

I.

**NUMERICKÉ METODY
MECHANIKY KONTINUA**

Prof. Ing. František Maršík DrSc.

ÚT AV ČR v.v.i.

V PRAZE 1990

Motto:

Člověk buduje vědu z faktů tak,
jako staví dům z kamenů; avšak
pouhé hromadění faktů není vědou,
tak jako halda kamenů není dům

Henri Poincaré

O b s a h

1. Úvod

1.1 Cíle knihy a použité metody

2. Numerické metody mechaniky kontinua

2.1 Základní pojmy, Diferenciální a integrální formulace problémů

2.1.1 Rovnice evolučního typu

2.1.2 Eulerovy rovnice mechaniky tekutin

2.1.3 Eulerovy rovnice v křivočarých souřadnicích

2.1.4 Rovnice kvazijednorozměrného proudění dýzou

2.2 Variační formulace problému

2.2.1 Galerkinova a Rayleighova-Ritzova metoda

2.3 Metoda konečných prvků

2.3.1 Základní princip metody konečných prvků

2.3.2 Aproximační funkce

2.3.3 Bilineární izoparamterické konečné prvky - - dvourozměrný případ

2.3.4 Numerické řešení potenciálního stlačitelného proudění

2.3.5 Stabilita iteračního procesu pro hyperbolické problémy

2.3.6 Zrychlení iteračního procesu metodou multigradu

2.4 Stabilita a konvergence hyperbolických a parabolických problémů

2.4.1 Numerická schémata pro procesy s konvekcí

2.4.2 Metoda konečných prvků pro nestacionární vedení tepla a difuzi

2.4.3 Dynamické zatěžování termoviskoplastického materiálu

2.4.4 Metoda konečných prvků v proudění vazké tekutiny

2.5 Metoda konečných objemů. Základní princip

2.5.1 Vícestupňové explicitní metody

2.5.2 Implicitní schémata

2.5.3 Tlumicí členy numerických schémat. Metoda multigríd

2.5.4 Zadávání okrajových podmínek pro hyperbolické rovnice

2.6 Princip metody konečných diferencí

II.

ŠÍŘENÍ VLN A NELINEÁRNÍ JEVY V DISIPATIVNÍCH SYSTÉMECH

Obsah

3. Šíření vln

- 3.1 Podmínky kompatibility na pohybujících se plochách
 - 3.1.1 Podmínky kompatibility na zakřivených singulárních plochách
- 3.2 Rychlost šíření singulárních ploch
- 3.3 Klasifikace singulárních ploch
- 3.4 Zákony bilance na singulárních plochách
- 3.5 Rázové vlny v tekutinách
- 3.6 Pohyb rázových vln v tekutinách
- 3.7 Akcelerační a slabé vlny v tekutinách
- 3.8 Akcelerační vlny v pevných tělesech
 - 3.8.1 Šíření akceleračních vln. Jednorozměrné přiblížení
- 3.9 Rázové vlny v pevných tělesech
 - 3.9.1 Šíření rázových vln

- 4. Nelineární jevy v disipativních systémech
 - 4.1 Základní vlastnosti konzervativních a disipativních systémů
 - 4.2 Základní typy nestabilit v disipativních systémech
 - 4.2.1 Disipativní systémy s reálným vlastním číslem procházejícím nulou
 - 4.3. Stabílní a nestabílní pohyb
 - 4.3.1 Základní vlastnosti atraktorů nelineárních disipativních systémů
 - 4.3.2 Podivné atraktory
 - 4.3.3 Základní scénáře chaosu
 - 4.4 Hydrodynamická stabilita
 - 4.4.1 Stabilita smykové vrstvy
 - 4.4.2 Stabilita proudových polí vazké tekutiny.
Formulace problému
 - 4.4.3 Stabilita Poiseuillova proudění
 - 4.4.4 Kvalitativní vlastnosti plně vyvinuté turbulence
 - 4.5 Stabilita přenosu tepla
 - 4.5.1 Přenos tepla tekutinou. Formulace problému
 - 4.5.2 Hranice stability přenosu tepla. Bénardova nestabilita
 - 4.5.3 Nestabílní přenos tepla. Lorentzův model
 - 4.6 Základní vlastnosti laminárních smykových a mezních vrstev
 - 4.6.1 Rovnice laminární mezní vrstvy
 - 4.6.2 Přibližné řešení rovnice laminární mezní vrstvy
 - 4.6.3 Model blízkého úplavu s Kármánovou vírovou řadou
 - 4.7 Transsonická nestabilita

4.7.1 Frekvence a silové účinky transsonické nestability

5. Závěr

6. Literatura

Seznam použitých symbolů

Označení

význam, rozměr v SI

a	bezrozměrová délka [1] $\left(a = \frac{2L}{l_{krit}}\right)$
a, a_{ℓ}^k	matice lineárního zobrazení $(y^k = a_{\ell}^k x^{\ell})$, obecný tenzor druhého řádu v prostorovém popisu
a_i	amplituda akcelerační vlny
$a_{\alpha\beta}$	metrický tenzor plochy $(a_{\alpha\beta} = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial f^{\alpha}} \frac{\partial x^j}{\partial f^{\beta}}, \alpha, \beta = 1, 2)$
A, A_{ml}	matice problému, diferenciální operátor
b	parametr
b_1	relaxační čas tečení materiálu [s]
b^i	obecná fyzikální veličina
\underline{b}, b_i	vektor pravé strany rovnice
$b_{\alpha\beta}$	tenzor druhé základní formy plochy $(b_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial f^{\alpha} \partial f^{\beta}} n_i, \alpha, \beta = 1, 2)$

ⓑ, B_{ml}

c

matice problému

rychlost zvuku $\left[\frac{m}{s}\right]$ $\left(c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\right)$,

parametr, vlastní číslo

c^*

kritická rychlost zvuku $\left[\frac{m}{s}\right]$

$$\left((c^*)^2 = \frac{2(\kappa-1)}{\kappa+1} c_p T_s\right)$$

c_T

isotermická rychlost zvuku $\left[\frac{m}{s}\right]$

$$\left(c_T^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\right)$$

c_v, c_p

specifické teplo při konstantním

objemu, při konstantním tlaku $\left[\frac{J}{kgK}\right]$

c_0

konstanta tečení materiálu $[s]$

c^{-1}_{ij}

Fingerův tenzor deformace $[1]$,

$$\left(c^{-1}_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \frac{\partial x^j}{\partial X^J} \delta^{IJ}\right)$$

$\frac{1}{n} c^k_k$

vektor deformace ve směru normály \underline{n}

c

konstanta

c_p

tlakový koeficient

ⓒ, C_{ml}

matice

d

Hausdorffova (fraktální) dimenze

atraktoru

d_a

element plochy v prostorovém

popisu $[m^2]$, $d_a = (dx^2 dx^3, dx^3 dx^1, dx^1 dx^2) = \underline{n} da$

dA

element plochy v materiálovém

popisu $[m^2]$, $dA = (dX^2 dX^3, dX^3 dX^1, dX^1 dX^2) = \underline{N} dA$

ⓓ, d^{kl}, d^k_l, d_{kl}

tenzor rychlosti deformace $\left[\frac{1}{s}\right]$

dv

element objemu v prostorovém popisu [m^3]
($dv = dx^1 dx^2 dx^3$)

dx

element křivky v prostorovém popisu [m]

\bar{D}, \hat{D}

skok první a druhé derivace veličiny ϕ
na singulární ploše

\bar{d}, \hat{d}

skok první a druhé derivace veličiny
 φ na singulární ploše v prostorovém
popisu

\mathcal{D}

disipativní člen

e

součet hustot vnitřní a kinetické
energie [$\frac{J}{m^3}$] ($e = u + \frac{|v|^2}{2}$)

e, e_{kl}

Eulerův tenzor malých deformací [1]

E

Youngův modul pružnosti [$\frac{N}{m^2}$],
energie nějakého malého podsystému [J],
počet konečných prvků

$E(k)$

rozložení energie fluktuací
rychlostního pole

E_1

reálná osa

E_{IJ}

Lagrangeův tenzor deformace [1]

$$(2E_{IJ} = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \frac{\partial x^j}{\partial X^J} \delta_{ij} - \delta_{IJ})$$

E_{11}

poměrné prodloužení ve směru osy x [1]

$\tilde{\mathcal{E}}$

f

\underline{f}, f^k, f_i

$F(u), \tilde{F}(u, \frac{\partial u}{\partial x^i})$

$F[f](\xi, \eta), F$

$F(s)$

$F^{-1}[F](x, y)$

$\underline{F}(\varphi)$

$F_{ij}^{(n)}, -F_{ij}^{(n)}$

$F_{eh}^{(n)h}$

\mathcal{F}

$\mathcal{F}(u)$

$\mathcal{F}_r(\tilde{t})$

funkce určená vztahem (2.4.119)₁

frekvence $\left[\frac{1}{s}\right]$

vnější objemová síla $\left[\frac{N}{m^3}\right]$,

vektor pravé strany rovnice

obecné funkce

přímá Fourierova transformace funkce $f(x, y)$

Laplaceův obraz funkce $f(t)$

$$(F(s) = \mathcal{L}[f(t)])$$

inverzní Fourierova transformace

$$(F^{-1}[F] = \varphi)$$

vektor pravé strany diferenciální rovnice

tok do konečného objemu V_{ij} jeho povrchem ∂V_{ij} v čase $t^{(n)}$

tok do konečného objemu V_e s charakteristickým rozměrem h v n -té časové rovině

rozdělovací funkce ve fázovém prostoru

funkcionál

průběh bezrozměrového napětí na poloměru r_i ($i=1,2$) [1]

$\underline{F}_{ij}(u_{ij}^{(n)})$

vektor pravé strany obyčejné
diferenciální rovnice pro konečný
objem V_{ij}

g

gravitační zrychlení $\left[\frac{m}{s^2}\right]$,
determinant metrického tenzoru
 $(\sqrt{g} = \det\left|\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right|)$

$\underline{G}(\varphi, w)$

vektor pravé strany diferenciální
rovnice

\mathbb{G}, G_{ml}

matice přechodu

g_i, g^i

bázové vektory přímé a duální báze

g^{ij}, g_{ij}

složky metrického tenzoru

$\tilde{G}(u)$

obecné funkce

$G^i(u)$

operátor ($G^i : M \rightarrow N$, pro $i = 1, 2, 3$)

h

specifická entalpie $\left[\frac{J}{kg}\right]$,
charakteristická velikost oka
výpočtové sítě

h_v

celková specifická entalpie $\left[\frac{J}{kg}\right]$

$$(h_v = u + \frac{p}{\rho} + \frac{|v|^2}{2})$$

h_{r_i}

koefficient přestupu tepla ($i = 1, 2$)

$$\left[\frac{W}{m^2K}\right]$$

H

hamiltonián systému $[J]$

H_m

členy vyšších řádů pravé strany
soustavy rovnic při linearizaci

\mathbb{H}

diferenciální operátor okrajových
podmínek

H_0

vektor okrajových podmínek

$\underline{i}_k, \underline{i}^k$

bázové vektory kartézského prostoru
v prostorovém popisu

$$\underline{i}_k = \underline{i}^k, \quad \underline{i}_1 = (1, 0, 0), \quad \underline{i}_2 = (0, 1, 0), \\ \underline{i}_3 = (0, 0, 1)$$

$\underline{I}_K, \underline{I}^K$

bázové vektory kartézského prostoru
v materiálovém popisu

$$\underline{I}_K = \underline{I}^K, \quad \underline{I}_1 = (1, 0, 0), \quad \underline{I}_2 = (0, 1, 0) \\ \underline{I}_3 = (0, 0, 1)$$

I_{2h}^h

operátor restrikce řešení

I_{2h}^h

operátor interpolace řešení

$R I_h^{2h}$

operátor restrikce rezidua

I_{ji}

matice operátoru interpolace I_{2h}^h

j

jakobián pohybu materiálového bodu

$$x^i = x^i(X^I, t) \quad (j = \det \left| \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \right|)$$

$\hat{j}^i(\varphi)$

hustoty toků veličin ψ ($i = 1, 2, 3$)

k, k_i

vlnový vektor $\left[\frac{1}{m} \right]$ ($k_i = \frac{2\pi}{\ell_i} n_i$)

K

modul objemové stlačitelnosti

u pevných materiálů $\left[\frac{N}{m^2} \right]$

$$\left(K^{-1} = \rho_0 \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial p} \right)_T \right)$$

l_i	vlnová délka [m], Ljapunovova čísla
l_0	Kolmogorovova disipační délka [m] ($l_0 \sim \frac{L}{Re^{\frac{1}{3}}}$)
L	lagrangián systému [J], charakteristický rozměr tělesa [m]
$L_2(V)$	prostor funkcí definovaných na V a integrovatelných s kvadrátem
L_{mn}	koeficienty pravé strany soustavy linearizovaných rovnic
$\mathcal{L}[f(t)]$	Laplaceova transformace funkce $f(t)$ ($\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $s = \omega + i\sigma$)
$\mathcal{L}(M, N)$	prostor lineárních operátorů zobrazujících prostor M do prostoru N
$\mathcal{L}(v^i, v_0^i, \frac{\partial v^i}{\partial x^j}, \frac{\partial v_0^i}{\partial x^j}, \dots)$	hustota lagrangiánu
m	hmotnost systému [kg]
$M, M(V)$	prostor funkcí definovaných na objemu V
\underline{M}, M^i, M_i	Machovo číslo [1] ($\underline{M} = \frac{v}{c}$)
$\overset{e}{M}_{ml}$	matice problému pro e -tý konečný prvek
n	vzdálenost ve směru normály [m], normálová souřadnice [m], konstanta vyjadřující tečení materiálu [1]

n_k^e	číslo nůdu v globální notaci pro k-tý nůd e-tého konečného prvku v lokální matici
\underline{n}, n^k, n_k	vektor normály k ploše v prostorovém popisu [1]
\underline{N}, N^k, N_k	vektor normály k ploše v materiálovém popisu [1]
N	počet částic v systému, prostor funkcí, počet uzlů (nůdů) sítě
N^h, N^{2h}	počet uzlů sítě velikosti h a $2h$
N_f	počet makroskopických parametrů
N_e	počet nůdů v konečném prvku
p, p_i	hybnost
p	napětí, tlak [Pa]
\underline{P}, P_m	vektor pravé strany rovnice
$Pr_r = \frac{\mu c_p}{\lambda}$	Prandtlovo číslo [1]
$Pr_v = \frac{\mu c_v}{\lambda}$	
Pr	pravděpodobnost stavu systému [1]
q, q^i	hustota toku tepla v prostorovém popisu $\left[\frac{J}{m^2 s} \right]$
\underline{Q}, Q^I	hustota toku tepla v materiálovém popisu $\left[\frac{J}{m^2 s} \right]$

r_1, r_2	vnitřní a vnější poloměr trubky [m]
R_k^k	tenzor rotace s posunutím [1]
R	unitární prostor, poloměr křivosti [m]
$Ra = \frac{3\alpha g \rho_0^2 c_v L^3 \Delta T_s}{\lambda d^4}$	Rayleighovo číslo [1]
$Re = \frac{L \rho v }{\mu}$	Reynoldsovo číslo [1]
R_e	reziduum na e-tém konečném prvku
$R_i^{(n)h}$	reziduum na i-tém nódu v n-té iteraci na síti s okem velikosti h
s	specifická entropie $\left[\frac{J}{kg K}\right]$, délkový parametr křivky v prostorovém popisu [m]
S	celková entropie systému $\left[\frac{J}{K}\right]$, účinková funkce [Js], průřez dýzy $[m^2]$, délkový parametr křivky v materiálovém popisu [m]
\underline{S}	vektor pravé strany diferenciální rovnice
$Sh = \frac{\omega L}{2\pi v_{\infty}}$	Strouhalovo číslo [1]
t	čas [s]
\underline{t}, t^i, t_i	tečný vektor [1]
$\bar{t}_i(t)$	zadaný průběh napětí na poloměru r_i ($i=1,2$) $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

\underline{t}, t^{ik}

tenzor napětí v prostorovém popisu

[Pa]

T

absolutní teplota [K]

T^{Ki}

dvoubodový tenzor napětí, tzv.

Pioloúv-Kirchhoffův tenzor pseudonapětí

[Pa] ($T^{Ki} = j \frac{\partial X^K}{\partial x^l} t^{li}$)

T^{KI}

tenzor napětí v materiálovém popisu [Pa]

$T(u)$

lineární operátor ($T: M \rightarrow N$)

$\mathcal{T}_i(\bar{r})$

průběh bezrozměrové teploty na polo-

měru r_i ($i = 1, 2$) [1]

$u_{(n)}$

rychlost postupu singulární plochy

v prostorovém popisu $\left[\frac{m}{s}\right]$ ($u_{(n)} = u^i n_i$)

u

specifická vnitřní energie $\left[\frac{J}{kg}\right]$,
funkce proměnných x^i , resp. x^i, t

\underline{u}, u^i, u_i

vektor posunutí [m],

unášivá rychlost $\left[\frac{m}{s}\right]$

U

celková vnitřní energie [J], ←

$U_{(N)}$

← rychlost šíření singulární
plochy $\left[\frac{m}{s}\right]$,

okolí bodu (stavu systému)

U

lokální rychlost šíření singulární

plochy $\left[\frac{m}{s}\right]$

\underline{x}, x^i

kartézské souřadnice [m], poloha materi-
álového bodu v prostorovém popisu, tj.

v čase t , tzv. aktuální konfigurace

X, X^I

kartézské souřadnice [m],
poloha materiálového bodu v materiálovém popisu, tj. v čase $t = 0$, tzv. referenční konfigurace

α

koeficient tepelné roztažnosti $\left[\frac{1}{K}\right]$

$$(\alpha = \rho \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial T} \right)_p)$$

α_k, β_k

parametry, koeficienty ($k = 1, 2, \dots$)

β

koeficient tepelné roztažnosti $\left[\frac{N}{m^2 K}\right]$

$$(\beta = 3K\alpha),$$

úhel sklonu rázové vlny vůči proudu,
fáze poruchy ($\beta = k \cdot \Delta x$)

γ

konstanta tečení materiálu Maxwelllova typu [1],

bezrozměrné vlnové číslo [1] ($\gamma = kL$)

$$\Gamma = \frac{3\alpha K_0}{\rho_0 c_v}$$

Grüneisenovo číslo [1]

∂V

hranice V ; plocha, je-li V objem;
křivka, je-li V plocha a hraniční body, je-li V neuzavřená křivka

\mathcal{E}

libovolně malé kladné číslo

$\mathcal{E}_{ekv}, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$

deformace [1]

$\delta(x)$

smluvní tloušťka rychlostní mezní vrstvy [m]

$\delta_T(x)$

smluvní tloušťka teplotní mezní vrstvy [m]

$\delta_{ij}, \delta^{ij}, \delta_j^i$

Kroneckerův symbol, jednotkový tenzor

$\Delta, \Delta_x, \Delta_{xx}, \Delta_y, \dots$

konečná diference, prvního řádu ve směru x, druhého řádu ve směru x, stejně tak ve směru y

η

Laméův koeficient $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

η^i

charakteristiky diferenciálních rovnic ($i = 1, 2, \dots$)

θ

koeficient určující typ numerického schématu, odklon rychlosti proudu v rázové vlně

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

izentropický exponent [1]

λ, λ_T

koeficient tepelné vodivosti $\left[\frac{W}{mK}\right]$

λ_γ

vlastní číslo matice ($\gamma = 1, 2, \dots$)

$\lambda, \lambda^i, \lambda_i$

bezrozměrová rychlost [1] ($\lambda = \frac{v}{c^*}$)

$\Lambda = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} |\lambda|^2$

μ

vlastní číslo matice, smykový modul $\left[\frac{N}{m^2}\right]$, smyková viskozita $\left[\frac{Ns}{m^2}\right]$

μ_n

numerické tlumení (numerická viskozita)

μ_v

objemová viskozita $\left[\frac{Ns}{m^2}\right]$

ν

kinematická viskozita $\left[\frac{m^2}{s}\right]$

ξ, ξ

matice, popř. koeficient zesílení
v numerickém procesu

ξ, ξ^i

křivočará souřadnice, poloha materiálového bodu v křivočarých souřadnicích v prostorovém popisu, tj.
v čase t

ρ

hustota v prostorovém popisu $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$

ρ_0

hustota nedeformovaného tělesa
v materiálovém popisu, klidová hustota
 $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$

σ

Poissonovo číslo $[1]$, bezrozměrná
frekvence $[1]$ ($\sigma = \frac{\rho_0 L^2}{\mu} \omega$)

$\sigma(\varphi)$

vektor hustoty produkcí veličin φ

$\Sigma(S)$

hustota produkce entropie $\left[\frac{\text{J}}{\text{s Km}^3}\right]$

τ

vazké napětí $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$,
relaxační čas $[\text{s}]$

φ

potenciál bezrozměrové rychlosti $\left[\frac{1}{\text{m}}\right]$,
obecná fyzikální veličina v prostorovém popisu

φ

vektor proměnných

ϕ

potenciál vnější objemové síly $\left[\frac{\text{Nm}}{\text{kg}}\right]$,
obecná fyzikální veličina v materiálovém popisu

$\phi(\hat{v}, \hat{v}_0, D\hat{v}, D\hat{v}_0)$

funkcionál, lokální potenciál

χ

číslo CFL (Courantovo-Friedrichsovo-Lévyho)

ψ_k

aproximační funkce ($k=1,2,\dots$)

Ψ

disipační funkce $\left[\frac{J}{m^3s}\right]$

ω

relaxační faktor metody SLOR,
frekvence $\left[\frac{1}{s}\right]$

$\omega(x,t)$

plocha nespojitosti v prostorovém
popisu

Ω

fázový prostor

$\Omega(t)$

plocha nespojitosti v materiálovém
popisu

Indexy a další označení

$i, j, k, l, m, n, r, s, t, p, q$	indexy složek vektorů a tenzorů v prostorovém popisu
e	číslo konečného prvku
i, j, k, l, m, n	čísla uzlů výpočetní sítě
I, J, K, L, M, N	indexy složek vektorů a tenzorů v prostorovém popisu

- první index je vždy řádkový a druhý index sloupcový
- horní index označuje kontravariantní složky vektorů a^i , tenzorů a^{ij} , souřadnice x^i , ξ^i , vektory duální báze \underline{i}^i , \underline{g}^i (stejně pro materiálový popis)
- dolní index označuje kovariantní složky vektorů a_i , tenzorů a_{ij} a vektory přímé báze \underline{i}_i , \underline{g}_i (stejně pro materiálový popis)
- v kartézských souřadnicích jsou vektory duální báze \underline{i}^i identické s vektory přímé báze \underline{i}_i a kontravariantní složky vektorů a tenzorů jsou identické se složkami kovariantními
- kovariantní a kontravariantní složky rozlišujeme proto, abychom mohli důsledně užívat Einsteinovo sumační pravidlo a jednoduše převést každý vztah z kartézských souřadnic do souřadnic křivočarých, viz kap. I.D2.8. Není-li uvedeno jinak, tak platí Einsteinovo sumační pravidlo, tj. sčítá se přes stejné indexy vyskytující se v součinu křížem. Přes podtržený index se nesčítá (např. $\sqrt{C_r} N_{\underline{r}}^K$,

$$e_{\underline{k}} = \frac{g_{\underline{k}}}{\sqrt{g_{kk}}}, \dots$$

ν	celkový
dis	disipativní část
el	elastická část
eq	rovnovážný stav
ekv	ekvivalentní
im	imaginární část
kon	konvektivní
$krit$	kritická hodnota
low	numerické schéma nízkého řádu přesnosti
$high$	numerické schéma vysokého řádu přesnosti
re	reálná část
$\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \gamma$	souřadnice plochy
λ	vlastní čísla a vlastní vektory
\perp	kartézská složka
∞	hodnoty v nekonečnu
a', \tilde{a}, \bar{a}	transformované popř. bezrozměrové veličiny
a^*	veličina komplexně sdružená k a
\bar{u}, \hat{u}	označuje hodnoty hledané funkce u na okraji či na počátku

$a^{(n)}$

označuje hodnotu veličiny a

v čase $t = t^{(n)}$ (n-té časové rovině),

v n-té iteraci

φ^+

hodnota veličiny φ na straně kladné
normály plochy

φ^-

hodnota veličiny φ na straně záporné
normály ploch

Matematické symboly a operace

x, y, z kartézské souřadnice

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ přirozené souřadnice

θ, z, r válcové souřadnice

θ, φ, r sférické souřadnice

$\{\dots\}$ množiny (grupy)

$$\{i, j\} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}$$

Christoffelův symbol druhého druhu

∇

operátor nabla ($\nabla = i^l \frac{\partial}{\partial x^l}$)

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^I} = \frac{\partial x^i(X^K, t)}{\partial X^I} = F^i_I$$

deformační gradient (i-řádkový index, I - sloupcový index)

$$\frac{\partial X^K}{\partial x^k} = \bar{F}^{-1K}_k = \frac{\text{cof}\left(\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\right)}{j} = \frac{e^{KLM} e_{klm}}{2j} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} \frac{\partial x^m}{\partial X^M}, \quad F^k_K \bar{F}^{-1K}_l = \delta^k_l, \quad \bar{F}^{-1K}_k F^k_L = \delta^K_L$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$$

matice transformace (i- řádkový index, j - sloupcový index)

$$\frac{\delta_+ \varphi^+}{\delta t}, \quad \frac{\delta_- \varphi^-}{\delta t}$$

Thomasova delta derivace v prostorovém popisu

$$\left(\frac{\delta_+ \varphi^+}{\delta t} = \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} + u_{(n)} n^k \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k}, \text{ podobně pro } \varphi^- \right)$$

$$\frac{\delta_D^+ \phi^+}{\delta t}$$

Thomasova delta derivace v materiálovém popisu

$$\left(\frac{\delta_D^+ \phi^+}{\delta t} = \dot{\phi}^+ + U_{(M)}^+ N^K \frac{\partial \phi^+}{\partial X^K}, \text{ podobně pro } \phi^- \right)$$

D

$$\text{cof}(a^{ij}) = \det |a^{ij}| \bar{a}_{ji}^{-1}$$

označení derivace $(D = \frac{d}{dy})$

značí doplněk k prvku a^{ij} v $\det |a^{ij}|$

$$\left(\sum_{i=1}^3 \text{cof}(a^{ij}) a^{ik} = \det |a^{kl}| \bar{a}_{ji}^{-1} a^{ik} = \det |a^{kl}| \delta_j^k \right)$$

$$\bar{a}^{-1}, \bar{a}^{-1ij}$$

inverzní prvek k prvku a, a^{ij}

$$(\bar{a}^{-1} a = a \bar{a}^{-1} = I, \bar{a}^{-1ij} a_{jk} = a_{kl} \bar{a}^{-1li} = \delta_k^i)$$

$$\text{tra}, \text{tr}(a^{ij})$$

stopa tenzoru a

$$(\text{tra} = a^{ij} \delta_{ij} = a^i_i = \sum_{i=1}^3 a^i_i = a_{(1)})$$

$$a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}$$

invarianty tenzoru a

$$(a_{(1)} = \text{tra}, a_{(2)} = \text{tra}^2 - a^{ij} a^{kl} \delta_{jk} \delta_{il},$$

$$a_{(3)} = \text{tra}^3 - a^{ij} a^{kl} a^{mn} \delta_{jk} \delta_{lm} \delta_{in})$$

$$\bar{a}^{(o)}, \bar{a}^{(o)}_{ij}$$

deviátor tenzoru a

$$\left(\bar{a}^{(o)}_{ij} = a_{ij} - \frac{\delta_{ij} a_{(1)}}{3} \right)$$

δ variace funkcionálu, odchylka (fluktuační) fyzikální veličiny od referenčního stavu

Δ konečný přírůstek

$\|\cdot\|$ norma vektoru, tenzoru

$|\cdot|$ absolutní hodnota, velikost vektoru ($|\underline{a}| = (a_i a_i)^{\frac{1}{2}}$, $|\underline{a}| = (a a^*)^{\frac{1}{2}}$)

$O(g(x))$ Landauův symbol (Nechť f, g jsou funkce definované na množině M a nechť $g > 0$. Potom $f(x) = O(g(x))$ značí, že existuje konstanta $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$ platí $|f(x)| \leq K g(x)$.)

$\delta(x-x')$ Diracova funkce (definovaná integrálem $f(x) = \int f(x') \delta(x-x') dx'$)

$\theta(x-x')$ Heavisidova funkce

$$\theta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -\frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{\epsilon} & \text{pro } -\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 1 & \text{pro } x \geq \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

$[[\varphi]]$, $[[\phi]]$ rozdíl hodnot veličiny φ, ϕ na ploše nespojitosti ω, Ω

$$([[\varphi]]) = \varphi^+ - \varphi^-, \quad ([[\phi]]) = \phi^+ - \phi^-$$

$\text{Re}\{a\}$ reálná část veličiny a

$$\text{Re}\{a\} = \frac{1}{2}(a+a^*) = \frac{|a|}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = |a| \cos \alpha$$

$\text{Im}\{a\}$

imaginární část veličiny a
 $(\text{Im}\{a\}) = \frac{a - a^*}{2} = \frac{|a|}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = |a| \sin\alpha$

$a^{(i)}, a^{(j)}$

označuje fyzikální velikost
komponent a_i, a_j

Matematické operace

$$\dot{\phi}(X, t) = \dot{\phi}(X^k, t) = \left. \frac{\partial \phi(X^k, t)}{\partial t} \right|_{X^k}$$

materiálová derivace
v materiálovém popisu

$$\dot{\psi}(x, t) = \dot{\psi}(x^k, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t} + v^l \frac{\partial \psi}{\partial x^l}$$

materiálová derivace
v prostorovém popisu

$$a^k_{,i} = \frac{\partial a^k}{\partial \xi^i} + \{i m\}^k$$

parciální kovariantní derivace
v prostorovém popisu

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x^i y_i$$

skalární součin vektorů $\underline{x}, \underline{y}$
($\underline{x} \cdot \underline{y} = \delta_{ij} x^i y^j = x_i y_j \delta^{ij}$)

$$\underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b}, \quad c^i = a^{ij} b_j$$

součin matice \underline{a} s vektorem \underline{b}

$$\underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b}, \quad c^{ij} = a^{ik} b_k^i$$

součin matic $\underline{a}, \underline{b}$

$$(\underline{x} \otimes \underline{y})^{ij} = x^i y^j$$

dyadický součin

$$\underline{x} \otimes \underline{y} = \begin{pmatrix} x^1 y^1, x^1 y^2, x^1 y^3 \\ x^2 y^1, x^2 y^2, x^2 y^3 \\ x^3 y^1, x^3 y^2, x^3 y^3 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{x} \wedge \underline{y})^{ij} = x^i y^j - y^i x^j$$

vnější součin

$$\underline{x} \wedge \underline{y} = \begin{pmatrix} 0, & x^1 y^2 - y^1 x^2, & x^1 y^3 - y^1 x^3 \\ x^2 y^1 - y^2 x^1, & 0, & x^2 y^3 - y^2 x^3 \\ x^3 y^1 - y^3 x^1, & x^3 y^2 - y^3 x^2, & 0 \end{pmatrix}$$

Základní fyzikální konstanty

$$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \quad [\text{Js}] \quad \text{Planckova konstanta}$$

$$k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right] \quad \text{Boltzmannova konstanta}$$

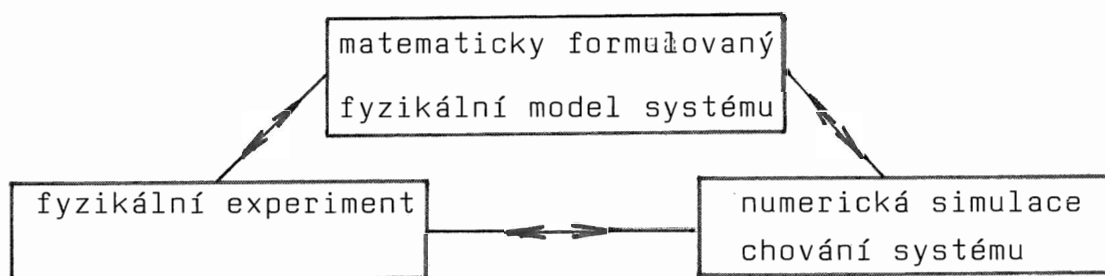
$$N_A = 6,0220943 \cdot 10^{26} \quad \left[\frac{\text{částic}}{\text{kmol}} \right] \quad \text{Avogadrovo číslo}$$

$$\hat{R} = 8314,41 \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kmol K}} \right] \quad \text{univerzální plynová konstanta}$$

- V seznamu nejsou uvedeny symboly, které nemají obecnější charakter a vyskytují se pouze na jednom místě (kapitola, odstavec).

1. Úvod

Základním rysem všech novějších fyzikálních teorií popisujících fyzikální jevy a procesy v pevných tělesech či tekutinách je jednak jejich větší komplexnost a tím i větší přesnost a jednak značné využívání výpočetní techniky. Pro pevná tělesa a tekutiny budeme většinou užívat obecný pojem reálný systém nebo jen systém. Uvážíme-li dále, že při tvorbě fyzikálního modelu hraje nezastupitelnou roli i precízní fyzikální experiment, lze schéma současného poznávacího procesu všech reálných systémů vyjádřit takto:



Uvedené schéma platí samozřejmě i pro všechny **technické** disciplíny, protože jednotícím prvkem všech technických oborů jsou právě zákony fyziky a chemie. Jedním z takových obecných zákonů fyziky a chemie je II. zákon termodynamiky^{1.1)}. Jeho důsledné respektování při tvorbě fyzikálního modelu je zárukou jak větší přesnosti modelu, tak i z toho plynoucí lepší simulace chování (evoluce) popisovaného systému. Hlavním důvodem je uvažování disipativnosti všech reálných procesů probíhajících v systému.

1.1)

Formulaci a obecným důsledkům II. zákona termodynamiky je věnována první část této knihy (F. Maršík, Termodynamika kontinua I, Teorie, 1989

Disipativností procesu rozumíme nevratný rozptyl části energie při transformaci z jedné její formy na druhou. Při technických aplikacích se často na místo disipativnosti užívá pojmu ztrátovost a je explicitně vyjádřena jedině ve II. zákonu termodynamiky. Systémy, ve kterých probíhají disipativní procesy se nazývají disipativní systémy a jejich popisu je věnována tato kniha.

Všechny reálné - disipativní - procesy jsou nevratné v tom smyslu, že se systém sám bez interakce s vnějším prostředím (bez pomoci vnějšího prostředí) nemůže vrátit do výchozího stavu. Např. každé kyvadlo se jednou zastaví, není-li mu dodávána energie z okolí. Pouze v ideálních - reálně neexistujících - podmínkách se kyvadlo může pohybovat nekonečně dlouho a pouze v takových podmínkách jsou fyzikální procesy vratné. Reálný fyzikální model vyšetřovaného systému bude tedy formulován pomocí rovnic, které nebudou invariantní vůči časové inverzi ($t \rightarrow -t$). Jen takový model bude respektovat evoluční charakter procesů probíhajících v systémech spolu s jejich příčinností. Jinými slovy, následek nesmí předběhnout svoji příčinu a jen v idealizovaných (neexistujících) situacích se může příčina zaměnit za následek.

Časová nevratnost či disipativnost, popř. produkce entropie jsou výchozí pojmy nerovnovážné termodynamiky^{1.1)} a vyjadřují stejnou vlastnost systému z různých hledisek. Jednotící charakter nerovnovážné termodynamiky při popisu reálných systémů je v této knize dokumentován. Je ukázána dvojaká role disipativních

procesů pro vývoj systému, kterou lze nejzřetelněji pozorovat ve spojitosti se stabilitou fluktuací systému kolem jeho stavu. V jednom stavu systému jsou fluktuace disipativními procesy zesilovány a systém se dostává do nestability, ve stavu jiném jsou fluktuace tlumeny tak, že systém setrvává ve stabilním stavu. Za nestabilitou se ustaví buď nová stabilní struktura (např. Bénardova vírová struktura, viz kap. 4.5, Kármánova vírová řada, viz kap. 4.6 apod.) a nebo systém setrvává v nedeterministickém (chaotickém) stavu (nestabilita vln v pevných tělesech či tekutinách, kap. 3.7 a 3.8, Lorentzův model přenosu tepla v tekutinách, kap. 4.5).

Studiem konkrétních disipativních systémů (diferenciálních rovnic) ukážeme, že disipativnost procesů v systému a stabilita jeho stavu spolu souvisí tak, jako souvisí časová nevratnost vývoje systému s jeho existencí (trváním). Pro konzervativní idealizované (nedisipativní) systémy se počet stavů, ve kterých se mohou nacházet, s vývojem (s nárůstem času) nemění a lze tedy jejich vývoj v čase jednoznačně obrátit. Naproti tomu u reálných systémů se počet možných stavů s vývojem zmenšuje a jde-li navíc o systém nelineární, dochází při vývoji i k nestabilitám. Zmenšení

počtu stavů systému nedovoluje jednoznačně určit jeho stav počáteční, což je zásadním projevem časové nevratnosti vývoje systému - viz kap. 4.1.

Uvedenou úvahu lze vhodně kvantifikovat pomocí následujících veličin; celková entropie systému S , tok entropie do systému $\mathcal{J}(S)$ a produkce entropie systémem $P(S)$. Změna stavu systému je charakterizována časovou derivací entropie \dot{S} , interakce systému

s prostředím tokem entropie $\mathcal{J}(S)$ a vnitřní procesy v systému produkcí entropie $P(S)$. Konkrétní tvar těchto veličin lze nalézt jedině pomocí dobře definovaných a dobře měřitelných veličin vystupujících v zákonech bilance hmotnosti, hybnosti, energie apod., v závislosti na uvažované struktuře systému.

Výchozí evoluční zákon systémů můžeme psát ve tvaru bilance entropie^{1.1)}

$$\dot{S} - \mathcal{J}(S) = P(S) \geq 0, \quad (1.1)$$

přičemž pro nedisipativní (idealizované) procesy platí $P(S) = 0$ a pro procesy disipativní (reálné) $P(S) > 0$.

Vyšetřujeme stabilitu nějakého stavu systému v čase $t = t_0$ charakterizovaného konstantní entropií $\dot{S}|_0 = 0$, tj. $S(t_0) = S_0 = \text{konst.}$ Její hodnota bude s ohledem na (1.1) určena rovnicí

$$-\mathcal{J}(S_0) = P(S_0) \geq 0. \quad (1.2)$$

Vidíme, že systém interaguje s prostředím - je nekonzervativní - takže $\mathcal{J}(S) \neq 0$, a jeho entropie je přesto konstantní. Říkáme, že disipativní systém je v dynamické rovnováze. Aby byla uvedená rovnováha stabilní, je třeba, aby jakákoliv fluktuace v systému, vzniklá buď spontánně uvnitř systému či zanesená zvenku, vracela jeho entropii zpět k hodnotě S_0 .^{1.1)} Provedeme-li rozvoj entropie v čase $t = t_0$, pak je její hodnota v nějakém blízkém čase t rovna

$$S(t) - S_0 = \ddot{S}|_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots, \quad (1.3)$$

kde

$$\ddot{S}|_0 = \dot{J}(S)|_0 + \dot{P}(S)|_0 < 0 \quad (> 0). \quad (1.4)$$

Znaménko $>$ platí v případě, kdy systém zaujímal stav s entropií v daných podmínkách maximální, tj. $S_0 = S_{\max}$. V takovém případě mohou fluktuace entropie systému jenom snížit a při jejich útlumu entropie opět roste.

Podle Boltzmannova vztahu je entropie systému mírou pravděpodobnosti jeho stavu, přičemž stavy s vyšší entropií jsou i stavy pravděpodobnější. Stav s maximální entropií je potom i stavem nejpravděpodobnějším a všechny reálné systémy se nacházejí právě v tomto stavu, viz axiom pravděpodobnosti^{1.1}). Z uvedených důvodů znaménko nerovnice $>$ nebudeme uvažovat.

Nerovnosti (1.1), (1.2) vyjadřují časovou nevratnost (dissipativnost) procesů v systému a nerovnost (1.4) se znaménkem $<$ stabilitu jeho stavu vůči vnitřním i vnějším fluktuacím. Tyto nerovnosti jsou tudíž výchozí pro formulaci fyzikálního modelu a stávají se nedílnou součástí poznávacího procesu, viz počátek této kapitoly.

1.1 Cíle knihy a použité metody

Knihy je druhým dílem knihy Termodynamika kontinua a je jejím přímým pokračováním. Jejím hlavním cílem je, ukázat jednotící charakter II. zákona termodynamiky, zvláště pak z něho plynoucí časové nevratnosti procesů a podmínek stability stavů.

Výklad je ve všech třech kapitolách převážně deduktivní, takže z obecných zákonitostí jsou vyvozovány konkrétní výsledky. Nicméně analýza konkrétního příkladu slouží k upřesnění obsahu a interpretace výchozích obecných zákonitostí a pojmů. Speciální matematické a fyzikální pojmy jsou uváděny v číslovaných, petitem psaných poznámkách. Pokud není uvedeno jinak, lze každý vztah převést z kartézských souřadnic do souřadnic křivočarých pomocí tab. I.D2.1 v dodatku 2 prvního dílu knihy. Odkazy označené I se vztahují ke kapitolám a vztahům prvního dílu.

V současné době je nedílnou součástí poznávacího procesu, resp. tvorby fyzikálního modelu, numerické řešení odpovídajících diferenciálních či integrálních, popř. algebraických rovnic. Aby byla spojitost fyzikálního modelu s následnou numerickou simulací vývoje systému ukázána konkrétně, je kap. 2 této knihy věnována vlastnostem výpočtových schémat a numerickému řešení vybraných fyzikálních a technických problémů.

Numerické řešení rovnic, které popisují idealizované procesy a jsou tudíž invariantní vůči časové inverzi, nečiní principiálně problém. Otázkou zůstává jeho přesnost a rychlost konvergence v případě problémů nelineárních. Rovnice takovýchto procesů lze v zásadě rozdělit na eliptické a hyperbolické.

Řešení eliptických problémů je v současné době velmi dobře rozpracováno a užitím takových metod jako je metoda multigrid, metoda sdružených gradientů, popř. jiné vhodné volby předpodmíněnosti matice problému, je dosaženo jak velmi přesného řešení, tak i jeho rychlé konvergence. Jde většinou o úlohy z oblasti stacionární deformace pevných těles, stacionárního proudění ideální tekutiny, stacionárního vedení tepla, apod.

Řešení hyperbolických problémů není v současné době tak dobře teoreticky zpracováno jako u problémů eliptických, ale také již zde existují spolehlivé algoritmy. Protože jde většinou o netlumené šíření poruch, činí numerické řešení principiální potíže. Konvergentní numerický výpočet představuje jakýsi proces šíření poruch (odchylek od přesného řešení), které musí být v průběhu výpočtu tlumeny. V opačném případě výpočet diverguje. Z důvodů konvergence je možno řešit hyperbolické problémy jen s použitím určitého typu umělého tlumení (disipace), které má fyzikální význam viskozity či difuzivity nebo tepelné vodivosti. Tlumení lze zavést čistě numerickým algoritmem pomocí zpětné diference (tzv. "upwind") ve směru osy hyperbolicity (většinou časové souřadnice) a nebo dodáním členů s druhou či čtvrtou derivací hledané funkce. Takovéto členy odpovídají fyzikálnímu (vazkému) tlumení. Skutečně řešené rovnice již nepopisují idealizované procesy, ale nějaké modelové procesy reálné, takže jde v podstatě o rovnice evolučního typu. Mezi typické hyperbolické problémy patří šíření elastických vln v kontinuu, stacionární nadzvukové proudění tekutin, apod.

Reálné procesy popisují rovnice evolučního typu, které pro případ spojitých systémů jsou vesměs rovnicemi parabolickými. Popisují transportní (disipativní) procesy a v důsledku toho nejsou již invariantní vůči časové inverzi. Řešení se od počátečních a okrajových podmínek (v případě parciálních diferenciálních rovnic) vyvíjí v zásadě třemi způsoby:

- i) směřuje k nějakému stabilnímu řešení. Systém má jeden či konečný počet stacionárních stavů;
- ii) směřuje k nějakému periodickému řešení. Stav systému leží na nějaké uzavřené křivce příslušného fázového prostoru, tzv. dynamická rovnováha;
- iii) směřuje k nestabilnímu stacionárnímu stavu. Stav systému tvoří nekonečnou množinu - podivný atraktor. Těmito stavy systém v různých časových okamžicích prochází, takže se jeho pohyb jeví chaotický (turbulentní).

Z hlediska numerické matematiky jsou problémy ii) a iii) mimořádně náročné a jejich spolehlivé numerické řešení vyžaduje jak fyzikální analýzu, tak i precizní fyzikální experiment. Mezi nejkomplikovanější patří takové nelineární disipativní systémy, jako např. proudění vazké tekutiny, viz kap. 2.4.4 a kap. 4.6, difuzně-chemické procesy, fázové přechody v proudících tekutinách, soustavy těles s rázy, apod. Jejich základním rysem chování je veliká citlivost na počáteční či okrajové podmínky a principiální nemožnost reprodukovat z nějakého konečného stavu stav počáteční (důsledek neinvariance vůči časové inverzi).

Kapitola 3 je věnována šíření vln. Vlnu šířící se kontínuem považujeme za singulární plochu, která je charakterizována nespojitostí fyzikálních veličin, popř. jejich derivací. Na této ploše musí být splněny zákony bilance a všechny potřebné konstitutivní vztahy. Výhodou tohoto přístupu je, že ke stanovení základních vlastností vlny není třeba znát konkrétní průběh příslušných veličin uvnitř této vlny, ale stačí znát jejich hodnoty před vlnou a za ní. Základními vlastnostmi těchto vln je jejich rychlost šíření a velikost skoku odpovídajících fyzikálních veličin, popř. jejich derivací. Tak např. singulární plocha na níž dochází ke skoku rychlosti je rázová vlna a singulární vlna se skokem zrychlení je slabší vlna akcelerační. Nakonec vlny, které mají všechny derivace spojité jsou vlny slabé (někdy nazývané infinitesimální).

Systematicky jsou studovány rázové a akcelerační vlny v dokonalém plynu a v pevném termoviskoplastickém materiálu. Hlavní pozornost je věnována rychlosti šíření a stabilitě jejich amplitudy. Zvláště jsou hledány podmínky, při kterých intenzita vln roste nadevšechny meze. Za takovýchto podmínek dochází v tekutinách k rázovým vlnám a v pevných tělesech k porušení.

Jevy v nelineárních disipativních systémech jsou z hlediska nerovnovážné termodynamiky vyšetřovány podrobně v kap. 4. Je ukázáno, že disipativní procesy (např. viskozita, tepelná vodivost apod.) vedou v otevřených systémech, díky okrajovým a počátečním podmínkám, na jedné straně k nestabilitě systému a na straně druhé k jeho novému uspořádání (koherenci). Ve fázovém prostoru, kde je chování systému znázorněno trajektorií, odpovídá uzavřená trajektorie

periodickému pohybu (koherentní struktury) a trajektorie neuzavřená pohybu kvaziperiodickému, aperiodickému či chaosu. Jsou analyzovány nejčastější typy chaosu, resp. turbulence.

Podrobně je studováno proudění vazké stlačitelné, tepelně vodivé tekutiny, a to jak v případech, kdy se uplatňuje tepelná vodivost a viskozita (mezní vrstva a úplav, přestup tepla do tekutiny), tak i v případech, kdy se uplatňuje významně i stlačitelnost (proudění plynu transsonickými rychlostmi). Zvláště diskutována je situace, kdy dochází ke vzájemnému ovlivňování obou nestabilních oblastí a to úplavu a vnějšího proudového pole, tzv. transsonická nestabilita. Všechny uvedené jevy jsou zkoumány i experimentálně.

2. Numerické metody mechaniky kontinua

Formulace všech problémů mechaniky kontinua vychází ze základních zákonů bilance, viz kap. I.5, které mohou být zapsány buď lokálně, což odpovídá bilanci hmoty, impulsu, energie apod. malého infinitesimálního objemu kontinua a nebo globálně (integrálně), kdy bilance uvažovaných veličin je brána pro celé těleso, resp. pro celý systém. Z těchto dvou způsobů formulace vyplývají dva základní typy numerických metod:

I. metody vycházející z lokální formulace zákonů, tj. většinou z parciálních diferenciálních rovnic se zadanými počátečními a okrajovými podmínkami. Jde především o metodu sítí, resp. metodu konečných diferencí.

II. metody vycházející z integrální formulace zákonů, tj. nějakých globálních veličin jako je rovnováha celkové hmoty, impulsu, energie, atd. Tak je tomu např. v metodě konečných objemů a metodě konečných prvků. Z těchto metod jsou prakticky nejvýhodnější ty, které vycházejí z nějakého variačního principu, tzv. Ritzova-Galerkinova metoda.

V metodách I je derivace hledané funkce v bodě nahrazována její diferencí. Jejich výhodou je relativní jednoduchost při sestavování výchozí soustavy algebraických rovnic pro hodnoty hledané funkce v nódech. Potíže však nastávají při řešení oblastí komplikované geometrie a v případech, kdy hledané funkce vykazují velké gradienty. Potom přesnost aproximace jak tvaru oblasti tak řešení klesá.

Metody II odpovídají více fyzikální představě měření (teorie integrálu - integrování -, vychází z teorie míry - měření). V nich

je řešení aproximováno nějakým polynomem s příslušným množstvím neznámých parametrů. Tyto neznámé parametry jsou určovány tak, aby chyba "vážená" pomocí nějaké váhové funkce přes řešenou oblast byla minimální. Kvůli lepší aproximaci jak řešení, tak i řešené oblasti a příslušných okrajových a počátečních podmínek, se řešená oblast rozděluje na menší podoblasti, tzv. konečné prvky. Hovoříme potom o metodě, resp. technice konečných prvků anebo konečných objemů (při váhové funkci rovné jedné). Výhodou těchto metod je i to, že jak aproximace řešené oblasti, tak i hledaného řešení je známa. Za nevýhodu bychom mohli považovat relativní komplikovanost při sestavování výchozí soustavy rovnic. Avšak při užití samočinných počítačů i tato potíž odpadá.

Nejdůležitějším znakem každé numerické metody je její konvergence k co nejpřesnějšímu, resp. fyzikálně nejvěrohodnějšímu, řešení. Z hlediska její použitelnosti je třeba vyřešit oblast konvergence výpočtového postupu. Často bývá těžké rozhodnout, je-li získané nestabilní řešení způsobeno fyzikální povahou problému (systém je v dané oblasti parametrů nestabilní) a nebo nestabilitou numerického postupu. Příkladem zde může být porušení Courantova kritéria stability numerického řešení (tzv. CFL kritéria). Toto kritérium dává do relace fyzikální vlastnosti kontinua a velikost prostorového dělení a časového kroku, viz (2.4.106). Není-li toto kritérium splněno, je numerický postup nestabilní, i když při vhodnější volbě sítě a časového kroku jeho stabilní řešení existuje. Tato situace často nastává např. při řešení nelineárních hyperbolických problémů. K nestabilitě zde dochází proto, že jsme diskretizací systému (někdy mluvíme o konečnědimensionální aproximaci) značně změnili jeho vlastnosti. Poruchy zavedené do výpočtu následkem diskretizace se

při nevhodné volbě sítě a časového kroku v průběhu výpočtu netlumí, ale naopak zesilují. Aby se tomuto nežádoucímu jevu zabránilo, musí se do příslušného modelu zavést zvláštní matematické tlumení, které má fyzikální analogii ve viskozitě či difuzivitě.

Už tento příklad naznačuje, že vyšetřování konvergence výpočtového postupu je úzce spojeno se stabilitou daného schématu vůči malým fluktuacím. Tím, že diskretizací jak u metod I, tak i u metod II poněkud pozměníme vlastnosti původních rovnic, které samy jsou již jen nějakým matematickým modelem původního fyzikálního systému, není často možno ztotožnit oblast stability výpočtu s oblastí stability původního systému. Tento fakt je třeba brát vždy v úvahu.

V této souvislosti je nutno připomenout, že každý reálný stabilní systém blízko termodynamické rovnováhy musí tlumit všechny malé fluktuace jak uvnitř, tak i fluktuace okrajových podmínek. Tato skutečnost je např. důsledkem principu minimální produkce entropie a konkrétně je způsobena disipací, viz kap. I.8.2. Díky II. zákonu termodynamiky je disipace nenulová, jestliže jsou nenulové koeficienty tepelné vodivosti, viskozity, difuze, apod. Tudiž i při numerickém procesu, kdy vzniká velké množství fluktuací, je třeba vycházet z toho, že tyto fluktuace musí být tlumeny podobně, resp. takovými členy, které nějakým způsobem modelují disipaci a tedy korespondují II. zákonu termodynamiky. Zde opět stojí za zmínku řešení hyperbolických problémů, popisujících netlumené oscilace (vlnění). Takovéto procesy se v přírodě nevyskytují; každý proces je nějak tlumen, a tak i stabilní numerický výpočet musí obsahovat nějaký tlumící člen. Z takovýchto úvah je třeba vycházet při vyšetřování konvergence numerických postupů. Dostáváme se tak zpět k pojmům stability, kap. I.7, pomocí nichž je formulována evoluce makroskopických systémů - kap. I.8.

V zásadě rozlišujeme tři typy numerických metod:

- metodu konečných prvků (MKP), resp. hraničních prvků (MHP),
- metodu konečných objemů (MKO),
- Metodu konečných diferencí (MKD).

Každá z těchto metod je vázána na odpovídající typ formulace úlohy. MKP, resp. MHP souvisí s integrální - globální - formulací a integrace je přes malou část řešené oblasti (konečný resp. hraniční prvek) nahrazena integrací přibližnou (numeric-kou), čili součtem. Integrální formulace často odpovídá nějakému variačnímu principu, viz kap.2.2.

MKO vychází rovněž z integrálního zápisu řešeného problému. Integrace, obecně přes časoprostorový konečný objem, je převedena pomocí Stokesovy (Gaussovy) věty, viz (dodatek I.D1), na integraci po jeho povrchu. Jde tedy o numerickou realizaci bilance příslušných veličin, nejčastěji hmotnosti, hybnosti, energie, apod.

MKD je vázána na diferenciální - lokální - formulaci, přičemž je derivace nahrazena derivací přibližnou, čili diferencí, konečným rozdílem. Tuto metodu lze interpretovat jako bilanci příslušných veličin v bodě.

Rovnice mechaniky kontinua lze kvalitativně rozdělit do třech základních typů. Kvalitu řešení určuje to, zda v řešené oblasti existují reálné křivky (tzv. charakteristiky), podél

nichž je řešení a jeho derivace vzájemně závislé či nikoliv.

Podle toho rozlišujeme rovnice:

- eliptické - neexistují reálné charakteristiky, např. stacionární vedené tepla, nestlačitelné proudění, apod.
- parabolické - existuje jedna reálná charakteristika, např. nestacionární vedení tepla, proudění nestlačitelné vazké tekutiny, apod.
- hyperbolické - existují dvě reálné charakteristiky (v dvourozměrném případě) či charakteristické plochy (v trojrozměrném případě), např. šíření elastických vln, nestacionární proudění nevazké tekutiny, apod.

Problémy existence a jednoznačnosti řešení příslušných rovnic se zde zabývat nebudeme. Omezíme se pouze na stabilitu řešení, viz kap. I.7, která je z hlediska numerického řešení podstatná. Předpokládáme totiž, že každý numerický proces simuluje fluktuace kolem hledaného řešení (termodynamického stavu, viz kap. I.3.11) Podle axiomu maximální pravděpodobnosti, viz kap. I.5.6 a kap. I.3.13, platí, že se realizuje takový stav systému, který je nejvíce pravděpodobný, resp., jehož entropie (I.6.20) a (I.6.5.7) dosahuje svého maxima (I.3.3.13). Pravděpodobnost velikosti fluktuace (I.3.13.9), (I.3.3.13) kolem termodynamického stavu systému (řešení příslušné rovnice) souvisí se změnou velikosti entropie systému. Vzhledem k tomu, že entropie systému dosahuje v rovnovážném (lokálně rovnovážném) stavu svého maxima, tj. splňuje jisté termodynamické podmínky stability, viz kap. I.7, mají i fluktuace kolem tohoto stavu nějaké normální rozdělení (I.3.13.14). Potom i

odchyly (fluktuační) numerického řešení od řešení přesného musí mít stejné vlastnosti. Tudiž, numerické metody, které simulují fyzikální fluktuační systému, budou stabilní, jestliže vyšetřovaný fyzikální systém je stabilní; jinými slovy, jestliže vyhovuje axiomu maximální pravděpodobnosti, viz kap. I.7. Především z tohoto hlediska budou vyšetřovány a konstruovány numerické metody mechaniky kontinua.

Cílem této kapitoly je poskytnout matematický aparát nutný k porozumění a k aktivnímu rozvíjení výpočtových metod, především mechaniky tekutin a mechaniky pevných těles.

2.1 Základní pojmy. Diferenciální a integrální formulace problémů

Zavedeme nejprve nějaký prostor funkcí $M(V)$, které jsou definovány na objemu V . Funkce $u(\underline{x}) \in M(V)$ popisují nějaký fyzikální proces probíhající v uvažovaném systému (tělese).

Objem V je nějaká pevná podmnožina Euklidovského prostoru s kartézskou soustavou souřadnic $x^i \in V$.

Zavedeme dále $T(u) \in \mathcal{L}(M, N)$, což je lineární operátor $T(u)$ z nějakého lineárního prostoru lineárních operátorů $\mathcal{L}(M, N)$. Operátor $T(u)$ je tedy zobrazením prostoru M do prostoru funkcí N , formálně: $T: M \rightarrow N$ (Rektorys, 1974; Fučík, Kufner, 1978).

Nejčastější tvar lineárního operátoru je pro $\underline{x} \in V$

$$T(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \left[a^{ij}(x^l) \frac{\partial}{\partial x^j} u(x^l) \right] + b^i(x^l) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x^l) u(x^l). \quad (2.1.1)$$

Na tento výraz můžeme nahlížet jako na vztah veličin (funkcí, parametrů) a^{ij}, b^i, c, u (pro $i, j = 1, 2, 3$) v bodě $\underline{x} \in V$. Kvůli této jednobodové závislosti říkáme, že výraz (2.1.1) je v lokálním tvaru.

Mějme nějakou další funkci $v(\underline{x}) \in M(V)$. Definujeme potom skalární součin operátoru $T(u)$ a funkce v jako integrál přes objem V , tj.

$$(T(u), v) = \int_V T(u) v \, dV. \quad (2.1.2)$$

Tomuto tvaru zápisu říkáme integrální (někdy též globální), neboť je uvažován operátor $T(u)$ spolu s celou řešenou oblastí V . K dalším úpravám takto formulovaného problému používáme Gaussovu větu. (I.1.17). Její nejobvyklejší formulace je

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x^i} A^i dv = \int_{\partial V} A^i n_i da, \quad (2.1.3)$$

kde $\underline{A} = (A^1, A^2, A^3)$ je nějaký vektor a jeho divergence je

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \operatorname{div} \underline{A},$$

n_i je vnější normála k povrchu ∂V objemu V . dv a da jsou velikosti objemu a elementu plochy, viz kap. I.3.5.

Použitím Gaussovy věty (jde v podstatě o integraci per partes) můžeme vztah (2.1.2) přepsat do tvaru

$$(T(u), v) = (u, T^*(v)) + \int_{\partial V} [F(v) G^i(u) - F(u) G^{*i}(v)] n_i da. \quad (2.1.4)$$

Operátor $T^*(v)$ se nazývá adjungovaný operátor. Operátory G^i, G^{*i} a funkce F vystupující v povrchovém integrálu reprezentují okrajové podmínky. Předpis, kterému vyhovuje funkce $F(u)$ nazýváme Dirichletova (někdy též základní nebo pevná) okrajová podmínka. Předpis, kterým je definován operátor $G^i(u)$ nazýváme Neumannovou (popř. přirozenou nebo volnou) okrajovou podmínkou. Jak uvidíme dále, je tento druh podmínek typický pro variační formulaci úloh. $F(u)$ je určeno hodnotami hledané funkce u na hranici ∂V a $G^i(u)$ obvykle reprezentuje toky přes tuto hranici.

