

Zamyšlení nad Fregovou definicí čísla

Gottlob Frege věnuje svůj spis *Die Grundlagen der Arithmetik* zkoumání povahy čísla. Než se dostane k výkladu toho, co číslo je a na čem je založeno, dozvíme se nejprve, co číslo (počet)¹ podle Frega *není*. Předně počet podle Frega není vlastností vnějších věcí. Na podporu tohoto tvrzení uvádí Frege hned několik argumentů. Podívejme se na ně teď trochu podrobněji.

Jednak podle Frega není vůbec jasné, čemu bychom měli počet ve vnějším světě vůbec přičítat: počet přece nelze přičítat (jako vlastnost) ani jednotlivým věcem, ale vlastně ani celku věcí. Zatímco listům na stromě mohu každému jednotlivě přičítat zelenou barvu a všemu listí také, počet 1000 nemohu přičítat ani jednotlivým listům, ani onomu listí (GLA § 22)². Takto podané je to ovšem z Fregovy strany trochu zavádějící. Předně je vcelku jasné, že pokud bychom vůbec chtěli nějaký počet přičítat vnějším věcem, nepřičítali bychom ho (kromě 1) ani jednotlivému předmětu, ani souhrnu jednotlivých předmětů branému jako určitý celek (jako listí), ale nějakému souboru jednotlivých předmětů. Tak například J. S. Mill, proti jehož pojetí se Frege staví hned v následujícím paragrafu (§23), přičítá podle Frega počet *agregátu* věcí. Frege proti tomuto pojetí namítá ve stylu „Musíme shromáždit všechny slepce v Německé říši, aby měl výraz „počet slepců v Německé říši“ nějaký smysl?“, čili chápe millovský agregát jako nějakou prostorově a časově sjednocenou „hromadu“, fyzické shromáždění. Odhlédneme-li od toho, nakolik tento Fregův výklad odpovídá Millovu chápání agregátu³, nezdá se přece intuitivně nijak nepřijatelné, že některé vlastnosti přičítáme celým souborům věcí, aniž bychom je přičítali každé jednotlivě (např. „Lampy na náměstí jsou umístěny do půlkruhu“), přičemž tyto soubory nemusí být nijak doslovně „shromážděny“ či „seskupeny“ (např. „Všechny evropské šlechtické rody jsou navzájem spřízněny“ či „Světová moře a oceány zabírají více než dvě třetiny povrchu Země“). Z toho ještě není nutné hned vyvozovat, že se tudíž nemůže jednat o vlastnosti vnějších věcí.

Další Fregův argument proti tomu, že by počet mohl být vlastností vnějších věcí, je tento: Zatímco běžné empirické vlastnosti, např. barva, přísluší předmětu bez ohledu na naši vůli, počítanému souboru jako takovému žádné číslo nepřisluší, neboť záleží na naší libovůli, z jakých vlastně jednotek ho budeme považovat za složený. Frege říká: „Dám-li někomu kámen se slovy: urči hmotnost tohoto, zadal jsem mu tak celý předmět zkoumání. Dám-li mu ale do ruky balíček karet se slovy: urči počet tohoto, pak neví, chci-li zjistit počet karet nebo počet karetních sad nebo třeba trumfů ve skatu.“ Ani tato argumentace není tak úplně čistá. Předně je tomu ve skutečnosti tak, že dá-li nám někdo balíček karet, abychom určili „počet tohoto“, budeme nejspíš jednoduše počítat karty, a tak to očekává i zadávající - v jiném případě by nás totiž informoval, že chce vlastně zjistit počet něčeho jiného, třeba trumfů. A naopak, podal-li by nám někdo třeba dózu s cukrem, abychom určili „hmotnost tohoto“, musel by patrně upřesnit, zda chce určit hmotnost samotného cukru nebo hmotnost celé dózy s cukrem nebo hmotnost prázdné dózy – jinak bychom si nejspíš nebyli jisti, čeho

¹ Frege v textu při pátrání po správném vymezení volně přechází mezi slovem „Zahl“ (které zhruba odpovídá českému „číslo“) a „Anzahl“ (které nejvíce odpovídá českému výrazu „počet“). Protože ovšem „Zahl“ může vyjadřovat i český „počet“, přechod mezi oběma výrazy je pro Fregeho snazší než v češtině, kde se slova „číslo“ a „počet“ v podstatě nedají používat záměnně. Každopádně Frege při hledání vymezení nečiní podstatný rozdíl mezi oběma pojmy, proto nechť čtenář není překvapen, je-li chvílemi řeč o tom, chvílemi o onom.

