & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}. \quad (12.10)$$

^{*}/ Pro vektor $\{u\}$ kolmý k $\{v\}$ platí, že $\{u\}^T\{v\} = \{0\}$. Pak také $[R]\{u\} = \{u\}$, jak se přesvědčíme dosazením.

Budeme-li tuto transformaci znát, můžeme danou matici postupně transformovat na tvar, v němž budou pod hlavní diagonálou jen nuly.

Golub rozpoznal výhodu této metody při řešení přeuročené soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců. Je-li reziduální vektor $\{r\} = [A]\{x\} - \{b\}$ transformován užitím ortogonální matice $[H]$ do vektoru $[H]\{r\}$, je lhostejné - za předpokladu přesného počítání - , zda minimalizujeme výraz $\{r\}^T\{r\}$ nebo $\{r\}^T[H]^T[H]\{r\}$ vzhledem k složkám vektoru $\{x\}$. V obou případech jde totiž o čtverec "délky" vektoru a oba vektory, $\{r\}$ i $[H]\{r\}$, jsou stejně "dlouhé". A tak užitím opakované Householderovy transformace převedeme nejprve vektor $\{r\}$ např. na tvar

$$\left\{ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} \quad (12.11)$$

Hvězdičkou označujeme nenulová čísla. Vzhledem k nulám v dolní části je zřejmé, že žádnou volbou činitelů x_1 , x_2 , x_3 nemůžeme změnit subvektor r_2 . Horní část soustavy (12.11) dává pro dané r_1 jednoznačné řešení x_1 až x_3 a naopak. Vektor $\{r\}$ bude mít jen tehdy minimální normu vzhledem k $\{x\}$, bude-li $\{r_1\} = \{0\}$, neboť část $\{r_2\}$ nemůžeme volbou $\{x\}$ ovlivnit. Odtud dostaneme ihned $\{x\}$, aniž potřebujeme počítat matici $([A]^T[A])^{-1}$. V tom je právě vtíp Golubovy metody. ^{*}/

Pozorný čtenář jistě postřehl, v čem se liší Householderova transformace (12.10) od Gaussovy eliminační metody. V obou případech transformujeme matici soustavy na tvar, v němž máme pod hlavní diagonálou nuly. Na rozdíl od Gaussovy metody nemění Householderova transformace normu vektoru, neboť matice této transformace je ortogonální.

Zbývá ještě určit reflexní matici $[H]$ tak, aby měla požadované vlastnosti. Do rovnice (12.5) zkusíme dosadit např.

$$\{v\} = [0 \quad 0 \quad (a_3 - s) \quad a_4 \quad a_5]^T \quad (12.12)$$

a s maticí $[H] = [R(v)]$ pak násobit vektor $[a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5]^T$.

^{*}/ GOLUB, G.: Numerical methods for solving linear least squares problems. - "Numerische Mathematik" sv. 7 (1965), s. 206-216.

Dostaneme (pro určitou hodnotu λ)

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{(a_3 - \lambda)^2 + a_4^2 + a_5^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 - \lambda \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ (a_3 - \lambda) a_4 a_5] \right) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 - \lambda \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

Snadno se přesvědčíme, že vztah (12.13) bude opravdu platit, zvolíme-li

$$\lambda = \pm \sqrt{a_3^2 + a_4^2 + a_5^2} \quad (12.14)$$

K tomu stačí rozepsat příslušné součiny a porovnat oba druhé členy v rovnici (12.13). Když porovnáme operaci $[H][a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]^T$ podle (12.13) s operací naznačenou v rovnici (12.10), poznáme že $[H]$ je hledanou Householderovou maticí $[H_3]$ pro eliminaci prvků l, n z třetího sloupce. První a druhý sloupec se touto transformací neovlivní. Hodnotu λ podle (12.14) počítáme od prvku na diagonále toho sloupce, v němž chceme mít po transformaci nulové poddiagonální prvky. V ukázaném příkladu tedy od a_3 .

Příklad

Řešte přeurčenou soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

metodou nejmenších čtverců.

Řešení

První Householderovu transformaci zvolíme tak, abychom eliminovali v prvním sloupci všechny prvky s výjimkou prvního. Bude

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{25} = 5, \\ [H_1] &= [I] - \frac{2}{10} \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vynásobením dané soustavy touto maticí dostaneme

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 25 & -5 & 18 \\ 0 & 15 & 11 \\ 0 & 10 & 7 \\ 0 & -5 & 20 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{Bmatrix} 26 \\ 17 \\ 14 \\ 20 \\ 33 \end{Bmatrix}.$$

Pětinu můžeme na obou stranách zkrátit. To má ovšem význam jen při ručním počítání. V dalším kroku bude

$$\Delta = \sqrt{15^2 + 10^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{375} \doteq 19,364917.$$

Budeme mít

$$\{v\} = [0, -4,3649167, 10, -5, -5]^T$$

a transformační matice vyjde

$$[H_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7745967 & 0,5163977 & -0,2581988 & -0,2581988 \\ 0 & 0,5163977 & -0,1830644 & 0,5915322 & 0,5915322 \\ 0 & -0,2581988 & 0,5915322 & 0,7042333 & -0,2957661 \\ 0 & -0,2581988 & 0,5915322 & -0,2957661 & 0,7042333 \end{bmatrix} .$$

Vynásobením dostaneme

$$\begin{bmatrix} 25 & -5,0 & 18,0 \\ 0 & 19,364916 & 4,6475824 \\ 0 & 0 & 21,553358 \\ 0 & 0 & 12,723215 \\ 0 & 0 & 1,7231063 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26,0 \\ 6,7131753 \\ 37,567066 \\ 8,2161094 \\ 21,216238 \end{Bmatrix} .$$

Konečně při třetí transformaci je

$$\Delta = \sqrt{21,553358^2 + 12,723215^2 + 1,7231063^2} = 25,087777, \\ \{v\} = [0, 0, -3,5344186, 12,723215, 1,7231063]^T .$$

Vyjde

$$[H_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8591179 & 0,5071479 & 0,0686831 \\ 0 & 0 & 0,5071479 & -0,8256334 & -0,2472457 \\ 0 & 0 & 0,0686831 & -0,2472457 & 0,9665154 \end{bmatrix} .$$

Transformovaná soustava má tvar

$$\begin{bmatrix} 25 & -5,0 & 18,0 \\ 0 & 19,364916 & 4,6475824 \\ 0 & 0 & 25,087776 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26,0 \\ 6,7131753 \\ 37,898519 \\ 7,0229407 \\ 21,054646 \end{Bmatrix} .$$

Řešením prvních tří řádků dostaneme

$$x_1 = 0,050835764,$$

$$x_2 = 0,01588615,$$

$$x_3 = 1,5106369.$$

Poslední dva řádky dají normu reziduálního vektoru, ovšem po násobení pětinou, kterou jsme krátili

$$\begin{aligned} \|r\| &= \sqrt{\{r\}^T \{r\}} = \sqrt{\{r_2\}^T \{r_2\}} = \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{7,02294^2 + 21,0546^2} \approx 4,439. \end{aligned}$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že touž normu reziduálního vektoru dostaneme z původní netransformované soustavy rovnic. Je totiž

$$r_1 = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = -1,6396602$$

$$r_2 = -2x_1 + x_2 + x_3 - 5 = -3,4035778$$

$$r_3 = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2 = 0,9227794$$

$$r_4 = x_1 - x_2 + 4x_3 - 4 = 2,0584336$$

$$r_5 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5 = -0,5856471$$

$$\|r\|^2 = \sum r_i^2 = 19,70448$$

$$\|r\| = 4,438973$$

1. poznámka

Golubovy metody by bylo možno užít také k řešení úlohy s vedlejšími podmínkami. Pro n neznámých je dáno k podmínek ($k < n$), jež musí být splněny přesně, a m podmínek, jež splníme jen přibližně metodou nejmenších čtverců. Přitom $m > n - k$. Např. v soustavě

$$\begin{bmatrix} A \\ -B \end{bmatrix} \{x\} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (12.15)$$

chceme přesně splnit $[A]\{x\} = \{a\}$, přibližně $[B]\{x\} = \{b\}$. Nechť $[A]$ je typu 2×4 , $[B]$ typu 3×4 . Householderovy matice vypočtené pro řádky (místo pro sloupce) označíme $[\tilde{H}_i]$. Bude např.