Provedeme naznačené operace (tj. dvakrát metodu per partes pro operátor (2.1.1)). Tudiž

$$\begin{aligned}
 \int_V T(u)v \, dV &= \int_V \left[\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) v + \sum_{i=1}^3 b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} v + cuv \right] dV = \\
 &= \int_V \left[- \sum_{i,j=1}^3 a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial v}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (b^i v)}{\partial x^i} u + cuv \right] dV + \int_{\partial V} \sum_{i,j=1}^3 \left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} + b^i u \right) v n_i \, dA = \\
 &= \int_V \left[\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \left(a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} (b^i v) + cv \right] u \, dV + \\
 &\quad + \int_{\partial V} \sum_{i,j=1}^3 \left[\left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} + b^i u \right) v - a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x^j} u \right] n_i \, dA. \tag{2.1.5}
 \end{aligned}$$

Odtud porovnáním s (2.1.4) plyne pro adjungovaný operátor vztah

$$T^*(v) = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} (b^i v) + cv \quad \text{pro } \underline{x} \in V. \tag{2.1.6}$$

Dirichletova okrajová podmínka zadaná na části hranice je

$$F(u) = u, \quad F(v) = v \quad \text{pro } \underline{x} \in \partial V_1, \tag{2.1.7}$$

a Neumannova okrajová podmínka má tvar

$$\begin{aligned}
 G_N^i(u) n_i &= a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} n_i \\
 G^{*i}(v) n_i &= a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x^j} n_i \quad \text{pro } \underline{x} \in \partial V_2. \tag{2.1.8}
 \end{aligned}$$

Někdy se používá i kombinace podmínek (2.1.7) a (2.1.8). Tuto podmínku nazýváme smíšenou (Newtonovou) a její obecný tvar je

$$G^i(u)n_i = \left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} + b^i u \right) n_i \quad \text{pro } \underline{x} \in \partial V_2. \quad (2.1.9)$$

Řešení diferenciální rovnice

$$T(u(\underline{x})) - p(\underline{x}) = 0 \quad \text{pro } \underline{x} \in V \quad (2.1.10)$$

čili nalezení funkce $u(\underline{x}) \in M(V)$ mající spojité všechny potřebné partiální derivace za okrajových podmínek

$$u = F(u) \quad \text{pro } \underline{x} \in \partial V_1$$

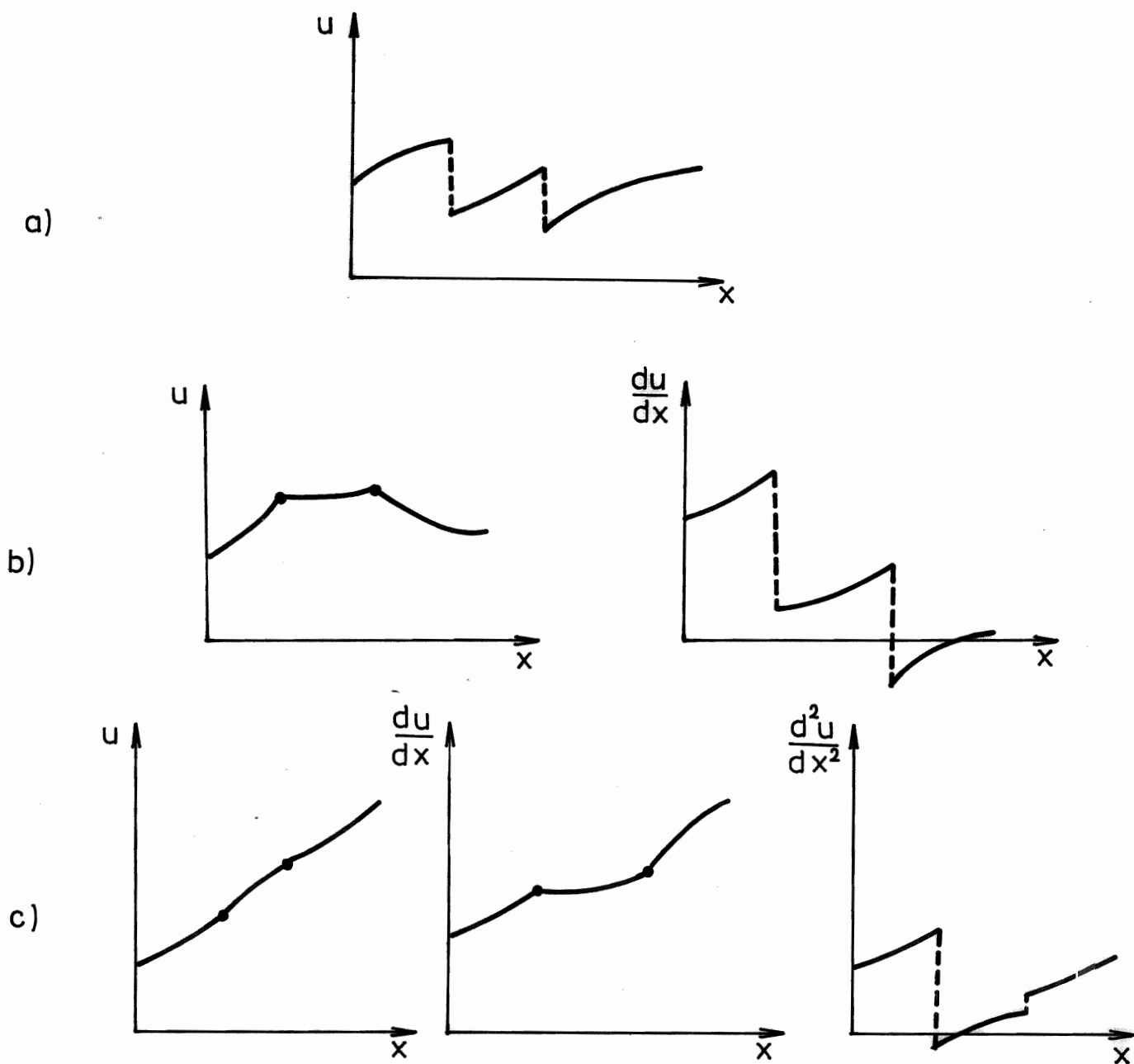
$$G_N^i(u)n_i = a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} n_i \quad \text{pro } \underline{x} \in \partial V_2 \quad (2.1.11)$$

nazýváme klasickým řešením rovnice (2.1.10). Zde $p(\underline{x})$ je nějaká spojitá funkce. Na části hranice ∂V_1 je zadána Dirichletova podmínka (2.1.11)₁ a na zbylé části hranice ∂V_2 Neumannova podmínka (2.1.11)₂ a nebo podmínka smíšená (2.1.9).

Hledejme nyní řešení integrální rovnice

$$\int_V [T(u) - p] v \, dv + \int_{\partial V_1} (F(u) - u) v \, da + \int_{\partial V_2} \left[G^i(u) - a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} - b^i u \right] v n_i \, da = 0. \quad (2.1.12)$$

Takovou funkci $u(\underline{x})$, která tuto rovnost splňuje pro spojitě funkce $v \in M(V)$ (často předpokládáme, že $v = u$) nazýváme slabým řešením rovnice (2.1.10)^{2.1}. Dále pak ukážeme, jak toto slabé řešení souvisí s variační formulací, např. problému (2.1.10).



Obr. 2.1

Schématické znázornění funkcí patřících do prostoru:

a) L_2

b) $W^{1,2}$

c) $W^{2,2}$

Z těchto obrázků je zřejmé, že $W^{2,2} \subset W^{1,2} \subset L_2$ (viz např. Fučík, Kufner, 1978)

2.1)

Derivace funkce $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ definovaná na prostoru V

nenusí být často ani spojitá. Pro integrální formulaci (2.1.12) není nespojitost derivací překážkou. Hledáme-li řešení numerickými metodami, pak není výjimkou, že derivace řešení je po částech spojitá funkce. Metoda konečných prvků, při použití lineární aproximace, dovoluje hledat řešení, jehož první a vyšší derivace jsou nespojité. Říkáme, že tyto funkce patří do Sobolevova prostoru $W^{1,2}$. Index "2" označuje, že norma funkce $\|u\|$ je určena jejím kvadrátem a index "1" určuje nejvyšší řád její konečné derivace. Vystačíme většinou s funkcemi, které patří do prostoru $L_2(V), W^{1,2}(V)$ a $W^{2,2}(V)$. Jejich normy jsou definovány vztahy

obr. 2.1 →
$$\|u\|_0^2 = \int_V (u)^2 dV, \quad u \in L_2$$

$$\|u\|_1^2 = \int_V \left[u^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 \right] dV, \quad u \in W^{1,2}$$

$$\|u\|_2^2 = \int_V \left[u^2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \right)^2 \right] dV, \quad u \in W^{2,2} \quad 1)$$

Grafy typických funkcí patřících do jednotlivých prostorů jsou uvedeny na obr. 2,1.

2.1.1 Rovnice evolučního typu

Popis všech fyzikálních procesů je založen na zákonech bilance doplněných materiálovými, resp. konstitutivními vztahy, které definují popisované těleso. Zákon bilance nějaké veličiny, viz kap. I.4, jejíž hustotu značíme $\varphi(x,t)$ je v globálním popisu (tj. platném pro celé těleso) roven

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varphi dV + \int_{\partial V} \hat{j}^i(\varphi) da_i = \int_V \sigma(\varphi) dV, \quad (2.1.13)$$

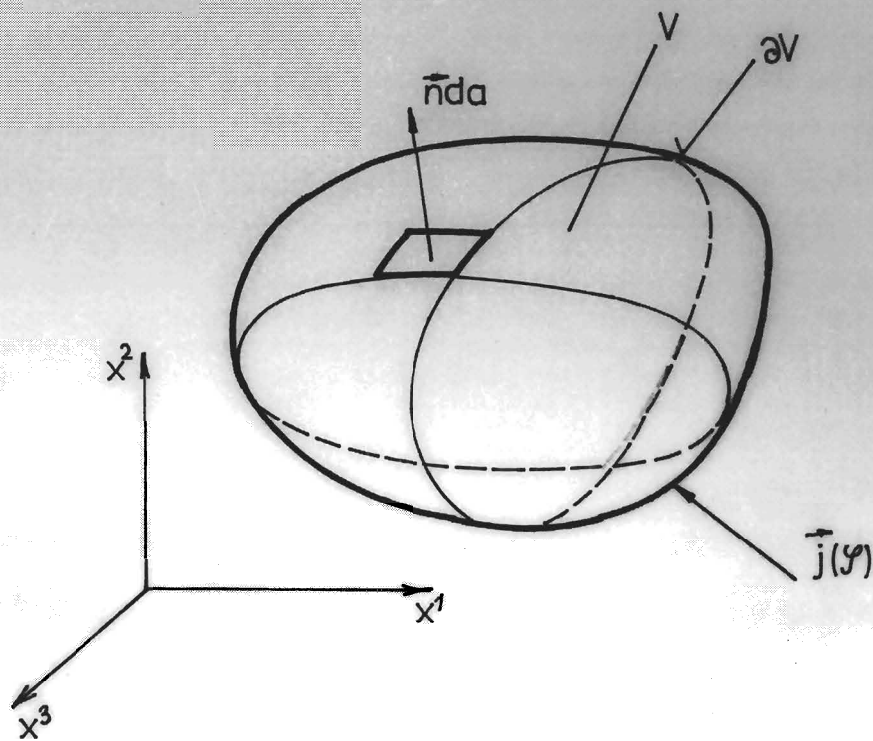
kde $V=V(\underline{x})$ je časově neproměnný objem tělesa, ∂V je jeho povrch s vnější normálou \underline{n} , $\hat{j}^i(\varphi)$ je vektor hustoty toku a $\sigma(\varphi)$ je hustota produkce (vznik či zánik) veličiny φ v jednotce objemu (viz obr. 2.2). Užitím Gaussovy věty (2.1.3) převedeme povrchový integrál na objemový a dostáváme zákon bilance veličiny φ v lokálním tvaru (tj. platný pro nekonečně malý element objemu dV). Tudiž

Obn. 2.2 →
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \hat{j}^l(\varphi)}{\partial x^l} = \sigma(\varphi) \quad \text{pro } l=1,2,3. \quad (2.1.14)$$

Jak plyne z Reynoldsova teorému (I.3.10.13), liší se hustota toku $\hat{j}^l(\varphi)$ od hustoty $j^l(\varphi)$ v kap.I.4 o konvektivní člen φv^l .

Za veličinu φ postupně dosadíme hustotu ρ , hybnost ρv^i a vnitřní energii ρu a dostáváme zákon bilance hmotnosti (I.4.1.5)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^l}{\partial x^l} = 0 \quad (2.1.15)$$



Obr. 2.2

Schématické znázornění bilance extenzivní veličiny $\varphi(\underline{x}, t)$
v pevném objemu V

hybnosti (I.4.2.16)

$$\frac{\partial(\rho v^j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\rho v^j v^l - t^{lj}) = \rho f^j \quad \text{pro } j=1,2,3$$

(2.1.16)

energie (I.4.2.15)

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} (\rho u v^l + q^l) = t^{lj} \frac{\partial v_j}{\partial x^l}$$

(2.1.17)

Zde \underline{v} je vektor unášivé rychlosti a \underline{f} je vnější objemová síla (např. gravitační, odstředivá, apod.). V mechanice tuhých těles nás často zajímá i deformace, resp. trajektorie pohybu (I.3.1.1) materiálového bodu. Počtem vedle uvedených zákonů bilance uvažujeme definici rychlosti (I.3.1.2), popř. (I.3.1.24), zajímá-li nás vektor posunutí \underline{u} . V prostorovém popisu pak přidáváme rovnici

$$v^j = \dot{u}^j = \frac{\partial u^j}{\partial t} + v^l \frac{\partial u^j}{\partial x^l}$$

(2.1.18)

resp.

$$\rho v^j = \frac{\partial(\rho u^j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^j v^l)}{\partial x^l}$$

(2.1.19)

Abychom mohli soustavu pěti rovnic (2.1.15) až (2.1.18) řešit, např. pro ρ, u, u^j, v^j ($j=1,2,3$) musíme znát ještě další rovnice pro neznámé t^{jl}, q^l . Tyto doplňující rovnice nazýváme konstitutivními rovnicemi a je jim věnována kapitola I.6.

Rovnice bilance (2.1.15) až (2.1.17), včetně (2.1.19), můžeme zapsat pomocí jedné vektorové rovnice (2.1.17), tj.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l} \hat{j}^l(\varphi) = \sigma(\varphi) \quad (2.1.20)$$

do tzv. divergentního (konservativního) tvaru, přičemž jednotlivé vektory jsou definovány následujícím způsobem:

vektor neznámých:

$$\varphi \equiv (\rho, \rho v^1, \rho v^2, \rho v^3, \rho u, \rho u^1, \rho u^2, \rho u^3) \quad (2.1.21)$$

vektory toků:

$$\hat{j}^1(\varphi) \equiv (\rho v^1, \rho(v^1)^2 - t^{11}, \rho v^2 v^1 - t^{12}, \rho v^3 v^1 - t^{13}, \rho u v^1 + q^1, \rho u^1 v^1, \rho u^2 v^1, \rho u^3 v^1)$$

$$\hat{j}^2(\varphi) \equiv (\rho v^2, \rho v^1 v^2 - t^{21}, \rho(v^2)^2 - t^{22}, \rho v^3 v^2 - t^{23}, \rho u v^2 + q^2, \rho u^1 v^2, \rho u^2 v^2, \rho u^3 v^2)$$

$$\hat{j}^3(\varphi) \equiv (\rho v^3, \rho v^1 v^3 - t^{31}, \rho v^2 v^3 - t^{32}, \rho(v^3)^2 - t^{33}, \rho u v^3 + q^3, \rho u^1 v^3, \rho u^2 v^3, \rho u^3 v^3)$$

(2.1.22)

a vektor produkci:

$$\sigma(\varphi) \equiv (0, \rho f^1, \rho f^2, \rho f^3, t^{jl} \frac{\partial v^l}{\partial x^j}, 0, 0, 0).$$

(2.1.23)

Způsob zápisu (2.1.20) je výhodný nejen z hlediska numerické matematiky, ale i kvůli matematické analýze problému, hlavně pak při zjišťování typu rovnic a konvergence numerické metody. Nejčastěji se tento zápis užívá v mechanice tekutin, kde vektor posunutí u nemá smysl a soustava rovnic ((2.1.20) se redukuje

na pět rovnic. Např. pro tekutinu, pro kterou vektor vedení tepla q je určen vztahem (2.4.138) a tenzor napětí je $t^{ij} = -p\delta^{ij} + t_{dis}^{ij}$, kde p je statický tlak a t_{dis}^{ij} je disipativní část tenzoru napětí (2.4.137). Rovnice bilance (2.1.20) vedou na tzv. Navierovy-Stokesovy rovnice vazké, stlačitelné tepelně vodivé tekutiny (2.4.141).

2.1.2 Eulerovy rovnice mechaniky tekutin

Při dalším fyzikálním zjednodušení obecných rovnic bilance (2.1.20) zanedbáme vedení tepla ($q=0$) a disipativní část tenzoru napětí

Obdržíme tzv. Eulerovy rovnice mechaniky tekutin. Předpokládejme dále, že má vnější objemová síla f^j potenciál

$$\phi \text{ t.j. } f^j = -\delta^{jl} \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \quad \text{a definujme veličinu}$$

$$e = u + \frac{(v)^2}{2}, \quad \text{pro } (v)^2 = v^l v_l = \sum_{l=1}^3 (v^l)^2.$$

(2.1.24)

Potom lze Eulerovy rovnice zapsat pomocí vektoru neznámých

$$\psi = (\rho, \rho v^1, \rho v^2, \rho v^3, p e)$$

(2.1.25)

a vektoru toků

$$\hat{j}^1(\psi) = (\rho v^1, \rho (v^1)^2 + p + \phi, \rho v^2 v^1, \rho v^3 v^1, \rho v^1 (e + \frac{p}{\rho} + \phi))$$

$$\hat{j}^2(\psi) = (\rho v^2, \rho v^1 v^2, \rho (v^2)^2 + p + \phi, \rho v^3 v^2, \rho v^2 (e + \frac{p}{\rho} + \phi))$$

$$\hat{j}^3(\psi) = (\rho v^3, \rho v^1 v^3, \rho v^2 v^3, \rho (v^3)^2 + p + \phi, \rho v^3 (e + \frac{p}{\rho} + \phi)).$$

(2.1.26)

V divergentním tvaru (2.1.20) je vektor produkci identicky roven nule, t.j. $\underline{G}(\psi) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Eulerovy rovnice můžeme zjednodušit předpokladem (I.7.3.22) tj.

$$\frac{1}{2} v^2 + u + \frac{p}{\rho} + \phi = \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x - 1} \frac{p}{\rho} + \phi = h_v = \text{konst}, \quad (2.1.27)$$

přičemž uvažujeme dokonalý plyn (I.7.4.2). Celková entalpie h_v je pro izentropické procesy konstantní v celém objemu tekutiny (κ je izentropický exponent).

← Díky tomuto předpokladu je pro konzervativní plošné a objemové síly (tj. $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$) rovnice bilance energie (2.1.17) splněna identicky. Vektor (2.1.25) má jen čtyři složky

$$\varphi \equiv (\rho, \rho v^1, \rho v^2, \rho v^3) \quad (2.1.28)$$

a vektory toků jsou

$$\begin{aligned} \hat{j}^1(\varphi) &\equiv (\rho v^1, \rho (v^1)^2 + \frac{k}{2} \rho (2h_v - |v|^2), \rho v^2 v^1, \rho v^3 v^1) \\ \hat{j}^2(\varphi) &\equiv (\rho v^2, \rho v^1 v^2, \rho (v^2)^2 + \frac{k}{2} \rho (2h_v - |v|^2), \rho v^3 v^2) \\ \hat{j}^3(\varphi) &\equiv (\rho v^3, \rho v^1 v^3, \rho v^2 v^3, \rho (v^3)^2 + \frac{k}{2} \rho (2h_v - |v|^2)), \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

přičemž se za tlak p dosadilo h_v ze vztahu (2.1.27), při označení $k = \frac{\kappa - 1}{\kappa}$.

Zápis Eulerových rovnic pomocí vektoru (2.1.28) je vhodný pro popis stacionárních procesů. Předpoklad (2.1.27) pro ně platí a je možno (i pro trojrozměrné proudění) řešit jen čtyři rovnice. Avšak pro nestacionární procesy a nebo pro řešení Navierových-Stokesových rovnic je výhodnější vycházet od proměnných

(2,1.25). Z hlediska dalšího analytického i numerického zpracování evolučních rovnic je výhodná jejich linearizace v okolí hodnoty φ . Z tohoto důvodu obecnou rovnicí bilance (2.1.20)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \hat{j}^1(\varphi)}{\partial x^1} + \frac{\partial \hat{j}^2(\varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{j}^3(\varphi)}{\partial x^3} = \underline{G}(\varphi)$$

(2.1.30)

zjednodušíme na rovnici lineární, např. pro Eulerovy rovnice s hodnotami toků (2.1.29) platí

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial t} + \sum_{l=1}^4 A^{kl} \frac{\partial \varphi^l}{\partial x^1} + \sum_{l=1}^4 B^{kl} \frac{\partial \varphi^l}{\partial x^2} + \sum_{l=1}^4 C^{kl} \frac{\partial \varphi^l}{\partial x^3} = 0 \quad \text{pro } k=1,2,3,4,$$

(2.1.31)

kde matice

$$A^{kl} = \frac{\partial \hat{j}^{1k}}{\partial \varphi^l}, \quad B^{kl} = \frac{\partial \hat{j}^{2k}}{\partial \varphi^l}, \quad C^{kl} = \frac{\partial \hat{j}^{3k}}{\partial \varphi^l},$$

(2.1.32)

již považujeme v rovnici (2.1.31) za konstanty. Provedením naznačených derivací dostáváme jejich konkrétní tvar

$$A^{kl} \equiv \begin{bmatrix} 0 & , & 1 & , & 0 & , & 0 \\ c_T^2 + k(v)^2 - (v^1)^2 & , & (2-k)v^1 & , & -kv^2 & , & -kv^3 \\ -v^2v^1 & , & v^2 & , & v^1 & , & 0 \\ -v^3v^1 & , & v^3 & , & 0 & , & v^1 \end{bmatrix}$$

$$B^{kl} \equiv \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ -v^1 v^2 & , & v^2 & , & v^1 & , & 0 \\ c_T^2 + k(v^1)^2 - (v^2)^2 & , & -k v^1 & , & (2-k)v^2 & , & -k v^3 \\ -v^3 v^1 & , & 0 & , & v^3 & , & v^2 \end{bmatrix}$$

$$C^{kl} \equiv \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & 0 & , & 1 \\ -v^1 v^3 & , & v^3 & , & 0 & , & v^1 \\ -v^2 v^3 & , & 0 & , & v^3 & , & v^2 \\ c_T^2 + k(v^1)^2 - (v^3)^2 & , & -k v^1 & , & -k v^2 & , & (2-k)v^3 \end{bmatrix}$$

(2.1.33)

kde c_T jsme označili izotermickou rychlost zvuku. Je definována vztahem $c_T = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\kappa} = RT$ ($c = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right]^{\frac{1}{2}}$ je izentropická rychlost zvuku)

Soustavu lineárních rovnic (2.1.32) platící pro proměnné $\varphi \equiv (\rho, \rho v^1, \rho v^2, \rho v^3)$ můžeme přetransformovat do nezávisle proměnných $\tilde{\varphi} \equiv (\rho, v^1, v^2, v^3)$. V těchto proměnných budou mít vlastní čísla odpovídajících matic fyzikální význam rychlosti proudu a rychlosti šíření poruch, což je výhodné z hlediska matematické analýzy a formulace okrajových podmínek, viz kap. 2.5.5. Užijeme transformace

$$d\varphi = P d\tilde{\varphi}, \quad \begin{bmatrix} d\rho \\ d(\rho v^1) \\ d(\rho v^2) \\ d(\rho v^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ v^1 & , & \rho & , & 0 & , & 0 \\ v^2 & , & 0 & , & \rho & , & 0 \\ v^3 & , & 0 & , & 0 & , & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ dv^1 \\ dv^2 \\ dv^3 \end{bmatrix}, \quad (2.1.34)$$

Pro matici inverzní transformace P^{-1} platí

$$d\tilde{\varphi} = P^{-1} d\varphi; \quad \begin{bmatrix} d\varphi \\ dv^1 \\ dv^2 \\ dv^3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v^1}{\varrho} & \frac{1}{\varrho} & 0 & 0 \\ -\frac{v^2}{\varrho} & 0 & \frac{1}{\varrho} & 0 \\ -\frac{v^3}{\varrho} & 0 & 0 & \frac{1}{\varrho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d(\varrho v^1) \\ d(\varrho v^2) \\ d(\varrho v^3) \end{bmatrix} \quad (2.1.35)$$

Soustava rovnic (2.1.31) přechází na soustavu rovnic

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^k}{\partial t} + \sum_{l=1}^4 \tilde{A}^{kl} \frac{\partial \tilde{\varphi}^l}{\partial x^1} + \sum_{l=1}^4 \tilde{B}^{kl} \frac{\partial \tilde{\varphi}^l}{\partial x^2} + \sum_{l=1}^4 \tilde{C}^{kl} \frac{\partial \tilde{\varphi}^l}{\partial x^3} = 0, \quad \text{pro } k=1,2,3,4 \quad (2.1.36)$$

pro nezávislé funkce $\tilde{\varphi} = (\varrho, v^1, v^2, v^3)$. Jednotlivé matice jsou dány transformací (2.27)

$$\tilde{A} = P^{-1} A P; \quad \tilde{A}^{ij} = \sum_{l,k=1}^4 P^{-1}_{il} A^{lk} P^{kj}, \quad (2.1.37)$$

takže

$$\tilde{A}^{kl} \equiv \begin{bmatrix} v^1 & \varrho & 0 & 0 \\ \frac{\partial_T}{\varrho} & (1-k)v^1 & -kv^2 & -kv^3 \\ 0 & 0 & v^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B}^{kl} \equiv \begin{bmatrix} v^2 & 0 & \varrho & 0 \\ 0 & v^2 & 0 & 0 \\ \frac{\partial_T}{\varrho} & -kv^1 & (1-k)v^2 & -kv^3 \\ 0 & 0 & 0 & v^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}^{kl} \equiv \begin{bmatrix} v^3 & 0 & 0 & \varrho \\ 0 & v^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v^3 & 0 \\ \frac{\partial_T}{\varrho} & -kv^1 & -kv^2 & (1-k)v^3 \end{bmatrix} \quad (2.1.38)$$

Matici \tilde{A} využijeme při hledání charakteristik naší soustavy lineárních rovnic (2.1.36), viz kap. 2.5.4.

2.1.3 Eulerovy rovnice v křivočarých souřadnicích

Při řešení evolučních rovnic (2.1.30) metodou konečných prvků, či metodou konečných objemů v tvarově komplikovaných oblastech, se zavádějí vnitřní souřadnice (2.3.21) na každém konečném prvku či objemu. Integrální popis (2.1.13) je tak realizován na malém, byť nepravidelném ^(elementu) objemu V_e . Aby bylo možno dobře na tomto objemu integrovat, je třeba rovnice (2.1.13), resp. (2.1.14) přetransformovat do vlastních souřadnic (ξ^1, ξ^2, ξ^3) tohoto objemu či plochy (ve dvourozměrném případě). Jde především o transformaci divergence (I.D2.58) a Gaussovy věty (I.D1.17), viz dodatek I.D2. Vzhledem k tomu, že $\xi^i \in \langle -1, 1 \rangle$ pro $i = 1, 2, 3$ dostáváme integraci přes krychli $\langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle \times \langle -1, 1 \rangle$, kterou lze dobře provést i numericky. Využití ukážeme na příkladu Eulerových rovnic s proměnnými (2.1.25) pro dva rozměry, tj.

$$\varphi_{\perp} = (\varphi, \varrho v_1^1, \varrho v_1^2, \varrho e) \quad (2.1.39)$$

s maticí transformace (2.3.19), která odpovídá nějakému konečnému prvku či objemu, např. na obr. 2.6. Indexem " \perp " jsme explicitně označili, že jde o kartézské komponenty vektoru \underline{v} , ϱ a ϱe jsou skaláry a transformaci nepodléhají^{I.3.11}). Tudiž, kontravarianta složky rychlosti jsou podle (I.D2.12)

$$v^i = \underline{v} g^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} (v_{\perp}^l) = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} v_1^l \quad \text{pro } i, l = 1, 2 \quad (2.1.40)$$

a s ohledem na (2.3.21) pak platí

$$\begin{pmatrix} \varrho v_1^1 \\ \varrho v_1^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & -\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varrho v_1^1 \\ \varrho v_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.1.41)$$

Divergence (I.D2.58) (např. v rovnici (2.1.15)) je pak rovna

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} \varrho v^i) \quad (i = 1, 2).$$

Gradient $\frac{\partial p}{\partial x^i}$ má v křivočarých souřadnicích tvar I.D2.10), tj. $g^j \frac{\partial p}{\partial \xi^i}$ a díky (I.D2.4) ho můžeme promítnout do kartézské souřadné soustavy takto

$$g^j \frac{\partial p}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \frac{\partial p}{\partial \xi^i} i^l \quad \text{pro } i, l = 1, 2. \quad (2.1.42)$$

Užitím transformace (2.1.42) a (2.3.21) odvodíme k vektoru proměnných (2.1.39) komponenty vektoru (2.1.26). Platí

$$\begin{aligned} \hat{j}^1(\varphi_1) &= \left(\varrho v^1, \varrho v^1 v_1^1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} (p + \phi), \varrho v^1 v_1^2 - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} (p + \phi), \varrho v^1 \left(e + \frac{p}{\varrho} + \phi \right) \right) \\ \hat{j}^2(\varphi_1) &= \left(\varrho v^2, \varrho v^2 v_1^1 - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} (p + \phi), \varrho v^2 v_1^2 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} (p + \phi), \varrho v^2 \left(e + \frac{p}{\varrho} + \phi \right) \right), \end{aligned}$$

(2.1.43)

Ikde pro dokonalý plyn (I.7.4.2) nahradíme tlak pomocí veličiny (2.1.24), tj.

$$p = \frac{\gamma - 1}{2} \left[2 \xi e - \sum_{l=1}^2 \varrho (v_l^l)^2 \right] = \frac{\gamma - 1}{2} \left\{ 2 \varphi_1^4 - [(\varphi_1^2)^2 + (\varphi_1^3)^2] (\varphi_1^1)^{-1} \right\} \quad (2.1.44)$$

kontra variantní složky rychlosti v^l transformací (2.1.41).

Dostáváme tak rovnici bilance (2.1.20) (tzv. Eulerovy rovnice) pro dvourozměrné proudění v kovariantním tvaru

$$\sqrt{g} \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + \frac{\partial(\sqrt{g} \hat{j}^1(\varphi_l))}{\partial \xi^1} + \frac{\partial(\sqrt{g} \hat{j}^2(\varphi_l))}{\partial \xi^2} = 0 \quad , \quad (2.1.45)$$

kde φ_l je vektor neznámých (2.1.39).

Stejným postupem jako v případě vektoru neznámých (2.1.25) budeme rovnici (2.1.45) linearizovat. Zavedeme matice (2.1.32) a rovnice (2.1.45) a píšeme

$$\frac{\partial \varphi_l^k}{\partial t} + \sum_{l=1}^4 A^{kl} \frac{\partial \varphi_l^l}{\partial \xi^1} + \sum_{l=1}^4 B^{kl} \frac{\partial \varphi_l^l}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{pro } k=1,2,3,4 \quad , \quad (2.1.46)$$

kde

$$A^{kl} = \frac{\partial \hat{j}^{1k}}{\partial \varphi_l^l} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{g} v^1 v_1^1 + \left[(\alpha-1)e - \frac{p}{\rho} \right] \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \sqrt{g} v^1 + (2-\alpha) v_1^1 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} \\ -\sqrt{g} v^1 v_1^2 - \left[(\alpha-1)e - \frac{p}{\rho} \right] \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & v_1^2 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} - (1-\alpha) v_1^1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & & \\ \sqrt{g} v^1 \left[-2 \frac{p}{\rho} + (\alpha-2)e \right] & & (1-\alpha) \sqrt{g} v^1 v_1^1 + \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \\ -\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & & & 0 \\ (1-\alpha) v_1^2 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} - v_1^1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & & & (\alpha-1) \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} \\ v^1 - (2-\alpha) v_1^2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & & & -(\alpha-1) \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \\ (1-\alpha) \sqrt{g} v^1 v_1^2 - \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & & & \alpha \sqrt{g} v^1 \end{bmatrix} \quad (2.1.47)$$

a

$$B^{kl} = \frac{\partial \hat{j}^{2k}}{\partial \varphi_l^k} = \text{dtto } A^{kl} \text{ jen } v^1 \text{ nahradit } v^2$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \quad - \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1}$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} \quad - \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1}$$

(2.1.48)

Ze stejných důvodů jako výše zavedeme na místo proměnných (2.1.

39) proměnné $\tilde{\varphi}_l = (\varrho, v_1^1, v_1^2, p)$. Transformace (2.1.34) má

pak tvar

$$d\varphi_l = P d\tilde{\varphi}_l, \text{ kde } P^{kl} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ v_1^1 & , & \varrho & , & 0 & , & 0 \\ v_1^2 & , & 0 & , & \varrho & , & 0 \\ \frac{(v)^2}{2} & , & \varrho v_1^1 & , & \varrho v_1^2 & , & \frac{1}{\alpha-1} \end{bmatrix}$$

(2.1.49)

a pro zpětnou transformaci platí

$$d\tilde{\varphi} = P^{-1} d\varphi, \quad P^{-1kl} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ -\frac{v_1^1}{\varrho} & , & \frac{1}{\varrho} & , & 0 & , & 0 \\ -\frac{v_1^2}{\varrho} & , & 0 & , & \frac{1}{\varrho} & , & 0 \\ (\alpha-1)\frac{(v)^2}{2} & , & (1-\alpha)v_1^1 & , & (1-\alpha)v_1^2 & , & \alpha-1 \end{bmatrix}$$

(2.1.50)

Konečný tvar linearizovaných rovnic na konečném objemu (prvku)

je

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_l^k}{\partial t} + \sum_{l=1}^4 \tilde{A}^{kl} \frac{\partial \varphi_l^l}{\partial \xi^1} + \sum_{l=1}^4 \tilde{B}^{kl} \frac{\partial \varphi_l^l}{\partial \xi^2} = 0$$

(2.1.51)

kde

$$\tilde{A}^{kl} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} \sqrt{g} v^1, \rho \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2}, -\rho \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2}, 0 \\ 0, \sqrt{g} v^1, 0, \frac{1}{\rho} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} \\ 0, 0, \sqrt{g} v^1, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \\ 0, \rho c^2 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2}, -\rho c^2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2}, \sqrt{g} v^1 \end{bmatrix} \quad (2.1.52)$$

$\tilde{B}^{kl} = \text{dtto } \tilde{A}^{kl}$ při stejných změnách jako u (2.1.48).

Klineární rovnice (2.1.36) nebo (2.1.51) s konstantními koeficienty (2.1.38) či (2.1.52) jsou již v matematice dobře zpracovány a za vhodných okrajových a počátečních podmínek, viz kap. 2.5.5 je dokázána existence a jednoznačnost řešení (Richtmayer, Morton, 1967; Godunov, 1971). Problémy stability a konvergence budou vyšetřovány právě pro tento typ lineárních rovnic. Obecný tvar rovnic, jejichž řešení v našich problémech připadá v úvahu, je

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^k}{\partial t} + \sum_{l=1} \tilde{A}^{kl} \frac{\partial \tilde{\varphi}^l}{\partial x^1} + \sum_{l=1} \tilde{B}^{kl} \frac{\partial \tilde{\varphi}^l}{\partial x^2} + \sum_{l=1} \tilde{C}^{kl} \frac{\partial \tilde{\varphi}^l}{\partial x^3} + \sum_{l=1} \tilde{D}^{kl} \tilde{\varphi}^l = f^k, \text{ pro } k=1,2,\dots \quad (2.1.53)$$

za okrajové podmínky

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \tilde{\varphi}^{\sim}(x,t) \text{ pro } t \in (0,T), \underline{x} \in \partial V \quad (2.1.54)$$

a počáteční podmínky

$$\tilde{\varphi}(x,0) = \tilde{\varphi}^{\sim}(x) \text{ pro } \underline{x} \in V. \quad (2.1.55)$$

Obě splňují podmínku kompatibility

$$\tilde{\varphi}(x,0) = \tilde{\varphi}(x) \quad (2.1.56)$$

Zde \tilde{D}^{kl} je nějaká konstantní matice a f^k je vektor pravé strany. V obecném případě zahrnujeme do vektoru f^k členy, závisující na $\frac{\partial^2 \varphi^l}{\partial x^i \partial x^j}$, které popisují vliv viskozity (I.6.5.15) a tepelné vodivosti (I.6.5.14).

2.1.4 Rovnice kvazijednorozměrného proudění dýzou

Vyšetřujeme proudění dýzou (kanálem) příčného rozměru $S(x)$ (např. ve směru osy $x^2 = y$). Předpokládáme, že tekutina proudí pouze ve směru osy $x^1 = x$, takže $v^1 = v$, $v^2 = v^3 = 0$ a proměnná φ (2.1.21) závisí pouze na x . Při popisu tekutin nemá vektor posunutí \underline{u} smysl ($\underline{u} = 0$) a vektor proměnných je

$$\underline{\varphi} = (\rho, \rho v, \rho e). \quad (2.1.57)$$

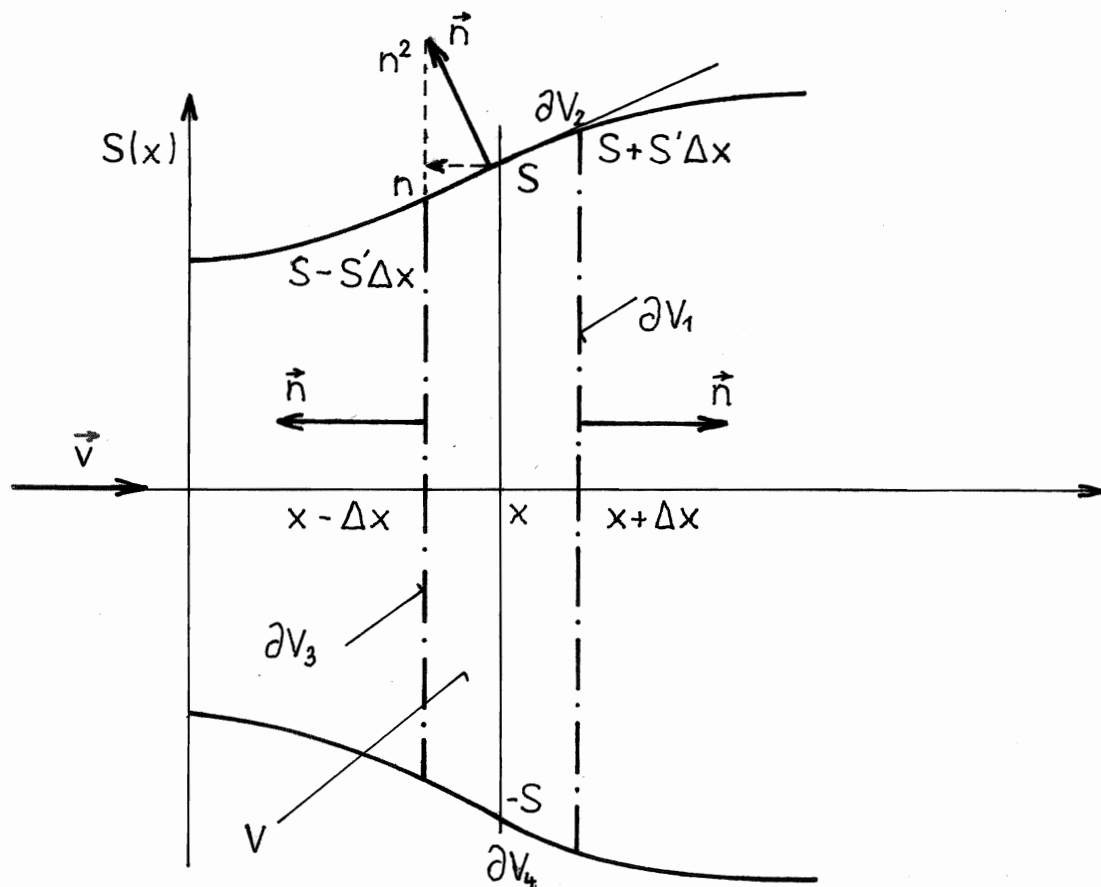
Tenzor napětí předpokládáme ve tvaru $t^{ij} = -p\delta^{ij} + t_{dis}^{ij}$.

S ohledem na konstitutivní vztahy pro Newtonovskou tekutinu (2.4.137) a (2.4.138) platí

$$t_{dis}^{11} = \frac{4\mu}{3} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.1.58)$$

kde μ je viskozita a λ je tepelná vodivost (Podrobněji viz kap. I.6.6). V důsledku toho, že rychlost závisí pouze na x je její gradient v příčném směru nulový ($\frac{\partial v}{\partial y} = 0$) a složka t_{dis}^{12} zahrnující tření je rovněž nulová. Třecí napětí je však možno zavést formálně pomocí veličiny $t_{dis}^{11} = \tau(v(x))$ závislé pouze na velikosti rychlosti. Uvážíme-li všechny uvedené předpoklady je vektor toků (2.1.22), s ohledem na definici e (2.1.24), roven

$$\hat{j}^1(\underline{\varphi}) = \hat{j}_{kon}^1 - \hat{j}_{dis}^1 \quad (2.1.59)$$



Obr. 2.3

Schématické znázornění kvazijednorozměrného proudění
dýzou s příčným rozměrem $S(x)$

kde

$$\begin{aligned}\hat{j}_{kon}^1(\varphi) &= (\rho v, \rho(v)^2 + p, (\rho e + p)v) \\ \hat{j}_{dis}^1(\varphi) &= (0, t_{dis}^{11}, t_{dis}^{11}v - q).\end{aligned}\quad (2.1.60)$$

Z hlediska lepšího formálního zápisu jsme komponentu produkce vnitřní energie v (2.1.23) zahrnuli do konvektivní a disipativní části toku, viz kap. 2.4.4. Druhá složka disipativní části toku odpovídá výměně hybnosti povrchem dýzy v důsledku vazkosti. Třetí složka reprezentuje výměnu energie v důsledku vazkých sil a vedení tepla. Vektor produkci (2.1.23) má tvar

Obr 2.3 →

$$\underline{g}(\varphi) = (0, \rho f, 0).\quad (2.1.61)$$

Napišeme rovnice bilance (2.1.13) pro povrch V na obr. 2.3. Element objemu je $dv = 2S dx dz$. Z formálních důvodů jsme zavedli třetí rozměr $x^3 = z$, i když předpokládáme, že úloha na souřadnici z nezávisí. Povrch $\partial V = \partial V_1 \cup \partial V_2 \cup \partial V_3 \cup \partial V_4$ má vnější normálu \underline{n} a elementy jednotlivých ploch postupně jsou (I.3.5.4)

$$\text{pro } \partial V_1 \quad d\underline{a} = (dy dz, 0, 0) = \underline{n} dy dz, \quad \underline{n} = (1, 0, 0)$$

$$\text{pro } \partial V_2 \quad d\underline{a} = (dy dz, dz dx, 0) = \underline{n} dx dz, \quad \underline{n} = \frac{(-S', 1, 0)}{\sqrt{1 + (S')^2}}$$

$$\text{pro } \partial V_3 \quad d\underline{a} = (dy dz, 0, 0) = \underline{n} dy dz, \quad \underline{n} = (-1, 0, 0)$$

$$\text{pro } \partial V_4 \quad d\underline{a} = (dy dz, dz dx, 0) = \underline{n} dx dz, \quad \underline{n} = \frac{(-S', -1, 0)}{\sqrt{1 + (S')^2}}$$

Obecný zákon (2.1.13) píšeme jako součet objemových integrálů (označeno indexem V) a povrchových integrálů (označeno indexy $\partial V_1, \partial V_2, \dots$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} 2\varphi \Big|_V S dx + \int_{-S-S'\Delta x}^{S+S'\Delta x} \hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_1} n_1 dy + \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_2} n_1 dx + \\ & + \int_{-S+S'\Delta x}^{S-S'\Delta x} \hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_3} n_1 dy + \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_4} n_1 dx = 2 \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \sigma(\varphi) \Big|_V S dx. \end{aligned} \quad (2.1.62)$$

Integraci podle z jsme vypustili. Druhý a čtvrtý integrál na levé straně upravíme tak, že toky $\hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_1}$, $\hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_3}$ rozvineme do Taylorovy řady v bodě x . Např.

$$\hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_1} = \hat{j}^1(\varphi(x+\Delta x)) = \hat{j}^1(\varphi(x)) + \frac{\partial \hat{j}^1(\varphi(x))}{\partial x} \Delta x + \dots \quad (2.1.63)$$

Pro tok $\hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_3}$ je u derivace znaménko minus. Dosadíme do "povrchových" integrálů odpovídající normály a integraci (užitím věty o střední hodnotě) dostáváme

$$\begin{aligned} & 4S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta x + 2S \hat{j}^1(\varphi) + 2S' \hat{j}^1(\varphi) \Delta x + 2S \frac{\partial \hat{j}^1(\varphi)}{\partial x} \Delta x + 2S' \frac{\partial \hat{j}^1(\varphi)}{\partial x} (\Delta x)^2 - \\ & - \frac{2S'}{\sqrt{1+(S')^2}} \hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_2} \Delta x - 2S \hat{j}^1(\varphi) + 2S' \hat{j}^1(\varphi) \Delta x + 2S \frac{\partial \hat{j}^1(\varphi)}{\partial x} \Delta x - \\ & - 2S' \frac{\partial \hat{j}^1(\varphi)}{\partial x} (\Delta x)^2 - \frac{2S'}{\sqrt{1+(S')^2}} \hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_4} \Delta x = 4S \sigma(\varphi) \Delta x. \end{aligned} \quad (2.1.64)$$

Hodnoty toků na stěnách dýzy ∂V_2 a ∂V_4 jsou vyznačeny odpovídajícími indexy.

Po úpravě vztahu (2.1.64) dostáváme obecný tvar zákonů bilance v kvazijednorozměrném přiblížení

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (S \hat{j}^1(\varphi)) = \sigma(\varphi) + \frac{S'}{2S \sqrt{1+(S')^2}} \left[\hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_2} + \hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_4} \right]. \quad (2.1.65)$$

Vidíme, že vedle obvyklého vektoru produkci (2.1.61) se objevuje dodatečná produkce

$$\frac{S'}{2S \sqrt{1+(S')^2}} \left[\hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_2} + \hat{j}^1(\varphi) \Big|_{\partial V_4} \right] = -\frac{1}{2S} \left[(n_1 \hat{j}^1(\varphi)) \Big|_{\partial V_2} + (n_1 \hat{j}^1(\varphi)) \Big|_{\partial V_4} \right], \quad (2.1.66)$$

která je určena střední hustotou toků přes oba povrchy dýzy.

S ohledem na tvar toků (2.1.60) můžeme pro konvektivní tok psát

$$-n_1 \hat{j}_{kon}^1(\varphi) = \left(0, \frac{S' p}{\sqrt{1+(S')^2}}, 0 \right), \quad (2.1.67)$$

protože $(\underline{v}n) = 0$ (stěna je nepropustná). Pro disipativní tok zavedeme označení

$$-n_1 \hat{j}_{dis}^1(\varphi) = \left(0, \frac{S' \tau}{\sqrt{1+(S')^2}}, \frac{S'(\tau v - q)}{\sqrt{1+(S')^2}} \right), \quad (2.1.68)$$

kde τ vyjadřuje napětí v důsledku vazkých sil, τv je měrný výkon vazkých sil a q je měrný přestup tepla přes stěnu.

Zanedbáme-li disipativní část toku a pro $(S')^2 \ll 1$ obdržíme obvyklý tvar kvazijednorozměrných Eulerových rovnic

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} S \rho v \\ S [\rho (v)^2 + p] \\ S (\rho e + p) v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f + \frac{S'}{S} p \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (2.1.69)$$

Tyto rovnice se nejčastěji používají k přibližnému výpočtu proudění stlačitelné nevazké tekutiny v technických aplikacích (Liepmann, Roshko, 1957; Dvořák, 1986). Významnou úlohu hrají rovněž při testování numerických metod mechaniky tekutin, protože je možno porovnávat jejich analytické řešení s řešením numerickým. Zvláště důležitá je z tohoto hlediska poloha a tvar rázové vlny.

Uvažujme nyní viskozitu a tepelnou vodivost. Dosadíme konstitutivní vztahy (2.1.58) do vektoru toků (2.1.59), takže zákony bilance v kvazijednorozměrném přiblížení (2.1.65) nabývají tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} S \rho v \\ S [\rho (v)^2 + p] \\ S (\rho e + p) v \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} S \mu \frac{\partial v}{\partial x} \\ \mu S \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{\kappa}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{(v)^2}{2} + \frac{\kappa}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f + \frac{S'}{S} (p - \tau) \\ -\frac{S'}{S} (\tau v - q) \end{pmatrix} . \quad (2.1.70)$$

Při úpravě jsme teplotu T ve vztahu (2.1.58)₂ nahradili vnitřní energií $u = c_v T$ a pomocí (2.1.24) jsme zavedli proměnné e, v .

$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ je Prandtlovo číslo, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ je isentropický exponent.

Třetí člen na levé straně rovnice (2.1.70) vyjadřuje vliv disipativních procesů uvnitř dýzy a dodatečné členy na pravé straně účinky tření o stěnu (členy s τ) a přívod či odvod tepla stěnou (člen s q).

2.2 Variační formulace problémů

Jedna z nejefektivnějších integrálních formulací je formulace variační, při které se vyšetřuje extrém nějakého funkcionálu. Funkcionál, značíme např. $\mathcal{F}(u)$, definujeme jako zobrazení prostoru funkcí $M(V)$ do reálné osy E_1 , značíme $\mathcal{F}: M(V) \rightarrow E_1$. Požadujeme, aby extrém funkcionálu nastával v bodě, který je řešením našeho problému a aby tento extrém byl alespoň lokálně ostrý. Funkcionál takovýchto vlastností je zvláště vhodný k popisu problému, který chceme řešit nějakou numerickou metodou. Podmínkou ostrého lokálního extrému máme zaručenou dobrou konvergenci metody, tzn., že použitím např. Rayleighovy - Ritzovy metody, viz dále, nalezneme to nejpřesnější řešení, které je v dané aproximaci možné.

Jedním takovým typickým funkcionálem je integrální výraz (2.1.12), ve kterém nahradíme $V=u$, takže

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &= \int_V (T(u) - p) u \, dv + \int_{\partial V} \tilde{G} u \, da = \\ &= \int_V \tilde{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x^i}\right) dv + \int_{\partial V} \tilde{G} u \, da.\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Funkce $\tilde{F}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x^i}\right), \tilde{G}$ jsou vztahem (2.2.1) určeny. Jejich konkrétní tvar je dán fyzikální povahou problému a nebo tvarem operátoru, ke kterému je variační formulace hledána.

Tento funkcionál nabývá nulové hodnoty právě když $u(x)$ je řešením rovnice (2.1.10). K vyšetřování extrému funkcionálu je třeba definovat jejich první a druhý diferenciál. ^{I.7.4)}

Definujeme diferenciál funkcionálu (2.2.1) v bodě $u(x) \in M(V)$ jako limitu

$$\delta \mathcal{F}(u; \delta u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(u + \varepsilon \delta u) - \mathcal{F}(u)}{\varepsilon} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(u + \varepsilon \delta u) \right|_{\varepsilon=0}, \quad (2.2.2)$$

kde $\varepsilon > 0$ a $\delta u(x) \in M(V)$ je nějaká libovolná odchylka (variace) od funkce $u(x)$. Podobně i druhý diferenciál je definován jako derivace

$$\delta^2 \mathcal{F}(u; \delta u, \delta u) = \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \mathcal{F}(u + \varepsilon \delta u) \right|_{\varepsilon=0}. \quad (2.2.3)$$

Nutná podmínka extrému funkcionálu v bodě u je

$$\delta \mathcal{F}(u, \delta u) = 0 \quad (2.2.4)$$

a funkcionál v bodě u má ostré lokální minimum (maximum), jestliže pro jeho druhý diferenciál platí

$$\delta^2 \mathcal{F}(u; \delta u, \delta u) > 0 \quad (< 0). \quad (2.2.5)$$

Podmínku (2.2.5) často nahrazujeme tzv. Legendrovou podmínkou (Miele, 1969)

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}(u, u_i)}{\partial u_i \partial u_j} \cdot \delta u_i \delta u_j > 0 \quad (< 0), \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.2.6)$$

která je nutnou podmínkou toho, aby funkcionál (2.2.1) měl lokální minimum (maximum) v bodě u , který je řešením rovnice (2.2.4).

Postupem stejným, jakým jsme vytvořili funkcionál (2.2.1), můžeme zkonstruovat funkcionál pro libovolný operátor T . Nebudeme však mít jistotu, že má příslušný funkcionál extrém pro rovnici (2.1.10) a že je splněna podmínka ostrého lokálního extrému (2.2.5). Budeme nyní hledat, jaké musí mít operátor vlastnosti, aby tyto podmínky byly splněny.

Předpokládejme, že operátor $T(u)$ je lineární a je tvaru (2.1.1). Utvoříme funkcionál

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \int_V T(u) u \, d\tau - 2 \int_V p u \, d\tau + 2 \int_{\partial V} \tilde{G} u \, da = \\ &= (T(u), u) - 2(p, u) + 2 \int_{\partial V} \tilde{G} u \, da = 0 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

a budeme vyšetřovat jeho chování v bodě $u(x)$, který je řešením lineární rovnice (2.1.10). Předpokládejme nějakou odchylku (variaci) $\delta u(x)$ od přesného řešení $u(x)$. Najdeme hodnotu funkcionálu (2.2.7) v bodě $u(x) + \varepsilon \delta u(x)$. Tudiž

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u + \varepsilon \delta u) &= (T(u + \varepsilon \delta u), u + \varepsilon \delta u) - 2(p, u + \varepsilon \delta u) + 2 \int_{\partial V} \tilde{G}(u + \varepsilon \delta u) \, da = \\ &= (T(u), u) - 2(p, u) + 2 \int_{\partial V} \tilde{G} u \, da + \varepsilon \left[(T(u), \delta u) - 2(p, \delta u) + 2 \int_{\partial V} \tilde{G} \delta u \, da \right] + \\ &+ \varepsilon (T(\delta u), u) + \varepsilon^2 (T(\delta u), \delta u). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Podmínka jeho extrému (2.2.4) s přihlédnutím k definici diferenciálu (2.2.2) je

$$\delta \mathcal{F}(u, \delta u) = (T(u), \delta u) + (T(\delta u), u) - 2(p, \delta u) + 2 \int_{\partial V} \tilde{G} \delta u \, da = 0. \quad (2.2.9)$$

Aby však extrém nastával v bodě $u(x)$, který je řešením rovnice (2.1.10) je třeba, aby platilo

$$(T(\delta u), u) = (u, T(\delta u)) = (T(u), \delta u), \text{ t.j. } T(u) = T^*(u) \quad (2.2.10)$$

viz definici adjungovaného operátoru (2.1.6). Operátorům splňujícím podmínku (2.2.10) říkáme samoadjungované. Z definice 2.1.6) plyne, že náš operátor (2.1.1) je samoadjungovaný jen tehdy, platí-li $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ a $b^i = 0$ pro $i, j = 1, 2, 3$.

Dále budeme zjišťovat, jaké další omezení na operátor plyne z podmínky ostrého lokálního extrému (2.2.5., 2.2.6). Nalezneme druhý diferenciál funkcionálu (2.2.7). Podle definice (2.2.3) musí platit

$$\delta^2 \mathcal{F}(u, \delta u, \delta u) = 2(T(\delta u), \delta u) > 0, (< 0). \quad (2.2.11)$$

Tudíž kvadratická forma $a^{ij}(x) \delta u_i \delta u_j$ musí být pozitivně (negativně) definitní^{1.7.5}, což je zajištěno, jestliže platí

$$\sum_{i,j=1}^3 a^{ij}(x) y^i y^j > \alpha \sum_{i=1}^3 (y^i)^2 \text{ pro } \alpha > 0, (< \text{ pro } \alpha < 0), \quad (2.2.12)$$

kde $y = (y^1, y^2, y^3)$ je nějaký reálný vektor (konkrétně $y^j \sim \delta u_j$).

Funkcionál (2.2.7) má v bodě $u(x)$ minimum, je-li kvadratická forma pozitivně definitní a maximum, je-li negativně definitní. Diferenciální rovnice druhého řádu (2.1.10), jejíž koeficienty u druhých variací splňují podmínku (2.2.12), se nazývá eliptická (Rektorys, 1974).

Uvážíme-li požadavky (2.2.10) a (2.2.12) kladené na tvar operátoru $T(u)$ a dosadíme je do definice funkcionálu (2.2.7), provedeme integraci per partes, tak dostáváme tzv. kvadratický funkcionál, jehož tvar je

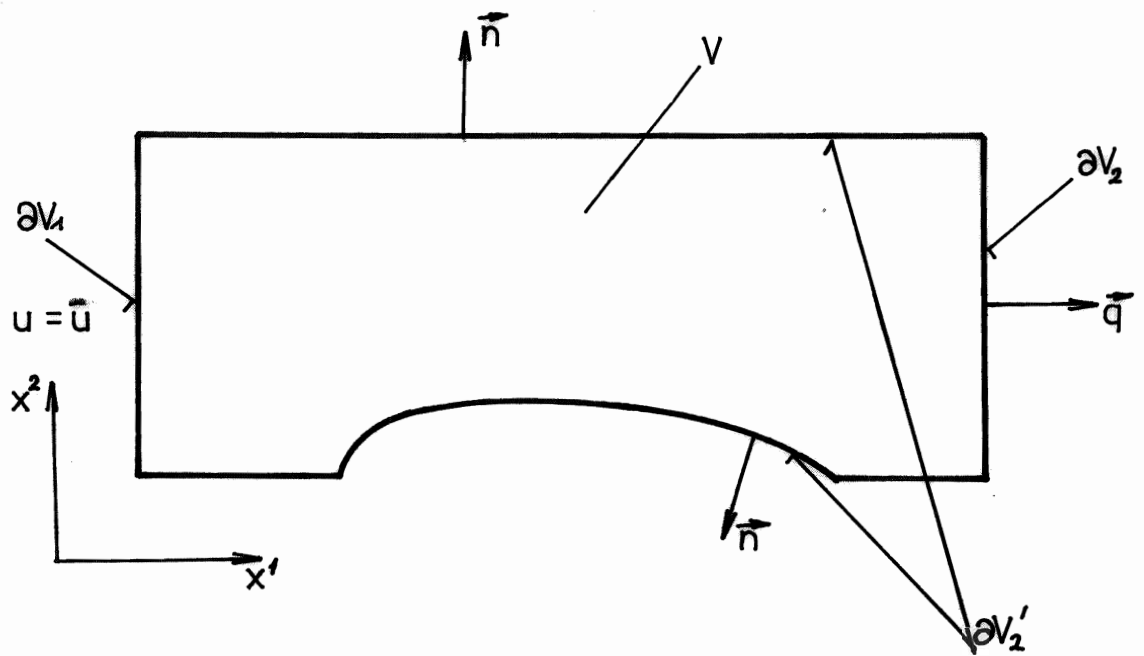
$$\frac{1}{2} \mathcal{F}(u) = \int_V \left[-\frac{1}{2} a^{ij}(x^l) \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} + cu^2 - pu \right] dV + \int_{\partial V} \left[\tilde{G} + a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} n_j \right] u da. \quad (2.2.13)$$

Tudíž, namísto řešení lineární diferenciální rovnice

$$T(u) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{ij}(x^l) \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) + cu = p \quad (2.2.14)$$

za okrajových podmínek (2.1.7) a (2.1.8), hledáme minimum kvadratického funkcionálu (2.2.13). Snadno se přesvědčíme, že podmínka (2.2.12) je ekvivalentní s podmínkou (2.2.6) pro kvadratický funkcionál (2.2.13). Jak bude ukázáno v kap. 2.3.4., lze podmínku ostrého lokálního extrému (2.2.5), resp. (2.2.6) použít i pro hledání funkcionálů typu (2.2.7) pro nelineární diferenciální operátory.

