

Základní požadavky ke zkoušce z „Termodynamiky kontinua“

- Formulace zákonů bilance hmotnosti, hybnosti, momentu hybnosti, mechanické energie a vnitřní energie
- Explicitní vyjádření hustoty produkce entropie v zákonu bilance entropie
- Konstitutivní vztahy pro termo-visko-elastický materiál; tekutiny i pevná tělesa.

Hlubší znalosti budou prověřovány na následujících typových příkladech, které jsou ke stažení na <http://www.it.cas.cz/cs/marsik/prednasky-ke-stazeni>

Zkoušku možno domluvit telefonicky na t. č. 266053322 a nebo e-mailem: marsik@it.cas.cz. Místo konání zkoušky: Ústav termomechaniky AVČR v.v.i., Dolejškova 5, 18200 Praha 8. Stanice tramvaje č. 10 a 17 a stanice METRA „Ládví“ . Vítány jsou skupiny po 2 a více studentech.

Prof. Ing. František Maršík, DrSc

1. Vypočtete deformační gradient F_I^i jednoduchého smyku

$$\begin{aligned}x^1 &= X^1 + kX^2 \\x^2 &= X^2 \\x^3 &= X^3\end{aligned}$$

Proveďte jeho polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, a určete jeho Greenův deformační tenzor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$. Stanovte objemovou změnu deformovaného elementu.

Řešení: **1.**

$$\begin{aligned}F_I^i &= \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_L^i U_I^L = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \frac{1+\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)\end{aligned}$$

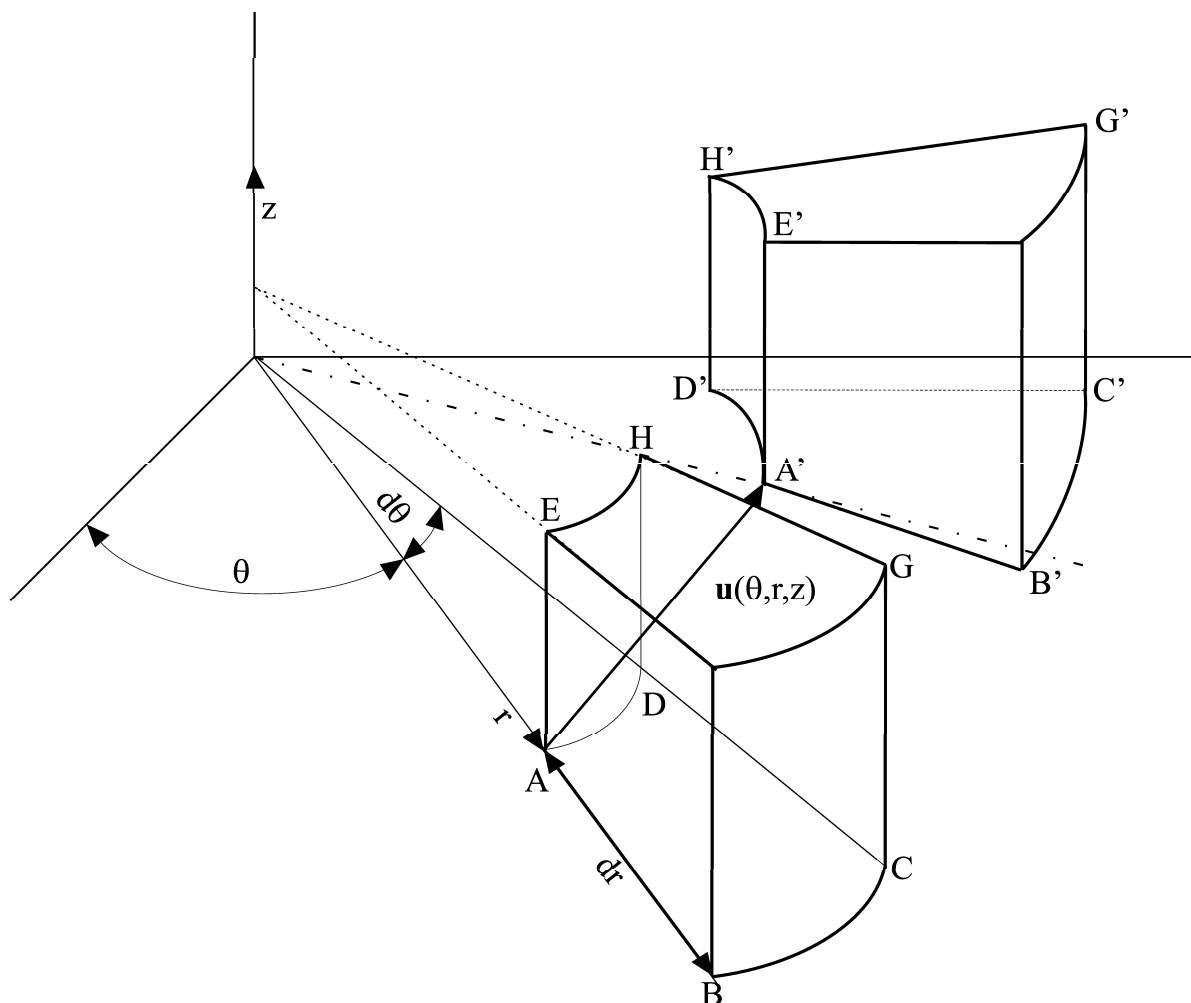
pro $k = 2 \operatorname{tg} \gamma$,

$$C_{IK} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Velikost objemu deformovaného elementu se nemění, protože

$$dv = j dV = V, \quad j = (\det |C_{IJ}| = III_C^{1/2}) = 1. \quad (1.3)$$

2. Z geometrického názoru, popř. užitím Christoffelových symbolů, odvoďte vyjádření složek deformace v polárních souřadnicích $\zeta^1 = \Theta$, $\zeta^2 = z$, $\zeta^3 = r$



Fyzikální složky vektoru posunutí jsou $\mathbf{u} = (u_\theta, u_z, u_r)$

$$2e_{ij} = u_i|_j + u_j|_i - u^l|_i u_l|_j, \quad i, j=1, 2, 3. \quad (2.1)$$

$u_i|_j \dots$ je kovariantní derivace, která má geometrický význam derivace v kartézských souřadnicích.

Viz např. M. Brdička, Mechanika kontinua, ČSAV, 1959

F. Maršík, Termodynamika kontinua, Academia, 1999

Řešení: **2.**

$$2e_{kl} = \delta_{kl} - e_{kl} = \delta_{kl} - \left(\mathbf{i}_k - \frac{\partial u_m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m \right) \left(\mathbf{i}_l - \frac{\partial u_m}{\partial x^l} \mathbf{i}_m \right) =$$

$$= \frac{\partial u_k}{\partial x^l} + \frac{\partial u_l}{\partial x^k} - \frac{\partial u_m}{\partial x^k} \frac{\partial u^m}{\partial x^l} \quad \dots \text{tenzor konečných deformací} \quad (2.2)$$

Ve válcových souřadnicích je parciální derivace $\frac{\partial u_i}{\partial x^j}$ nahrazena kovariantní derivací, takže

$$2e_{kl} = u_k|_l + u_l|_k - u^m|_k u^m|_l, \quad (2.3)$$

$$\text{kde } u_i|_j = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} u_m, \quad i, j, m = \theta, z, r, \text{ pro } \left\{ \begin{matrix} \theta \\ rz \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \theta r \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \left\{ \begin{matrix} r \\ \theta\theta \end{matrix} \right\} = -r \quad (2.4)$$

Fyzikální velikost složek vektoru posunutí (značíme \bar{u}_i) a jejich derivací je $u_r = \bar{u}_r$, $\bar{u}_z = \frac{u_\theta}{r}$, $u_z = \bar{u}_z$, $\bar{u}_i|_j = \frac{u_i|_j}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}$, pro $g_{11} = r^2$, $g_{22} = g_{33} = 1$

Geometrické složky

Fyzikální složky

$$\begin{array}{ll} u_r|_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \\ u_r|_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial \bar{u}_r}{r \partial \theta} - \frac{\bar{u}_\theta}{r} \\ u_\theta|_r = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} \\ u_\theta|_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + r u_r & \frac{\partial \bar{u}_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\bar{u}_r}{r} \\ u_\theta|_z = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial z} \\ u_z|_\theta = \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial \bar{u}_z}{r \partial \theta} \\ u_r|_z = \frac{\partial u_r}{\partial z} & \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} \\ u_z|_r = \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} \end{array}$$

Konečný tvar tenzoru deformace ve válcových souřadnicích je (uvažujeme jen fyzikální složky, proto vypustíme ())

$$2e_{rr} = 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \quad (2.5)$$

$$2e_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \left(\frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad (2.6)$$

$$2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad (2.7)$$

$$2e_{\theta\theta} = 2 \left(\frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \left(\frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right)^2, \quad (2.8)$$

$$2e_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} - \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (2.9)$$

$$2e_{zz} = 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 \quad (2.10)$$

3. Vypočtěte materiálovou derivaci cirkulace $\Gamma_{(v)}$ vektoru rychlosti \mathbf{v} , která je definována křivkovým integrálem

$$\Gamma_{(v)} = \oint_c \mathbf{v} d\mathbf{x} = \oint_c v_i dx^i. \quad (3.1)$$

Při úpravě použijte vektorové identity

$$\text{rot}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{g} \nabla) \mathbf{f} + \mathbf{f}(\nabla \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \mathbf{f}) - (\mathbf{f} \nabla) \mathbf{g}, \quad (3.2)$$

nebo ve složkách

$$e^{ijk} e_{klm} = \delta_e^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j. \quad (3.3)$$

Zavedením vektoru vířivosti

$$\mathbf{w} = \text{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad \text{resp.} \quad w^i = e^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} v_k \quad (3.4)$$

ukážete, že platí Kelvinův teorém

$$\dot{\Gamma}_{(v)} = \oint_s \text{rot} \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{a} = \oint_{c=\partial s} \mathbf{v} ds. \quad (3.5)$$

Diskutujte, jak se mění cirkulace pro Navierovu-Stokesovu tekutinu v gravitačním poli $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ a vlivem Coriolisovy síly $-2\mathbf{\underline{\Omega}} \times \mathbf{v}$, kde $\mathbf{\underline{\Omega}}$ je vektor úhlové rychlosti rotace Země.

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \mathbf{v}) + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} - 2\mathbf{\underline{\Omega}} \times \mathbf{v} \quad (3.6)$$

Řešení: 3.

Dosadíme rovnici (3.6) do Kelvinova teorému (3.5)

$$\dot{\Gamma}_{(v)} = \underbrace{-\int_c \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} dx^i}_I + \underbrace{\int_c g_i dx^i}_{II} - 2 \underbrace{\int_c \varepsilon_{ijk} \Omega^j v^k dx^i}_{III} + \underbrace{\int_c \nu \frac{\partial^2 v_i}{(\partial x^l)^2} dx^i}_{IV} \quad (3.7)$$

I) Hustota není funkcí jen tlaku (ale i teploty) a proto tento integrál je obecně nenulový. Jen v případě barotropních tekutin $\rho = \rho(p)$ kdy lze psát

$$\int_c \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} dx^i = \int_c \frac{\partial P}{\partial x^i} dx^i, \quad (3.8)$$

(např. pro isentropický proces $p = \text{konst} \rho^\kappa$) je tento integrál roven nule.

II) Gravitační sílu můžeme vyjádřit jako gradient potenciálu, např.

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial}{\partial x^i} \varphi, \quad \varphi = gx^3, \quad x^3 = z \quad (3.9)$$

a pak je tento integrál roven nule.

III) Coriolisova síla má silný vliv na cirkulaci a tím i na pohyb atmosféry.

IV) Viskózní síly mají vyjma mezní vrstvy téměř zanedbatelný okamžitý účinek, ale jejich dlouhodobý vliv na útlum cirkulace je zásadní.

4.

a) Odvoďte rovnici bilance celkové entalpie h_c pro termoviskoelastické tekutiny. Celková entalpie je definována jako součet vnitřní energie u a všech ostatních mechanických energií

$$h_c = h + \frac{v^2}{2} + \varphi, \quad (4.1)$$

kde $h = u + \frac{p}{\rho} = h_o + \int_{T_o}^T c_p dT$ je entalpie [J/kg],

$\frac{v^2}{2}$... je kinetická energie [J/kg],

$\varphi = gz$... je potenciální energie [J/kg], pro $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$.

b) Nalezněte vztahy pro výpočet výkonu průtočných zařízení, turbin, spalovacích motorů a čerpadel.

Řešení: 4.

$$a) \quad \rho \dot{h}_c = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q^k}{\partial x^k} + \frac{\partial (v_i t_{dis}^{ki})}{\partial x^k} \quad (4.2)$$

$$b) \quad \dot{W} = \dot{m} (h_{c\,in} - h_{c\,out}), \quad (4.3)$$

$\dot{m} = \rho v A$... průtočné množství

$A [m^2]$... velikost průřezu

$v [m/s]$... průtočná rychlost

kde $h_{c\,in}$ a $h_{c\,out}$ jsou celkové entalpie 1 kg vstupující a vystupující tekutiny.

4.1 Ukažte na příkladu pístového stroje (spalovacího motoru či kompresoru) vyžití bilance energie v příkladu 4 a odvoďte vztahy pro výkon či příkon toho stroje pro případ přívodu, resp. odvodu tepla Δh . Porovnejte nárůst tlaku nad pístem následkem přidání dalšího plynu-vliv Daltonova zákona.

Řešení 4.1.

Připomeňme krátce výpočet výkonu \dot{W} všech motorů (včetně turbin) vycházejících z transformace energií a tedy vyhovující zákonu zachování energie, viz příklad 4.

Jestliže \dot{m} [kg/s] je protékající hmotnost pracovní látky a

$$h_c = h + \frac{v^2}{2} + \varphi \quad [\text{J/kg}] \quad (1)$$

je její celková entalpie, pak výkon či naopak spotřeba energie příslušného stroje je roven

$$\dot{W} = \dot{m}(h_{c, out} - h_{c, in}) \quad [\text{W=J/s}] \quad (2)$$

Indexy „in“ a „out“ označují postupně hodnoty na vstupu do motoru a na jeho výstupu, viz např. *Sazima et al.* 1989.

Celková entalpie h_c se skládá z:

- entalpie $h = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT + \Delta h$, (3)

kde c_p [J/(kg K)] je specifické teplo pracovní látky a Δh [J/kg] je energie (teplo) uvolněná při chemické reakci či kondenzaci (pak je $\Delta h > 0$, jde o teplo přivedené) a nebo naopak energie při takovýchto změnách pohlcená, např. vypařování (pak je $\Delta h < 0$, jde o teplo odvedené).

- kinetická energie pracovní látky $v^2/2$ [J/kg]. Má význam u leteckých proudových motorů či větrných elektráren.
- potenciální energie pracovní látky φ [J/kg]. Hlavní význam má u vodních elektráren.

Předpokládejme, že nasátým plynem je vzduch popsáný stavovou rovnicí

$$p = \rho \hat{R} T, \text{ kde } \hat{R} = 286,87 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right], c_{va} = 719,63 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right], \kappa = \frac{c_{pa}}{c_{va}} = 1,402 \quad (4)$$

v důsledku dodání mechanické energie při adiabatické kompresí mezi body 1, 2 se ohřeje na teplotu T_2 a z původního objemu V_1 se stlačí na objem V_2 , tudíž

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad V_2 = V_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} \quad (5)$$

a přitom spotřebuje mechanickou energii (práci)

$$W_{\text{spotř}} = \frac{p_1 V_1}{1 - \kappa} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad [\text{J}]. \quad (6)$$

Tuto hodnotu naleznete integrací $\int_{V_1}^{V_2} p dV$ při adiabatickém průběhu tlaku (5). Např. při kompresním poměru $\frac{p_2}{p_1} = 10$ je $T_2 = 1,93T_1$ a $V_2 = 0,193V_1$. Při teplotě nasátého vzduchu 17°C , tj. $T_1 = 290\text{ K}$ je $T_2 = 560\text{ K}$, tj. asi 287°C .

Výměna hmoty a energie

V bodu “2” oběhového diagramu (po skončení komprese) se do teplého vzduch vstříkne malé množství kapaliny:

i) hořlavé látky, která uvolní množství energie $\Delta h \geq 0$ a předá je vzduchu.

ii) množství vody, která se přemění na přehřátou páru. Vzhledem k tomu, že k vypaření vody je třeba teplo dodat ($\Delta h < 0$, odebere se z tepla zkomprimovaného vzduchu).

Abychom ukázali dodatečný účinek parciálního tlaku vstříknuté vody soustředíme se jen na případ ii). Vypařením vody klesne teplota T_2 v objemu V_2 podle zákona zachování energie přibližně na teplotu T (zanedbáváme ohřev vody na teplotu varu)

$$m_a c_{va} (T_2 - T) = m_w h_{lv} \quad [\text{J}], \quad h_{lv} \approx 2.2 \text{ MJ kg}^{-1}. \quad (7)$$

Zde m_a [kg] je množství nasátého vzduchu a m_w [kg] je množství vstříknuté vody v objemu V_2 , h_{lv} je výparné teplo vody. Ukážeme, jak klesne odpovídajícím způsobem i tlak směsi a jak se uplatní dodatečný tlak vodní páry podle Daltonova zákona.

Označíme p celkový tlak směsi vzduchu a páry

$$p = p_a + p_w, \quad \text{kde } p_a V_2 = \frac{m_a}{M_a} RT, \quad p_w V_2 = \frac{m_w}{M_w} RT, \quad R = 8314 [\text{J kmol}^{-1} \text{K}^{-1}] \quad (8)$$

kde $p_a, p_w, M_a = 28.96 [\text{kg kmol}^{-1}]$ a $M_w = 18 [\text{kg kmol}^{-1}]$ jsou postupně parciální tlaky a molekulové hmotnosti vzduchu a vody. Poměr tlaku páry k tlaku vzduchu po vypaření vody nalezne tak, že podělíme poslední dvě rovnice (8) a dosadíme z rovnice energie (7)

$$\frac{p_w}{p_a} = \frac{c_{va} M_a}{M_w h_{lv}} (T_2 - T) = \frac{c_{va} M_a T_1}{M_w h_{lv}} \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \frac{T}{T_1} \right) \quad (9)$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že relativně největší parciální tlak vodní páry bude při nejnižší možné teplotě T , ta je však rovna teplotě syté páry $T = T_s$, která je na mezní křivce (při fázovém přechodu) určena jednoznačně tlakem syté páry p_{ws} podle vztahu

$$p_{ws} = \exp\left(24.65 - \frac{4889}{T_s}\right) [\text{Pa}]. \quad (10)$$

Tento zjednodušený vztah platí v oblasti teplot 0-500°C s dostatečnou přesností. Přesný vztah je uveden v publikaci Šifner, Klomfar, (1996). Tudíž nejvyšším možným tlakem je tlak nasycené páry (10) a to při teplotě T_s . Tuto teplotu však bude mít směs jen při určité množství vstříknuté vody m_w . Teplotu T a množství m_w a parciální tlak páry p_{ws} nalezneme řešením rovnic (7, 9, 10).

Zavedeme označení

$$\frac{p_w}{p_a} = A\left(\pi^{(\kappa-1)/\kappa} - \vartheta\right), \text{ kde } p_a = \frac{m_a RT}{M_a V_2} = \frac{\rho_1 RT \pi^{\frac{1}{\kappa}}}{M_a} = p_1 \vartheta \pi^{1/\kappa}, \quad (11)$$

$$A = \frac{c_{va} M_a T_1}{M_w h_{lw}}, \quad \pi = \frac{p_2}{p_1}, \quad \vartheta = \frac{T}{T_1}, \quad \rho_1 = \frac{m_a}{V_1}$$

Dosažením z rovnice (10) dostáváme rovnici pro ϑ

$$\exp(24.65) = 3.282 \cdot 10^6 = A p_1 \left(\pi^{(\kappa-1)/\kappa} - \vartheta\right) \exp\left(\frac{4889}{T_1 \vartheta}\right) \quad (12)$$

Její řešení pro výše uvedené podmínky

$$p_1 = 1.01325 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad \pi = 10, \quad T_1 = 290 \text{ K}, \quad A = 0.1526 \text{ je } \vartheta = \frac{T}{T_1} = 1.247, \text{ t.j. } T = 361.6 \text{ K} \quad (13)$$

Teplota směsi klesne po vstříku vody z hodnoty $T_2 = 560 \text{ K}$ na teplotu $T = 361.6 \text{ K}$. Výsledný tlak směsi pak bude znatelně nižší

$$p = p_a + p_w = p_1 \vartheta \pi^{1/\kappa} + p_w = 6.53 \cdot 10^5 + 0.68 \cdot 10^5 = 7.21 \cdot 10^5 = 7.117 p_1 \quad (14)$$

proti původním $10 p_1$.