² Frege tu doslova říká: „Wir können alle Blätter des Baumes unter dem Namen seines Laubes zusammenfassen. Auch dieses ist grün, aber nicht 1000.“ (§22)

³ Srovnej např. Mill (1843), B. I, Ch. VII, § 3

hmotnost od nás vlastně chce určit. Jinými slovy, dost často je při poukázání na soubor věcí jasné, co máme počítat (jednotky jsou nějak přirozeně vymezeny), a nejasné případy se vyskytují jak u určování počtu, tak u určování jakékoli jiné empirické vlastnosti – jak nás poučil Quine, ostenze ve skutečnosti zdaleka nevymezuje ukazovaný předmět jednoznačně. Navíc je ale potřeba si uvědomit, že počet, má-li být chápán jako vlastnost vnějších věcí, musí být, jak už bylo řečeno, chápán jako vlastnost nějakého *souboru* věcí. Soubor je ale určen svými částmi, a proto je při zadávání, čeho počet mám určit, nutný poukaz na soubor *včetně* jeho částí, nestačí prostě poukaz na soubor jako celek.

Představme si, že máme na stole poskládáno několik domečků ze sirek. Můžeme se pak ptát na počet domečků na stole (jeden způsob zadání souboru včetně jeho částí) nebo na počet sirek na stole (druhý způsob zadání souboru včetně jeho částí). Fregovi se ovšem nyní nelíbí, že by měly též fyzické skutečnosti (v našem příkladě oněm sirkám na stole) příslušet dva různé počty, a považuje to za důkaz toho, že ve skutečnosti této fyzické skutečnosti nepřísluší (není její vlastností) žádný počet. Ale takovéto nejednoznačnosti v závislosti na způsobu zadání se přece mohou vyskytnout i u běžných empirických vlastností. Zeptáme-li se na tvar domečku ze sirek (jaký tvar má tento obrazec na stole?), dostaneme jinou odpověď, než budeme-li se ptát na tvar sirek v onom domečku (jaký tvar mají tyto sirky na stole?). Potom tu vlastně též fyzické skutečnosti přiřítáme různé tvary v závislosti na tom, jak jsme ji pojmově vymezili, zda jsme ji pojali jako celek nebo jako soubor. Znamená to snad, že tudíž tvar nemůže být vlastností vnějších předmětů? Uvážíme-li Fregův vlastní příklad se stéblem slámy (GLA § 23), kterému přece podle Frega nemůže (jakožto jedné fyzické skutečnosti) zároveň příslušet počet 1 (počet stébel) a zároveň počet molekul, ze kterých je toto stéblo složeno, mohli bychom přece namítat, že i běžné empirické vlastnosti bychom stěží mohli přiřítat úplně stejné tomuto stéblu slámy i příslušnému souboru buněk nebo molekul.

Na jiném místě (GLA § 58) zase Frege říká: „Sice snadno uvěříme, že v představě čtyř teček na kostce se vyskytuje něco, co odpovídá slovu ‚čtyři‘, ale to je klam. Mysleme na (nějakou)⁴ zelenou louku a zkusme, zda se tato představa změní, bude-li nahrazen neurčitý člen číslovkou ‚jedna‘. Nic nepřibude, zatímco slovu ‚zelený‘ přece něco v této představě odpovídá.“⁵ To je velice zvláštní úvaha: chce tím Frege říci, že přidání počtu k nějaké představě tuto představu vůbec nemění? Tedy že není rozdíl mezi představou ‚zelená louka‘ a ‚čtyři zelené louky‘? Jeho tvrzení, že představa ‚jedna zelená louka‘ nic nepřidává k představě ‚zelená louka‘ je v zásadě na úrovni úvahy „představa ‚zelená zelená louka‘ k představě ‚zelená louka‘ vlastně nic nepřidává“ – užijeme-li počitatelné podstatné jméno v jednotném čísle, obvykle se tím rozumí, že mluvíme o *jedné* takové věci (což je v německé verzi zvláště patrné díky tomu, že se neurčitý člen shoduje s číslovkou „jedna“), tedy máme-li představu zelené louky, je tato představa přece představou *jedné* zelené louky (ve všech ostatních případech se číslovka musí uvést, v případě jednoho exempláře se číslovka může vynechat), a přidáme-li k této představě číslovku jedna, vskutku jsme ji již nijak nerozšířili. Přidáme-li ale jakoukoli jinou číslovku, rozhodně se jedná o *jinou* představu. V představě čtyř teček se tedy zdá se vyskytuje něco, co odpovídá číslu čtyři – představa čtyř teček je odlišná od představy jedné tečky.