Uvedeme nyní dva příklady, na kterých budeme ilustrovat variační formulaci pro dva různé operátory. První z nich bude operátor, jehož koeficienty splňují podmínku (2.2.12), půjde tedy o eliptickou rovnici. Koeficienty druhého operátoru tuto podmínku nespĺňují, půjde o problém hyperbolický a ten je možno řešit integrální metodou jen zavedením dodatečného členu a respektováním existence reálných charakteristik, viz kap. 2.3.4.



obr. 2.4

Typická dvořozměrná oblast V často řešená v hydrodynamice (tzv. kanál) s typickými okrajovými podmínkami na hranici $\partial V = \partial V_1 + \partial V_2 + \partial V_2'$ - eliptický problém. Na hranici ∂V_1 je zadána hodnota funkce $u = \bar{u}$ na ∂V_2 tok \vec{q} a část hranice $\partial V_2'$ je neprostupná, tj. $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$.

Jako první příklad ukážeme variační formulaci pro Poissonovu rovnici ^{2,2)}

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} = p \quad x \in V \quad \text{2.3)} \quad (2.2.15)$$

s Dirichletovou podmínkou

$$u|_{\partial V - \partial V_2} = \bar{u} \quad (2.2.16)$$

na části hranice $\partial V - \partial V_2$ a s Neumannovou podmínkou

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} n^i = q_i n^i \quad \text{2.3)} \quad (2.2.17)$$

na zbylé části hranice ∂V_2 - viz obr. 2.4

n^i je jednotkový vektor normály elementu plochy.

2,2)

Popisuje např. proudění nestlačitelné, nevazké a tepelně nevodivé tekutiny.

2.3)

Sumaci přes $i, j = 1, 2, 3$ vyznačujeme explicitně. V celé práci platí sumační pravidlo, tj. sčítá se přes stejné indexy vystupující v součinu křížem. V kartézských souřadnicích platí $n^i = n_i$ pro $i = 1, 2, 3$, jinak viz dodatek I.D2.1

Poznámka:

Jelikož p reprezentuje jakýsi "zdroj" a q je tok (např. hmoty), tak v důsledku zákona bilance (např. hmotnosti) má tento problém řešení, jen když platí

$$\int_V p d\tau = \int_{\partial V} \sum_{i=1}^3 q_i n_i da. \quad (2.2.18)$$

Utvoříme funkcionál typu (2.2.7)

$$\int_V \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} u - 2pu \right] d\tau + 2 \int_{\partial V_1} (u - \bar{u}) u da + 2 \int_{\partial V_2} \sum_{i=1}^3 q_i u n_i da$$

Užitím integrace per partes a Gaussovy věty (2.1.3) je jeho konečný tvar

$$\mathcal{F}(u) = \int_V \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} \right)^2 + pu \right] d\tau - \int_{\partial V_2} \sum_{i=1}^3 q_i u n_i da. \quad (2.2.19)$$

Dirichletovu podmínku (2.2.16) jsme splnili tak, že řešení $u(x)$ hledáme na třídě funkcí, které této podmínce vyhovují, tzn., že na hranici $\partial V - \partial V_2$ je identicky splněno $u = \bar{u}$. Snadno se přesvědčíme, že nutná podmínka extrému tohoto funkcionálu

$$\delta \mathcal{F}(u, \delta u) = \int_V \left[- \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} + p \right] \delta u d\tau + \int_{\partial V_2} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x^i} - q_i \right) \delta u n_i da = 0 \quad (2.2.20)$$

je splněna právě tehdy, kdy je $u(x)$ řešením rovnice (2.2.15) za podmínek (2.2.16) a (2.2.17).

Podmínka ostrého lokálního minima (2.2.5) je splněna, protože druhý diferenciál je roven

$$\begin{aligned} d^2 \mathcal{F}(u, \delta u, \delta u) &= \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x^i} + \varepsilon \frac{\partial \delta u}{\partial x^i} \right)^2 + p(u + \varepsilon \delta u) \right] d\bar{v} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{\partial V_2} \sum_{i=1}^3 q_i(u + \varepsilon \delta u) n_i da \right] \right\} \Bigg|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_V \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x^i} \right)^2 d\bar{v} > 0. \end{aligned}$$

(2.2.21)

Jako druhý případ uvedeme variační formulaci problému popsání rovnici

$$a^{11}(x^i) \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2} + a^{22}(x^i) \frac{\partial^2 u}{(\partial x^2)^2} = p \quad x \in V \quad \text{pro } i=1,2, \quad (2.2.22)$$

kde koeficienty $a^{11}(x^i)$, $a^{22}(x^i)$ určíme tak, aby byl problém (rovnice) hyperbolický. Jinými slovy, budeme hledat takové reálné křivky $\eta^i = \eta^i(x^j)$, podél kterých není řešení $u(x^i)$ a jeho derivace $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ nezávislé. To zjistíme tak, že převedeme rovnici (2.2.22) do nějakých nových, zatím neznámých souřadnic

$$\eta^i = \eta^i(x^j), \quad \det \left| \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \right| \neq 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.2.23)$$

V nich má diferenciální rovnice (2.2.22) tvar

$$\begin{aligned} & \left[a^{11} \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} \right)^2 + a^{22} \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial x^2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{(\partial \eta^1)^2} + \left[a^{11} \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} \right)^2 + a^{22} \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{(\partial \eta^2)^2} + \\ & + 2 \left[a^{11} \frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} \frac{\partial \eta^2}{\partial x^1} + a^{22} \frac{\partial \eta^1}{\partial x^2} \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^1 \partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta^i} \frac{\partial^2 \eta^i}{(\partial x^i)^2} = p(\eta^i). \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Mějme na křivce $\eta^1(x^1, x^2) = \text{konst}$ zadané hodnoty $u(\eta^2)$, $\frac{\partial u(\eta^2)}{\partial \eta^1}$, tudíž hodnota funkce a její derivace jsou nějak závislé.

Ostatní derivace, které na této křivce můžeme dopočítat, jsou

$$\frac{\partial u(\eta^2)}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 u(\eta^2)}{\partial \eta^2 \partial \eta^1}, \frac{\partial^2 u(\eta^2)}{\partial \eta^2 \partial \eta^2}.$$

Tedy ze všech pěti derivací funkce u vystupujících v rovnici (2.2.24) máme zadány čtyři. Poslední neznámou derivaci $\frac{\partial^2 u(\eta^2)}{(\partial \eta^1)^2}$ můžeme vypočítat z rovnice (2.2.24), ale jen v tom případě, když koeficient u této derivace je různý od nuly. V těch případech, kdy je tento koeficient roven nule, tj.

$$a^{11} \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} \right)^2 + a^{22} \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial x^2} \right)^2 = 0 \quad (2.2.25)$$

existuje taková křivka $\eta^1 = \eta^1(x^1, x^2) = \text{konst}$, která je rovnicí (2.2.25) definována. Derivaci $\frac{\partial^2 u}{(\partial \eta^1)^2}$ potom nelze vypočítat a zadání okrajových podmínek pro rovnici (2.2.22), resp. (2.2.24) je přeurčené. Křivku $\eta^1 = \text{konst}$ nazýváme charakteristikou rovnice (2.2.22) a není možno na ní současně zadat jak hodnotu funkce u , tak i hodnotu její derivace $\frac{\partial u}{\partial \eta^1}$, ale jenom

jednu z nich. Rovnice (2.2.22), jejíž koeficienty a^{ii} jsou takové, že rovnice (2.2.25) může být rovnicí reálné křivky, nazýváme hyperbolickými. Jestliže taková reálná křivka existovat nemůže, je rovnice (2.2.22) eliptická (srovnej s podmínkou (2.2.12)) a lze zadávat i okrajové podmínky (2.1.9).

Podmínka (2.2.25) dává reálnou křivku, jestliže např.
 $a^{11} < 0, a^{22} > 0$.

Označíme

$$a^{11} = -(a)^2, \quad a^{22} = (b)^2, \quad a, b = \text{konst.} \quad (2.2.26)$$

Řešením rovnice (2.2.25) jsou křivky - charakteristiky - tvaru

$$\eta^1(x^1, x^2) = bx^1 + ax^2 = \text{konst}, \quad \eta^2(x^1, x^2) = bx^1 - ax^2 = \text{konst.} \quad (2.2.27)$$

Rovnice (2.2.24) má jednoduchý tvar

$$-(2ab)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^1 \partial \eta^2} = p(\eta^i). \quad (2.2.28)$$

Odtud plyne, že řešení $u(\eta^1, \eta^2)$ není podél charakteristik nezávislé a nelze tedy na charakteristikách zadávat libovolně jak hodnotu $u(\eta^i)$ tak její derivaci $\frac{\partial u}{\partial \eta^i}(\eta^j)$. Tento fakt musíme brát v úvahu při formulaci okrajových podmínek. Při daném tvaru oblasti V lze zadat okrajové podmínky

$$u = \bar{u}, \quad a^{ii} \frac{\partial u}{\partial x^i} = q^i \quad x \in \partial V, \quad i = 1, 2 \quad (2.2.29)$$

jen na určité části hranice ∂V_1 , viz obr. 2.5. Hodnoty

$u, \frac{\partial u}{\partial x^i}$ na zbylé části hranice se dopočítávají v průběhu řešení.

Je-li hranicí oblasti charakteristika $\eta^1 = \text{konst}$ můžeme na ní zadat jen jednu z hodnot $u(\eta^2)$ nebo $\frac{\partial u}{\partial \eta^1}(\eta^2)$ (Godunov, 1971).

Utvoříme z rovnice (2.2.22) s koeficienty (2.2.26) funkcionál typu (2.2.7) s ohledem na okrajové podmínky (2.2.29). Dirichletovu podmínku $u = \bar{u}$ splníme identicky tak, že budeme hledat řešení na třídě funkcí, které ji splňují, viz předchozí příklad. Upravíme dále tento funkcionál pomocí per partes na tvar (2.2.13), takže dostáváme

$$\mathcal{F}(u) = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \left[-(a)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x^1} \right)^2 + (b)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} \right)^2 \right] + pu \right\} d\bar{v} - \int_{\partial V_1} \sum_{i=1}^2 q_i u n_i da. \quad (2.2.30)$$

Stejně jako v předchozím případě bychom zjistili, že operátor

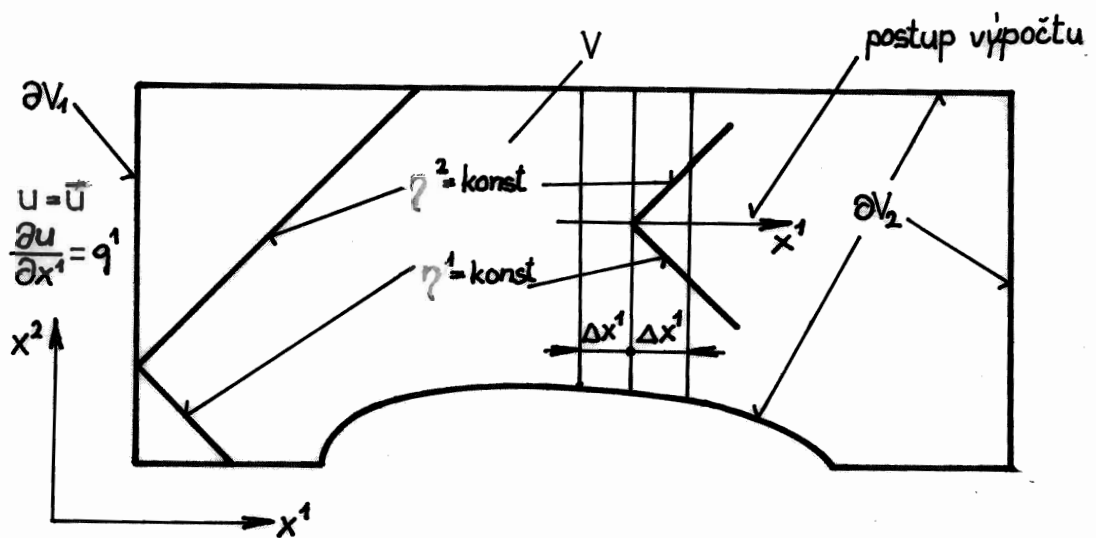
$$T(u) = -(a)^2 \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2} + (b)^2 \frac{\partial^2 u}{(\partial x^2)^2} \quad (2.2.31)$$

je samoadjungovaný (2.2.10), což je podmínka nutná k variační formulaci problému. Prověříme nyní podmínku ostrého lokálního extrému (2.2.5), tzn.

$$\delta^2 \mathcal{F}(u, \delta u, \delta u) = \int_V \left[-(a)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \delta u \right)^2 + (b)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \delta u \right)^2 \right] d\bar{v} \geq 0. \quad (2.2.32)$$

Je zřejmé, že tento výraz nemůže být pro všechny variace

$\frac{\partial \delta u}{\partial x^i}$ ani stále kladný, ani stále záporný. Není tedy



obr. 2.5

Okrajové podmínky (2.2.29) pro hyperbolický problém mohou být zadány jen na ∂V_1 . Na ∂V_2 se musí dopočítat. V případě, že je zadaná podmínka na části ∂V_2 (supersonické proudění kanálem) je nutno dopočítat podmínku na ∂V_1 .

Postup výpočtu viz kap. 2.3.4

splněna podmínka (2.2.5), nutná pro ostrý extrém funkcionálu (2.2.30). Tím není ani splněna podmínka konvergence řešení hyperbolického problému pomocí variační (integrální) metody (Rektorys, 1974; Collatz, 1970). Podmínky stability tohoto problému jsou vyšetřovány v kap. 2.3.4 a 2.3.5.

2.2.1 Galerkinova a Rayleighova-Ritzova metoda

Hledáme přibližné řešení diferenciální rovnice (2.1.10) za okrajových podmínek (2.1.11). Toto řešení $u(\underline{x})$ budeme aproximovat na celé řešené oblasti V pomocí aproximačních funkcí $\psi_k(\underline{x})$, které jsou lineárně nezávislé a patří do nějaké úplné posloupnosti funkcí (2.4) (Rektorys, 1974), tj.

$$u(\underline{x}) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k(\underline{x}), \quad (2.2.33)$$

kde α_k jsou dosud neurčené parametry.

2.4)

Říkáme, že posloupnost lineárně nezávislých funkcí ψ_k je úplná, jestliže číslo N a konstanty (parametry) α_k mohou být nalezeny tak, že pro nějakou libovolně danou funkci $u(\underline{x}) \in L_2$ platí

$$\left\| u - \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k \right\| < \varepsilon$$

kde $\varepsilon > 0$ je nějaká libovolně malá veličina.

Vhodnou volbou některých parametrů α_k splníme okrajovou podmínku (2.1.11). Dostáváme tak třídu funkcí $u(\underline{x})$ splňujících okrajové podmínky, tj.

$$u(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{\bar{N}} \beta_k \psi_k(\underline{x}), \quad (2.2.34)$$

u které zbývá určit parametry β_k z podmínky

$$\int_V \left[T \left(\sum_{k=1}^{\bar{N}} \beta_k \psi_k(\underline{x}) \right) - p(\underline{x}) \right] \psi_l(\underline{x}) dV = 0 \quad \text{pro } l=1,2,\dots,\bar{N}. \quad (2.2.35)$$

Tomuto určování neznámých parametrů β_k se říká Galerkinova metoda (Rektorys, 1974; Finlayson, 1972). Je to naprosto obecný postup, avšak jeho konvergence k přesnému řešení problému není ničím zaručena. Z důvodů konvergence se proto častěji obracíme k metodě založené na variační formulaci.

Mějme variační formulaci problému ve tvaru funkcionálu (2.2.1), který splňuje podmínky extrému (2.2.9., 2.2.11). Představíme si řešení opět ve tvaru řady (2.2.34). Pro jeho variaci platí

$$\delta u(x) = \sum_{k=1}^{\bar{N}} \psi_k(x) \delta \beta_k \quad (2.2.36)$$

Extrém funkcionálu hledáme vzhledem k neznámým parametrům β_k , které určíme z podmínky extrému

$$d\mathcal{F}(u, \delta \beta_k) = \sum_{l=1}^{\bar{N}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta_l} \delta \beta_l = 0 \quad \text{pro } k=1, 2, \dots, \bar{N}. \quad (2.2.37)$$

Tímto způsobem nalezneme z dané třídy funkcí (2.2.34) tu, která nám hledané řešení aproximuje nejlépe. Tento způsob nazýváme Rayleighovou--Ritzovou metodou. Nejrozšířenější varianta obou metod je metoda konečných prvků, ve které se vhodným způsobem (viz dále) volí aproximace řešení (2.2.34).

2.3 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků spočívá v tom, že řešenou oblast V rozdělíme na konečný počet (např. E) podoblastí - konečných prvků V_e - tak, že jejich sjednocení dává celou oblast, tj.

$$V = \bigcup_{e=1}^E V_e.$$

Řešení $u(x)$ operátoru, např. (2.1.10) včetně okrajových podmínek (2.1.11), je vyjádřeno na každém konečném prvku V_e pomocí lineární kombinace aproximačních funkcí $\psi_k(x)$, čili ve tvaru $u(x) = \sum_{k=1}^n u_k \psi_k(x)$. Koeficienty u_k jsou určeny tak, aby se přibližné řešení lišilo co nejméně od přesného, nejen na konečném prvku V_e , ale i na celé oblasti V . K určení těchto koeficientů používáme nejčastěji některou z metod, uvedených v kap. 2.2.1.

Metoda konečných prvků slaví největší úspěchy při řešení eliptických problémů hlavně díky velké možnosti dobře aproximovat řešenou oblast i hledané řešení. V posledních letech se však tato metoda začíná s úspěchem používat i pro problémy hyperbolicke a problémy evoluční (kap. 2.3.4, 2.4.2 a 2.4.3).

2.3.1 Základní princip metody konečných prvků

Hledejme přibližné řešení nějaké lineární diferenciální rovnice

$$T(u(x)) - p(x) = 0 \quad \text{pro } x \in V \quad (2.3.1)$$

za okrajových podmínek typu (2.1.11) a (2.1.9), formálně zapsaných jako

$$\varphi(u(x)) - q(x) = 0 \quad \text{pro } x \in \partial V. \quad (2.3.2)$$

Zde V je řešená oblast a ∂V její hranice s vnější normálou (viz Dodatek I.Dl.1). K nalezení řešení vyjdeme např. od Galerkinovy metody (2.2.35), použité však jen pro malý element objemu V_e , t.j.

$$\int_{V_e} \left[T \left(\sum_{k=1}^{N_e} u_k \psi_k(x) \right) - p(x) \right] \psi_l(x) dV + \int_{\partial V_e} \left[\varphi \left(\sum_{k=1}^{N_e} u_k \psi_k(x) - q(x) \right) \right] \psi_l(x) da = 0$$

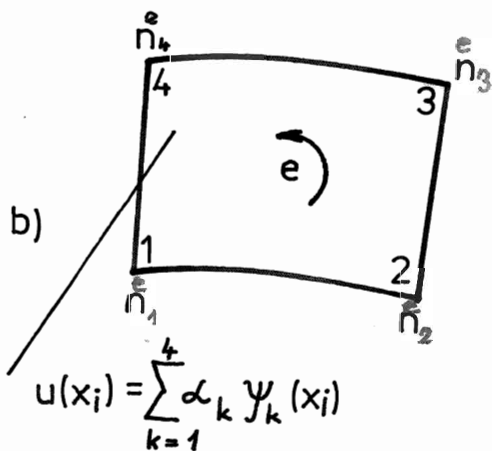
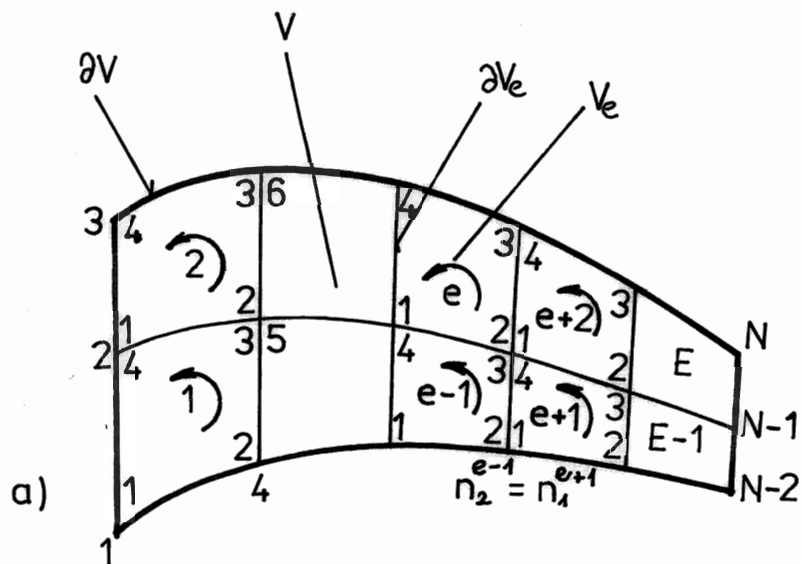
(2.3.3)

pro $k, l = 1, 2, \dots, N_e$.

Symbolem ∂V_e jsme označili okraj (hranici) konečného prvku V_e . Na každém konečném prvku jsme aproximovali řešení pomocí řady

$$u(x) = \sum_{k=1}^{N_e} u_k \psi_k(x), \quad (2.3.4)$$

kde $\psi_k(x)$, $k=1, 2, \dots, N_e$ jsou aproximační funkce příslušného prvku, jde většinou o polynomy různého stupně, viz kap. 2.3.2. Konstanty u_k určíme řešením rovnic (2.3.3), čímž je nalezeno řešení rovnice (2.3.1) na V_e . Jsou to hodnoty hledaného řešení a nebo jeho derivací v jednotlivých nádech konečného



č. k.prvku	Vztah mezi lokální a globální notací			
e	n_1^e	n_2^e	n_3^e	n_4^e
1	1	4	5	2
2	2	5	6	3

obr. 2.6

- a) Rozdělení oblasti V na čtyřúhelníkové konečné prvky
- b) Vztah n_k^e mezi lokální notací nódů $k = 1, 2, 3, 4$ pro e -tý konečný prvek V_e a notací globální $n = 1, 2, \dots, N$ pro řešenou oblast V .

prvku. Hodnoty derivací $\frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, \dots$ to jsou jen v tom případě, požadujeme-li jejich spojitost i mezi prvky.

Celou řešenou oblast rozdělíme na E disjunktčních konečných prvků tak, že platí $V = \bigcup_{e=1}^E V_e$. Řešení rovnice (2.3.1) na celé oblasti V nalezeneme součtem podmínek (2.3.3) pro všechny konečné prvky, tj.

$$\sum_{e=1}^E \int_{V_e} \left[T \left(\sum_{k=1}^{N_e} u_k \psi_k(x) \right) - p(x) \right] \psi_n(x) dV + \sum_{e=1}^E \int_{\partial V_e} \left[\varphi \left(\sum_{k=1}^{N_e} u_k \psi_k(x) \right) - q(x) \right] \psi_n(x) da = 0, \quad (2.3.5)$$

kde $n = 1, 2, \dots, N$ průběhá úplný počet neznámých u_1, \dots, u_N pro celý objem V (viz kap. 2.3.3). Jeden konkrétní případ vzájemného vztahu mezi číslováním neznámých na e -tém konečném prvku (pro $N_e = 4$, $E = 10$), tzv. lokální notací a číslováním pro celou oblast (pro $N = 18$), tzv. globální notací, je uveden na obr. 2.6. Vzhledem k tomu, že se povrchové integrály mezi sousedními konečnými prvky vzájemně ruší, sčítá se ve druhém výrazu (2.3.3) jen přes ty prvky, které obsahují část hranice ∂V . Hledané řešení pro celou oblast lze složit z řešení (2.3.3) na jednotlivých prvcích, které označíme

$$u_e(x) = \sum_{k=1}^{N_e} u_{n_k^e} \psi_{n_k^e}(x) \quad (2.3.6)$$

viz obr. 2.6. Celé řešení potom je

$$u(x) = \sum_{e=1}^E u_e(x) \quad (2.3.7)$$

obr. 2.6 →

Tvar konečného prvku (viz dále) může být relativně libovolný; mohou to být úsečky (intervaly délky Δx) v jednorozměrném případě, trojúhelníky, čtyřúhelníky i s různě zakřivenými stranami v případě dvourozměrném. Rozšíření na vícerozměrné úlohy nečiní problémy. Z hlediska přesnosti výpočtu je výhodné, když jsou všechny konečné prvky přibližně stejně velké a podobného tvaru.

Aproximační funkce (viz dále) musí splňovat podmínku přípustnosti a podmínku úplnosti. Podmínku přípustnosti splňují ty aproximační funkce $\psi_k(x)$, které zajišťují spojitost řešení $u(x)$ (vyžaduje-li si to typ úlohy, tak i jeho derivace) v nódech (uzlech sítě) a tudíž koeficienty u_k v nich mají definovanou hodnotu. Podmínka úplnosti znamená, že při zmenšování velikosti konečného prvku je možné hledanou funkci a tak i všechny její derivace považovat na tomto prvku za konstantu.

2.3.2 Aproximační funkce

Aproximační funkce $\psi_k(x^j)$ užívané v technice konečných prvků vždy úzce souvisí s tvarem konečného prvku. Z numerického hlediska je vhodné aproximovat nějakými aproximačními funkcemi i tvar řešené oblasti. Z toho důvodu se zavádějí tzv. izoparametrické konečné prvky, jejichž strany jsou vždy aproximovány stejnými funkcemi jako hledané řešení. Takové konečné prvky jsou vybaveny vlastní geometrií ve vlastních souřadnicích ξ^i , která má následující vztah ke geometrii ve fyzikálních souřadnicích

$$x^i(\xi^j) = \sum_{k=1}^{N_e} (x^i)_k \psi_k(\xi^j) \quad \text{pro } i, j = 1, 2, 3. \quad (2.3.8)$$

Zde $(x^i)_k$ jsou souřadnice nódů ve fyzikální rovině, viz obr. 2.7. Dvourozměrná varianta nejčastěji používaných izoparametrických konečných prvků je na obr. 2.7, kde N_e je postupně 3, 4, 6, 16. K nim příslušné aproximační funkce jsou tyto:

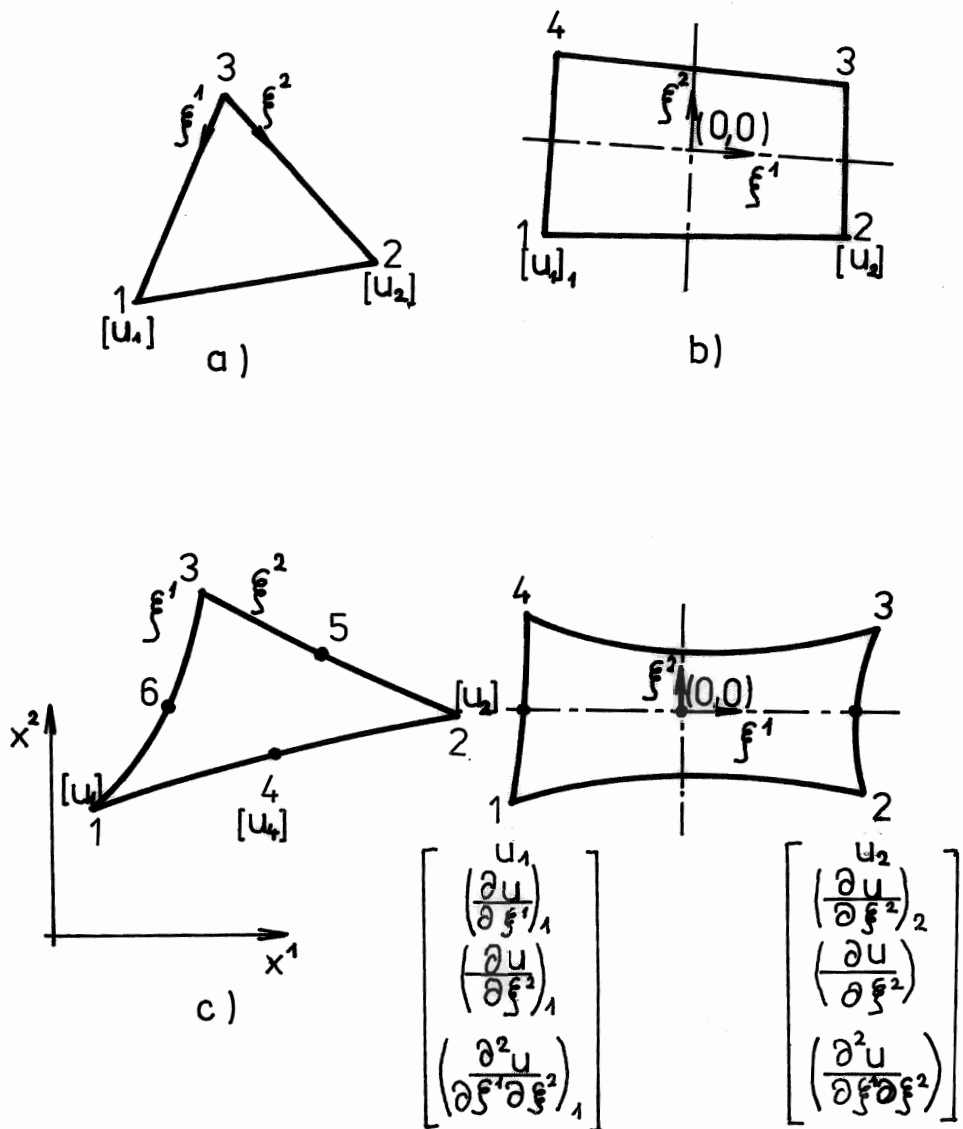
$$\psi_j = \xi^j, \quad \text{kde } \xi^3 = 1 - \xi^1 - \xi^2 \\ \text{pro } j = 1, 2, 3; \quad \xi^1, \xi^2 \in \langle 0, 1 \rangle \quad (2.3.9)$$

viz obr. 2.7.a)

$$\psi_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 - \xi^2), \quad \psi_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 - \xi^2), \\ \psi_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 + \xi^2), \quad \psi_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 + \xi^2) \\ \text{pro } \xi^1, \xi^2 \in \langle -1, 1 \rangle$$

(2.3.10)

viz obr. 2.7.b)



Obr. 2.7

Různé tvary izoparametrických dvourozměrných
konečných prvků

a) trojúhelníkový

b) bilineární

c) trojúhelníkový kvadratický

d) čtyřúhelníkový se spojitými derivacemi v nódech

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= (2\xi^1 - 1)\xi^1, & \psi_4 &= 4\xi^1\xi^2, & \text{kde } \xi^3 &= 1 - \xi^1 - \xi^2 \\
 \psi_2 &= (2\xi^2 - 1)\xi^2, & \psi_5 &= 4\xi^2\xi^3, & \xi^1, \xi^2 &\in \langle 0, 1 \rangle \\
 \psi_3 &= (2\xi^3 - 1)\xi^3, & \psi_6 &= 4\xi^3\xi^1
 \end{aligned}$$

(2.3.11)

viz obr. 2.7.c)

obr. 2.7

Tímto stupněm aproximace zajistíme pouze spojitost řešení (2.3.6) resp. souřadnic (2.3.8). Chceme-li však zajistit i spojitost derivací, je třeba použít složitějších aproximačních funkcí (např. Hermiteových polynomů, (Connor, Brebia, 1976)). Pro případ spojitých 1. derivací a spojitě smíšené derivace, viz obr. 2.7 d) mají aproximační funkce tvar (Maršik, Šafařík, 1983)

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= F_0(\xi^1) F_0(\xi^2), & \psi_5 &= F_1(\xi^1) F_0(\xi^2) \\
 \psi_2 &= 2D_0(\xi^1) F_0(\xi^2), & \psi_6 &= 2D_1(\xi^1) F_0(\xi^2) \\
 \psi_3 &= 2F_0(\xi^1) D_0(\xi^2), & \psi_7 &= 2F_1(\xi^1) D_0(\xi^2) \\
 \psi_4 &= 4D_0(\xi^1) D_0(\xi^2), & \psi_8 &= 4D_1(\xi^1) D_0(\xi^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_9 &= F_1(\xi^1) F_1(\xi^2), & \psi_{13} &= F_0(\xi^1) F_1(\xi^2) \\
 \psi_{10} &= 2D_1(\xi^1) F_1(\xi^2), & \psi_{14} &= 2D_0(\xi^1) F_1(\xi^2) \\
 \psi_{11} &= 2F_1(\xi^1) D_1(\xi^2), & \psi_{15} &= 2F_0(\xi^1) D_1(\xi^2) \\
 \psi_{12} &= 4D_1(\xi^1) D_1(\xi^2), & \psi_{16} &= 4D_0(\xi^1) D_1(\xi^2), & (2.3.12)
 \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} F_0(s) &= 1 - 3s^2 + 2s^3, & F_1(s) &= 3s^2 - 2s^3 \\ D_0(s) &= s - 2s^2 + s^3, & D_1(s) &= -s^2 + s^3 \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

při $s = \frac{1 + \xi^i}{2}$, pro $i = 1, 2$, $\xi^i \in \langle -1, 1 \rangle$.

Zavedeme zkrácené označení

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}, & \hat{\psi}_2 &= \{\psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8\} \\ \hat{\psi}_3 &= \{\psi_9, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}\}, & \hat{\psi}_4 &= \{\psi_{13}, \psi_{14}, \psi_{15}, \psi_{16}\}. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Aproximace geometrie konečného prvku je

$$\begin{aligned} x^i(\xi^j) &= (x^i)_1 \psi_1^j + \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^1}\right)_1 \psi_2^j + \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^2}\right)_1 \psi_3^j + \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}\right)_1 \psi_4^j + \\ &+ (x^i)_2 \psi_5^j + \dots + \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}\right)_4 \psi_{16}^j = \sum_{k=1}^4 (\hat{x}^i)_k \hat{\psi}_k. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Podobně je dána i aproximace řešení na konečném prvku

$$\begin{aligned} u(\xi^j) &= u_1 \psi_1^j + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^1}\right)_1 \psi_2^j + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^2}\right)_1 \psi_3^j + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}\right)_1 \psi_4^j + \\ &+ u_2 \psi_5^j + \dots + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}\right)_4 \psi_{16}^j = \sum_{k=1}^4 \hat{u}_k \hat{\psi}_k. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Pro zkrácení zápisu jsme zavedli vektory

$$\begin{aligned} \hat{x}^i_k &= \left\{ (x^i)_k, \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^1}\right)_k, \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^2}\right)_k, \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}\right)_k \right\} \\ \hat{u}_k &= \left\{ u_k, \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^1}\right)_k, \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^2}\right)_k, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}\right)_k \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Aproximační funkce pro jednorozměrné problémy získáme redukcí funkcí (2.3.10), pro případy vyžadující spojitě jen řešení a nebo redukcí (2.3.12) pro případy se spojitou 1. derivací.

Odvodíme základní geometrické vlastnosti na konečných prvcích e aproximačními funkcemi (2.3.9) až (2.3.12). Jde o element délky, elementy plochy a objemu, viz kap. I.3.5. a transformaci gradientu, které odvodíme z transformačních vztahů (2.3.8., 2.3.15). Postup ukážeme jen pro dvourozměrný případ. Tenté postup lze poměrně snadno zúžit či rozšířit na případ jednorozměrný či trojrozměrný.

Matice transformace mezi diferenciály souřadnic dx^i a $d\xi^j$ konečného prvku plyne ze vztahu

$$dx^i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} d\xi^j, \quad \text{pro } i, j = 1, 2, \quad (2.3.18)$$

kde

2.5)

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_e} (x^i)_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi^j},$$

$$g_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^j} \delta_{rs}, \quad \text{pro } i, j, r, s = 1, 2. \quad (2.3.19)$$

jsou postupně matice transformace a metrický tenzor (viz I. D2:6) Determinant této matice je roven jakobiánu transformace (2.3.18),

tj.

$$\det \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) = \sqrt{g} = \frac{1}{2!} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^l} e_{ij3} e^{kl3} = \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1}$$

(2.3.20)

pro $i, j, k, l = 1, 2$ (srovnej s i. D2.55)₂.

2.5)

Jsou-li prvky matice parciální derivace, např. $\frac{\partial a^i}{\partial y^j}$ pak horní index (tj. index i) je vždy řádkový a dolní index je sloupcový.

K výpočtu gradientu v lokálních souřadnicích ξ^j je třeba

i matice inverzní $\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}$ k matici $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$. Je definována

vztahem $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} = \delta^i_i$

a ve dvourozměrném případě do-

stáváme (3.15)

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{cof} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & -\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \end{bmatrix}$$

(2.3.21)

Pro gradient řešení pak díky vztahu (2.3.21) platí

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial u}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{N_e} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} u_k = \sum_{k=1}^{N_e} B_{ik} u_k$$

(2.3.22)

V případě aproximačních funkcí (2.3.9), (2.3.10), (2.3.11) je hodnota řešení v k-tém nůdu, (srovnej s obecným vztahem (2.3.4)) rovna u_k . Matici B_{ik} , kterou jsme pro jednoduchost zavedli v posledním vztahu je dána součinem

$$B_{ik} = \frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi^s} \quad (2.3.23)$$

Avšak, pro aproximační funkce (2.3.12), je ve vztazích (2.3.16 a 2.3.22) na místo u_k vektor (2.3.17)₁ \hat{u}_k , který obsahuje i derivace řešení. Při výpočtu požadujeme, aby měly derivace fyzikální velikost (viz kap. I.D2.6). Užitím metrického tenzoru (2.3.19)₂ a vzorců (I.D2.76) můžeme derivace podle vnitřních souřadnic ξ^i vyjádřit pomocí jejich fyzikálních velikostí (2.6)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi^1}\right)_k = \left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\right)_k \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^{(1)}}\right)_k, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^2}\right)_k = \left(\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\right)_k \left(\frac{\partial u}{\partial \xi^{(2)}}\right)_k,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}\right)_k = \left(\sqrt{\frac{g}{g_{11} g_{22}}}\right)_k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^{(1)} \partial \xi^{(2)}}\right)_k \quad \text{pro } k=1, 2, \dots, 4. \quad (2.3.24)$$

2.6)

Fyzikální velikost složky příslušné veličiny označujeme indexem v závorce.

Derivace (2.3.24) dosadíme do vektorů \hat{u}_k (2.3.17), resp. \hat{x}_k^i v případě zadávání geometrie. Pomocí nich je řešení (2.3.16), jeho derivace (2.3.22) či geometrie (2.3.15) na konečném prvku vyjádřeno fyzikálními velikostmi

Neznámé hodnoty u_k nalezneme jako řešení soustavy rovnic (2.3.5) (v drtivé většině lineární). Koeficienty této soustavy jsou určeny integrací přes objem V_e konečného prvku, kterou formálně označíme takto

$$\int_{V_e} f(x^i) d\tau = \int_{V_e} f(\xi^i) \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \quad (2.3.25)$$

a po jeho povrchu ∂V_e formálně označenou jako

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_e} q^i n_i da &= \int_{\partial V_e} [q^1 dx^2 dx^3 + q^2 dx^3 dx^1 + q^3 dx^1 dx^2] = \\ &= \int_{\partial V_e} q^1 \sqrt{g} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} d\hat{a}_1 + q^2 \sqrt{g} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} d\hat{a}_1 + q^3 \sqrt{g} \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} d\hat{a}_3. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Element objemu $d\tau$ se transformuje podle vztahu (I.3.5.17) a element plochy $n_i da$ podle (I.3.5.4), (I.3.5.5). Používáme vnější normálu n_i (ID1.2). Element plochy v lokálních souřadnicích konečného prvku V_e jsme označili

$$d\hat{a} = (d\hat{a}_1, d\hat{a}_2, d\hat{a}_3) = (d\xi^2 d\xi^3, d\xi^3 d\xi^1, d\xi^1 d\xi^2). \quad (2.3.27)$$

Integraci (2.3.25., 2.3.26) snadno zredukujeme na integraci ve dvourozměrném prostoru se souřadnicemi x^1, x^2 , resp. ξ^1, ξ^2 tak, že položíme $dx^3 = d\xi^3 = 1$ a $q^3 = 0$ viz obr. 2.8. Ponecháme-li stejné označení jako v trojrozměrném případě, tak

můžeme transformaci pro dvourozměrný "objem" psát ve tvaru

$$d\bar{v} = dx^1 dx^2 = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2. \quad (2.3.28)$$

S ohledem na (2.3.21) lze podobně pro jednorozměrnou plochu (integraci po křivce) napsat

$$\begin{aligned} (q^1 n_1 + q^2 n_2) da &= (q^1 dx^2 - q^2 dx^1) \wedge dx^3 = \\ &= \left[q^1 \left(\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} d\xi^2 + \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} d\xi^1 \right) - q^2 \left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} d\xi^2 + \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} d\xi^1 \right) \right] \wedge d\xi^3 \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

pro $dx^1 = (dx^1, 0, 0)$, $d\xi^1 = (d\xi^1, 0, 0)$, ... atd. pro ostatní vektory (srovnej s (3.5.3)). Při úpravě jsme použili antisymetrické vlastnosti vnějšího součinu, tj. $dx^3 \wedge dx^1 = -dx^1 \wedge dx^3$

a $d\xi^3 \wedge d\xi^1 = -d\xi^1 \wedge d\xi^3$ (I.3.14). S ohledem na předpoklad $dx^3 = d\xi^3$ platí

$$\begin{aligned} (q^1 n_1 + q^2 n_2) da &= -q^2 dx_1 + q^1 dx^2 = \left(-q^2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} + q^1 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} \right) d\xi^1 + \\ &+ \left(-q^2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} + q^1 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} \right) d\xi^2, \end{aligned} \quad \begin{matrix} 2.7) \\ (2.3.30) \end{matrix}$$

přičemž kladná hodnota tohoto integrálu značí tok bilancované veličiny ven z konečného prvku (důsledek vnější normály, tj. $qn > 0$).

2.7)

Stejný vztah dostáváme, jestliže transformujeme přímo křivkový integrál, tj. užitím vzorce (I.3.5.1) platí

$$\int_{\partial V_e} \omega_i dx^i = \int_{\partial V_e} \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 = \left(\omega_1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} + \omega_2 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} \right) d\xi^1 + \left(\omega_1 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} + \omega_2 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} \right) d\xi^2 \quad 1)$$

a při $\omega_1 = -q^2$, $\omega_2 = q^1$ obdržíme vztah (2.3.30).

Např. pro stranu 3 4, viz obr. 2.8a) tj. $\xi^2 = 1$ dostáváme (2.8)

$$\int_3^4 -q^2 dx^1 + q^1 dx^2 = \int_1^{-1} \left[-q^2(\xi^1) \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} + q^1(\xi^1) \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} \right] d\xi^1 \Big|_{\xi^2=1} \quad (2.3.31)$$

obr. 2.8 →

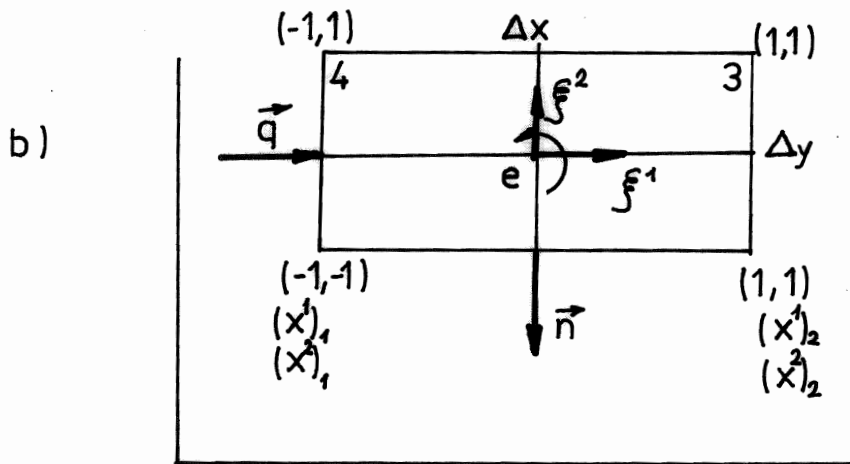
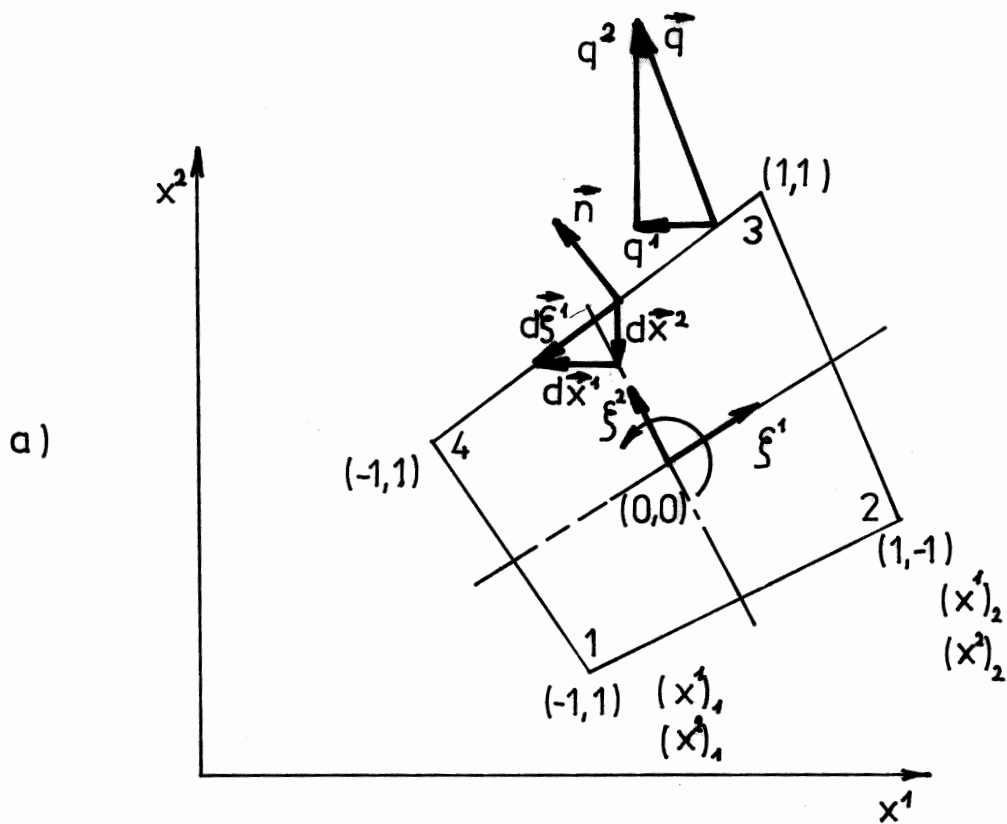
Pro smíšenou okrajovou podmínku (2.1.9), např. $\int_{\partial V_e} \text{konst } n da$ je třeba určit velikost elementu plochy (I3.5.7), tj. $da_i da_j \delta^{ij} = (da)^2$. Ve dvourozměrném prostoru pak stejnou úpravou jako výše odvodíme

$$\begin{aligned} (n_1 da, n_2 da) &= (dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1) = (dx^2 \wedge dx^3, -dx^1 \wedge dx^3) = \\ &= (dx^2 dx^3, -dx^1 dx^3) \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

a pro velikost elementu hranice platí (pro $dx^3 = 1$)

$$da = \left[(dx^2)^2 + (dx^1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} d\xi^2 \right)^2 + \left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} d\xi^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(2.3.33)



obr. 2.8

Znázornění integrace po hranici bilineárního
konečného prvku

a) obecného čtyřúhelníkového

b) rovnoběžného s osami x^1 , x^2 .

Např. pro stranu 3 4 platí^{2.8)}

$$\text{konst} \int_3^4 u da = -\text{konst} \int_1^{-1} u(\xi^1) \left[\left(\frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi^1 \Big|_{\xi^2=1}$$

(2.3.34)

2.8)

Pro případ bilineárních aproximačních funkcí (2.3.10) je geometrie (2.3.8) izoparametrického konečného prvku, viz obr. 2.8, dána maticí transformace (2.3.19), jejíž prvky jsou

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \right) = [(x^1)_2 - (x^1)_1] \left(\frac{1 - \xi^2}{4} \right) + [(x^1)_3 - (x^1)_4] \left(\frac{1 + \xi^2}{4} \right)$$

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \right) = [(x^1)_4 - (x^1)_1] \left(\frac{1 - \xi^1}{4} \right) + [(x^1)_3 - (x^1)_2] \left(\frac{1 + \xi^1}{4} \right)$$

$$\left(\frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} \right) = [(x^2)_2 - (x^2)_1] \left(\frac{1 - \xi^2}{4} \right) + [(x^2)_3 - (x^2)_4] \left(\frac{1 + \xi^2}{4} \right)$$

$$\left(\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} \right) = [(x^2)_4 - (x^2)_1] \left(\frac{1 - \xi^1}{4} \right) + [(x^2)_3 - (x^2)_2] \left(\frac{1 + \xi^1}{4} \right)$$

1)

Pro stranu 3 4 dostáváme

$$\int_3^4 -q^2 dx^1 + q^1 dx^2 = \int_1^{-1} \left\{ -q^2(\xi^1, \xi^2=1) \frac{[(x^1)_3 - (x^1)_4]}{2} + q^1(\xi^1, \xi^2=1) \frac{[(x^2)_3 - (x^2)_4]}{2} \right\} d\xi^1$$

$$\text{konst} \int_3^4 u da = -\text{konst} \int_1^{-1} u(\xi^1, \xi^2=1) \left[\frac{[(x^2)_3 - (x^2)_4]^2}{4} + \frac{[(x^1)_3 - (x^1)_4]^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} d\xi^1$$

ii)

a užitím vztahů (2.3.30), (2.3.33) odvodíme analogické výrazy i pro ostatní strany.

Znaménko minus je voleno proto, že velikost hranice
musí být vždy kladná.

$$\int_3^4 da$$

Vztahy (2.3.25, 2.3.28, 2.3.30, 2.3.32) nám dovolují vypočítat koeficienty v rovnicích (2.3.5). Vzhledem k tomu, že pro konečné prvky s vyšším stupněm aproximačních funkcí, např. (2.3.10) až (2.3.12) je velmi obtížné vypočítat uvedené integrály analyticky, užívá se numerická integrace, např. Gaussova kvadratura (Ralston, 1978).

2.3.3 Bilineární izoparametrické konečné prvky - dvourozměrný případ

Sestavíme soustavu algebraických rovnic (2.3.5) (jen pro e-tý konečný prvek) pro lineární operátor typu (2.1.1). Omezíme se na dvourozměrný případ a operátor píšeme ve tvaru

$$T(u) = -a \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2} - b \frac{\partial^2 u}{(\partial x^2)^2} + c \frac{\partial u}{\partial x^1} + d \frac{\partial u}{\partial x^2} + fu + h \quad (2.3.35)$$

za okrajových podmínek typu (2.1.7) a (2.1.8), tj.

$$u = \bar{u} \quad \text{pro } (x^1, x^2) \in \partial V_1$$

$$a \frac{\partial u}{\partial x^1} = q_1, \quad b \frac{\partial u}{\partial x^2} = q_2 \quad \text{pro } (x^1, x^2) \in \partial V_2. \quad (2.3.36)$$

Díky členům, obsahujícím $\frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}$ není operátor

(2.2.35) samoadjungovaný (2.2.10), a proto nelze sestavit funkcionál klasického variačního počtu typu (2.2.13). Extrém (2.2.9) zapíšeme formálně ve tvaru

$$\delta \mathcal{F}(u, du) = \int_V T(u) \delta u \, dv + \int_{\partial V_2} \left[\left(a \frac{\partial u}{\partial x^1} - q_1 \right) n_1 + \left(b \frac{\partial u}{\partial x^2} - q_2 \right) n_2 \right] \delta u \, da = 0 \quad (2.3.37)$$

(jde o tzv. rozšířený variační počet, viz (2.3.68)). Integrací per partes pomocí (2.1.3) dostáváme výchozí integrální formulaci našeho problému. Pro e-tý konečný prvek pak platí

$$\delta \mathcal{F}(u_e, \delta u_e) = \int_{V_e} \left[a \frac{\partial u}{\partial x^1} \frac{\partial \delta u}{\partial x^1} + b \frac{\partial u}{\partial x^2} \frac{\partial \delta u}{\partial x^2} + \left(c \frac{\partial u}{\partial x^1} + d \frac{\partial u}{\partial x^2} + fu + h \right) \delta u \right] dV -$$

$$- \int_{\partial V_e} (q_1 n_1 + q_2 n_2) \delta u da = 0.$$

(2.3.38)

Koeficienty a, b, c, d, f, h jsou obecně funkcemi souřadnic (x^1, x^2) . . Závísí-li tyto koeficienty i na hledaném řešení jde pak o nelineární prvek a je třeba užít iterační metodu, viz (2.3.50).

Řešení u (2.3.6) na e -tém konečném prvku, včetně geometrie $x^i(\xi^j)$ (2.3.8) tohoto prvku, aproximujeme pomocí lineárních funkcí (2.3.10). Tudiž, pro hledané řešení podle (2.3.4) a (2.3.22) platí

$$u(\xi^i) = \sum_{k=1}^4 \psi_k(\xi^i) u_k, \quad \frac{\partial u(\xi^j)}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} u_k,$$

$$\delta u(\xi^i) = \sum_{k=1}^4 \psi_k(\xi^i) \delta u_k, \quad \text{pro } i, j = 1, 2.$$

(2.3.39)

Výchozí geometrické veličiny jsou uvedeny v poznámce 2.8).

Inverzní transformaci určíme pomocí (2.3.21).

Dosadíme vztahy (2.3.39) do podmínky (2.3.38) a formálně ji zapíšeme do tvaru

$$\sum_{m,k=1}^4 (A_{km} u_m - P_k) \delta u_k = 0.$$

(2.3.40)

Tato podmínka musí být splněna pro každé nenulové δu_k , takže dostáváme soustavu algebraických rovnic

$$\sum_{k=1}^4 A_{km} u_m = P_k \quad \text{pro } k=1,2,3,4 \quad (2.3.41)$$

pro neznámé u_m .

Koeficienty této rovnice jsou

$$A_{km} = a_{km} + b_{km} + c_{km} + d_{km} + f_{km} \quad (2.3.42)$$

a její pravá strana je

$$P_k = h_k + p_k. \quad (2.3.43)$$

Konkrétní tvar koeficientů (2.3.42) a (2.3.43) plynoucí z podmínky (2.3.38) je s ohledem na (2.3.29) a (2.3.30) roven

$$a_{km} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi^l} \frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^1} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^1} \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.3.44)$$

$$b_{km} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 b \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi^l} \frac{\partial \psi_m}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^2} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^2} \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.3.45)$$

$$c_{km} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 c \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi^l} \psi_m \frac{\partial \xi^l}{\partial x^1} \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.3.46)$$

$$d_{km} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 d \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi^l} \psi_m \frac{\partial \xi^l}{\partial x^2} \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.3.47)$$

$$f_{km} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^e \psi_k \psi_m \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.3.48)$$

$$h_k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h \psi_k \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2. \quad (2.3.49)$$

Neumannova okrajová podmínka (2.3.36)₂ je dána integrací (2.3.31) po stranách 12, 23, 34, 41, viz obr. 2.8a, tj.

$$\begin{aligned} p_k = \int_{\partial V_e} \sum_{i=1}^2 q_i \psi_k n_i da &= \int_{-1}^1 \left(q_1 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} - q_2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \right) \psi_k \Big|_{\xi^2=-1} d\xi^1 + \\ &+ \int_{-1}^1 \left(q_1 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} - q_2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \right) \psi_k \Big|_{\xi^1=1} d\xi^2 + \int_1^{-1} \left(q_1 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} - q_2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \right) \psi_k \Big|_{\xi^2=1} d\xi^1 + \\ &+ \int_{-1}^1 \left(q_1 \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} - q_2 \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \right) \psi_k \Big|_{\xi^1=-1} d\xi^2. \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

Dirichletova okrajová podmínka $u_k = \bar{u}_k$ (2.3.36)₁ se aplikuje přímo ve vztahu (2.3.41) identitou $A_{kk} = 1$, $P_k = \bar{u}_k$.

Při úvahách o stabilitě numerických metod (viz kap. 2.3.5 a kap. 2.3.6) vycházíme z konečných prvků rovnoběžných se souřadnicemi (x^1, x^2) viz obr. 2.8b).

Označíme $(x^1)_2 - (x^1)_1 = (x^1)_3 - (x^1)_4 = \Delta x$, $(x^2)_4 - (x^2)_1 = (x^2)_3 - (x^2)_2 = \Delta y$,

pak prvky matice $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$ jsou dány vztahy (viz vztah 1)^{2.8},

$$\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} = \frac{\Delta x}{2}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} = \frac{\Delta y}{2}, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} = 0.$$

Jakobián této transformace je $\sqrt{g} = \frac{\Delta x \Delta y}{4}$. Prvky

inverzní matice $\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}$ (2.3.21) jsou $\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = \frac{2}{\Delta x}$, $\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = \frac{2}{\Delta y}$,

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} = 0.$$

Konkrétní tvary jednotlivých matic (2.3.44) až (2.3.48) pro konstantní koeficienty jsou

$$a_{km} = \frac{a \Delta y}{6 \Delta x} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_{km} = \frac{b \Delta x}{6 \Delta y} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c_{km} = \frac{c \Delta y}{12} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad d_{km} = \frac{d \Delta x}{12} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_{km} = \frac{\Delta x \Delta y}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2.3.51)

Podobně pro vektory pravé strany plyne

$$h_k = \frac{\Delta x \Delta y}{4} h [1, 1, 1, 1] \quad (2.3.52)$$

$$p_k = \left[-q_2 \frac{\Delta x}{2} - q_1 \frac{\Delta y}{2}, q_1 \frac{\Delta y}{2} - q_2 \frac{\Delta x}{2}, q_1 \frac{\Delta y}{2} + q_2 \frac{\Delta x}{2}, -q_1 \frac{\Delta y}{2} + q_2 \frac{\Delta x}{2} \right]$$

2.3.4 Numerické řešení potenciálního stlačitelného proudění

Jedním z typických příkladů řešených metodou konečných prvků je proudění nestlačitelné či stlačitelné nevazké tekutiny. Cílem je, nalézt stacionární rychlostní pole v proudící tekutiny (I.6.5.14), (I.6.5.15). Tato pole vyjádříme jako gradient potenciálu

$$\lambda_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{v_i}{c^*} \quad \text{pro } i=1,2,3, \quad (2.3.53)$$

kde λ_i je i -tá složka bezrozměrné rychlosti,

$$c^* = \left[\frac{2(\alpha-1)}{\alpha+1} c_p T_s \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{je tzv. kritická rychlost zvuku,} \quad (I. 7.4.7)$$

kteřá je pro danou úlohu konstantou .