$$\{y\} = [\tilde{H}_2][\tilde{H}_1]\{x\}. \quad (12.16)$$

Pro zpětnou substituci platí

$$\{x\} = [\tilde{H}_1][\tilde{H}_2]\{y\}, \quad (12.17)$$

neboť $[\tilde{H}_1][\tilde{H}_2][\tilde{H}_2][\tilde{H}_1] = [I]$ (Householderova matice je ortogonální a souměrná). Dosazením (12.17) do (12.15) převedeme tuto soustavu na tvar

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [\tilde{H}_1][\tilde{H}_2]\{y\} = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}. \quad (12.18)$$

Násobením $[H_3]$, $[H_4]$ zleva dostaneme

$$\begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & 0 & \times \\ \times & \times & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ * \\ * \\ * \end{Bmatrix} \quad (12.19)$$

V daném příkladu jsou matice $[\tilde{H}_i]$ typu 4×4 , matice $[H_i]$ typu 5×5 . Z prvních dvou řádků soustavy (12.19), které musí platit přesně, dostaneme jednoznačně y_1 , y_2 . Proto tyto dvě proměnné nemohou ovlivnit normu zbytkového vektoru (přesnost splnění zbývajících tří rovnic). Protože ostatní proměnné y_3 , y_4 vůbec nevstupují do posledního řádku (násobí se nulami), můžeme čtvrtý řádek vynechat. Zbývá třetí a čtvrtý řádek, jež lze vždy přesně splnit volbou y_3 a y_4 . Tím dostaneme celý vektor $\{y\}$. Vektor $\{x\}$ pak plyne z rovnice (12.17).

2. poznámka

Užitím Golubovy metody převedeme soustavu rovnic

$$[A]\{x\} = \{a\} \quad (12.20)$$

na tvar $[H][A]\{x\} = [H]\{a\}$ čili

$$\begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \{x\} = \begin{Bmatrix} b \\ c \end{Bmatrix}. \quad (12.21)$$

Zde $[U]$ značí horní trojúhelníkovou matici [srovnej s (12.11)] .
Odtud plyne jednak

$$\{x\} = [U]^{-1}\{c\}, \quad (12.22)$$

jednak

$$\|r\|^2 = \{c\}^T\{c\}. \quad (12.23)$$

V rovnici (12.11) totiž pokládáme $\{r_1\} = \{0\}$. Proto $\{r\}^T\{r\} = \{r_2\}^T\{r_2\} = \{c\}^T\{c\}$. Chceme-li najít matici $[D] = ([A]^T[A])^{-1}$ podle (11.35), vypočteme ^{*}/

$$[A]^T[A] = [U^T \mid 0] \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} = [U]^T[U] \quad (12.24)$$

a dále

$$([A]^T[A])^{-1} = [U]^{-1}[U]^{-T} \quad (12.25)$$

Lze dokázat, že inverze horní trojúhelníkové matice je opět horní trojúhelníková matice. K jejímu výpočtu máme velmi jednoduchý algoritmus. Označme $[\tilde{R}] = [U]^{-1}$. Především si všimneme, že z rovnice $[\tilde{R}][U] = [I]$ dostaneme

$$\tilde{r}_{kk} = u_{kk}^{-1}. \quad (12.26)$$

Mimo to - z definice součinu matic - platí vztahy

$$\sum_{i=k}^j \tilde{r}_{ki} u_{ij} = 0 \quad \text{pro } k = j-1, j-2, \dots, 1, \quad (12.27)$$

z nichž vypočítáme všechny mimodiagonální prvky matice $[\tilde{R}]$. Zobecněná inverzní matice je pak

$$[G] = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T = [U]^{-1}[U]^{-T}[A]^T. \quad (12.28)$$

Vypočetli jsme ji, aniž jsme potřebovali invertovat špatně podmíněnou matici $([A]^T[A])$.

^{*}/ V 11. kapitole jsme užili jiného označení, neboť jsme sledovali jiný cíl než zde. Nezaměňujte proto matici $[A]$ s vektorem $\{A\}$ z předchozí kapitoly. Tam byla matice soustavy značena $[F]$.

Program

Připojený program v jazyku FORTRAN vypracoval Don C. Riley. Řeší se jím jen přeурčené soustavy rovnic ($m > n$, jinak řešení selhává).

```
SUBROUTINE GOLUB (A,X,B,M,N)

C
C   DANO A(M,N); B(M) PRO M > N . HLEDA SE X(N) TAKOVE
C   ABY  $\|B - AX\| = \text{MINIMUM}$ 
C   GOLUBOVA METODA, NUMERISCHE MATHEMATIK 7 (1965), 202-216
C   IMPLICIT DOUBLE PRECISION (D)
C   REAL A(M,N), X(N), B(M), U (50)
C   DIMENSION U(M)
C   USKUTECNUJE N ORTOGONALNICH TRANSFORMACI MATICE A (. , .)
C   NA HORNÍ TROJUHELNÍKOVÝ TVAR
      DO 3010 K = 1, N
        DSUM = 0.0 D 0
        DO 1010 I = K, M
          DAJ = A(I,K)
1010    DSUM = DSUM + DAJ * * 2
          DAI = A(K,K)
          DSIGMA = DSIGN (DSQRT (DSUM), DAI)
          DBI = DSQRT (1.0 D 0 + DAI / DSIGMA)
          DFACT = 1.0 D 0 / (DSIGMA * DBI)
          U(K) = DBI
          FACT = DFACT
          KPLUS = K + 1
          DO 1020 I = KPLUS, M
8020    U(I) = FACT * A(I,K)
C   I - U U' JE SOUMERNA ORTOGONALNÍ MATICE
C   VYNASOBENÍM ANULUJE V MATICI A (. , .)
C   PRVKY POD DIAGONALOU K
      DO 2030 J = K, M
```

```

C      ORTOGONALNI TRANSFORMACE
      FACT = 0.0
      DO 2010 I = K, M
2010   FACT = FACT + U(I) * A(I,J)
      DO 2020 I = K, M
2020   A(I,J) = A(I,J) - FACT * U(I)
2030   CONTINUE
      FACT = 0.0
      DO 2040 I = K, M
2040   FACT = FACT + U(I) * B(I)
      DO 2050 I = K, M
2050   B(I) = B(I) - FACT * U(I)
3010   CONTINUE
C      ZPETNA SUBSTITUCE DAVA X(N)
      X(N) = B(N) / A(N,N)
      LIM = N - 1
      DO 4020 I = 1, LIM
      IROW = N - I
      SUM = 0.0
      DO 4010 J = 1, I
4010   SUM = SUM + X(N - J + 1) * A(IROW, N - J + 1)
4020   X(IROW) = (B(IROW) - SUM) / A(IROW, IROW)
      RETURN
      END

```

13. AUTOMATICKÁ VOLBA STUPNICE

Často bývá výsledkem výpočtu nějaká funkce $f(x,y) = 0$ nebo $y = y(x)$, kterou dostáváme na výstupu z počítače jako diskretní soubor dvojic (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$. Chceme vytisknout tabulku nebo nakreslit graf funkce na souřadnicovém zapisovači (plotteru). K tomu potřebujeme zvolit vhodnou stupnici.

Na příkladu výběru stupnice pro proměnnou x ukážeme, jak lze tento postup automatizovat.

Z daného souboru (x_i) vybereme maximální resp. minimální prvek x_{\max} resp. x_{\min} . Definujeme celé číslo I vztahem

$$I = \left[\log \left\{ \frac{x_{\max} - x_{\min}}{S} \right\} \right]. \quad (13.1)$$

Zde \log značí Briggsův dekadický logaritmus. Hranatá závorka značí, že číslo je zaokrouhлено dolů (na celou hodnotu). S značí hodnotu dílku stupnice; předpokládáme, že stupnice bude dělena na stejné intervaly. Veličina S má stejný fyzikální rozměr jako proměnná x , takže ve složené závorce (13.1) je vždy bezrozměrová hodnota. Vypočteme

$$C = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{10^I \cdot S} \quad (13.2)$$

Vyjde $1 \leq C < 10$. Nyní vybereme číslo D tak, aby to bylo nejmenší číslo ze souboru (1,5; 2; 2,5; 5; 10), pro které $D \geq C$. Pak $SD \cdot 10^I$ obsahuje rozpětí od x_{\min} do x_{\max} .