Důsledkem tohoto poklesu tlaku je i pokles mechanické práce, kterou tato směs může vykonat. Tudíž práce spotřebovaná na adiabatickou kompresi je větší než následná adiabatická expanze směsi vzduchu a páry. Pro výše uvedené podmínky platí

$$W_{spotř} = \frac{p_1 V_1}{1 - \kappa} \left[(10)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] > W_{vyk} = \frac{p_1 V_1}{1 - \kappa} \left[(7.117)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] [\text{J}], \quad \frac{W_{vyk}}{W_{spotř}} = \frac{0.755}{0.935} = 0.807 \quad (15)$$

Přibližně 20% příkonu se spotřebuje na výrobu páry. Pístové zařízení pracuje jako stroj na výrobu syté páry.

Energetická spotřeba pístového stroje se vstříkem vody.

Nechť je m_a množství nasátého vzduchu, pak podle bilance energie (7) je množství vstříknuté vody

$$m_w = \frac{m_a c_{va} (T_2 - T)}{h_{lw}} = \frac{m_a c_{va} T_1 \left(\pi^{(\kappa-1)/\kappa} - \vartheta\right)}{h_{lw}} = 0.0648 m_a \quad [\text{kg}] \quad (16)$$

potom práce spotřebovaná na jeden cyklus je dána rozdílem entalpií $h_{c,out} - h_{c,in}$ podle vztahu (2)

$h_{cin} = c_{va}T_1 + \frac{p_1}{\rho_{a1}}$...entalpie nasátého vzduchu

$h_{cout} = \left(\frac{m_a}{m} c_{va} + \frac{m_w}{m} c_{vw} \right) T_1 + \frac{p_1}{\rho_{a1} + \rho_{a2}} - \frac{m_w}{m} h_{lv}$, kde $m = m_a + m_w$...entalpie vypuštěné směsi

Množství práce v jednom cyklu je

$$W = m(h_{cout} - h_{cin}) \square (m_a + m_w) \left[\left(\frac{m_a}{m} c_{va} + \frac{m_w}{m} c_{vw} \right) T_1 + \frac{p_1}{\rho_{a1} + \rho_{a2}} \right] - m_w h_{lv} - m_a \left(c_{va} T_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = -m_w h_{lv} = -0.142 m_a \text{ [J]}, \quad (17)$$

Spotřebovávaný výkon je je pak úměrný množství protékaného vzduchu \dot{m}_a

$$\dot{W} = -0.142 \cdot 10^6 \dot{m}_a \text{ [W]} \quad (18)$$

Tento příklad měl ukázat, že vliv dodatečného parciálního tlaku způsobeného vypařením vody nemůže kompenzovat úbytek tlaku způsobený odebráním výparného tepla.

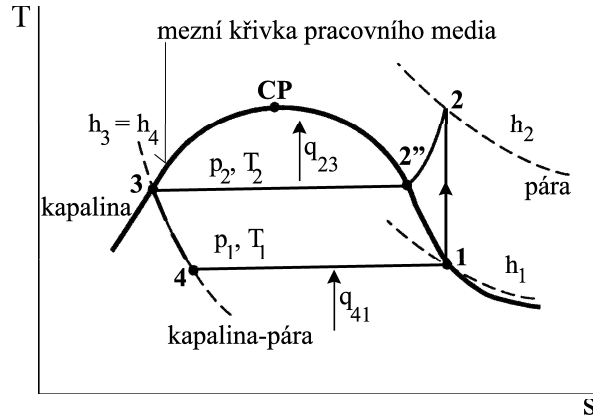
Reference:

Sazima M., Kmoníček V., Schneller J. a kol : *Technický průvodce 2, Teplo*, SNTL, Praha, 1989

Středa I., Sazima M., Doubrava J.: *Termomechanika*, Ediční středisko ČVUT Fakulta strojní, Praha, 1992

Šifner O., Klomfar J.: Mezinárodní standardy termofyzikálních vlastností vody a vodní páry. Academia, AVČR, Studie 1/1996

5. Analyzujte oběh kompresorového chladicího, popř. topícího zařízení podle pracovního diagramu na obr. 5.1.



Obr. 5.1: Pracovní diagram chladicího zařízení-chladičky. Při oběhu opačným směrem bude zařízení v úseku 32 teplo získávat a bude fungovat jako zdroj mechanické energie, viz př. 4., vztah (4.3).

Pracovní medium je např. voda, $R23$ (CHF_3 - trifluormetan), $R32$ (CH_2F_2 - difluormetan). $h = u + \frac{p}{\rho}$ je entalpie $\left[\frac{J}{kg}\right]$ a $q > 0$ $\left[\frac{J}{kg}\right]$ je dodané teplo. Jednotlivé části procesu jsou:

1-2: isentropická komprese, $q_{12} = 0$

2-3: isobarický odvod tepla, $q_{23} = h_3 - h_2$

3-4: škrceň; definováno jako isoentalpická změna $h_3 = h_4$

4-1: isobarický přívod tepla $q_{41} = h_1 - h_4 = h_1 - h_3$

Řešení: 5. Zákon bilance energie napíšeme pomocí entalpie. Pro 1 kg pracovního media platí

$$dh = \frac{1}{\rho} dp + dq, \quad (5.1)$$

viz např. př. 4., kde zanedbáme rychlost v a potenciální energii φ , takže $\dot{() = \frac{\partial}{\partial t} = d(.)$. Pro dodané teplo obecně platí $dq = Tds$. Integrací rovnice (5.1) podle křivky na obr. 5.1 dostáváme jednotlivé části pracovního oběhu. Uvážíme-li, že práce kompresoru je $dw = \frac{1}{\rho} dp$ (vztaženo na 1 kg čerpané tekutiny z tlakové hladiny p_1 na hladinu $p_1 + dp$) lze pro odvedené teplo (pro případ chladičky) psát

$$q_{23} = h_3 - h_2 = h_3 - h_1 + h_1 - h_2 = -q_{41} - w_{12}, \quad (5.2)$$

resp.

$$w_{12} = |q_{23}| - |q_{41}|. \quad (5.3)$$

Zde $w_{12} = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} \doteq \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1)$ je mechanická práce kompresoru. Velikost této práce je rovna rozdílu tepla odvedeného z chladičky do okolí (o velikosti $|q_{23}|$) při teplotě T_2 a tepla přivedeného (o velikosti $|q_{41}|$) z chlazeného prostoru při teplotě $T_1 < T_2$.

6. V kosočtverečné soustavě (rombické), která je typická pro tzv. ortotropní materiály, např. dřevo, svaly, kosti, laminátové materiály apod. je 9 nezávislých materiálových konstant. Tyto konstanty charakterizují jeho vlastnosti tak, že jsou invariantní vzhledem k otočení o 180° kolem všech třech os. Zavedeme-li následující označení materiálových konstant

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \Sigma^{1111}, & \sigma_{12} &= \Sigma^{1122}, & \sigma_{13} &= \Sigma^{1133}, \\ \sigma_{22} &= \Sigma^{2222}, & \sigma_{23} &= \Sigma^{2233}, & \sigma_{33} &= \Sigma^{3333}, \\ \sigma_{44} &= \Sigma^{2323}, & \sigma_{55} &= \Sigma^{1313}, & \sigma_{66} &= \Sigma^{1212},\end{aligned}\quad (6.1)$$

lze Hookův zákon

$$t_{el}^{ij} = \Sigma^{ijkl} e_{kl} \quad (6.2)$$

zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} t_{el}^{11} \\ t_{el}^{22} \\ t_{el}^{33} \\ t_{el}^{23} \\ t_{el}^{13} \\ t_{el}^{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Napište způsob transformace matice elastických koeficientů Σ^{ijkl} tak, abychom mohli tyto koeficienty považovat za objektivní veličiny. Určete vůči kterým rotacím Q_j^i musí být invariantní matice Σ^{ijkl} , aby uvažovaný materiál byl ortotropní. Kolik nezávislých elastických konstant má isotropní materiál?

Řešení: **6.** Matice elastických koeficientů je reprezentována tenzorem 4. řádu, který se transformuje podle zákona

$$\Sigma'^{ijkl} = Q_m^i Q_n^j Q_p^k Q_q^l \Sigma^{mnpq}. \quad (6.4)$$

Ortotropní materiál je invariantní vůči transformacím souřadnic

$$x'^i = Q_m^i x^m, \quad \text{pro} \quad (6.5)$$

$$Q_m^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Q_m^i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Q_m^i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Isotropní materiál má dvě nezávislé konstanty, protože se isotropní tenzor nemění při libovolném natočení Q_m^i ; platí

$$\Sigma'^{ijkl} = \Sigma^{ijkl} \quad \text{pro} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (6.7)$$

resp.

$$\Sigma^{ijkl} = \eta \delta_{ij} \delta^{kl} + \hat{\mu} (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{ik} \delta^{jk}). \quad (6.8)$$

Tudíž $\Sigma^{1111} = \eta + 2\hat{\mu}$, $\Sigma^{1122} = \Sigma^{1133} = \eta$, $\Sigma^{1212} = \hat{\mu} \dots$

7. Relace mezi měrnými tepley c_v , c_p je vyjádřena pro termoelastické těleso vztahem

$$c_p = c_v + \frac{T_o}{\rho_o} \alpha_{mn} \alpha_{pq} \Sigma^{mnpq}, \quad (7.1)$$

kde α_{mn} je tenzor teplotních roztažností a Σ^{mnpq} je tenzor elastických koeficientů. Pro termoelastickou tekutinu platí vztah

$$c_p = c_v + \frac{9T\alpha^2}{\rho\chi_T}, \quad (7.2)$$

kde α je koeficient objemové teplotní roztažnosti

$$3\alpha = \rho \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial T} \right)_p, \quad \chi_T = -\rho \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial p} \right)_T \quad (7.3)$$

a χ_T je koeficient izotermické stlačitelnosti.

Nalezněte vyjádření vztahu (7.1) pro homogenní izotropní těleso s konstitutivním vztahem

$$t_{el}^{kl} = -3K\alpha(T - T_o)\delta^{kl} + \eta e_{(1)}\delta^{kl} + 2\hat{\mu}e^{kl} \quad (7.4)$$

a vztahu (7.2) pro termoviskozní tekutinu

$$t_{el}^{kl} = -p(\rho, T)\delta^{kl}, \quad p = \rho RT \quad (7.5)$$

Řešení: **7.**

Uvážíme-li, hodnoty Σ^{mnpq} pro izotropní těleso z příkladu 6 a pro $K = \eta + \frac{2}{3}\hat{\mu}$, $\alpha_{pq} = \alpha\delta_{pq}$, dostáváme vztah (7.2). Derivací stavové rovnice (7.5) dostáváme tzv. Meyerův vztah

$$c_p - c_v = R. \quad (7.6)$$

8. Určete (v přiblížení malých deformací a za předpokladu nestlačitelnosti, tj. $\sigma = 1/2$) korelaci harmonických fluktuací teploty a deformace

$$\delta T = \Delta T_o \sin \omega t, \quad \delta e_{11} = \varepsilon_o \sin \omega t, \quad (8.1)$$

jejichž úhlová frekvence je ω a amplitudy $\Delta T_o, \varepsilon_o$, tak aby byla zajištěna stabilita termoviskoelastického materiálu i při $\left(\frac{\partial p}{\partial e_{11}}\right)_T < 0$.

Řešení: 8.

Podmínka stability termoviskoelastického materiálu Kelvinova typu je dána podmínkou

$$\rho_o \overline{\dot{d}^2 u} = \rho_o \frac{c_v}{T_o} (\delta \dot{T})^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial e_{11}}\right)_T \overline{(\delta \dot{e}_{11})^2} = -\frac{\lambda}{T_o} \left(\frac{\partial \delta T}{\partial y}\right)^2 - 3\mu \overline{(\delta \dot{e}_{11})^2} \leq 0. \quad (8.2)$$

Zde λ a μ jsou materiálové parametry vyjadřující tepelnou vodivost a viskozitu materiálu. Viskozitu předpokládáme ve tvaru obvyklém pro creep kovů

$$\mu = \mu_o \left[\frac{3(\dot{e}_{11})^2}{2}\right]^{n-1}, \quad \mu_o = konst, \quad (8.3)$$

a tepelnou vodivost λ považujeme za konstantní. Pro $n = 1$ jde o Newtonovskou tekutinu. Gradient teploty $\frac{\partial \delta T}{\partial y}$ nahradíme poměrem $\frac{\Delta T_o}{l}$, která vyjadřuje rychlost poklesu fluktuace teploty v prostoru, l je nějaký charakteristický rozměr v místě ohřevu. Za těchto podmínek má podmínka stability (8.2) tvar

$$\left[\rho_o \frac{c_v}{T_o} \left(\frac{\Delta T_o}{\varepsilon_o}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial e_{11}}\right)_T \right] \overline{\sin^2 \omega t} = \quad (8.4)$$

$$- \left[\frac{\lambda}{T_o l^2} \left(\frac{\Delta T_o}{\varepsilon_o}\right)^2 \sin^2 \omega t + 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n \mu_o (\varepsilon_o)^{2(n-1)} (\overline{\sin \omega t})^{2n} \right] \leq 0.$$

V případě periodických z vnějšku vynucených fluktuací je tato podmínka splněna, jen když bude platit

$$\frac{\rho_o c_v}{T_o} \left(\frac{\Delta T_o}{\varepsilon_o}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial e_{11}}\right)_T < 0 \quad \text{pro} \quad \frac{\overline{\sin^2 \omega t}}{\overline{\sin \omega t}} > 0 \quad (8.5)$$

Uvážíme-li, že $\overline{\sin^2 \omega t} = \omega \sin(2\omega t)$ pro $t \in (0, \frac{\tau}{8})$ je $\sin(2\omega t) > 0$ a pro $t \in (\frac{\tau}{8}, \frac{\tau}{4})$ je $\sin(2\omega t) < 0$, kde $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ je doba jedné periody fluktuací. Aby byla splněna nerovnost (8.4), musí při nástupu fluktuací (deformace δe_{11} a δT) platit nerovnost

$$\left(\frac{\partial p}{\partial e_{11}}\right)_T < -\frac{\rho_o c_v}{T_o} \left(\frac{\Delta T_o}{\varepsilon_o}\right)^2, \quad \text{v čase } t \in \left(0, \frac{\tau}{8}\right) \quad (8.6)$$

a v čase $t \in (\frac{\tau}{8}, \frac{\tau}{4})$ platí nerovnost opačná, tj.

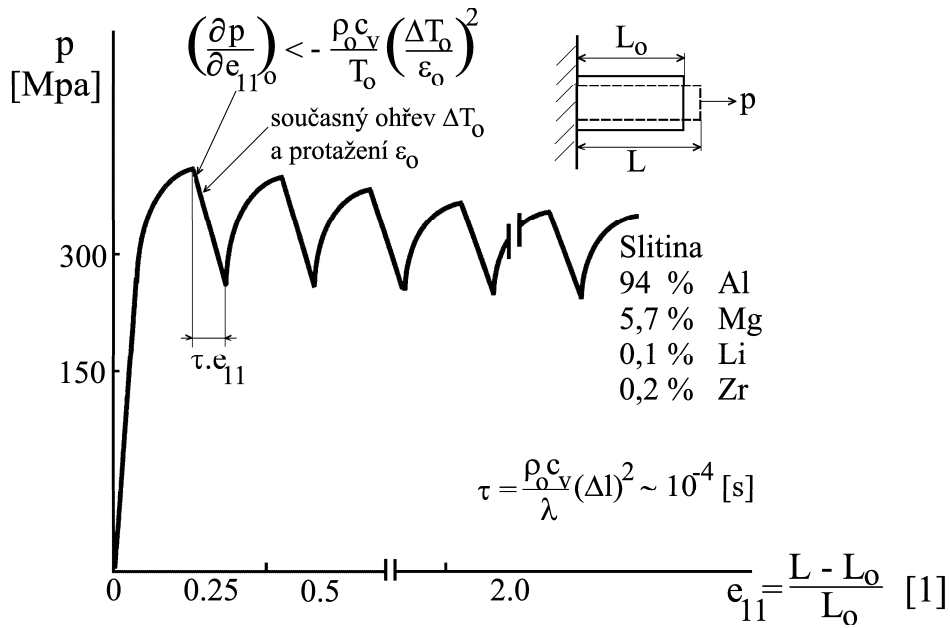
$$\left(\frac{\partial p}{\partial e_{11}}\right)_T + \frac{\rho_o c_v}{T_o} \left(\frac{\Delta T_o}{\varepsilon_o}\right)^2 > 0. \quad (8.7)$$

Nerovnost (8.7) je splněna i v případě spontálních fluktuací za podmínek $c_v > 0$, $\left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon_{11}}\right)_T > 0$.

Odhadneme ještě potřebný charakteristický čas fluktuace τ z pravé strany podmínky (8.4). Tato podmínka je nenulová na intervalu $t \in \left(0, \frac{\tau}{4}\right)$ a rozměr času mají veličiny

$$\tau \sim \frac{\rho_o c_v l^2}{\lambda}, \quad \left[\frac{\rho_o c_v}{T_o \mu_o} \left(\frac{\Delta T_o}{\epsilon_o} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (8.8)$$

Odhadneme velikost τ např. pro hliník při $\rho_o = 2,7 \cdot 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}$, $\lambda = 229 \text{ [W/mK]}$, $c_v = 921 \text{ [J/kg]}$ a charakteristickém rozměru struktury materiálu (vzdálenost dislokací, zlomů krystalických rovin apod) $l \sim 10^{-4} \text{ [m]}$. Charakteristický čas je pak přibližně roven $\tau \sim 10^{-4} \text{ [s]}$, viz obr. .



Výsledky experimentu protahování slitiny hliníku při současném ohřevu proudem elektrického proudu. Doba průtoku proudu a natahování trvaly řádově 10^{-4} s . Tímto postupem bylo dosaženo téměř dvojnásobného protažení vzorku. Viz *N. N. Beklemishev, N.M. Gorbunov at. al.: Plastičnost i pročnost metallických materiálů při impulsnom vzdějstvii vysokoenergetičeskovo elektromagnetnovo polja. Institut Problem Mechaniky, AN SSSR, Preprint No. 372, Moskva 1989.*

9.

- a) Určete jaké tvary rychlostních profilů v_{xo} při dvourozměrném smykovém proudění $v_x(x, y, t)$, $v_y(x, y, t)$ jsou stabilní vzhledem k malým fluktuacím δv_x . Předpokládejte vazké isothermické nestlačitelné proudění.
- b) Porovnejte podmínku stability nalezenou metodou malých poruch s postačující termodynamickou podmínkou stability procesů v tekutinách s konvekcí (9.145) (viz kniha František Maršík, Termodynamika kontinua, Academia Praha 1999). Tam uvedenou podmínku můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\pi = \mu \left(\frac{\partial v_{xo}}{\partial y} \right)^2 + v_{xo} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_{xo}}{\partial y} \right) \geq 0. \quad (9.1)$$

Jestliže v některém bodě rychlostního profilu platí opačná nerovnost, říkáme, že je splněna nutná termodynamická podmínka nestability proudového pole (pravděpodobný nástup turbulentního proudění).