Uvedeme obecnější formulaci problému, která dovoluje zahrnout i proudění transonické, včetně rázových vln. Hledané rychlostní pole musí splňovat zákony bilance hmotnosti (I.4.1.5)

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} = 0 \quad (2.3.54)$$

bilanci hybnosti (I.4.2.16)

$$\rho v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial p}{\partial x^i} \delta^{ji} = \frac{\partial t_{dis}^{ij}}{\partial x^j} \quad (2.3.55)$$

bilanci energie (I.4.5.9)

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left[\rho v^k \left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} \right) - t_{dis}^{ki} v_i + q^k \right] = 0 \quad (2.3.56)$$

konstitutivní vztahy (2.4.137, 2.4.138) a stavovou rovnici (2.4.139)

V isentropickém přiblížení zanedbáme tepelnou vodivost ($q^k = 0$) a viskozitu ($t_{dis}^{ij} = 0$). Z rovnice bilance energie (2.3.56) plyne podmínka

$$\frac{(\underline{v})^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} = h_v = c_p T_s = konst, \quad (\underline{v})^2 = v^i v_i \quad (2.3.57)$$

tj. celková (stagnační) entalpie je konstantní (srovnej se vztahem (I.7.4.5), který platí jen pro izentropické procesy (I.7.4.4).

Vztah (2.3.57) platí i pro procesy neizentropické. Integraci rovnice (2.3.56) přes objem V a užitím Gaussovy věty (2.1.3), tj.

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial(h_v \rho v^k)}{\partial x^k} d\mathcal{V} &= \int_V \left(\frac{\partial(t_{dis}^{ki} v_i)}{\partial x^k} - \frac{\partial q^k}{\partial x^k} \right) d\mathcal{V} = \\ &= \int_{\partial V} h_v \rho v^k n_k da = \int_{\partial V} (t_{dis}^{ki} v_i - q^k) n_k da \end{aligned} \quad (2.3.58)$$

jsme obdrželi povrchový integrál, vyjadřující tok energie, vyvolaný disipativními procesy.

Je-li na hranici ∂V nulový tepelný tok a nulové vazké tření (gradienty teploty a rychlosti jsou nulové), je celý integrál (2.3.58) roven nule. Odtud pak plyne i platnost (2.3.57) pro neizentropické procesy uvnitř objemu, např. v rázových vlnách. Uvážíme-li stavovou rovnici dokonalého plynu ve tvaru $p = \frac{\alpha-1}{\alpha} \rho c_p T$ vnitřní energii $u = c_v T$ a zavedeme-li stagnační tlak p_s a hustotu ρ_s (I.7.4.6), můžeme podmínku (2.3.57) přepsat do tvaru

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_s}{\rho_s} \left(1 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \lambda^2 \right), \quad (\lambda)^2 = \lambda^i \lambda_i, \quad \text{pro } i=1,2,3 \quad (2.3.59)$$

Za předpokladu izentropického procesu (I.7.4.4) dostáváme vztahy (I.7.4.9).

Abychom ukázali vliv viskozity explicitně, vezmeme do úvahy, že disipativní část tenzoru napětí t_{dis}^{ij} je pro dokonalý plyn rovna

$$t_{dis}^{ij} = \mu_v \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right) \delta^{ij} + \mu \left(\delta^{il} \frac{\partial v^j}{\partial x^l} + \delta^{jl} \frac{\partial v^i}{\partial x^l} - \frac{2}{3} \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \delta^{ij} \right). \quad (2.3.60)$$

Ve srovnání se smykovou viskozitou μ lze pro případy bez chemických reakcí objemovou viskozitu μ_v zanedbat. (Clarke, Mc Chesney, 1964).

Omezíme-li se jen na jednorozměrné proudění (ve směru proudnice \tilde{x}^1 2.9) s velkým gradientem rychlosti ve směru proudu (v rázové vlně), lze (2.3.60) psát $t_{dis}^{11} \doteq \frac{4\mu}{3} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{x}^1}$.

2.9)

Přirozené souřadnice \tilde{x}^i jsou ortonormální, přičemž souřadnice \tilde{x}^1 má směr vektoru rychlosti λ . Vztah mezi fyzikálními souřadnicemi x^i a přirozenými souřadnicemi \tilde{x}^i ($i=1,2,3$) na e-tém konečném prvku je dán lineární transformací

$$dx^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \right)_e d\tilde{x}^j, \quad (1)$$

kde matice transformace je (viz obr. 2.9)

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_e^1}{\lambda_e} & -\frac{\lambda_e^2}{\lambda_e} & -\frac{\lambda_e^1 \lambda_e^2}{\lambda_e \hat{\lambda}_e} \\ \frac{\lambda_e^2}{\lambda_e} & \frac{\lambda_e^1}{\lambda_e} & -\frac{\lambda_e^2 \lambda_e^3}{\lambda_e \hat{\lambda}_e} \\ \frac{\lambda_e^3}{\lambda_e} & 0 & \frac{\hat{\lambda}_e}{\lambda_e} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\text{kde } \lambda_e = (\lambda_e^i \lambda_{ie})^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{\lambda}_e = \sqrt{(\lambda_{1e})^2 + (\lambda_{2e})^2}$$

(i je řádkový index)

Při zanedbání vedení tepla ($q^k=0$) dává rovnice energie (2.3.56) vztah

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} \left[\rho v^1 \left(\frac{(v)^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} - \frac{4\mu}{3\rho} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{x}^1} \right) \right] = 0 \quad \text{pro } (v)^2 = v^i v_i \quad (2.3.61)$$

a za předpokladu, že bilance hmotnosti je (2.10) $\frac{\partial(\rho v^1)}{\partial \tilde{x}^1} = 0$, platí podél proudnice

$$\frac{(v)^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} - \frac{4\mu}{3\rho} \frac{\partial v^1}{\partial \tilde{x}^1} = h_c = c_p T_s = \text{konst} \quad (2.3.62)$$

Zavedeme-li opět c^* a použijeme-li vlastností dokonalého plynu (I.7.4.2) dostáváme (Maršik, 1989)

$$\frac{p}{\rho} \frac{\rho_s}{p_s} + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} (\lambda)^2 - \frac{8\mu(\alpha-1)}{3\rho c^*(\alpha+1)} \frac{\partial \lambda^1}{\partial \tilde{x}^1} = 1, \quad (2.3.63)$$

resp.

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_s}{\rho_s} \Lambda (1 + \mathcal{D}) \quad , \quad \Lambda = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (\lambda)^2$$

$$\mathcal{D} = \frac{8(\kappa - 1)\mu}{3(\kappa + 1)\rho c^* \Lambda} \left(\frac{\partial \lambda^i}{\partial \tilde{x}^i} \right) \quad , \quad (2.3.64)$$

který nahrazuje vztah (2.3.59) neuvažující explicitně vliv viskozity.

2.10)

Za stejných předpokladů, avšak při zanedbání smykové viskozity v (2.3.60) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left[\rho v^k \left(\frac{(v)^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} - \frac{\mu_v}{\rho} \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right) \right] = \rho v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{(v)^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} - \frac{\mu_v}{\rho} \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right) \right] = 0 \quad , \quad 1)$$

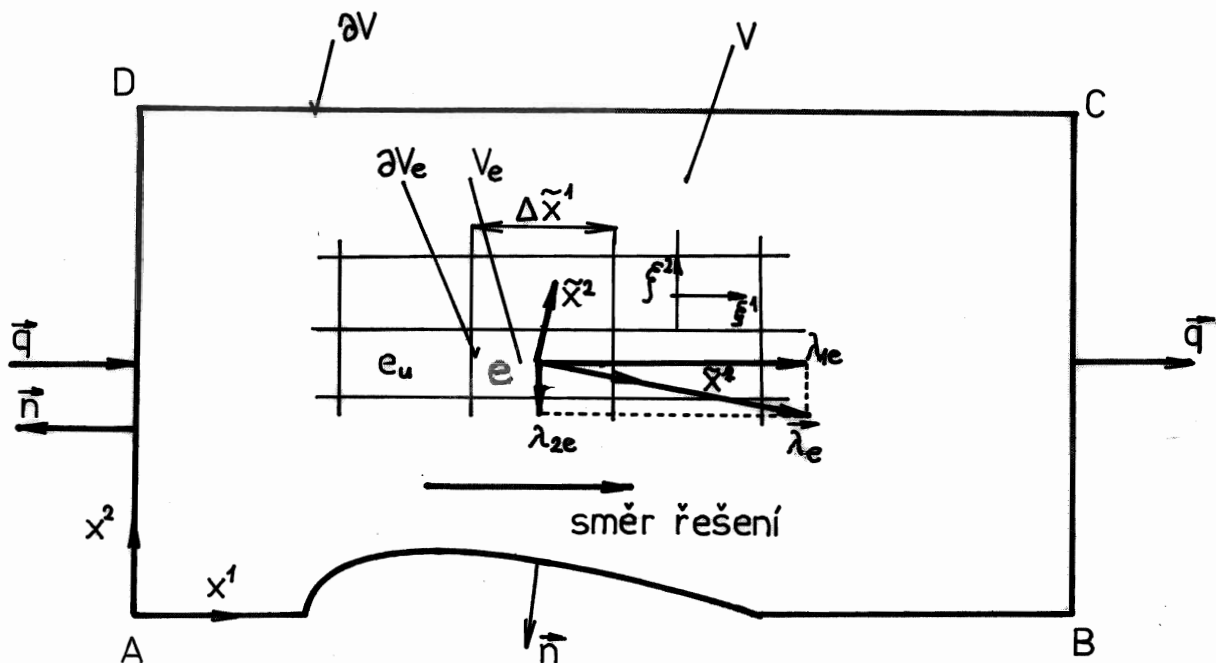
přičemž jsme použili rovnici bilance hmotnosti (2.3.54). Vztah (2.3.64) se nezmění, jen pro \mathcal{D} platí

$$\mathcal{D} = 2 \frac{(\kappa - 1)\mu_v}{(\kappa + 1)\rho c^* \Lambda} \left(\frac{\partial \lambda^l}{\partial x^l} \right) \quad . \quad 11)$$

Relace (2.3.64) má mimořádný význam při numerickém řešení transonického proudění, viz dále.

Formulace numerického řešení stacionárního potenciálního proudění (2.3.53) vychází z rovnic bilance hmotnosti (2.3.54), tj.

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\rho \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right| \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] = 0 \quad \text{pro } \underline{x} \in V \quad (2.3.65)$$



obr. 2.9

Okrajové podmínky pro proudění v kanálu

Na hranici DA a BC je zadán tok \bar{q} a hranice AB a CD je neprostupná, tj. $\bar{q} \cdot \vec{n} = 0$. x^1, x^2 jsou kartézské souřadnice a \tilde{x}^1, \tilde{x}^2 jsou přirozené souřadnice.

za okrajové podmínky, viz obr. 2.9.

$$\sum_{i=1}^3 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} n^i = \sum_{i=1}^3 q_i n^i \quad \text{pro } x \in \partial V. \quad (2.3.66)$$

Obr. 2.9

Na části hranice ∂V může být zadána i Dirichletova podmínka, tj. funkce $\varphi(x^i \in \partial V)$. Protože však řešení rovnice (2.3.65) hledáme na třídě funkcí, které této podmínce vyhovují, nebudeme se jí explicitně zabývat. Hustota tekutiny je dána izentropickým vztahem (I:7.49)₂ tj.

$$\rho \left(\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right| \right) = \rho_s \left[1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (2.3.67)$$

Chceme nalézt vhodnou variační formulaci k řešení tohoto problému, tzn., že požadujeme, aby příslušný funkcionál měl alespoň lokální extrém. Vyjdeme z podmínky extrému (2.2.9), srovnaj s (2.2.20), kterou zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} -\delta \mathcal{F}(\varphi, \varphi^{(0)}, \delta \varphi) &= \int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \delta \varphi \, dV + \int_{\partial V} \sum_{i=1}^3 \left(q_i - \rho^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) n^i \delta \varphi \, da = \\ &= - \int_V \sum_{i=1}^3 \rho \left(\left| \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x^i} \right| \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x^i} \, dV + \int_{\partial V} \sum_{i=1}^3 q_i \delta \varphi n^i \, da = 0. \end{aligned}$$

(2.3.68)

Index "0" označuje, že příslušná veličina je při variaci považována za konstantu, tzn., že je pouze funkcí x^i . Tímto způsobem operátor (2.3.65) linearizujeme a řešíme jej dále uvedeným iteračním postupem.

Vyjdeme tedy z podmínky extrému (2.3.68), které odpovídá kvadratický funkcionál (2.2.19), tj.

$$\mathcal{F}(\varphi, \varphi_0) = \int_V \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \rho \left(\left| \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x^i} \right| \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right)^2 dV - \int_V \sum_{i=1}^3 q_i \varphi^n da \quad (2.3.69)$$

závisející jednak na neznámém řešení $\varphi(x)$ a jednak na nějaké známé funkci $\varphi^{(0)}(x)$. Takto formulovaná úloha nabízí následující iterační proces:

Volíme nějaké $\varphi^{(0)}(x)$ a vypočteme $\mathcal{F}(\varphi^{(1)}, \varphi^{(0)}) = \min_{\varphi} \mathcal{F}(\varphi, \varphi^{(0)})$.

Je-li $\varphi^{(1)} = \varphi^{(0)}$ pak $\varphi^{(0)}$ je hledané řešení. Jestliže však $\varphi^{(1)} \neq \varphi^{(0)}$ dosadíme $\varphi^{(1)}$ místo $\varphi^{(0)}$ a hledáme $\min_{\varphi} \mathcal{F}(\varphi, \varphi^{(1)})$.

Dostaneme $\varphi^{(2)}(x)$ a proces opakujeme, až dosáhneme $\|\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)}\| < \varepsilon$

tzn., že dvě po sobě jdoucí iterace n -tá a $(n-1)$ -ní se liší v některé z norem (2.1) o méně než ε .

Podmínka extrému (2.3.68) byla výchozí pro nalezení nějakého kvadratického funkcionálu (2.3.69). Zavedením veličiny $\varphi^{(0)}$ splňuje sice (2.3.68) rovnici kontinuity (2.3.65, 2.3.66), ale výpočet 1. variace neodpovídá obvyklému variačnímu počtu (viz kap. 2.2). Proto se tento postup nazývá rozšířený variační počet (Finlayson, 1972; Glansdorff, Prigogine, 1971; Maršik, 1981).

Naším úkolem je nyní zjistit, je-li extrém funkcionálu (2.3.69) alespoň lokálně ostrý. Z tohoto důvodu provedeme derivaci (2.4) funkcionálu (2.3.68). Opustíme předpoklad, že se $\varphi^{(0)}$ při výpočtu extrému tohoto funkcionálu nemění (tj. $\mathcal{F}(\varphi, \varphi_0) = \mathcal{F}(\varphi)$). Jeho druhá derivace má potom tvar

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{F}(\varphi, \delta\varphi, \delta\varphi) &= \int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\rho \delta^{ij} + 2 \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \frac{\partial\rho}{\partial \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \right|^2} \right) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x^i} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x^j} dV = \\ &= \int_V \sum_{i,j=1}^3 \rho (\delta^{ij} - M^i M^j) \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x^i} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x^j} dV, \text{ kde } M^i = \frac{v^i}{c}. \end{aligned} \quad (2.3.70)$$

Při úpravě jsme použili vztahu mezi místní rychlostí zvuku

$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{\frac{1}{2}}$ a kritickou rychlostí zvuku c^* (c^* je rychlost zvuku při Machově čísle proudění $|M| = \frac{|v|}{c} = 1$).

Tudíž platí

$$\frac{\partial\rho}{\partial|\underline{\lambda}|} = -\frac{2\rho|\underline{\lambda}|}{(\alpha+1)\Lambda}, \quad \left(\frac{c}{c^*} \right)^2 = \frac{\alpha+1}{2} \Lambda, \quad 1 - (M)^2 = \frac{1 - (\underline{\lambda})^2}{\Lambda}, \quad \rho + \frac{\partial\rho}{\partial|\underline{\lambda}|} |\underline{\lambda}| = \rho (1 - (M)^2). \quad (2.3.71)$$

Jestliže proudové pole popisujeme přirozenými souřadnicemi ^{2.9)}

pak $M^1 = |M|$, $M^2 = M^3 = 0$ (viz obr. 2.9) a podmínka ostrého

lokálního extrému (2.2.11) má tvar

$$[1 - (M)^2] \left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\tilde{x}^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\tilde{x}^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\tilde{x}^3} \right)^2 > 0. \quad (2.3.72)$$

Tudíž vyšetřovaný funkcionál má ostrý lokální extrém jen v subsonice, tj. pro $|M| < 1$. V případě supersonického proudění ($|M| > 1$) je nerovnost (2.3.72) porušena a tím je porušena i konvergence iteračního procesu plynoucího z (2.3.68). V případě supersonického proudění je třeba vycházet z funkcionálu (2.3.85).

Pro subsonické potenciální proudění lze nalézt takový funkcionál, který odpovídá obvyklému variačnímu počtu, kap. 2.2. Vychází z Hamiltonova principu (I.7.4.18) a pro izentropické proudění dostává tvar (I.7.4.28), viz kap. I.7.4. Skutečně, dosazením (I.7.4.9)₃ do (I.7.4.28) dostáváme Batemanův princip ve tvaru

$$\delta S = \int_{t_0}^t \int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right)} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x^i} d\mathcal{V} dt = -(\mathcal{C}^*)^2 \int_{t_0}^t \int_V \sum_{i=1}^3 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x^i} d\mathcal{V} dt = 0.$$

(2.3.73)

Naším cílem je nalézt takový funkcionál, jehož extrém by nastával při splnění rovnice bilance hmotnosti (2.3.65) za okrajové podmínky (2.3.64). Předpokládejme funkcionál

$$\mathcal{F}_B(\varphi) = -(\mathcal{C}^*)^2 \int_V p d\mathcal{V} - \int_{\partial V} q_i \varphi n^i da, \quad (2.3.74)$$

kde druhý člen vyjadřuje vliv okrajové podmínky. Časovou integraci jsme vzhledem k tomu, že nás zajímá jen stacionární řešení, vypustili.

První variace funkcionálu $\mathcal{F}_B(\varphi)$ je rovna

$$\begin{aligned} -d\mathcal{F}_B &= \int_V -\sum_{i=1}^3 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x^i} d\mathcal{V} + \int_{\partial V} \sum_{i=1}^3 q_i \delta \varphi n^i da = \\ &= \int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \delta \varphi d\mathcal{V} + \int_{\partial V} \sum_{i=1}^3 \left(q_i - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \delta \varphi n^i da = 0 \end{aligned}$$

(2.3.75)

a jeho extrém nastává za podmínek (2.3.65, 2.3.66). Jeho druhá variace je rovna právě (2.3.70), takže podmínka ostrého lokálního extrému (2.3.72) je splněna jen pro subsonické proudění ($M < 1$). Odtud plyne, že stabilita výpočtu potenciálního izentropického proudění je pro oblast nadzvukového proudění ($M > 1$) porušena.

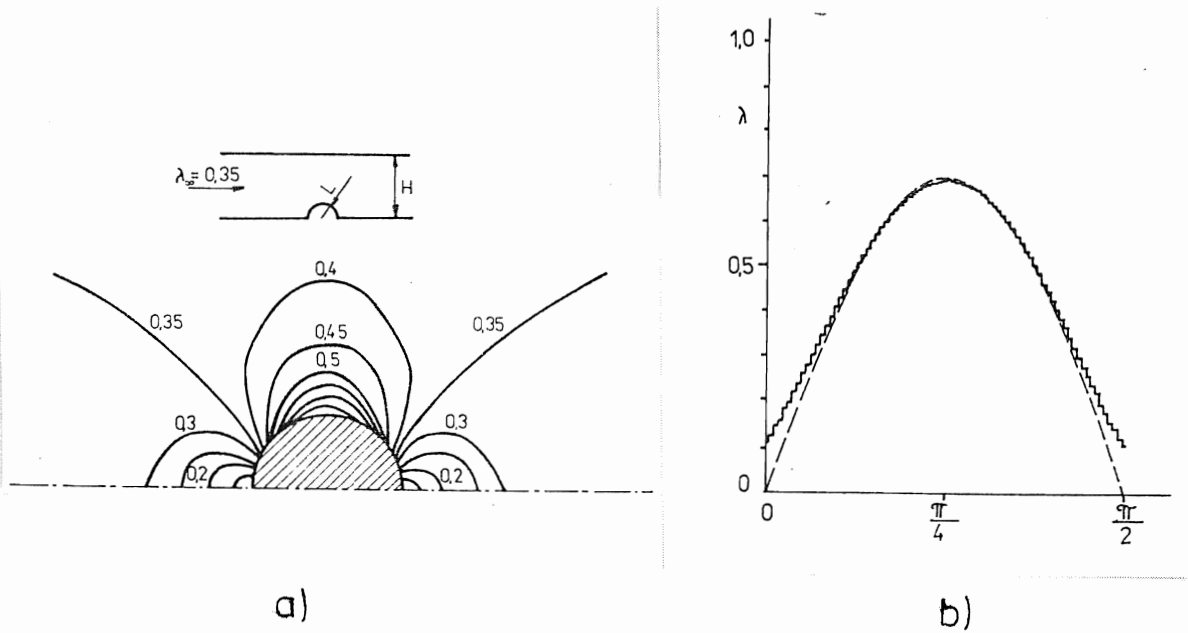
Z podmínky (2.3.75) plyne užitím metody rozšířeného variačního počtu i podmínka (2.3.68) a příslušný iterační postup v metodě konečných prvků, viz kap. 2.3.1, vede na postupné řešení lineárních algebraických rovnic

$$\sum_{i,e,r,s,k}^{2,E,2,2,N_e} \left\{ \int_{V_e} \rho_e^{(n)} \frac{\partial \psi_{n_e}}{\partial \xi^r} \frac{\partial \psi_{n_e}}{\partial \xi^s} \left(\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} \right)_e \left(\frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} \right)_e dV_e \psi_{n_k}^{(n+1)} - \right. \\ \left. - \int_{\partial V_e} q_i \psi_{n_e} \bar{n}_i d\bar{a} \right\} \delta \psi_{n_e}^{(n+1)} = 0, \quad \text{pro } l = 1, 2, \dots, N_e, \quad (2.3.76)$$

kde neznámou jsou hodnoty potenciálu $\psi_{n_k}^{(n+1)}$ v nódech $k = 1, 2, \dots, N_e$ pro všechny konečné prvky $e = 1, 2, \dots, E$. Indexem (n) je značeno řešení z minulé iterace a $\rho_e^{(n)}$ je hustota (2.3.67) z něj vypočtená. Vypočteme derivace aproximačních funkcí (2.3.9 - 2.3.12) a matice transformace $\left(\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} \right)_e$ na e-tém konečném prvku je určena vztahem (2.3.21).

Integrací po objemu V_e či povrchu ∂V_e vypočteme (většinou numericky, až) (Ralston, 1978) (po transformaci integrálu pomocí (2.3.28) a (2.3.29), resp. (2.3.30)^{2.3}). Řešení odpovídajících algebraických rovnic provádíme standardně, např. Gaussovou eliminací a nebo některou z relaxačních metod (SOR, SLOR) (Ralston, 1978).^{2.15} k otestování přes-

Výpočtu obtékání válce nestlačitelnou tekutinou je použito nosti metody konečných prvků, protože je známo přesné řešení. Na obr. 2.10 je znázorněno proudové pole při obtékání rotačního



Obr. 2 10

Řešení nestlačitelného proudového pole

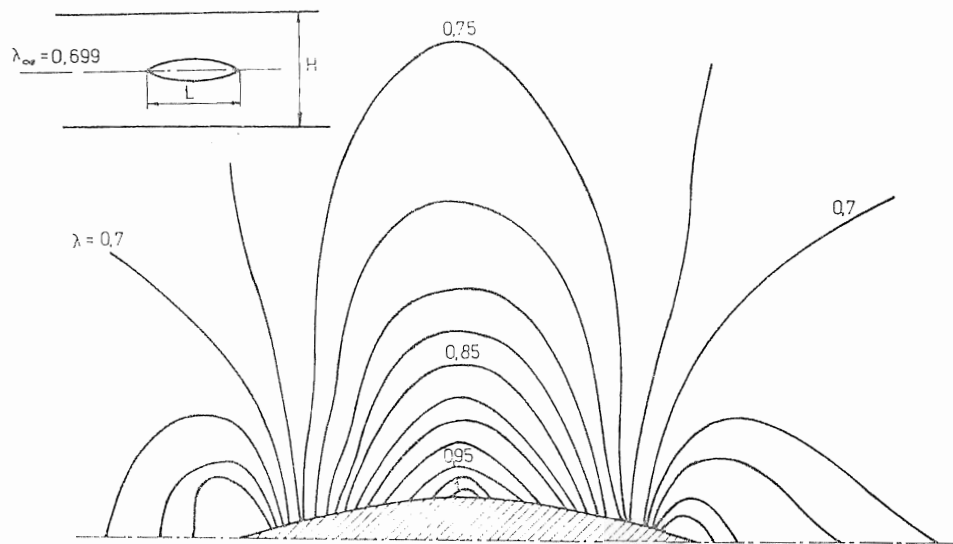
a) proudové pole rotačního válce v kanálu při $\lambda_{\infty} = 0,35$

a $H/L = 10$

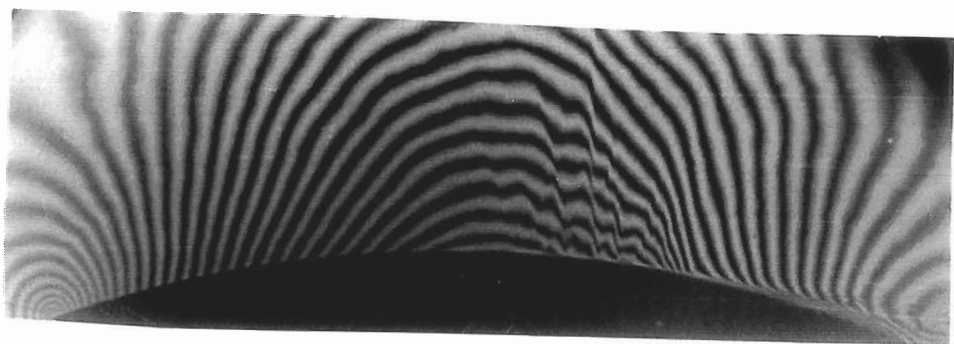
b) rozložení rychlosti na povrchu válce získané metodou

konečných prvků (trojúhelníkové lineární prvky) ()

a metodou konformního zobrazení



a)



b)

Obr. 2.11

a) Vypočtené proudové pole 18% dvoukruhového profilu v ose kanálu při $\lambda_{\infty} = 0,699$, tj. $M_{\infty} = 0,665$ (kritická rychlost), $H/L = 10/3$

b) Interferogram proudového pole při stejných podmínkách

válce v kanálu. Na obr. 2.10b) je srovnáno řešení numerické s přesným řešením, získaným metodou konformního zobrazení. K výpočtu byly použity lineární trojúhelníkové prvky na obr. 2.7a). Hustota $\rho^{(0)}$ v podmínce (2.3.75) je považována za konstantu.

obr. 2.10

Výpočet obtékání 18% dvoukruhového profilu při kritické rychlosti slouží jako příklad s vlivem stlačitelnosti.

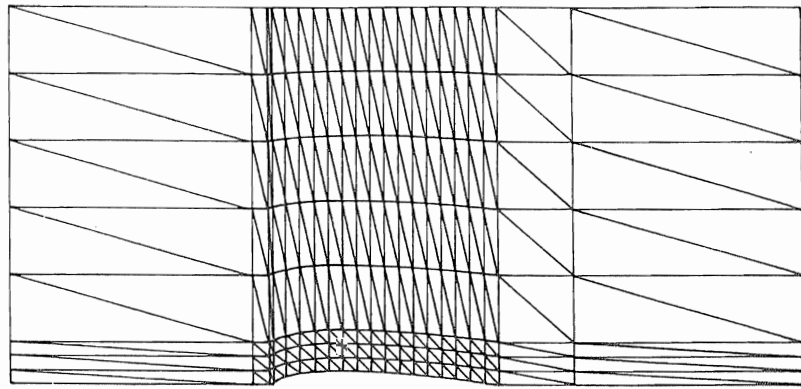
Vypočtené proudové pole je uvedeno na obr. 2.11a) a jeho interferogram je na obr. 2.11b). K výpočtu bylo použito podmínky (2.3.68) a trojúhelníkových lineárních konečných prvků, obr. 2.7a). V té oblasti proudového pole, kde jsou rychlosti blízké rychlosti zvuku, dochází k výraznému zestrmování poruch, které vznikají v úplavu. Tento jev ve výpočtu zahrnut není. Výpočet této úlohy trval na počítači EC 1040 asi 4 minuty. Požadovaná přesnost, která je charakterizována velikostí poruchy $|\delta\lambda|$ byla $|\delta\lambda| = 0,2 \cdot 10^{-3}$. K výpočtům tohoto typu je třeba asi 4 až 6 iterací.

2.11

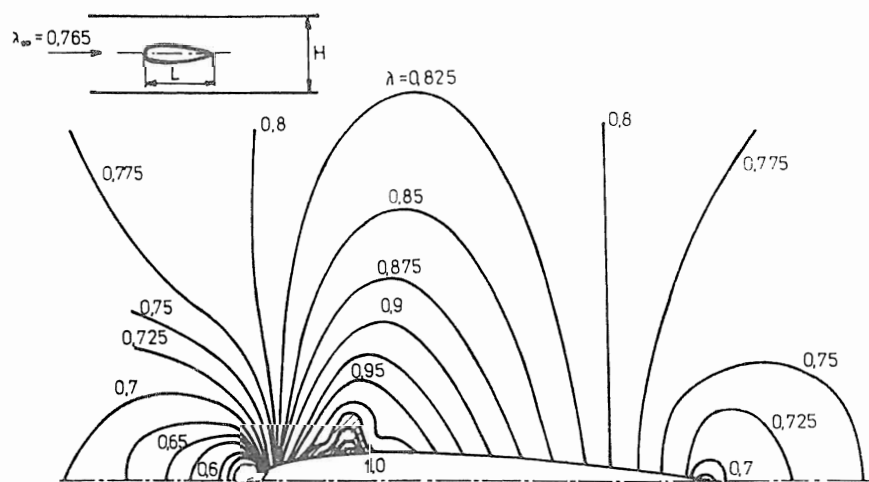
Příklad, při kterém došlo k porušení podmínky stability (2.3.72) je uveden na obr. 2.1.2. Jde o nadkritické obtékání profilu NACA 0012. Při řešení nebylo použito numerické viskozity a proto místní supersonická oblast byla málo stabilní. Ke zvýšení stability byla volena síť izoparametrických trojúhelníkových prvků, viz obr. 2.7c).

obr. 2.12

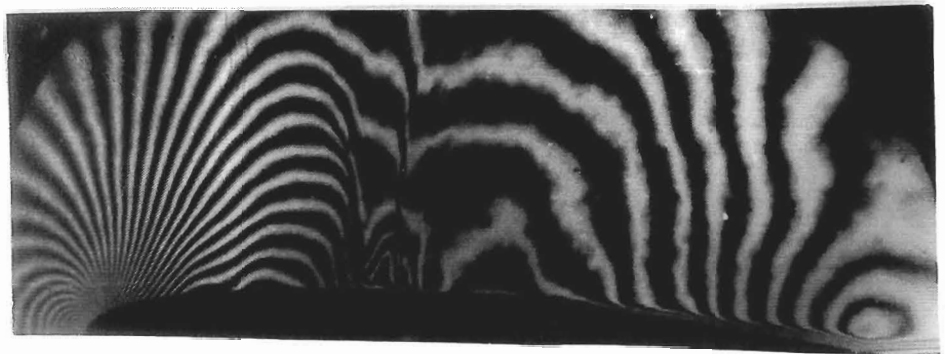
Výpočet probíhal tak, že byla postupně zvyšována vstupní rychlost λ_{∞} po $|\Delta\lambda_{\infty}| = 0,005$. Po každém zvýšení bylo ponecháno 2 až 5 iterací na relaxaci poruch. Vzhledem k tomu to postupem probíhal výpočet poměrně dlouho, asi 40 iterací, tj. až 30 minut na EC 1040. Soustava algebraic-



a)



b)



c)

Obr. 2.12

Řešení stlačitelného proudového pole (iterační proces
(2.3.76))

a) síť izoparametrických konečných prvků

b) výpočet proudového pole kolem profilu NACA 0012
při $M_{\infty} = 0,743$, t.j. $\lambda_{\infty} = 0,765$ při $H/L = 10/3$

c) interferogram proudového pole při stejných podmínkách

kých rovnic pro $\varphi_{\tilde{x}_k}$ byla řešena Gaussovou eliminací. Použitá síť je na obr. 2.12a). Vypočtené proudové pole je uvedeno na obr. 2.12b). Interferogram proudového pole za stejných podmínek je na obr. 2.12c) (Maršík, Šafařík, 1982).

Nestabilita transonického proudění ($|M| \geq 1$) je pozorovatelná i experimentálně, viz kap. 3.6, obr. 3.7. Proudění se stabilizuje až s výskytem rázové vlny s odpovídajícími účinky disipativních procesů (vazkosti a tepelné vodivosti). Výpočtová metoda transonického proudění musí tedy explicitně zahrnout vazkost, jejíž vhodný tvar budeme nyní hledat.

Vyjdeme opět z variačního principu (2.3.73) za předpokladu, že závislost mezi tlakem a hustotou je dána vztahem (2.3.64). Zavedeme-li modifikovanou viskozitu

$$\bar{\mu} = \frac{8}{3} \frac{(\kappa-1)\mu}{(\kappa+1)\rho c^* \Lambda}, \quad (2.3.77)$$

kterou považujeme pro daný případ za konstantní, můžeme vztah (2.3.64) přepsat

$$p = \frac{p_s}{\rho_s} \Lambda \rho \left(1 + \bar{\mu} \frac{\partial \lambda^1}{\partial \tilde{x}^1} \right), \quad (2.3.78)$$

přičemž jsme při úpravě předpokládali, že pro hustotu platí izentropický vztah (2.3.67).

Budeme vyšetřovat derivaci hustoty (2.3.67) podle přirozené souřadnice \tilde{x}^1 a upravíme pomocí ní vztah (2.3.78). Platí

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}^1} = - \frac{2\rho \lambda_1}{(\kappa+1)\Lambda} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \tilde{x}^1} \quad (2.3.79)$$

a výraz pro tlak (2.3.78) zapišeme ve tvaru

$$p = \frac{p_s}{\rho_s} \Lambda \left(\rho - \Delta \tilde{x}^1 \mu_n \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}^1} \right) = \frac{p_s}{\rho_s} \Lambda \rho \left(1 + \frac{2 \Delta \tilde{x}^1 \mu_n \lambda_1}{(\alpha+1)\Lambda} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{x}^1} \right), \quad (2.3.80)$$

kde z důvodů, které budou zřejmé dále (vztah (2.3.82)), jsme zavedli koeficient numerické viskozity μ_n . Velikost konečného prvku ve směru proudu značíme $\Delta \tilde{x}^1$. Porovnáním (2.3.78) a (2.3.80) plyne relace mezi modifikovanou viskozitou (2.3.77) a koeficientem numerické viskozity μ_n

$$\bar{\mu} \approx \frac{2 \Delta \tilde{x}^1 \mu_n \lambda_1}{(\alpha+1)\Lambda} \quad (\approx \mu_n \Delta \tilde{x}^1 \text{ pro } |M|=1) \quad (2.3.81)_1$$

← Vztah mezi molekulární viskozitou μ , resp. modifikovanou molekulární viskozitou $\bar{\mu}$ (2.3.77) a tloušťkou rázové vlny $l_{r.v.}$ je přibližně roven (Hirschfelder, Curtis, Bird, 1961), viz též vztah (3.6.28)

$$\frac{\bar{\mu}}{l_{r.v.}} \approx 1 - \frac{1}{|M|^2} \quad (2.3.81)_2$$

Uvážíme-li, že rázová vlna se při numerickém řešení může zobrazit přibližně s tloušťkou $\Delta \tilde{x}^1$, tj. $l_{r.v.} \approx \Delta \tilde{x}^1$, lze poměr (2.3.81)₂ s ohledem na velikost viskozity při numerickém řešení (2.3.81)₁ psát ve tvaru

$$\frac{\bar{\mu}}{l_{r.v.}} \approx \frac{2 \mu_n \Delta \tilde{x}^1 \lambda_1}{(\alpha+1)\Lambda \Delta \tilde{x}^1} \approx \mu_n \sim 1 - \frac{1}{|M|^2} \quad (2.3.81)_3$$

Tento vztah lze odvodit i jiným způsobem z podmínky stability numerického řešení hyperbolického problému, viz kap. 2.3.5.

Vydeme z Batemanova principu a požadujeme, aby extrém (2.3.73) nastával při splnění rovnice bilance hmotnosti (2.3.54). Tato rovnice bude s velkou přesností splněna, dosadíme-li za ρ vztah

$$\rho \left(1 + \bar{\mu} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{x}^1} \right) = \rho - \Delta \tilde{x}^1 \mu_n \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}^1}, \quad (2.3.82)$$

protože $\bar{\mu} \ll 1$. Pouze v oblastech velkých gradientů rychlosti (rázových vln) dochází k větším odchýlkám. Podmínku extrému (2.3.75) upravíme na tvar

$$\begin{aligned}
& - \int_V \left[\left(\rho - \Delta \tilde{x}^1 \mu_n \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}^1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \tilde{x}^1} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \tilde{x}^2} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}^3} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \tilde{x}^3} \right] dV + \\
& + \int_V \sum_{i=1}^3 q_i \delta \varphi n^i da = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} \left[\left(\rho - \Delta \tilde{x}^1 \mu_n \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}^1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}^1} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}^2} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}^3} \right) \right\} dV + \int_V \left\{ \left[q_1 - \left(\rho - \Delta \tilde{x}^1 \mu_n \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}^1} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}^1} \right] n^1 + \right. \\
& + \left. \left(q_2 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}^2} \right) n^2 + \left(q_3 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{x}^3} \right) n^3 \right\} \delta \varphi da = 0 .
\end{aligned}$$

(2.3.83)

Odtud skutečně plyne, že čím menší bude $\Delta \tilde{x}^1$ (rozměr konečného prvku, viz obr. 2.9), tím lépe bude splněna řešená rovnice (2.3.54).

Předpokládejme, že řešená oblast je rozdělena na konečné prvky V_e (viz kap. 2.3.1 a obr. 2.9) a derivace ve vztahu (2.3.82) nahradíme zpětnou diferencí (Jameson, 1975; Hafez, Murman, 1978; Maršik, 1983). Tudiž pro e -tý prvek platí

$$-\left(\Delta \tilde{x}^1 \mu_n \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{x}^1} \right) \Big|_e = \mu_{ne} \left(\rho_{eu}^{(n+1)} - \rho_e^{(n+\frac{1}{2})} \right) ,$$

(2.3.84)

kde index e označuje e -tý konečný prvek a index eu prvek proti proudu (tzv. upwind), viz obr. 2.13. Indexy $(n+1)$ a $(n+\frac{1}{2})$ označují hodnoty řešení v odpovídajících iteracích,

viz následující kapitolu, kde je rovněž uveden i výpočet konkrétní velikosti μ_{ne} .

Podmínka extrému (2.3.83) přechází s ohledem na (2.3.84) na podmínku iteračního procesu

$$\sum_{e=1}^E \iint_{V_e} \left[\rho_e^{(n+\frac{1}{2})} + \mu_{ne} (\rho_{eu}^{(n+1)} - \rho_e^{(n+\frac{1}{2})}) \right] \frac{\partial \psi^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial \delta \psi^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}^1} +$$

$$+ \rho_e^{(n+\frac{1}{2})} \left. \frac{\partial \psi^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \delta \psi^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}^2} \right\} dV - \int_{\partial V_e} (q_1 n_1 + q_2 n_2) \delta \psi^{(n+1)} da = 0.$$

(2.3.85)

Omezili jsme se na dvourozměrný problém, takže element "objemu" je určen (2.3.28) a element "plochy" (2.3.30). Přejdeme do kartézských souřadnic (2.9) a dále pak transformací (2.3.19) do vnitřních souřadnic konečného prvku ξ^j ($j=1,2$). Dostáváme tak opět soustavu lineárních algebraických rovnic podobnou soustavě (2.3.76), kterou je však nutno řešit blokovou relaxační metodou (2.15) (Varga, 1962; Colatz, 1970; Feistauer, 1981). Právě tato metoda dobře modeluje iterační proces (2.3.85), viz obr. 2.13.

2.3.5 Stabilita iteračního procesu pro hyperbolické problémy

V hyperbolické oblasti ($|M| > 1$) není podmínka lokálního extrému (2.3.72) splněna. Ukážeme, jak je třeba volit koeficient numerické viskozity μ_n , aby byl iterační proces (2.3.85) stabilní. Důkazy jednoznačnosti a existence řešení rovnice (I.4.3.47) (pro hustotu (2.3.67)) za okrajových podmínek (2.3.66), při kterých je část řešené oblasti hyperbolická, nejsou ještě provedeny. Nicméně, v korektnosti formulace tohoto problému bylo dosaženo již značného pokroku (Feistauer, Nečas, 1985). Výsledky této kapitoly jsou v souladu s obecnými výsledky P.D. Laxe (Richtmayer, Morton, 1967) a S.K. Godunova (1971), podle kterých není možno numericky řešit hyperbolické problémy bez disipace (v našem případě bez členu \mathcal{D} , viz (2.3.64)). Ze vztahů (2.3.78) až (2.3.82) je patrna souvislost numerické disipace (2.3.84) s disipací fyzikální \mathcal{D} .

Uvedeme obecný postup k nalezení oblasti stability pro iterační procesy typu (2.3.85) (resp. (2.3.68)), tj. pro rozšířený variační počet). Podstatou tohoto postupu je vyšetřování odchylky (Maršik, 1987)

$$\delta \varphi_e^{(n+1)}(\tilde{x}^i) = \varphi_e^{(n+1)}(\tilde{x}^i) - \varphi_e(\tilde{x}^i) \quad \text{pro } \varphi_e = \lambda_e \tilde{x}^i \quad (2.3.86)$$

řešení $\varphi_e^{(n+1)}$ v $(n+1)$ -ní iteraci (2.11) od neznámého přesného řešení φ_e na nějakém e -tém konečném prvku. Používáme přirozené souřadnice (2.9), proto má vektor rychlosti λ_e jen složku

2.11) si)
Tuto iteraci můžeme představit jako řešení v $(n+1)$ -ní časové rovině nějakého nestacionárního stavu. Zajímá nás stabilita stacionárního stavu, viz kap. I.7.

λ_{1e} kterou značíme λ_e . Podobně platí pro odchylku v předchozí n-té iteraci

$$\delta\varphi_e^{(n)}(\tilde{x}^i) = \varphi_e^{(n)}(\tilde{x}^i) - \varphi_e(\tilde{x}^i). \quad (2.3.87)$$

Hodnoty potenciálů ve dvou po sobě jdoucích iteracích lze s ohledem na (2.3.86, 2.3.87) psát jako

$$\varphi_e^{(n)} = \lambda_e \tilde{x}^1 + \delta\varphi_e^{(n)}, \quad \varphi_e^{(n+1)} = \lambda_e \tilde{x}^1 + \delta\varphi_e^{(n+1)} \quad (2.3.88)$$

a hodnoty rychlostí

$$\begin{aligned} \lambda_{1e}^{(n)} &= \lambda_e + \frac{\partial \delta\varphi_e^{(n)}}{\partial \tilde{x}^1} = \lambda_e + \delta\lambda_{1e}^{(n)}, & \lambda_{2e}^{(n)} &= \frac{\partial \delta\varphi_e^{(n)}}{\partial \tilde{x}^2} = \delta\lambda_{2e}^{(n)} \\ \lambda_{1e}^{(n+1)} &= \lambda_e + \frac{\partial \delta\varphi_e^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}^1} = \lambda_e + \delta\lambda_{1e}^{(n+1)}, & \lambda_{2e}^{(n+1)} &= \frac{\partial \delta\varphi_e^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}^2} = \delta\lambda_{2e}^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (2.3.89)$$

2.12)

V ortonormálních (kartézských) souřadnicích platí $\lambda^i = \lambda_i$, pro $i = 1, 2, \dots$, viz (I.D2.1). Kvůli přehlednosti zápisu píšeme v některých místech kapitoly 2.3 v kartézských souřadnicích λ , na místo λ^i . Protože je tím porušena sumační konvence, vyznačíme součet

obvyklým způsobem, např. $|\lambda|^2 = \lambda^i \lambda_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \lambda_i$.

V neortonormálních souřadnicích tato libovůle možná není.

Vyjádříme hustotu (2.3.67) na konečném prvku proti proudu v (n+1)-ní iteraci pomocí přesných hodnot na e-tém konečném prvku 2.12), tj.

$$\begin{aligned} \rho_{eu}^{(n+1)} &= \rho_e^{(n+1)} - \Delta \tilde{x}_e^1 \left(\frac{\partial \rho^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}^1} \right)_e = \rho_e + \sum_{i=1}^2 \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_{ie}} \right) \delta \lambda_{ie}^{(n+1)} - \Delta \tilde{x}_e^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} \left[\rho_e + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_{ie}} \right) \delta \lambda_{ie}^{(n+1)} \right] \right\} = \\ &= \rho_e + \sum_{i=1}^2 \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_{ie}} \right) \delta \lambda_{ie}^{(n+1)} - \Delta \tilde{x}_e^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_{ie}} \right) \frac{\partial \lambda_{ie}}{\partial \tilde{x}^1} + O(\Delta \tilde{x}_e^1 \delta \lambda_{ie}) \right\} \end{aligned} \quad (2.3.90)$$

a podobně pro

$$\rho_e^{(n+\frac{1}{2})} = \rho_e + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_{ie}} \right) \delta \lambda_{ie} \quad \text{pro } |\delta \lambda_{ie}| \ll \lambda_e \quad (i=1,2). \quad (2.3.91)$$

Zanedbáním malých členů vyšších řádů a užitím výrazů (2.3.71) a (2.3.89) dostáváme ^{2.13)}

$$\begin{aligned} \rho_{eu}^{(n+1)} &= \rho_e \left[1 - \left(\frac{c^*}{c_e} \right)^2 \lambda_e \left(\delta \lambda_{ie}^{(n+1)} + \Delta \tilde{x}_e^1 \frac{\partial \delta \lambda_{ie}^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}^1} \right) \right] \\ \rho_e^{(n+\frac{1}{2})} &= \rho_e \left\{ 1 - \left(\frac{c^*}{c_e} \right)^2 \lambda_e \left[\theta \delta \lambda_{ie}^{(n+1)} + (1-\theta) \delta \lambda_{ie}^{(n)} \right] \right\}, \quad \text{pro } 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned} \quad (2.3.92)$$

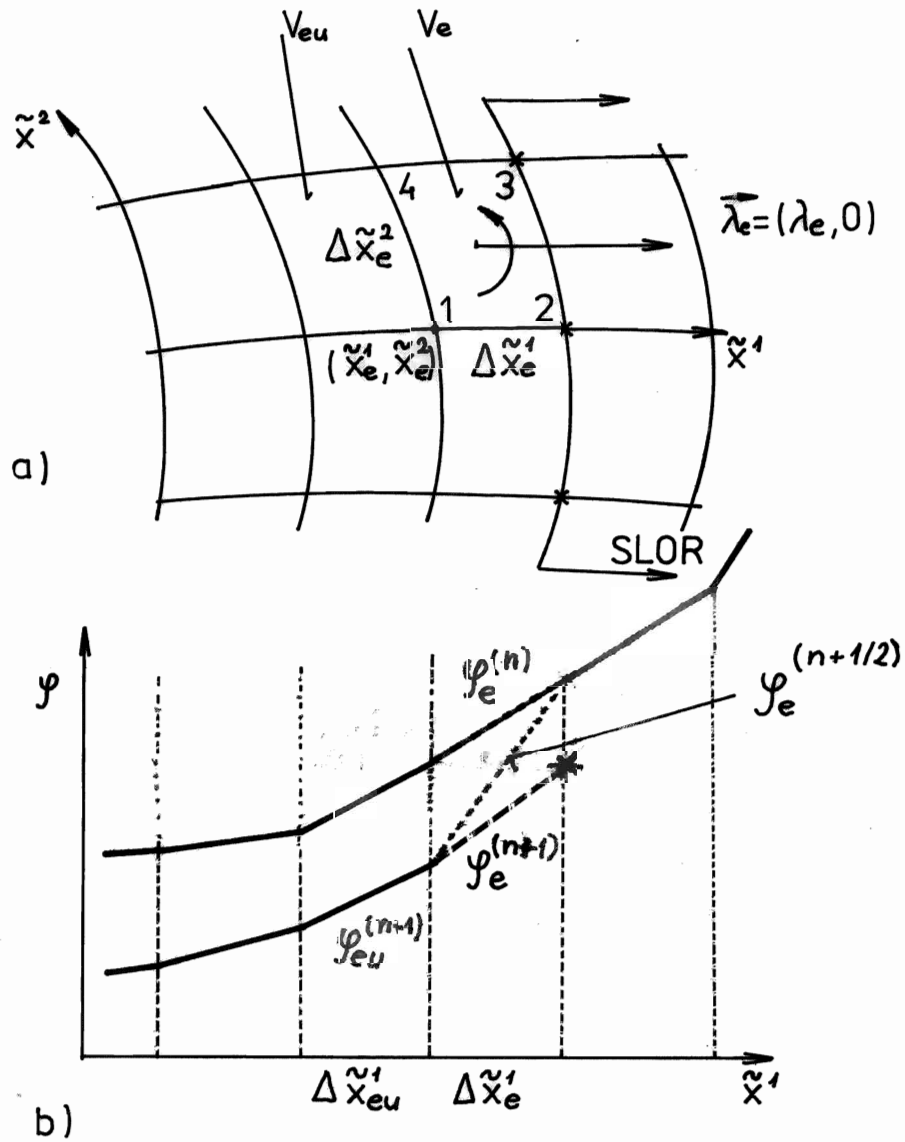
2.13)

Platí

$$|\lambda| = \left(\sum_{i=1}^2 (\lambda_{ie})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_{ie}} \right) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial |\lambda|} \right) \frac{\partial |\lambda|}{\partial \lambda_{ie}} = - \frac{2 \rho_e \lambda_{ie}}{(\mathcal{N}+1) \Lambda_e} \quad \text{i)}$$

a s ohledem na (2.3.89) je $\underline{\lambda}_e = (\lambda_e, 0)$ Potom

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_{1e}} \right) = - \frac{2 \rho_e \lambda_e}{(\mathcal{N}+1) \Lambda_e}, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_{2e}} \right) = 0. \quad \text{ii)}$$



obr. 2.13

Postup řešení hyperbolického problému (2.3.85)

a) síť konečných prvků, * uzly řešené v (n+1)-ní iteraci

b) $\varphi^{(n)}$, $\varphi^{(n+\frac{1}{2})}$, $\varphi^{(n+1)}$...

potenciály rychlosti v po sobě jdoucích iteracích

Koeficient θ určuje vzájemnou vazbu mezi $(n+1)$ -ní a n -tou iterací a volíme $\varphi_e^{(n+\frac{1}{2})} = \theta \varphi_e^{(n+1)} + (1-\theta) \varphi_e^{(n)}$, (většinou $\theta = \frac{1}{2}$) viz (2.3.88) a obr. 2.13. Hustoty (2.3.92) a rychlosti (2.3.89) dosadíme do podmínky iteračního procesu (2.3.85) a omezíme se jen na bilanci na jednom e -tém konečném prvku. Potom

Obr. 2.13 →

$$\int_{V_e} \rho_e \left\{ \left[1 - (M_e)^2 \left[(1 - \mu_{ne}) \theta + \mu_{ne} \right] \right] (\delta \lambda_{1e}^{(n+1)})^2 - (M_e)^2 (1 - \theta) (1 - \mu_{ne}) \delta \lambda_{1e}^{(n+1)} \delta \lambda_{1e}^{(n)} + \mu_{ne} (M_e)^2 \Delta \tilde{x}_e^1 \frac{\partial \delta \lambda_{1e}^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}_e^1} \delta \lambda_{1e}^{(n+1)} + (\delta \lambda_{2e}^{(n+1)})^2 \right\} dV + R_e = 0. \quad (2.3.93)$$

Při úpravě bylo pro jednoduchost zavedeno Machovo číslo, tj.

$$(M_e)^2 = \left(\frac{c^*}{c_e} \right)^2 (\lambda_e)^2 \quad \text{a zanedbali jsme veličiny malé, vyššího řádu než druhého. Veličina}$$

$$R_e = \int_{V_e} \rho_e \lambda_e \frac{\partial \delta \varphi_e^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}_e^1} dV - \int_{\partial V_e} (q_1 n_1 + q_2 n_2) \delta \varphi_e^{(n+1)} da \quad (2.3.94)$$

vyjadřuje bilanci hmotnosti ^{2.14)} na konečném prvku v přirozených souřadnicích \tilde{x}^1, \tilde{x}^2 (viz obr. 2.13a) Nazýváme ji reziduem.

2.14)

Skutečně, považujeme-li lokálně přirozené souřadnice za kartézské, tj. $\tilde{x}^i = x^i$ ($i=1,2$) tak pro integraci v (2.3.94) podle (2.3.28) a (2.3.30) platí

$$\rho_e \lambda_e \int_{V_e} \frac{\partial \delta \psi_e^{(n+1)}}{\partial \tilde{x}^1} dV = \rho_e \lambda_e \int_{\tilde{x}_e^2}^{\tilde{x}_e^2 + \Delta \tilde{x}_e^2} \left(\delta \psi_e^{(n+1)} \Big|_{\tilde{x}_e^1 + \Delta \tilde{x}_e^1} - \delta \psi_e^{(n+1)} \Big|_{\tilde{x}_e^1} \right) d\tilde{x}^2 \quad \text{i)}$$

$$\int_{\partial V_e} (q_1 n_1 + q_2 n_2) \delta \psi_e^{(n+1)} da = \int_{\tilde{x}_e^2}^{\tilde{x}_e^2 + \Delta \tilde{x}_e^2} q_1 \delta \psi_e^{(n+1)} \Big|_{\tilde{x}_e^1 + \Delta \tilde{x}_e^1} d\tilde{x}^2 + \int_{\tilde{x}_e^2 + \Delta \tilde{x}_e^2}^{\tilde{x}_e^2} q_1 \delta \psi_e \Big|_{\tilde{x}_e^1} d\tilde{x}^2 -$$

$$- \int_{\tilde{x}_e^1}^{\tilde{x}_e^1 + \Delta \tilde{x}_e^1} q_2 \delta \psi_e^{(n+1)} \Big|_{\tilde{x}_e^2} d\tilde{x}^1 - \int_{\tilde{x}_e^1 + \Delta \tilde{x}_e^1}^{\tilde{x}_e^1} q_2 \delta \psi_e^{(n+1)} \Big|_{\tilde{x}_e^2 + \Delta \tilde{x}_e^2} d\tilde{x}^1 \quad \text{ii)}$$

Dosazením do (2.3.94) dostáváme

$$q_1 = \rho_e \lambda_e, \quad q_2 = 0 \quad \text{pro} \quad V_e = \Delta \tilde{x}_e^1 \Delta \tilde{x}_e^2, \quad \text{iii)}$$

což je nulová aproximace rovnice (2.3.65) a je tím přesnější, čím jemnější je síť.

Pro další úvahy budeme předpokládat, že $R_e \rightarrow 0$.

Vyšetřujeme nyní chování rovinných harmonických poruch

$$\delta \psi_e^{(n)} = \left| \delta \psi_e^{(n)} \right| e^{-i k_j \tilde{x}^j}, \quad \delta \psi_e^{(n+1)} = \xi_e \delta \psi_e^{(n)}, \quad \text{pro} \quad k_j = \frac{2\pi}{l_j}, \quad i = \overline{1}$$

(2.3.95)

mezi dvěma po sobě jdoucími iteracemi. Jejich vlnový vektor je $k = (k_1, k_2)$ a l_1, l_2 jsou vlnové délky ve směru souřadnic \tilde{x}^1, \tilde{x}^2 . Oblastí stability iteračního procesu (2.3.85) nalezneme pomocí koeficientu zesílení ξ_e pro který musí platit nerovnost

$$|\xi_e| = \left| \frac{\delta \varphi_e^{(n+1)}}{\delta \varphi_e^{(n)}} \right| < 1 \quad (2.3.96)$$

Tuto nerovnost nazýváme podmínkou stability.