Definujeme celá čísla

$$J = \left[\frac{x_{\min}}{D \cdot 10^I} \right]; \quad E = D \cdot 10^I \cdot J. \quad (13.3)$$

E je návrh počátku stupnice. Ověříme, zda je splněna podmínka

$$x_{\max} \leq E + D \cdot 10^I \cdot S. \quad (13.4)$$

Jestliže ano, je stupnice navržena. Ne-li, zvětší se D na nejbližší vyšší prvek v příslušném souboru. Kdyby však už bylo $D = 10$, pak zvětšíme I o jednotku a položíme $D = 2$. Počátek stupnice je E , konec $E + D \cdot 10^I \cdot S$.

Příklad

Chceme navrhnout stupnici pro x_i , je-li $x_{\min} = 1001$, $x_{\max} = 9999$ a to tak, aby hodnoty x byly odstupňovány po deseti ($S = 10$). Podle (13.1) je

$$I = \left[\log \frac{9999 - 1001}{10} \right] = \left[\log 899,8 \right] = \left[2,954146 \right] = 2.$$

Z rovnice (13.2)

$$C = \frac{8998}{10^2 \cdot 10} = 8,998.$$

Tomu odpovídá $D = 10 > c$. Máme tedy $SD \cdot 10^I = 10 \cdot 10 \cdot 10^2 =$
 $= 10\ 000 > x_{\max} - x_{\min} = 8998$. Pak podle (13.3)

$$J = \left[\frac{1001}{1000} \right] = [1,001] = 1,$$

$$E = 10 \cdot 10^2 \cdot 1 = 1000.$$

Podmínka (13.4)

$$9999 \leq 1000 + 10 \cdot 100 \cdot 10 = 11\ 000$$

je splněna.

Stupnice tedy začíná číslem 1000 a končí číslem 11 000.
 Má $D \cdot 10^I = 1000$ intervalů po $S = 10$ jednotkách, tj. celkem 10 000
 jednotek. Obsahuje celý interval, který nás zajímá.*/

14. AUTOMATICKÉ KRESLENÍ EKVISKALÁRNÍCH ČAR

Řešíme-li na počítači diferenční metodou nebo metodou konečných
 prvků teplotní nebo jiné fyzikální pole v rovinné oblasti nebo zjišťu-
 jeme-li toto pole experimentálně na pravidelné síti vybraných bodů,
 dostáváme velké množství dat, která potřebujeme vhodně znázornit, aby-
 chom získali přehled o jejich průběhu a mohli je lépe interpretovat.
 Nejčastěji bývá síť pravidelná, čtvercová nebo obdélníková, méně často
 trojúhelníková nebo nepravidelná.

Jedním ze způsobů znázornění funkce $Z = f(x, y)$ nad rovinnou
 oblastí je kreslení ekviskalárních čar $Z = \text{konst.}$ Tuto konstantu
 volíme odstupňovanou tak, aby síť byla přiměřeně hustá. Popsaným způ-
 sobem se v geografických mapách znázorňuje terén pomocí vrstevnic.

Budeme předpokládat, že známe hodnoty $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ nad pravidel-
 nou obdélníkovou sítí se souřadnicemi uzlových bodů

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + i \Delta x, \\ y_j &= y_0 + j \Delta y, \end{aligned} \tag{14.1}$$

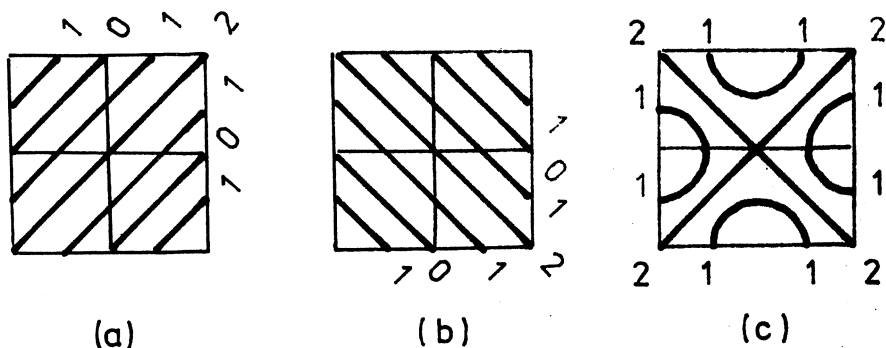
*/ Podle R. K. Otnese a L. Enochsona, l.c.

$\Delta x = \text{konst}$, $\Delta y = \text{konst}$, i, j celá čísla, $i = 0, 1, \dots, n$,
 $j = 0, 1, \dots, m$.

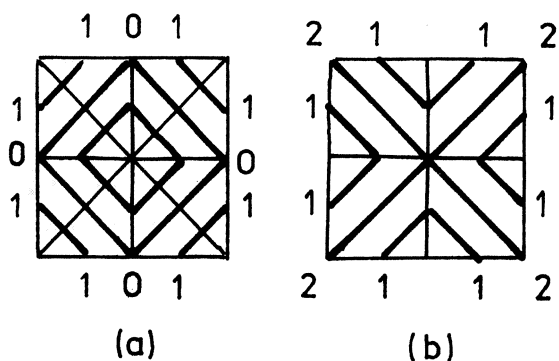
Kdybychom kreslili ekviskalární křivky (izolinie) od oka, snažili bychom se odhadnout jejich tvar tak, aby na dané síti popř. na diagonálách této sítě splňovaly požadavek správné interpolace. Úloha má však úskalí v tom, že řešení není jednoznačné ani při přesně zvoleném způsobu interpolace. Obtíž vzniká zvláště tehdy, není-li síť dostatečně hustá anebo je-li funkce v blízkém okolí určitého bodu skoro konstantní. Máme-li např. síť složenou ze čtyř čtverců s funkčními hodnotami

$$[z_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (14.2)$$

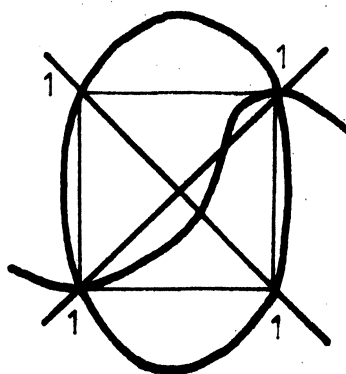
můžeme nakreslit ekviskalární čáry "stejným právem" podle obr. 20 a obr. 21. Jsou-li v uzlech čtverce na obr. 22 zadány stejné hodnoty $z_{ij} = 1$, pak izolinie $z = 1$ může mít v daném čtverci jakýkoli průběh. Vidíme, že subjektivní pohled kresliče může výsledek velmi snadno "zkazit" i "zachránit". Jak mají "doopravdy" izolinie na obr. 20 nebo 21 probíhat, to bez dalších informací nevíme; můžeme se jen dohadovat podle průběhu funkce $z = f(x, y)$ v dalším okolí kritického místa.



Obr. 20



Obr. 21

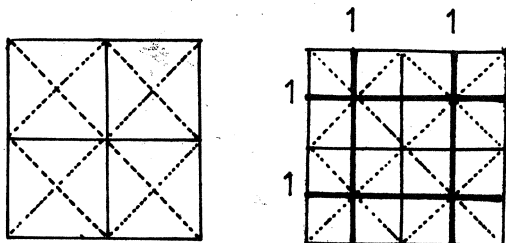


Obr. 22

Chceme-li tuto zdlouhavou a namáhavou práci svěřit počítači, musíme mu dát jasné instrukce i pro tak sporné případy, o jakých jsme právě pojednali. Nic nemůže být ponecháno bez odpovědi promyšlené předem.