Řešení: 9. a) Smykové proudění, např. v blízkosti stěny pevného tělesa (mezní vrstva) nebo v blízkém úplavu, je v případě nestlačitelné isothermické, vazké tekutiny, tj. při $\dot{\rho} = 0$, $\dot{T} = 0$ a $\mu \neq 0$ popsáno rovnicemi; bilance hmotnosti

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (9.2)$$

a bilance hybnosti

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \quad (9.4)$$

Zde jsme pro jednoduchost zápisu označili tlak $p(x, y, t) = \frac{1}{\rho} p(x, y, t)$ (je ekvivalentní předpokladu $\rho = 1$) a dynamickou viskozitu $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$.

Proudové pole v_x , v_y , p předpokládejme jako superpozici referenčního proudového pole (značíme indexem "o") $v_{xo} = v_{xo}(y)$, $v_{yo} = 0$, $p = 0$ a poruch δv_x , δv_y , δp , tudíž

$$\begin{pmatrix} v_x(x, y, t) \\ v_y(x, y, t) \\ p(x, y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{xo}(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta v_x(x, y, t) \\ \delta v_y(x, y, t) \\ \delta p(x, y, t) \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Předpokládejme harmonické poruchy

$$(\delta v_x, \delta v_y, \delta p) = (\delta \hat{v}_x(y), \delta \hat{v}_y(y), \delta \hat{p}(y)) e^{i(k_x x - \omega t)}. \quad (9.6)$$

Dosazením vztahu (9.6) do rovnic (9.2) až (9.4) dostáváme

$$ik_x \delta \hat{v}_x + \delta \hat{v}'_y = 0, \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} -i\omega \delta \hat{v}_x + ik_x (v_{x0} + \delta \hat{v}_x) \delta \hat{v}_x + (v'_{x0} + \delta \hat{v}'_x) \delta \hat{v}_y + ik_x \delta \hat{p} = \\ = -\nu (k_x^2 \delta \hat{v}_x - v''_{x0} + \delta \hat{v}''_x), \end{aligned} \quad (9.8)$$

$$-i\omega + ik_x (v_{x0} + \delta \hat{v}_x) \delta \hat{v}_y + \delta \hat{v}_y \delta \hat{v}'_y + \delta \hat{p}' = -\nu (k_x^2 \delta \hat{v}_x - \delta \hat{v}''_x). \quad (9.9)$$

Derivaci značíme $(\cdot)' = \frac{d}{dy}(\cdot)$. Zanedbáním členů malých vyšších řádů, tj. $(\delta \hat{v}_x)^2$, $\delta \hat{v}'_x \delta \hat{v}'_y$ apod. a viskozitních členů na pravé straně rovnic (9.8) a (9.9) ($\nu \sim 10^{-5} \frac{m^2}{s}$).

Předpokládáme, že velikost poruch $\delta \hat{v}_x$, $\delta \hat{v}_y$ je řádu 10^{-3} - 10^{-5} (podobně jako viskozita $\nu \sim 10^{-5}$; smyková rychlost v_{x0} je řádu 10^0).

Výchozí linearizovaný tvar rovnic pro vyšetřování stability je

$$\begin{aligned} ik_x \delta \hat{v}_x + \delta \hat{v}'_y + 0 \delta \hat{p} &= 0, \\ (-i\omega + ik_x v_{x0}) \delta \hat{v}_x + v'_{x0} \delta \hat{v}'_y + ik_x \delta \hat{p} &= 0, \\ 0 \delta \hat{v}_x + (-i\omega + ik_x v_{x0}) \delta \hat{v}_y + \delta \hat{p}' &= 0 \end{aligned} \quad (9.10)$$

Vyloučíme $\delta \hat{v}_x$

$$-ik_x \delta \hat{p} = \left(\frac{\omega}{k_x} - v_{x0} \right) \delta \hat{v}'_y + v'_{x0} \delta \hat{v}_y \quad (9.11)$$

a eliminací $\delta \hat{p}$ získáme tzv. Rayleighovu rovnici pro amplitudu poruchy $\delta \hat{v}(y)$

$$\delta \hat{v}''_y - \left(\frac{v''_{x0}}{v_{x0} - c} + k_x^2 \right) \delta \hat{v}_y = 0, \quad \text{pro } c = \frac{\omega}{k_x}, \quad (9.12)$$

při okrajových podmínkách

$$\delta \hat{v}_y|_{y=y_0} = \delta \hat{v}_y|_{y=y_1} = 0, \quad \text{např. pro } y_0 = 0, y_1 = \infty. \quad (9.13)$$

Řešíme diferenciální rovnici (9.12) za okrajové podmínky (9.13) pro nějaký známý rychlostní profil $v_{x0} = v_{x0}(y)$. Připomínáme, že neznámou poruchu $\delta v_y(x, y, t)$ hledáme ve tvaru postupné vlny

$$\delta v_y(x, y, t) = \delta \hat{v}_y(y) e^{ik_x(x-ct)}, \quad \text{pro } k_x > 0, \quad (9.14)$$

amplituda $\delta \hat{v}_y(y)$ je obecně komplexní funkce právě tak jako rychlost

$$c = c(x) = c_r + ic_i = \frac{\omega_r}{k_x} + i \frac{\omega_i}{k_x}. \quad (9.15)$$

Právě v případě $c_i \neq 0$, konkrétně pro $c_i > 0$ dochází k zesílení poruchy a nebo k jejímu zeslabení v příslušném místě (x, y) při $c_i < 0$, tj. $\exp(k_x c_i t) \delta \hat{v}_y(y) \exp(ik_x x)$.

Hledáme souvislost tvaru rychlostního profilu $v_{xo}(y)$, resp. $\frac{d^2 v_{xo}}{dy^2}$ s existencí $c_i \neq 0$. Vynásobíme Rayleighovu rovnici (9.12) funkcí komplexně sdruženou $\delta\hat{v}_y^*(y)$, takže

$$\begin{aligned} \int_{y_o}^{y_1} \left[\delta\hat{v}_y'' - \left(\frac{v_{xo}''}{v_{xo} - c} + k_x^2 \right) \delta\hat{v}_y \right] \delta\hat{v}_y^* dy &= \left(\delta\hat{v}_y' \delta\hat{v}_y^{*\prime} \right) \Big|_{y_o=0}^{y_1 \rightarrow \infty} - \int_{y_o}^{y_1} \delta\hat{v}_y' \delta\hat{v}_y^{*\prime} dy \\ - \int_{y_o}^{y_1} \left[\frac{v_{xo}'' (v_{xo} - c_r - ic_i)}{(v_{xo} - c_r + ic_i)(v_{xo} - c_r - ic_i)} + k^2 \right] \delta\hat{v}_y \delta\hat{v}_y^* dy &= \left(\delta\hat{v}_y' \delta\hat{v}_y^{*\prime} \right) \Big|_{y_o=0}^{y_1 \rightarrow \infty} \\ - \int_{y_o}^{y_1} \delta\hat{v}_y' \delta\hat{v}_y^{*\prime} dy - \int_{y_o}^{y_1} \left[\frac{v_{xo}'' (v_{xo} - c_r)}{|v_{xo} - c|^2} + k^2 \right] \delta\hat{v}_y \delta\hat{v}_y^* dy \\ - i \int_{y_o}^{y_1} \frac{v_{xo}'' c_i}{|v_{xo} - c|^2} \delta\hat{v}_y \delta\hat{v}_y^* dy &= 0 \end{aligned} \quad (9.16)$$

Uvážíme-li, že $|\delta\hat{v}_y|^2 = \delta\hat{v}_y \delta\hat{v}_y^*$ a že první člen na pravé straně je s ohledem na okrajové podmínky (9.13) nulový, můžeme oddělit reálnou a imaginární část výrazu

$$- \int_{y_o}^{y_1} \left(|\delta\hat{v}_y'|^2 + k_x^2 |\delta\hat{v}_y|^2 \right) dy = \int_{y_o}^{y_1} (v_{xo} - c_r) \frac{v_{xo}'' |\delta\hat{v}_y|^2}{|v_{xo} - c|^2} dy < 0, \quad \text{pro reálnou část,} \quad (9.17)$$

$$c_i \int_{y_o}^{y_1} \frac{v_{xo}'' |\delta\hat{v}_y|^2 dy}{|v_{xo} - c|^2} = 0 \quad \text{pro imaginární část.} \quad (9.18)$$

K zesílení či zeslabení poruchy (9.14) dochází jen tehdy, když je $c_i \neq 0$. Z posledních dvou vztahů plyne, že k tomu může dojít jen tehdy, když v nějakém bodě $y_I \in (y_o, y_1)$ mění v_{xo}'' znaménko, tj. rychlostní profil $v_{xo}(y)$ má v tomto bodě y_I inflexní bod. Jedině za této podmínky může být integrál (9.18) nulový pro $c_i \neq 0$. Platí **Rayleighova věta (1880)**: *Nutná podmínka pro nestabilitu rychlostního pole je výskyt alespoň jednoho inflexního bodu rychlostního profilu $v_x(y)$.*

Tuto podmínku můžeme přeformulovat následujícím způsobem. V inflexním bodě y_I je rychlost $v_{xo}(y_I) = v_{xI}$ a integrál (9.18) můžeme psát ve tvaru

$$(c_r - v_{xI}) \int_{y_o}^{y_1} \frac{v_{xo}'' |\delta\hat{v}_y|^2}{|v_{xo} - c|^2} dy = 0. \quad (9.19)$$

Součtem s integrálem (9.17) dostáváme konečný tvar nutné podmínky nestability

$$\int_{y_o}^{y_1} \frac{(v_{xo} - v_{xI}) v_{xo}'' |\delta\hat{v}_y|^2}{|v_{xo} - c|^2} dy \leq 0. \quad (9.20)$$

Tato nerovnost je splněna jen tehdy, když existuje takové $y \in (y_o, y_1)$, že někde v proudovém poli platí

$$(v_{xo} - v_{xI}) \frac{d^2 v_{xo}}{dy^2} \leq 0. \quad (9.21)$$

Tento výsledek shrnuje **Fjörtoftova věta (1950)**: *Podmínka (9.21) je nutná podmínka pro nestabilitu rychlostního proudového pole s inflexním bodem y_I .*

b) Termodynamickou podmínkou stability procesů v tekutinách s konvekcí (9.1) lze pro $\nu = \frac{\mu}{\rho} = konst$ psát ve tvaru

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{v_{xo}^2}{2} \right) = \alpha^2 \geq 0, \quad \text{pro } y \in (y_o, y_1), \quad (9.22)$$

kde α^2 může být i funkcí x .

Abychom odhadli důsledky podmínky (9.22) můžeme ji považovat za diferenciální rovnici rychlostního profilu, který bude zaručeně splňovat podmínku stability vůči malým fluktuacím. Tuto rovnici řešíme za okrajových podmínek pro $y_o = 0$,

$$v_{xo}(0) = 0, \quad \left. \frac{dv_{xo}}{dy} \right|_{y_o=0} = \frac{\tau_w}{\mu}. \quad (9.23)$$

Vyhovuje pouze lineární profil, pro $\alpha = \frac{\tau_w}{\mu}$

$$v_{xo} = \frac{\tau_w}{\mu} y, \quad \text{pro } y \in (0, y_1), \quad (9.24)$$

tzv. Couettovo proudění.

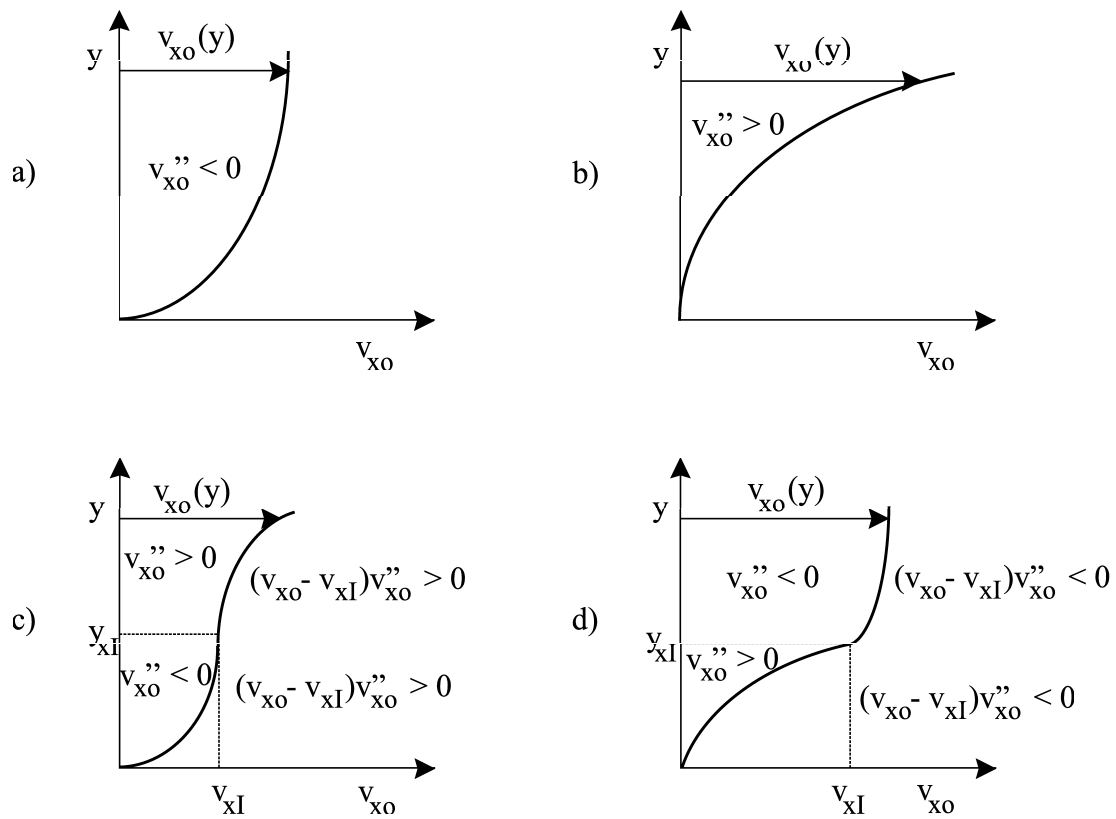
V případě, že má rychlostní profil $v_{xo}(y)$ v bodě y_I inflexní bod s rychlostí $v_{xI} = v_{xo}(y_I)$, platí pro transformované proudové pole

$$\bar{v}_{xo} = v_{xo} + v_{xI} \quad (9.25)$$

a podmínka stability (9.1) ve tvaru

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_{xo}}{\partial y} \right)^2 + (\bar{v}_{xo} - v_{xI}) \frac{\partial^2 \bar{v}_{xo}}{\partial y^2} \geq 0, \quad \text{pro všechna } y \in (y_o, y_1). \quad (9.26)$$

Platí následující tvrzení: *Postačující podmínka pro stabilitu dvourozměrného smykového proudění (9.5) s molekulární viskozitou $\mu = konst$ a rychlostním profilem $\bar{v}_{xo}(y)$ je podmínka (9.26). Těto podmínce zřejmě vyhovuje rychlostní profil na obr. 9.1. c).*



Obr. 9.1: Typické tvary stabilních a nestabilních rychlostních profilů
 a), b) monotonní profily bez inflexního bodu; stabilní podle Rayleighova kriteria
 c) rychlostní profil s inflexním bodem stabilní podle Fjörtoftova kriteria
 d) rychlostní profil, který může být nestabilní jak podle Rayleighova tak i Fjörtoftova kriteria.

10. Ukažte, že nenulové Blasiovo řešení obtékání nekonečné rovinné desky bez tlakového gradientu splňuje nutné podmínky hydrodynamické nestability (9.21) a nevyhovuje podmínce termodynamické stability (9.1) z příkladu 9.

Rovnice stacionárního nestlačitelného vazkého rovinného proudění s tlakovým gradientem bez uvažování tepelné vodivosti jsou:

rovnice bilance hmotnosti

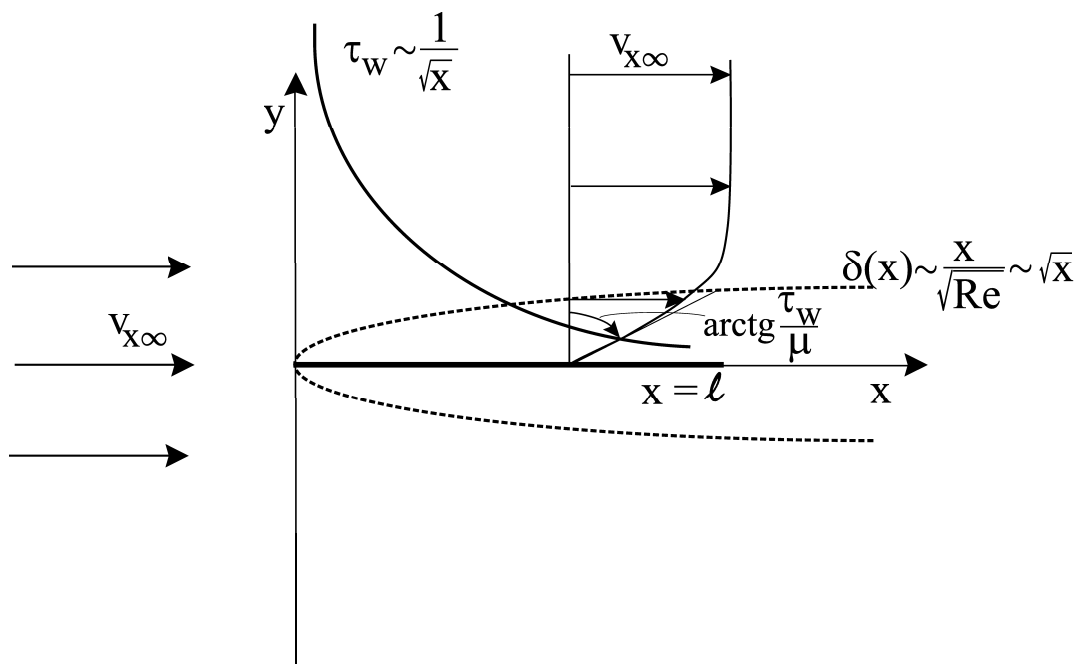
$$\frac{\partial v_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y0}}{\partial y} = 0 \quad (10.1)$$

a rovnice bilance hybnosti

$$v_{x0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial x} + v_{y0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_{x0}}{\partial y^2}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (10.2)$$

za okrajových podmínek, viz obr. 10.1

$$\begin{aligned} v_{x0} = 0, \quad v_{y0} = 0, \quad \text{pro } x \in (0, \ell), \quad y = 0 \\ \frac{\partial v_{x0}}{\partial y} = 0, \quad v_{y0} = 0, \quad \text{pro } x < 0, \quad x > \ell \\ v_{x0} = v_{x\infty} \quad \text{pro } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (10.3)$$



Obrázek 10.1: Vazké laminární proudění v okolí rovinné desky

Řešení: 10.

Úloha (10.1) až (10.3) byla zjednodušena Blasiem tak, že rovinná deska délky ℓ byla prodloužena na $\ell \rightarrow \infty$. Potom okrajové podmínky (10.3) nabývají tvaru

$$v_{xo} = 0, \quad v_{yo} = 0, \quad \text{pro } x > 0, y = 0, \quad (10.4)$$

$$v_{xo} = v_{x\infty}, \quad v_{yo} = 0, \quad \text{pro } x > 0, y \rightarrow \infty.$$

Provedeme kvalitativní analýzu proudového pole v blízkosti stěny. V mezní vrstvě tloušťky $\delta(x)$ je příčný gradient rychlosti mnohem větší než gradient podélný

$$\frac{\partial v_{xo}}{\partial x} \doteq \frac{\Delta v_{xo}}{x} \ll \frac{\partial v_{xo}}{\partial y} \doteq \frac{\Delta v_{xo}}{\delta}, \quad \text{resp. } \frac{\delta}{x} \ll 1. \quad (10.5)$$

Podobně z rovnice bilance hmotnosti (10.1) platí

$$\frac{\Delta v_{xo}}{\Delta x} = \frac{0 - v_{x\infty}}{x - 0} = -\frac{v_{x\infty}}{x} = -\frac{\Delta v_{yo}}{\Delta y} = -\frac{v_{yo}}{\delta}, \quad \text{resp. } \frac{v_{yo}}{v_{x\infty}} = \frac{\delta}{x}. \quad (10.6)$$

Určíme velikost poměru δ/x z rovnice bilance hybnosti (10.2). Použitím odhadů (10.5) a (10.6) píšeme

$$v_{x\infty} \frac{v_{x\infty}}{x} + v_{yo} \frac{v_{x\infty}}{\delta} = \nu \frac{v_{x\infty}}{\delta^2} - \frac{\Delta p}{\rho x}$$

a po úpravě, pro nulový tlakový gradient ($\Delta p = 0$) dostáváme

$$\frac{2v_{x\infty}^2}{x} \doteq \frac{\nu v_{x\infty}}{\delta^2}, \quad \text{resp. } \frac{\delta}{x} \doteq \sqrt{\frac{\nu}{v_{x\infty} x}} = \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad (10.7)$$

kde Reynoldsovo číslo $Re = \frac{v_{x\infty} x}{\nu}$ je vztaženo k podélnému rozměru x .