Dále Frege namítá, že „by bylo vskutku podivuhodné, kdybychom vlastnost vyabstrahovanou z vnějších věcí mohli beze změny smyslu přenést na události, představy, pojmy“ - aby „se něco svojí povahou smyslové vyskytovalo v něčem nesmyslovém“ (GLA § 24). A vzhledem k tomu, že lze počítat

⁴ Čili „eine“ – v němčině je zde užít neurčitý člen.

⁵ „Zwar glaubt man leicht, dass in der Vorstellung von vier Augen eines Würfels etwas vorkomme, was dem Worte ‚vier‘ entspräche; aber das ist Täuschung. Man denke an eine grüne Wiese und versuche, ob sich die Vorstellung ändert, wenn man den unbestimmten Artikel durch das Zahlwort ‚Ein‘ ersetzt. Es kommt nichts hinzu, während doch dem Worte ‚grün‘ etwas in der Vorstellung entspricht.“ (GLA § 58)

nejen tělesné věci, ale i cokoli jiného, nelze tedy počet považovat za vlastnost vnějších věcí. To je jistě úvaha legitimní, ostatně trápila již scholastické učence.⁶ Přesto není intuitivně přesvědčivá tak zcela bezvýhradně: kupříkladu vlastnost *složenost* je přece podobného rázu – lze ji aplikovat na cokoli, i na nesmyslové předměty, přesto bychom se asi zdráhali prohlásit, že tudíž nemůže být vlastností vnějších věcí. Navíc se číslům nepochybně učíme pozorováním smyslových věcí: dítě brzy zaznamená rozdíl mezi jedním a dvěma darovanými bonbóny a naučí se nalézt podobnost mezi obrázkem s třemi miskami a třemi lžičkami. Jako získá dítě pojem kulatosti tím, že nachází podobnost mezi různými kulatými předměty, naučí se nacházet podobnost i mezi různými soubory věcí o stejném počtu⁷ a získá tak příslušný pojem počtu. Dovolím-li si parafrázovat Fregova slova, je divné, abychom se něčemu ze své podstaty nesmyslovému naučili tak ryze smyslových způsobem...

Přistupme však nyní k tomu, co podle Frega číslo ve skutečnosti je. Podle Frega „číselný údaj obsahuje výpověď o pojmu“⁸: ve skutečnosti vlastně udáním počtu něčeho uvádíme, kolik předmětů spadá pod daný pojem (což patrně není zcela originální myšlenka⁹, to však nyní ponechme stranou). Tím Frege doufá vyřešit těžkost s tím, že při počítání musíme zároveň mít více předmětů a zároveň je považovat za v jistém smyslu totožné jednotky našeho počítání – sjednocujícím aspektem (tím, co z jedné každé věci vytváří jednotku) je spadání pod tentýž daný pojem.

V § 55 Frege podává první návrh definice čísel, který vypadá na první pohled poměrně slibně. Frege řekne, že pojmu přísluší číslo (počet) 0, když pro libovolné a platí, že nespadá pod tento pojem; pojmu přísluší číslo 1, pokud není pravda pro každé a , že nespadá pod tento pojem, a zároveň obecně platí, že spadají-li pod tento pojem a a b , pak $a=b$; konečně pojmu F přísluší číslo $n+1$, existuje-li předmět a , který spadá pod F a platí pro něj, že pojmu „spadající pod F a různý od a “ přísluší číslo n .¹⁰ Číselné údaje jsou tedy chápány jako výpovědi o „obsazenosti“ pojmů – kolik předmětů pod příslušný pojem spadá.

Frege však uvedenou definici hned následně zavrhuje. Tato definice totiž chápe číselné údaje jako tvrzení nějaké charakteristiky pojmu, neuchopuje čísla jako samostatné předměty. Proč vlastně Frege trvá na tom, že čísla musí být předměty? Podle Frega o číslech jednak běžně mluvíme jako o předmětech („die Zahl 4“), jednak v aritmetice s nimi zacházíme jako s předměty. Někdy je sice podle Frega používáme naopak atributivně, v takovém případě je však možné vyjádření převést na „předmětné“ chápání čísla (např. větu „Jupiter má čtyři měsíce“ na větu „Počet Jupiterových měsíců je čtyři“ (GLA § 57)). Na to lze namítnout, že převod by byl klidně možný i obráceně, z předmětné podoby na atributivní; i matematické rovnice by bylo možné chápat jako obecná pravidla pro číselné vlastnosti, třeba rovnici „ $2+3=5$ “ lze chápat jako zápis vyjadřující, že spadají-li pod libovolný pojem dva předměty a pod jiný tři předměty, spadá pod jeden nebo druhý (v množinovém pojetí: je prvkem jejich sjednocení) předmětů pět. Užívají-li se čísla i předmětně i atributivně, těžko to samo považovat

⁶ Srovnej např. Sousedík, Svoboda (2010).