Ideální by bylo, kdyby počítač kreslil hladké izolinie. To však není možné. Má-li počítač vůbec nějakou křivku kreslit, musíme mu zadat krok v jedné proměnné (dostatečně malý, aby lomená čára složená z úseček náležitě imitovala hladkou křivku) a návod, jak vypočítat druhou proměnnou při $z = \text{konst}$, když $z = f(x, y)$ je hladká funkce. Protože máme zadány jen hodnoty funkce v uzlových bodech sítě, není funkce $f(x, y)$ mimo tyto body nijak předem definována. Musíme ji definovat dodatečně, tj. zvolit "dešifrovací klíč"; to je snadné, volíme-li k tomu polynomiální nebo goniometrickou interpolaci. Avšak výpočet explicitní závislosti $y = y(x)$ resp. $x = x(y)$ při $f(x, y) = z = \text{konst}$ by nebyl dost efektivní a kreslení by pokračovalo jen pomalu. Kromě toho by se mohlo stát, že námi definovaná plocha $z = f(x, y)$ by nevystihovala správně skutečný průběh (mohla by být nevhodně "zvlněná").

Proto se požadavek hladkosti křivek zmírňuje na požadavek "vizuální hladkosti". To znamená, že křivky jsou po částech hladké, ale zlomy na nich nejsou příliš patrné. Pak stačí, omezíme-li se při interpolaci nad daným obdélníkem na plochu $z = f(x, y)$ určenou pouze pomocí menšího počtu hodnot $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ na uzlech vybraných z blízkého okolí (např. z 12-ti nebo 16-ti uzlových bodů). Abychom nemusili vždy znovu hledat kořeny implicitní funkce $f(x, y) = \text{konst}$, můžeme použít derivace dy/dx k přibližnému vyjádření poměru přírůstků $\Delta y / \Delta x$. Zvolíme např. Δx a vypočteme Δy . Protože by se chyby mohly postupně hromadit, musili bychom polohu bodu izolinie občas korigovat poměrně zdlouhavým řešením implicitní interpolační funkce. Tyto potíže odpadnou, upustíme-li od požadavku hladkosti úplně. Pak stačí, rozdělíme-li dané pole na trojúhelníky a v každém z nich použijeme lineární interpolační funkce. Ekviskalární čára je pak lomená a skládá se z úseček. Tohoto způsobu se v praxi používá nejčastěji.



Obr. 23

Nemá-li se uměle zdůrazňovat nějaký směr na úkor jiného, musí se obdélníkové pole rozdělit na čtyři trojúhelníky (obr. 23). Uzlu uprostřed přisoudíme hodnotu vzniklou utvořením aritmetického průměru hodnot ve vrcholech obdélníku, což odpovídá lineární interpolaci. Tím dosáhneme jednak zjemnění sítě, jednak předejdeme

případnému hrubému zkresení, jaké ukazuje srovnání obr. 20 a, b. Pro hodnoty zadané maticí (14.2) dostaneme průběh podle obr. 23.

Existuje však ještě jedna možnost, jak interpolovat v pravouhlé síti bez toho, že bychom ji dělili na trojúhelníky, a zároveň zachovat jednoduchost algoritmu lineární interpolace. Je to interpolace užitím bilineárního polynomu

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy. \quad (14.3)$$

Tento polynom obsahuje čtyři konstanty, které můžeme vypočítat tak, aby ve vrcholech $i = 1, 2, 3, 4$ bylo $z = z_i$; bude ^{*}/

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}. \quad (14.4)$$

Zkráceně

$$\{z\} = [A]\{a\} \quad (14.5)$$

Odtud vypočteme koeficienty polynomu

$$\{a\} = [A]^{-1}\{z\}. \quad (14.6)$$

Rovnice (14.3) může být pro $z = k = \text{konst}$ snadno řešena pro kteroukoli z obou proměnných

$$x = \frac{k - a_0 - a_2y}{a_1 + a_3y}; \quad y = \frac{k - a_0 - a_1x}{a_2 + a_3x}. \quad (14.7)$$

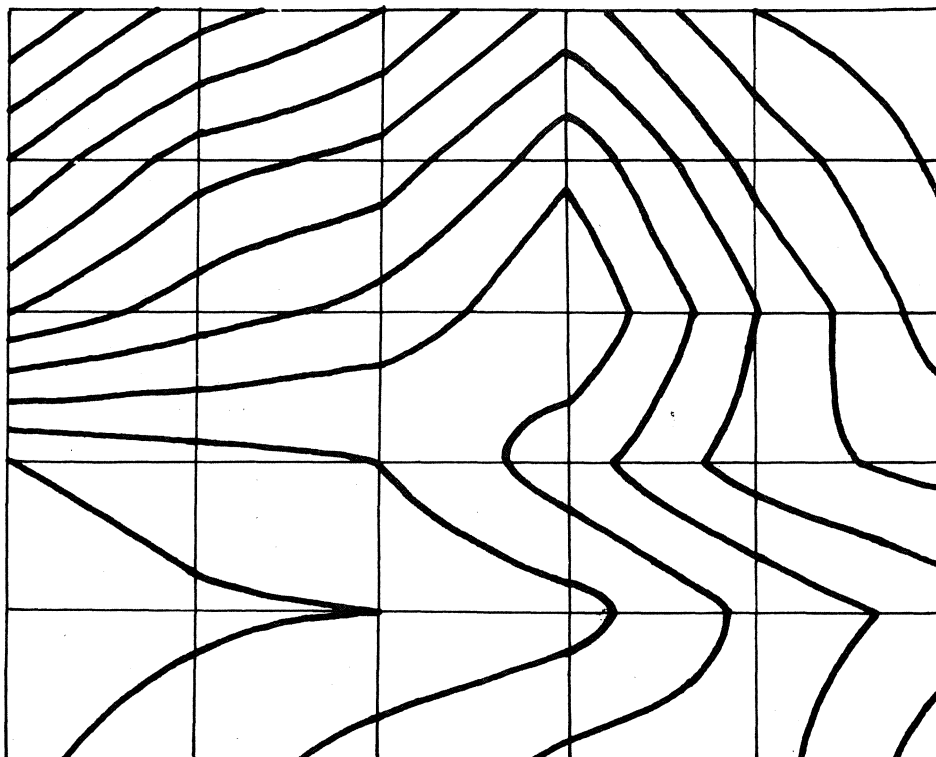
Je to rovnice hyperboly s asymptotami $y = -a_1/a_3$ resp. $x = -a_2/a_3$.

Použití rovnice (14.3) je výhodné jednak proto, že izolinie jsou složeny z oblouků a působí estetičtěji než lomené čáry složeny z úseček, jednak proto, že odpadá jakékoli dělení zadané sítě, takže kreslení probíhá dokonce rychleji než při lineární interpolaci s dělením každého obdélníku na čtyři trojúhelníky.

^{*}/ Zde používáme jednoindexového označení podle očíslovaných vrcholů.

Program pro kreslení izoliní (ekviskalárních čar) však musí být vypracován tak, aby předvídal všechny možnosti, které se mohou vyskytnout. Především se určuje poloha asymptot. Podle toho se volí buď x nebo y za nezávisle proměnnou. Musí se také pamatovat na možný případ degenerace hyperboly (14.3) na dvě různoběžky.

Uvedeme jednoduchou verzi programu, podle něhož lze nakreslit ekviskalární křivky v obdélníkovém poli s pravidelnou pravoúhlou sítí. Funkční hodnoty v uzlových bodech se zadávají jako prvky matice $Z(I, J)$. Program je vypracován v jazyku BASIC pro HP 9830 A s rozšířencu paměti. ^{*}/



Obr. 24

Pomíjíme možnost postupného zjemňování sítě nelineární interpolací, neboť tato metoda se nehodí pro malé počítače.

Na obr. 24 jsou zakresleny izoliny skalárního pole zadaného maticí 6 x 6

^{*}/ Vypracoval RNDr. V. Höschl

$$[Z(I,J)] = \begin{bmatrix} 80 & 68 & 60 & 48 & 60 & 65 \\ 65 & 52 & 48 & 36 & 52 & 61 \\ 50 & 42 & 38 & 30 & 45 & 58 \\ 25 & 28 & 30 & 38 & 48 & 52 \\ 20 & 24 & 25 & 28 & 36 & 42 \\ 24 & 28 & 32 & 36 & 38 & 48 \end{bmatrix} \quad (14.8)$$

s krokem $\Delta Z = 5$. Tyto hodnoty neodpovídají žádnému fyzikálnímu poli ani hladké matematické funkci; byly zvoleny uměle, takže k nim příslušší dost nepravidelný průběh izolinií.