Z poměru geometrických rozměrů (10.7) vidíme, že poměr $\frac{y}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{v_{x\infty}}{\nu}} \sim 1$ postihuje relaci mezi podélnými (setrvačnými) a příčnými (vazkými) silami ve smykové vrstvě. Zavedeme nové proměnné

$$\eta = \sqrt{\frac{v_{x\infty}}{\nu}} \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad u = \frac{v_{xo}}{v_{x\infty}} = f(\eta), \quad v = \frac{v_{yo}}{v_{x\infty}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \tilde{f}(\eta). \quad (10.8)$$

Ronici bilance hmotnosti (10.1) splníme zavedením proudové funkce $\psi(x, y)$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = f(\eta), \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \tilde{f}(\eta). \quad (10.9)$$

Podél povrchu desky je proudová funkce nulová (má fyzikální význam průtočného množství), tj.

$$\psi = \int_0^y f(\eta) dy = 2\sqrt{\frac{\nu}{v_{x\infty}}} \sqrt{x} \int_0^\eta f(\eta) d\eta = \sqrt{\frac{\nu}{v_{x\infty}}} \sqrt{x} \varphi(\eta), \quad (10.10)$$

pro $y = 0$ je $\psi(0) = 0$.

Všechny potřebné derivace rychlosti vyjádříme pomocí neznámé funkce

$$\varphi(\eta) = 2 \int_0^\eta f(\eta) d\eta. \quad (10.11)$$

Platí

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{\frac{\nu x}{v_{x\infty}}} \varphi'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2} \varphi'(\eta), \quad (10.12)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{\frac{\nu}{v_{x\infty}}} \left(\frac{\psi(\eta)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \varphi'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{x v_{x\infty}}} (\eta \varphi'(\eta) - \varphi(\eta)), \quad (10.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{v_{x\infty}}{\nu x}} \varphi''(\eta), \quad (10.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{4x} \eta \varphi''(\eta), \quad (10.15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{8x} \frac{v_{x\infty}}{\nu} \varphi'''(\eta), \quad (10.16)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\eta}{2\rho x} \frac{dp}{d\eta}. \quad (10.17)$$

Dosazením do bilance hybnosti (10.2) dostáváme obyčejnou nelineární diferenciální rovnici

$$\varphi''' + \varphi \varphi'' + 2\eta \frac{d\pi}{d\eta} = 0, \quad (10.18)$$

Uvažujme nejprve proudění bez tlakového gradientu, tj., $\frac{dp}{d\eta} = 0$ a za okrajových podmínek

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \text{pro } \eta = 0, \quad (10.19)$$

$$\varphi' = 2, \quad \text{pro } \eta \rightarrow \infty.$$

V případě tlakového gradientu (10.17) platí daleko od stěny $u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho v_{x\infty}^2} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ a je třeba užít následujících okrajových podmínek:

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \text{pro } \eta = 0, \quad (10.20)$$

$$\varphi' = 2, \quad \varphi'' = -\frac{2\pi'}{\varphi'} = -\pi', \quad \text{pro } \eta \rightarrow \infty.$$

Zde jsme zavedli bezrozměrný tlak π

$$\pi = \frac{2p(\eta)}{\rho v_{x\infty}^2}, \quad \text{resp.} \quad \pi' = \frac{dp}{d\eta} = -\frac{4x}{\rho v_{x\infty}^2} \frac{dp}{dx}. \quad (10.21)$$

Poslední člen v rovnici (10.18) je vliv tlakového gradientu na tvar rychlostního profilu. Tento člen bude mít rozhodující vliv na stabilitu proudového pole. Postačující termodynamická podmínka stability procesu (9.1) má s ohledem na vztahy (10.8), (10.12), (10.14) a (10.16) a s použitím rovnice (10.18) tvar

$$\frac{v_{x\infty}^3}{16\mu x} (\varphi''' - \varphi \varphi' \varphi'' - 2\eta \varphi' \pi') \geq 0, \quad \text{pro } \forall y \in (0, 3) \quad (10.22)$$

a podobně nutná hydrodynamická podmínka nestability (9.21) je

$$\frac{v_{x\infty}^3}{16x\mu} (\varphi'(\eta) - \varphi'(\eta_I)) \varphi'''(\eta) < 0, \quad \text{pro } y \in (0, 3). \quad (10.23)$$

Nerovnice (10.22) a (10.23) posoudíme podle kvalitativního chování (tvaru) řešení rovnic

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0, \quad (10.24)$$

$$\varphi''(\varphi'' - \varphi\varphi') \geq 0, \quad (10.25)$$

za okrajových podmínek (10.19).

Zjistíme zda na profilu $v_{xo}(x, y) = \frac{v_{x\infty}}{2}\varphi'(\eta)$ existuje ve vyšetřovaném intervalu $\eta \in (0, 3)$ inflexní bod. Podmínka inflexního bodu je vzhledem k (10.16) dána $\varphi''' = 0$. Uvážíme-li, že $\frac{\partial v_{xo}}{\partial y}$ je větší než nula, tj. $\varphi'' \geq 0$ a profil $v_{xo}(x, y)$ je konvexní $\frac{\partial^2 v_{xo}(x, y)}{\partial y^2} \leq 0$, pak musí být s ohledem na (10.24)

$$\varphi''' = -\varphi\varphi'' < 0 \quad \text{pro } y \in (0, 3). \quad (10.26)$$

Díky okrajové podmínce $\varphi(0) = 0$ a vztahu pro rychlost $v_{xo}(x, y) = \frac{v_{x\infty}}{2}\varphi'(\eta) > 0$ musí být i $\varphi(\eta) > 0$ pro $\eta \in (0, 3)$. Podmínka inflexního bodu může být splněna jen na povrchu desky, tj. v bodě $\eta = 0$, kde je však $v_{xI} = 0$. Nutná podmínka hydrodynamické nestability Blasiova řešení (10.23) je tudíž splněna pro celý interval.

Postačující termodynamická podmínka stability proudového pole kolem roviné desky v Blasiově přiblížení (10.25) vede díky monotonnímu charakteru rychlostního profilu $\varphi'' > 0$ k nerovnosti

$$\int_0^\eta \left[\frac{d}{d\eta} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right) - \frac{d\varphi^2}{2d\eta} \right] d\eta \geq 0, \quad (10.27)$$

kterou musí neznámá funkce $\varphi(\eta)$ splňovat. Po integraci při okrajových podmínkách (10.19) platí

$$\varphi'(\eta) - \frac{\varphi^2}{2} - \varphi'(0) + \frac{\varphi^2(0)}{2} = \varphi'(\eta) - \frac{\varphi^2(\eta)}{2} \geq 0. \quad (10.28)$$

Další úpravou

$$2 \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\eta)} \frac{d\varphi}{\varphi^2} - \int_0^\eta d\eta = -2 \left(\frac{1}{\varphi(\eta)} - \frac{1}{\varphi(0)} \right) - \eta \geq 0,$$

$$\text{resp. } \frac{1}{\varphi(\eta)} < \frac{\eta}{2} - \frac{1}{\varphi(0)}. \quad (10.29)$$

Pro $\varphi(0) \rightarrow 0+$ jde pravá strana nerovnosti k ∞ a tak i $\varphi(\eta) \rightarrow 0-$. Tudíž termodynamické kritérium (10.25) rovněž nepotvrzuje existenci nenulového stabilního Blasiova řešení.

11. Řešte obtékání rovinné desky z příkladu 10. metodou konečných prvků.

Řešení: 11.

Úkolem je nalézt numerické řešení nelineární rovnice

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' + f(\eta) = 0, \quad \text{pro } \eta \in V = (0, 3). \quad (11.1)$$

Okrajové podmínky

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(3) = 2. \quad (11.2)$$

Převedení na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \varphi' &= \psi \\ \psi' &= \chi \\ \chi' &= -\varphi\chi - f \end{aligned} \quad (11.3)$$

v maticovém zápisu pro vektor neznámých

$$Y = (\varphi, \psi, \chi)$$

$$Y' = \frac{d}{d\eta}Y = F(Y, \eta), \quad F = (\psi, \chi, -\varphi\chi - f) \quad (11.4)$$

Za Dirichletovy okrajové podmínky bez tlakového gradientu, tj., $f(\eta) = 0$,

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(3) = 2. \quad (11.5)$$

V případě tlakového gradientu je však třeba s ohledem na vztah (10.20) užít okrajové podmínky

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(3) = 2, \quad \chi = -\frac{2\pi'}{\psi(3)} = \frac{4x}{\rho v_{x\infty}^2} \frac{dp}{dx}. \quad (11.6)$$

Tuto nelineární soustavu budeme linearizovat. Definujeme odchylku δY od přesného řešení Y_o (jestliže existuje)

$$Y = Y_o + \delta Y, \quad Y' = Y'_o + \delta Y', \quad (11.7)$$

dosazením do řešené rovnice (11.4) a rozvojem kolem Y_o dostáváme lineární rovnici

$$Y' + \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)_o (Y_o - Y) - F(Y_o) = 0, \quad (11.8)$$

kde

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_o & 0 & -\varphi_o \end{pmatrix}. \quad (11.9)$$

Slabá formulace linearizovaného problému (11.8) je

$$\int_V \frac{d}{d\eta} Y \delta Y d\eta + \int_V \left[\left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)_o (Y_o - Y) - F(Y_o) \right] \delta Y d\eta = 0, \quad (11.10)$$

kteřá má v metodě konečných prvků tvar

$$\sum_{e=1}^{N_E} \int_{V_e} \left[\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \\ -\chi_o \varphi - \varphi_o \chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varphi_o \chi_o + f \end{pmatrix} \right] \delta(\varphi, \psi, \chi) d\eta = 0. \quad (11.11)$$

Řešení nelineárního problému (11.4) je převedeno na posloupnost lineárních problémů tak že, po vyřešení lineárního problému (11.11) položíme

$$Y = Y_o. \quad (11.12)$$

Je-li např. $Y_o = Y^n$ n -tá iterace, tak $Y = Y^{n+1}$ je $n + 1$ -ní iterace. Výpočet pokračuje až do okamžiku, kdy je splněna podmínka přesnosti řešení

$$\|Y - Y_o\| = \|Y^{n+1} - Y^n\| < \varepsilon. \quad (11.13)$$

Řešená oblast $V = \sum_{e=1}^{N_E} V_e$ je rozdělena na N_E konečných prvků a řešení Y , jeho odchylka δY a geometrie jsou aproximovány lineárními funkcemi $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$, viz obr. 11.1

$$Y_e = \sum_{i=1}^2 Y_{n_i}^e \hat{\psi}_i, \quad \delta Y = \sum_{i=1}^2 \delta Y_{n_i}^e \hat{\psi}_i, \quad (11.14)$$

$$\eta_e = \sum \eta_{n_i}^e \hat{\psi}_i, \quad \text{pro } e = 1, 2, \dots, N_E \quad (11.15)$$

$$\hat{\psi}_1 = \frac{1 - \xi}{2}, \quad \hat{\psi}_2 = \frac{1 + \xi}{2}, \quad \text{pro } \xi \in \langle -1, 1 \rangle \quad (11.16)$$

Pro výpočet integrace na e -tém konečném prvku je třeba vyčíslit integrál (11.11), který např. pro složku φ má tvar

$$\int_{V_e} \left(\frac{d}{d\eta} \varphi - \psi \right) \delta \varphi d\eta = \int_{-1}^1 \frac{d}{d\eta} \left(\sum_{i=1}^2 \varphi_{n_i}^e \hat{\psi}_i \right) \sum_{j=1}^2 \delta \varphi_{n_j}^e \hat{\psi}_j \frac{d\eta_e}{d\xi} d\xi = 0. \quad (11.17)$$

Přechod od lokální souřadnice ξ ke globální souřadnici η je zprostředkován transformací (11.15), tj.

$$\frac{d\eta_e}{d\xi} = \sum_{i=1}^2 \eta_{n_i}^e \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} = -\frac{\eta_{n_1}^e}{2} + \frac{\eta_{n_2}^e}{2} = \frac{\Delta \eta_e}{2}. \quad (11.18)$$

Při stejnoměrném dělení označíme velikost konečného prvku $\Delta \eta_e = \Delta$. Při vyhodnocování integrálů přes aproximační funkce ve vztahu (11.11) je třeba vyčíslit integrály

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \hat{\psi}_1 d\xi &= 1, & \int_{-1}^1 \hat{\psi}_2 d\xi &= 1, \\ \int_{-1}^1 \hat{\psi}_1^2 d\xi &= \int_{-1}^1 \hat{\psi}_2^2 d\xi = \frac{2}{3}, & \int_{-1}^1 \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 d\xi &= \frac{1}{3}, \\ \int_{-1}^1 \hat{\psi}_1^3 d\xi &= \int_{-1}^1 \hat{\psi}_2^3 d\xi = \frac{1}{2}, & \int_{-1}^1 \hat{\psi}_1^2 \hat{\psi}_2 d\xi &= \int_{-1}^1 \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2^2 d\xi = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Vektor pravé strany také rozdělíme na tři části

$$B_{n_j}^e = {}^\varphi B_{n_j}^e + {}^\psi B_{n_j}^e + {}^\chi B_{n_j}^e, \quad (11.26)$$

kde nenulová je pouze část ${}^\chi B_{n_j}^e$. Pravá strana je pak rovna

$${}^\varphi B_1 = 0, \quad {}^\psi B_2 = 0, \quad {}^\chi B_3 = \frac{\chi_{o1}}{2} \varphi_{o1} + \frac{\chi_{o2}}{6} \varphi_{o1} + \frac{\chi_{o1}}{6} \varphi_{o2} + \frac{\chi_{o2}}{6} \varphi_{o2} - f(\eta_1)$$

$${}^\varphi B_4 = 0, \quad {}^\psi B_5 = 0,$$

$${}^\chi B_6 = \frac{\chi_{o1}}{6} \varphi_{o1} + \frac{\chi_{o2}}{6} \varphi_{o1} + \frac{\chi_{o1}}{6} \varphi_{o2} + \chi_{o2} \varphi_{o2} + \frac{\chi_{o3}}{6} \varphi_{o2} + \frac{\chi_{o2}}{6} \varphi_{o3} + \frac{\chi_{o3}}{6} \varphi_{o3} - 2f(\eta_2)$$

⋮

$${}^\varphi B_{3N_E+1} = 0, \quad {}^\psi B_{3N_E+2} = 0,$$

$$\begin{aligned} {}^\chi B_{3N_E+3} &= \frac{\chi_{oN_E-1}}{6} \varphi_{oN_E-1} + \frac{\chi_{oN_E}}{6} \varphi_{oN_E-1} + \frac{\chi_{oN_E-1}}{6} \varphi_{oN_E} + \chi_{oN_E} \varphi_{oN_E} + \frac{\chi_{oN_E+1}}{6} \varphi_{oN_E} + \\ &+ \frac{\chi_{oN_E}}{6} \varphi_{oN_E+1} + \frac{\chi_{oN_E+1}}{6} \varphi_{oN_E+1} - 2f(\eta_{N_E}); \end{aligned}$$

$${}^\varphi B_{3(N_E+1)+1} = 0, \quad {}^\psi B_{3(N_E+1)+2} = 0,$$

$${}^\chi B_{3(N_E+1)+3} = \frac{\chi_{oN_E}}{6} \varphi_{oN_E} + \frac{\chi_{oN_E+1}}{6} \varphi_{oN_E} + \frac{\chi_{oN_E}}{6} \varphi_{oN_E+1} + \frac{\chi_{oN_E+1}}{2} \varphi_{oN_E+1} - f(\eta_{N_E+1}) \quad (11.27)$$

Dirichletovy podmínky (11.5) aplikujeme tak, že v matici A_{n_i, n_j}^e dosadíme

$$A_{11} = 1, \quad A_{22} = 1, \quad A_{3(N_E+1)+2, 3(N_E+1)+2} = 1 \quad (11.28)$$

a ostatní prvky na řádcích 1, 2 a $3(N_E + 1)$ jsou nulové, tj.

$$\begin{aligned} A_{12} &= A_{13} = \dots = A_{1, 3(N_E+1)+3} = 0 \\ A_{21} &= 0, \quad A_{2,3} = A_{2, 3(N_E+1)+3} = 0. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Vektor pravé strany (11.27) je upraven takto

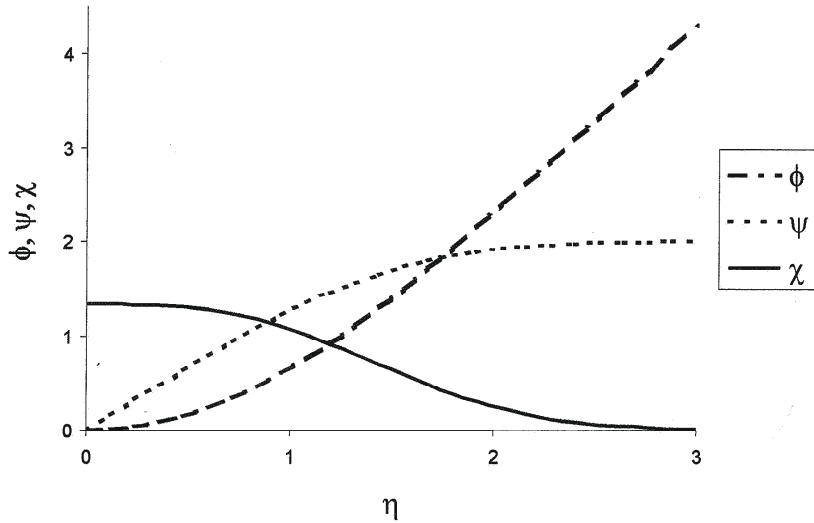
$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_{3(N_E+1)+2} = 2. \quad (11.30)$$

Vzniklou soustavu lineárních algebraických rovnic

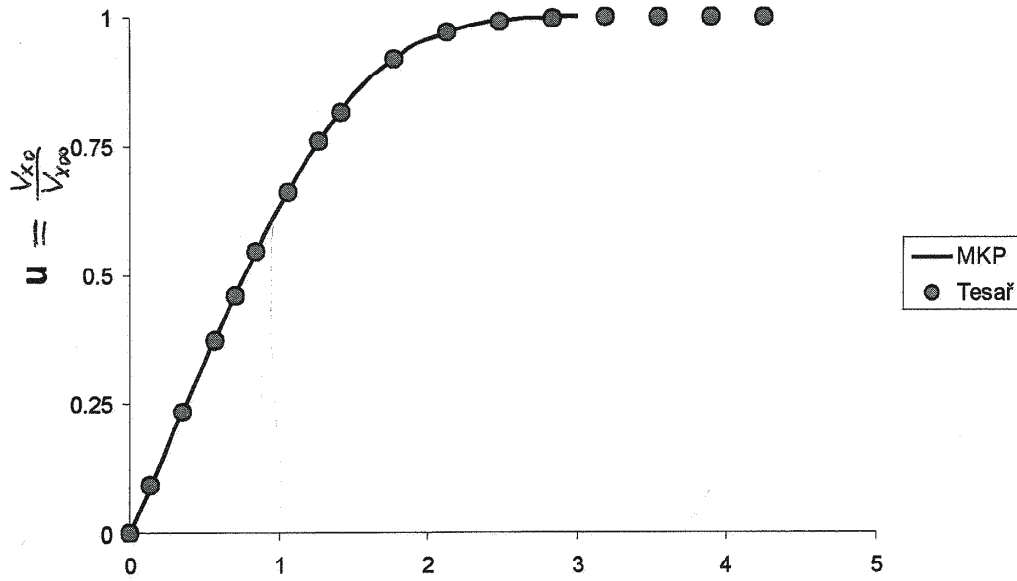
$$A^{(n)} Y^{(n+1)} = B^{(n)} \quad (11.31)$$

řešíme procesem (11.12).