⁷ Srovnej např. Geachovu formulaci: „Frege fails, however, to see the fact that makes Mill's sort of view attractive. In spite of Frege's denial (Sec. 24, 58), there is a recognizable physical property common to the *four* faces of a die and the four of diamonds and four pennies and the four sides of a square and a plate broken in four; we could learn to use the word "four" whenever we met with this attribute. When a plate breaks in four, a certain sample of china changes from being *in one piece* to being *in four pieces*; the words in italics stand for different species of a certain generic physical property.” Geach (1951), str. 538.

⁸ „... daß die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte.“ (§ 46)

⁹ Srovnej např. Sullivan (1990), kde autor poukazuje na vliv Herbarta na Frega a na podobnost jejich pojetí čísla.

¹⁰ Dummett (1991) nahrazuje tato vymezení „početně určitými kvantifikátory“ („numerically definite quantifiers“), tedy kvantifikátory typu „existuje právě jeden“, „existují právě dva“ atd.

za argument pro jeden z těchto způsobů. Další Fregovy námitky, například známé Fregovo tvrzení, že na základě této definice nelze rozpoznat, zda Julius Caesar je číslo nebo nikoli, jsou, jak přesvědčivě ukazuje Dummett¹¹, již založené na předpokladu, že čísla jsou předměty, a nelze je tedy považovat za argumenty pro předmětné chápání čísel.

Frege se nicméně pokouší podat definici, která by zachycovala čísla jako předměty. V GLA § 68 Frege uvádí následující definici počtu:

(Poč) „Počet, který přísluší pojmu F, je rozsahem pojmu ‚rovnopočetný s pojmem F‘.“

Dva pojmy jsou rovnopočetné, pokud mezi jejich rozsahy (extenzemi) existuje vzájemně jednoznačné přiřazení¹². Rozsahem pojmu se tradičně rozumí (a Frege se na běžné chápání odvolává¹³) soubor všeho toho, co pod daný pojem spadá. Frege vymezuje na jiných místech¹⁴ rozsah pojmu pomocí pojmu funkce: jelikož pojem chápe jako funkci, která přiřazuje hodnotu Pravda všem těm předmětům, které pod daný pojem spadají, a hodnotu Nepravda všem ostatním, je rozsah pojmu definován jako průběh hodnot (Wertverlauf) příslušné funkce. Průběh hodnot ovšem Frege explicitně nedefinuje (stanoví pouze, že průběhy hodnot dvou funkcí se rovnají, pokud mají obě funkce pro každý argument tytéž funkční hodnoty)¹⁵ a byť by měl být z dnešního hlediska vykládán spíše jako množina uspořádaných dvojic¹⁶, je dnes obvykle Fregův rozsah pojmu (= průběh hodnot příslušné funkce) chápán jednoduše jako množina (třída) všech předmětů spadajících pod daný pojem¹⁷.

Počet příslušející pojmu F je tedy v tomto současném chápání množinou všech příslušných pojmů rovnopočetných s F, což je (patrně i vzhledem k tomu, že sám Frege v GGA dosazuje namísto rovnopočetných pojmů jejich průběhy hodnot, tj. rozsahy), chápáno jako množina všech množin¹⁸ rovnopočetných s F. (Je ovšem možná vhodné podotknout, že Frege v GLA § 28 výslovně odmítá pojem množiny jako nosný pro vymezení čísel, a to z důvodu jeho neurčitosti.)

Zkusme si teď uvědomit, co toto Fregovo pojetí představuje z praktického hlediska. Znamená, že třeba počet prstů jedné ruky je množinou všech pětiprvkových množin či, abychom se drželi Fregova znění, souborem všech takových pojmů, které jsou rovnopočetné s prsty jedné ruky. To zní trochu podezřele. Obvykle máme za to, že počet prstů jedné ruky (čili číslo pět) známe a umíme s ním bez problému zacházet. Najednou se ale dozvíme, že ve skutečnosti číslo pět vůbec neznáme, neboť je přirozeně vyloučeno, abychom byli schopni jakkoli pojmut rozsah pojmu „rovnopočetný s prsty jedné ruky“ (čili množinu všech pojmů rovnopočetných s prsty na ruce) - jistě, rozumíme

¹¹ Dummett (1991), str. 101-102

¹² Fregeho formálnější vymezení rovnopočetnosti: pojem F je rovnopočetný s pojmem G, pokud existuje vztah φ takový, že každý předmět, který spadá pod F, je ve vztahu φ s nějakým předmětem spadajícím pod G, a s každým předmětem, který spadá pod G, je ve vztahu φ nějaký předmět spadající pod F; a zároveň platí pro libovolné d, a a e , že je-li d ve vztahu φ s a a zároveň je d ve vztahu φ s e , pak a je totéž jako e ; a zároveň je-li d ve vztahu φ s a a b ve vztahu φ s a , pak d je totéž jako b . (viz GLA §§ 71-2)

¹³ „Ich setze voraus, dass man wisse, was der Umfang eines Begriffes sei.“ (GLA, pozn. 87 k § 68)

¹⁴ Např. ve *Funktion und Begriff* (1891), str. 9-11 nebo GGA, I, § 3.