Poznámky k programu

Po vložení dat se vytiskne celá matice $[Z(I,J)]$ a výpočet se zastaví na řádce 160. Nyní je možno zkontrolovat vložené hodnoty a popř. je opravit. Po opětovném spuštění programu se podle příkazu na řádce 250 objeví na displeji požadavek, aby řešitel vložil hodnotu ΔZ (krok izolinií, tj. celé číslo vybrané tak, aby pole izolinií bylo přiměřeně husté). Před vložení této hodnoty je možné změnit barvu písátka, aby se rozlišila základní pravouhlá síť od izolinií. Na řádce 630 je příkaz, podle něhož se na displeji objeví hodnota příslušná izolinii, která se právě počíná kreslit. Po nakreslení celé mapy se počítač zastaví na řádce 860. Po výměně papíru a opětovném spuštění programu se počítač vrátí na řádek 190 a nakreslí další mapu pro stejnou matici vložených dat. Kreslení mapy lze tedy opakovat, aniž se musí znovu vkládat vstupní hodnoty.

```

010 REM KRESLENI EKVISKALARNICH CAR V PRAVOUHLE SITI
020 REM ZADANE DISKRETNI HODNOTY POLE Z(I,J)
030 DIM ZS (30,40)
040 DISP "POCET RADKU = ";
050 INPUT R
060 DISP "POCET SLOUPCU = ";
070 INPUT S
080 REM VKLADANI DAT PO RADCICH
090 FOR I = 1 TO R
100 FOR J = 1 TO S
110 DISP "Z (" I "; " J ") = ";

```

```

120 INPUT Z(I,J)
130 NEXT J
140 NEXT I
150 MATPRINT Z
160 STOP
170 REM SIT SE TRANSFORMUJE NA CTVERCE 2 * 2
180 SCALE 0, 2 * (S - 1), 0, 2 * (R - 1)
190 FOR I = 0 TO 2 * (R - 1) STEP 2
200 XAXIS I
210 NEXT I
220 FOR J = 0 TO 2 * (S - 1) STEP 2
230 YAXIS J
240 NEXT J
250 DISP "KROK IZOLINII DELTA Z = ";
260 INPUT K
270 REM POCATEK HLAVNIHO CYKLU
280 FOR I = 1 TO R - 1
290 FOR J = 1 TO S - 1
300 A = Z (I + 1, J) / 4
310 B = Z (I + 1, J + 1) / 4
320 C = Z (I, J) / 4
330 D = Z (I, J + 1) / 4
340 REM VYPOCET KOEFICIENTU INTERPOLACNIHO POLYNOMU
350 A0 = A + B + C + D
360 A1 = - A + B - C + D
370 A2 = - A - B + C + D
380 A3 = A - B - C + D
390 IF ABS (A3) > 1 E - 10 THEN 420
400 D = D - 0.0001 * K
410 GOTO 350
420 REM LOKALNI SOURADNICE ASYMPTOT
430 X1 = - A2/A3
440 Y1 = - A1/A3

```



```

450 Z1 = A0 - A3 * X1 * Y1
460 REM SOURADNICE STREDU OBDELNIKU
470 X0 = 2 * J - 1
480 Y0 = 2 * (R - I) - 1
490 REM VYBER MAX/MIN HODNOTY V OBDELNIKU
500 IF A > B THEN 540
510 M2 = B
520 M1 = A
530 GOTO 560
540 M2 = A
550 M1 = B
560 P = C
570 GOSUB 1130
580 P = D
590 GOSUB 1130
600 REM Q = HODNOTA IZOLINIE, KTERA SE BUDE KRESLIT
610 Q = K * INT (M1 / K + (M1 # 0))
620 FIXED 2
630 DISP Q
640 WAIT 500
650 IF ABS (Q - Z1) < 0.001 * K THEN 1010
660 REM KRESLENI IZOLINIE
670 IF ABS (X1) > ABS (Y1) THEN 880
680 Y = - 1.1
690 Y = Y + 0.1
700 IF Y > 1 THEN 810
710 U = Y1 - Y
720 IF U = 0 THEN 790
730 X = (Q - A0 - A2 * Y) / (A1 + A3 * Y)
740 IF 1 < ABS (X) THEN 790
750 IF 0 < U AND U < 0.1 THEN 780
760 PLOT X0 + X, Y0 + Y
770 GOTO 690

```

```

780 PLOT X0 + X, Y0 + Y
790 PEN
800 GOTO 690
810 PEN
820 Q = Q + K
830 IF Q < M2 THEN 630
840 NEXT J
850 NEXT I
860 STOP
870 GOTO 190
880 X = - 1.1
890 X = X + 0.1
900 IF X > 1 THEN 810
910 U = X1 - X
920 IF U = 0 THEN 990
930 Y = (Q - A0 - A1 * X) / (A2 + A3 * X)
940 IF 1 < ABS (Y) THEN 990
950 IF 0 < U AND U < 0.1 THEN 980
960 PLOT X0 + X, Y0 + Y
970 GOTO 890
980 PLOT X0 + X, Y0 + Y
990 PEN
1000 GOTO 890
1010 REM KRESLENI ASYMPOT
1020 IF ABS (X1) < = 1 THEN 1050
1030 IF ABS (Y1) < = 1 THEN 1090
1040 GOTO 810
1050 PLOT X0 + X1, Y0 - 1
1060 PLOT X0 + X1, Y0 + 1
1070 PEN
1080 GOTO 1030
1090 PLOT X0 - 1, Y0 + Y1
1100 PLOT X0 + 1, Y0 + Y1

```

```

111Ø GOTO 81Ø
112Ø STOP
113Ø IF P > M2 THEN 116Ø
114Ø IF P < M1 THEN 118Ø
115Ø GOTO 119Ø
116Ø M2 = P
117Ø GOTO 119Ø
118Ø M1 = P
119Ø RETURN
120Ø END

```

15. PŘÍKLADY

Příklad 1

Vypočtete Fourierův integrál

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt,$$

je-li $f(t) = 1$ pro $-5 < t < 5$; $f(t) = 0$ pro $|t| > 5$;
 $f(t) = 0,5$ pro $|t| = 5$.

Odpověď:

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin 5\omega.$$

Příklad 2

Ovzorkujte funkci $f(t)$ z příkladu 1 s intervalem $\Delta t = 1$ a napište příslušnou Z-transformaci.

Odpověď:

$$F(Z) = 0,5 Z^{-5} + Z^{-4} + Z^{-3} + Z^{-2} + Z^{-1} + 1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 + 0,5 Z^5.$$

Příklad 3

Vypočtete hodnoty $F(\omega_k)$ diskretní Fourierovy transformace pro $\omega_k = 0, \pi/18, \pi/9, \pi/6, \dots, 5\pi/9$ (odpovídá $\omega_k = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 100^\circ$) užitím Z-transformace z příkladu 2. Výsledek porovnejte s řešením příkladu 1.

Odpověď:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{9}$
$F(\omega_k)$	10,0	8,756	5,585	1,866	-0,940	-2,015	-1,500	-0,248	0,766	1,000	0,539
$F(\omega)$	10,0	8,778	5,642	1,910	-0,980	-2,153	-1,654	-0,284	0,921	1,273	0,736

Posloupnost $F(\omega_k)$ je periodická s periodou $\omega = 2\pi$ ($k = 36$) na rozdíl od spojitě funkce $F(\omega)$, která absolutně klesá s rostoucím ω .

Příklad 4

Jak se změní hodnoty diskretní Fourierovy transformace z příkladu 3, zvolíme-li vzorkovací interval $\Delta t = 2,5$?

Odpověď:

Ve Fourierově integrálu

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

zavedeme novou proměnnou τ užitím substituce $t = c\tau$. Bude

$$F(\omega) = c \int_{-\infty}^{\infty} f(c\tau) e^{i\omega c\tau} d\tau$$

Zvolíme-li $\Delta\tau = 1$, bude $c = 2,5$, takže pro $Z = e^{ic\omega}$ dostaneme

$$F(Z) = 2,5(0,5Z^{-2} + Z^{-1} + 1 + Z + 0,5Z^2),$$

$$F(\omega_k) = F(Z(\omega_k)) = 2,5 + 5\cos 2,5\omega + 2,5\cos 5\omega.$$

Srovnání s funkcí $F(\omega)$ dává tato tabulka:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{9}$
$F(\omega_k)$	10,0	8,639	5,280	1,629	-0,717	-1,223	-0,580	-0,019	-0,283	-1,036	-1,125
$F(\omega)$	10,0	8,778	5,642	1,910	-0,980	-2,153	-1,654	-0,284	0,921	1,273	0,736

Ze srovnání výsledků z příkladu 3 a 4 je zřejmé, že chyba Fourierovy transformace se při vysokých frekvencích rychle zvětšuje, volíme-li řidší vzorkování.