Řešení bez tlakového gradientu (25 elementů)

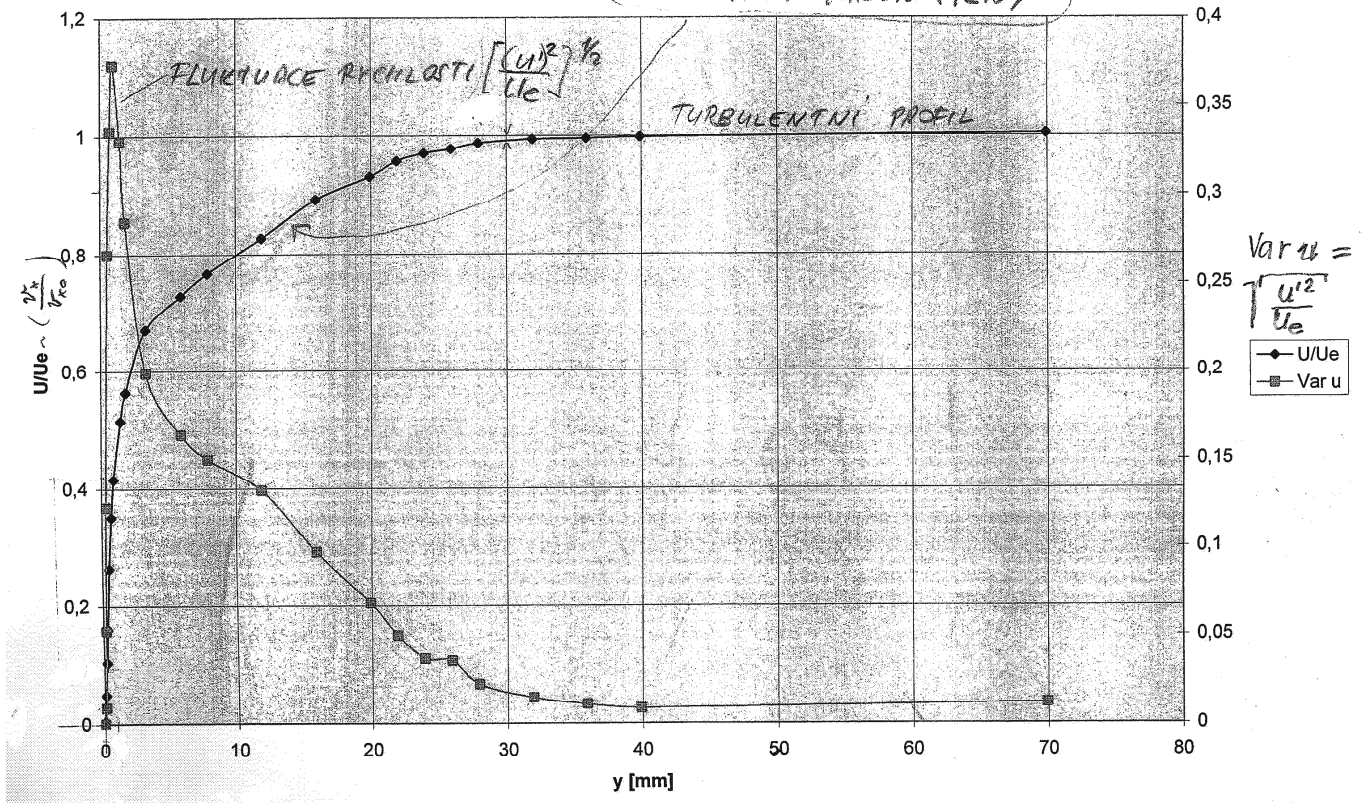


η	ϕ	ψ	χ
0	0	0	1.3326
0.12	0.0098	0.1601	1.3321
0.24	0.0384	0.3196	1.3285
0.36	0.0864	0.4787	1.3188
0.48	0.1532	0.6357	1.3002
0.6	0.2389	0.7902	1.2702
0.72	0.3427	0.94	1.2267
0.84	0.4643	1.0841	1.1688
0.96	0.6025	1.22	1.0963
1.08	0.7567	1.3467	1.0104
1.2	0.9253	1.462	0.9132
1.32	1.1071	1.5655	0.8081
1.44	1.3005	1.6558	0.699
1.56	1.504	1.7333	0.5905
1.68	1.7159	1.7977	0.4863
1.8	1.935	1.8504	0.3904
1.92	2.1596	1.8918	0.3049
2.04	2.3887	1.924	0.2319
2.16	2.621	1.948	0.1714
2.28	2.8559	1.9657	0.1233
2.4	3.0925	1.978	0.086
2.52	3.3305	1.9867	0.0586
2.64	3.5692	1.9924	0.0385
2.76	3.8086	1.9962	0.0248
2.88	4.0483	1.9985	0.0152
3	4.2882	2	0.0095



Řešení Blasiových rovnice $(10.1-3)$ na příklad 10. rovnici (10. P)

Obtékání rovinné stěny s nulovým tlakovým gradientem ($\frac{\partial p}{\partial x} = 0$)
 TURBULENTNÍ PROUDĚNÍ - LOGARITMICKÝ ZÁKON STĚNY



12.

Ukažte, že postačující termodynamickou podmínku stability procesů v proudících tekutinách (9.1) (viz příklad 9) lze splnit zavedením viskozity závislé na prostorových souřadnicích $\mu = \mu(x, y, z)$, resp. $\nu = \nu(x, y, z)$ pro nestlačitelné proudění. Ve zjednodušeném případě smykového proudění můžeme zákony bilance

$$\frac{\partial v_{xo}}{\partial x} + \frac{\partial v_{yo}}{\partial y} = 0, \quad (12.1)$$

$$v_{xo} \frac{\partial v_{xo}}{\partial x} + v_{yo} \frac{\partial v_{xo}}{\partial y} + \frac{\partial p_o}{\rho \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v_{xo}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v_{xo}}{\partial y} \right) \quad (12.2)$$

splnit funkcemi

$$v_{xo} = v_{xo}(y), \quad v_{yo} = 0, \quad \frac{\partial p_o}{\partial x} = 0, \quad \nu(y) = \frac{\mu(y)}{\rho}. \quad (12.3)$$

Za předpokladu vyrovnaného smykového proudění s nulovým tlakovým gradientem je rovnice bilance hybnosti rovna

$$\frac{\partial p_o}{\rho \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu(y) \frac{\partial v_{xo}}{\partial y} \right) = 0, \quad \text{resp.} \quad \nu(y) \frac{dv_{xo}}{dy} = konst. \quad (12.4)$$

Tuto diferenciální rovnici pro rychlostní profil $v_{xo}(y)$ řešíme při okrajových podmínkách určujících obtékání rovné desky (viz rovnice (10.3) z příkladu 10), tj.

$$v_{xo}(0), \quad v_{xo}(y = \infty) = v_{x\infty}, \quad (12.5)$$

pro zatím neznámou funkci $\nu(y)$, která je řešením rovnice (12.7).

Termodynamická podmínka stability (9.1) má za těchto předpokladů tvar

$$\mu \left(\frac{dv_{xo}}{dy} \right)^2 + v_{xo} \left(\frac{d\mu}{dy} \frac{dv_{xo}}{dy} + \mu \frac{d^2 v_{xo}}{dy^2} \right) \geq 0, \quad \text{pro} \quad \mu = \mu(y) \quad (12.6)$$

je splněna identicky pro molekulární viskozitu jen v případě Stokesova proudění, tj. $v_{xo} \rightarrow 0$ a v případě vyrovnaného proudu $\frac{dv_{xo}}{dy} \rightarrow 0$. V ostatních případech je viskozita $\mu(y) \geq 0$ pro $v_{xo}(y) > 0$ určena diferenciální rovnicí

$$\frac{d\mu}{\mu dy} \frac{dv_{xo}}{dy} + \frac{d^2 v_{xo}}{dy^2} = 0 \quad (12.7)$$

s okrajovými podmínkami

$$\mu(y)|_{y=y_{l_1}} = \mu(y)|_{y=y_{l_2}} = \mu_{mol}. \quad (12.8)$$

Podmínka (12.7) je ekvivalentní bilanci (12.4), protože jsme navíc (viz (12.4)) předpokládali, že tlakový gradient $\frac{\partial p_o}{\partial x} = 0$. Termodynamická podmínka stability (12.6) ve tvaru

$$\mu \left(\frac{dv_{xo}}{dy} \right)^2 \geq 0 \quad (12.9)$$

je splněna identicky.

Bod y_{l_1} je bod blízko pevné stěny (většinou přímo pevná stěna $y_{l_1} = 0$), tj.

$$v_{xo}(y_{l_1}) \rightarrow 0, \quad \left. \frac{d^2 v_{xo}}{dy^2} \right|_{y_{l_1}} = 0, \quad (12.10)$$

bod y_{l_2} je bod blízko vyrovnaného proudu (většinou blízko smluvní tloušťky mezní vrstvy δ)

$$v_{xo}(y_{l_2}) = v_{x\infty}, \quad \left. \frac{dv_{xo}}{dy} \right|_{y_{l_2}} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{d^2 v_{xo}}{dy^2} \right|_{y_{l_2}} = 0, \quad (12.11)$$

viz obr. 12.1. V blízkém okolí těchto bodů jsou splněny předpoklady stabilního proudění, tj. buď $Re \leq 1$, viz vztah (10.7) z příkladu 10 a nebo kritérium stability (9.26) z příkladu 9.

Řešení: 12.

Naším úkolem je řešit současně diferenciální rovnici pro rychlostní profil (12.4) a diferenciální rovnici pro viskozitu (12.7) za odpovídajících okrajových podmínek (12.5) a (12.8). Rovnici pro průběh viskozity (12.7) upravíme

$$\frac{\frac{d^2 v_{xo}}{dy^2}}{\frac{dv_{xo}}{dy}} = \frac{d}{dy} \ln \left(\frac{dv_{xo}}{dy} \right) = -\frac{d}{dy} \ln \mu = -\hat{\mu}, \quad (12.12)$$

kde jsme označili $\hat{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy}$. Integrací v intervalu $y \in (y_t, y)$ dostáváme

$$\ln \left(\frac{v'_{xo}(y)}{v'_{xo}(y_t)} \right) = -\ln \left(\frac{\mu(y)}{\mu(y_t)} \right), \quad \text{resp.} \quad \mu(y) \frac{dv_{xo}}{dy} = \mu(y_t) \left. \frac{dv_{xo}}{dy} \right|_{y_t} = A = \text{konst}, \quad (12.13)$$

což je rovnice bilance hybnosti (12.4).

Poznámka: Tento výsledek nepřekvapí, jestliže vyjdeme z obecného tvaru zákona bilance hybnosti pro Newtonskou tekutinu

$$\rho \dot{v}^i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x^k} t_{dis}^{ik}, \quad t_{dis}^{ik} = \mu \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right) \quad (12.14)$$

a z obecného tvaru postačující termodynamické podmínky stability procesů v tekutinách

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (v^i t_{dis}^{ki}) = t_{dis}^{ki} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v_i \frac{\partial t_{dis}^{ki}}{\partial x^k} = t_{dis}^{ki} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \rho \overline{\left(\frac{v_i^2}{2} \right)} + v^i \frac{\partial p}{\partial x^i} \geq 0, \quad (12.15)$$

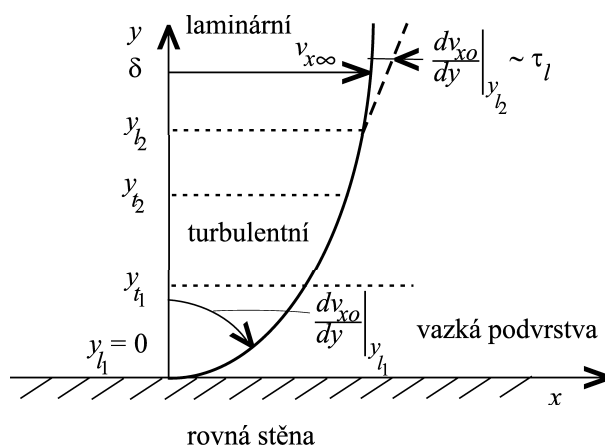
(viz vztah (9.127) v knize F. Maršík, Termodynamika kontinua, Academia, Praha 1999). Odtud je zřejmé, že pro stabilitu proudového pole je nutné, aby disipovaná mechanická energie $t_{dis}^{ki} \frac{\partial v^i}{\partial x^k}$ byla větší (nejvýše rovna) mechanické energii $\rho \overline{\left(\frac{v_i^2}{2} \right)} +$

$v^i \frac{\partial p}{\partial x^i}$. První člen v nerovnosti je vždy kladný a druhý člen je mechanický výkon třecích sil, který je roven z vně dodávanému mechanickému výkonu. Jejich součet musí být i v oblasti turbulence kladný, nanejvíše roven nule. Nerovnost (12.15) je pak podmínkou pro výpočet turbulentní viskozity $\mu(x^l)$ jako funkce prostorových souřadnic.

V případě rovnoběžného smykového proudění (12.3) pro $v_{x0} > 0$ je podmínka stability (12.6), která vede na rovnici pro "turbulentní viskozitu" (12.13) identickou s rovnicí bilance hybnosti (12.4). Pojem turbulentní viskozita je používán v analogii s Prandtlovým vztahem, viz dále vztahy (12.33) a (12.34).
Konec poznámky.

Vyrovnané smykové pole rozdělíme na tři části, viz obr. 12.1

1. část stěny s laminárním prouděním $y > 0$, tzv. vazkou podvrstvou,
2. část s turbulentním prouděním,
3. část s laminárním prouděním v okolí bodu y_{l_2} .



Obrázek 12.1: Schematické znázornění jednotlivých proudových režimů ve vyrovnaném smykovém proudě.

Ve všech těchto oblastech musí turbulentní viskozita splňovat rovnici (12.13), která je identická s rovnicí bilance hybnosti (12.4) s okrajovými podmínkami (12.8), (12.10) a (12.11). Viskozitu budeme v okolí bodů $y = 0$, y_{l_2} aproximovat kvadratickou funkcí

$$\mu(y) = a + by + cy^2 = \frac{A}{\frac{dv_{x0}}{dy}}. \quad (12.16)$$

Konstanty a , A , b , c určíme tak, abychom vyhověli okrajovým podmínkám na rychlostní profil (12.5) a okrajovým podmínkám na viskozitu (12.8).

Integrací (12.4) vypočteme rychlostní profil

$$v_{x0}(y) = \frac{2A}{\sqrt{-D}} \arctan\left(\frac{2cy + b}{\sqrt{-D}}\right) + B, \quad -D = 4ac - b^2 > 0. \quad (12.17)$$

Konstantu B stanovíme z okrajové podmínky na rychlost, v_{x0} v bodě $y = 0$ a $v_{x0} = v_{x\infty} \left(\frac{y_{l_2}}{\delta}\right)$ v bodě y_{l_2} .

Tudíž

$$b = 0, \quad B = 0, \quad \text{pro } y = 0, \quad (12.18)$$

$$b = -2cy_{l_2}, \quad B = v_{x\infty} \left(\frac{y_{l_2}}{\delta} \right), \quad \text{pro } y = y_{l_2}. \quad (12.19)$$

Poloha bodu y_{l_2} je neznámá, ale při limitním přechodu $y_{l_2} \rightarrow \delta$ musí být splněny okrajové podmínky (12.8) až (12.11). Z těchto důvodů je použit faktor $\frac{y_{l_2}}{\delta}$.

Odpovídající rychlostní profily jsou

$$v_{xo}(y) = \frac{2A}{\sqrt{-D}} \arctan \left(\frac{2cy}{\sqrt{-D}} \right), \quad \text{pro vazkou podvrstvy}, \quad (12.20)$$

$$v_{xo}(y) = \frac{2A}{\sqrt{-D}} \arctan \left(\frac{2c(y - y_{l_2})}{\sqrt{-D}} \right) + v_{x\infty} \left(\frac{y_{l_2}}{\delta} \right), \quad \text{pro okolí } y_{l_2}. \quad (12.21)$$

Z podmínek na derivace rychlostního profilu

$$\left. \frac{dv_{xo}}{dy} \right|_0 = \frac{A}{a} = \frac{\tau_w}{\mu_{mol}}, \quad \left. \frac{dv_{xo}}{dy} \right|_{y_{l_2}} = \frac{A}{a - cy_{l_2}^2} = \frac{\tau_l}{\mu_{mol}} \left(1 - \frac{y_{l_2}}{\delta} \right), \quad (12.22)$$

a s ohledem na okrajovou podmínku (12.8) dostáváme

$$A = \tau_w, \quad a = \mu_{mol}, \quad \text{pro } y = 0; \quad A = \tau_l \left(1 - \frac{y_{l_2}}{\delta} \right), \quad a = \mu_{mol} + cy_{l_2}^2, \quad \text{pro } y = y_{l_2}. \quad (12.23)$$

Podobně pro obě části rychlostního profilu platí

$$-D = 4c\mu_{mol}. \quad (12.24)$$

Konstantu c určíme z empiricky nalezeného rychlostního profilu u stěny, tzv. zákona stěny, viz dále. V okolí stěny platí (12.20)

$$v_{xo} = \frac{\tau_w}{\sqrt{c\mu_{mol}}} \arctan \left(\sqrt{\frac{c}{\mu_{mol}}} y \right), \quad (12.25)$$

a vně smykové vrstvy (12.21)

$$v_{xo} = v_{x\infty} \frac{y_{l_2}}{\delta} + \frac{\tau_l}{\sqrt{c\mu_{mol}}} \left(1 - \frac{y_{l_2}}{\delta} \right) \arctan \left[\sqrt{\frac{c}{\mu_{mol}}} (y - y_{l_2}) \right]. \quad (12.26)$$

Zavedeme bezrozměrnou spořadnici y^* a třetí rychlost v_τ , tak jak je obvyklé v teorii mezní vrstvy

$$y^* = \frac{v_\tau}{\nu_{mol}} y, \quad \delta^* = \frac{v_\tau \delta}{\nu_{mol}}, \quad v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \nu_{mol} = \frac{\mu_{mol}}{\rho}. \quad (12.27)$$

Rychlostní profily (12.25) a (12.26) přepíšeme do bezrozměrného tvaru

$$\frac{v_{xo}}{v_\tau} = \frac{1}{\kappa_1} \arctan(\kappa_1 y^*), \quad (12.28)$$

$$\frac{v_{xo}}{v_\tau} = \frac{v_{x\infty}}{v_\tau} \left(\frac{y_{l_2}}{\delta} \right) + \frac{1}{\kappa_3} \arctan(\kappa_1 (y^* - y_{l_2}^*)), \quad (12.29)$$

kde konstanta c je stejná jak pro proudění u stěny tak i pro proudění vně mezní vrstvy a nahradíme ji konstantou κ_1 ,

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{\mu_{mol} c}}{\rho v_\tau}, \quad \kappa_3 = \kappa_1 \frac{\tau_w}{\tau_l \left(1 - \frac{y_{l_2}^*}{\delta^*} \right)} \quad (12.30)$$

Třetí napětí splňují podmínku $\tau_l < \tau_w$, takže i $\kappa_3 > \kappa_1$. Velikosti τ_l a κ_3 nejsou pevně stanoveny.

Zavedení τ_l je čistě formální, neboť souvisí podle (12.22) s derivací $\left. \frac{dv_{xo}}{dy} \right|_{y_{l_2}}$, která je velmi malá a v podstatě libovolná. Tyto konstanty mají význam Karmánovy konstanty v Prandtlově teorii směřovací délky, viz dále.