Vypočteme z poruch potenciálu (2.3.95) poruchy rychlosti, viz (2.3.89) a dosadíme do podmínky (2.3.93). Po úpravě dostaneme

$$\left\{ \xi_e \left[1 + (a_1)^2 - (M_e)^2 \left[(1 - \mu_{ne}) \theta + \mu_{ne} \right] - i \mu_{ne} (M_e)^2 a_2 \right] - (M_e)^2 (1 - \theta) (1 - \mu_{ne}) \right\} \cdot \rho_e \xi_e k_1^2 |\delta \varphi_e^{(n)}|^2 \int_{V_e} e^{-2i k_j \tilde{x}^j} d\tilde{v} = 0 \quad (2.3.97)$$

resp.

$$\xi_e = \frac{(1 - \theta) (1 - \mu_{ne}) (M_e)^2}{1 + (a_1)^2 - (M_e)^2 \left[(1 - \mu_{ne}) \theta + \mu_{ne} \right] - i \mu_{ne} a_2 (M_e)^2} \quad (2.3.98)$$

kde

$$a_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad l_1 = m_1 \Delta \tilde{x}^1, \quad l_2 = m_2 \Delta \tilde{x}^2 \quad \text{pro } m_1, m_2 = 2, 3, \dots$$

$$a_2 = \frac{2\pi \Delta \tilde{x}_e^1}{l_1} = \frac{2\pi}{m}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (2.3.99)$$

Vlnové délky poruch (2.3.95) jsou při bilineárních aproximačních funkcích (2.3.10) vždy celým násobkem rozměrů sítě. Podmínka stability (2.3.96) tudíž vede na kvadratickou nerovnici pro μ_{ne} , tj.:

$$P(\mu_{ne}) = b_1 \mu_{ne}^2 + b_2 \mu_{ne} + b_3 \geq 0, \quad (2.3.100)$$

kde $b_1 = (a_2)^2 (M_e)^4$, $b_2 = -2(1-\theta)(M_e)^2 [1 + (a_1)^2 - (M_e)^2]$

$$b_3 = [1 + (a_1)^2] [1 + (a_1)^2 - 2\theta(M_e)^2] - (1-2\theta)(M_e)^4. \quad (2.3.101)$$

Omezíme se na případ s $\theta = \frac{1}{2}$, kdy předpokládáme, že příspěvky v n -té a $(n+1)$ -ní rovině jsou stejné, takže aproximace potenciálu na e -tém konečném prvku je při aproximačních funkcích (2.3.10) rovna

$$\varphi_e^{(n+\frac{1}{2})} = \varphi_{\bar{n}_1}^{(n+1)} \psi_1 + \varphi_{\bar{n}_4}^{(n+1)} \psi_4 + \varphi_{\bar{n}_2}^{(n)} \psi_2 + \varphi_{\bar{n}_3}^{(n)} \psi_3 \quad (2.3.102)$$

viz obr.2.13a). Nerovnice (2.3.100) je splněna pro libovolné μ_{ne} při záporném diskriminantu, tj. za současného splnění podmínek

$$(a_2)^2 > \frac{1 + (a_1)^2 - (M_e)^2}{4[1 + (a_1)^2]} \quad (2.3.103)_1$$

$$1 + (a_1)^2 - (M_e)^2 > 0. \quad (2.3.103)_2$$

Je-li některá z těchto podmínek porušena, má kvadratický polynom $P(\mu_{ne}) = 0$ reálné kořeny, určující hranice stability. Zajímá nás vždy ten větší, tj.

$$\mu_{ne} = \frac{(M_e)^2 - 1 - (a_1)^2}{2(a_2)^2(M_e)^2} \left\{ -1 \mp \left[1 + \frac{4(a_2)^2 [1 + (a_1)^2]}{(M_e)^2 - 1 - (a_1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} .$$

(2.3.104)

Je-li porušena podmínka (2.3.103)₁, pak platí horní znaménko a při porušení (2.3.103)₂ znaménko spodní. Oba případy je nutno brát v úvahu. Omezíme se na případ druhý, který nastává na malých sítích, např. 40 x 12. Potom lze přibližně určit mezní (nejmenší) hodnoty numerické viskozity podle vztahu:

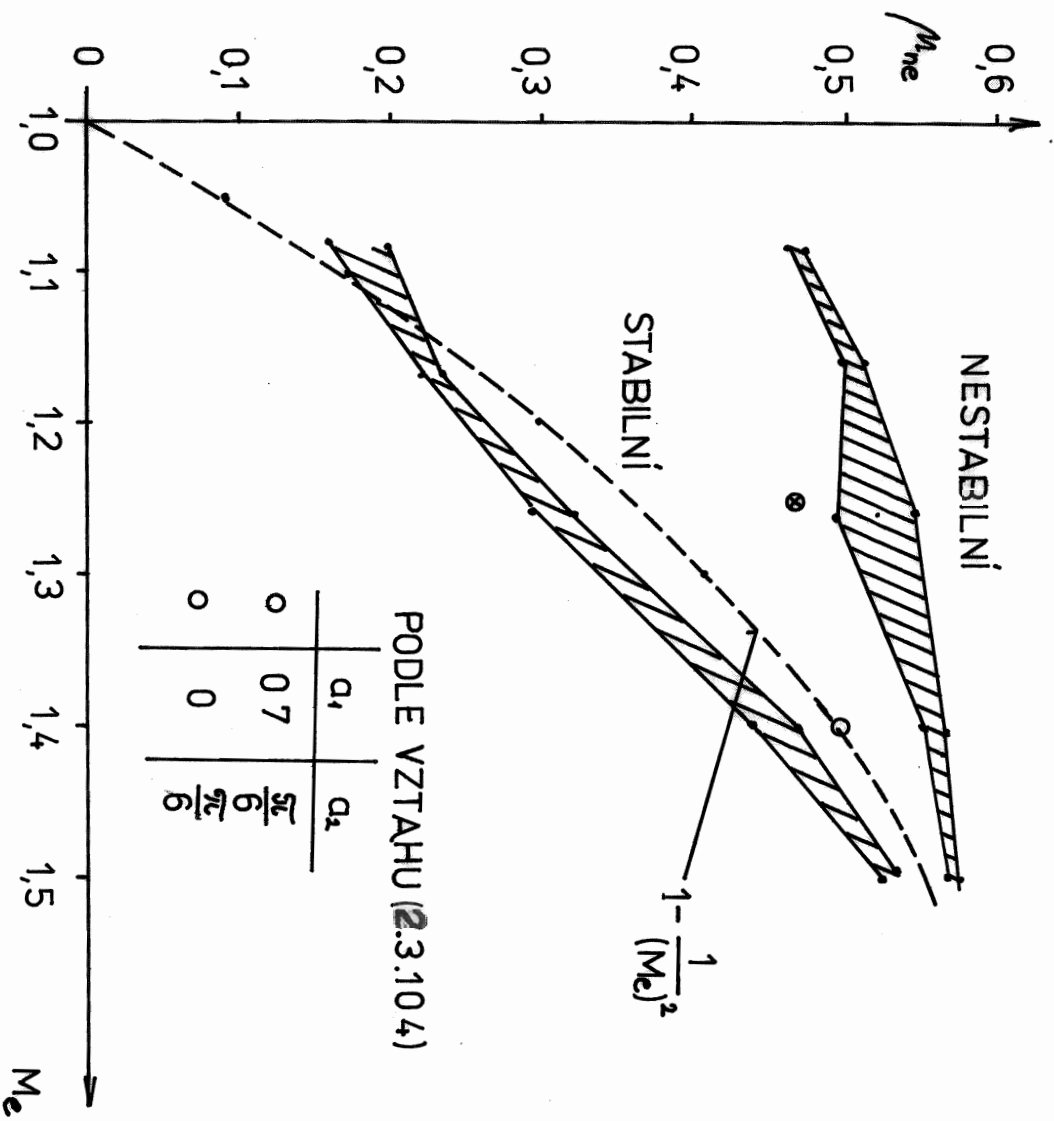
$$\mu_{ne} = \frac{1 + (a_1)^2}{(M_e)^2} \quad \text{pro} \quad M_e^2 - 1 - (a_1)^2 \gg 4(a_2)^2 [1 + (a_1)^2] , \quad (2.3.105)$$

který vyhovuje pro rozsáhlé hyperbolické oblasti ve směru proudu, tj. $a_2 = \frac{2\pi}{m} \rightarrow 0$ nebo vztahu

$$\mu_{ne} = \frac{(M_e)^2 - 1 - (a_2)^2}{2(a_2)^2(M_e)^2} \left[2a_2 \sqrt{\frac{1 - (a_1)^2}{(M_e)^2 - 1 - (a_1)^2}} - 1 \right]$$

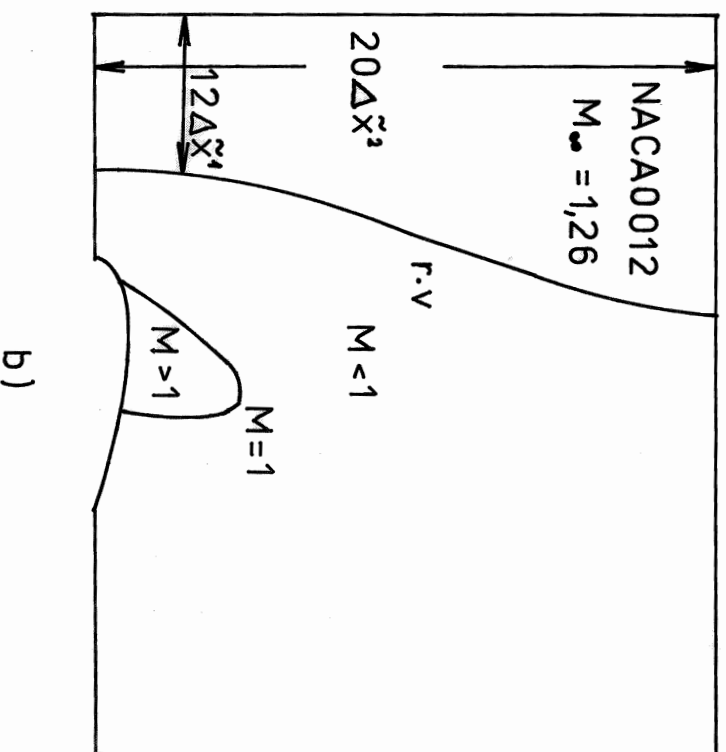
$$\text{pro} \quad 4(a_2)^2 [1 + (a_1)^2] \gg (M_e)^2 - 1 - (a_1)^2 > 0, \quad (2.3.106)$$

který platí především pro krátké hyperbolické oblasti ve směru proudu, tj. $a_2 \rightarrow \pi$. Při praktických výpočtech se nejčastěji užívá koeficient numerické vazkosti ve tvaru (Deconinck,



a)

Obr. 2.14



Numerické testování stability iteracího procesu (2.3.85)
 a - oblasti stability pro rychlostní pole na obr. b); b - poloha rázové vlny (r.v.)
 a zvukové čáry ($|M| = 1$)

Hirsch, 1982; Daněk, 1986)

$$\mu_{ne} = \mu_0 \max(0, f(M_{eu}), f(M_e)),$$

(2.3.107)

kde μ_0 je konstanta, nelišící se příliš od jedné a funkce $f(M)$ je tvaru

$$f(M) = 1 - \frac{1}{M^2},$$

(2.3.108)

srovnej se vztahem (2.3.81) z hyperbolicity rovnice

Tvar této funkce odvodil z podmínky zachování bilance hmotnosti (I.4.1.5) pro hustotu závisící na čase, první

A. Jameson (1975). Tato závislost plyne i ze vztahu (2.3.104)

za předpokladu $\frac{1+(a_1)^2}{(M_e)^2 - 1 - (a_1)^2} = 1 + (a_2)^2$. Dostáváme tak vzorec

$$\mu_{ne} = 1 - \frac{1}{(M_e)^2} - \frac{(a_1)^2}{(M_e)^2},$$

(2.3.109)

který přibližně platí jak pro $(M_e)^2 \rightarrow 1, (a_1)^2 \rightarrow 0, a_2 \rightarrow \pi$ (malé supersonické oblasti), tak i pro $(M_e)^2 \rightarrow 2$ a $a_2 \rightarrow 0$, což jsou podmínky, odpovídající většině běžně řešených případů, viz např. obr. 2.19d) Numerické testy stability, které byly provedeny pro proudění v kanálu se supersonickým vstupem, viz obr. 2.14b) ukazují, že koeficient μ_{ne} musí záviset i na rozměrech supersonické oblasti, resp. počtu prvků, viz obr. 2.14a) (Daněk, 1987).

obr. 2.14

Uvedená analýza stability iteračního procesu (2.3.85) ukazuje, že

- subsonické proudění $|M|^2 < 1$ (tj. eliptický problém) konverguje bez numerické viskozity (tj. $\mu_{ne} = 0$)

$$|\xi_e| = \frac{(1-\theta)(M_e)^2}{1+(a_1)^2-\theta(M_e)^2} < 1 \quad \text{pro } \theta \in (0,1) \quad (2.3.110)$$

- existují nějaké mezní hodnoty μ_{ne} (2.3.104), mezi kterými je iterační proces stabilní, a které závisí na vlnových délkách l_1, l_2 poruch, šířících se v supersonické oblasti,
- koeficient zesílení (2.3.98) je nejmenší pro nejkratší vlnové délky ve směru proudu

$$|\xi_e| \approx \frac{(1-\theta)(1-\mu_{ne})}{\mu_{ne} a_2} = \frac{(1-\theta)(1-\mu_{ne})}{\pi \mu_{ne}},$$

tudíž na hrubých sítích konverguje výpočet nejrychleji. Tato vlastnost iteračního procesu (2.3.85) s metodou SLOR je dominantní pro zavedení metody multigrid, viz následující kapitola.

Poznámka:

Pro $\mu_{ne}=1$ je podle vztahu (2.3.98) výpočtový proces (2.3.85) vždy stabilní. Avšak řešená rovnice pak není rovnicí bilance hmotnosti (2.3.65) ani v nulté aproximaci. Dosazením do (2.3.85) a úvahou provedenou v pozn. 2.14) plyne $q_1 = \rho_e u \lambda_e$ narozdíl od $q_1 = \rho_e \lambda_e$.

2.3.6 Zrychlení iteračního procesu metodou multigríd

Aplikace metody multigríd (střídání velikosti sítě během výpočtu) při řešení parciálních diferenciálních rovnic souvisí s iteračními metodami (2.15), užívanými k řešení odpovídajících soustav lineárních algebraických rovnic. Důležitou vlastností iteračních metod je jejich vyhlazující účinek, tj. nejvíce se tlumí poruchy (odchyly od přesného řešení) s nejkratšími vlnovými délkami (Godunov, Rjabenkiĭ, 1973; Baker, 1983). Tuto vlastnost ukážeme na problému subsonického proudění formulovaného jako výpočet extrému (2.3.68) metodou konečných prvků.

2.15)

Úkolem je řešit lineární algebraickou rovnici

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} u_j = b_i \quad \text{pro } i=1,2,\dots,N, \quad \underline{A}\underline{u} = \underline{b} \quad \text{i)}$$

relaxační metodou (Varga, 1962; Ralston, 1978). Matici A rozložíme na součet

$$\underline{A} = \underline{L} + \underline{D} + \underline{U} \quad \text{ii)}$$

kde \underline{L} , resp. \underline{U} je ostře dolní, resp. horní trojúhelníková matice a \underline{D} je diagonála. Iterace superrelaxační metody (SOR - Successive Overrelaxation) jsou dány

$$(\underline{D} + \omega \underline{L}) \underline{u}^{(n+1)} = [(1-\omega)\underline{D} - \omega \underline{U}] \underline{u}^{(n)} + \omega \underline{b}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad \text{iii)}$$

resp.

$$a_{ii} u_i^{(n+1)} = (1-\omega) a_{ii} u_i^{(n)} - \omega \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{(n+1)} + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} u_j^{(n)} - b_i \right]$$

(nesčítá se přes i).

Zde ω je tzv. relaxační faktor sloužící k urychlování, popř. zpomalování konvergence. Nejčastěji je z intervalu $\omega \in (0,2)$ a např. pro Laplaceovu rovnici je jeho optimální hodnota přibližně $\omega_{opt} = 1,7$. Při výpočtu se postupuje tak, že ze známého

$$U^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_N^{(n)}) \quad \text{se postupně podle iii) počítá}$$

$$u_1^{(n+1)}, u_2^{(n+1)}, \dots, u_N^{(n+1)}.$$

V praxi se velmi často užívá bloková relaxační metoda plynoucí z iii), jestliže prvky vektorů u_i, b_i a prvky matice a_{ij} nahradíme bloky, tj.

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MM} \end{bmatrix} \quad \text{iv)}$$

Potom

$$A_{II} u_I^{(n+1)} = (1-\omega) A_{II} u_I^{(n)} - \omega \left[\sum_{j=1}^{I-1} A_{IJ} u_j^{(n+1)} + \sum_{j=I+1}^M A_{IJ} u_j^{(n)} - \underline{b}_I \right] = \underline{C}_I, \quad \text{v)}$$

přičemž v každém kroku (relaxaci) musíme řešit soustavu rovnic

$$A_{II} u_I^{(n+1)} = \underline{C}_I \quad . \quad \text{Řád této soustavy je malý (např. } 13^{\overline{2}} \text{)}$$

což je počet uzlů napříč řešeným polem, viz obr. 2.19a) a lze snadno provést např. Gaussovu eliminaci.

Jednou z často užívaných variant blokové metody SOR je tzv. SLOR (Successive line overrelaxation), ve které bloky odpovídají jedné řadě (sloupci) nůdu.

Předpokládejme ortogonální síť a aproximaci potenciálu rychlosti pomocí bilineárních funkcí (2.3.10). Uvažujeme relaxační metodu SLOR probíhající v kladném směru osy x^1 , viz obr. 2.15a)

Řešení na e -tém konečném prvku je pak dáno vztahem

$$\varphi^{(n + \frac{1}{2})} = \psi_1 \varphi_1^{(n+1)} + \psi_4 \varphi_4^{(n+1)} + \psi_2 \varphi_2^{(n)} + \psi_3 \varphi_3^{(n)}, \quad (2.3.111)$$

kde $\varphi_1^{(n+1)}, \varphi_4^{(n+1)}$ jsou neznámé hodnoty potenciálu v 1. a 4. nódu. $\varphi_2^{(n)}, \varphi_3^{(n)}$ jsou hodnoty známé z předchozí iterace.

Jde o iterační proces odpovídající rozšířenému variačnímu počtu (2.3.68) a je dán podmínkou

$$\int_{V_e} \rho^{(n)} \left[\frac{\partial \varphi^{(n+\frac{1}{2})}}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial \delta \varphi^{(n+1)}}{\partial \bar{x}^1} + \frac{\partial \varphi^{(n+\frac{1}{2})}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \delta \varphi^{(n+1)}}{\partial \bar{x}^2} \right] d\vartheta - \int_{\partial V_e} \sum_{i=1}^2 q_i n_i \delta \varphi^{(n+1)} da = 0.$$

(2.3.112)

Variaci (poruchu v $(n+1)$ -ní a v n -té časové rovině) $\delta \varphi^{(n+1)}, \delta \varphi^{(n)}$ aproximujeme obvyklým způsobem (2.3.39)₃, tj.

$$\delta \varphi^{(n+1)} = \sum_{\ell=1}^4 \psi_{\ell} \delta \varphi_{\ell}^{(n+1)}, \quad \delta \varphi^{(n)} = \sum_{\ell=1}^4 \psi_{\ell} \delta \varphi_{\ell}^{(n)}.$$

(2.3.113)

Dosažením (2.3.111) a (2.3.113) do (2.3.112) a užitím pro $\rho^{(n)}$ vztahu (2.3.92)₂ (kde musí být $\vartheta=0$) dostáváme

$$\sum_{m,\ell=1}^4 (A_{m\ell} \delta \varphi_{\ell}^{(n+1)} + B_{m\ell} \delta \varphi_{\ell}^{(n)} + R_{1m}) \delta \varphi_{1m}^{(n+1)} = 0.$$

(2.3.114)

Matice $A_{m\ell}, B_{m\ell}$ u neznámých variací v nódech $\delta \varphi_{\ell}^{(n+1)}, \delta \varphi_{\ell}^{(n)}$ považujeme na konečném prvku za konstantní. S ohledem na (2.3.

51)_{1,2} pro uvedené matice platí

$$A_{ml} = \frac{\rho}{6} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\rho}{6} \frac{\Delta x}{\Delta y} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2.3.115)

$$B_{ml} = -(M)^2 \frac{\rho \Delta y}{6 \Delta x} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + [1 - (M)^2] \frac{\rho \Delta y}{6 \Delta x} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\rho \Delta x}{6 \Delta y} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

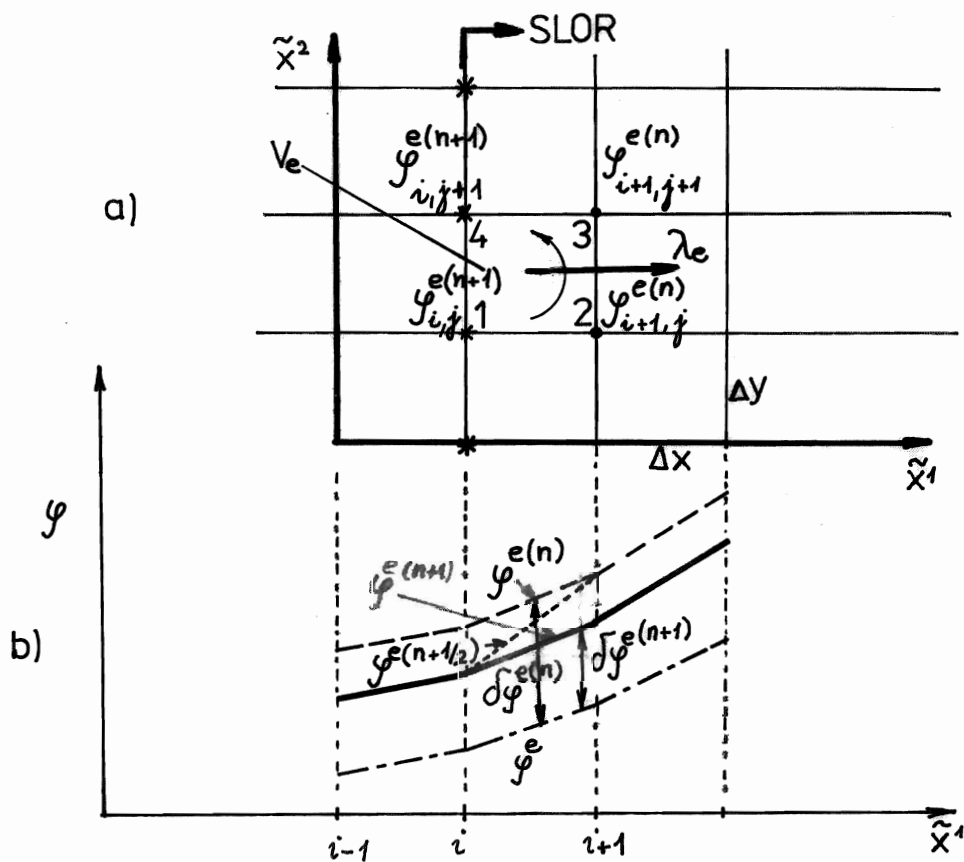
(2.3.116)

vektor R_m je určen výrazem (2.3.94). Dosadíme za

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial \xi^l} \quad (l=1,2,3,4)$$

a po integraci zjistíme, že díky (2.3.52)₂ jsou jeho složky nulové. Platí totiž $q_1 = \rho \lambda_1$, $q_2 = 0$ (srovnej se vztahem iii) v ^{2.13}) a jde o bilanci hmotnosti na pravoúhlém konečném prvku v přirozených souřadnicích ^{2.9}).

Naším cílem je nalézt koeficient zesílení $\xi = \frac{\delta \psi_l^{(n+1)}}{\delta \psi_l^{(n)}} \quad (l=1,2,3,4)$ odpovídající relaxační metodě SLOR ^{2.14}) pro iterační proces (2.3.112). Proto je třeba analyzovat vlastnosti rovnice (2.3.114). Matice (2.3.115) a (2.3.116) přepíšeme do přehledného tvaru



Obr. 2.15

- a) síť konečných prvků s vyznačením postupu řešení metodou SLOR, * ... hodnoty řešení v (n+1)-ní iteraci
- b) schématický průběh potenciálů $\varphi^{e(n)}$, $\varphi^{e(n+1)}$, $\delta\varphi^{e(n)}$, $\delta\varphi^{e(n+1)}$ jsou odchylky od přesného řešení φ^e na e-tém konečném prvku

$$A_{ml} = \frac{\rho}{6\Delta} \begin{bmatrix} 2+2\Delta^2 & 0 & 0 & 1-2\Delta^2 \\ -2+\Delta^2 & 0 & 0 & -1-\Delta^2 \\ -1-\Delta^2 & 0 & 0 & -2+\Delta^2 \\ 1-2\Delta^2 & 0 & 0 & 2+2\Delta^2 \end{bmatrix}, \text{ kde } \Delta = \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

(2.3.117)

$$B_{ml} = \frac{\rho}{6\Delta} \begin{bmatrix} -2(\underline{M})^2 & -2\gamma+\Delta^2 & -\gamma-\Delta^2 & -(\underline{M})^2 \\ 2(\underline{M})^2 & 2\gamma+2\Delta^2 & \gamma-2\Delta^2 & (\underline{M})^2 \\ (\underline{M})^2 & \gamma-2\Delta^2 & 2\gamma+2\Delta^2 & 2(\underline{M})^2 \\ -(\underline{M})^2 & -\gamma-\Delta^2 & -2\gamma+\Delta^2 & -2(\underline{M})^2 \end{bmatrix}, \text{ kde } \gamma = 1 - (\underline{M})^2.$$

(2.3.118)

Pro určení stability iteračního procesu jsou důležitá vlastní čísla soustavy

$$\sum_{\ell=1}^4 A_{m\ell} \delta\varphi_{\ell}^{(n+1)} + B_{m\ell} \delta\varphi_{\ell}^{(n)} = 0 \quad \text{pro } m=1,2,3,4.$$

(2.3.119)

Určení vlastních čísel matice $B^{-1}A$ je obtížné, omezíme se proto na případ harmonické poruchy (2.3.95) a nalezení změny její amplitudy po vynásobení maticemi $A_{m\ell}$, $B_{m\ell}$. Hodnoty poruch

$\delta\varphi_{\ell}^{(n)}$, $\delta\varphi_{\ell}^{(n+1)}$ pro $\ell = 2,3,4$ jsou závislé na poruše $\delta\varphi_{1j}^{(n)}$

v bodu 1, viz obr. 2.15a) tj.

$$(\delta\varphi_{11}^{(n)}, \delta\varphi_{12}^{(n)}, \delta\varphi_{13}^{(n)}, \delta\varphi_{14}^{(n)}) = (\delta\varphi_{1j}^{(n)}, \delta\varphi_{1j}^{(n)} e^{-ik_1\Delta x}, \delta\varphi_{1j}^{(n)} e^{-i(k_1\Delta x + k_2\Delta y)}, \delta\varphi_{1j}^{(n)} e^{-ik_2\Delta y})$$

(2.3.120)

Obr. 2.15

$$\delta\varphi_l^{(n+1)} = \xi \delta\varphi_l^{(n)} \quad \text{pro } l=1,2,3,4. \quad (2.3.121)$$

Soustava rovnic (2.3.119) vede na jedinou rovnici

$$\sum_{l=1}^4 A_{1l} \delta\varphi_l^{(n+1)} + B_{1l} \delta\varphi_l^{(n)} = 0, \quad (2.3.122)$$

kterou lze upravit do tvaru, z něhož je možno určit velikost koeficientu zesílení

$$\xi = \frac{\delta\varphi_{ij}^{(n+1)}}{\delta\varphi_{ij}^{(n)}} = \frac{2(M)^2 + (2\gamma - \Delta^2)e^{-ik_1\Delta x} + (\gamma + \Delta^2)e^{-i(k_1\Delta x + k_2\Delta y)} + (M)^2 e^{-ik_2\Delta y}}{2(1 + \Delta^2) + (1 - 2\Delta^2)e^{-ik_2\Delta y}} \quad (2.3.123)$$

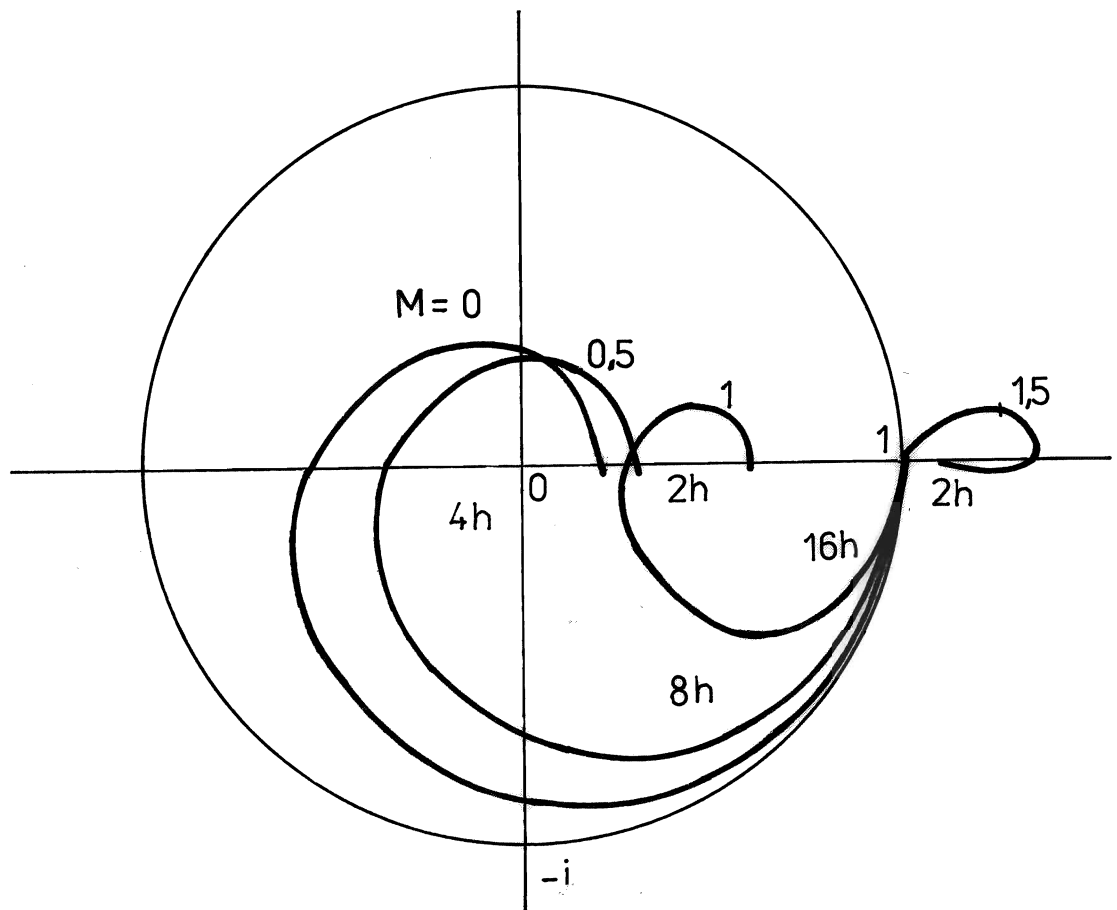
Pro jednoduchost předpokládáme pravidelnou síť

$$\Delta x = \Delta y = h, \quad \Delta = 1,$$

$$k_1\Delta x = k_2\Delta y = \beta = \frac{2\pi}{l}h, \quad l = \frac{2\pi}{\beta}h = mh \quad (m=2,3,\dots), \quad (2.3.124)$$

kde harmonická porucha má vlnovou délku l . Potom koeficient zesílení má tvar

$$\xi(M^2 e) = \frac{A_s - iB_s}{C_s + iD_s} = \frac{A_s C_s - B_s D_s}{C_s^2 + D_s^2} - i \frac{C_s B_s + A_s D_s}{C_s^2 + D_s^2}, \quad (2.3.125)$$



obr. 2.16

Průběh koeficientu zesílení ξ vztah (2.3.125)
 pro iterační metodu SLOR (iterační proces (2.3.112)
 na pravidelné síti ($\Delta x = \Delta y = h$)
 ($|\xi| \geq 1$ pro $M \geq 1,33$)

kde

$$A_s = 2|M|^2 + (1-|M|^2)\cos\beta + (2-|M|^2)\cos 2\beta$$

$$B_s = (1-|M|^2)\sin\beta + (2-|M|^2)\sin 2\beta$$

$$C_s = 4 - \cos\beta, \quad D_s = \sin\beta,$$

jehož průběh je znázorněn na obr. 2.16. Odtud je zřejmé, že metodou SLOR jsou nejvíce tlumeny krátké vlnové délky $2h, 4h, 8h$.^{2,16)}

Obr. 2.16 →

2.16)

Stejným postupem lze dokázat, že pro Gaussovu eliminační metodu (v aproximaci (2.3.111)) budou na místo $\varphi_2^{(n)}, \varphi_3^{(n)}$ hodnoty

$\varphi_2^{(n+1)}, \varphi_3^{(n+1)}$) dostáváme koeficient zesílení

$$\xi = \frac{(M)^2}{1 + \Delta^2} \quad 1)$$

Tudíž žádná závislost na vlnové délce poruchy, neexistuje.

Na této vlastnosti je založena metoda multigrid, ve které se periodicky mění velikost oka sítě $h, 2h, 4h, \dots$ a zpět. Potom na nejhrubších sítích, kde se nemohou realizovat vlnové délky s velkým m , $\ell = mh$ dochází ke konvergenci výpočtu. Aby se informace o řešení při přechodu mezi hrubými a jemnými sítěmi neztrácela, je třeba řešení vhodně extrapolovat a interpolovat.

Základní idea metody multigrid pro Laplaceovu rovnici pochází od Fedorenka (1961). Dále pak byla rozpracována Brandtem (1977) a Hackbuschem (1985) pro eliptické problémy, v metodě konečných prvků pro hyperbolické problémy Deconinckem, Hirschem (1982) a Daňkem (1986, 1987). Důležitým pojmem této metody je tzv. reziduum řešeného problému definované dále.

Hledejme řešení nějakého diferenciálního operátoru typu (2.1.1) metodou konečných prvků (např. bilineárních) tak, že (2.3.37), resp. (2.3.38) budou výchozí podmínkou numerického řešení. Tuto podmínku formálně píšeme

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}(\varphi, \delta\varphi) &= \int_V T(\varphi) \delta\varphi \, d\mathcal{V} + \int_{\partial V_2} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - q_i \right) n_i \delta\varphi \, da = \\ &= \sum_{e=1}^E \sum_{l=1}^4 \left\{ \int_{V_e} T \left(\sum_{k=1}^4 \psi_k \varphi_{\tilde{n}_k} \right) \psi_l \, d\mathcal{V} + \int_{\partial V_{e2}} (\dots) \psi_l \, da \right\} \delta\varphi_{\tilde{n}_l} = \\ &= \int_V \sum_{i=1}^{N^h} \hat{T}(\varphi) \psi_i \delta\varphi_i \, d\mathcal{V} = \sum_{i=1}^{N^h} R_i^h \delta\varphi_i^h = 0, \end{aligned}$$

(2.3.126)

přičemž jsme do operátoru $\hat{T}(\varphi)$ zahrnuli i povrchovou integraci, kterou nebudeme nadále kvůli zkrácení zápisu explicitně vyjadřovat. Definujeme reziduum na síti konečných prvků s charakteristickým rozměrem h (např. $h = \max(\Delta x^1, \Delta x^2)$) vztahem

$$R_i^h = \int_V \hat{T}(\varphi) \psi_i^h \, d\mathcal{V} \quad \text{pro } i=1, 2, \dots, N^h, \quad (2.3.127)$$

kde N^h je počet nódů sítě a ψ_i^h jsou odpovídající aproximační funkce. Při konkrétním výpočtu v n -té iteraci dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic (2.3.40). Předpokládejme, že její řešení je $\varphi_{\tilde{n}_m}^{(n)}$ a je známé. Potom reziduum pro celou řešenou oblast v n -té iteraci definujeme jako vektor

$$R_{\tilde{n}_k}^{(n)h} = \sum_{e,m=1}^{E^h, 4} (A_{\tilde{n}_k \tilde{n}_m}^{(n)h} \varphi_{\tilde{n}_m}^{(n)h} - P_{\tilde{n}_k}^{(n)h}) \quad \text{pro } \tilde{n}_k = 1, 2, \dots, N^h \\ n = 0, 1, \dots \quad (2.3.128)$$

Zavedeme-li pouze globální notaci, viz kap. 2.3.1, tak můžeme pro n -tou iteraci psát

$$R_i^{(n)h} = \sum_{j=1}^{N^h} (A_{ij}^{(n)h} \varphi_j^{(n)h} - P_i^{(n)h}) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N^h \\ n = 0, 1, \dots \quad (2.3.129)$$

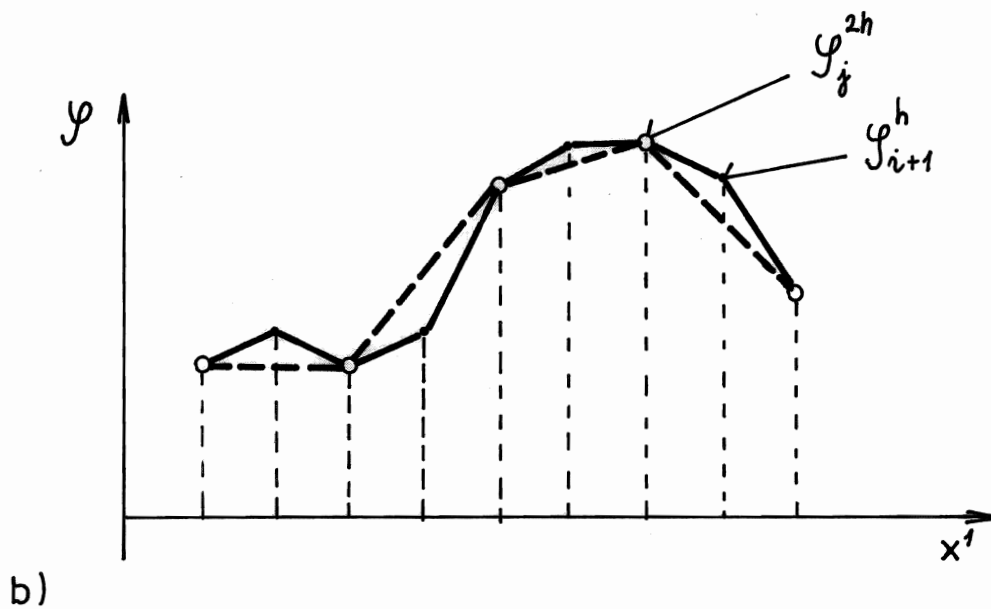
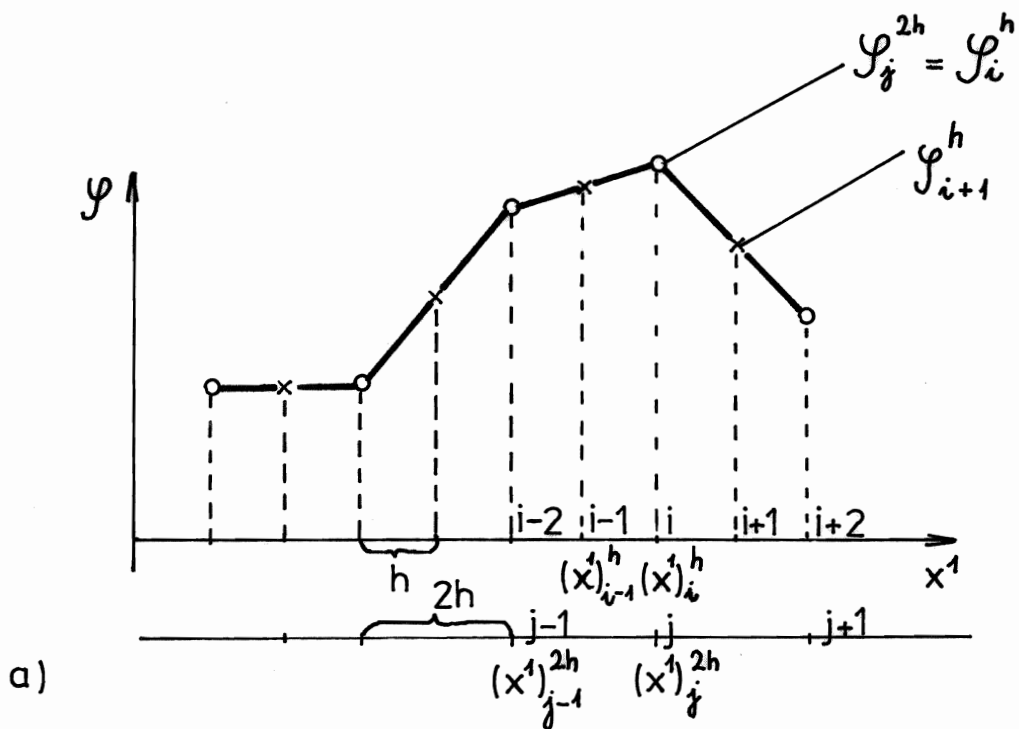
V případě nelineárního problému, např. (2.3.112), (2.3.85), závisí matice $A_{ij}^{(n)h}$ na řešení $\varphi_j^{(n)h}$. Vektor pravé strany může obecně záviset i na řešení φ (např. pro $q_i = q_i(\varphi)$), a označíme ho $P_i^{(n)h}$.

Provádíme-li výpočty na síti s charakteristickým rozměrem $2h$, získáme řešení $\varphi_j^{(n)2h}$ ($i = 1, 2, \dots, N^{2h}$) a reziduum (2.3.127), resp. (2.3.129) definujeme

$$R_j^{2h} = \int_V \hat{T}(\varphi) \psi_j^{2h} dv, \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, N^{2h} \quad (2.3.130)$$

resp.

$$R_j^{(n)2h} = \sum_{k=1}^{N^{2h}} (A_{jk}^{(n)2h} \varphi_k^{(n)2h} - P_j^{(n)2h}), \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, N^{2h} \\ n = 0, 1, \dots \quad (2.3.121)$$



obr. 2.17

Působení operátorů interpolace I_h^{2h} a restrikce I_{2h}^h
v jednorozměrném případě

a) interpolace funkce φ_i^h na funkci φ_j^{2h} ($I_{j,i} = 1, I_{j,i-1} = I_{j,i+1} = \frac{1}{2}$)

b) restrikce φ_j^{2h} (čárkovaná čára) na φ_i^h (plná čára)

Protože několik iterací výpočtu probíhá na síti h a několik na síti $2h$ je třeba při přechodu ze sítě $2h \rightarrow h$ interpolovat řešení, viz obr. 2.17a). Při přechodu na další síť (tj. $h \rightarrow 2h$, $2h \rightarrow 4h$) je postup analogický a proto se omezíme jen na dvě sítě.

Obr. 2.17

Definujeme operátor interpolace funkce I_{2h}^h vztahem

$$\varphi_i^h = (I_{2h}^h \varphi^{2h})(\underline{x})_i^h = \sum_{j=1}^{N^{2h}} \psi_j^{2h}((\underline{x})_i^h) \varphi_j^{2h} = \sum_{j=1}^{N^{2h}} I_{ji} \varphi_j^{2h}$$

pro $i = 1, 2, \dots, N^{2h}$, (2.3.132)

přičemž jsme použili aproximace funkce na síti $2h$ ve tvaru

$$\varphi^{2h}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{N^{2h}} \psi_j^{2h}(\underline{x}) \varphi_j^{2h}$$

(2.3.133)

(vznikne spojením vztahů (2.3.6) a (2.3.7)). Zde \underline{x} je vektor polohy bodu a ve dvourozměrném prostoru je $\underline{x} = (x^1, x^2)$.

$(\underline{x})_i^h$ jsou souřadnice uzlů sítě h a matice I_{ji} je pak určena svými prvky

$$I_{ji} = \psi_j^{2h}((\underline{x})_i^h) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N^h, j = 1, 2, \dots, N^{2h}. \quad (2.3.134)$$

Pro bilineární prvky (2.3.10) a rovnoměrnou síť jde o obvyklou lineární interpolaci, viz obr. 2.17a).

Při přechodu ze sítě $h \rightarrow 2h$ je třeba řešení zúžit, viz obr. 2.17b). Definujeme operátor I_h^{2h} restrikce řešení vztahem

$$\varphi_j^{2h} = (I_h^{2h} \varphi^h)(\underline{x})_j^{2h} = \varphi_i^h \quad \text{pro } (\underline{x})_i^h = (\underline{x})_j^{2h}.$$

(2.3.135)

Jde o vypuštění těch hodnot, φ_i^h , jejichž nody na hrubé síti nejsou a jak je z obr. 2.17b) patrně ztrácí se při restrikci velké množství informace o řešení. Aby se výpočtem na hrubé síti řešení příliš "nepokazilo", je třeba definovat vhodným způsobem restrikci rezidua.

Aproximační funkce $\psi_j^{2h}(\underline{x})$ na síti $2h$ vyjádříme pomocí aproximačních funkcí $\psi_i^h(\underline{x})$ na síti h , tj. stejně jako při interpolaci (2.3.133). Tudiž

$$\psi_j^{2h}(\underline{x}) \approx \sum_{i=1}^{N^h} \psi_i^h(\underline{x}) \psi_j^{2h}(\underline{x}_i^h) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, N^{2h} \quad (2.3.136)$$

a reziduum na síti $2h$ (2.3.130) je pak rovno

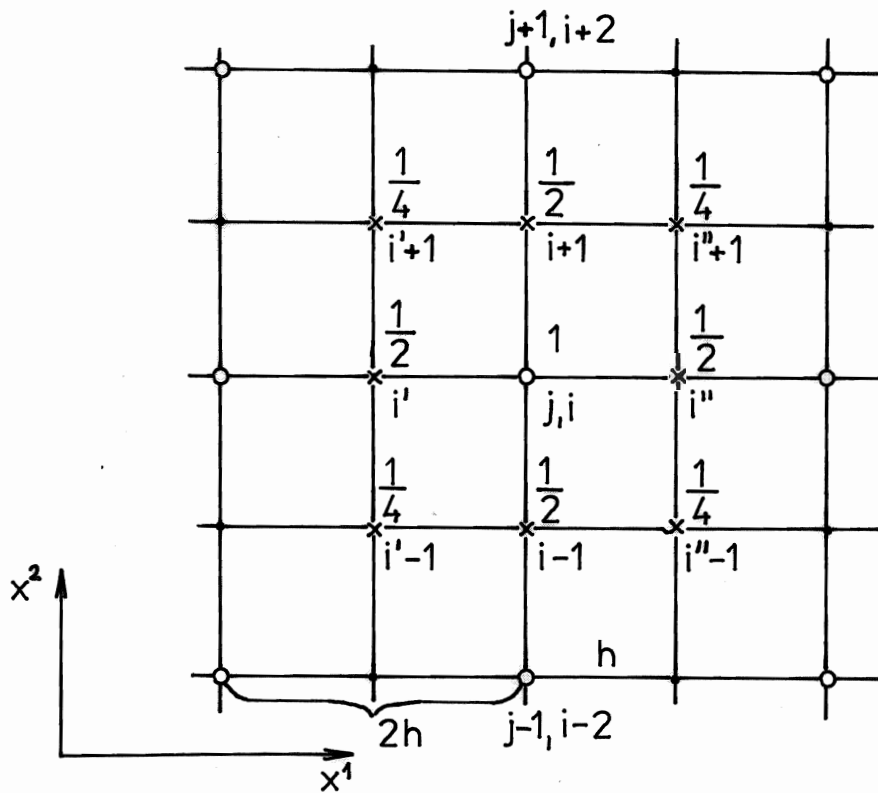
$$\begin{aligned} R_j^{2h} &\approx \int_V \sum_{i=1}^{N^h} \hat{T}(\varphi) \psi_i^h(\underline{x}) \psi_j^{2h}(\underline{x}_i^h) dV = \sum_{i=1}^{N^h} \psi_j^{2h}(\underline{x}_i^h) \int_V \hat{T}(\varphi) \psi_i^h(\underline{x}) dV = \\ &= \sum_{i=1}^{N^h} \psi_j^{2h}(\underline{x}_i^h) R_i^h = \sum_{i=1}^{N^h} I_{ji} R_i^h \end{aligned} \quad (2.3.137)$$

Matice I_{ji} je definována vztahem (2.3.134). Zavedeme-li formálně restrikci rezidua pomocí operátoru ${}^R I_h^{2h}$ jako

$$R_j^{2h} = ({}^R I_h^{2h} R)_j \quad (2.3.138)$$

tak porovnáním s (2.3.137) a (2.3.132) plyne důležitý vztah

$$\left(I_{2h}^h \right)^T = {}^R I_h^{2h} \quad (= I_{ji}) \quad (2.3.139)$$



obr. 2.18

Restrikce rezidua operátorem $R_{\frac{2h}{h}}$

- uzly síťe h , tj. body $(\underline{x})_i^h$
- uzly síťe $2h$, tj. body $(\underline{x})_j^{2h}$
- × uzly odpovídající nenulovým koeficientům matice (operátoru) $R_{\frac{2h}{h}}$ (2.3.139) s odpovídajícími hodnotami $I_{j,i}$

vyjadřující, že matice operátoru interpolace I_{2h}^h je transponovaná matice operátoru restrikce rezidua. Na rovnoměrných sítích ve dvourozměrném případě má tato matice pro dané j jen devět nenulových koeficientů, viz obr. 2.18. Restrikce rezidua (2.3.137) odpovídá "vážení" rezidua na nejjemnější síti tak, aby byla stanovena průměrná odchylka v bodě ij hrubé sítě. Další předpoklady metody multigríd vyplynou až při analýze konkrétního výpočtového procesu z hlediska jeho konvergence.

obr. 2.18 →

Předpokládejme, že pro náš problém, např. (2.3.85), (2.3.126), známe konvergentní (nebo alespoň stabilní) iterační proces v nějakém okolí přesného řešení. Oblast stability zjistíme např. metodou z kap. 2.3.5 a nebo způsobem uvedeným na počátku této kapitoly. Označíme $\varphi_i^{\text{ex } h}$ přesné řešení na síti h a $A_{i\ell}^h, P_i$ (pro $i, \ell = 1, 2, \dots, N^h$) jsou postupně matice problému a pravá strana (viz (9.3.129)) v diskretizaci bilineárními konečnými prvky (2.3.10). Konvergenci iteračního procesu pak zapišeme takto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\ell=1}^{N^h} A_{i\ell}^{\text{ex } h} \delta \varphi_{\ell}^{(n)h} \right\| = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\ell=1}^{N^h} A_{i\ell}^{(n)h} \delta \varphi_{\ell}^{(n)h} \right\| = 0$$

$$\text{pro } \delta \varphi_{\ell}^{(n)h} = \varphi_{\ell}^{(n)h} - \varphi_{\ell}^{\text{ex } h}, \quad i, \ell = 1, 2, \dots, N^h.$$

(2.3.140)

Druhá podmínka vyjadřuje konvergenci nelineárního problému. Formulovat metodu multigríd má smysl jen pro takové konvergentní iterační procesy, které mají "vyhlazovací" vlastnosti (např. proces SLOR s koeficientem zesílení (2.3.123)). Její základní kroky jsou:

I) restrikce řešení $\varphi_i^{(n)h}$ (2.3.135) operátorem I_h^{2h} tj.

$$\varphi_j^{(n)2h} = \left(I_h^{2h} \varphi^{(n)h} \right)_j \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N^h \\ j = 1, 2, \dots, N^{2h} \end{array} \quad (2.3.141)$$

II) výpočet rezidua $R_i^{(n)h}$ (2.3.129) a jeho restrikce pomocí operátoru $R I_h^{2h}$ tj.

$$R_j^{(n)2h} = \left(R I_h^{2h} R^{(n)h} \right)_j \quad (2.3.142)$$

III) sestavení rovnice pro výpočet odchyvky

$$\delta \varphi_j^{(n+\frac{1}{2})2h} = \varphi_j^{(n+\frac{1}{2})2h} - \varphi_j^{(n)2h} \quad (2.3.143)$$

na síti $2h$

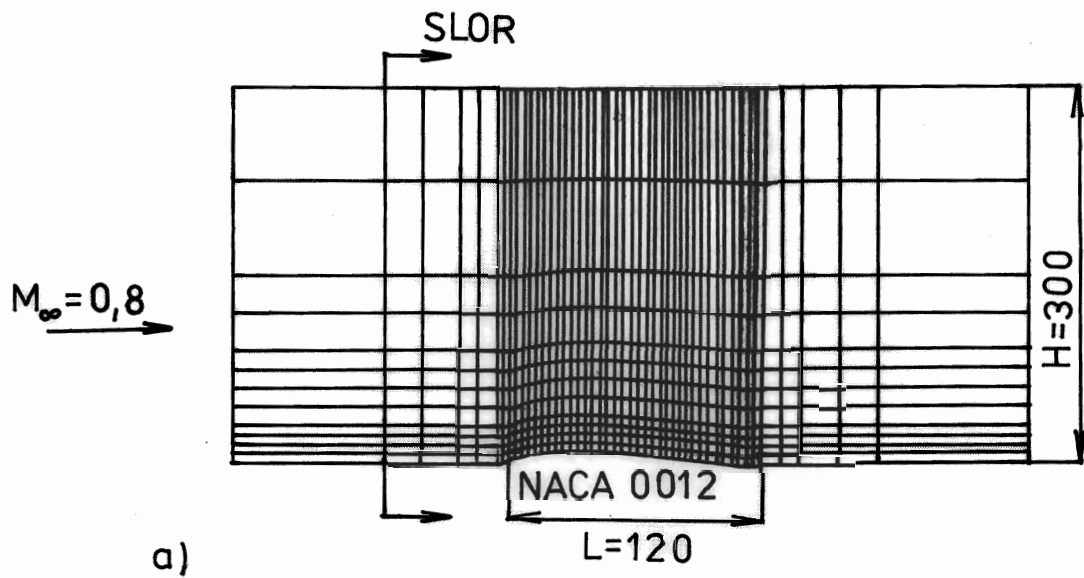
$$\sum_{\ell=1}^{N^{2h}} A_{j\ell}^{(n)2h} \varphi_{\ell}^{(n+\frac{1}{2})2h} = \sum_{\ell=1}^{N^{2h}} A_{j\ell}^{(n)2h} \varphi_{\ell}^{(n)2h} - R_j^{(n)2h} \quad (2.3.144)$$

Pomocí (2.3.141), (2.3.142) a (2.3.129) lze pravou stranu vyjádřit v n -té iteraci na síti h . Tudiž hledaná matice má tvar

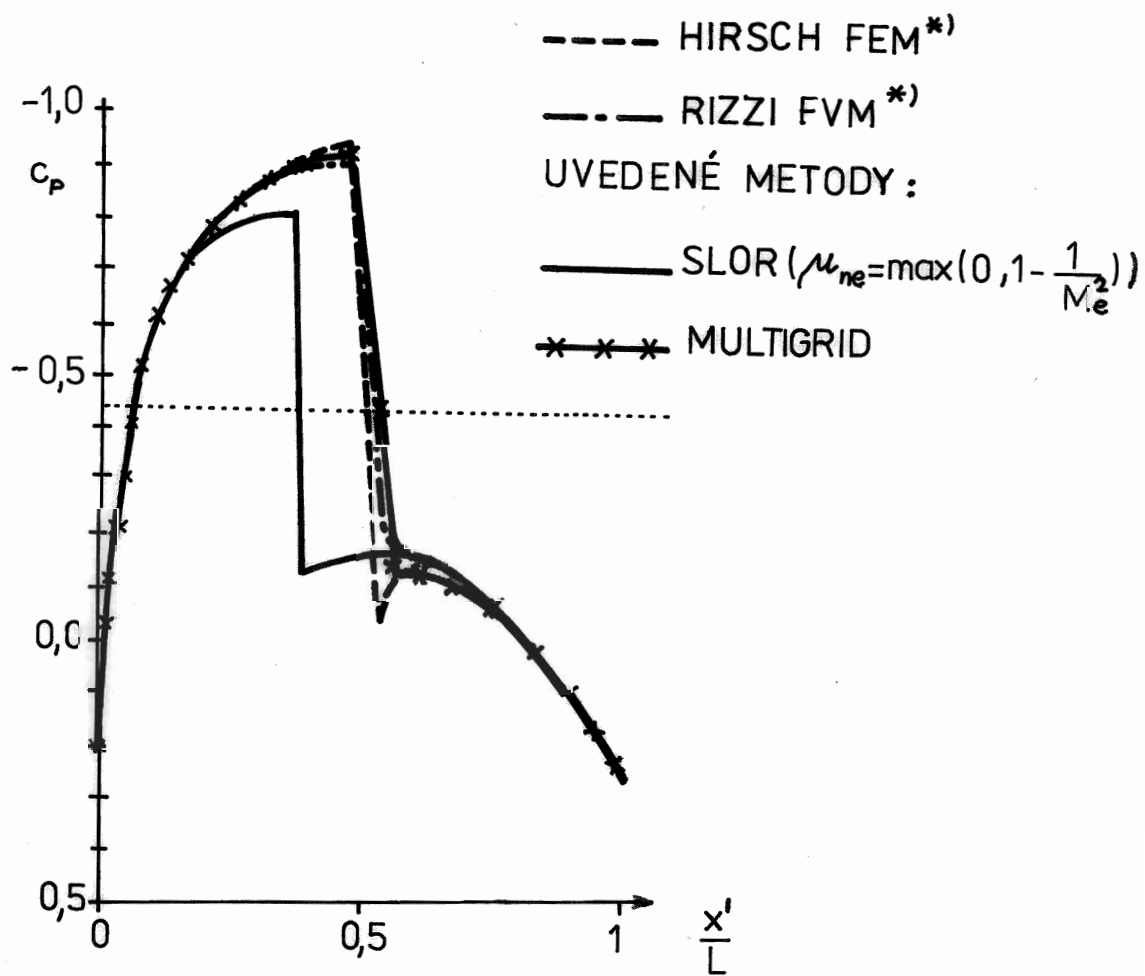
$$\sum_{\ell=1}^{N^{2h}} A_{j\ell}^{(n)2h} \varphi_{\ell}^{(n+\frac{1}{2})2h} = \sum_{\ell=1}^{N^{2h}} A_{j\ell}^{(n)2h} \left(I_h^{2h} \varphi^{(n)h} \right)_\ell - \left(R I_h^{2h} R^{(n)h} \right)_j = f_j^{(n)2h} \quad (2.3.145)$$

IV) provedení m_2 iterací SLOR k řešení soustavy (2.3.145) na síti $2h$ a interpolace řešení na síť h

$$\varphi_i^{(n+\frac{1}{2})h} = \varphi_i^{(n)h} + \left(I_{2h}^h \delta \varphi^{(n+\frac{1}{2})2h} \right)_i \quad (2.3.146)$$

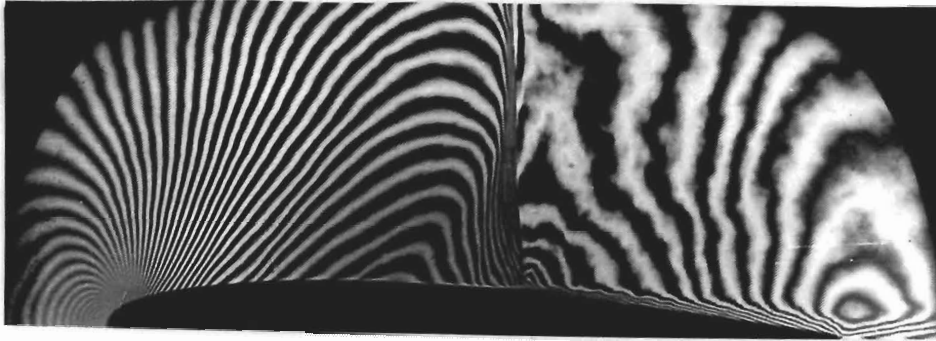


a)

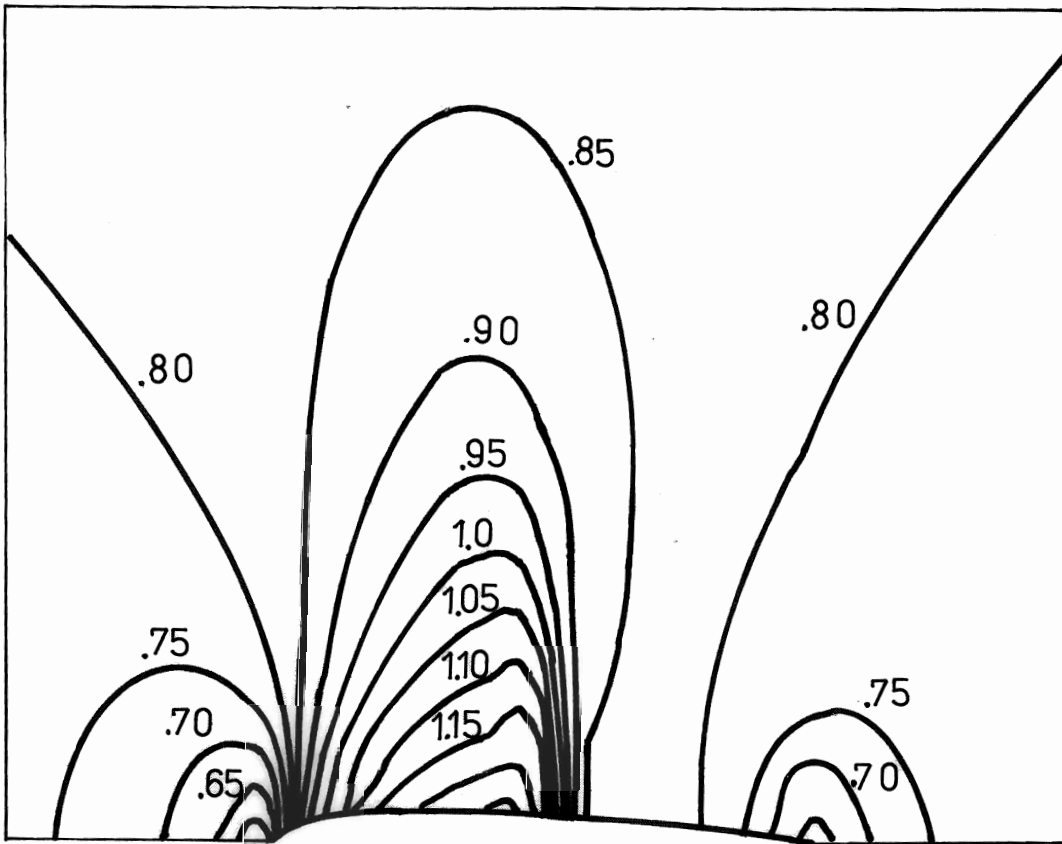


b)

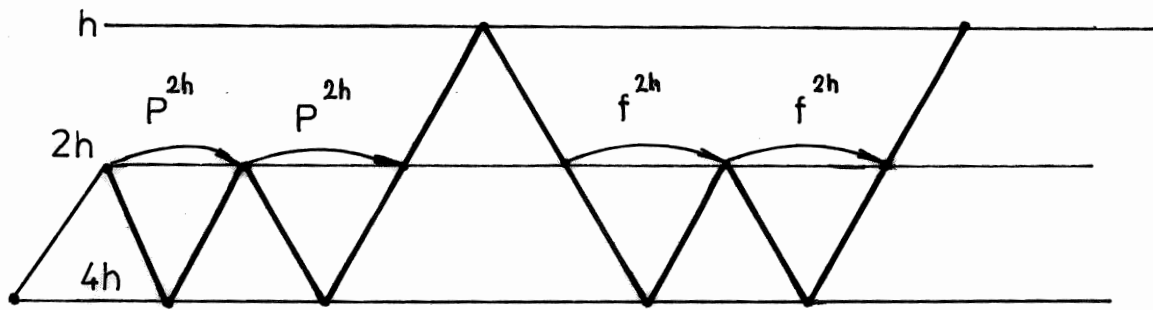
obr. 2.19



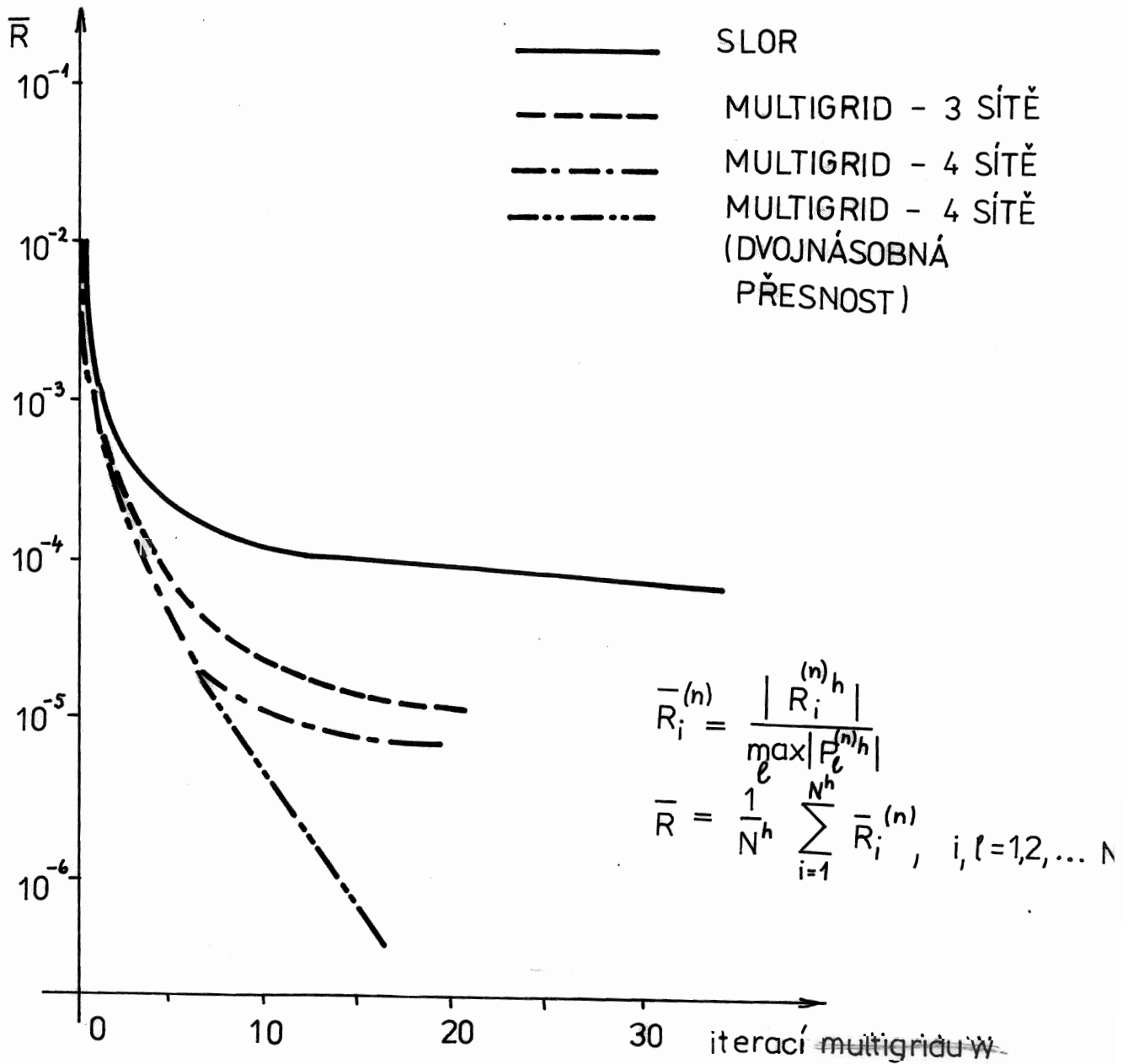
c)



d)



e)



f)

Obr. 2.19

Obr. 2.19

Řešení potenciálního proudového pole kolem profilu NACA 0012 v kanálu při $M_\infty = 0,8$, $H/L = 5/2$, metodou multigrid, iterační proces (2.3.85)

a) použité sítě h , $2h$, $4h$ (80×24 , 40×12 , 20×6)

b) rozložení bezrozměrového tlaku $C_p = \frac{1}{\gamma(M_\infty)^2} \frac{p - p_\infty}{p_\infty}$

(*) Rizzi, Viviani, 1981, pro $H/L \rightarrow \infty$

c) Interferogram rychlostního pole (proužky jsou čáry konstantního Machova čísla) v okolí profilu NACA 0012 při $M_\infty = 0,80$.

d) Výpočet rychlostního pole za stejných podmínek metodou multigrid (tři sítě)

e) typický postup výpočtu na třech sítích (začátek výpočtu)

f) rychlost konvergence

V) provedení m_1 iterací SLOR k řešení soustavy

$$\sum_{\ell=1}^{N^h} A_{i\ell}^{(n+\frac{1}{2})_h} \varphi_{\ell}^{(n+1)_h} = P_i^{(n+\frac{1}{2})_h} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N^h \quad (2.3.147)$$

na síti h . Nalezli jsme tak opravené řešení $\varphi^{(n+1)_h}$.
V případě lineárního problému se $A_{i\ell}^h$ a vektor P_i^h nemění.