¹⁵ Podrobnější rozbor Fregova pojetí průběhu hodnot lze nalézt např. ve Franz von Kutschera (1989), kap. 6.3 a 6.4.

¹⁶ Např. ve *Funktion und Begriff* (1891) připodobňuje Frege Wertverlauf geometrickému grafu funkce (str. 8), na jiném místě zase říká (pozn. 5, str. 10): „In manchen Wendungen der üblichen mathematischen Ausdrucksweise entspricht wohl das Wort ‚Funktion‘ dem, was ich hier Wertverlauf einer Funktion genannt habe. Aber Funktion in dem hier gebrauchten Sinne des Wortes ist das logisch Frühere.“

¹⁷ Což by v určitém ohledu mohlo být nakonec v souladu s Fregovým pojetím, jak o tom svědčí třeba tato poznámka v GGA: „Es liegt nahe, unsere Festsetzung so zu verallgemeinern, dass jeder Gegenstand als Wertverlauf aufgefasst werde, nämlich als Umfang eines Begriffes, unter den er als einziger Gegenstand fällt.“ (GGA I, pozn. 1 na str. 18)

¹⁸ Srovnej např. formulaci Quina v (1988), § 54.

příslušnému pojmu čili kritériu, které určuje tento rozsah, ale rozsah sám nám ani nemůže být znám (stejně jako víme, co znamená třeba „být větší než krabíčka od sirek“, aniž bychom mohli říci, že víme, co vše patří do souboru všech věcí větších než krabíčka od sirek, tedy aniž bychom znali rozsah tohoto pojmu). Navíc vzhledem k tomu, že se počty věcí spadajících pod jednotlivé pojmy mohou měnit, považuje Frege ve skutečnosti pojmy za funkce času, přiřazující časovým okamžikům příslušné extenze daného pojmu (GLA § 46). Toto řešení však ve spojení s tím, že Frege nahrazuje v případě čísel pojmy jejich extenzemi (průběhy hodnot), vede k tomu, že se podoba čísla dále zesložituje: jedná se o průběh hodnot funkce přiřazující každému časovému okamžiku soubor všech rovnopočetných (v daném okamžiku) extenzí pojmů, kteréžto jsou opět průběhy hodnot funkcí přiřazujících každému časovému okamžiku určitou extenzi. A něco takového by mělo být staré známé číslo pět?

Navíc nám asi intuitivně úplně nesedí, že bychom měli ve skutečnosti považovat číslo pět za nějaký soubor zahrnující nejrůznější pojmy (či množiny) – nezdá se přece přirozené prohlašovat třeba „číslo pět obsahuje pojem ‚počet prstů jedné nohy‘“ či dokonce „číslo pět má takové a takové prvky“ apod.

Něco jiného by bylo, kdyby Frege chápal počet příslušející prstům na jedné ruce, tedy číslo pět, jako příslušný pojem „rovnopočetný s prsty jedné ruky“, nikoli jako jeho extenzi. Příslušný pojem totiž vymezuje rozumné kritérium: nějakému pojmu přísluší číslo pět, tedy spadá pod něj právě pět věcí tehdy, lze-li tyto věci vzájemně jednoznačně přiřadit prstům na ruce. To je rozhodně kritérium poukazující na postup, který při určování počtu v počátcích našeho seznamování se s počítáním běžně uplatňujeme – počítání na prstech vlastně znamená vytváření onoho vzájemně jednoznačného přiřazení mezi prsty a počítanými předměty. Jenže tuto cestu chápání počtu jako pojmu Frege v zásadě sám sobě uzavírá. Frege sice v GLA § 68 v poznámce pod čarou prohlašuje, že by v definici (Poč) namísto „extenze pojmu ‚rovnopočetný s...‘“ mohlo stát „pojem ‚rovnopočetný s...‘“, ovšem jednak hned sám proti tomuto pojetí vznáší námítky (které pravda považuje za snadno vyvratitelné, nicméně jejich vyvrácení již nepodává), jednak následně třeba v *Über Begriff und Gegenstand* již opatrněji prohlašuje, že „to byla jen nahodilá poznámka, na které nic dalšího nezakládá“¹⁹ Frege totiž, jak bylo řečeno, považuje číslo za *předmět*, a to pojem ve Fregově pojetí rozhodně není. Jelikož podstatnou vlastností pojmu je, že je predikativní povahy (a lze jej tedy chápat jako „nenасыený“ ve Fregově slova smyslu), nemůže se sám o sobě stát předmětem výpovědi - což ale čísla mohou. Je-li pojem zdánlivě předmětem výpovědi, není to ve skutečnosti již pojem, nýbrž je jaksí „zpředmětněný“²⁰. Tak je například podle Frega trochu paradoxně pravdivá věta „Pojem kůň není pojem“.²¹ Mají-li tedy být čísla předměty, nemohou to být pojmy.