Rychlostní profily (12.28) a (12.29) mají v lineární aproximaci tvar

$$\frac{v_{xo}}{v_\tau} = y^* \quad \text{pro} \quad y^* \in (0, y_{t_1}^*), \quad (12.31)$$

$$\frac{v_{xo}}{v_\tau} = \frac{v_{xo}}{v_\tau} \left(\frac{y_{l_2}^*}{\delta^*} \right) + \frac{\tau_l}{\tau_w} \left(1 - \frac{y_{l_2}^*}{\delta^*} \right) (y^* - y_{l_2}^*) \quad (12.32)$$

a konstanty κ_1, κ_3 vypadnou. Vyloučením c ze vztahů (12.30) a použitím podmínek (12.18), (12.19), (12.23) a (12.27) má turbulentní viskozita tvar

$$\mu(y^*) = \mu_{mol} (1 + \kappa_1^2 y^{*2}), \quad \text{pro} \quad y^* \in (0, y_{t_1}^*), \quad (12.33)$$

$$\mu(y^*) = \mu_{mol} \left[1 + \kappa_1^2 (y^* - y_{l_2}^*)^2 \right], \quad \text{pro} \quad y^* \in (y_{l_2}^*, y_{t_1}^*). \quad (12.34)$$

V turbulentní oblasti 2. $y \in (y_{t_1}, y_{t_2})$ rychlostního profilu, viz obr. 12.1, není na turbulentní viskozitu v rovnici (12.13) kladena žádná okrajová podmínka. Předpokládáme lineární závislost

$$\mu = by = \frac{A}{\frac{dv_{xo}}{dy}}, \quad (12.35)$$

a po integraci z bodu y_{t_1}

$$v_{xo}(y) = v_{xo}(y_{t_1}) + A_1 \ln \left(\frac{y}{y_{t_1}} \right), \quad \text{pro} \quad A_1 = \frac{A}{b} = \frac{\tau_w}{b}. \quad (12.36)$$

Zavedeme bezrozměrné veličiny (12.27) a konstantu b určíme z empirického logaritmického zákona stěny tak, že položíme

$$b = \frac{\mu_{mol}}{\bar{y}} = \frac{v_\tau}{y^*}. \quad (12.37)$$

Veličina $\bar{y}^* = \frac{v_\tau \bar{y}}{\nu_{mol}}$ vystupuje v zákonu stěny

$$\frac{v_{xo}}{v_\tau} = \bar{y}^* \ln y^* + \frac{v_{xo}(y_{t_1}^*)}{v_\tau} - \bar{y}^* \ln y_{t_1}^* = 2,44 \ln y^* + 5 \quad (12.38)$$

a stanovíme ji porovnáním členů

$$\frac{v_{xo}(y_{t_1}^*)}{v_\tau} = \bar{y}^* \ln y_{t_1}^* + 5, \quad \bar{y}^* = \frac{1}{\kappa} = 2,44. \quad (12.39)$$

Dosazením opět do vztahu (12.35) dostáváme tvar turbulentní viskozity v oblasti 2

$$\mu = \mu_{mol} \frac{y}{\bar{y}} = \mu_{mol} \frac{y^*}{\bar{y}^*} = \frac{\mu_{mol}}{2,44} y^* = \kappa \mu_{mol} y^*. \quad (12.40)$$

Spojením vztahů pro turbulentní viskozitu (12.33), (12.40) a (12.34) dostáváme její průběh (obecně nespojitý) napříč vyrovnaným smykovým proudem.

Konstanty κ_1 a $y_{t_1}^*$ rychlostních profilů (12.28) a (12.38) určíme ze spojitosti rychlosti a její derivace v bodě $y_{t_1}^*$. Tato spojitost je zaručena následujícími dvěma podmínkami

$$\frac{1}{\kappa_1} \arctan(\kappa_1 y_{t_1}^*) = \frac{1}{\kappa} \ln y_{t_1}^* + 5, \quad (12.41)$$

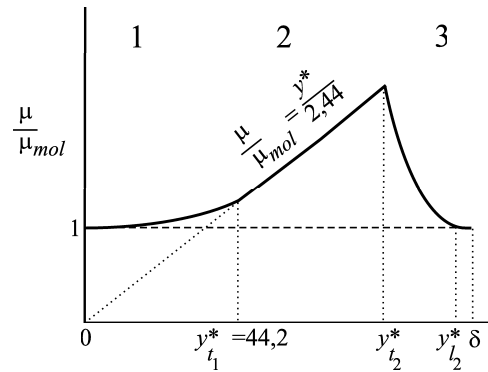
$$\frac{1}{1 + (\kappa_1 y_{t_1}^*)^2} = \frac{1}{\kappa y_{t_1}^*}, \quad (12.42)$$

pro neznámé κ_1 a $y_{t_1}^*$ při zadané (experimentálně určené) hodnotě $\kappa = 1/2, 44 = 0,40984$. Fyzikálně možné řešení vede na algebraickou rovnici

$$\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{Y}{\kappa_1}\right) - \frac{1}{\kappa_1} \arctan Y + 5 = 0, \quad \text{pro } Y = \kappa_1 y_{t_1}^* = \frac{\kappa}{2\kappa_1} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\kappa_1}{\kappa}\right)^2} \right]. \quad (12.43)$$

Numerickým řešením nalezneme hodnoty $\kappa_1 = 0,094$ a $y_{t_1}^* = 44,2$.

Požadavek spojitosti derivace rychlosti (12.42) vede s ohledem na obecný vztah (12.16) na spojitost i turbulentní viskozity. Podobně by bylo možné řešit přechod mezi oblastí 2 a 3 nalezením vztahu mezi $y_{t_2}^*$, $y_{l_2}^*$ pro zadané κ a vypočtené κ_1 , viz obr. 12.2.



Obrázek 12.2: Schematický průběh turbulentní viskozity pro vyrovnané smykové proudění.

Na obr. 12.3 je naměřený průběh střední rychlosti na obtékané rovné stěně. Oblast vazké podvrstvy pro $y^* \in (0, y_{t_1}^*)$ lze aproximovat rychlostním profilem (12.28)

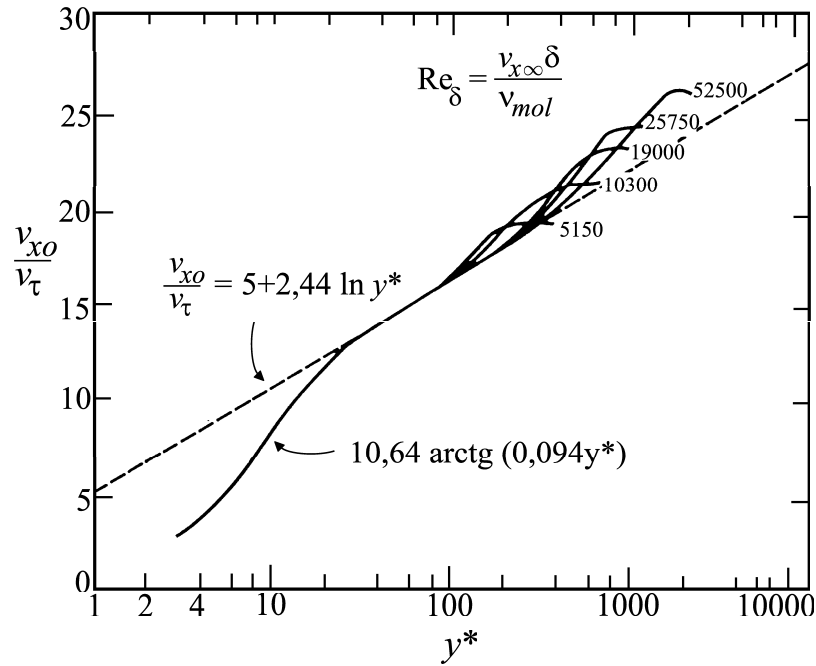
$$\frac{v_{xo}}{v_\tau} = 10,64 \arctan(0,094 y^*). \quad (12.44)$$

V logaritmické oblasti platí vztah (12.38), tj.

$$\frac{v_{xo}}{v_\tau} = 2,44 \ln y^* + 5. \quad (12.45)$$

Ve vnější laminární oblasti lze použít aproximaci (12.29), popř. (12.32). Předpokládejme tloušťku mezní vrstvy δ a aproximujeme třecí napětí na stěně. Pro třecí rychlost lze psát přibližný vztah

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\nu_{mol} \left. \frac{dv_{xo}}{dy} \right|_o} \doteq C_1 \sqrt{\nu_{mol} \frac{v_{x\infty}}{\delta}}, \quad (12.46)$$



Obrázek 12.3: Naměřený průběh rychlosti v turbulentní mezní vrstvě bez podélného tlakového gradientu (podle L. P. Purtell et al., *Physics of Fluids*, vol. 24, pp. 802-811, May 1981. Copyright 1981 American Institute of Physics.)

$$y_{l_2} = \frac{v_\tau \delta}{\nu_{mol}} = C_1 \sqrt{\frac{v_{x\infty} \delta}{\nu_{mol}}} = C_1 \sqrt{Re_\delta}, \quad \text{pro } Re_\delta = \frac{v_{x\infty} \delta}{\nu_{mol}}. \quad (12.47)$$

Uvažováním vztahů (12.46) a (12.47) může rychlost ve vnější oblasti turbulentní mezní vrstvy aproximovat

$$\frac{v_{xo}}{v_\tau} = \frac{\sqrt{Re_\delta}}{C_1} + \frac{1}{\kappa_1} \arctan \left[\kappa_1 \left(y^* - C_1 \sqrt{Re_\delta} \right) \right]. \quad (12.48)$$

Porovnáním s experimenty na obr. 12.3 zjistíme, že i parametr C_1 závisí na Re_δ , konkrétně pak $C_1 = 0,218 Re_\delta^{1/3}$.

Poznámka. Ve vyrovnané smykové vrstvě tloušťky δ popsané modelovou rovnicí (12.4) by byla $\delta = konst$ a Re_δ by se měnilo jen s $v_{x\infty}$ a C_1 by pravděpodobně bylo konstantou.

20. Použijte axiom časové nevratnosti (6.104) a určete dodatečná omezení obecného konstitutivního vztahu pro termoviskózní materiály (7.38). Uveďte základní tvary volné energie pro termoelastický materiál.

Řešení 20.

Použijeme formálně stejný postup jako v kapitole 8 na konstitutivní vztahy v materiálové reprezentaci

$$\{f, s, Q^L, T^{LM}\}(X, t) = \{f, s, Q^L, T^{LM}\}\left(C_{KL}, \dot{C}_{KL}, T, \frac{\partial T}{\partial X^K}, X^K\right). \quad (20.1)$$

Tenzor druhého řádu $T^{LM}(X^K, t)$ se nazývá druhý Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí.

Na rozdíl od prvního Piolova-Kirchhoffova tenzoru napětí $T^{LM}(X^K, x^k, t)$, viz vztah (6.40), je tento tenzor jednobodový a dává do relace napětí a deformace jen v referenční (materiálové) konfiguraci. Tenzor T^{LM} je jen formálně použitelný, neboť jeho praktickou nevýhodou jsou neměřitelné hodnoty napětí a deformací v referenčním (klidovém) stavu. Vznik napětí a deformace je vždy důsledkem působících sil. Při experimentech je nejčastěji používán jednobodový Cauchyho tenzor napětí $t^{li}(x^k, t)$. Jeho nevýhodou je neznalost deformace v některých konečných stavech, např. při přetržení. Relace mezi používanými tenzory napětí je následující:

$$T^{Li}(X^K, x^k, t) = T^{LM}(X^K, t) \frac{\partial x^i}{\partial X^M} = j \frac{\partial X^L}{\partial x^l} t^{li}(x^k, t), \quad (20.2)$$

$$T^{LM}(X^K, t) = j \frac{\partial X^L}{\partial x^l} \frac{\partial X^M}{\partial x^m} t^{lm}(x^k, t), \quad (20.3)$$

resp.

$$t^{lm}(x^k, t) = j^{-1} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} \frac{\partial x^m}{\partial X^M} T^{LM}(X^K, t). \quad (20.4)$$

Jak ukážeme dále, je první Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí (6.40) (někdy se používá pojem pseudonapětí) určován pomocí volné energie f , která je skalární funkcí tenzoru deformace C_{KL} a teploty T . Jeho obvyklý zápis pro nestlačitelný elastický materiál je

$$T^{Kl} = 2\rho_o \frac{\partial f}{\partial C_{KM}} \frac{\partial x^l}{\partial X^K} - j p \frac{\partial X^K}{\partial x^l}. \quad (20.5)$$

Konkrétní tvary funkce f budou uvedeny dále. Tenzor (20.5) nemusí být v důsledku vcelku libovolného tvaru deformačního gradientu \mathbf{F} symetrický, viz (6.60).

Použijeme fundamentální termodynamickou nerovnost (6.104), která je ekvivalentní axiomu časové nevratnosti ve tvaru

$$\Pi = \rho_o (T\dot{s} - \dot{u}) - \frac{Q^K}{T} \frac{\partial T}{\partial X^K} + T^{Ki} \frac{\partial v_i}{\partial X^K} \geq 0. \quad (20.6)$$

Dosadíme konstitutivní vztahy (20.1) a na místo vnitřní energie u zavedeme pomocí Legendrovu transformace volnou energii

$$f\left(C_{KL}, \dot{C}_{KL}, T, \frac{\partial T}{\partial X^K}\right) = u - Ts\left(C_{KL}, \dot{C}_{KL}, T, \frac{\partial T}{\partial X^K}\right). \quad (20.7)$$

Volná energie je již funkcí dobře měřitelných veličin jako jsou teplota T a deformace C_{KL} . Nerovnost (20.6) upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} \Pi = & -\rho_o \left(\frac{\partial f}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \rho_o \left(\frac{\partial f}{\partial C_{KL}} \right) \dot{C}_{KL} + T^{Ki} \frac{\partial v_i}{\partial X^K} \\ & - \frac{Q^K}{T} \frac{\partial T}{\partial X^K} - \rho_o \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial X^K} \right)} \frac{\overline{\partial T}}{\partial X^K} - \rho_o \frac{\partial f}{\partial \dot{C}_{KL}} \ddot{C}_{KL} \geq 0. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Materiálová derivace Greenova deformačního tenzoru je podle (4.211) rovna

$$\dot{C}_{KL} = 2d_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L}. \quad (20.9)$$

Podobně upravíme materiálovou derivaci deformačního gradientu (4.205) a (4.222)

$$\frac{\partial v_i}{\partial X^K} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial X^K} = (d_{ij} + w_{ij}) \frac{\partial x^j}{\partial X^K}, \quad (20.10)$$

kde d_{ij} a w_{ij} jsou postupně tenzor rychlosti deformace a tenzor spinu. První Piolův-Kirchhoffův tenzor upravíme pomocí (20.2) a použijeme vztahy (20.9) a (20.10). Odpovídající členy v nerovnosti (20.8) přeskupíme, takže

$$\begin{aligned} T^{Ki} \frac{\partial v_i}{\partial X^K} - \rho_o \frac{\partial f}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} &= T^{KM} (d_{ij} + w_{ij}) \frac{\partial x^i}{\partial X^M} \frac{\partial x^j}{\partial X^K} \\ - 2\rho_o \frac{\partial f}{\partial C_{KL}} d_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} &= \left(T^{KM} - 2\rho_o \left(\frac{\partial f}{\partial C_{KM}} \right) \right) d_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^M} + \\ &+ T^{KM} w_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^M}. \end{aligned} \quad (20.11)$$

Předpokládejme, že lze tenzor napětí T^{KL} rozdělit na část termoelastickou $T_{el}^{KL}(T, C_{MN})$ a na část disipativní $T_{dis}^{KL}\left(C_{KM}, \dot{C}_{KM}, T, \frac{\partial T}{\partial X^M}\right)$ tak, že platí

$$T^{KL}(\mathbf{X}, t) = T_{el}^{KL}(T, C_{MN}) + T_{dis}^{KL}\left(C_{KM}, \dot{C}_{MN}, T, \frac{\partial T}{\partial X^M}\right). \quad (20.12)$$

Za tohoto předpokladu bude možno splnit fundamentální termodynamickou nerovnost (20.8) za fyzikálně přijatelných podmínek, viz dále.

Dosažením úprav (20.11) a (20.12) do (20.8) a přeskupením členů dostáváme

$$\begin{aligned} \Pi = & -\rho_o \left(\frac{\partial f}{\partial T} + s \right) \dot{T} + \left(T_{el}^{KM} - 2\rho_o \frac{\partial f}{\partial C_{KM}} \right) d_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^M} + \\ & + T_{dis}^{KM} d_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^M} - \frac{Q^K}{T} \frac{\partial T}{\partial X^K} + \\ & + T^{KM} w_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^M} - \rho_o \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial T}{\partial X^K} \right)} \frac{\overline{\partial T}}{\partial X^K} - \rho_o \frac{\partial f}{\partial \dot{C}_{KL}} \ddot{C}_{KL} \geq 0. \end{aligned} \quad (20.13)$$

Tato nerovnost je zaručeně splněna, jestliže platí

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad T_{el}^{KM} = 2\rho_o \frac{\partial f}{\partial C_{KM}}, \quad (20.14)$$

$$T_{\text{dis}}^{KM} d_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^M} - \frac{Q^K}{T} \frac{\partial T}{\partial X^K} \geq 0 \quad (20.15)$$

a poslední tři členy nerovnosti jsou nulové. Člen obsahující antisymetrický spinový tenzor w_{kl} je nulový proto, že druhý Piolův-Kirchhoffův tenzor je symetrický (plyne ze vztahu (6.60) při neexistenci vnitřních momentů hybnosti).

Poslední dva členy nerovnosti (20.13) jsou nulové proto, že předpokládáme, že volná energie nezávisí na gradientu teploty a rychlosti deformace.

Transformací tenzoru (20.12) do aktuálního stavu dostáváme Cauchyho tenzor napětí

$$t^{kl} = j T^{KL} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} = t_{\text{el}}^{kl} + t_{\text{dis}}^{kl}. \quad (20.16)$$

Omezující podmínky (20.14), (20.15) na konstitutivní vztahy (20.1) jsou stejné jako omezující podmínky (8.15) až (8.18) odvozené pro aktuální konfiguraci. Volná energie f , stejně jako vnitřní energie a entropie jsou funkcemi pouze teploty T a deformace C_{KL} . Změna volné energie je tudíž způsobena jak změnou teploty tak i elastickou deformací vyvolávající vnitřní napětí, tj.

$$\dot{f}(T, C_{KL}) = \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{C_{KL}} \dot{T} + \left(\frac{\partial f}{\partial C_{KL}} \right)_T \dot{C}_{KL} = -s\dot{T} + \frac{T_{\text{el}}^{KL}}{2\rho_o} \dot{C}_{KL}. \quad (20.17)$$

Využijeme-li opět materiálové derivace Greenova tenzoru (20.9), obdržíme s ohledem na transformační vztahy (20.4) klasický vztah pro změnu volné energie (či vnitřní energie

$$\dot{f} = -s\dot{T} + j \frac{t_{\text{el}}^{lm}}{\rho_o} d_{lm}. \quad (20.18)$$

Jakobián deformačního gradientu j je důsledkem toho, že k popisu byla použita referenční (materiálová) konfigurace, tj. $dv = j d^{\mathcal{V}}$.