Tento proces lze rozšířit na více sítí, např. na 3 ($h, 2h, 4h$) (Maršík, Daněk, 1984; Daněk, 1986). Jeden takový konkrétní případ je uveden v obr. 2.19. Je třeba poznamenat, že pravou stranu (2.3.145) $f_j^{(n)2h}$ využíváme i pro výpočet řešení na síti $2h$ při přechodu ze sítě $4h$, viz obr. 2.19e). Ukazuje se jako výhodné volit koeficienty I_{ji} operátoru $R I_h^{2h}$ podle (2.3.134) i pro obecně čtyřúhelníkové nepravidelné sítě. Vliv nepravidelnosti je malý, i když je třeba zdůraznit, že pravidelná síť je nejvýhodnější.

2.17)

Pravá strana $f_j^{(n)2h}$ (2.3.145) je zavedena tak, že v případě

$$A_{ij}^{(n)2h} = (R I_h^{2h} A^h I_{2h}^h)_{ij}$$

i)

se redukuje na $P_j^{(n)2h}$, což je vektor pravé strany na síti $2h$. Skutečně, dosazením z (2.3.129), (2.3.135) a (2.3.132) do (2.3.

145) dostáváme

$$\begin{aligned} f_j^{(n)2h} &= \sum_{\ell=1}^{N^{2h}} A_{j\ell}^{(n)2h} \varphi_{\ell}^{(n)2h} - \sum_{\ell=1}^{N^{2h}} (R I_h^{2h} A^h I_{2h}^h)_{j\ell} \varphi_{\ell}^{(n)2h} + (R I_h^{2h} P^h)_j = \\ &= \sum_{\ell=1}^{N^{2h}} [A_{j\ell}^{(n)2h} - (R I_h^{2h} A^h I_{2h}^h)_{j\ell}] \varphi_{\ell}^{(n)2h} + (R I_h^{2h} P^h)_j = (R I_h^{2h} P^h)_j \end{aligned}$$

ii)

Upravíme pravou stranu v (2.3.126) tj.

$$\int_{\partial V_2} \sum_{r=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^r} - q_r \right) n_r \delta \varphi da = \int_{\partial V_2} \hat{q}(\varphi) \delta \varphi da ,$$

iii)

kde jsme čistě formálně zavedli funkci $\hat{q}(\varphi)$. Potom

$$\int_{\partial V_2} \hat{q}(\varphi) \delta \varphi da = \int_{\partial V_2} \sum_{j=1}^{N^{2h}} \hat{q}(\varphi) \psi_j^{2h}(\underline{x}) \delta \psi_j^{2h} da = \sum_{j=1}^{N^{2h}} P_j^{2h} \delta \psi_j^{2h}$$

iv)

a díky (2.3.136)

$$\begin{aligned} P_j^{(n)2h} &= \int_{\partial V_2} \hat{q}(\varphi^{(n)}) \psi_j^{2h}(\underline{x}) da = \int_{\partial V_2} \sum_{i=1}^{N^h} \hat{q}(\varphi^{(n)}) \psi_i^h(\underline{x}) \psi_j^{2h}(\underline{x}_i^h) da = \\ &= \sum_{i=1}^{N^h} \psi_j^{2h}(\underline{x}_i^h) \int_{\partial V_2} \hat{q}(\varphi^{(n)}) \psi_i^h(\underline{x}) da = \sum_{i=1}^{N^h} I_{ji} P_i^{(n)h} = \left(R I_h^{2h} P^{(n)h} \right)_j \end{aligned}$$

v)

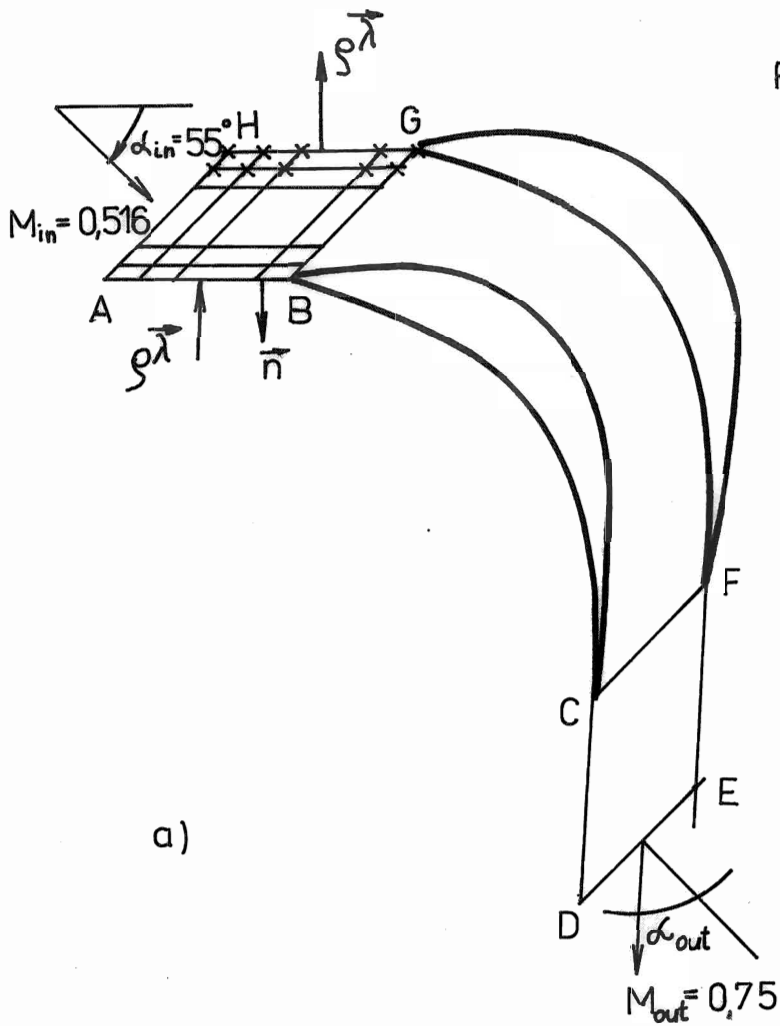
a uvedené tvrzení platí. Při posledních úpravách jsme použili definice operátoru restrikce rezidua (2.3.137).

Vezmeme-li v úvahu platnost (2.3.148) a (2.3.139) vidíme, že se krok III (řešení (2.3.145) redukuje na řešení soustavy rovnic

$$\sum_{l=1}^{N^{2h}} A_{jl}^{(n)2h} \varphi_l^{(n+\frac{1}{2})2h} = P_j^{(n)2h} \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, N^{2h}.$$

vi)

Tudíž řešení na $2h$ síti není ovlivněno řešením na síti h pouze v lineárních případech, kde $A_{ij}^{(n)2h} = A_{ij}^{2h}$ pro všechna n , ale řešení $\varphi^{(n+\frac{1}{2})h}$ na síti h (2.3.146) je ovlivněno řešením na $2h$ síti vždy. V těchto případech je metoda multigrad nejefektivnější (Brandt, 1977)



PERIODICKÁ PODMÍNKA

$$\psi|_{AB} = \psi|_{HG}$$

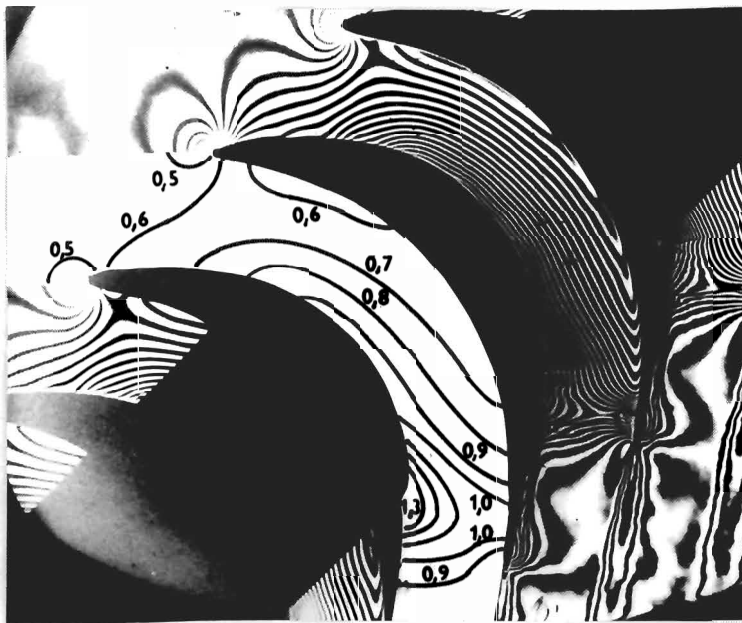
$$\psi|_{CD} = \psi|_{FE}$$

$$\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial x^i} n^i \right) \Big|_{AB} = \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial x^i} n^i \right) \Big|_{HG}$$

$$\left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial x^i} n^i \right) \Big|_{CD} = \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial x^i} n^i \right) \Big|_{FE}$$

a)

b)



Obr. 2.20

Výpočet transsonického potenciálního proudového pole
turbinovou lopatkovou mříží

- a) periodická okrajová podmínka realizovaná pomocí bodů x
- b) výpočet pomocí metody multigrid a porovnání s experimentem ukazuje na dobrou kvalitativní shodu

Uvedená metoda dává dobré výsledky i pro úlohy s periodickými podmínkami (proudění lopatkovými mřížemi) včetně dalších omezujících podmínek. Jednou z nich je Kuttova-Žukovského podmínka, která vyjadřuje, že při proudění nevazké tekutiny musí odtokový bod splývat s odtokovou hranou C.F., viz obr. 2.20a).

Z těchto důvodů se během výpočtu mění např. výstupní úhel proudu α_{out} ^{příčemž} vstupní velikost Machova čísla M_{in} a úhlu proudu α_{in} ^{velikost vstupního} jsou zadané konstanty (výstupní velikost M_{out} se určí z integrační bilance hmotnosti. K výpočtu transonického proudového pole na obr. 2.20b) bylo použito metody multigrid na třech sítích, jako na obr. 2.19. Iterační proces byl dán podmínkou (2.3.85) s uvažováním numerické vazkosti (2.3.107) (Maršík, Daněk, Šafařík, 1985). Další omezující podmínky mohou vyplývat ze zahrnutí vlivů vazkosti do okolí profilu, viz např. Daněk (1987).

obr. 2.20 →

Schemata využívající metodu multigrid s interpolací ve tvaru (2.3.146) nazýváme jako FAS schemata (Full Approximation Scheme). Často se s úspěchem užívá tato metoda ve zjednodušené variantě, kdy v kroku III je vypočtena odchylka $\delta\varphi^{(n+\frac{1}{2})2h}$ z rovnice

$$\sum_{l=1}^{N^{2h}} A_{jl}^{(n)2h} \delta\varphi_l^{(n+\frac{1}{2})2h} = R_j^{(n)2h} \quad (2.3.148)$$

Další kroky jsou stejné. Toto schema se nazývá CS (Correction Scheme).

2.4 Stabilita a konvergence hyperbolických a parabolických problémů

Při formulaci okrajových a počátečních podmínek pro hyperbolické a parabolické rovnice musíme zjistit, neexistují-li na ně nějaká omezení. Ukážeme, že okrajové podmínky musí respektovat, že v řešené oblasti existují křivky, tzv. charakteristiky, podél kterých není řešení nezávislé. Jen takto formulované úlohy vedou ke stabilnímu, popř. korektnímu řešení. ^{2.20)}

V prvním příkladu budeme vyšetřovat jednu lineární hyperbolickou rovnici ze systému rovnic (2.1.36) nebo (2.1.51), tzn., že místo matice máme nějaký skalár a a omezíme se dále jen na jednu souřadnici $x^1 \equiv x$. Vzhledem k tomu, že obecně vyšetřujeme rovnice popisující i průběh intenzivních veličin, a teploty, nahradíme obecnou extenzivní veličinu $\tilde{\psi}$ nějakou funkcí $u(x,t)$. Vyjdeme tudíž od rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{pro } (x,t) \in (0,X) \times (0,T) \quad (2.4.1)$$

za okrajové podmínky

$$u(0,t) = \bar{u}(t) \quad \text{pro } t \in (0, \infty) \quad (2.4.2)$$

a počáteční podmínky

$$u(x,0) = \hat{u}(x) \quad \text{pro } x \in (0, \infty) \quad (2.4.3)$$

Splněna musí být i podmínka kompatibility (2.1.56), tj. $\bar{u}(0) = \hat{u}(0)$.

Nalezneme charakteristiky této rovnice, což znamená, že budeme hledat křivku $x=x(t)$, podél které je řešení $u(x,t)$ konstantní. Tuto podmínku splníme tak, že budeme hledat řešení soustavy homogenních rovnic pro $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$ (Godunov, 1971), tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

(2.4.4)

Tato soustava má nenulové řešení jen tehdy, jestliže je její determinant roven nule (srovnej s podmínkou (2.2.25), tj.

$$\det \begin{vmatrix} 1 & a \\ dt & dx \end{vmatrix} = dx - a dt = 0,$$

$$\text{t.j. } x - x_0 - a(t - t_0) = 0, \text{ resp. } x - at = \text{konst.} \quad (2.4.5)$$

Pak jsou ale obě parciální derivace podél charakteristiky $x - at = \text{konst.}$ vzájemně závislé. Tento fakt musíme respektovat při zadávání okrajových podmínek.

Jako druhý případ uvedeme parabolický problém, pro který rovněž dokážeme existenci reálné charakteristiky. Mějme jednorozměrnou rovnici, např. vedení tepla či difuze

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pro } (x,t) \in (0,X) \times (0,\infty), a > 0 \quad (2.4.6)$$

s některou z následujících typů okrajových podmínek

$$u(0,t) = \bar{u}_1(t), \quad u(X,t) = \bar{u}_2(t) \quad (2.4.7)$$

tzv. Dirichletova podmínka

$$\left(a \frac{\partial u}{\partial x} - q_1 \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(a \frac{\partial u}{\partial x} - q_2 \right) \Big|_{x=X} = 0 \quad (2.4.8)$$

tzv. Neumannova podmínka

$$\left(a \frac{\partial u}{\partial x} - g(u) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(a \frac{\partial u}{\partial x} - g(u) \right) \Big|_{x=X} = 0 \quad (2.4.9)$$

pro $t \in (0, T)$

tzv. Newtonova podmínka

Připustná je i kombinace, kdy je jeden typ podmínky v bodě $x = 0$ a druhý typ v bodě $x = X$. Počáteční podmínka je

$$u(x,0) = \hat{u}(x) \quad \text{pro } x \in (0, X) \quad (2.4.10)$$

Podmínky (2.4.7) a (2.4.10) musí splňovat ještě podmínku kompatibility $\bar{u}_1(0) = \hat{u}(0)$, $\bar{u}_2(0) = \hat{u}(X)$.

Charakteristiky rovnice (2.4.6) budeme hledat stejným postupem jako pro rovnici (2.4.1). Zavedeme další proměnnou $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ takže rovnici (2.4.6) zapíšeme jako soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé funkce u, v . Rovnice charakteristik jsou řešením soustavy

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0 \quad (2.4.11)$$

Rovnici (2.4.6), včetně rovnic charakteristik (2.4.11), lze samostatně vyjádřit jako řešení soustavy rovnic $\underline{A}\underline{w} = \underline{b}$ kde

$$\underline{w} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\underline{b} = (0, v, 0, 0), \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 & , & -a \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ dt & , & 0 & , & dx & , & 0 \\ 0 & , & dt & , & 0 & , & dx \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

Nezávisle na pravé straně \underline{b} existuje nenulové řešení \underline{w} jen v tom případě, když je $\det \underline{A} = 0$. Charakteristiky rovnice (2.4.6) jsou tedy definovány podmínkou

$$\det \underline{A} = a(dt)^2 = 0, \quad \text{tj.} \quad t - t_0 = 0, \quad \text{resp.} \quad t = \text{konst} \quad (2.4.13)$$

a jsou to všechny časové roviny. Uvedený postup hledání charakteristik je stejný a je ekvivalentní podmínce (2.2.25) pro rovnice 2. řádu (Godunov, 1971; Tichonov Samarskij, 1955).

Soustředíme nyní pozornost na stabilitu řešení u vzhledem k jeho odchylkám (fluktuacím) od jeho přesné hodnoty. Uvedeme zde způsob vyšetřování stability pocházející od von Neumanna (Richtmayer, Morton, 1972), a který je založen na vyjádření

řešení $u(x,t)$ ve tvaru Fourierovy řady na oblasti $(0,X) \times (0,T)$
 Řešení si představíme jako superposici rovinných vln. Uvedme jeho tvar pro jednorozměrný případ (2.18)

$$u(x,t) = \sum_k \alpha_k \xi(t,k) e^{ikx}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2.4.14)$$

kde $k = \frac{2\pi}{l}$ je vlnové číslo, l vlnová délka, α_k je konstantní koeficient a $\xi(t,k)$ je časově závislý koeficient Fourierova rozvoje. Dosazením rozvoje (2.4.14) do rovnice (2.4.1) nalezneme vztah pro koeficient $\xi(t,k)$, tj.

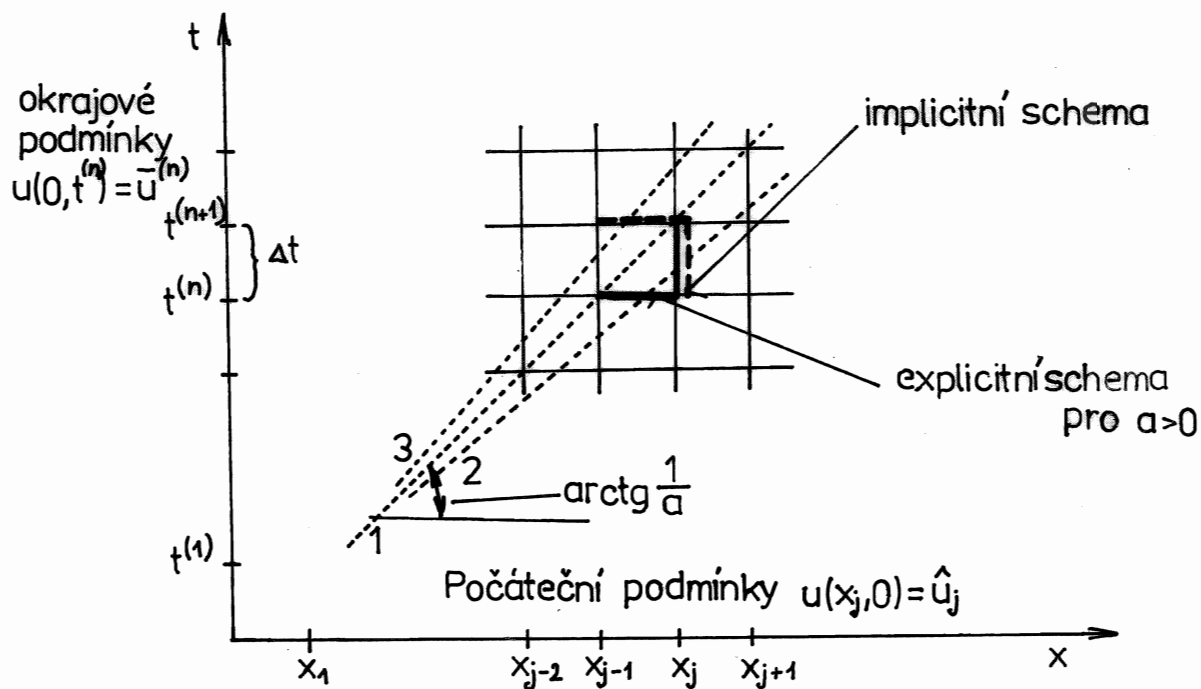
$$\sum_k \alpha_k \left(\frac{d\xi}{dt} + ia\xi k \right) e^{ikx} = 0, \text{ resp. } \xi(t^{(n)}, k) = \xi(t^{(0)}, k) e^{-iak(t^{(n)} - t^{(0)})}$$

Tudíž pro každý mód s vlnovým číslem k platí

$$\xi(t^{(n)}, k) = \xi(t^{(0)}, k) \left[\exp(-iak\Delta t) \right]^n = \left[\xi(\Delta t, k) \right]^n, \quad (2.4.15)$$

přičemž jsme časový interval $(0,t)$ rozdělili na n stejných časových kroků $\Delta t = t^{(n)} - t^{(n-1)}$. Hodnotu koeficientu $\xi(t^{(n)}, k)$ je možno tedy stanovit jako n -tou mocninu tzv. koeficientu zesílení $\xi(\Delta t, k)$. Tento koeficient odpovídá nárůstu (poklesu) amplitudy fluktuace s vlnovým číslem k v jednom časovém kroku délky Δt .

Stabilitní analýzu provádíme tak, že nahradíme v rovnici (2.4.1) derivace pomocí konečných diferencí, tudíž jak časový interval $(0,t)$ tak i délkový interval $(0,x)$ rozdělíme na kroky $\Delta t = t^{(n)} - t^{(n-1)}$ resp. $\Delta x = x_j - x_{j-1}$ viz obr. 2.21.



Obr. 2.21

Znázornění diskretizace oblasti $(0, x) \times (0, t)$
 explicitního a implicitního schématu a jejich stability
 1, 2, 3 - charakteristiky rovnice (2.4.1) pro různá a

Pro explicitní schéma:

- 1 - na hranici stability $\chi = 1$
- 2 - nestabilní $\chi > 1$
- 3 - stabilní $\chi < 1$

Diferenciální rovnice (2.4.1) je pak aproximována rovnicí diferenční (2.19)

obr. 2.21 →

(2.18)

Zkoumejme stabilitu nějakého diferenčního operátoru T_D který aproximuje (2.19) lineární operátor T určený rovnicí

$$T\underline{u} \equiv \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \underline{A}\underline{u} = \underline{f}(x, t), \quad \text{i)}$$

kde \underline{A} je lineární diferenciální operátor obsahující jen derivace podle prostorových proměnných (viz např. rovnice (2.1.53)). Okrajové i počáteční podmínky jsou typu (2.1.54) a (2.1.55). Vektor proměnných \underline{u} si analogicky (2.4.14) představíme ve tvaru řady

$$\underline{u}(x, t) = \sum_{\underline{k}} \underline{\alpha}_{\underline{k}} \underline{f}(t, \underline{k}) e^{i\underline{k}x}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad \text{ii)}$$

Pro trojrozměrný případ, kdy j -tý uzel sítě (zde $\underline{j} = (j_1, j_2, j_3)$) je v poloze $\underline{x}_j = (j_1 \Delta x^1, j_2 \Delta x^2, j_3 \Delta x^3)$ a pro n -tou časovou rovinu $t = t^{(n)} = n \Delta t$, dává rozvoj ii) hodnotu

$$\begin{aligned} \underline{u}(x_j, t^{(n)}) &= \sum_{\underline{k}} \underline{\alpha}_{\underline{k}} \underline{f}(t^{(n)}, \underline{k}) \exp(i\underline{k}x_j) = \\ &= \sum_{\underline{k}} \underline{\alpha}_{\underline{k}} [\underline{f}(\Delta t, \underline{k})]^n \exp[i(k_1 j_1 \Delta x^1 + k_2 j_2 \Delta x^2 + k_3 j_3 \Delta x^3)] = \underline{u}_j^{(n)}. \end{aligned} \quad \text{iii)}$$

Je to řešení v bodě \underline{x}_j v n -tém časovém kroku. Vlastnosti vyšetřované soustavy, tj. matice $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ v (2.1.31) jsou zahrnuty v $\underline{f}(\Delta t, \underline{k})$, viz (2.4.15). Dosazením iii) do diferenčního

operátoru T_D (viz např. (2.1.16)) obdržíme pro k -tý nód obecně výraz tvaru

$$\underline{u}_j^{(n+1)}(\underline{k}) = \underline{G}(\Delta t, \underline{k}) \underline{u}_j^{(n)}(\underline{k}) = [\underline{G}(\Delta t, \underline{k})]^{n+1} \underline{u}_j^{(0)}(\underline{k}), \quad \text{iv)}$$

kde $\underline{u}_j^{(0)}(\underline{k})$ je počáteční podmínka v čase $t=0$ a $\underline{G}(\Delta t, \underline{k})$ jsme označili matici přechodu mezi n -tou a $(n+1)$ -ní časovou rovinou příslušnou k -tému nódu (v jednorozměrném případě je matice $\underline{G}(\Delta t, \underline{k})$ rovna koeficientu zesílení $\xi(\Delta t, \underline{k})$).

Časový vývoj řešení úlohy i) lze odhadnout výpočtem podle iv). Velikost $\underline{u}_j^{(n)}(\underline{k})$ je dána nějakou vektorovou normou (např. Euklidovskou) a velikost matice přechodu vyjádříme normou jí podřízenou (Colatz, 1970). Euklidovské vektorové normě je podřízena spektrální maticová norma, která je definována jako největší ze všech absolutních hodnot vlastních čísel příslušné matice, v našem případě matice $\underline{G}(\Delta t, \underline{k})$. Označíme-li toto maximální číslo pro jednoduchost $\xi(\Delta t, \underline{k})$, tak lze podmínku stability diferenčního operátoru T_D vyjádřit výrazem

$$\frac{\|\underline{u}_j^{(n)}(\underline{k})\|}{\|\underline{u}_j^{(0)}(\underline{k})\|} \leq |\xi(\Delta t, \underline{k})|^n \leq C \quad \text{pro } n=1, 2, \dots, \frac{T}{\Delta t}, \quad \text{v)}$$

kde konstanta C může být obecně i větší než jedna, viz dále, ale nesmí záviset na časovém kroku Δt a ani na vlnovém vektoru \underline{k} (vlnové délce poruchy). Pro $C \leq 1$ je stabilita zřejmá, ale zajímavé jsou i případy, kdy řešení $\underline{u}(\underline{x}, t)$ rovnice i) roste přiměřeně s časem. Z nerovnosti v) pak plyne pro velikost $\xi(\Delta t, \underline{k})$ podmínka

$$|\xi(\Delta t, \underline{k})| \leq C^{\frac{1}{n}} = C^{\frac{\Delta t}{T}} \approx 1 + C_1 \Delta t = 1 + O(\Delta t), \quad \text{vi)}$$

kde jsme použili rozvoj do Taylorovy řady v bodě $\frac{\Delta t}{T} = 0$.

Konstanta C_1 nezávisí ani na Δt ani na \underline{k} . Nerovnost vi) je hledanou podmínkou stability podle von Neumanna (Richtmayer, Morton, 1972). Tato podmínka je pro případ lineárního problému v prostoru funkcí L_2 nutnou a postačující podmínkou stability diferenčního schématu. V nelineárním případě je běžné užívat tuto metodu ve formě linearizovaného modelu (viz pozn. 4.4), pak je nerovnost vi) pouze podmínkou nutnou.

2.19)

Řád přesnosti diferenčního operátoru definujeme následovně. Mějme diferenciální operátor T definovaný na prostoru funkcí M , viz kap. 2.1., který aproximujeme diferenčním operátorem T_D . Říkáme, že aproximace operátoru T je řádu r v prostorových proměnných a řádu s v čase, jestliže pro $\|\Delta x^i\|, |\Delta t|$ dostatečně malé platí

$$\|T\underline{u} - T_D\underline{u}\| \leq O((\Delta x^i)^r, (\Delta t)^s) \quad \text{i)}$$

a je splněna limita

$$\lim_{\|\Delta x^i\|, \Delta t \rightarrow 0} \|T\underline{u} - T_D\underline{u}\| = 0 \quad \text{pro } (\underline{x}, t) \in V_x \langle 0, \tau \rangle, \quad \text{ii)}$$

kde $i = 1, 2, 3$

v nějaké vhodné normě ^{2.1)}.

Stanovení řádu přesnosti provádíme pomocí rozvoje do Taylovy řady v nějakém bodě $\underline{x}_j, t^{(n)}$. Nechť je rovnicí (2.4.1) určen operátor T a k němu diferenční operátor T_D je dán diferenční rovnicí (2.4.16). Pro rozvoj v bodě $(\underline{x}_j, t^{(n)})$ pro malé $\Delta x, \Delta t$ platí

$$u_j^{(n+1)} = u_j^{(n)} + u_t|_j^{(n)} \Delta t + u_{tt}|_j^{(n)} \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)$$

$$u_{j-1}^{(n)} = u_j^{(n)} - u_x|_j^{(n)} \Delta x + u_{xx}|_j^{(n)} \frac{(\Delta x)^2}{2} + O((\Delta x)^3)$$

$$u_{j-1}^{(n+1)} = u_j^{(n)} - u_x|_j^{(n)} \Delta x + u_t|_j^{(n)} \Delta t + u_{xx}|_j^{(n)} \frac{(\Delta x)^2}{2} + u_{tt}|_j^{(n)} \frac{\Delta t^2}{2} - u_{xt}|_j^{(n)} \Delta x \Delta t + O(\Delta x^3, \Delta t^3, \Delta x \Delta t^2, \Delta t \Delta x^2), \quad \text{iii)}$$

kde indexy označují příslušné parciální derivace. Po dosazení iii) do rovnice (2.4.16) má nerovnost i) tvar

$$\left\| \left(\frac{1}{2} u_{tt}|_j^{(n)} + \theta a u_{xt}|_j^{(n)} \right) \Delta t - a u_{xx}|_j^{(n)} \frac{\Delta x}{2} + O((\Delta x)^2, (\Delta t), \Delta x \Delta t) \right\| \leq$$

$$\leq O(\Delta t, \Delta x) \quad \text{pro } \theta \neq \frac{1}{2}$$

$$\leq O(\Delta t^2, \Delta x, \Delta x \Delta t) \quad \text{pro } \theta = \frac{1}{2}. \quad \text{iv)}$$

Tudíž diferenční operátor (2.4.16) je pro $\theta \neq \frac{1}{2}$ prvního řádu přesnosti jak v čase, tak i v prostoru a pro $\theta = \frac{1}{2}$ je druhého řádu přesnosti v čase. (za předpokladu omezenosti 3. derivací). Stejně závěry platí i pro diferenční operátor (2.4.22).

Nechť u je řešením diferenciální úlohy, vztah i) pozn. 2.18) a u_D je řešením odpovídající diferenční úlohy. Říkáme, že řešení u_D konverguje k řešení u , jestliže platí

$$\lim_{\|\Delta x\|, \Delta t \rightarrow 0} \|u - u_D\| = 0.$$

v)

$$\frac{u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} \left[\theta (u_j^{(n+1)} - u_{j-1}^{(n+1)}) + (1-\theta) (u_j^{(n)} - u_{j-1}^{(n)}) \right] = 0,$$

(2.4.16)

kde jsme zavedli parametr θ , abychom mohli ukázat na rozdíl-
nost ve stabilitě dvou základních typů schemat, explicitního
schematu ($\theta=0$) a schematu implicitního ($\theta=1$). Časová deri-
vace byla nahrazena zpětnou diferencí, tzv. Eulerovo schema.

Dosazením z rozvoje (2.4.14) a po několika formálních úpra-
vách dostáváme pro koeficient zesílení vzorec

$$\xi(\Delta t, k) = \frac{2 - \varepsilon - i\chi(1-\theta)\sin\beta}{\gamma + i\chi\theta\sin\beta}, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\varepsilon = 1 + \chi(1-\theta)(1 - \cos\beta), \quad \gamma = 1 + \theta(1 - \cos\beta), \quad \chi = \frac{a\Delta t}{\Delta x}, \quad \beta = k\Delta x.$$

(2.4.17)

Je-li absolutní hodnota koeficientu zesílení

$$|\xi(\Delta t, k)| = \frac{\{[\varepsilon\gamma - \theta(1-\theta)\chi\sin^2\beta]^2 + [\varepsilon\theta + \gamma(1-\theta)]^2\chi^2\sin^2\beta\}^{\frac{1}{2}}}{\gamma^2 + (\chi\theta)^2\sin^2\beta} < 1$$

(2.4.18)

nemůže k-tý mód v bodě $j\Delta x$ s časem a tím ani v průběhu výpočtu
narůstat. Tato nerovnost je kritérium stability řešení hyperbo-
lické rovnice ^{(2.4.1) uvedenou} ~~metodou konečných diferencí~~. Pro náš zjednodušený
případ je splněno vždy, jen pro implicitní schema, tj. pro $\theta = 1$,

$$\gamma = 1 + \theta(1 - \cos\beta), \quad \varepsilon = 1,$$

protože platí

$$|\xi(\Delta t, k)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\chi(1+\chi)(1-\cos\beta)}} = \left[1 + 4\chi(1+\chi)\sin^2\frac{\beta}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} < 1. \quad (2.4.19)$$

Schema nazýváme nepodmíněně stabilní.

Pro explicitní schema, tj. $\theta=0$, $\gamma=1$, $\varepsilon=1+\lambda(1-\cos\beta)$
pro $\alpha > 0$ je koeficient zesílení roven

$$|\xi(\Delta t, k)| = \sqrt{1 - 2\chi(1-\chi)(1-\cos\beta)} = \sqrt{1 - 4\chi(1-\chi)\sin^2\frac{\beta}{2}} \quad (2.4.20)$$

a je menší než jedna jen tehdy, když platí

$$\chi = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} < 1. \quad (2.4.21)$$

Toto schema nazýváme podmíněně stabilní a nerovnost, která dává do relace délku časového kroku Δt a prostorového kroku Δx nazýváme CFL kriterium a χ je tzv. Courantovo-Friedrichsovo-Lévyho číslo.

Jak je patrné z obr. 2.2] ze směrů charakteristik, je třeba pro $\alpha > 0$ brát levou diferenci a pro $\alpha < 0$ pravou diferenci. Ve druhém případě nahradíme v diferenciální rovnici (2.4.16) v závorce $u_{j-1}^{(n+1)}, u_{j-1}^{(n)}$ pomocí $u_j^{(n+1)}, u_j^{(n)}$ a $u_j^{(n+1)}, u_j^{(n)}$ pomocí $u_{j+1}^{(n+1)}, u_{j+1}^{(n)}$.

Sestavíme diferenciální rovnici pro parabolickou rovnici (2.4.6). Při stejném označení jako u rovnice (2.4.16) píšeme

$$\frac{u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}}{\Delta t} - \frac{a\theta}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{(n+1)} - 2u_j^{(n+1)} + u_{j-1}^{(n+1)}) - \frac{a(1-\theta)}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)}) = 0. \quad (2.4.22)$$

Pro koeficient zesílení dostáváme vztah

$$\xi(\Delta t, k) = \frac{1 - 4(1-\theta)\chi \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + 4\theta\chi \sin^2 \frac{\beta}{2}}, \quad \chi = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad \beta = \frac{2\pi}{l} \Delta x \quad (2.4.23)$$

odkud plyne, že implicitní diferenční schema (2.4.22), tj. $\theta=1$ je stabilní pro $\chi > 0$, tzn., není třeba klást nějaká omezení na velikosti časového a prostorového kroku. Podobně i pro $\theta = \frac{1}{2}$, kdy dostáváme tzv. Crankovo-Nicolsonovo schéma. Toto schéma je navíc druhého řádu přesnosti v čase (2.19). Explicitní schema (někdy nazývané Eulerovo), tj. pro $\theta=0$, je stabilní, jestliže je splněno $0 < \chi < \frac{1}{2}$, tedy omezení na časový krok $\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2a}$.

Numerické experimenty ukázaly, že analýza stability provedená výše uvedeným postupem (poznámka 2.18) nevystihuje chování iteračních procesů odvozených z integrální formulace, např. metody konečných prvků.

Především v oblastech velikých gradientů řešení dochází k oscilacím řešení a často i k jeho divergenci a to i v případech, ve kterých je podmínka stability diferenčních schemat, viz poznámka 2.18), vztah vi) splněna (Maršík F., Maršík J., 1986).

Uvedeme metodu vedoucí k jinému tvaru podmínek stability, z něhož,

lze usuzovat na některé další vlastnosti numerického řešení. Jednou takovou dodatečnou vlastností je jakási rezonance výpočtové sítě.

K vyšetření stability rovnic (2.4.1) a (2.4.6) uijeme metody z kap. 2.3.5, která tam byla pro metodu konečných prvků odvozena. V ní je stabilita vyšetřována na konečném prvku, pomocí poruch, jejichž vlnová délka je celočíselným násobkem velikosti výpočtové sítě ΔX .

Řešený interval $(0, X)$ rozdělíme na konečné prvky $V_e = \langle x_j, x_{j+k} \rangle$, které jsou podstatně větší než rozměr ΔX nějaké jemnější sítě. Předpokládejme, že v n -tém a $(n+1)$ -ním časovém kroku máme na e -tém konečném prvku řešení $u_e^{(n)}(x)$ a $u_e^{(n+1)}(x)$. Neznámé přesné řešení na tomto prvku označíme $u_e(t^{(n)}, x)$. Definujeme odchylky $\delta u_e^{(n)}(x)$ a $\delta u_e^{(n+1)}(x)$ od přesného řešení

$$\delta u_e^{(n)}(x) = u_e^{(n)}(x) - u_e(t^{(n)}, x) \quad (2.4.24)$$

$$\delta u_e^{(n+1)}(x) = u_e^{(n+1)}(x) - \left(u_e(t^{(n)}, x) + \frac{\partial u_e(t^{(n)}, x)}{\partial t} \Delta t + \dots \right), \text{ pro } x \in V_e = \langle x_j, x_{j+k} \rangle,$$

pro k dostatečně velké; $\Delta X \ll |x_{j+k} - x_j|$.

Odchylky předpokládáme ve tvaru rovinných vln (2.3.95), tj.

$$\delta u_e^{(n)}(x) = |\delta u_e^{(n)}| e^{-ikx}, \quad \delta u_e^{(n+1)}(x) = \xi_e \delta u_e^{(n)}(x),$$

$$\text{pro } k = \frac{2\pi}{\ell}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2.4.25)$$

Vyšetřuj me stabilitu výpočtovéhoprocesu pro diferenciální rovnici (2.4.1), který je na e -tém konečném prvku definován podmínkou

$$\int_{V_e} \left(\frac{u_e^{(n+1)}(x) - u_e^{(n)}(x)}{\Delta t} + \theta a \frac{\partial u_e^{(n+1)}(x)}{\partial x} + (1-\theta)a \frac{\partial u_e^{(n)}(x)}{\partial x} \right) \delta u_e^{(n+1)}(x) d(x) = 0. \quad (2.4.26)$$

Toto schéma nazýváme Eulerovo-Galerkinovo schéma.

Vyšli jsme z obecné integrální formulace (2.1.12), kde jsme položili $v = \delta u$ (srovnej s rozšířeným variačním počtem (2.3.50)). Časovou derivaci jsme nahradili časovou diferencí a pro jednoduchost předpokládáme, že okrajové podmínky jsou splněny přesně, v našem případě jen takže integrál po hranici (hodnoty v hraničních bodech) je nulový, viz kap. 2.3.1. Dosadíme-li odchylky (2.4.24) do podmínky (2.4.26) tak dostáváme

$$\int_{V_e} \left[\frac{\delta u_e^{(n+1)}(x) - \delta u_e^{(n)}(x)}{\Delta t} + \theta a \frac{\partial \delta u_e^{(n+1)}(x)}{\partial x} + (1-\theta)a \frac{\partial \delta u_e^{(n)}(x)}{\partial x} \right] \delta u_e^{(n+1)}(x) d\mathcal{V} + R_e^{(n)} - \Delta t \hat{R}_e^{(n)} = 0,$$

$$\text{pro } \hat{R}_e^{(n)} = -\theta \int_{V_e} a \frac{\partial^2 u_e(t^{(n)}, x)}{\partial x \partial t} \delta u_e^{(n+1)}(x) d\mathcal{V}. \quad (2.4.27)$$

Dále jsme zavedli reziduum v n-té časové rovině vztahem

$$R_e^{(n)} = \int_{V_e} \left(\frac{\partial u(t^{(n)}, x)}{\partial t} + a \frac{\partial u(t^{(n)}, x)}{\partial x} \right) \delta u_e^{(n+1)}(x) d\mathcal{V}. \quad (2.4.28)$$

Podle předpokladu je $R_e^{(n)} = 0$, avšak stabilitu lze vyšetřovat i za předpokladu, že je při dané aproximaci $R_e^{(n)} \neq 0$, např. při metodě multigríd, viz kap. 2.3.5. Pro odchylky (2.4.25) přechází podmínka (2.4.27) do tvaru

$$\left\{ \xi_e(1 - i\theta \Delta t a k) - [1 + i(1-\theta) \Delta t a k] \right\} \int_{V_e} \delta u_e^{(n)}(x) \delta u_e^{(n+1)}(x) d\mathcal{V} = (\Delta t)^2 \hat{R}_e^{(n)}. \quad (2.4.29)$$

Odtud vypočteme koeficient zesílení $\xi_e(\Delta t, k)$, který pro stabilní časově závislý proces musí splňovat nerovnost

$$|\xi_e(\Delta t, k)| = \left| \frac{1 + i(1-\theta)\Delta t a k - (\Delta t)^2 r_e^{(n)}}{1 - i\theta \Delta t a k} \right| \leq 1 + C_1 \Delta t$$

$$r_e^{(n)} = \frac{R_e^{(n)}}{\int_{V_e} \delta u_e^{(n)}(x) \delta u_e^{(n+1)}(x) dV}$$

(2.4.30)

pro C_1 nezávislé na $\Delta t, k$. Závislost je kvalitativně stejná jako v metodě konečných objemů (2.5.34).

Pro explicitní schéma ($\theta=0$) dostáváme z (2.4.30) vztah

$$|\xi_e(\Delta t, m)| = \left| 1 + \left(\frac{2\pi}{m} \right) \chi \right| \leq 1 + \frac{2\pi}{m} \chi \leq 1 + \frac{\alpha\pi}{\Delta x} \Delta t,$$

$$\chi = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} \quad \text{pro} \quad k = \frac{2\pi}{l}, \quad l = m\Delta x, \quad m = 2, 3, \dots,$$

(2.4.31)

z kterého plyne, že existuje taková konstanta $C_1 = \frac{\alpha\pi}{\Delta x}$ nezávislá na k , pro kterou je podmínka stability časově závislých problémů (poznámka 2.18), vztah vi)) splněna. Dále je zřejmé, že neexistuje, na rozdíl od vztahu (2.4.31), takové χ , pro které by byla splněna podmínka (2.4.29) s $C_1 = 0$.

Implicitní schémata ($\theta=1$) jsou stabilní pro všechny hodnoty χ , protože podmínka (2.4.30) přechází na tvar

$$|\xi_e(\Delta t, m)| = \frac{|1 + (\Delta t)^2 r_e^{(n)}|}{\left|1 - i \frac{2\pi}{m} \chi\right|} \leq \frac{1 + (\Delta t)^2 |r_e^{(n)}|}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 \chi^2}} \leq 1 + C_1 (\Delta t)^2,$$

(2.4.32)

která je splněna jen pro omezené derivace $\frac{\partial^2 u_e(t, x)}{\partial t \partial x}$.

V oblasti malých gradientů řešení vede ke stejnému závěru jako vztah (2.4.19), protože se v něm vyskytují pouze členy $(\Delta t)^2$.

Výpočtový proces pro parabolickou rovnici (2.4.6) vychází z podmínky

$$\int_{V_e} \left[\frac{u_e^{(n+1)}(x) - u_e^{(n)}(x)}{\Delta t} \delta u_e^{(n+1)}(x) + \theta a \frac{\partial u_e^{(n+1)}(x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u_e^{(n+1)}(x)}{\partial x} + (1+\theta) a \frac{\partial u_e^{(n)}(x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u_e^{(n+1)}(x)}{\partial x} \right] dV + R_e^{(n)} + \Delta t \hat{R}_e^{(n)} = 0, \quad (2.4.33)$$

kde

$$R_e^{(n)} = \int_{V_e} \left(\frac{\partial u_e(t, x)}{\partial t} \delta u_e^{(n+1)}(x) + a \frac{\partial u_e(t, x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u_e^{(n+1)}(x)}{\partial x} \right) dV$$

$$\hat{R}_e^{(n)} = -\theta \int_{V_e} a \frac{\partial^2 u_e(t, x)}{\partial t \partial x} \frac{\partial \delta u_e^{(n+1)}(x)}{\partial x} dV.$$

K odvození jsme použili integrace per partes, a ze stejných důvodů jako při odvozování vztahu (2.3.27) jsme zanedbali okrajové podmínky. Stejným postupem jako výše odvodíme koeficient zesílení ve tvaru

$$|\xi_e(\Delta t, m)| = \left| \frac{1 + (1 - \theta) \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 \chi + (\Delta t)^2 r_e^{(n)}}{1 - \theta \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 \chi} \right| \leq 1 + C_1 \Delta t \quad (2.4.34)$$

$$r_e^{(n)} = \frac{\widehat{R}_e^{(n)}}{\int_{V_e} \delta u_e^{(n+1)}(x) \delta u_e^{(n)}(x) dx} \quad \text{pro } \chi = \frac{a \Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad m = 2, 3, \dots$$

Dostáváme tak pro explicitní schéma $\theta = 0$,

$$|\xi_e(\Delta t, m)| = 1 + \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 \chi \leq 1 + a \left(\frac{\pi}{\Delta x}\right)^2 \Delta t \quad (2.4.35)$$

stejné omezení jako ve vztahu (2.4.30).

Implicitní schéma $\theta = 1$ je stabilní, jestliže platí

$$|\xi_e(\Delta t, m)| = \frac{|1 + (\Delta t)^2 r_e^{(n)}|}{\left|1 - \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 \chi\right|} < 1 + C_1 \Delta t. \quad (2.4.36)$$

Z této nerovnosti plynou omezení na velikost Courantova čísla

$\chi = \frac{a \Delta t}{(\Delta x)^2}$. Singulární body tohoto procesu jsou

$$\chi = \left(\frac{m_0}{2\pi}\right)^2, \quad \text{resp. } m_0 = 2\pi \sqrt{\chi_0}, \quad \text{pro } m_0 = 2, 3, \dots \quad (2.4.37)$$

Při těchto hodnotách χ dochází k enormnímu zesílení poruchy, k jakési rezonanci sítě při vlnové délce $\ell = m \Delta x$, nejčastěji pak $\ell = 2 \Delta x$ pro $\chi_0 = \frac{1}{\pi^2}$. Vyjma těchto singulárních bodů je výpočtový proces (2.4.26) stabilní, viz např. kap. 2.4.1 (Maršik F. a kol., 1989).

Stabilita a konvergence numerického řešení lineárních hyperbolických rovnic (2.1.53), ve zjednodušeném případě rovnice (2.4.1), jsou vázány tzv. Laxovou větou o ekvivalenci (Richtmayer, Morton, 1972). Tato věta tvrdí: Nechť je korektně ^{2.20} formulována úloha (2.4.1) až (2.4.3), resp. v obecném případě úloha (2.1.53) až (2.1.56) a jestliže její diferenční aproximace operátorem T_D ^{2.19} vyhovuje podmínce

$$\left\| \frac{u(t+\Delta t) - G(\Delta t)u(t)}{\Delta t} \right\|_0 \rightarrow 0 \quad \text{při } \Delta t \rightarrow 0 \quad \text{pro } t \in (0, T) \quad (2.4.38)$$

kde $G(\Delta t)$ značí tzv. operátor časového posunutí o Δt definovaný vztahem

$$u^{(n+1)}(x) = G(\Delta t)u^{(n)}(x) \quad (2.4.39)$$

(jde o obecnou formu koeficientu zesílení, vztah iv) v poznámce 2.18). Za těchto podmínek je stabilita řešení nutná a postačující pro jeho konvergenci.

Tato věta vyjadřuje v podstatě známý fakt, že každý fyzikální systém se nachází delší čas v jednom stavu jen tehdy, když je stabilní vůči malým fluktuacím, tzn., že tyto fluktuace se v něm tlumí. Podobná situace je i při numerickém řešení, které je rovněž vzdáleno o nějakou malou fluktuaci od řešení přesného. Při konvergentním postupu se musí tato fluktuace během výpočtu zmenšovat, tj. tlumit (disipovat). Situace je potom stejná jako pro eliptické problémy, které jsou charakterizovány podmínkou ostrého extrému příslušného funkcionálu variačního principu (2.3.12). Termodynamické podmínky stability, viz kap. 1.7 lze interpretovat jako podmínky extrému nějakých funkcionálů

(ve smyslu rozšířeného variačního počtu) a kontrolovat tak na základě termodynamických úvah stabilní výpočtové metody i pro neeliptické problémy, viz např. kap. 2.3.4.

Smysl Laxovy věty lze vyjádřit následovně:

Aproximujeme-li diferenční schéma výchozí diferenciální rovnicí spolu s jejím řešením a je-li toto řešení stabilní, pak je i konvergentní, viz vztah v) v pozn.^{2.19}).

2.20)

Říkáme, že úloha formulovaná pomocí rovnic evolučního typu (2.1.20) až (2.1.23), včetně problémů stacionárních (soubor takovýchto rovnic nazýváme rovnicemi matematické fyziky) je formulována korektně na nějaké množině funkcí $M_{KOR} = M_{EX} \cap M_{JED}$, jestliže jsou splněny následující požadavky (Vladimirov, 1967):

- a) řešení musí existovat na nějaké třídě funkcí M_{EX}
- b) řešení musí být jediným v nějaké třídě funkcí M_{JED}
- c) řešení musí spojitě záviset na zadaných hodnotách úlohy (např. okrajové a počáteční podmínky, koeficienty konstitutivních vztahů, viz kap. I 6, apod.)

Říkáme, že řešení u závisí spojitě na zadaných hodnotách a jestliže platí, že pro posloupnost zadaných hodnot a_k ($k=1,2,3,\dots$) konvergující v nějakém smyslu k a , tj. $a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$, konverguje posloupnost řešení úlohy u_k v nějaké normě, např. ^{2.1)} k řešení u , tj. $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u$.

Např. řešení u lineární rovnice (2.1.10) závisí na množině M_{KOR} spojitě na p jestliže je operátor T na této množině omezený, tj. pro všechna $u \in M_{KOR}$ platí $\|Tu\| \leq C\|u\|$.
Potom $\|Tu_k - p_k\| \leq \|Tu_k - Tu\| + \|p - p_k\| \leq C\|u_k - u\| + \|p - p_k\|$ pro $k \rightarrow \infty$.

2.4.1 Numerická schémata pro procesy s konvekcí

Nestacionární procesy (popisované parabolickými a hyperbolickými rovnicemi), ve kterých se výrazně uplatňuje konvekce a nebo vlnové procesy je třeba řešit pomocí výpočtových schémat s patřičným tlumením. Bez tohoto tlumení dochází při výpočtu k nežádoucím oscilacím, avšak při značném numerickém tlumení dochází k rozmazávání velkých gradientů (např. rázových vln). Tyto oscilace jsou v zásadě odstraňovány dvěma způsoby:

- i) derivaci u konvektivního členu (popř. v hyperbolické oblasti) nahrazujeme zpětnou diferencí (proti proudu), tzv. "upwind" (2.3.84). U metody konečných prvků lze žádaného efektu dosáhnout užitím speciálních aproximačních funkcí, které silně preferují hodnoty řešení proti proudu - tzv. Petrovova - Galerkinova metoda (Morton, Parrott, 1980).
- ii) Zavedením numerické viskozity (2.3.81), resp. numerické difuzivity.

Ukážeme, že oba způsoby jsou z hlediska numerického výsledku ekvivalentní a jsou důsledkem toho, že výpočtová síť není tvořena sítí charakteristik řešených rovnic. Využití pohybujících se výpočtových sítí, tvořených charakteristikami je velmi neekonomické a lze jen velice obtížně použít pro systém rovnic (Löhner, Morgan, Zienkiewicz, 1984). Uvedeme postup, který navrhl Donea (1984), a který je ekvivalentní výpočtu v síti charakteristik. Tato metoda pro řešení hyperbolických problémů s konvekcí v metodě konečných prvků (konkrétní příklady viz kap. 2, 4.4) je nazývána metoda Taylorova-Galerkinova. V případě, že metoda je druhého řádu přesnosti v čase, je ekvivalentní Laxově-

-Wendroffově metodě, užívané v metodě konečných diferencí (Kozel, 1986).

Vyšetřujeme rovnici (2.4.1) v n -tém časovém kroku

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} + a \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} = 0. \quad (2.4.40)$$

Provedeme Taylorův rozvoj řešení v čase $t = t^{(n)}$, např. do třetí časové derivace, tj.

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial t^3} + O(\Delta t^4). \quad (2.4.41)$$

Uvážíme-li, že s ohledem na (2.4.1) platí

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = -a \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u^{(n)}}{(\partial x)^2}, \quad \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial t^3} = a^2 \frac{\partial^3 u^{(n)}}{(\partial x)^2 \partial t} \quad (2.4.42)$$

pak lze rovnici (2.4.40) přepsat

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial t^3} - O(\Delta t^3) = -a \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} \quad (2.4.43)$$

resp. s užitím (2.4.42) máme

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} - \frac{a^2 (\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = -a \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} + a^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} + O(\Delta t^3). \quad (2.4.44)$$

Nahradíme v tomto vztahu $\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} \doteq \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t}$ a dostáváme zobecněnou Eulerovu metodu

$$\left(1 - \frac{a^2(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^2}{(\partial x)^2}\right) \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} = -a \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} + \frac{a^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{(\partial x)^2}. \quad (2.4.45)$$

Vzhledem k rozvoji (2.4.41) je zřejmé, že jde o diferenční schéma třetího řádu přesnosti vzhledem k času (2.19). Zanedbáme-li v něm třetí derivaci dostáváme

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} - a \Delta t \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} + \frac{a^2(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{(\partial x)^2}, \quad (2.4.46)$$

což je výchozí stav pro Laxovo-Wendroffovo schéma (derivace jsou nahrazeny konečnými diferencemi, viz kap. 2.6.