¹⁹ „...übrigens war dies nur eine beiläufige Bemerkung, auf die ich nichts gegründet habe.“ Frege (1892), str. 199.

²⁰ „Man hat bei logischen Untersuchungen nicht selten das Bedürfnis, etwas von einem Begriffe auszusagen und dies auch in die gewöhnliche Form für solche Aussagen zu kleiden, daß nämlich die Aussage Inhalt des grammatischen Prädikats wird. Danach würde man als Bedeutung des grammatischen Subjekts den Begriff erwarten; aber dieser kann wegen seiner prädikativen Natur nicht ohne weiteres so erscheinen, sondern muß erst in einen Gegenstand verwandelt werden, oder, genauer gesprochen, er muß durch einen Gegenstand vertreten werden, den wir mittels der vorgesetzten Worte "der Begriff" bezeichnen,...“ BG str. 197

²¹ Es kann ja nicht verkannt werden, daß hier eine freilich unvermeidbare sprachliche Härte vorliegt, wenn wir behaupten: der Begriff Pferd ist kein Begriff, während doch z. B. die Stadt Berlin eine Stadt und der Vulkan Vesuv ein Vulkan ist. Die Sprache befindet sich hier in einer Zwangslage, welche die Abweichung vom Gewöhnlichen rechtfertigt.“ (Frege (1892), str. 196-7)

Argument proti předmětnému chápání čísel z poněkud jiného soudku uvádí ve svém článku *What numbers could not be* Paul Benacerraf²². Poukazuje na fakt, že čísla 0, 1, 2,... můžeme úspěšně ztotožňovat jak s množinami $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$,... à la Zermelo, tak s množinami $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\{\emptyset\}\}\}$, ... à la von Neumann – obojí úspěšně „funguje“, a nelze tudíž rozlišit, které z těchto ztotožnění by mělo být to správné. Podle Benacerrafa však, není-li žádný pádný argument ve prospěch jednoho či druhého pojetí (či jakýchkoli jiných předmětů, které by vhodně zastupovaly přirozená čísla, třeba fregovských množin všech rovnopočetných množin), nejsou čísla spíše těmi či spíše oněmi předměty, a tudíž čísla *vůbec nemohou být předměty*.²³

To by mohla být odpověď i na přístup, zastávaný např. Quinem²⁴, totiž že čísla lze nahrazovat v zásadě libovolnými entitami – podstatné je, nakolik nahrazení „funguje“, nakolik je vhodnou explikací. Jak to formuluje Peregrin²⁵: „Tento [Fregův] návrh předznamenává metodu, kterou později Carnap nazval *explikací*: nahrazení nějaké abstraktní a těžko uchopitelné entity něčím, co s ní sdílí všechny pro nás podstatné charakteristické vlastnosti a co je v nějakém smyslu snadněji uchopitelné – zpravidla je to nějaký matematický konstrukt, jako je množina. (...) Co Frege dále navrhuje, je možné chápat jako ztotožnění toho, co mají společné prvky nějaké množiny, s touto množinou samotnou: (...) to, co mají společného všechny rovnomocné pojmy, ztotožnit s množinou všech rovnomocných pojmů.“ Problém ovšem je, že Frege si neklade za cíl *explikaci* pojmu čísla, ale jeho *definici*. A od definice bychom čekali nikoli to, že definované něčím rafinovaně „nahradí“, ale že nám sdělí, co definované ve skutečnosti je. Jak se snaží ukázat Benacerraf, šikovných nahrazení může být dokonce vícero, definici však podávat nemusejí.