Příklad 5

Nalezněte Fourierův obraz Diracovy δ -funkce, pro niž platí vztahy

$$\delta(x) = 0 \text{ pro } x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \text{takže} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(x-y) dy = f(x)$$

Odpověď:

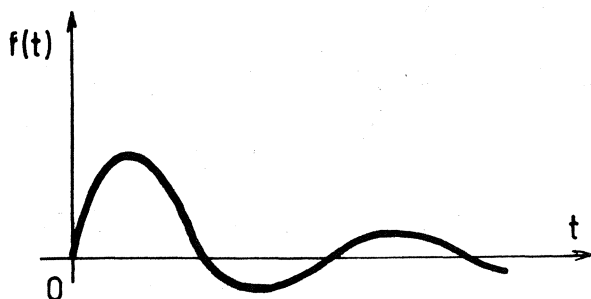
$$D(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\omega x} dx = e^{i\omega \cdot 0} = 1$$

Pro zpětnou Fourierovu transformaci dostaneme

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega.$$

To je integrální tvar δ -funkce.

Příklad 6



Obr. 25

Nechť funkce $f(t)$ [$f(t) = 0$ pro $t \leq 0$, $f(t) = e^{-t/\tau} \sin \omega_0 t$ pro $t > 0$, obr. 25] představuje vyzařované elektrické pole. Vyzářená energie je dána integrálem

$$E = \text{konst} \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Dokažte, že

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2 d\omega,$$

kde $|g(\omega)|^2$ je úměrné energii vyzářené v intervalu $\Delta\omega = 1$.

Odpověď:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/\tau} e^{i\omega t} \sin \omega_0 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0 + i/\tau} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i/\tau} \right) \end{aligned}$$

Předpokládejme, že τ je relativně velké ($\omega_0 \tau \gg 1$). Pak $g(\omega)$ bude nabývat velké hodnoty v okolí $\omega = \omega_0$. Zanedbáme-li v poslední rovnici první člen, bude pro toto okolí přibližně platit, že

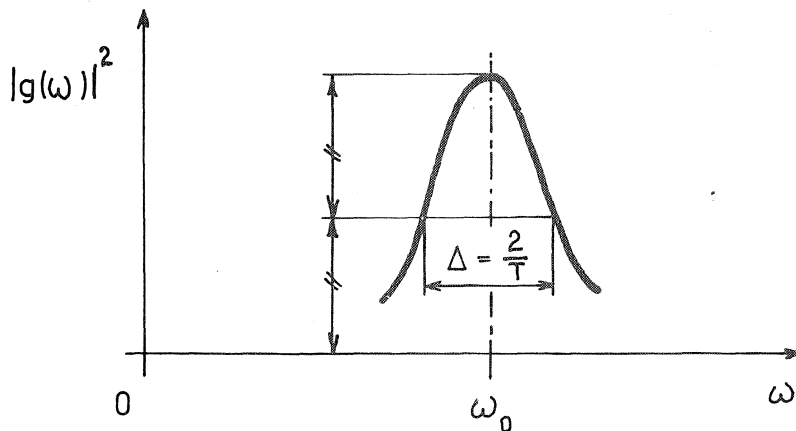
$$g(\omega) \cong -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i/\tau}$$

čili

$$|g(\omega)|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + 1/\tau^2}$$

Bude-li $\omega = \omega_0 \pm 1/\tau$, poklesne hodnota posledního výrazu právě na polovinu hodnoty $|g(\omega_0)|^2$ (obr. 26).

Tento výsledek souvisí velmi úzce s Heisenbergovým principem neurčitosti, známým z kvantové mechaniky. Šířka pásma $\Delta = 2/\tau$ je mírou "neurčitosti", s jakou jsme schopni experimentálně stanovit frekvenci ω_0 . Je nepřímo úměrná trvání oscilací (času τ). Osciluje-li něco dlouho, můžeme určit frekvenci poměrně přesně. Trvá-li však děj velmi krátce, je přesné určení frekvence velmi obtížné.



Obr. 26

Příklad 7

Vypočtete Fourierovu transformaci $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ funkce $f(t)$, pro kterou platí

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 && \text{pro } 0 < t < 10, \\ f(t) &= 0 && \text{pro } t < 0 \text{ a } t > 10, \\ f(t) &= 0,5 && \text{pro } t = 0 \text{ a } t = 10. \end{aligned}$$

Je to posunutá funkce z příkladu 1.

Odpověď:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^{10} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} (e^{i10\omega} - 1) = \\ &= \frac{1}{\omega} \sin 10\omega + \frac{i}{\omega} (1 - \cos 10\omega). \end{aligned}$$

Obecně lze odvodit vzorec (nejsnáze pomocí Z-transformace)

$$\mathcal{F}[f(t-a)] = e^{i\omega a} \mathcal{F}[f(t)].$$

Ze srovnání s příkladem 1 plyne $a = +5$. Pak tedy

$$\begin{aligned} F(\omega) &= e^{i5\omega} \cdot \frac{2}{\omega} \sin 5\omega = \frac{1}{\omega} (2 \cos 5\omega \sin 5\omega + i 2 \sin^2 5\omega) = \\ &= \frac{1}{\omega} \sin 10\omega + \frac{i}{\omega} (1 - \cos 10\omega). \end{aligned}$$

Fourierova transformace má obecně reálnou a imaginární část.

Příklad 8

Je dán soubor dat $x_k = x(t_k)$; $t_k = k\Delta t$; $k = 1, 2, \dots, 5$; $\Delta t = 1$
Tímto souborem proložte regresní přímku $x = a_0 + a_1 t$ a stanovte intervaly spolehlivosti pro součinitele a_0 , a_1 . Výsledek znázorněte graficky.

Dáno

$$(x_k) = (0,9146; 0,4356; 0,2594; 0,6288; 0,1984) .$$

Odpověď:

Z přeuredené soustavy rovnic

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,9146 \\ 0,4356 \\ 0,2594 \\ 0,6288 \\ 0,1984 \end{Bmatrix} ,$$

kteřou zapíšeme zkráceně jako

$$[A]\{a\} = \{b\} ;$$

vypočteme metodou nejmenších čtverců

$$\{a\} = ([A]^T[A])^{-1} [A]^T\{b\}$$

Nejdříve vyčíslíme součin

$$[C] = [A]^T[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}$$

a pak jeho inverzi

$$[D] = [C]^{-1} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$$

Konečně

$$[D][A]^T = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,2 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & -0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,5 & 0,2 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & -0,1 & 0 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,9146 \\ 0,4356 \\ 0,2594 \\ 0,6288 \\ 0,1984 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,859 & 12 \\ -0,123 & 92 \end{Bmatrix}$$

Rezidua jsou

$$\begin{aligned} r_1 &= a_0 + a_1 - 0,9146 = -0,1794, \\ r_2 &= a_0 + 2a_1 - 0,4356 = 0,17568, \\ r_3 &= a_0 + 3a_1 - 0,2594 = 0,22796, \\ r_4 &= a_0 + 4a_1 - 0,6288 = -0,26536, \\ r_5 &= a_0 + 5a_1 - 0,1984 = 0,04112. \end{aligned}$$