Dříve, než budeme v (2.4.44) aplikovat Galerkinovu metodu konečných prvků ukážeme, že je ekvivalentní řešení rovnice (2.4.1) v síti charakteristik (2.4.5), Podél charakteristiky $\eta = x - at$ je řešení konstantní (2.4.4), tudíž platí

$$u(\eta) = u(x_{j-1} - at^{(n)}) = u(x_j - at^{(n+1)}) \quad (2.4.47)$$

viz obr. 2.21. Provedeme Taylorův rozvoj funkce $u(x, t^{(n)})$, např. v bodě $x = x_j$, takže

$$\begin{aligned} u(x_{j-1} - at^{(n)}) &= u(x_j - \Delta x, t^{(n)}) = u(x_j, t^{(n)}) - \frac{\partial u(x_j, t^{(n)})}{\partial x} \Delta x + \\ &+ \frac{\partial^2 u(x_j, t^{(n)}) (\Delta x)^2}{2 \partial x^2} - \frac{\partial^3 u(x_j, t^{(n)}) (\Delta x)^3}{6 \partial x^3} + O(\Delta x^4) = \\ &= u(x_j, t^{(n+1)}). \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

S ohledem na definici charakteristiky (2.4.5) (tj. $\Delta x = a \Delta t$) a rovnici (2.4.42) dostáváme vztah (2.4.44), ze kterého byla odvozena zobecněná Eulerova metoda (2.4.45). Díky tomu, že lze tuto metodu odvodit z metody charakteristik (2.4.47), která je přesnou metodou řešení rovnice (2.4.1), ukazuje na její větší stabilitu. Vidíme, že zpětná diference $-\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$ je kompenzována difuzním členem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, popř. dalším členem $\frac{\partial^3 u}{(\partial x)^2 \partial t}$. Tímto postupem je opět ukázáno, že hyperbolické problémy je možno v sítích, které nejsou tvořeny charakteristikami řešit jen s pomocí zpětné diference (tzv. upwind), a nebo, což je ekvivalentní, zavedením numerické difuzivity či viskozity. (viz schémata typu Laxe-Wendroffa). Uvedený postup lze provést i pro nelineární problém, jestliže ho obvyklým způsobem linearizujeme, viz např. (2.1.31).

Prostorovou diskretizaci v metodě (2.4.45) provedeme obvyklou Galerkinovou metodou, viz např. (2.3.38). Takto získaný postup numerického řešení hyperbolických problémů nazýváme Eulerova - Taylorova - Galerkinova metoda a detailně ho ukážeme na jedno-rozměrném případě. Použijeme lineárních aproximačních funkcí

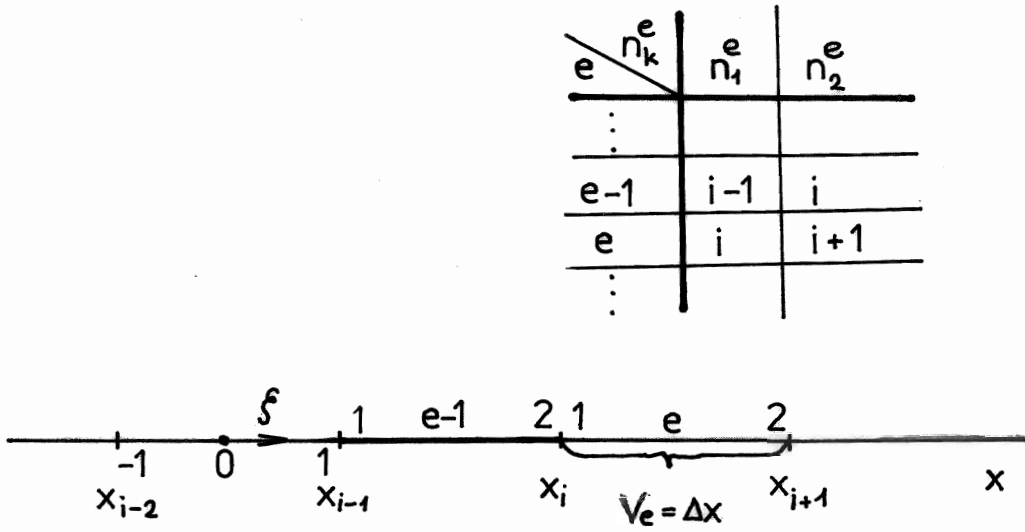
$$\psi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi), \quad \xi \in \langle -1, 1 \rangle \quad (2.4.49)$$

s aproximací geometrie (2.3.8)

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^2 x_k \psi_k(\xi). \quad (2.4.50)$$

Vztahy (2.3.18) až (2.3.21) nutné k integraci a derivaci na konečném prvku jsou

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} = \frac{\Delta x}{2} = \sqrt{g} \quad (2.4.51)$$



Obr. 2.22

Jednorozměrné konečné prvky s globálním číslováním $n = 1, 2, \dots, i, \dots$

viz obr. 2.22.

Obr. 2.22

Ze vztahu (2.4.45) ukážeme (analogicky (2.4.26)) integrální výraz

$$\int_{V_e} \left[\left(1 - \frac{\alpha^2 (\Delta t)^2}{6} \frac{\partial}{(\partial x)^2} \right) (u_e^{(n+1)} - u_e^{(n)}) + \alpha \Delta t \frac{\partial u_e^{(n)}}{\partial x} - \frac{\alpha^2 (\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u_e^{(n)}}{\partial x^2} \right] \delta u_e^{(n+1)} dx = 0 \quad (2.4.52)$$

a na e-tém konečném prvku předpokládáme řešení $u_e^{(n)}, u_e^{(n+1)}$ a jeho variaci $\delta u_e^{(n+1)}$ ve tvaru

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^2 u_k^{(n)} \psi_k, \quad u^{(n+1)} = \sum_{k=1}^2 u_k^{(n+1)} \psi_k, \quad \delta u_e^{(n+1)} = \sum_{k=1}^2 \delta u_k^{(n+1)} \psi_k. \quad (2.4.53)$$

Ve výrazu (2.4.52) užijeme integraci per partes

$$\int_{V_e} \left[(u_e^{(n+1)} - u_e^{(n)}) \delta u_e^{(n+1)} + \frac{(\alpha \Delta t)^2}{6} \frac{\partial}{\partial x} (u_e^{(n+1)} - u_e^{(n)}) \frac{\partial \delta u_e^{(n+1)}}{\partial x} + \alpha \Delta t \frac{\partial u_e^{(n)}}{\partial x} \delta u_e^{(n+1)} + \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2} \frac{\partial u_e^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial \delta u_e^{(n+1)}}{\partial x} \right] dx - \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2} \left\{ \left[\frac{1}{3} \frac{\partial (u_e^{(n+1)} - u_e^{(n)})}{\partial x} - \frac{\partial u_e^{(n)}}{\partial x} \right] \delta u_e^{(n+1)} \right\} \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0. \quad (2.4.54)$$

Hranicí ∂V_e konečného prvku jsou body x_i, x_{i+1} , tj. $\partial V_e \equiv \{x_i, x_{i+1}\}$. Dosadíme aproximaci (2.4.53), transformujeme integrál podle (2.4.51) a uvážíme, že se hodnoty vyruší, viz kap. 2.3.1. Tudíž pro e-tý konečný prvek platí

$$\sum_{k,l=1}^2 \int_{-1}^1 \left[\psi_k \psi_l + \frac{(a\Delta t)^2}{6} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi \Delta u_k^{(n)} \delta u_l^{(n+1)} =$$

$$= - \sum_{k,l=1}^2 \int_{-1}^1 \left[a\Delta t \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \psi_l \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{(a\Delta t)^2}{2} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi u_k^{(n)} \delta u_l^{(n+1)},$$

(2.4.55)

kde jsme definovali rozdíl řešení ve dvou po sobě jdoucích časových krocích

$$\Delta u_k^{(n)} = u_k^{(n+1)} - u_k^{(n)} \quad \text{pro } k = 1, 2. \quad (2.4.56)$$

Vypočteme naznačenou integraci a vztah (2.4.55) zapíšeme ve tvaru

$$\sum_{k,l=1}^2 \left(M_{kl}^e \Delta u_k^{(n)} - B_{kl}^e u_k^{(n)} \right) \delta u_l^{(n+1)} = 0, \quad (2.4.57)$$

kde koeficienty matic jsou dány odpovídajícími integrály, tj.

$$M_{kl}^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2+\chi^2 & 1-\chi^2 \\ 1-\chi^2 & 2+\chi^2 \end{bmatrix}, \quad B_{kl}^e = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\chi+\chi^2 & -\chi-\chi^2 \\ \chi-\chi^2 & \chi+\chi^2 \end{bmatrix},$$

(2.4.58)

$\chi = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ je Courantovo číslo.

Podmínka (2.4.57) platí pro e-tý konečný prvek. Pro i-tý uzel sítě platí, viz obr. 2.22.

$$\sum_{e=1,e} \sum_{k,l=1}^2 \left(M_{\tilde{n}_k \tilde{n}_l}^e \Delta u_{\tilde{n}_k}^{(n)} - B_{\tilde{n}_k \tilde{n}_l}^e u_{\tilde{n}_k}^{(n)} \right) \delta u_{\tilde{n}_l}^{(n+1)} = 0 \quad \text{pro } \tilde{n}_l = i. \quad (2.4.59)$$

Vzhledem k maticím (2.4.58) musí pro $\delta u_i^{(n+1)} \neq 0$ platit rovnice

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[(1-\chi^2) \Delta u_{i-1}^{(n)} + (2+\chi^2) \Delta u_i^{(n)} \right] + \frac{1}{2} \left[(\chi-\chi^2) u_{i-1}^{(n)} + (-\chi+\chi^2) u_i^{(n)} \right] + \\ & + \frac{1}{6} \left[(2+\chi^2) \Delta u_i^{(n)} + (1-\chi^2) \Delta u_{i+1}^{(n)} \right] + \frac{1}{2} \left[(\chi+\chi^2) u_i^{(n)} + (+\chi-\chi^2) u_{i+1}^{(n)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.4.60)$$

kterou lze zapsat v přehledném tvaru

$$\left[1 + \frac{1}{6} (1-\chi^2) \Delta_{xx} \right] \Delta u_i^{(n)} = \chi \Delta_x u_i^{(n)} + \frac{\chi^2}{2} \Delta_{xx} u_i^{(n)}. \quad (2.4.61)$$

Definovali jsme diferenční operátory

$$\Delta_{xx} u_i^{(n)} = u_{i+1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}, \quad \Delta_x u_i^{(n)} = \frac{u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}}{2}. \quad (2.4.62)$$

Rovnice (2.4.61) platí pro každý uzel sítě (vyjma hraničních) a nazývá se Eulerovo-Taylorovo-Galerkinovo schéma (tzv. ETG schéma). Tudiž výpočtový proces plynoucí z podmínky (2.4.52) vede na systém rovnic

$$M \Delta u^{(n)} = b^{(n)}, \quad (2.4.63)$$

kde matice M je tridiagonální (2.21). V případě, že bychom zanedbali v rozvoji (2.4.41) třetí derivaci, dostáváme obvyklé Laxovo-Wendroffovo schéma v metodě konečných diferencí (Richtmayer, Morton, 1972).

2.21)

Inverze takovýchto matic zvyšuje výpočtové nároky, a proto je výhodné použít násilnou diagonalizaci výpočtu, tzv. "lumped" reprezentaci M_L (Donea, 1984). Vyjdeme z tvaru rovnice (2.4.61) a definujeme následující iterační proces

$$\begin{aligned} \Delta u_i^{(1)(n)} &= \chi \Delta_x u_i^{(n)} + \frac{\chi^2}{2} \Delta_{xx} u_i^{(n)} \\ \Delta u_i^{(2)(n)} &= \Delta u_i^{(1)(n)} - \frac{1}{6} (1 - \chi^2) \Delta_{xx} (\Delta u_i^{(1)(n)}) - \Delta u_i^{(1)(n)} + b_i^{(n)} \\ &\vdots \\ \Delta u_i^{(r)(n)} &= \Delta u_i^{(r-1)(n)} - \frac{1}{6} (1 - \chi^2) \Delta_{xx} (\Delta u_i^{(r-1)(n)}) - \Delta u_i^{(r-1)(n)} + b_i^{(n)} \end{aligned} \quad \text{i)}$$

kde r označuje počet iterací.

Tento iterační proces lze pro soustavu rovnic (2.4.63) zapísat formálně ve tvaru

$$M_L (\Delta u^{(r)(n)} - \Delta u^{(r-1)(n)}) = b^{(n)} - M \Delta u^{(r-1)(n)} \quad 1 \leq r \leq n_{\text{iter}} \quad \text{ii)}$$

pro $\Delta u^{(0)(n)} = 0$. Matice M_L je diagonální (pro případ (2.4.61) jednotková) matice. Pro $r=1$ dostáváme Laxovo-Wendroffovo schéma.

Nalezneme ještě kriterium stability schématu (2.4.61), resp. (2.4.52). Použijeme stejnou metodu jako k nalezení vzorce (2.4.17) a pro koeficient zesílení dostáváme

$$\xi(\Delta t, k) = 1 + \frac{i\chi \sin \beta - 2\chi^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 - \frac{2}{3}(1-\chi^2) \sin^2 \frac{\beta}{2}} \quad \text{pro } \beta = k\Delta x, \quad k = \frac{2\pi}{l} \quad (2.4.64)$$

a podmínka stability $|\xi| < 1$ je splněna pro $\chi^2 < 1$.

Pro $\chi = 1$ (charakteristiky procházejí uzly sítě, viz obr.2.19) je vztah (2.4.64) roven $\xi = e^{i\beta}$ a všechny poruchy se šíří bez zkreslení.

Nalezneme podmínku stability plynoucí z podmínky numerického výpočtu (2.4.52). Stabilitu budeme vyšetřovat na konečném prvku před zavedením konkrétní prostorové aproximace (stejně jako byla odvozena nerovnost (2.4.29)). Dosazením Taylorova rozvoje (2.4.41) a za předpokladu odchylek (2.4.25) dostaneme

$$\xi_e(\Delta t, m) = 1 + \frac{\frac{\chi^2 (2\pi)^2}{2} \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 - i\chi \left(\frac{2\pi}{m}\right)}{1 + \frac{\chi^2 (2\pi)^2}{6} \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2}, \quad \text{pro } m=2,3,\dots$$

$$\chi = \frac{a\Delta t}{\Delta x}. \quad (2.4.65)$$

V případě, že $\chi^2 \ll \frac{3}{\pi^2}$, lze velikost koeficientu zesílení zapsat ve tvaru mocninné řady

$$|\xi_e(\Delta t, m)| \doteq 1 + \frac{\left(\frac{2\pi}{m}\right)^4 \chi^4}{18 + 3\left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 \chi^2} \leq 1 + C_1 (\Delta t)^4, \quad (2.4.66)$$

kde $C_1 = \frac{1}{18} \left(\frac{\pi c}{\Delta x}\right)^4$. Numerické schéma (2.4.52) je stabilní ve smyslu obecnější podmínky stability (2.18) vztah (i) (srovnej s podmínkou (2.4.30)).

2.4.2 Metoda konečných prvků pro nestacionární vedení tepla a difuzi

Tyto procesy jsou popsány parabolickou rovnicí (2.4.6).

Nechť je $u(\underline{x}, t)$ řešení diferenciální rovnice parabolického typu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) = f \left(u, \left| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right| \right) \quad \text{pro } (\underline{x}, t) \in V \times (0, T). \quad (2.4.67)$$

V případě, že u má význam teploty, pak tato rovnice popisuje nestacionární nelineární $\lambda = \lambda \left(u, \left| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right| \right)$ vedení tepla, kde λ je koeficient tepelné vodivosti (6.5.17). Pravá strana rovnice reprezentuje zdroje tepla. Má-li význam koncentrace nějaké chemické komponenty, pak je λ difuzní koeficient a funkce f popisuje vznik či zánik chemické komponenty v důsledku chemických reakcí.

Okrajové podmínky jsou v zásadě třech typů ((2.4.7) až (2.4.9)) a obecně mohou být zadány tak, že na části hranice ∂V_1 je Dirichletova podmínka

$$u(\underline{x}, t) = \bar{u}(\underline{x}, t) \quad \text{pro } (\underline{x}, t) \in \partial V_1 \times (0, T) \quad (2.4.68)$$

na části hranice ∂V_2 podmínka Neumannova

$$\sum_{i=1}^3 \left(\lambda \frac{\partial u(\underline{x}, t)}{\partial x^i} - q_i(\underline{x}) \right) n^i = 0 \quad \text{pro } (\underline{x}, t) \in \partial V_2 \times (0, T) \quad (2.4.69)$$

(zde \underline{n} je vnější normála^{2.3)} k ploše ∂V_2) a na zbytku hranice ∂V_3 je podmínka Newtonova

$$\sum_{i=1}^3 \lambda \frac{\partial u(x,t)}{\partial x^i} n^i - q(u(x,t)) = 0 \quad \text{pro } (x,t) \in \partial V_3 \times (0,T) \quad (2.4.70)$$

(n je opět vnější normála ∂V_3). Na celé hranici $\partial V = \partial V_1 \cup \partial V_2 \cup \partial V_3$ musí být nějaká okrajová podmínka zadána (Rektorys, 1974, Valchářová, 1986).

Počáteční podmínka je

$$u(x,t=0) = \hat{u}(x) \quad \text{pro } x \in V. \quad (2.4.71)$$

Podmínky (2.4.67) a (2.4.71) jsou spolu vázány tzv. podmínkou kompatibility řešení

$$\bar{u}(x,0) = \hat{u}(x) \quad \text{pro } x \in V. \quad (2.4.72)$$

Vyjdeme z obecné integrální formulace (2.1.12) (pro $v = \delta u$) do které zahrneme i okrajové podmínky (2.4.67) až (2.4.70).

Jestliže řešenou oblast V rozdělíme na konečné prvky $V = \bigcup_e V_e$ dostáváme vztah

$$\sum_e \left\{ \int_{V_e} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) - f \right] \delta u d\bar{v} + \int_{\partial V_e} (u - \bar{u}) \delta u da + \right. \\ \left. + \int_{\partial V_e} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x^i} - q_i \right) n^i \delta u da + \int_{\partial V_{3e}} \left(\sum_{i=1}^3 \lambda \frac{\partial u}{\partial x^i} \delta u n^i - q(u) \delta u \right) da \right\} = 0.$$

(2.4.73)

Užitím Gaussovy věty (2.1.3) lze tento vztah upravit

$$\delta \mathcal{F}(u, \delta u) = \sum_e \left\{ \int_{V_e} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \sum_{i=1}^3 \lambda \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \delta u}{\partial x^i} - f \delta u \right] dV - \int_{\partial V_{2e}} \sum_{i=1}^3 q_i n_i \delta u da - \int_{\partial V_{3e}} g(u) \delta u da \right\} = 0$$

(2.4.74)

tak, že je $\delta \mathcal{F}$ jednak snížen řád derivace hledané funkce a jednak je výraz (2.4.74) roven podmínce extrému (2.2.9) nějakého funkcionálu $\mathcal{F}(u)$. Dirichletovu okrajovou podmínku (2.4.68) splníme tak, že v nódech konečných prvků patřících do hranice ∂V_e dosadíme $u = \bar{u}$.

Hledáme výchozí podmínku numerického procesu ve smyslu rozšířeného variačního počtu (2.3.50). Nahradíme ve vztahu (2.4.74) časovou derivaci diferencí, viz (2.4.32) a hodnoty $\lambda(u)$ a $f(u, \left| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right|)$ určujeme z předchozí iterace (problém linearizujeme). Konkrétní tvar podmínky extrému (2.4.74) pro e -tý konečný prvek je v $(n+1)$ -ní časové rovině roven

$$\delta \mathcal{F}(u_e^{(n)}, u_e^{(n+1)}, \delta u_e^{(n)}, \delta u_e^{(n+1)}) = \int_{V_e} \left[\frac{u_e^{(n+1)}}{\Delta t} \delta u_e^{(n+1)} + \theta \sum_{i=1}^3 \lambda_e^{(n)} \frac{\partial u_e^{(n+1)}}{\partial x^i} \frac{\partial \delta u_e^{(n+1)}}{\partial x^i} + (1-\theta) \sum_{i=1}^3 \lambda_e^{(n)} \frac{\partial u_e^{(n)}}{\partial x^i} \frac{\partial \delta u_e^{(n+1)}}{\partial x^i} - \left(\frac{u_e^{(n)}}{\Delta t} + f_e^{(n)} \right) \delta u_e^{(n+1)} \right] dV - \int_{\partial V_{2e}} \sum_{i=1}^3 c_i n_i \delta u_e^{(n+1)} da - \int_{\partial V_{3e}} \sum_{i=1}^3 g_e(u_e^{(n)}) \delta u_e^{(n+1)} da = 0.$$

(2.4.75)

Tento výraz nazýváme podmínkou výpočtového procesu. Užitím metody konečných prvků, viz kap. 2.3.1 je problém převeden na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

Odvodíme podmínky stability výpočtového procesu (2.4.73). Použijeme podobného postupu jako v jednorozměrném případě (2.4.32). Předpokládáme poruchy (2.4.25) ve tvaru rovinných vln

$$\delta u_e^{(n)}(\underline{x}) = |\delta u_e^{(n)}| e^{-i \underline{k} \underline{x}}, \quad \delta u_e^{(n+1)}(\underline{x}) = \xi_e \delta u_e^{(n)}(\underline{x}), \quad \text{pro } \underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$$

$$k_j = \frac{2\pi}{l_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

(2.4.76)

kde l_j je vlnová délka poruchy ve směru x^j . Dosazením rozvoje (2.4.24) do podmínky (2.4.73) nalezneme vztah pro koeficient zesílení (Maršík F., Maršík J., 1986).

$$\xi_e(\Delta t, \underline{k}) = \frac{1 + (1-\theta) \lambda_e \Delta t (\underline{k})^2 + \frac{\partial f_e}{\partial u} \Delta t + i \Delta t \sum_{j=1}^3 k_j \left(\frac{\partial \lambda_e}{\partial x^j} - \frac{\partial f_e}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x^j} \right)} \right)}{1 - \theta \lambda_e \Delta t (\underline{k})^2}$$

(2.4.77)

(zanedbali jsme vliv Newtonovy okrajové podmínky, tj. $\frac{\partial g_e}{\partial u} = 0$).

Uvážíme-li, že výpočtový proces je stabilní jen tehdy, je-li splněna podmínka vi) poznámky 2.18), dostáváme konkrétní omezení na velikost čísel $\chi_e^i = \frac{\lambda_e \Delta t}{(\Delta x^i)^2}$ (Δx^i je rozměr sítě ve směru x^i pro $i = 1, 2, 3$).

Vztah (2.4.75) zjednodušíme zanedbáním nelinearity v koeficientu λ a vlivu pravé strany rovnice f . Obdržíme pak trojrozměrnou variantu vztahu (2.4.34), totiž

$$\left| \xi_e(\Delta t, m) \right| = \left| \frac{1 + (1-\theta) \sum_{i=1}^3 \left(\frac{2\pi}{m_i} \right)^2 \chi_e^i}{1 - \theta \sum_{i=1}^3 \left(\frac{2\pi}{m_i} \right)^2 \chi_e^i} \right| \leq 1 + C_1 \Delta t, \quad \chi^i = \frac{\lambda_e \Delta t}{(\Delta x^i)^2}, \quad (2.4.78)$$

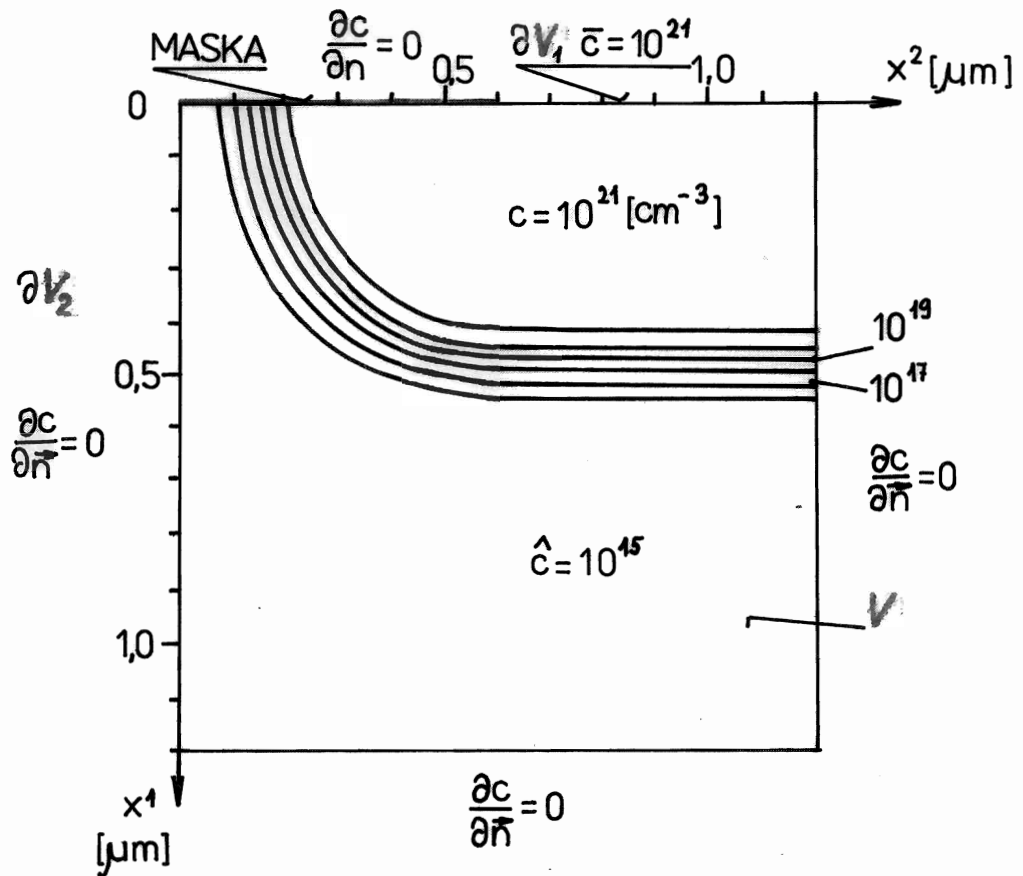
$$m_i = 2, 3, \dots \quad \text{pro } i = 1, 2, 3.$$

Předpokládáme opět, viz kap. 2.3.5, že při bilineárních aproximačních funkcích (2.3.10) jsou vlnové délky $\ell_i = m_i \Delta x^i$ vždy celým násobkem rozměru sítě Δx^i . Nejkratší porucha, která se může během výpočtu generovat, má vlnovou délku $2\Delta x^1$, a její vlnový vektor je $\underline{k} = \left(\frac{\pi}{\Delta x^1}, 0, 0 \right)$. Pak pro implicitní schéma ($\theta=1$) dostáváme koeficient zesílení (2.4.68) ve tvaru

$$\left| \xi_e(\Delta t, m_1=2) \right| = \frac{1}{|1 - (\pi)^2 \chi|} < 1 + C_1 \frac{\lambda}{(\Delta x^1)^2} \Delta t, \quad (2.4.79)$$

kde C_1 je konstanta.

Vztah (2.4.79) je splněn pro $\chi > 0,12$. Stabilitu lze očekávat i pro $\chi \ll \frac{1}{\pi^2}$, ale tento případ vede k velice malému časovému kroku a tím k nárůstu výpočtového času. Ostatní vlnové délky (tj. $m_1 > 2$) jsou při $\chi = 0,12$ však tlumeny. Jak ukazuje vztah (2.4.75), je vliv nelineárních členů podstatný zvláště tehdy, když jsou velké derivace $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x^i} \right)}$, tj. v případě silné závislosti na řešení. Z tohoto důvodu je třeba každý konkrétní případ vyšetřovat zvlášť.



Obr. 2.23

Koncentrace příměsí c po 30 min difuze s koeficientem difuze $D(c) = 2 \cdot 10^{-14} (0,037 + 6,54 \cdot 10^{-20} \cdot c)$ [cm^2/s].
 Výpočet provedeme na síti bilineárních konečných prvků s dělením 80×80 pro $\chi = 0,12$.

Stabilita metody konečných prvků (bilineární aproximace (2.3.10)) pro parabolickou rovnici s výpočtovým procesem (2.4.73) byla testována na příkladu dvourozměrné nestacionární difuze

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(D(c) \frac{\partial c}{\partial x^i} \right) = 0. \quad (2.4.80)$$

obr. 2.23 →

Počáteční a okrajové podmínky jsou uvedeny na obr. 2.23.

Podmínkou stability je nerovnost $\chi \geq \chi_{min} = 0,12$

(Maršík a kol, 1989). Výpočtový průběh koncentrace je na obr. 2.23.

2.4.3 Dynamické zatěžování termoviskoplastického materiálu

Při rychlém mechanickém zatěžování s přívodem a odvodem tepla je třeba uvažovat, vedle elastických vlastností materiálu, i jeho plasticitu (tečení). K takovýmto procesům dochází např. při tváření kovů výbuchem, při spojování součástí lisováním při náhlých změnách provozních parametrů (teploty, tlaku), apod. (Maršík, 1988).

Vyjdeme z obecného konstitutivního vztahu pro izotropní termoviskoelastický materiál (I.6.4.29). Způsob výpočtu ukážeme na konkrétním příkladu výbuchem zatěžované trubky. Pro tento případ je výhodné vycházet z formulace problému v křivočarých (konkrétně) válcových souřadnicích. Rovnice bilance hmotnosti (2.1.15), hybnosti (2.1.16) a energie (2.1.17) v obecných souřadnicích, viz I.D2.8 jsou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^l)_{;l} = 0 \quad (2.4.81)$$

$$\frac{\partial (\rho v^j)}{\partial t} + (\rho v^j v^l - t^{lj})_{;l} = \rho f^j \quad (2.4.82)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + (\rho u v^l + q^l)_{;l} = t^{lj} v_{j;l} \quad (2.4.83)$$

Středníkem ; označujeme parciální kovariantní derivaci, viz kap. I.D2.4.

Pro materiálovou derivaci vektoru posunutí u (2.1.18) platí

$$\dot{u}_j = v_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} + v^l u_{j;l} \quad (2.4.84)$$

při $v^l = g^{lj} v_j$ (viz I.D2.37)

Konstitutivní vztahy pro termovisko-
plastický (tj. nestlačitelný termoviskoelastický materiál, viz
kap.I.6.6) materiál jsou následující.

Pro vnitřní energii(I.6.3.14) předpokládáme přiblížení

$$u = u_0 + c_v(T - T_0) + \frac{3T_0\alpha K}{\rho_0} e_{(1)} \quad , \quad (2.4.85)$$

přičemž členy s kvadrátem deformace jsme zanedbali.

Tenzor napětí(I.6.4.29) volíme ve tvaru

$$t^{ij}(T, e^{ij}, e_{dis}^{ij}) = K [e_{(1)} - 3\alpha(T - T_0)] g_{ij} + 2\mu (\overset{\circ}{e}^{ij} - \overset{\circ}{e}_{dis}^{ij}) \quad , \quad (2.4.86)$$

jehož stopa(I.3.3.12)(I.D3.23) je

$$t_{(1)} = t^{ij} g_{ij} = 3K [e_{(1)} - 3\alpha(T - T_0)] \quad . \quad (2.4.87)$$

Deviátor tenzoru napětí je roven

$$\overset{\circ}{t}^{ij} = t^{ij} - \frac{t_{(1)}}{3} g^{ij} = 2\mu (\overset{\circ}{e}^{ij} - \overset{\circ}{e}_{dis}^{ij}) \quad (2.4.88)$$

a nevratnou část deviátoru tenzoru deformace $\overset{\circ}{e}_{dis}^{ij}$ uvažujeme^{2.22)}
ve tvaru

$$\overset{\circ}{e}_{dis}^{ij} = 2\tilde{\mu} \overset{\circ}{t}^{ij} \quad (2.4.89)$$

při

$$\tilde{\mu} = \frac{c_0}{2\rho_{ekv}} \left(\frac{\rho_{ekv}}{k} \right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{c_0}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{n}} (\dot{\epsilon}_{ekv})^{\frac{n-1}{n}} \quad . \quad (2.4.90)$$

2.22)

Na rozdíl od zákona (I.6.6.17) popisujícího materiál Kelvinova typu, popisuje vztah (2.4.89) materiál Maxwellova typu, tj. s trvalou deformací.

Zde c_0, n jsou konstanty materiálu a k je mez kluzu (I.6.6.7), viz obr. 2.24b).

Veličiny p_{ekv} a $\dot{\epsilon}_{ekv}$ označují postupně napětí ekvivalentní jedno-
rozměrnému zatížení (např. $t'' = p_{ekv}$) a rychlost deformace
ekvivalentní rychlosti smyku (2.23) (např. $\frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x^2} = \dot{\epsilon}_{ekv}$).

2.23)

Využijeme toho, že stopa tenzoru a stopa jeho 2. mocniny jsou invarianty tenzoru (I.D3.23) vůči natočení souřadnic (I.D3.12). Napětí vyvolané jednorázovým zatížením (I.6.3.11) vede k tenzoru napětí

$t'' = p_{ekv}$, jehož ostatní složky jsou nulové. Stopa tohoto tenzoru (2.4.87) je $t_{(1)} = p_{ekv}$ a jeho deviátor (2.4.88) je

$$\overset{\circ}{t}{}^{11} = \frac{2}{3} p_{ekv} g^{11}, \quad \overset{\circ}{t}{}^{22} = -\frac{p_{ekv}}{3} g^{22}, \quad \overset{\circ}{t}{}^{33} = -\frac{p_{ekv}}{3} g^{23}$$

(ostatní složky jsou v ortogonálních souřadnicích nulové). Potom platí

$$\overset{\circ}{t}{}^{ij} \overset{\circ}{t}{}_{ji} = \overset{\circ}{t}{}_{(2)} = \frac{2}{3} p_{ekv}^2, \quad \text{resp.} \quad p_{ekv} = \sqrt{\overset{\circ}{t}{}_{(2)}} \quad \text{i)}$$

a tenzor $\overset{\circ}{t}{}^{ij}$ může být vyjádřen v libovolné natočené soustavě souřadnic (srovnej s pozn. I.6.7)).

Podobně pro čistý smyk $\varepsilon_{ekv} = e_{12} \left(= \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right)$ (I.3.2.16),

resp. jeho rychlost (I.3.8.8) $\dot{\varepsilon}_{ekv} = d_{12}$ dostáváme tenzor

$$\overset{\circ}{e}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & , & \varepsilon_{ekv} & , & 0 \\ \varepsilon_{ekv} & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 \end{pmatrix} . \quad \text{ii)}$$

Stopa jeho 2. mocniny je

$$\overset{\circ}{e}_{(2)} = \overset{\circ}{e}_{ij} \overset{\circ}{e}_{ij} = \overset{\circ}{e}_{ij} e_{kl} g^{ik} g^{jl} = 2 \varepsilon_{ekv}^2, \text{ resp. } \overset{\circ}{\dot{e}}_{(2)} = 2 \dot{\varepsilon}_{ekv}^2. \quad \text{iii)}$$

Předpokládáme, že materiál je tepelně vodivý a izotropní, takže vektor tepelného toku (I.6.2.11) se redukuje na tvar

$$q = -\lambda g^i \frac{\partial T}{\partial x^i} . \quad (2.4.91)$$

Vektor posunutí u (I.3.1.24) a tenzor deformace e_{ij} (I.3.1.19) můžeme s ohledem na jejich geometrický význam napsat ve fyzikálních komponentách (I.D.2.6). Pro vektor posunutí platí

$$u = g^i u_i = \sum_{i=1}^3 \frac{g^i}{(g^{ii})^{\frac{1}{2}}} (g^{ii})^{\frac{1}{2}} u_i = \sum_{i=1}^3 e_{(i)} u_{(i)}, \quad (2.4.92)$$

$$e_{(i)} = \frac{g^i}{(g^{ii})^{\frac{1}{2}}}, \quad u_i = (g^{ii})^{\frac{1}{2}} u_{(i)} \quad (2.4.93)$$

(přes podtržené indexy se nesčítá, indexy v závorce označují fyzikální velikost odpovídající složky)

kde $\underline{e}_{(i)}$ jsou jednotkové vektory a $u_{(i)}$ fyzikální složky vektoru posunutí podél odpovídající souřadnice ξ^i . Tenzor malých deformací (I.3.1.26) je v křivočarých souřadnicích vyjádřen jako

$$2e_{ij} = u_{i;j} + u_{j;i} \quad , \quad (2.4.94)$$

tj. vzdálenost dvou bodů (I.3.1.19) a ve fyzikálních souřadnicích je dána vztahem

$$2e_{ij} d\xi^i d\xi^j = \sum_{i,j=1}^3 \frac{2e_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \sqrt{g_{ii} g_{jj}} d\xi^i d\xi^j = 2e_{(i)(j)} d\xi^{(i)} d\xi^{(j)} . \quad (2.4.95)$$

Zde jsme definovali fyzikální složky tenzoru malých deformací

$$2e_{(i)(j)} = \frac{2e_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \left\{ \frac{\partial [(g^{ii})^{-\frac{1}{2}}] u_{(i)}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial [(g^{jj})^{-\frac{1}{2}}] u_{(j)}}{\partial \xi^i} - 2 \{ \begin{matrix} l \\ j i \end{matrix} \} (g^{ll})^{-\frac{1}{2}} u_{(l)} \right\} \quad (2.4.95)_1$$

a fyzikální velikost elementu souřadnic $d\xi^{(i)} = \sqrt{g_{ii}} d\xi^i$.

Vztah (2.4.95) jsme získali dosazením (2.4.93) do (2.4.94) a provedením kovariantní derivace (I.D2.48) (např. Brdička, 1959).

Budeme předpokládat, že konvektivní část rychlosti (2.4.84) je zanedbatelná a deviátor rychlosti celkové deformace $\dot{d}_{ij} = \dot{\hat{e}}_{ij}$ je roven deviátoru rychlosti trvalých deformací (2.4.89), čili

$$\dot{u}_j = v_j \doteq \frac{\partial u_j}{\partial t} \quad , \quad \dot{d}_{ij} = \frac{\partial \hat{e}_{ij}}{\partial t} \doteq g_{il} g_{jk} \frac{\partial \hat{e}_{lk}}{\partial t} .$$

(2.4.96)

Gradient rychlosti vyjádříme ve tvaru $v_{j;l} = d_{ij} + w_{ij}$
 a tenzor rychlosti deformace d_{ij} píšeme jako součet

$$d_{ij} = \frac{\partial \dot{e}_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial e_{(1)}}{\partial t} g_{ij} . \quad (2.4.97)$$

Potom pravá strana rovnice energie (2.4.83) je rovna

$$\begin{aligned} t^{lj} v_{j;l} &= t^{lj} d_{jl} = t_{(1)} \frac{\partial e_{(1)}}{\partial t} + t^{0lj} \frac{\partial \dot{e}_{dis}^{rs}}{\partial t} g_{lr} g_{js} = \\ &= 3K [e_{(1)} - 3\alpha(T - T_0)] \frac{\partial e_{(1)}}{\partial t} + \frac{4}{3} \bar{\mu} p_{ekv}^2 . \end{aligned} \quad (2.4.98)$$

Při úpravě jsme použili vztahů (2.4.87), (2.4.97), (2.4.96) a vztahu i) v pozn. 2.23).

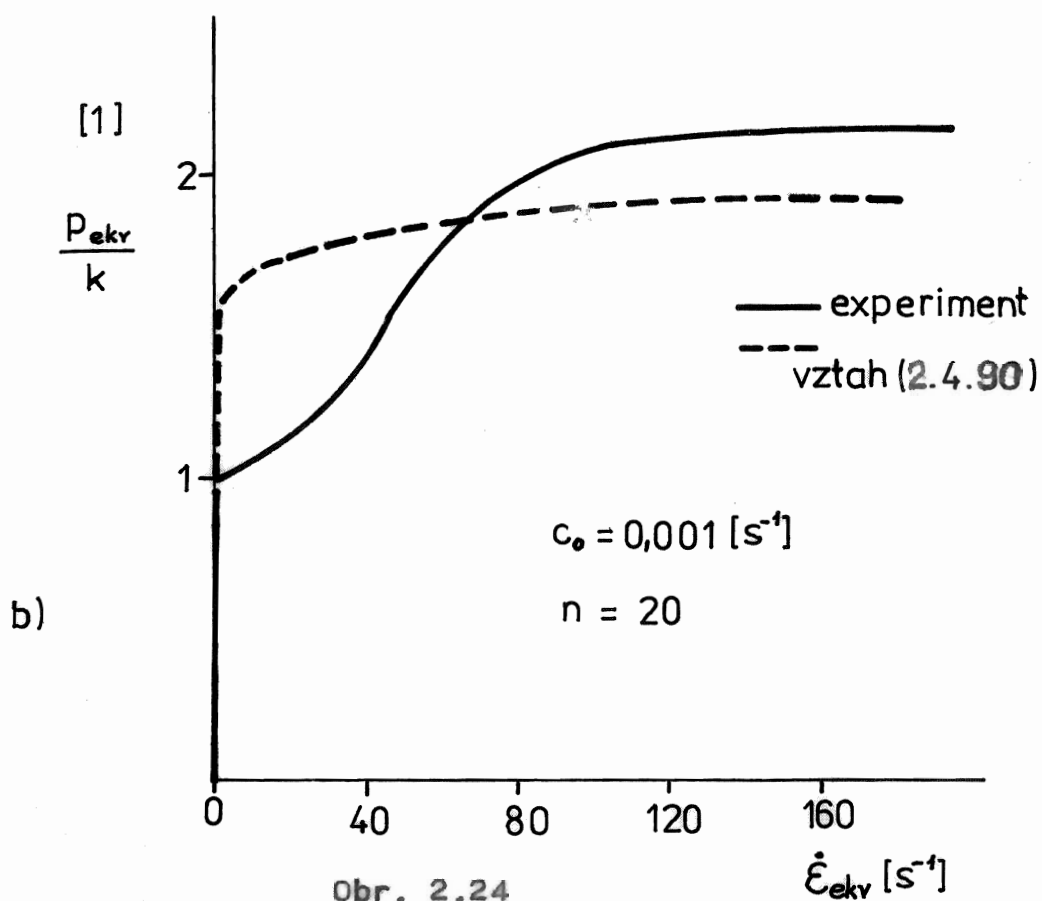
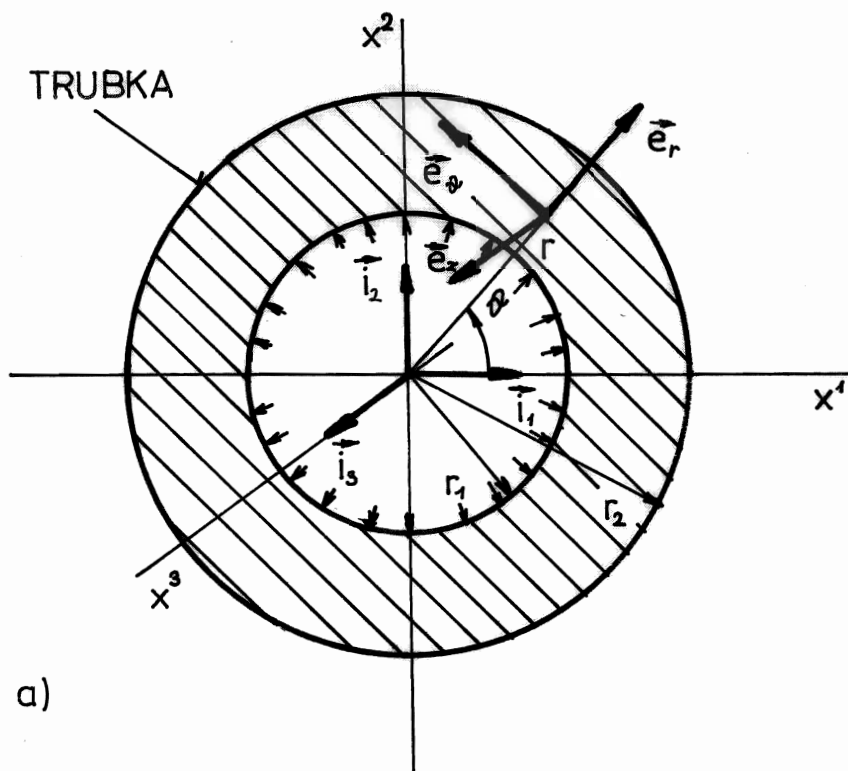
Rovnici bilance hmotnosti (2.4.81) můžeme integrovat podél trajektorie materiálového bodu, tj.

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\rho}}{\rho} &= v^l{}_{;l} = v_{i;j} g^{ij} = d_{(1)} = \dot{e}_{(1)} \\ \text{resp. } \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -\dot{e}_{(1)} . \end{aligned} \quad (2.4.99)$$

Integrací z referenčního stavu do stavu aktuálního dostáváme vztah

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-e_{(1)}} \doteq 1 - e_{(1)} \doteq \frac{1}{1 + e_{(1)}} \quad (2.4.100)$$

reprezentující zákon zachování hmoty při malých deformacích (srovnej s I.6.8).



- a) Trubka namáhaná zevnitř tlakovým a teplotním pulzem
b) Tečení termoviskoplaštického materiálu (Ghoneim, 1986)

Jako konkrétní příklad budeme vyšetřovat trvalé deformace v trubce způsobené silným rázem za současného přívodu tepla (např. tváření výbuchu). Předpokládejme osově symetrický případ, obr. 2.24) ve válcových souřadnicích (θ, z, r) (I.D2.89) Vektor posunutí má jen složku ve směru r , tj. $\underline{u} = (0, 0, u(r, t))$. Fyzikální složky tenzoru deformace (2.4.96) jsou

$$e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (2.4.101)$$

Jeho stopa $e_{(i)}$ a deviátor $\overset{\circ}{e}_{(i)(j)}$ jsou rovny

$$e_{(i)} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru), \quad (2.4.102)$$

$$\overset{\circ}{e}_{\theta\theta} = \frac{1}{3} \left(\frac{2u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad \overset{\circ}{e}_{zz} = -\frac{1}{3} \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad \overset{\circ}{e}_{rr} = \frac{1}{3} \left(2 \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right).$$

Nenulové složky deviátoru tenzoru trvalé deformace jsou

$$\overset{\circ}{e}_{\theta\theta dis} = \varepsilon_1, \quad \overset{\circ}{e}_{rr dis} = \varepsilon_2, \quad \overset{\circ}{e}_{zz dis} = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (2.4.103)$$

a jim odpovídající ekvivalentní deformační rychlost ^{2.22)} se vypočte podle vztahu

$$\dot{\varepsilon}_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2} \overset{\circ}{e}_{dis(2)}} = \left[\left(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_1 \dot{\varepsilon}_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4.104)$$

S ohledem na výše uvedené předpoklady dosadíme (2.4.86) do rovnice bilance hybnosti (2.4.82). Vnější objemové síly f^i neuvážujeme. Kovariantní derivaci ve válcových souřadnicích (I.D2.49), (I.D2.91) převedeme stejně jako v (2.4.96) do fyzikálních složek.

Dostáváme rovnici bilance hybnosti (pouze ve směru e_r) pro náš případ

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (2\mu + \eta) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} \right] - (3\eta + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial r} - 2\mu \left[\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial r} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r} \right] \quad (2.4.105)$$

zde η je Lamého koeficient (I.6.3.5)

Rovnice bilance energie (2.4.83) přechází s ohledem na (2.4.85) a (2.4.98), na tvar

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = K (e_{(v)} - 3\alpha T) \frac{\partial e_{(v)}}{\partial t} + \Psi(\dot{\varepsilon}_{ekv}) \quad (2.4.106)$$

Zavedli jsme disipační funkci

$$\Psi(\dot{\varepsilon}_{ekv}) = \frac{2}{3} \frac{c_0}{k^n} (p_{ekv})^{n+1} = \frac{2k c_0}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{c_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} (\dot{\varepsilon}_{ekv})^{\frac{n+1}{n}} \quad (2.4.107)$$

vyjadřující teplo vznikající v jednotce objemu za 1s v důsledku vazkého tečení materiálu. Např. pro Newtonovskou tekutinu (I.6.5.15) je $n = 1$ a disipační funkce (2.4.107) je $\Psi = 2\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right)^2$.

Ekvivalentní rychlost deformace (2.4.104) vypočteme z konstitučního vztahu (2.4.89) a (2.4.90), tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} &= \frac{4}{3} \mu \tilde{\mu} \left(\frac{2u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} - 3\varepsilon_1 \right) \\ \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} &= \frac{4}{3} \mu \tilde{\mu} \left(\frac{2\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} - 3\varepsilon_2 \right). \end{aligned} \quad (2.4.108)$$

K rovnicím (2.4.105) a (2.4.106) je ještě třeba dodat okrajové a počáteční podmínky a k rovnicím (2.4.108) počáteční podmínky. Okrajové podmínky na poloměrech r_1 a r_2 (viz obr. 2.24a)) jsou

$$\left[(\eta + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \eta \frac{u}{r} - \beta(T - T_0) - 2\mu \varepsilon_2 \right] = \bar{t}_{r_i}(t), \quad (2.4.109)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + h_{r_i} (T - \bar{T}_{r_i}(t)) = 0 \quad (2.4.110)$$

$$\begin{aligned} \text{pro } r=r_1 \ (i=1) \\ \text{a } r=r_2 \ (i=2), \end{aligned}$$

kde h_{r_i} je koeficient přestupu tepla, $\bar{t}_{r_i}(t)$ a $\bar{T}_{r_i}(t)$ jsou zadané průběhy napětí a teploty na poloměrech r_1 a r_2 . Počáteční podmínky pro rovnice (2.4.105) a (2.4.106) jsou

$$\begin{aligned} u(r, t=0) &= \hat{u}(r) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, t=0) &= \hat{v}(r) \\ T(r, t=0) &= \hat{T}(r) \quad \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.4.111)$$

Pro rovnice (2.4.108) jsou počáteční podmínky

$$\varepsilon_1(r, t=0) = \hat{\varepsilon}_1(r), \quad \varepsilon_2(r, t=0) = \hat{\varepsilon}_2(r) \quad \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle. \quad (2.4.112)$$

Problém plastické deformace trubky je popsán 4 neznámými funkcemi $u, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, které musí vyhovovat 4 parciálním diferenciálním rovnicím (2.4.105), (2.4.106) a (2.4.108)

Z hlediska numerického řešení je výhodné, zavést bezrozměrné veličiny, které označíme vlnkou. Definujeme veličiny

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_1}, \quad \tilde{t} = \frac{t c_\ell}{r_1}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{r_1}, \quad \tilde{T} = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_i(\tilde{r}) = \frac{\bar{\varepsilon}_i(t)}{2\mu + \eta}, \quad \tilde{\mathcal{T}}_i(\tilde{r}) = \frac{\bar{T}_i(t) - T_0}{T_0}, \quad (2.4.113)$$

kde $c_\ell = \sqrt{\frac{2\mu + \eta}{\rho_0}}$ je rychlost podélných elastických vln (Brdička, 1959). V nich mají rovnice (2.4.105), (2.4.106), (2.4.108) tvar

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{(\partial \tilde{t})^2} = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right) - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} - \alpha T_0 \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{\mathcal{E}} \quad (2.4.114)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{a_1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) + \left[\frac{a_3}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \tilde{u}) - a_2 (\tilde{T} + 1) \right] \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \right) + \tilde{\Psi} \quad (2.4.115)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tilde{t}} = a_4 \dot{\varepsilon}_{\text{ekv}}^{\frac{n-1}{n}} \left(2 \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - 3\varepsilon_1 \right) \quad (2.4.116)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \tilde{t}} = a_4 \dot{\varepsilon}_{\text{ekv}}^{\frac{n-1}{n}} \left(-\frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} + 2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - 3\varepsilon_2 \right). \quad (2.4.117)$$

Použité koeficienty jsou definovány následovně

$$\frac{1 - 2\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)} = \frac{\mu}{2\mu + \eta}, \quad \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{3\eta + 2\mu}{2\mu + \eta}, \quad a_1 = \frac{\lambda}{\rho_0 r_1 c_\ell c_\ell}, \quad a_2 = \frac{\beta}{\rho_0 c_\ell},$$

$$a_3 = \frac{K}{\rho_0 c_\ell T_0}, \quad a_4 = \frac{2\mu r_1}{k c_\ell} \left(\frac{c_0}{3} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad a_\tau = \frac{h_\tau}{\rho_0 r_1 c_\ell c_\ell} \quad (2.4.118)$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \tilde{r}} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\tilde{r}} \right), \quad \tilde{\Psi} = \frac{2r_1 c_0 k}{3\rho_0 c_\ell c_\ell T_0} \left(\frac{\sqrt{3}}{c_0} \dot{\varepsilon}_{\text{ekv}} \right)^{\frac{n+1}{n}}. \quad (2.4.119)$$

Přepíšeme okrajové podmínky (2.4.109) a (2.4.110)

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} - \alpha \frac{T_0(1+\epsilon)}{1-\epsilon} \tilde{T} - \frac{1-2\epsilon}{1-\epsilon} \epsilon_2 - \mathcal{F}_i(\tilde{r}) = 0 \quad (2.4.120)$$

$$a_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + a_{r_i} [\tilde{T} - \mathcal{F}_i(\tilde{r})] = 0 \quad \text{pro } \tilde{r}=1 \ (i=1) \ \text{a } \tilde{r} = \frac{r_2}{r_1} \ (i=2) \quad (2.4.121)$$

a stejně tak počáteční podmínky (2.4.111) a (2.4.112), které mají v bezrozměrných veličinách tvar

$$\tilde{u}(\tilde{r}, \tilde{t}=0) = \frac{\hat{u}(\tilde{r})}{r_1}, \quad \frac{\partial \tilde{u}(\tilde{r}, \tilde{t}=0)}{\partial \tilde{t}} = \frac{\hat{v}(\tilde{r})}{c_t}, \quad \tilde{T}(\tilde{r}, \tilde{t}=0) = \frac{\hat{T}(\tilde{r}) - T_0}{T_0}$$

$$\epsilon_1(\tilde{r}, \tilde{t}=0) = \hat{\epsilon}_1(\tilde{r}), \quad \epsilon_2(\tilde{r}, \tilde{t}=0) = \hat{\epsilon}_2(\tilde{r}). \quad (2.4.122)$$

Soustavu rovnic (2.4.114) až (2.4.117) lze zapsat maticově. Zavedeme další proměnnou $\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}$ a vektory neznámých

$$\underline{\tilde{w}} = (\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{T}) \quad , \quad \underline{\varphi} = (\epsilon_1, \epsilon_2). \quad (2.4.123)$$

Rovnici (2.4.115) linearizujeme tak, že položíme $a_3 = 0$ (odpovídá předpokladu $e_{(1)} \ll 3\alpha T$) a $\tilde{T} \ll 1$. Uvedenou soustavu lineárních rovnic převedeme do tvaru

$$\frac{\partial \underline{\tilde{w}}}{\partial \tilde{t}} + \underline{A} \underline{\tilde{w}} = \underline{F}(\underline{\varphi}) \quad (2.4.124)$$

$$\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial \tilde{t}} + \underline{B} \underline{\varphi} = \underline{G}(\underline{\varphi}, \underline{w}). \quad (2.4.125)$$

Tento typ rovnic jsme vyšetřovali v kap. 2.4 (viz pozn. 2.18), vztah i)) a lineární operátor \mathbb{A} , matice \mathbb{B} a vektory \underline{F} , \underline{G} jsou definovány takto

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & , & -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} & , & \alpha T_0 \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \\ -1 & , & 0 & , & 0 \\ \frac{a_2}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) & , & 0 & , & -\frac{a_1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) \end{bmatrix}$$

(2.4.126)

$$\mathbb{B} = 3a_4 (\dot{\epsilon}_{e\kappa\nu})^{\frac{n-1}{n}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.4.127)

$$\underline{F}(\varphi) = (\tilde{\mathcal{E}}, 0, \tilde{\Psi}), \quad \underline{G}(\varphi, \tilde{W}) = a_4 (\dot{\epsilon}_{e\kappa\nu})^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{2\tilde{u}}{\tilde{r}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}}, -\frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} + 2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right).$$

(2.4.128)

Okrajové podmínky (2.4.120) a (2.4.121) zapíšeme formálně

$$\mathbb{H} \tilde{W} + H_0 = 0,$$

(2.4.129)

kde \mathbb{H} je diferenciální operátor a H_0 vektor

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\epsilon}{(1-\epsilon)\tilde{r}} & -\alpha \frac{T_0(1+\epsilon)}{1-\epsilon} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + a_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1-2\epsilon}{1-\epsilon} \epsilon_1 - \mathcal{F}_{r_i}(\tilde{r}) \\ 0 \\ -a_{r_i} \mathcal{F}_{r_i}(\tilde{r}) \end{bmatrix}.$$

(2.4.130)

Soustava rovnic (2.4.124) má tři reálné charakteristiky definované v prvním přiblížení ^{2.24)} výrazem

$$a_1 [(d\tilde{r})^2 - (d\tilde{t})^2] d\tilde{t} d\tilde{r} = 0. \quad (2.4.131)$$

Jde tedy o řešení dvou hyperbolických rovnic typu (2.4.1) (rovnice řešení elastických vln) a jedné parabolické rovnice (2.4.6) (rovnice vedení tepla). Tyto vlastnosti musíme respektovat při návrhu numerického schématu (volba čísla χ , viz kap. 2.4) a při zadávání okrajových a počátečních podmínek.

2.24)

Výchozí rovnice (2.4.114), (2.4.115), resp. 2.4.124) zjednodušíme na soustavu následujících pěti diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} - \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{r}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} - \tilde{v} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{t}} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} - a_1 \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \tilde{r}} + a_2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} - \tilde{T}_1 = 0,$$

i)

pro neznámé funkce $\tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{u}_1, \tilde{T}, \tilde{T}_1$

proměnných \tilde{r}, \tilde{t} .

Přidáme k nim ještě rovnice typu (2.4.11) a utvoříme matici A (viz (2.4.12)). Podmínka (2.4.13) vede k výrazu (2.4.131). První a třetí rovnice i) odpovídají rovnici šíření elastických vln rychlostí c_l , tj.

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2}, \quad \text{popř.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

ii)

Zbylé rovnice reprezentují vedení tepla se zdrojem tepla odpovídajícím termoelasticitě materiálu, viz vztah (I.7.1.17). Vlivy vazkosti byly zanedbány.

Vyjdeme od výpočtového postupu (2.4.26), který použijeme na rovnici (2.4.124) s okrajovými podmínkami (2.4.129). Jestliže řešený interval $\tilde{r} \in \langle 1, \frac{r_2}{r_1} \rangle$ rozdělíme na E konečných prvků velikosti V_e pak platí (viz kap. 2.3.1)

$$\sum_{e=1}^E \int_{V_e} \left[\frac{\tilde{w}_e^{(n+1)} - \tilde{w}_e^{(n)}}{\Delta \tilde{t}} + \theta A \tilde{w}_e^{(n+1)} + (1-\theta) A \tilde{w}_e^{(n)} - F_e^{(n+\theta)} \right] \delta w_e^{(n+1)} d\tilde{r} + \\ + \left[(H \tilde{w}^{(n+1)} + H_0^{(n+\theta)}) \delta \tilde{w}^{(n+1)} \right]_{\tilde{r}=1}^{\tilde{r}=\frac{r_2}{r_1}} = 0. \quad (2.4.132)$$

Řád derivace operátoru A (2.4.126) snížíme integrací per partes.

$F_e^{(n+\theta)}, H_0^{(n+\theta)}$ označuje, že k jejich výpočtu jsou použity hodnoty $\psi_e^{(n+\theta)} = \theta \psi_e^{(n)} + (1-\theta) \hat{\psi}_e^{(n+1)}$ získané řešením rovnice (2.4.125) následujícím způsobem

$$\sum_{e=1}^E \int_{V_e} \left[\frac{\psi_e^{(n+1)} - \psi_e^{(n)}}{\Delta t} + \theta B^{(n)} \psi_e^{(n+1)} + (1-\theta) B^{(n)} \psi_e^{(n)} - G(\psi_e^{(n)}, \tilde{w}_e^{(n+\theta)}) \right] \delta \psi_e^{(n+1)} d\tilde{r} = 0. \quad (2.4.133)$$

Pro výpočet $G(\psi_e^{(n)}, \tilde{w}_e^{(n+\theta)})$ je použito řešení $\tilde{w}_e^{(n+\theta)} = \theta \tilde{w}_e^{(n)} + (1-\theta) \hat{\tilde{w}}_e^{(n+1)}$. Obvykle řešíme nejdříve rovnici (2.4.132) při $\hat{\psi}_e^{(n+1)} = \psi_e^{(n)}$ a $\hat{\tilde{w}}_e^{(n+1)} = \tilde{w}_e^{(n+1)}$.