Frege chápe, jak bylo řečeno, číselný údaj jako výpověď o tom, kolik předmětů spadá pod příslušný pojem. Pokud toto vymezení akceptujeme a domyslíme do důsledků, může se myslím možná trochu objasnit, proč Fregovy námitky proti chápání počtu jako vlastnosti vnějších věcí nejsou tak zcela přesvědčivé. Jde o to, že ačkoli se podle Frega „v aritmetice zabýváme předměty, které nepoznáváme zvenku prostřednictvím smyslů jako něco cizího, ale které jsou dané bezprostředně rozumu“²⁶, extenze (empirických) pojmů tvoří právě předměty kolem nás. Proto zkoumáme-li, kolik předmětů pod takový pojem spadá, není to obvykle záležitost logiky, ale smyslového vnímání. Extenze pojmu se totiž od množiny odlišuje v určitých ohledech podstatněji, než se možná zdá. Věci spadající pod pojem totiž reálně sdílejí vlastnost či charakteristiku spojenou s příslušným pojmem – jejich spadání pod pojem tedy není náhodným zahrnutím do určité množiny, ale je dáno jejich vlastní charakteristikou. Snad i zapřísáhlí nominalisté by souhlasili s tím, že různé věci mohou sdílet nějakou podobnost, mít stejný rys nebo vlastnost jako jiné věci. Tak jsou ale (přinejmenším některé) extenze

²² Benacerraf: *What Numbers Could not Be*, in: *The Philosophical Review*, Vol. 74, No. 1 (Jan., 1965), pp. 47-73

²³ „If numbers are sets, then they must be *particular sets*, for each set is some particular set. But if the number 3 is really one set rather than another, it must be possible to give some cogent reason for thinking so; for the position that this is an unknowable truth is hardly tenable. (...) [T]here is little to conclude except that any feature of an account that identifies 3 with a set is a superfluous one – and that therefore 3, and its fellow numbers, could not be sets at all.“ (Benacerraf 1965, str. 62) „I therefore argue, extending the argument that led to the conclusion that numbers could not be sets, that numbers could not be objects at all; for there is no more reason to identify any individual number with any one particular object than with any other (not already known to be a number).“ str. 69

²⁴ Quine (1988), str. 262-4

²⁵ Peregrin (2005), str. 52-3

²⁶ „Wir beschäftigen uns in der Arithmetik mit Gegenständen, die uns nicht als etwas Fremdes von aussen durch Vermittelung der Sinne bekannt werden, sondern die unmittelbar der Vernunft gegeben sind,...“ Frege GLA, § 105

pojmu dány vlastně přirozeně, na základě sdílení společného rysu, a tyto soubory podobných věcí pak mají v jistém smyslu samy o sobě určitý počet. Proto lze přijmout Fregovo pojetí čísla jako vztaženého k pojmu, a přesto tvrdit, že počet je do značné míry jakousi vlastností „přirozených souborů“ (mimo jiné) smyslových věcí vyskytujících se kolem nás, a tedy něčím, s čím se seznamujeme nejprve empirickou cestou. Ostatně Frege nezbytnost smyslového vnímání pro naučení se číslům nepopírá, jak o tom svědčí jeho poznámka pod čarou k § 105 (GLA): „Tím nechci vůbec popírat, že bychom bez smyslových vjemů byli hloupí jak poleno a neměli tušení ani o číslech ani o ničem jiném“²⁷. Protože však pojmy mohou zahrnovat jak empirické, tak neempirické předměty, vysvětlovalo by se tak, jak je možné zároveň považovat počet za „vlastnost“ (souborů) smyslově vnímatelných předmětů, a zároveň počítat i cokoli dalšího.

Fregův pojem extenze pojmu se dnes běžně nahrazuje pojmem množiny. Množiny jsou pak v současném pojetí považovány za něco, co lze vytvářet v zásadě zcela libovolně, na straně prvků se nevyžaduje žádná podobnost. Neměli bychom však zapomínat, že pojem množiny, se kterým dnes tak běžně a bez problému pracujeme, je pojem umělý a při bližším zkoumání i mírně podezřelý: o množinách kupříkladu platí, že ač jsou to ryze abstraktní entity, jejich prvky, které je jednoznačně určují, mohou být předměty náramně konkrétní. Tak soubor nějakých fyzických předmětů „vytváří“ jakousi abstraktní entitu (která je vymezená jen a jen tím, že je souborem těchto předmětů). Proto není úplně neproblematické nahrazovat fregovské extenze jen tak bez ničeho množinami. Na druhou stranu je pravda, že i pojmy mohou nabývat značně uvolněných podob (např. množiny udané výčtem lze chápat i jako extenze pojmu typu „být buď *a* nebo *b* nebo...“, kde *a*, *b*,... jsou jména jednotlivých prvků), nicméně tyto typy pojmu jsou chápány jako v jistém smyslu deviantní.