Většina tuhých materiálů (i biologických tkání) je nestlačitelná, tudíž $j = \det(F^i_k) = 1$. Nestlačitelnost použijeme jako dodatečnou podmínku pro volnou energii

$$f\left(T, C_{KL}, \frac{\partial v_i}{\partial X^K}\right) = \tilde{f}(T, C_{KL}) - p \left(\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^K}\right) - 1 \right), \quad (20.19)$$

kde p je Lagrangeův multiplikátor. Jak bude patrné dále, má význam statického tlaku. Modifikovanou volnou energii (20.19) dosadíme do nerovnosti (20.8). Druhý člen v nerovnosti (20.13) nabývá tvaru

$$\begin{aligned} & T_{\text{el}}^{Ki} \frac{\partial v_i}{\partial X^K} - \rho_o \frac{\partial \tilde{f}}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} + \left[\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^K}\right) - 1 \right] \dot{p} + \\ & + pj \frac{\partial X^K}{\partial x^l} \frac{\partial v^l}{\partial X^K} = T_{\text{el}}^{Ki} - \rho_o \frac{\partial \tilde{f}}{\partial C_{KL}} \frac{\partial x^l}{\partial X^K} \frac{\partial v^l}{\partial X^L} - \\ & - \rho_o \frac{\partial \tilde{f}}{\partial C_{KL}} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} \frac{\partial v^l}{\partial X^K} + pj \frac{\partial X^K}{\partial x^l} \frac{\partial v^l}{\partial X^K} + \left[\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^K}\right) - 1 \right] \dot{p} = 0. \end{aligned} \quad (20.20)$$

Při úpravách jsme použili derivaci jakobiánu (4.283).

Za předpokladu symetrie a nestlačitelnosti, tj.

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial C_{KL}} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial C_{LK}} \text{ a } \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^K}\right) = j = 1, \quad (20.21)$$

Ize vztah (20.20) upravit

$$\left[T_{el}^{kl} - 2\rho_o \frac{\partial \tilde{f}}{\partial C_{KL}} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} + p \cdot j \frac{\partial X^K}{\partial x^l} \right] \frac{\partial v^l}{\partial X^K} = 0. \quad (20.22)$$

První Piolův-Kirchhoffův tenzor napětí pro nestlačitelný termoelastický materiál je definován volnou energií $f(C_{KL}, T)$ (opustíme označení “~”) vztahem

$$T_{el}^{kl} = 2\rho_o \frac{\partial f}{\partial C_{KL}} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} - p \frac{\partial X^K}{\partial x^l} = 2\rho_o \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial x^l}{\partial X^K} \right)} - p \frac{\partial X^K}{\partial x^l}. \quad (20.23)$$

Po transformaci (20.5) dostáváme Cauchyho tenzor

$$t^{kl}(x^i, t) = j^{-1} \frac{\partial x^k}{\partial X^L} T_{el}^{KL} = -p\delta^{kl} + \frac{2\rho_o}{j} \frac{\partial f}{\partial C_{KL}} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L}. \quad (20.24)$$

Následkem axiomu objektivnosti musí skalární funkce f záviset jen na skalárech – invariantech I_C , II_C , III_C (viz C1). Tyto invarianty jsou podle Caley-Hamiltonovy věty (viz Dodatek C), koeficienty charakteristického polynomu (4.62)

$$-C^3 + I_C C^2 - II_C C + III_C I = 0 \quad (20.25)$$

a jsou i koeficienty tenzorového polynomu stejného řádu (viz vztahy C5, C6 pro $n=3$). Platí

$$I_C = trC = \sum_{K=1}^3 C_{KK}, \quad 2II_C = tr^2C - trC^2, \quad (20.26)$$

$$III_C = \frac{1}{3} trC^3 - \frac{1}{2} trC trC^2 + \frac{1}{6} tr^3C = \det C.$$

Tento výsledek dovoluje odvodit další vztahy důležité pro mechaniku kontinua, např. vynásobením (20.25) inverzním tenzorem

$$C^{-1} = F^{-1} F^{-T} \left(= \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \frac{\partial X^L}{\partial x^k}, \text{ tzv. Piolův tenzor} \right),$$

dostáváme relaci pro jeho výpočet, tedy

$$C^{-1} = \frac{1}{III_C} (II_C I - I_C C + C^2) = \frac{1}{2III_C} \left[(tr^2C - trC^2) I - 2(trC C + C^2) \right]. \quad (20.27)$$

Stopa Piolova tenzoru je s ohledem na (20.26) rovna

$$trC^{-1} = \frac{II_C}{III_C}. \quad (20.28)$$

Ze vztahů (20.26) odvodíme derivace invariantů

1) Vzhledem k definici $C = F^T F$ platí $\frac{\partial C}{\partial F} = F^T$, takže lze volnou energii považovat za funkci deformačního gradientu F ,

$$\frac{\partial f}{\partial C} F^T = \frac{\partial f}{\partial F}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial x^l}{\partial X^K} \right)} = \frac{\partial f}{\partial C_{KL}} \frac{\partial x^l}{\partial X^L}.$$

$$\frac{\partial I_C}{\partial C_{IJ}} = \frac{\partial C_{KK}}{\partial C_{ij}} = \delta_{KI} \delta_{KJ} = \delta_{IJ}, \text{ resp. } \frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}, \quad (20.29)$$

$$\frac{\partial II_C}{\partial \mathbf{C}} = \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{I} - \mathbf{C}^T. \quad (20.30)$$

Využitím vztahu (20.27) můžeme psát

$$\frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}^2 - \text{tr} \mathbf{C} \mathbf{C} - \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{C}^2 \mathbf{I} + \frac{1}{2} \text{tr}^2 \mathbf{C} \mathbf{I} = III_C \mathbf{C}^{-T}. \quad (20.31)$$

Derivace (20.29) až (20.31) využijeme při odvození konkrétního tvaru tenzoru napětí (20.23) a (20.24) z volné energie $f(I_C, II_C, III_C, T)$.

Nejobvyklejší tvary volné energie pro elastické nestlačitelné materiály ($III_C = j^2 = 1$) jsou

$$f(I_C, II_C) = \begin{cases} c_1(I_C - 3) & \dots \text{neo-Hookův} \\ c_1(I_C - 3) + c_2(II_C - 3) & \dots \text{Money-Rivlinův} \end{cases} \quad (20.32)$$

kde c_1, c_2 jsou neznámé materiálové konstanty.

V řadě praktických příkladů je třeba předepsat anizotropii materiálu, např. ve směru svalových vláken \mathbf{A} . Deformace v tomto směru je vyjádřena vektorem

$$\mathbf{b}^i = F^i{}_I A^I, \text{ resp. } b_i b^i = F_{iK} F^i{}_I A^K A^I = (\mathbf{b})^2. \quad (20.33)$$

Tudíž podmínka nějak definované anizotropie je

$$C_{KI} A^K A^I - |\mathbf{b}|^2 = 0, \text{ resp. } |F^i{}_I A^I| - |\mathbf{b}| = 0, \quad (20.34)$$

kde velikost $|\mathbf{b}|$ určuje odezvu materiálu na impuls charakterizovaný vektorem \mathbf{A} . Častý tvar volné energie anizotropního materiálu je

$$f(I_C, II_C) = c_1 \left\{ \exp[d_1(I_C - 3)] - 1 \right\} + c_2 \left\{ \exp[d_2(\mathbf{X}, t)(|\mathbf{F} \mathbf{A}| - 1)] - 1 \right\}, \quad (20.35)$$

kde c_1, c_2 a d_1 jsou materiálové konstanty a funkce $d_2(\mathbf{X}, t)$ vyjadřuje nějakou aktivitu materiálu (např. nahrazuje vliv chemických reakcí). Pro $d_2(\mathbf{X}, t) = \text{konst.}$ Je anizotropický materiál pasivní.

Využitím vztahů (20.29) a (20.30) dostane Cauchyho tenzor napětí (20.24) obvyklý tvar

$$\begin{aligned} t^{kl} &= -p \delta^{kl} + \frac{2\rho_o}{j} \left(\frac{\partial f}{\partial I_C} \frac{\partial I_C}{\partial C_{KL}} + \frac{\partial f}{\partial II_C} \frac{\partial II_C}{\partial C_{KL}} \right) \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} = \\ &= -p \delta^{kl} + \frac{2\rho_o}{j} \frac{\partial f}{\partial I_C} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} + \frac{2\rho_o}{j} \frac{\partial f}{\partial II_C} \text{tr} \mathbf{C} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} - \\ &\quad - \frac{2\rho_o}{j} \frac{\partial f}{\partial II_C} \frac{\partial x^m}{\partial X^L} \frac{\partial x^m}{\partial X^K} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} = \\ &\quad - \left(p + \frac{2\rho_o II_C}{j} \frac{\partial f}{\partial II_C} \right) \delta^{kl} + \frac{2\rho_o}{j} \left(\frac{\partial f}{\partial I_C} b^{kl} - III_C \frac{\partial f}{\partial II_C} b^{-1 kl} \right). \end{aligned} \quad (20.36)$$

Zde jsme zavedli Fingerův tenzor

$$b^{kl} = \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \frac{\partial x^l}{\partial X^L}, \quad \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{F}}^T, \quad (20.37)$$

a který je inverzní k tenzoru Cauchyho

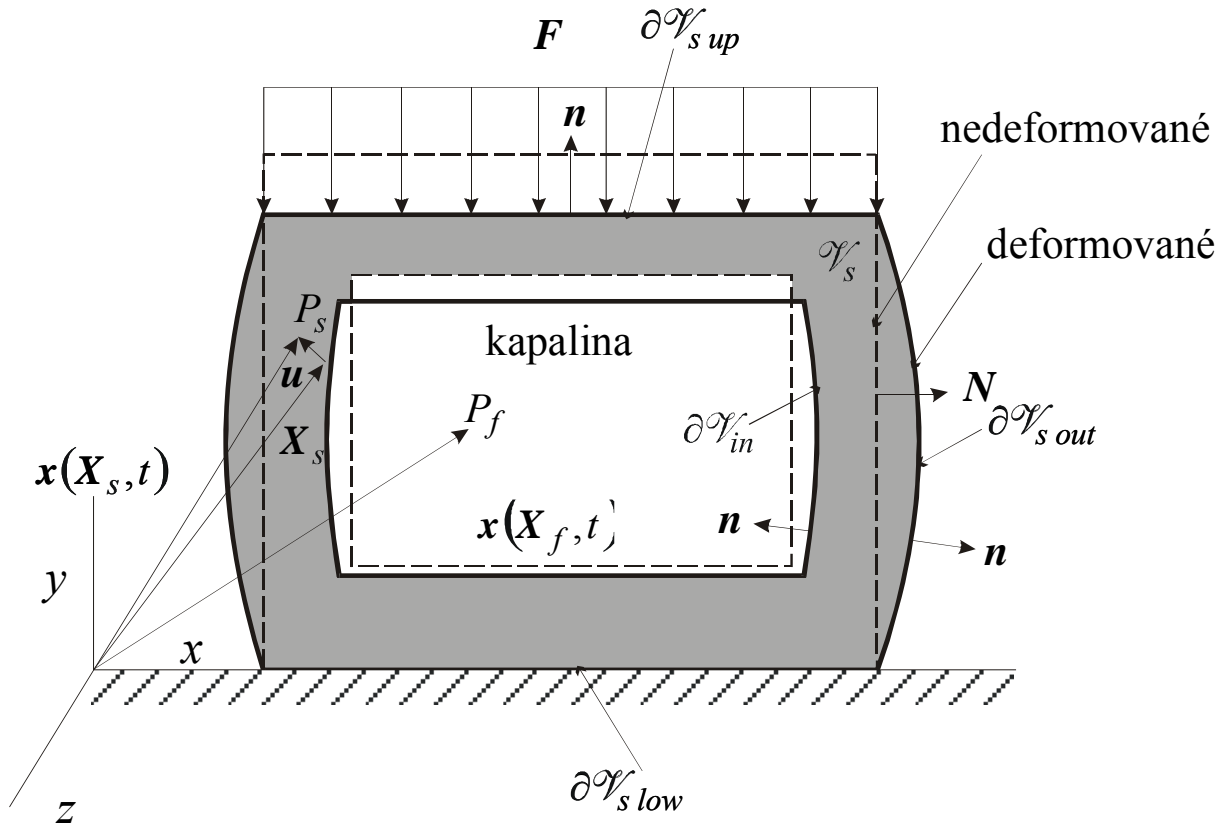
$$b^{kl} = c^{-1 kl}, \quad c_{kl} = b^{-1 kl}, \quad \underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{c}}^{-1} = \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{b}}^{-1} = \underline{\mathbf{I}}. \quad (20.38)$$

Cauchyho tenzor napětí pro elastický nestlačitelný materiál ($III_C = j^2 = 1$) je

$$\underline{\underline{t}} = -\tilde{p}\underline{\underline{I}} + 2\rho_o \left(\frac{\partial f}{\partial I_c} \underline{\underline{b}} - \frac{\partial f}{\partial II_c} \underline{\underline{c}} \right). \quad (20.39)$$

V tomto tvaru je často používán v biologických aplikacích, viz např. J. D. Humphrey: Cardiovascular Solid Mechanics; Cells, Tissues and Organs, Springer, New York, 2002.

21. Na příkladu zatěžování duté elastické krychle naplněné nestlačitelnou kapalinou, viz obr. 21.1, ukažte použití materiálového (Lagrangeova) a prostorového (Eulerova) popisu. Napište zákony bilance hmoty a hybnosti a formulujte okrajové podmínky.



Obr. 21.1

Deformace pláště elastické krychle o objemu \mathcal{V}_s naplněné tekutinou o objemu \mathcal{V}_f . Horní povrch krychle $\partial\mathcal{V}_{sup}$ je zatížen plošnou silou \mathbf{F} [N/m^2] a dolní povrch krychle $\partial\mathcal{V}_{low}$ je v kontaktu s pevným (nepružným) podkladem. Při deformaci se materiálový bod P_s posune o $\mathbf{u}(\mathbf{X}_s, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}_s, t) - \mathbf{X}_s$ a materiálový bod P_f bude mít rychlost $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t)$.

Řešení:

21.1 Zákony bilance v materiálových souřadnicích

Bilance hmotnosti:

$$\overline{(\rho j)} = 0, \quad j = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial \mathbf{X}^I} \right), \quad \text{pro } \mathbf{X} \in \mathcal{V}_s \cup \mathcal{V}_f. \quad (21.1)$$

Bilance hybnosti:

$$\rho j \dot{v}^i - \frac{\partial T^{Ki}}{\partial X^K} = \rho j f^i, \text{ pro } \mathbf{X} \in \mathcal{V}_s \cup \mathcal{V}_f. \quad (21.2)$$

Zde $\rho = j^{-1} \rho_o$ je hustota v aktuálním stavu a ρ_o ve stavu počátečním. Rychlost materiálového bodu je $v^i = \dot{x}^i$ a účinek povrchových sil je vyjádřen Piolovým-Kirchhoffovým tenzorem napětí

$$T^{Ki}(\mathbf{X}, \mathbf{x}, t) = j \frac{\partial X^K}{\partial x^l} t^{li}(\mathbf{x}, t), \quad (21.3)$$

$t^{li}(\mathbf{x}, t)$ je tenzor napětí v prostorových souřadnicích, tzv. Cauchyho tenzor napětí. f^i jsou složky vnější objemové síly.

21.2 Zákony bilance v prostorových souřadnicích

Bilance hmotnosti:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\rho v^l) = 0, \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathcal{V}_s \cup \mathcal{V}_f. \quad (21.4)$$

Bilance hybnosti:

$$\rho \dot{v}^i + \frac{\partial t^{li}}{\partial x^l} = \rho f^i, \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathcal{V}_s \cup \mathcal{V}_f. \quad (21.5)$$

21.3 Materiálové vztahy

Předpokládejme, že jak pevné elastické těleso \mathcal{V}_s tak i tekutina \mathcal{V}_f jsou nestlačitelné, tj. $\rho_o = \text{konst.}, j=1$. Pevný materiál v \mathcal{V}_s je navíc elastické příčně izotropní těleso

$$t^{ij} = c^{ijkl} e_{kl}, \quad 2e_{kl} = \frac{\partial u_k}{\partial x^l} + \frac{\partial u_l}{\partial x^k} - \frac{\partial u_m}{\partial x^k} \frac{\partial u_m}{\partial x^l}, \quad (21.6)$$

kde e_{kl} je Eulerův tenzor konečných deformací a c^{ijkl} je matice elastických konstant. Tenzor elastických konstant c^{ijkl} má pro obecný reálný materiál následující symetrie (viz kap. 8.2)

$$c^{ijkl} = c^{jikl} = c^{ijlk} = c^{jilk}, \quad c^{ijkl} = c^{klij}. \quad (21.7)$$

Příčně izotropní materiál (např. kost, dřevo) je charakterizován jen pěti nezávislými materiálovými konstantami

$$E_1 = E_2 = 15 \text{ GPa}, \quad E_3 = 18 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = 0,2, \quad (21.8)$$

$$\nu_{13} = \nu_{23} = 0,25, \quad \nu_{31} = \nu_{32} = 0,3, \quad G_{23} = G_{31} = 6 \text{ GPa}, \quad G_{12} = 4,5 \text{ GPa}.$$

E je modul pružnosti v tahu (Youngův modul), ν je Poissonovo číslo (v knize T.K je značeno σ) a G je modul pružnosti ve smyku (v knize T.K je značen $\hat{\mu}$). Uvážíme-li, že v každé smykové rovině musí platit relace mezi Poissonovými čísly a Youngovými

moduly $G_{ij} \propto \frac{E_i}{\nu_{ij}}, G_{ji} \propto \frac{E_j}{\nu_{ji}}$ a navíc $G_{ij} = G_{ji}$, platí podmínky symetrie

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (21.9)$$

Nenulové prvky tenzoru elastických konstant jsou v následujícím vztahu k materiálovým konstantám (21.8)

$$\begin{aligned} c^{1111} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, \quad c^{2222} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}, \quad c^{3333} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}, \\ c^{1212} &= c^{2112} = c^{1221} = c^{2121} = G_{12}, \\ c^{1313} &= c^{3113} = c^{1331} = c^{3131} = G_{31}, \\ c^{2323} &= c^{3223} = c^{2332} = c^{3232} = G_{23}, \\ c^{3322} &= c^{2233} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta}, \\ c^{1133} &= c^{3311} = \frac{\nu_{13} + \nu_{23}\nu_{12}}{E_2E_1\Delta} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, \\ c^{1122} &= c^{2211} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta}, \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}. \end{aligned} \quad (21.10)$$

Homogenní pevný (obecně stlačitelný) elastický materiál má jen dvě nezávislé materiálové konstanty, např. ocel, $E = 220$ Gpa, $\nu = 0,3$ a platí $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 85$ GPa. Tenzor napětí (21.6) pro nestlačitelný materiál, tj. pro $e_{ll} = 0$, viz (4.184) a $\nu = 0,5$ má tvar

$$t^{ij} = 2G e^{(o)ij}, \quad e^{(o)ij} = e^{ij} - \frac{e_{ll}}{3} \delta^{ij}. \quad (21.11)$$

O tekutině předpokládejme, že je viskózní newtonská s konstitutivním vztahem

$$t^{ij} = -p\delta^{ij} + 2\mu d^{(o)ij}, \quad (21.12)$$

kde p je statický tlak a

$$d^{(o)ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \delta^{ij} \right). \quad (21.13)$$

V nestlačitelné tekutině, např. ve vodě je $\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v^l}{\partial x^l} = 0$ a viskozita je $\mu = 0,8 \cdot 10^{-3}$ Ns m⁻². Pak je Cauchyho tenzor napětí (21.12) roven

$$t^{ij} = -p\delta^{ij} + \mu \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right). \quad (21.14)$$

21.4 Počáteční a okrajové podmínky

Počáteční podmínka:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_s, 0) = 0, \quad \text{pro } \mathbf{X}_s \in \mathcal{V}_s, \quad (21.15)$$

$$\mathbf{v}_f(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathcal{V}_f, \quad (21.16)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_o, \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathcal{V}_f, \quad (21.17)$$

kde p_o je nějaká počáteční hodnota tlaku v kapalině, např. $p_o = 10^5$ Pa.

Okrajové podmínky:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_s, t) = 0, \text{ pro } \mathbf{X}_s \in \mathcal{V}_{slow}, \quad (21.18)$$

$$t^{li}(\mathbf{x}, (\mathbf{X}_s, t), t) n_l = F^i(t), \quad \mathbf{n} = (0, 1, 0), \text{ pro } \mathbf{X}_s \in \mathcal{V}_{sup}, \quad (21.19)$$

$$t^{li}(\mathbf{x}, (\mathbf{X}_s, t), t) n_l = 0, \text{ pro } \mathbf{X}_s \in \mathcal{V}_{out}, \quad (21.20)$$

$$t^{li}(\mathbf{x}, (\mathbf{X}_s, t), t) n_l = t_f^{li}(\mathbf{x}, t) n_l, \text{ pro } \mathbf{X}_s \in \mathcal{V}_{in}, \quad (21.21)$$

kde t_s^{li} a t_f^{li} jsou tenzory napětí (21.6) a (21.12), \mathbf{n} je vnější normála elastického tělesa.