Součet čtverců reziduí

$$\sum_{k=1}^5 r_k^2 = 0,187\ 120\ 3.$$

Podle (11.37) vyjde odhad rozptylu

$$s^2 = \frac{0,187\ 120\ 3}{5 - 2} = 0,062\ 373\ 4.$$

Odhad středních chyb součinitelů a_0 , a_1 vyjde podle (11.39)

$$s_{a_0} = 0,2497 \sqrt{\frac{55}{50}} = 0,2619,$$

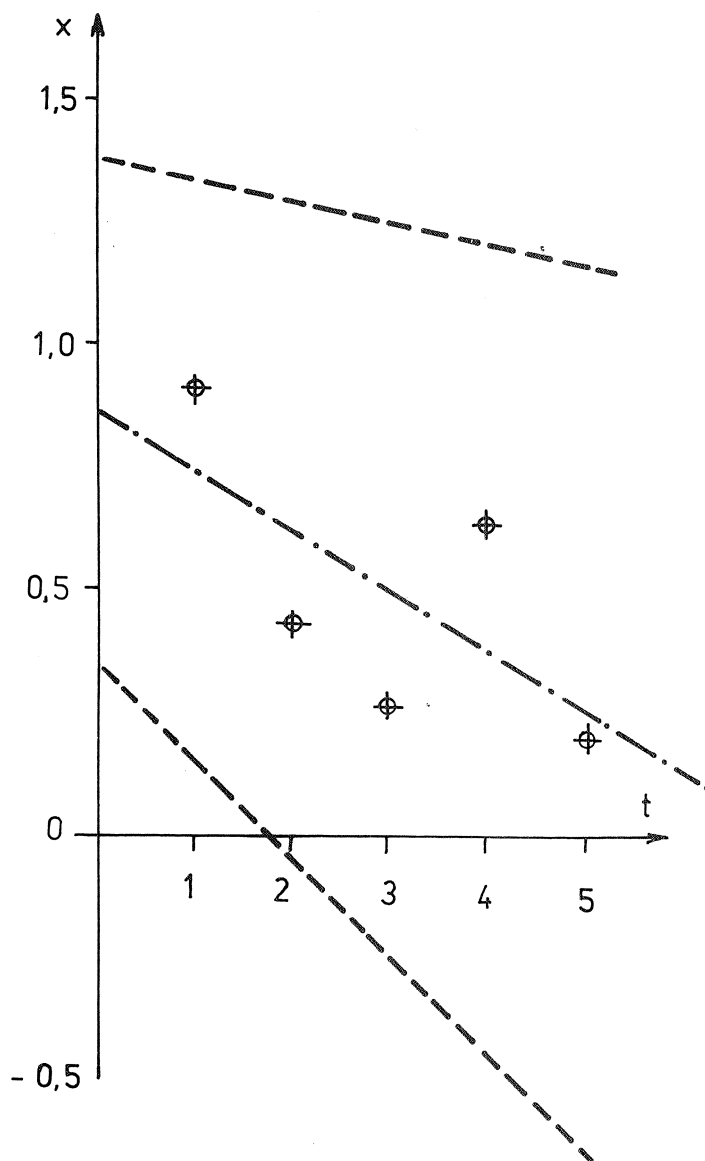
$$s_{a_1} = 0,2497 \sqrt{\frac{5}{50}} = 0,07898.$$

Na hladině významnosti 0,05 jsou intervaly spolehlivosti

$$0,3458 < a_0 < 1,3724,$$

$$-0,2029 < a_1 < -0,0449.$$

Výsledek je znázorněn na obr. 27.



Obr. 27

Je zřejmé, že rozptyl je tak velký, že regresní přímka

$$x = 0,85912 - 0,12392 t$$

(čerchovaná na obr. 27) vytahuje daný soubor velmi nespolehlivě. Skutečně, regresní součinitel $R = -0,6714$. Sotva lze tedy hovořit o lineární závislosti. Jde-li však opravdu o lineární závislost, pak je náš soubor zatížen příliš velkými chybami ($\Delta \approx 0,25$).

Příklad 9

Předpokládejte, že soubor (x_k) z předchozího příkladu je znehodnocen parazitním lineárním průběhem. Odstraňte parazitní složku užitím metody nejmenších čtverců a vzorců z kapitoly 5.

Odpověď:

Bude $m = 4$. Počátek posuneme tak, aby platilo

$k =$	-2	-1	0	1	2
$x_k =$	0,9146	0,4356	0,2594	0,6288	0,1984

Pak pro parazitní složku

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 t$$

dostaneme podle (5.8)

$$N = 5, \quad \sum i^2 = \frac{5 \cdot 24}{12} = 10,$$

$$a_0 = \frac{2,4368}{5} = 0,48736$$

$$a_1 = \frac{-2 \cdot 0,9146 - 1 \cdot 0,4356 + 1 \cdot 0,6288 + 2 \cdot 0,1984}{10} = -0,12392.$$

Filtrovaný soubor je

$$\begin{aligned}y_{-2} &= x_{-2} - a_0 + 2a_1 = -0,1794, \\y_{-1} &= x_{-1} - a_0 + a_1 = 0,17568, \\y_0 &= x_0 - a_0 = 0,22796, \\y_1 &= x_1 - a_0 - a_1 = -0,26536, \\y_2 &= x_2 - a_0 - 2a_1 = 0,04112.\end{aligned}$$

Jsou to (samozřejmě) rezidua z minulého příkladu.

Příklad 10

Řešte úlohu z příkladu 8 Golubovou metodou.

Příklad 11

Je dán osmibodový soubor (x_k) , $k = 0, 1, 2, \dots, 7$. Užitím algoritmu rychlé Fourierovy transformace najděte jeho Fourierův obraz a spektrum.

Dáno

$$(x_k) = (0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0).$$

Odpověď:

Daný soubor rozdělíme na osm jednobodových souborů, takže každému prvku $(x_k) = x_k$ přísluší Fourierův obraz $(X_0) = x_k$ (každý prvek je sám sobě Fourierovým obrazem). Pak vytvoříme čtyři zdvojené soubory (x_0, y_0) a to

$$(0, 2), (0, 1), (1, 0), (2, 0). \quad (a)$$

Protože původní soubory byly jednobodé, je $N = 1$. Proto $V = e^{i\pi} = -1$. Podle (9.15) resp. (9.18) máme

$$Z_0 = X_0 + V^0 Y_0 = X_0 + Y_0 = x_0 + y_0,$$

$$Z_1 = X_0 - V^0 Y_0 = X_0 - Y_0 = x_0 - y_0.$$

Fourierovské obrazy dvoubodových souborů (a) tedy budou

$$(2, -2), (1, -1), (1, 1), (2, 2). \quad (A)$$

Ze souborů (a) zdvojíme nejdříve první a třetí. S novým označením budeme zdvojovat originály

$$(x_0, x_1) = (0, 2); \quad (y_0, y_1) = (1, 0),$$

pro jejichž obrazy máme podle (A)

$$(X_0, X_1) = (2, -2); \quad (Y_0, Y_1) = (1, 1).$$

Zdvojením originálů vznikne soubor

$$(x_0, y_0, x_1, y_1) = (0, 1, 2, 0).$$

Fourierova transformace tohoto souboru vyjde podle (9.15) resp. (9.18). Pro $N = 2$ je $V = e^{i\pi/2} = i$, takže

$$\begin{aligned} Z_0 &= X_0 + V^0 Y_0 = X_0 + Y_0 = 2 + 1 = 3, \\ Z_1 &= X_1 + V^1 Y_1 = X_1 + i Y_1 = -2 + i, \\ Z_2 &= X_0 - V^0 Y_0 = X_0 - Y_0 = 2 - 1 = 1, \\ Z_3 &= X_1 - V^1 Y_1 = X_1 - i Y_1 = -2 - i. \end{aligned}$$

Pro druhý a čtvrtý ze souborů (a) bude obdobně

$$\begin{aligned} (x_0, x_1) &= (0, 1); \quad (y_0, y_1) = (2, 0); \\ (X_0, X_1) &= (1, -1); \quad (Y_0, Y_1) = (2, 2). \end{aligned}$$

Pro zdvojení vyjde pro

$$(x_0, y_0, x_1, y_1) = (0, 2, 1, 0)$$

Fourierův obraz

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1 + 2 = 3, \\ Z_1 &= -1 + 2i, \\ Z_2 &= 1 - 2 = -1, \\ Z_3 &= -1 - 2i. \end{aligned}$$