Jakým druhem předmětů vlastně mají čísla podle Frege být? Frege považuje čísla za předměty objektivní a nikoli skutečné (nicht wirklich), tedy takové, které jsou nezávislé na lidském myšlení, ale nejsou smyslově vnímatelné²⁸. Jako příklad něčeho rovněž objektivního a zároveň nikoli skutečného (tj. smysly nevnímatelného) uvádí zemskou osu: tu také nemůžeme nijak vnímat, přesto je objektivní (GLA § 27). Pokud bychom ale podle Fregova návrhu považovali počet za vlastnost vztaženou k extenzi pojmu, bylo by možné říci, že zatímco jednotlivé soubory smyslově vnímatelných věcí spadajících pod ten který pojem (a tedy sdílejících nějaký společný rys) jsou nositeli konkrétního, fregovsky skutečného počtu²⁹ (jako mají třeba jednotlivé kulaté věci konkrétní smyslově vnímatelný kulatý tvar), ovšem to, co je společné všem rovnomocným souborům, je ono objektivní a již nikoli (fregovsky) skutečné číslo (jako to, co je společné všem kulatým věcem, totiž kulatost, je ve své obecnosti již něco mimo smyslové vnímání, tedy nikoli skutečného ve Fregově slova smyslu). Konkrétní počet je navíc fregovsky skutečný (smyslově vnímatelný) jen tehdy, jsou-li takto fregovsky skutečné i počítané předměty – případná smyslová vnímatelnost počtu není dána jeho povahou, ale povahou počítaných předmětů, takže soubor nesmyslových entit může být sice nositelem určitého počtu, vzhledem ke své povaze však již počtu nikoli smyslově vnímatelného.

²⁷ „Ich will hiermit gar nicht leugnen, dass wir ohne sinnliche Eindrücke dumm wie ein Brett wären und weder von Zahlen noch von sonst Etwas wüssten“

²⁸ „Ich unterscheide das Objective von dem Handgreiflichen, Räumlichen, Wirklichen.“ (GL, §26) „...ich erkenne ein Gebiet des Objectiven, Nichtwirklichen an, während die psychologische Logiker das Nichtwirkliche ohne weiteres für subjectiv halten. Und doch ist gar nicht einzusehen, warum das, was einen vom Urtheilenden unabhängigen Bestand hat, wirklich sein, d. h. doch wohl fähig sein müsse, unmittelbar oder mittelbar auf die Sinne zu wirken.“ GG, předmluva, str. XVIII

²⁹ Fregovy námitky, že velká čísla nejsou bezprostředně nahlédnutelná (např. GLA § 5), jsou nepochybně správné – ovšem ani třeba molekulovou strukturu věcí nemůžeme nějak bezprostředně nahlédnout, k jejímu určení vede poměrně složitý postup, přesto bychom ji asi neupírali vnějším věcem.

Literatura:

- Benacerraf, P. (1965): What Numbers Could not Be. In: *The Philosophical Review*, Vol. 74, No. 1, str. 47-73
- Dummett, M. (1991): *Frege: Philosophy of Mathematics*. Harvard University Press, Cambridge
- Frege, G. (1891): *Funktion und Begriff*. Verlag von Hermann Pohle, Jena
- Frege, G. (1893/1903): *Die Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*. I-II, Verlag von Hermann Pohle, Jena
- Frege, G. (1884): *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. W. Koebner, Breslau; 1884): slovenský překlad *Základy aritmetiky. Logicko-matematické skúmanie pojmu čísla*. Přel. P. Balko, příloha časopisu *Organon F* 2001
- Frege, G. (1892): Über Begriff und Gegenstand. In: *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16, str. 192-205
- Geach, P. T. (1951): Frege's Grundlagen. In: *The Philosophical Review*, Vol. 60, No. 4, str. 535-544
- Kutschera, F. von (1989): *Gottlob Frege: eine Einführung in sein Werk*. Berlin, New York, W. de Gruyter
- Kolman, V. (2008) : *Filosofie čísla*. Filosofia
- Kolman, V. (2002): *Logika Gottloba Fregy*. Filosofia
- Mill, J. S. (1843): *A System of Logic. Ratiocinative and Inductive*. Londýn
- Quine, W. V. O. (1988): *Word & Object*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts
- Maddy, P. (1990): *Realism in Mathematics*. Oxford University Press
- Peregrin, J. (2005): *Kapitoly z analytické filosofie*. Filosofia, Praha
- Potter, M. (2000): *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*. Oxford University Press
- Sousedík, P., Svoboda, D. (2010): Tomášovo pojetí čísla. In: *Organon F* 17, No. 1, 53-69
- Sullivan, D. (1990): Frege on the Statement of Number. In: *Philosophy and Phenomenological research*, Vol. 50, No. 3, str. 595-603