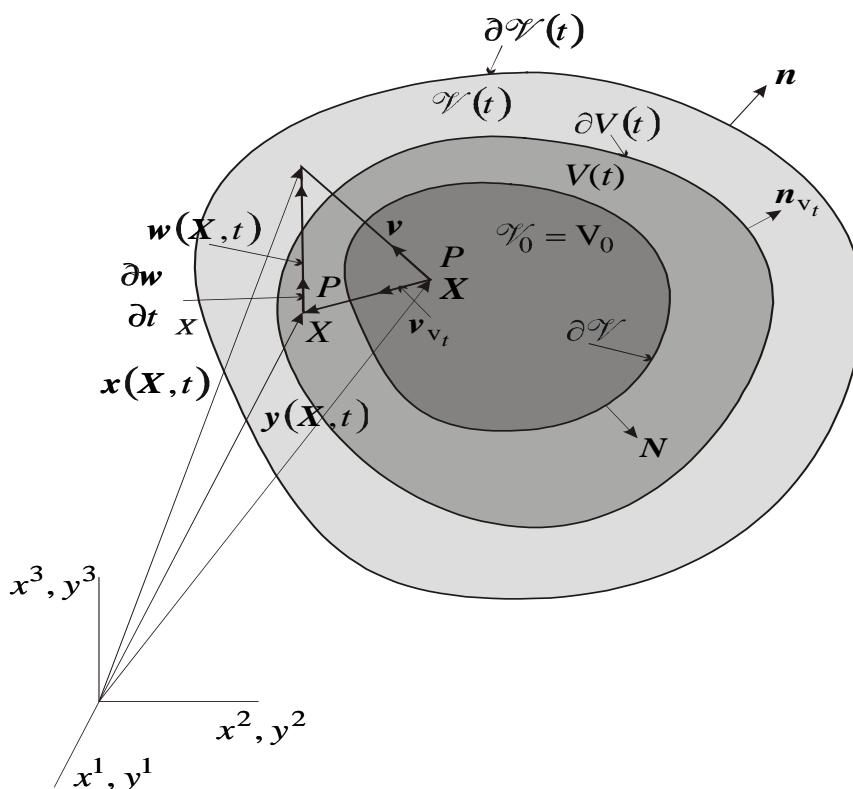
22. Odvoďte zákony bilance v kombinovaném Eulerově-Lagrangeově formulaci. Kontrolní objem $V(t)$ se může deformovat předepsaným způsobem. Materiálový objem $\mathcal{V}(t)$ se mění podle reálné deformace dané příslušnými zákony bilance, okrajovými a počátečními podmínkami a materiálovými vztahy.

Řešení 22.

Skutečná deformace tělesa o objemu \mathcal{V}_0 na těleso o objemu $\mathcal{V}(t)$ je popsána zobrazením $x^i = x^i(X^I, t)$, tj.

$$\mathbf{x} : \mathcal{V}_0 \times [0, \bar{t}] \rightarrow \mathcal{V}(t) \subset \square^3 \quad (22.1)$$

s deformačním gradientem $\frac{\partial x^i}{\partial X^I}, \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\right) = j \neq 0$.



Obr. 22.1

Kombinovaný Eulerův-Lagrangeův popis. Oblast $V(t)$ se deformuje nějakým předepsaným způsobem $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{X}, t)$. Skutečná deformace počáteční oblasti \mathcal{V}_0 je popsána zobrazením $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$.

Předpokládejme nyní nějakou vhodnou čistě geometrickou (nemateriálovou) deformaci tělesa \mathcal{V}_0 , viz obr. 22.1, z jeho počáteční oblasti V_0 na oblast $V(t)$ (někdy se nazývá kontrolním objemem) nějakým zobrazením $y^i = y^i(X^I, t)$, tj.

$$\mathbf{y} : V_o \times [0, \bar{t}] \rightarrow V(t) \subset \square^3. \quad (22.2)$$

Deformační gradient tohoto zobrazení je $\frac{\partial y^i}{\partial X^I}$, $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial X^I}\right) = j_y \neq 0$. Vzájemná relace skutečné deformace (22.1) a deformace geometrie (22.2) vyjadřuje deformační gradient

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \frac{\partial X^I}{\partial y^j}. \quad (22.3)$$

Poloha a rychlost materiálového bodu v souřadné soustavě (y^1, y^2, y^3) , viz obr. 22.1, je

$$\mathbf{y}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{w}(\mathbf{X}, t), \quad \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \right|_x = \mathbf{v}_{v_t} = \mathbf{v} - \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_x, \quad (22.4)$$

kde $\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right|_x$ je relativní rychlost materiálového bodu vůči hranici $\partial V(t)$ s normálou \mathbf{n}_{v_t} , \mathbf{v}_{v_t} je rychlost materiálového bodu v kontrolním objemu $V(t)$.

Formulace problému mechaniky kontinua pomocí nějaké libovolné soustavy souřadnic (22.2) se nazývá „arbitrary Lagrangian-Eulerian description“, tzv. ALE popis.

- i) V případě, že je $\mathbf{y} = \mathbf{X}$, tj. $j_y = 1$, $\mathbf{v}_{v_t} = 0$, kontrolní objem $V(t) \equiv V_o$ je v klidu a přes hranici $\partial V(t)$ se pohybují materiálové body materiálovou rychlostí \mathbf{v} . Tento popis nazýváme prostorový neboli Eulerův.
- ii) Za předpokladu, že $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, tj. $j_y = j$ a hranice tělesa $\partial V(t) = \partial \mathcal{V}(t)$ se pohybuje rychlostí $\mathbf{v}_{v_t} = \mathbf{v}$, dostáváme Lagrangeův neboli materiálový popis, viz obr. 22.1.

22.1 Zákony bilance v ALE formulaci

Vyjdeme z obecného tvaru zákona bilance, viz (6.2), nějaké extenzivní veličiny $\Phi(t)$, jejíž velikost v různých objemech označíme

$$\Phi(t) = \int_{\mathcal{V}_o} \Phi(\mathbf{X}, t) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \varphi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{V(t)} \varphi(\mathbf{y}, t) dv_y. \quad (22.5)$$

časová změna této veličiny v některém z uvedených objemů je

$$\frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi} = \mathcal{J}(\Phi) + P(\Phi), \quad (22.6)$$

kde celkový tok (konduktivní) odpovídajícím povrchem je

$$\mathcal{J}(\Phi) = \int_{\partial \mathcal{V}_o} J^K(\Phi) dA_K = \int_{\partial \mathcal{V}(t)} j^k(\Phi) da_k = \int_{\partial V(t)} j^k(\Phi) n_{k, v_t} da. \quad (22.7)$$

Celková produkce je

$$P(\Phi) = \int_{\mathcal{V}_o} \Sigma(\Phi) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}(t)} \sigma(\Phi) dv = \int_{V(t)} \sigma(\Phi) dv_y. \quad (22.8)$$

Materiálová derivace integrálu (22.5) přes geometrický objem $V(t)$ s nemateriálovým povrchem $\neq V(t)$ dána vztahem

$$\overline{\int_{v(t)} \varphi(\mathbf{y}, t) dv_y} = \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \varphi(\mathbf{y}, t) dv_y + \int_{\partial v(t)} \varphi(v^k - v_{v_t}^k) n_{k, v_t} da, \quad (22.9)$$

viz první Reynoldsův transportní teorém (6.12). Časovou derivaci integrálu vypočteme tak, že jej přetransformujeme inverzním zobrazením k zobrazení (22.2) do počátečního stavu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \varphi(\mathbf{y}, t) dv_y &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_o} \varphi(\mathbf{y}(\mathbf{X}, t), t) j_y d\mathcal{V} = \\ &= \int_{v_o} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi(\mathbf{y}(\mathbf{X}, t), t) j_y) d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (22.10)$$

Do počátečního stavu přetransformujeme i povrchový integrál

$$\int_{\partial v(t)} \varphi(\mathbf{y}, t) (v^k - v_{v_t}^k) n_{k, v_t} da = \int_{\partial v_o} \varphi(\mathbf{y}(\mathbf{X}, t), t) (v^k - v_{v_t}^k) j_y \frac{\partial X^K}{\partial y^k} dA_K. \quad (22.11)$$

Elementy plochy a objemu se transformují standartním způsobem (4.181) a (4.167), tj.

$$dv_y = j_y d\mathcal{V}, \quad n_{k, v_t} da = j_y \frac{\partial X^K}{\partial y^k} dA_K. \quad (22.12)$$

Použitím Gaussovy věty v povrchovém integrálu (22.11) a dosazením do obecného zákona bilance (22.6) dostaneme lokální tvar zákona bilance v ALE formulaci

$$\frac{\partial}{\partial t} (j_y \varphi) + \frac{\partial}{\partial X^K} \left\{ \left[\varphi (v^k - v_{v_t}^k) - j^k (\Phi) \right] j_y \frac{\partial X^K}{\partial y^k} \right\} - j_y \sigma(\Phi) = 0. \quad (22.13)$$

Dosazením za φ hustotu ρ dostaneme zákon bilance hmoty

$$\frac{\partial}{\partial t} (j_y \rho) + \frac{\partial}{\partial X^K} \left\{ \left[\rho (v^k - v_{v_t}^k) \right] j_y \frac{\partial X^K}{\partial y^k} \right\} = 0. \quad (22.14)$$

Zákon bilance hybnosti dostáváme pro $\varphi = \rho v^i$, $j^k(\Phi) = t^{ki}$, $\sigma(\Phi) = \rho f^i$ tj.,

$$\frac{\partial}{\partial t} (j_y \rho v^i) + \frac{\partial}{\partial X^K} \left\{ \left[\rho v^i (v^k - v_{v_t}^k) - t^{ki} \right] j_y \frac{\partial X^K}{\partial y^k} \right\} - j_y \rho f^i = 0. \quad (22.15)$$

Pro $\varphi = \rho \left(\frac{v^2}{2} \right)$, $j^k(\Phi) = 0$, $\sigma(\Phi) = v_i \frac{\partial t^{ii}}{\partial x^i} + \rho v_i f^i$ obdržíme zákon zachování kinetické energie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(j_y \rho \left(\frac{v^2}{2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial X^K} \left\{ \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} \right) (v^k - v_{v_t}^k) \right] j_y \frac{\partial X^K}{\partial y^k} \right\} - j_y \left(t^{ki} \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \rho v_i f^i \right) = 0. \quad (22.16)$$

Bilance momentu hybnosti se redukuje na vztah

$$t^{ij} - t^{ji} = \rho M^{ij} \quad (22.17)$$

kde M^{ij} je produkce momentu vnějšími objemovými silami, viz (6.62).

Dosadíme-li za $\varphi = \rho u$, $j^k(\Phi) = -q^k$, $\sigma(\Phi) = t^{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x^l} + \tilde{q}$ dostaneme rovnici bilance vnitřní energie u

$$\frac{\partial}{\partial t} (j_y \rho u) + \frac{\partial}{\partial X^K} \left\{ \left[\rho u (v^k - v_{v_t}^k) + q^k \right] j_y \frac{\partial X^K}{\partial y^k} \right\} - j_y \left(t^{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x^l} + \tilde{q} \right) = 0 \quad (22.18)$$

kde q^i je vektor vedení tepla a \tilde{q} jsou objemové tepelné zdroje, např. v důsledku elektromagnetického záření.

Snadno se přesvědčíme, že v případě i) kdy je $\mathbf{y} = \mathbf{X}$, tj. $j_y = 1$ a $\frac{\partial X^K}{\partial y^k} = \delta^K_k$ a

provedeme derivaci $\frac{\partial(\cdot)}{\partial X^K} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial X^K}$, dostaneme zákony bilance v Eulerově tvaru (6.27), (6.51), (6.66), (6.62) a (6.85). Analogicky pro případ ii) kdy volíme $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, tj. $j_y = j$ je rychlost $\mathbf{v}_{v_t} = \mathbf{v}$ a $\frac{\partial X^K}{\partial x^k} = F^{Kk}$ je inverzní deformační gradient \mathbf{F}^{-T} , obdržíme zákony bilance v Lagrangeově tvaru.

Příklad 24:

Dokažte v termodynamice často užívané matematické identity (3), (4), (5). Předpokládejte, že veličiny x, y, z jsou vázány funkční závislostí

$$f(x, y, z) = 0, \text{ resp.} \quad (1)$$

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y).$$

Jestliže ještě navíc je funkce w funkcí libovolné dvojice těchto tří proměnných, tj.

$$w = w(x, y), \text{ popř. } w = w(y, z) \text{ či } w = w(x, z), \quad (2)$$

platí následující identity:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1. \quad (5)$$

Řešení:

Závislost (2) si můžeme přepsat do tvaru

$$x = x(w, y), \quad y = y(w, z), \quad z = z(w, x). \quad (6)$$

Totální diferenciály těchto funkcí jsou

$$dx - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w dy + 0dz - \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y dw = 0,$$

$$0dx + dy - \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w dz - \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_z dw = 0, \quad (7)$$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w dx + 0dy + dz - \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_x dw = 0.$$

Předpokládejme, že $w = \text{konst}$, pak $dw = 0$ a soustava (7) má tvar

$$dx - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w dy + 0dz = 0,$$

$$0dx + dy - \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w dz = 0, \quad (8)$$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w dx + 0dy + dz = 0.$$

Její nenulové řešení dx, dy, dz může nastat jen v případě, že determinant této soustavy je nulový, tj.

$$\det \begin{bmatrix} 1, & -\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w, & 0 \\ 0, & 1, & -\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w \\ -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w, & 0, & 1 \end{bmatrix} = 1 - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w = 0, \quad (9)$$

$$\text{resp. } \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w.$$

Tímto je dokázána identita (3).

Identita (4) plyne přímo z definice inverzní funkce, např.

$$x = x(y, z), \text{ resp. } x = x(y(x, z), z). \quad (10)$$

Totální diferenciál této funkce vyhovuje podmínce

$$dx - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}.$$

Využitím vlastností totálního diferenciálu funkcí (1). Odvodíme identitu (5), tj.

$$dx - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy - \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz = 0,$$

$$-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z dx + dy - \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x dz = 0, \quad (12)$$

$$-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy + dz = 0.$$

Diferenciály dx , dz , dy jsou řešením soustavy lineárních algebraických rovnic (12) a podmínka nenulového řešení této soustavy je nulová hodnota determinantu matice této soustavy

$$\det \begin{bmatrix} 1, & -\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z, & -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \\ -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z, & 1, & -\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \\ -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y, & -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x, & 1 \end{bmatrix} =$$

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y - \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x -$$

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z + 1 = 0. \quad (13)$$

Využitím identity (11) můžeme podmínku (13) přepsat do tvaru

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \right]^{-1} + 2 = 0. \quad (14)$$

Označíme na okamžik výraz

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = X. \quad (15)$$

Pak podmínka existence nenulových diferenciálů (13) má tvar

$$X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2 = 0. \quad (16)$$

Řešením této rovnice je hledaný vztah (5), tj.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1. \quad (17)$$

Příklad 30

Z formulace zákona bilance hybnosti v integrálním tvaru

$$\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{v}^i dv = \int_{\partial \mathcal{V}} t^i da + \int_{\mathcal{V}} \rho f^i dv \quad (30.1)$$

setrvačná síla povrchová síla objemová síla

nalezněte bilanci mechanické energie po proudnici.

Řešení: Přejdeme k lokálnímu tvaru zákona bilance pro tenzor tlaku P^{ij} definovaný z povrchových sil t^i vztahem

$$t^i = P^{ij} n_j, \quad da_j = n_j da, \quad \text{kde } P^{ij} = p(\rho, T) \delta^{ij} - P_{dis}^{ij}, \quad (30.2)$$

kde $da = (da_1, da_2, da_3) = \mathbf{n} da$ je orientovaný element povrchu, $p(\rho, T)$ je hydrostatický tlak a P_{dis}^{ij} je tenzor vazkých (disipativních) napětí. Výchozí lokální tvar zákona bilance hybnosti je

$$\frac{\partial \rho v^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\rho v^l v^i + P^{li}) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} f_{\alpha}^i. \quad (30.3)$$

Po dosazení z (30.2) dostáváme a vynásobením skalárně vektorem rychlosti \mathbf{v}

$$\frac{\partial (\rho v^i)}{\partial t} v^i + v^i \frac{\partial}{\partial x^l} (\rho v^l v^i) + v^i \frac{\partial p}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial}{\partial x^l} P_{dis}^{li} + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} v^i f_{\alpha}^i. \quad (30.4)$$

Tímto formálním postupem jsme dostali bilanci mechanické energie, tj. [W].

Upravíme a přeskupíme jednotlivé členy

$$\begin{aligned} (v^i)^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^l)}{\partial x^l} \right) + \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) + v^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + v^l \frac{\partial p}{\partial x^l} = \\ \frac{\partial (p + \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} (v^i P_{dis}^{li}) - P_{dis}^{li} \frac{\partial v^i}{\partial x^l}, \quad \text{pro } \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} f_{\alpha}^l = - \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \end{aligned} \quad (30.5)$$

Využijeme rovnice bilance hybnosti a definice materiálové derivace

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^l)}{\partial x^l} = 0, \quad \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} + v^l \frac{\partial p}{\partial x^l} \quad (30.6)$$

rovnici bilance mechanické energie pak můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) + v^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + v^l \frac{\partial p}{\partial x^l} = \\ \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) + \dot{p} = \frac{\partial (p + \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} (v^i P_{dis}^{li}) - P_{dis}^{li} \frac{\partial v^i}{\partial x^l}. \end{aligned} \quad (30.7)$$

Jestliže zanedbáme tření, tj. $P_{dis}^{il} = 0$ a procesy jsou stacionární dostáváme nejjednodušší variantu zákona bilance mechanické energie, tzv. Bernoulliovu rovnici

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) + \frac{\dot{p}}{\rho} \right] dt = \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{p}}{\rho} dt = \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \Big|_2 - \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varphi \right) \Big|_1 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (30.8)$$

kde integrace probíhá po proudnici (čára tečná ke směru rychlosti) s délkovým parametrem s

$$dt = v^l dx^l = |v| ds. \quad (30.9)$$

Bilanci mechanické energie můžeme formulovat i obecněji. Využijeme bilance hmotnosti a následujících identit

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^l \frac{\partial \rho}{\partial x^l} = -\rho \frac{\partial v^l}{\partial x^l}, \quad \dot{p} = \overline{\left(\rho \frac{p}{\rho} \right)} = \frac{p}{\rho} \dot{\rho} + \rho \overline{\left(\frac{p}{\rho} \right)} = \rho \overline{\left(\frac{p}{\rho} \right)} - p \frac{\partial v^l}{\partial x^l}, \quad (30.10)$$

$$\text{t.j. } \frac{\rho \partial p}{\rho \partial t} = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho} \right) - p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right], \quad \frac{\rho v^l \partial p}{\rho \partial x^l} = \rho v^l \left[\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{p}{\rho} \right) - p v^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]$$

a dostáváme bilanci mechanické energie v obecném tvaru

$$\rho \overline{\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi \right)} = \frac{\partial (p + \varphi)}{\partial t} + p \frac{\partial v^l}{\partial x^l} - P_{dis}^{li} \frac{\partial v^i}{\partial x^l} + \frac{\partial}{\partial x^l} (v^i P_{dis}^{li}). \quad (30.11)$$

Odtud je zřejmé, že pro nevazkou a nestlačitelnou tekutinu ($\frac{\partial v^l}{\partial x^l} = 0$) platí, že součet kinetické, potenciální a tlakové energie jsou v každém místě tekutiny konstantní, tj.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi = konst. \quad (30.12)$$

Jde o jakýsi „Zákon zachování mechanické energie“.