Shrneme-li tyto výsledky, vidíme, že zdvojené soubory

$$\left. \begin{aligned} (x_0, x_1, x_2, x_3) &= (0, 1, 2, 0), \\ (y_0, y_1, y_2, y_3) &= (0, 2, 1, 0) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

budou mít Fourierovy obrazy

$$\left. \begin{aligned} (X_0, X_1, X_2, X_3) &= (3, -2+i, 1, -2-i), \\ (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) &= (3, -1+2i, -1, -1-2i). \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Ze souborů (b) vznikne nakonec jeden osmibodový soubor

$$(0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0). \quad (c)$$

Pro $N = 4$ vyjde

$$\begin{aligned} V &= e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \\ V^2 &= e^{i\pi/2} = i, \\ V^3 &= e^{i3\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \\ V^4 &= e^{i\pi} = -1. \end{aligned}$$

Podle (9.15) dostaneme

$$\begin{aligned} Z_0 &= X_0 + Y_0 = 3 + 3 = 6, \\ Z_1 &= X_1 + VY_1 = (-2+i) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(-1+2i) = \\ &= \frac{-4-3\sqrt{2}}{2} + i \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \\ Z_2 &= X_2 + V^2Y_2 = 1 + i(-1) = 1-i, \\ Z_3 &= X_3 + V^3Y_3 = (-2-i) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)(-1-2i) = \\ &= \frac{-4+3\sqrt{2}}{2} + i \frac{-2+\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Podle (9.18) je konečně

$$\bar{z}_4 = X_0 - Y_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_5 &= X_1 - V Y_1 = (-2 + i) - \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i)(-1 + 2i) = \\ &= \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{2} + i \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

$$\bar{z}_6 = X_2 - V^2 Y_2 = 1 + i,$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_7 &= X_3 - V^3 Y_3 = (-2 - i) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-1 + i)(-1 - 2i) = \\ &= \frac{-4 - 3\sqrt{2}}{2} + i \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Transformací souboru (c) tedy dostaneme

$$\begin{aligned} (6; -4,1213 + 1,7071 i; 1 - i; 0,1213 - 0,2929 i; \\ 0; 0,1213 + 0,2929 i; 1 + i; -4,1213 - 1,7071 i). \end{aligned} \quad (c)$$

Tento obraz odpovídá Z-transformaci $X(\bar{z}(\omega_k))$ dané posloupnosti (x_t) :

$$X(\bar{z}(\omega_k)) = e^{2i\omega_k} + 2e^{3i\omega_k} + 2e^{4i\omega_k} + e^{5i\omega_k} \quad (d)$$

pro úhlové frekvence

$$(\omega_k) = \left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right).$$

O tom se lze přesvědčit dosazením ω_k do (d).

Uspořádáme-li soubor do pořadí podle (9.7), dostaneme posloupnost

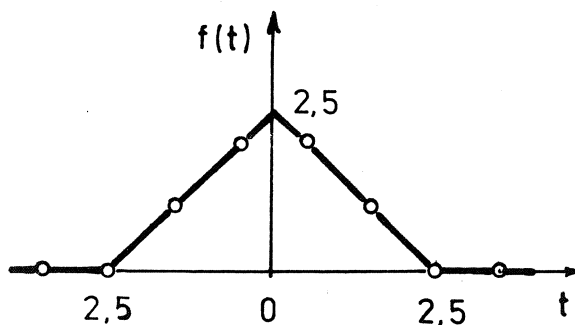
$$\begin{aligned} (0; 0,1213 + 0,2929 i; 1 + i; -4,1213 - 1,7071 i; 6; \\ -4,1213 + 1,7071 i; 1 - i; 0,1213 - 0,2929 i), \end{aligned}$$

která má velké amplitudy uvnitř, malé vně.

Spektrum je sudou funkcí ω , takže stačí napsat hodnoty jen pro interval $0 \leq \omega \leq \pi$. Podle (10.1)

ω	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$R(\omega)$	36,0	19,90	2,0	0,1005	0,0

Příklad 12



Obr. 28

Považujte osmibodový soubor z příkladu 11 za vzorkovanou a posunutou funkci $f(t)$ znázorněnou na obr. 28. Vypočítejte spektrum této spojité funkce a porovnejte s výsledky výpočtu rychlou Fourierovou transformací z příkladu 11.

Odpověď:

Zřejmě platí tyto definiční rovnice:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2,5 - t && \text{pro } 0 < t < 2,5, \\ f(t) &= 2,5 + t && \text{pro } -2,5 < t < 0, \\ f(t) &= 0 && \text{pro } |t| \geq 2,5. \end{aligned}$$

Fourierova transformace dává

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = 2 \int_0^{2,5} (2,5 - t) \cos \omega t dt = \\ &= 5 \int_0^{2,5} \cos \omega t dt - 2 \int_0^{2,5} t \cos \omega t dt. \end{aligned}$$

Poslední integrál řešíme integrací po částech

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{5}{\omega} \sin(2,5\omega) - \frac{2}{\omega} [t \sin \omega t]_0^{2,5} + \frac{2}{\omega} \int_0^{2,5} t \cos \omega t dt = \\ &= \frac{5}{\omega} \sin(2,5\omega) - \frac{5}{\omega} \sin(2,5\omega) + \frac{2}{\omega^2} [1 - \cos(2,5\omega)]. \end{aligned}$$

Je tedy

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega^2} [1 - \cos(2,5\omega)]$$

Hodnotu $F(0)$ najdeme limitním přechodem

$$F(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) = 6,25.$$

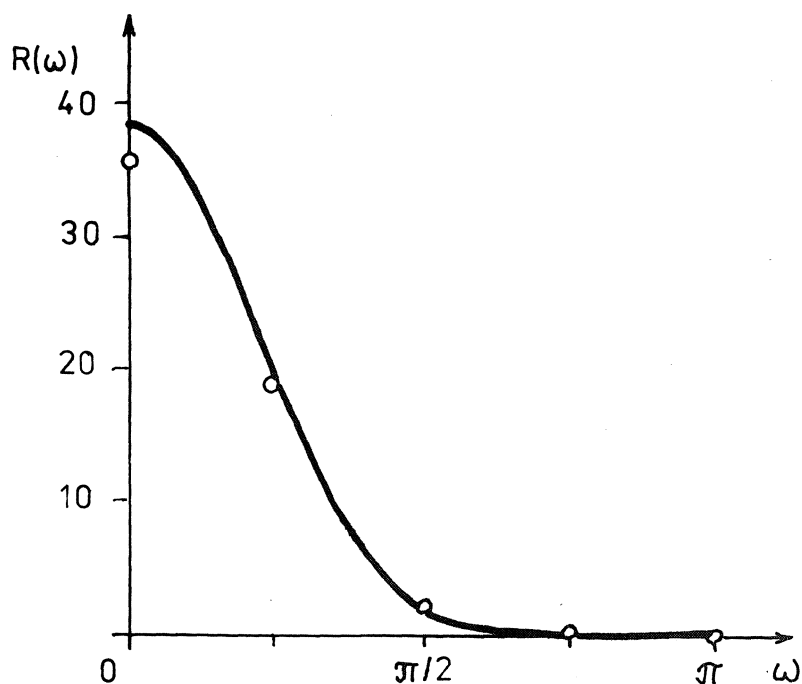
Pro spektrum $R(\omega)$ máme

$$R(\omega) = \frac{4}{\omega^4} [1 - \cos(2,5\omega)]^2.$$

Hodnoty $R(\omega)$ jsou uvedeny v tabulce

ω	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$R(\omega)$	39,06	20,10	1,915	0,001	0,041

Ze srovnání (obr. 29) je zřejmé, že výsledky z příkladu 11 jsou překvapivě přesné, zvláště když uvážíme, že jsme k diskretní transformaci užili jen osmí bodů.



Obr. 29

Druh publikace: Sborník
Název: Stavba strojů 78
VYUŽITÍ MALÝCH POČÍTAČŮ PRO PRÁCI
KONSTRUKTÉRA
Autor: Prof. Ing. Cyril Höschl
Počet stran: 114
Náklad: 150 výtisků
Formát: A4
Číslo publikace: 60 - 592 - 81 (1988)
Vydal a rozmnožil: Dům techniky ČSVTS Praha
Praha 1, Gorkého náměstí 23
Rok vydání: 1981
Cena 240,- Kčs (cenový výměr Domu techniky ČSVTS Praha č. 511 z 1. 12. 1980)