Uvedený postup byl s úspěchem použit (Ghoneim, 1986) k výpočtu vlivu plasticity (velikosti meze kluzu k) na velikost deformace \tilde{U} ocelové trubky (viz obr. 2.24a)) namáhané silným tlakovým pulsem (výbuchem) zevnitř. Sledován je rovněž časový průběh velikosti ekvivalentního napětí \tilde{p}_{ekv} (viz pozn. 2.23), vztah i)) a teploty \tilde{T} . Ve vztazích (2.4.132) a (2.4.133) byly použity lineární konečné prvky (2.3.10), jejichž aproximační funkce pro jednorozměrný případ jsou $\psi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$, $\psi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$.

Výpočet byl proveden pro ocel s následujícími materiálovými konstantami, viz obr. 2.24b).

$$\mu = 7,69 \cdot 10^{10} \left[\frac{N}{m^2} \right], \quad \eta = 1,54 \cdot 10^{10} \left[\frac{N}{m^2} \right], \quad \rho_0 = 7880 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

$$c_2 = 5840 \left[\frac{m}{s} \right], \quad c_v = 502 \left[\frac{J}{kgK} \right], \quad \lambda = 50,2 \left[\frac{J}{msK} \right]$$

$$\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{K} \right], \quad c_0 = 0,001 [s], \quad n = 20$$

Okrajové podmínky úlohy jsou

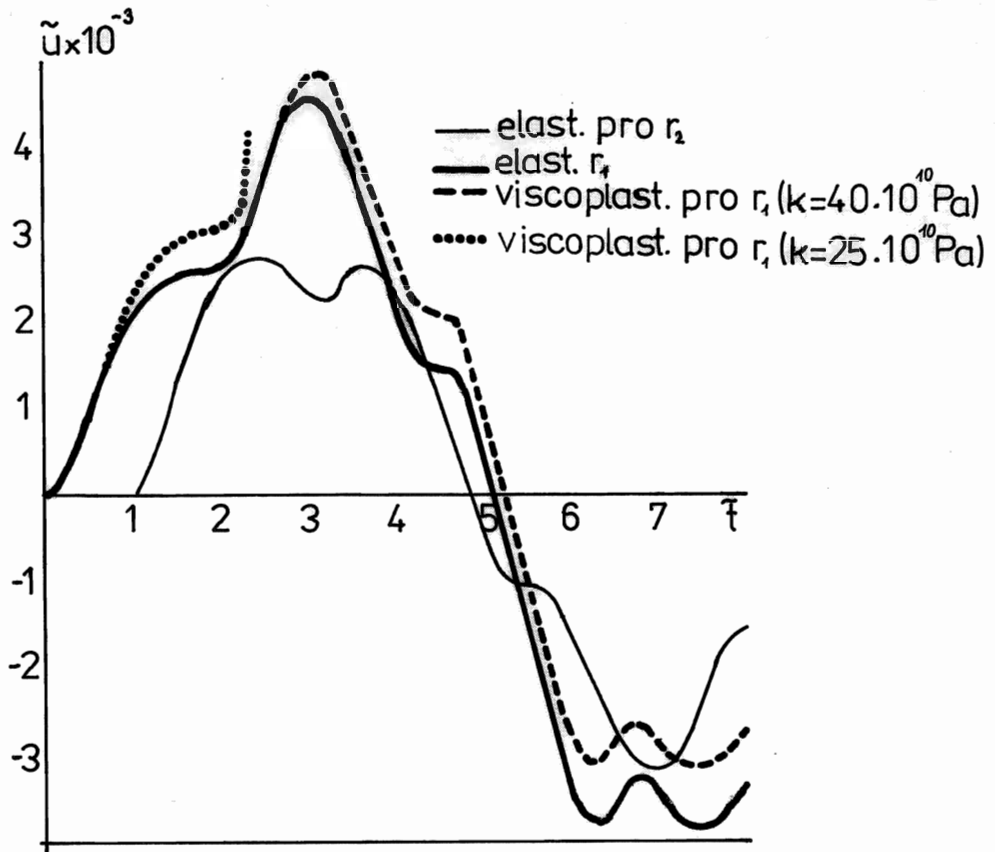
$$r_1 = 0,025 [m], \quad r_2 = 0,05 [m], \quad T_0 = 300 [K]$$

$$h_{r_2} = -h_{r_1} = 200 \left[\frac{J}{m^2s} \right], \quad \mathcal{F}_{r_1}(\tilde{t}) = -0,015 e^{-2\tilde{t}}, \quad \mathcal{F}_{r_2}(\tilde{t}) = 0$$

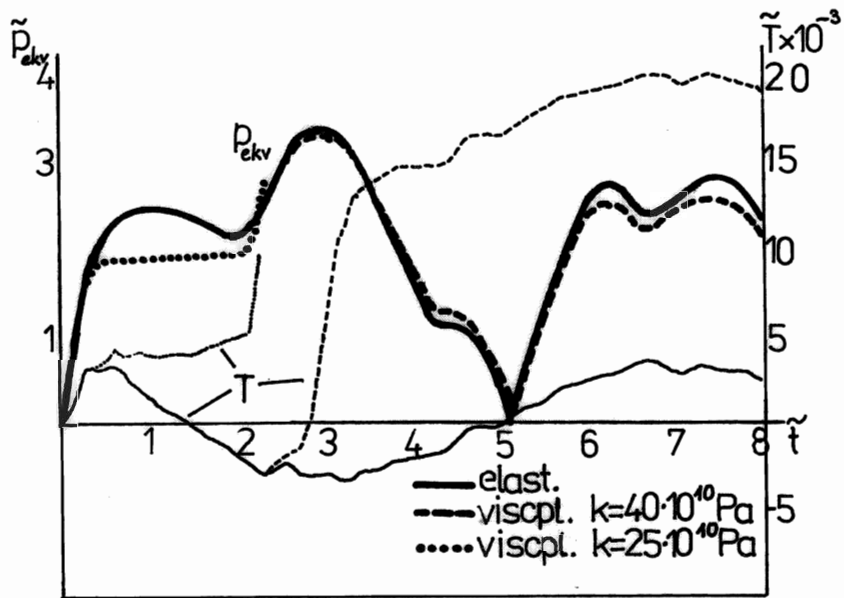
$$\mathcal{G}_{r_1}(\tilde{t}) = 8,15 \cdot 10^{-3} e^{-0,0005\tilde{t}}, \quad \mathcal{G}_{r_2}(\tilde{t}) = 0.$$

Počáteční podmínky (2.4.122) byly vesměs rovny nule.

Numerický výpočet byl prováděn s časovým krokem $\Delta\tilde{t} = 10^{-3}$ a prostorovým krokem $\Delta\tilde{r} = 0,1$. Tomu odpovídají CFL čísla pro hyperbolickou rovnici $\chi_H = \frac{\Delta\tilde{t}}{\Delta\tilde{r}} = 10^{-2}$ (2.4.21)



a)



b)

Obr. 2.25

- a) Posunutí materiálových bodů na vnitřním a vnějším povrchu trubky v závislosti na čase ($\Delta \tilde{t} = 1$ odpovídá $5 \cdot 10^{-6}$ [s])
- b) Průběh ekvivalentního napětí $\tilde{p}_{ekv} = \frac{P_{ekv}}{2(\mu + \eta)}$ a teploty \tilde{T} na vnitřním povrchu

a pro parabolickou rovnici $\chi_P = \frac{a_1 \Delta \tilde{t}}{(\Delta \tilde{r})^2} = 8,8 \cdot 10^{-12}$ (2.4.23).
 Podmínky stability (2.4.29) a (2.4.33) jsou pro takto malá čísla CFL splněna pro $0 \leq \theta \leq 1$.

Vzhledem k tomu, že $\frac{\chi_H}{\chi_P} = 1,13 \cdot 10^{11} \gg 1$ nebude v počátečních fázích výpočtu výsledek vůbec ovlivněn přenosem tepla vedením. Relaxační čas vedení tepla v materiálu tloušťky Δr je $\tau_P = \frac{\rho_0 c_V (\Delta r)^2}{\lambda} = \frac{\eta_1}{c_\ell} \frac{(\Delta \tilde{r})^2}{a_1}$ a relaxační čas šíření elastických vln je

$$\tau_H = \frac{\Delta r}{c_\ell} = \frac{\eta_1}{c_\ell} \Delta \tilde{r} \quad \text{Jejich poměr}$$

$$\frac{\tau_P}{\tau_H} = \frac{\frac{(\Delta \tilde{r})^2}{a_1 \Delta \tilde{t}}}{\frac{\Delta \tilde{r}}{\Delta t}} = \frac{\chi_H}{\chi_P} \quad (2.4.133)$$

je roven převrácenému poměru čísel CFL. Vzrůst teploty vedením by se uplatnil až po velikém počtu $\approx 10^{11}$ časových kroků.

Na obr. 2.25a) je uveden časový průběh deformace \tilde{u} pro případ čistě elastického materiálu a pro případ termoviskoplastického materiálu jednak s mezí kluzu $k = 25 \cdot 10^{10} \left[\frac{N}{m^2} \right]$ a jednak $k = 40 \cdot 10^{10} \left[\frac{N}{m^2} \right]$. V případě prvního materiálu je patrné, že dochází k velikému posunutí (tečení) materiálových bodů a tím i k jeho prasknutí. U druhého materiálu dochází k vibracím a pouze k trvalé deformaci. U tohoto způsobu řešení zatěžování pevných materiálů není třeba předepisovat speciální kritérium pro indikaci jeho porušení. Stejná situace je patrná i na obr. 2.25b) z průběhu \tilde{p}_{ekv} , které v místě porušení nekontrolovatelně roste a je doprovázeno růstem disipace (2.4.80) a tím i zahřívání materiálu.

Jestliže v rovnici (2.4.14) zanedbáme změny teploty a tečení materiálu ($\dot{\epsilon} = 0$) dostáváme rovnici pro šíření elastických vln. Taková rovnice je řešena pro stejné okrajové podmínky (viz obr. 2.24a)) analyticky (ve tvaru řady Besselových funkcí) pro pulz $\mathcal{F}(\tilde{t})$ ve tvaru poloviny sinusovky v práci (Brebta, Okrouhlík, Valeš, 1985).

2.4.4 Metoda konečných prvků v proudění vazké tekutiny

Řešení vazkého stlačitelného proudění patří k velice obtížným problémům numerické matematiky. Nevazké nestacionární proudění (rovnice bilance (2.1.20) s vektorem proměnných (2.1.25) a vektorem toků (2.1.26) s nulovou produkcí) je problém hyperbolický a vyžaduje zavedení numerické viskozity (druhý člen na pravé straně vztahu (2.4.45)). Jak uvidíme dále, konkuruje tato numerická viskozita viskozitě fyzikální, která rovněž vystupuje u členu s druhou derivací podle prostorových souřadnic. Problém nestacionárního vazkého proudění je v zásadě problémem parabolickým se silným konvektivním členem, který vede k nestabilitě výpočtu.

Byly však již vyvinuty efektivní numerické metody, především tzv. Eulerova-Taylorova-Galerkinova metoda (viz kap. 2.4.1), které dovolují řešit tyto problémy i na sítích, které nemusí mít proudnicový tvar (tzv. "unstructured grids"). Uvážíme-li ještě, že v proudovém poli existují oblasti silných gradientů rychlosti jako jsou rázové vlny, mezní vrstvy u stěn a smykové vrstvy v úplavech je zřejmé, že dostatečné zvládnutí tohoto problému vyžaduje vedle efektivních numerických schémat i sítě s velkým počtem prvků, a tudíž i výkonné počítače. Vývoj této oblasti numerické matematiky není ještě zdaleka ukončen. Uvedeme základní algoritmus těchto výpočtů, tzv. schéma FCT (Flux-Corrected Transport) (Löhner a kol., 1986, Koschel, Lötzerich, Vornberger, 1986).

Základní rovnice stlačitelné vazké tekutiny plynoucí z bilančních rovnic (2.1.14) pro vektor veličin

$$\underline{\varphi} = (\varphi, \varphi v^i, \varphi e), \quad e = u + \frac{v^l v_l}{2} \quad (i, l = 1, 2, 3)$$

(2.4.134)

kde ρ, v^i, v_ℓ, u jsou postupně hustota, i -tá kontravariantní, resp. ℓ -tá kovariantní složka (v kartézských souřadnicích platí $v^i = v_i$, viz I.D2.) unášivé rychlosti a vnitřní energie. Vektory toků (2.1.22) (vektor posunutí \underline{u} neuvažujeme) jsou s ohledem na zákony bilance (I.4.1.5), (I.4.2.15) a (I.4.5.9) rovny

$$\underline{\hat{j}}^i(\varphi) = \underline{\hat{j}}_{kon}^i(\varphi) - \underline{\hat{j}}_{dis}^i(\varphi), \quad (2.4.135)$$

Vektory konvektivních toků mají tvar (2.1.26), tj.

$$\underline{\hat{j}}_{kon}^i(\varphi) = (\rho v^i, \rho v^i v^1 + p \delta^{i1}, \rho v^i v^2 + p \delta^{i2}, \rho v^i v^3 + p \delta^{i3}, \rho v^i (e + \frac{p}{\rho})). \quad (2.4.136)_1$$

Do vektorů disipativních toků jsme zahrnuli člen $t_{dis}^{j\ell} \frac{\partial v_\ell}{\partial x^j}$ z vektoru (2.1.23), takže

$$\underline{\hat{j}}_{dis}^i(\varphi) = (0, t_{dis}^{i1}, t_{dis}^{i2}, t_{dis}^{i3}, t_{dis}^{i\ell} v_\ell - q^i), \quad (i, \ell = 1, 2, 3). \quad (2.4.136)_2$$

Zanedbáme-li vnější objemové zdroje tepla a vnější objemové síly je takto upravený vektor produkci (2.1.23) nulový.

Disipativní toky (2.4.136)₂ jsou pro Newtonovskou tekutinu určeny konstitutivním vztahem (I.6.5.14) t.j.

$$t_{dis}^{ij} = \mu \left(\delta^{j\ell} \frac{\partial v^i}{\partial x^\ell} + \delta^{i\ell} \frac{\partial v^j}{\partial x^\ell} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \frac{\partial v^\ell}{\partial x^\ell} \right), \quad (2.4.137)$$

kde μ je smyková viskozita a objemovou viskozitu zanedbáváme. Tok tepla je s ohledem na (I.6.5.15) roven

$$q^i = -\lambda \delta^{i\ell} \frac{\partial T}{\partial x^\ell}, \quad (2.4.138)$$

kde λ je tepelná vodivost tekutiny.

Další konstitutivní vztahy definují dokonalý plyn (I.7.4.2), (I.7.5.19) a jsou rovny

$$p = (\kappa - 1) \rho \left(e - \frac{v^l v_l}{2} \right), \quad T = \frac{1}{c_v} \left(e - \frac{v^l v_l}{2} \right). \quad (2.4.139)$$

Zde T je teplota, c_v je měrné teplo při konstantním objemu a κ je izentropický exponent. Systém bilančních rovnic

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \hat{j}_{kon}^i(\psi)}{\partial x^i} = \frac{\partial \hat{j}_{dis}^i(\psi)}{\partial x^i}, \quad (2.4.140)$$

resp.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^i \\ \rho e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^l} \begin{bmatrix} \rho v^l \\ \rho v^i v^l + \delta^{jl} p \\ \rho v^l \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^l} \begin{bmatrix} 0 \\ t_{dis}^{jl} \\ t_{dis}^{il} v_i - q^l \end{bmatrix} \quad (2.4.141)$$

je vztahy (2.4.137) až (2.4.139) uzavřen. Vycházíme ze soustavy pěti evolučních rovnic s okrajovými a počátečními podmínkami typu (2.1.54), (2.1.55). Zanedbáním pravé strany a jejich linearizací dostáváme soustavu hyperbolických rovnic (2.1.31). Jde o rovnice typu (2.4.1.), jejichž vlastnosti včetně vhodného numerického řešení jsou uvedeny v úvodu kap. 2.4 a v kap. 2.4.1.

Základní ideou schématu FCT je kombinace schématu vysokého řádu přesnosti (např. ETG schématu (2.4.61)) se schématem nízkého řádu přesnosti (např. Eulerovo-Galerkinovo schéma (2.4.26) s nějakým dodatečným difuzním členem (Zalesak, 1979)). V oblastech, kde se proměnné (2.4.134) mění jen pozvolna se používá schéma vysokého řádu přesnosti. V oblastech náhlých změn (např. rázové vln) se proto, aby nedocházelo k nežádoucím oscilacím užívá

schématu prvního řádu ^{2.25)} a nebo i schématu vyššího řádu s dodatečnou vyhlazovací procedurou (difuzivitou).

2.25)

Schéma prvního řádu (2.4.16) obsahuje implicitně difuzivitu, resp. viskozitu (Godunov, Rjabenkij, 1973), jejíž velikost je úměrná $1-\chi$. Takové schéma tlumí nežádoucí oscilace a vyhlazuje skokové změny.

Účinky difuzivity ukážeme na explicitním schématu ($\theta=0$) (2.4.16). Koeficient zesílení (2.4.17) má tvar

$$\xi(\Delta t, h) = 1 - \chi + \chi(\cos \beta - i \sin \beta) = 1 - \chi + \chi e^{-i\beta}, \quad \text{pro } \beta = k\Delta x, \quad \text{i)}$$

takže řešení v j -tém nódu v $(n+1)$ -ní časové rovině je rovno

$$u_j^{(n+1)} = \xi(\Delta t, h) u_j^{(n)} = \alpha_k \xi(\Delta t, h) e^{ik(x_j - u_0 t)} \quad \text{ii)}$$

Rovnice jednorozměrného nestlačitelného vazkého proudění je

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{iii)}$$

a při počáteční podmínce $u = \alpha_k e^{ikx}$ má řešení

$$u(x, t) = \alpha_k e^{-\nu k^2 t} e^{ik(x - u_0 t)} \quad \text{iv)}$$

Tudíž

$$u_j^{(n+1)} = e^{-\nu k^2 \Delta t - i\beta} u_j^{(n)} = \xi(\Delta t, h) u_j^{(n)} \quad \text{v)}$$

a při nárůstu času o Δt dochází vedle fázového posuvu k útlumu (pro $\Delta x = u_0 \Delta t$ (2.4.5)).

Rozvojem koeficientu $\xi(\Delta t, h)$ v $v)$ do řady a porovnáním s i) dostáváme hledaný vztah mezi viskozitou a zpětnou diferencí

$$\nu = \frac{u_0(1-\chi)}{h^2 \Delta x} (1 - e^{-i\beta}). \quad \text{vi)}$$

Pro nejkratší vlnovou délku $2\Delta x$, tj. $\beta = \pi$ platí

$$\nu = \frac{2\Delta x}{\pi^2} u_0(1-\chi) \quad (\text{srovnej s (2.3.81) a (2.3.107)}).$$

Jedním ze schémat, která potlačují nežádoucí oscilace vznikající při numerickém řešení jsou schémata monotonní, která zachovávají monotonnost počátečního řešení. Uvedeme definici a základní vlastnosti těchto schémat (Kalitkin, 1978).

Nechť je $u(x, t)$ řešení hyperbolické (2.4.1) nebo parabolické rovnice (2.4.6) s odpovídajícími monotonními počátečními podmínkami (2.4.3), resp. (2.4.10), tj. pro libovolné dva body

$$\{x_i, x_{i+j}\} \in \langle 0, X \rangle \quad \text{platí}$$

$$u(0, x_i) = u_i^{(0)} \leq u(0, x_{i+j}) = u_{i+j}^{(0)} \quad (\text{platí vždy jen jeden znak, pro } j \geq 1)$$

Každé výpočtové schéma, které tuto vlastnost řešení zachovává pro každý časový krok, nazýváme monotonní (Kalitkin, 1978).

Každé lineární explicitní schéma typu

$$u_i^{(n+1)} = \sum_{\ell} \beta_{\ell} u_{i+\ell}^{(n)} \quad \text{vii)}$$

je monotonní tehdy a jen tehdy, jestliže je $\beta_{\ell} \geq 0$, tzv. kritérium monotonního schématu.

Důkaz tohoto tvrzení plyne z rovnosti vii) ve tvaru

$$u_{i-1}^{(n+1)} - u_i^{(n+1)} = \sum_{\ell} \beta_{\ell} (u_{i-1+\ell}^{(n)} - u_{i+\ell}^{(n)}). \quad \text{viii)}$$

Jestliže je $\beta_l \geq 0$, tak se monotonnost řešení zachovává.

Kriterium vii) platí i pro implicitní schémata. V tom případě schéma (2.4.16) přepíšeme do tvaru

$$U_j^{(n+1)} = \frac{\theta \chi}{1 + \theta \chi} U_{j-1}^{(n+1)} + \frac{(1-\theta)\chi}{1 + \theta \chi} U_{j-1}^{(n)} + \frac{1 - (1-\theta)\chi}{1 + \theta \chi} U_j^{(n)} \quad \text{ix)}$$

hodnotu $U_{j-1}^{(n+1)}$ vyjádříme stejným způsobem, a např. pro $\theta=1$ dostáváme kriterium vii) ve tvaru nekonečné řady

$$U_j^{(n+1)} = \frac{1}{1 + \theta \chi} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{1 + \chi} \right)^l U_{j-l}^{(n)} \quad \text{x)}$$

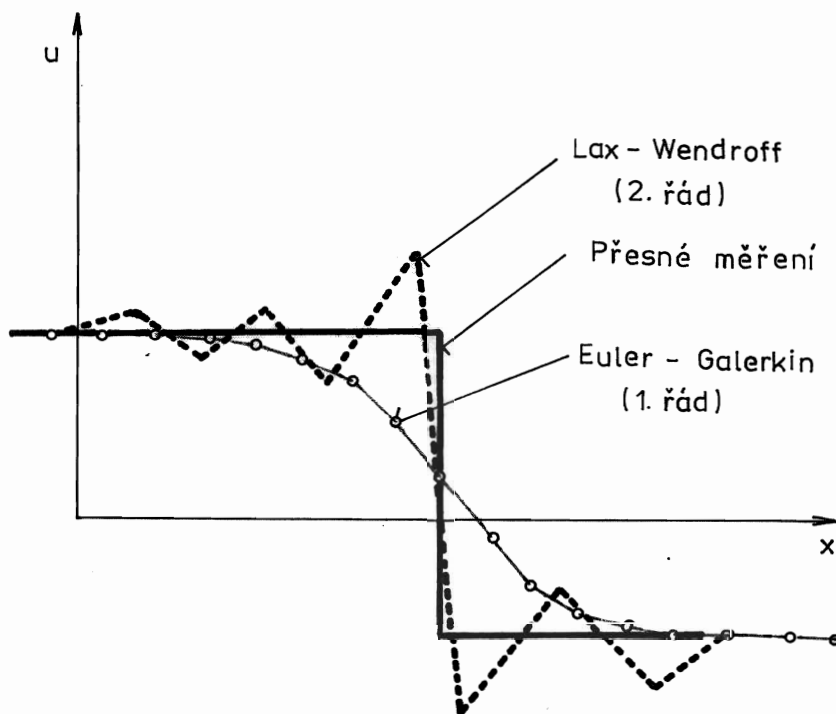
Implicitní schéma (2.4.16) je tedy vždy monotonné. Explicitní ($\theta=0$) schéma je monotonné pro $0 < \chi < 1$.

Pro parabolickou rovnici (2.4.6) plyne ze schématu (2.4.22)

$$U_j^{(n+1)} = \left(2 + \frac{\chi}{\theta} \right)^{-1} \left\{ U_{j-1}^{(n+1)} + U_{j+1}^{(n+1)} + \frac{1-\theta}{\theta} (U_{j-1}^{(n)} + U_{j+1}^{(n)}) + \left[\frac{\chi}{\theta} - 2 \frac{1-\theta}{\theta} \right] U_j^{(n)} \right\} \quad \text{xi)}$$

$U_{j-1}^{(n+1)}, U_{j+1}^{(n+1)}$ nahradíme stejnými vztahy a opět dostáváme nekonečnou geometrickou řadu tvaru x), ze které podle kritería vii) plyne následující podmínka monotonnosti

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2(1-\theta)a} \quad \text{xii)}$$



Obr. 2.26

Schématické znázornění vlivu numerické viskozity
na zobrazení nespojitosti v řešení

Existuje tudíž omezení na velikost časového kroku. Další omezení plynou z analýzy stability uvedeného schématu, viz vztah (2.4.34).

obr. 2.26 → Pozn.:

Vlastnost monotonních schémat, potlačovat nežádoucí oscilace, je způsobena jejich značnou viskozitou. U některých schémat 1. řádu (např. 2.4.26) je jejich viskozita tak veliká, že vede k nežádoucímu rozmazání nespojitosti, viz obr. 2.26. Proto se vyvíjejí schémata, která mají svoji viskozitu řízenou během výpočtu tak, že dochází k velmi přesnému zobrazení nespojitosti, např. schéma FCT, a schémata se zmenšující se variací řešení, tzv. TVD schémata (Causon, 1988).

Budeme vycházet z výsledků kap. 2.4 a 2.4.1. Vektor proměnných (2.4.134) označíme $\underline{u}(x, t)$. Řešení v čase $t = t^{(n+1)}$ je

$$\underline{u}^{(n+1)}(x) = \underline{u}^{(n)}(x) + \Delta \underline{u}^{(n)}(x) \quad (2.4.142)$$

a naším cílem je, získat $\Delta \underline{u}^{(n)}(x) = \underline{u}^{(n+1)}(x) - \underline{u}^{(n)}(x)$ co nejvyššího řádu přesnosti, ale bez nežádoucích oscilací. Označíme indexem "high" přírůstek získaný pomocí schématu vysokého řádu a indexem "low" pomocí schématu nízkého řádu. Vztah (2.4.142) přepíšeme

$$\underline{u}^{(n+1)}(x) = \underline{u}^{(n)}(x) + \Delta \underline{u}_{\text{high}}^{(n)}(x) = \underline{u}^{(n)}(x) + \Delta \underline{u}_{\text{low}}^{(n)}(x) + (\Delta \underline{u}_{\text{high}}^{(n)}(x) - \Delta \underline{u}_{\text{low}}^{(n)}(x)). \quad (2.4.143)$$

Základní idea FCT schématu se realizuje pomocí omezující procedury \lim_{AEC} , tj.

$$\underline{u}^{(n+1)}(x) = \underline{u}_{\text{low}}^{(n+1)}(x) + \lim_{AEC} (\Delta \underline{u}_{\text{high}}^{(n)}(x) - \Delta \underline{u}_{\text{low}}^{(n)}(x)), \quad (2.4.144)$$

kde $\underline{u}_{\text{low}}^{(n+1)}(x) = \underline{u}^{(n)}(x) + \Delta \underline{u}_{\text{low}}^{(n)}(x)$.

Omezující procedura \lim_{AEC} definuje antidifuzní příspěvek na konečném prvku (Antidiffusive Element Contribution) tak, že eliminuje difuzní (viskózní) účinek schématu nízkého řádu ^{2.25}). Konkrétně se provádí tak, že na každém, např. e -tém konečném prvku se nalezne číslo $C_e \in \langle 0,1 \rangle$ a vynásobí se rozdílem přírůstků obou schémat, tj.

$$\lim_{AEC} (\Delta u_{high}^{(n)} - \Delta u_{low}^{(n)}) = C_e (\Delta u_{high}^{(n)} - \Delta u_{low}^{(n)})_e \quad (2.4.145)$$

Během výpočtu se zjišťuje největší oscilace jak na e -tém konečném prvku, tak i v jeho okolí. Čím je tato oscilace větší, tím více se preferuje schéma s difuzivitou (resp. nízkého řádu), čili C_e jde k nule. Naopak C_e se blíží k jedné a více se kompenzuje vliv difuze schématu, jestliže došlo k rozumnému uklidnění oscilací. (Löhner a kol., 1987). Způsob volby C_e závisí jak na typu problému (např. proudění s fyzikální viskozitou či bez ní), tak na počtu rovnic. Důležitý je i výběr veličiny použité v omezující proceduře (2.4.145) (např. hustota, energie, tlak, apod.).

Jak je zřejmé z kap. 2.4.1 lze schémata nízkého i vysokého řádu přesnosti odvodit z ETG metody (2.4.52) rozšířené na více dimenzí. Omezíme se pouze na schémata prvního a druhého řádu, protože vyšší řády jsou neúnosně složité. Systém bilančních rovnic (2.4.140) zapíšeme formálně ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F^i}{\partial x^i} = \underline{S}$$

$$(\varphi = u, j_{kon}^i(\varphi) = F^i, \frac{\partial j_{kon}^i(\varphi)}{\partial x^i} = \underline{S}). \quad (2.4.146)$$

Provedeme Taylorův rozvoj (2.4.41) do druhého řádu a stejným postupem, jakým jsme odvodili (2.4.45) nalezneme

$$\underline{u}^{(n+1)} = \underline{u}^{(n)} + \Delta t \left(S - A^i \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) \Big|^{(n)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[C \left(S - A^i \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[A^i \left(S - A^j \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) \right] \right] \Big|^{(n)}.$$

(2.4.147)

Zde jsme zavedli matice

$$A^i = \frac{\partial F^i}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial S}{\partial u}. \quad (2.4.148)$$

Analogie se zpětnou diferencí ve směru konvekce (2.3.84) bude zřejmá, omezíme-li se pouze na jednu rovnici ze systému (2.4.146),

$$\text{čili} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (v^i u)}{\partial x^i} = 0$$

(2.4.149)

a na případ nestlačitelné tekutiny $\frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0$. Rovnice (2.4.149) má tvar materiálové (konvektivní) derivace (I.3.4.7), tj. $\dot{u}(x^i, t) = 0$. Díky (2.4.147) můžeme psát

$$\underline{u}^{(n+1)} = \underline{u}^{(n)} - \Delta t v^i \frac{\partial u}{\partial x^i} \Big|^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(v^i v^l \frac{\partial u}{\partial x^l} \right) \Big|^{(n)},$$

(2.4.150)

kde vedle zpětné difference (upwind) proti proudu obsahuje schéma ještě difuzi (třetí člen). Jde o schéma, které stírá rozdíl mezi materiálovými souřadnicemi (X^i, t) a prostorovými souřadnicemi (x^i, t) (I.3.1.1).

Při formulaci problémů mechaniky tekutin v materiálových (Lagrangeových) souřadnicích se ve výchozích rovnicích nevyskytuje konvektivní člen, zatím co při prostorovém popisu hraje konvektivní člen, hlavně díky své nelinearitě, podstatnou roli. Z tohoto hlediska mají numerická schémata FCT zřejmé výhody.

Prostorovou diskretizaci provedeme tak, jak je obvyklé v metodě konečných prvků, viz kap. 2.3. Na každém konečném prvku objemu V_e utvoříme integrální výraz typu (2.4.52), tj.

$$\int_{V_e} \Delta u_e^{(n)} \delta u_e^{(n+1)} dV = \int_{V_e} \underline{\underline{B}}^{e(n)} \delta u_e^{(n+1)} dV, \quad (2.4.151)$$

kde $\Delta u_e^{(n)} = u_e^{(n+1)} - u_e^{(n)}$ a

$$\underline{\underline{B}}^{e(n)} = \Delta t \left(S - A^i \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) \Big|^{(n)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[C \left(S - A^i \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[A^i \left(S - A^j \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) \right] \right] \Big|^{(n)}.$$

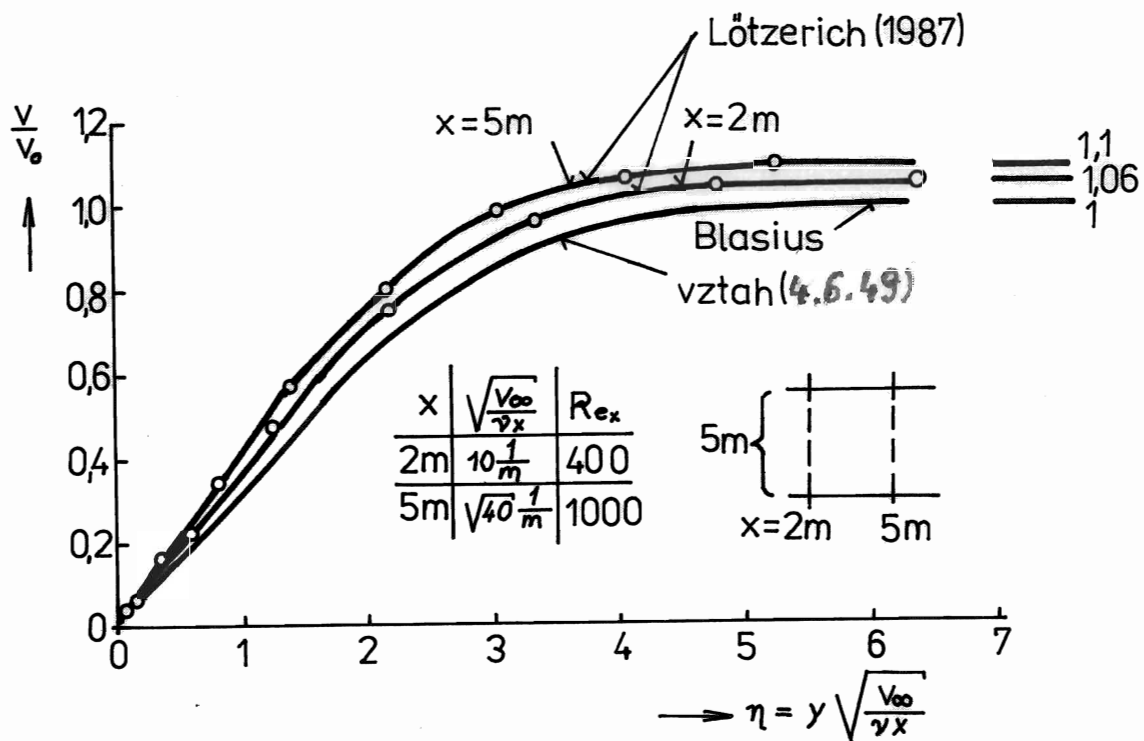
(2.4.152)

Řešení $\Delta u_e^{(n)}$ i pravou stranu $\underline{\underline{B}}^{e(n)}$ aproximujeme pomocí aproximačních funkcí ψ_k , nejčastěji (2.3.9) a (2.3.10). Stejným postupem, kterým jsme odvodili podmínku (2.4.57) odvodíme pro e -tý konečný prvek

$$\sum_{k,l=1}^{3,4} \left(\underline{\underline{M}}_{kl}^e \Delta u_k^{(n)} - \underline{\underline{B}}_l^{e(n)} \right) \delta u_l^{(n+1)} = 0, \quad (2.4.153)$$

kde 3 platí pro trojúhelníkový a 4 pro čtyřúhelníkový konečný analyticky prvek pro dvourozměrné problémy. Integrace je vypočtena buď a nebo numericky, přičemž se ukazuje výhodné, užívat kvůli úspoře času nízký řád integrace.

Pro i -tý nód odvodíme podmínku analogickou (2.4.59). Matice celé soustavy je pásová, se šířkou pásu závislou na číslování uzlů v globální notaci. Z numerického hlediska je výhodnější užívat diagonalizované matice (2.21). Proto už diagonalizujeme matici $\underline{\underline{M}}^e$ ve vztahu (2.4.153) pro každý konečný prvek, tj.



Obr. 2.27

Bezrozměrový profil v laminární mezní vrstvě
 na rovné desce

$$\sum_{k=1}^{3,4} \overset{e}{M}_{Lkl} \Delta U_k^{(r)(n)} = \overset{e}{B}_l^{(n)} + \sum_{k=1}^{3,4} (\overset{e}{M}_{Lkl} - \overset{e}{M}_{kl}) \Delta U_k^{(r-1)(n)} \quad (2.4.154)$$

$1 \leq r \leq n_{iter}$

a potom sestavíme rovnici pro i -tý nód, analogicky (2.4.58). Jde o iterační výpočtový proces (2.21). Užitím diagonalizované matice $\overset{e}{M}_L$ a vynásobením druhého členu na pravé straně (2.4.154) nějakým koeficientem \mathcal{C}_d získáme difuzní vlastnost schématu prvního řádu (2.25). Tento postup lze tudíž použít k realizaci schématu FCT (2.4.144).

Uvedené obecné schéma druhého řádu (2.4.147) bývá často pro stlačitelné vazké proudění modifikováno do schématu prediktor - korektor , viz kap. 2.5.2. Namísto jedno-krokového postupu (2.4.147) užíváme (Löhner a kol., 1986):
prediktor (konvektivní člen)

$$\underline{u}^{(n+\frac{1}{2})} = \underline{u}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2} \left. \frac{\partial F^i}{\partial x^i} \right|^{(n)} \quad (2.4.155)$$

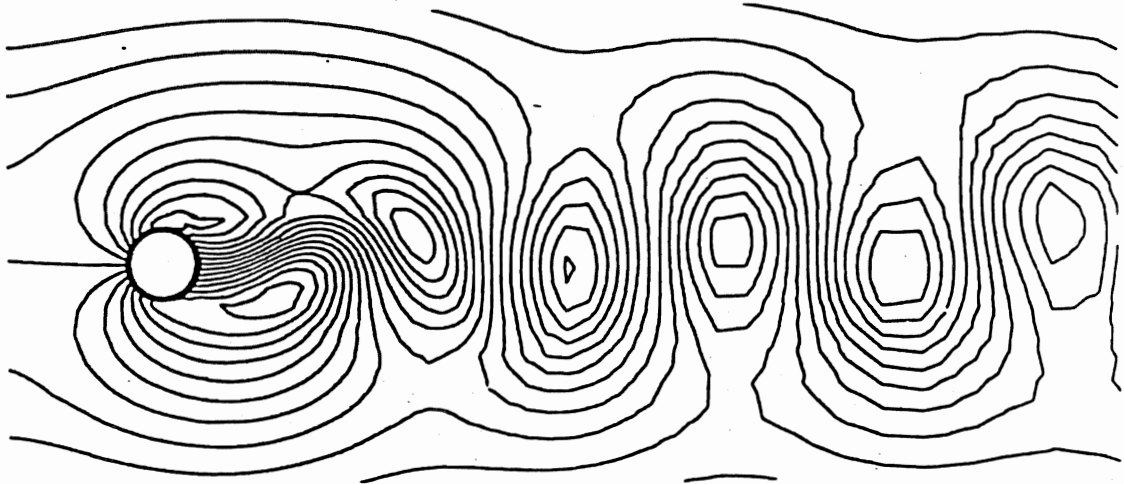
a korektor

$$\Delta \underline{u}^{(n)} = \underline{u}^{(n+1)} - \underline{u}^{(n)} = -\Delta t \left. \frac{\partial F^i}{\partial x^i} \right|^{(n+\frac{1}{2})} + \Delta t \left. \frac{\partial j_{dis}^i(u)}{\partial x^i} \right|^{(n)} \quad (2.4.157)$$

Dále je postup stejný jako u schématu (2.4.147).

Konkrétní výpočty užívající schématu (2.4.154) pro $n_{iter}=4$ jsou uvedeny na obr. 2.27 a 2.28 (převzato z Lötzerich, 1987). Na obrázku ^{2.27} je uveden bezrozměrový rychlostní profil v mezní laminární vrstvě nestlačitelné tekutiny (specifické viskozity $\nu = \frac{\mu}{\rho}$)

Re	Sh	
	výpočet	exper.
50	0,14	~0,13
100	0,16	~0,17
200	0,20	~0,19



Obr. 2.28

Vypočtené proudové pole kolem válce při $Re = 200$
znázorněné relativními proudnicemi

při obtékání rovné desky bez tlakového gradientu (viz rovnice (4.6.31), (4.6.32)). Pro srovnání je uvedeno přesné řešení Blasissovo (Lojczjanskij, 1954) a řešení integrální metodou (Maršik, 1981), viz vztah (4.6.46). Na obr. 2.28 jsou uvedeny relativní proudnice vypočteného vazkého obtékání válce (průměru L) při Reynoldsově čísle $Re = \frac{L v_{\infty}}{\nu} = 200$. Relativní proudnice tuto

vírovou řadu zřetelně znázorňují a určí se z rozdílu vypočteného proudového pole a rychlosti odplouvající vírové řady. Pro srovnání jsou uvedena Strouhalova čísla $Sh = \frac{fL}{v_{\infty}}$ (f [1/s] je frekvence) Kármánovy vírové řady v závislosti na čísle Re (srovnej s obr. 4.22 a 4.23).

Na těch částech řešené oblasti, kde jsou vlivy viskozity zanedbatelné (tj. v dostatečné vzdálenosti od obtékaných povrchů) přecházejí rovnice (2.4.141) na rovnice Eulerovy, tj. $S=0$. Při zadávání okrajových podmínek musíme existenci charakteristik Eulerových rovnic respektovat, viz kap. 2.5.4. Uvedenou metodou jsou řešeny i Eulerovy rovnice (např. Löhner, Morgan, Zienkiewicz, 1984).

2.5 Metoda konečných objemů. Základní principy

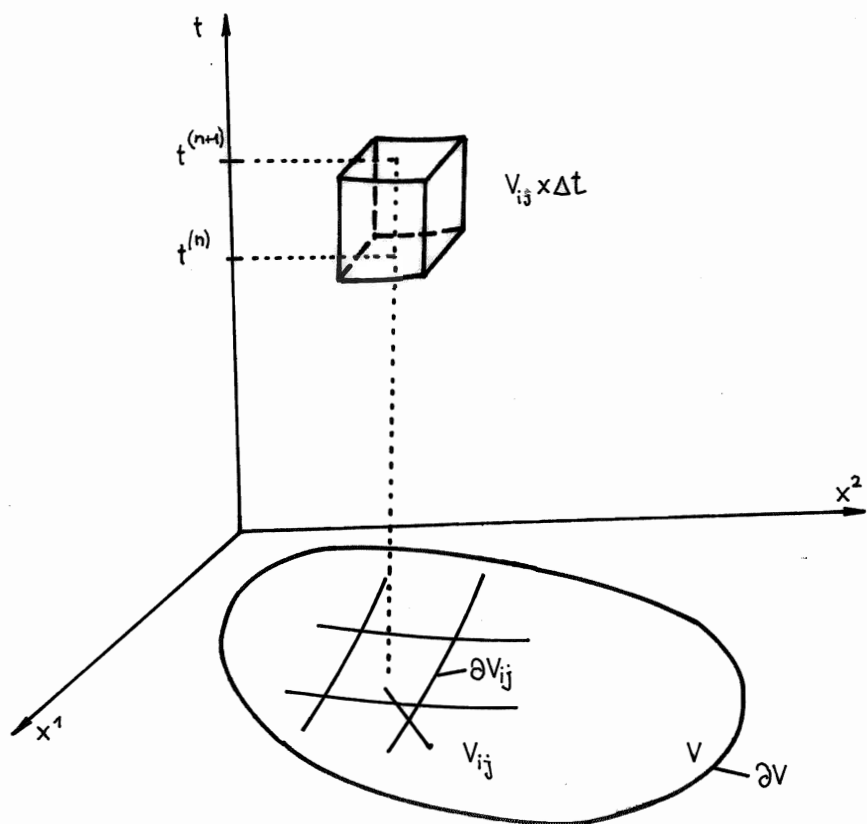
Metoda konečných objemů vychází přímo ze zákonů bilance v integrálním tvaru (2.1.13). Je vhodná pro řešení rovnic evolučního typu a to jak explicitními, tak implicitními metodami. V principu jde o integrální metodu jako v případě Galerkinovy metody (2.2.35). Váhová funkce je identicky rovna jedné a aproximace řešení není předem volena.

Hledáme řešení rovnice bilance (2.1.20) v integrálním tvaru, tj.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V \times T} \underline{u} d\mathcal{V} dt + \int_{V \times T} \frac{\partial j^l(u)}{\partial x^l} d\mathcal{V} = \int_{V \times T} \underline{c}(u) d\mathcal{V}, \quad (2.5.1)$$

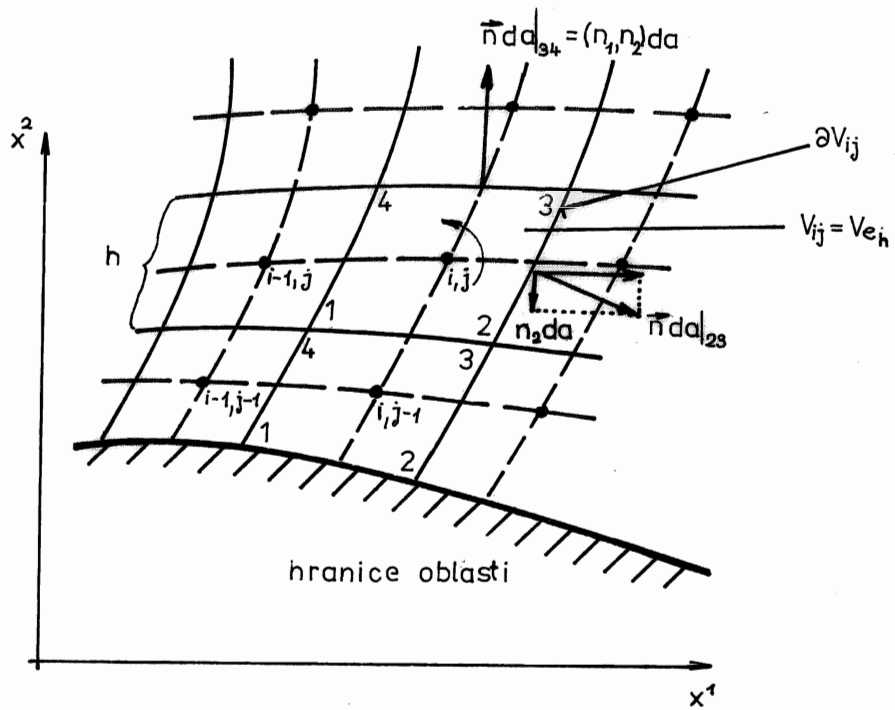
kde vektor neznámých (2.1.21) značíme \underline{u} , jejich toky $j^l(u)$ a produkce $\underline{c}(u)$. Jsou definovány v kap. 2.1.1 s odpovídajícími konstitutivními vztahy v kap. I.6. V mechanice tekutin je nejčastější tvar rovnic bilance dán vztahem (2.4.140). Okrajové a počáteční podmínky (2.1.54) až (2.1.56) budou specifikovány pro každý konkrétní případ zvlášť. Bez újmy na obecnosti postupu můžeme zanedbat produkce, tj. $\underline{c}(u) = 0$.

Nejdříve uvedeme postup, ve kterém je provedena časová diskretizace a té je podřízena diskretizace prostorová, resp. integrace prostorových proměnných. Řešení hledáme na nějaké časově neproměnné oblasti V s hranicí ∂V a na časovém intervalu $(0, T)$. Jak oblast, tak i časový interval si představíme jako sjednocení disjunktních podmnožin $V_e \subset V$ a $\Delta t = t^{(n)} - t^{(n-1)} \subset T$, viz obr. 2.29 Zde $t^{(n)}$ označuje n -tou časovou rovinu, tj. $t^{(n)} = n \Delta t$.



Obr. 2.29

Znázornění časové a prostorové diskretizace v metodě konečných objemů (dvourozměrný případ $V_e = V_{ij}$)



Obr. 2.30

Znázornění integrace po povrchu ∂V_{ij} konečného objemu. Vektor $\underline{n} da$ má směr normály ke křivkám ohraničujícím element V_{ij} .

Rovnice (2.5.1) pro jeden časoprostorový element $V_e \times \Delta t$ je

obr. 2.29 \rightarrow

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_e \times \Delta t} u dV + \int_{V_e \times \Delta t} \frac{\partial j^l(u)}{\partial x^l} dV = 0. \quad (2.5.2)$$

Užitím Gaussovy věty (2.1.3) převedeme objemový integrál na integrál přes hranici ∂V_e malého, ale konečného objemu V_e .

Obecně platí

$$\int_{V_e} u dV \Big|_{t^{(n)} + \Delta t} - \int_{V_e} u dV \Big|_{t^{(n)}} + \int_{\partial V_e \times \Delta t} j^l(u) n_l da dt = 0. \quad (2.5.3)$$

Dvourozměrný případ značíme dvěma indexy i, j (t.j. $e = (i, j)$), situace je znázorněna na obr. 2.30. Tudiž v konečném objemu V_{ij} v čase $t^{(n+1)}$ platí

$$\int_{V_{ij}} u dV \Big|_{t^{(n+1)}} = \int_{V_{ij}} u dV \Big|_{t^{(n)}} - \int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \left[\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \right] (j^l(u) n_l) da dt. \quad (2.5.4)$$

Integrace po hranici ∂V_{ij} odpovídá integraci po stranách 12, 23, 34 a 41.

obr. 2.30 \rightarrow Zavedeme následující označení

$$\underline{u}_{ij}^{(n)} = \frac{1}{V_{ij}} \int_{V_{ij}} u(x, t^{(n)}) dV, \quad (2.5.5)$$

tudiž $\underline{u}_{ij}^{(n)}$ odpovídá střední hodnotě řešení v objemu V_{ij} v časové rovině $t^{(n)}$. Velikost toku této veličiny do (resp. z) objemu V_{ij} za časový interval Δt označíme

$$\underline{F}_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\partial V_{ij}} j^l(u) n_l da dt \quad (l=1,2). \quad (2.5.6)$$

Index $n + \frac{1}{2}$ označuje, že hodnota toku je určena z hodnot $\underline{u}(t^{(n+\frac{1}{2})}, x)$ v čase $t^{(n+\frac{1}{2})} \in (t^{(n)}, t^{(n+1)})$. Je-li tok určen jen pomocí hodnot v časové rovině $t^{(n)}$, pak píšeme, viz obr. 2.30.

$$\begin{aligned} \underline{F}_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\partial V_{ij} \times \Delta t} j^l(\underline{u}(t^{(n)}, x)) n_l \, da \, dt = \int_{\partial V_{ij}} j^l(\underline{u}(t^{(n)}, x)) n_l \, da = \\ &= \left[j^1(\underline{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n)}) n_1 + j^2(\underline{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n)}) n_2 \right] \Delta a|_{12} + \dots, \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

kde tečky označují příspěvky integrace podle estatních stran.

Indexem $j - \frac{1}{2}$ označujeme hodnoty na hranici 12 konečného objemu V_{ij} a $\Delta a|_{12}$ je velikost této hranice. Základní schéma metody konečných objemů lze vyjádřit ve tvaru

$$\underline{u}_{ij}^{(n+1)} = \underline{u}_{ij}^{(n)} - \frac{\Delta t}{V_{ij}} \underline{F}_{ij}^{(n+\frac{1}{2})}. \quad (2.5.8)$$

Hlavním problémem zůstává nalézt způsob výpočtu toku (2.5.6) v časovém intervalu $t^{(n+\frac{1}{2})}$ a pak určit stabilitu odpovídajícího schématu. Potom podle Laxovy věty, kap. 2.4, lze usuzovat i na konvergenci numerického výpočtu.

Pořadí integrací přes časoprostorový objem v (2.5.1) lze i obrátit. Provedeme nejdříve diskretizaci prostorovou a potom časovou integraci. Užitím stejného postupu jako v metodě konečných prvků (2.3.5), či integrací (2.5.7) a nebo metodou konečných diferencí, viz kap. 2.6, lze problém (2.5.1), resp. (2.5.2), převést na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

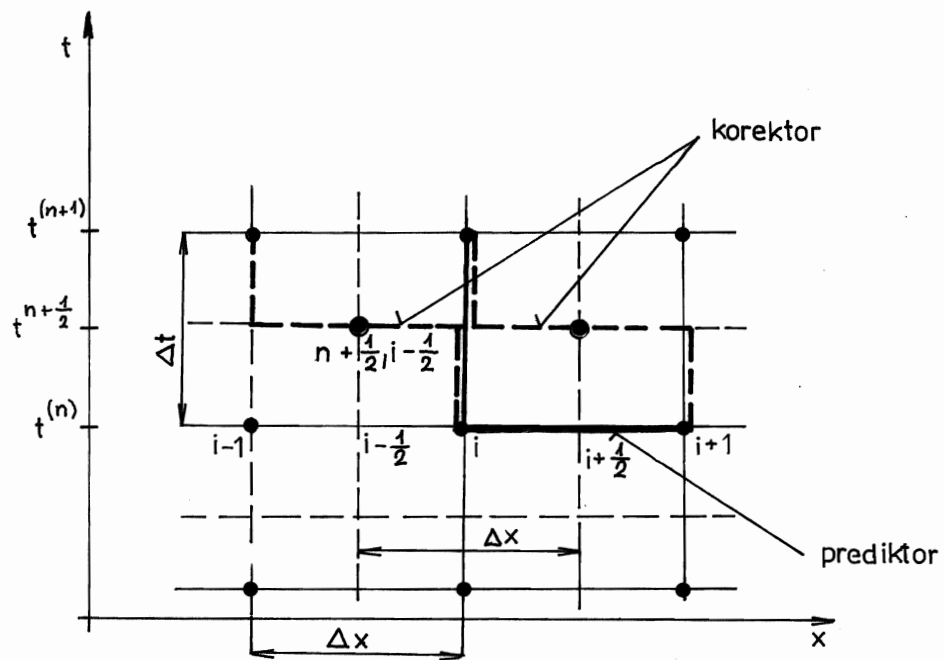
$$\frac{du_{ij}}{dt} = \mathcal{F}_{ij} \left(t, x^i, V_{ij}, u_{ij}, u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j-1}, \dots \right).$$

(2.5.9)

Zde U_{ij} jsou hodnoty řešení v i -tém uzlu (pro dvourozměrný případ). Tato soustava popisuje stejný problém jako soustava rovnic (2.5.8), ale jejich konkrétní tvar je odlišný. Obě soustavy lze časově integrovat vícestupňovými explicitními schémata typu prediktor - korektor.

Hlavní výhodou explicitních schémat jsou malé nároky na paměť počítače a jejich relativní jednoduchost. Avšak jejich nevýhodou je omezení velikosti časového kroku (srovnej (2.4.19) s (2.4.20)), a tím i velké nároky na počítačový čas. Tato nevýhoda je odstraňována v zásadě dvěma způsoby:

- vícestupňovými metodami typu Runge-Kutta,
- metodami implicitními.



Obr. 2.31

Znázornění Mc Cormackova schématu prediktor-korektor.

2.5.1 Vícestupňové explicitní metody

Vycházíme z explicitního schématu (2.5.8) a budeme předpokládat jednorozměrný linearizovaný případ rovnice (2.1.31) (např. jednorozměrná rovnice (2.4.1)). Uvedené schéma (2.5.8) má konkrétní tvar

$$U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(U_{i+\frac{1}{2}}^{(n+\frac{1}{2})} - U_{i-\frac{1}{2}}^{(n+\frac{1}{2})} \right) = 0 \quad (2.5.10)$$

váz obr. 2.31. Hodnoty v polovičních krocích $i \pm \frac{1}{2}$ odpovídají středním hodnotám na intervalu délky Δx a je tak realizována integrace ve vztahu (2.5.8).

obr. 2.31 → Časovou integraci, která je naznačena indexem $n + \frac{1}{2}$ provedeme ve dvou krocích, pomocí metody prediktor - korektor. Prediktor je pro nás explicitní schéma

$$U_i^{(0)(n+1)} = U_i^{(n)} - \chi (U_{i+1}^{(n)} - U_i^{(n)}) \quad , \quad \text{pro } \chi = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad , \quad (2.5.11)$$

plynoucí ze vztahu (2.5.10), jestliže dosadíme

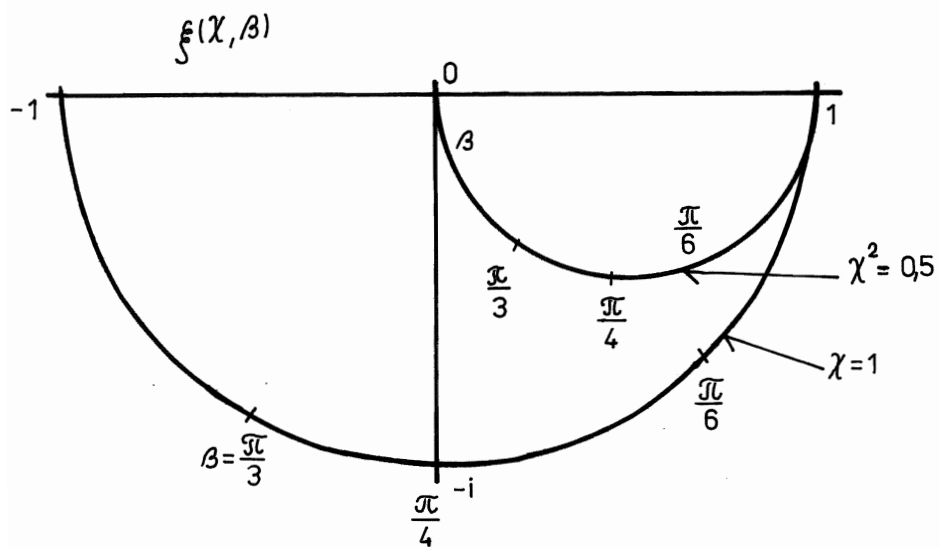
$$U_{i+\frac{1}{2}}^{(n+\frac{1}{2})} = U_{i+1}^{(n)} \quad , \quad U_{i-\frac{1}{2}}^{(n+\frac{1}{2})} = U_i^{(n)} \quad . \quad (2.5.12)$$

Ze schématu (2.5.10) plyne i korektor, položíme-li

$$U_{i+\frac{1}{2}}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (U_{i+1}^{(n)} + U_i^{(0)(n)}) \quad , \quad U_{i-\frac{1}{2}}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (U_i^{(n)} + U_{i-1}^{(0)(n+1)}) \quad . \quad (2.5.13)$$

Konečný tvar korektoru potom je

$$U_i^{(n+1)} = U_i^{(n)} - \frac{\chi}{2} (U_{i+1}^{(n)} - U_i^{(n)} + U_i^{(0)(n+1)} - U_{i-1}^{(0)(n+1)}) \quad (2.5.14)$$



Obr. 2.32

Průběh koeficientu zesílení $f(\chi, \beta)$
 pro Mc Cormackovo schéma

resp.

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \frac{\chi}{2} (u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}) + \frac{\chi^2}{2} (u_{i+1}^{(n)} - 2u_i^{(n)} + u_{i-1}^{(n)}). \quad (2.5.15)$$

Dosazením poruchy z rozvoje (2.4.14), tj. $u_j^{(n+1)} = -\alpha_k \xi(t^{(n+1)}, k) e^{ikx_j} = \xi(\Delta t, k) u_j^{(n)}$, ($i = \sqrt{-1}$)

do vztahu (2.5.15) dostáváme pro koeficient zesílení $\xi(\chi, \beta)$ schématu prediktor - korektor výraz

$$\xi(\chi, \beta) = 1 - i\chi \sin\beta + 2(i\chi \sin\frac{\beta}{2})^2 = 1 - 2\chi^2 \sin^2\frac{\beta}{2} - i\chi \sin\beta, \quad (2.5.16)$$

resp. $|\xi(\chi, \beta)| = \sqrt{1 + 4\chi^2(\chi^2 - 1)\sin^4\frac{\beta}{2}} < 1$, pro $\beta = \frac{2\pi\Delta x}{\ell}$.

Průběh koeficientu zesílení tohoto schématu, které se nazývá MacCormackovo je na obr. 2.32. Odtud je patrné, že pro maximální časový krok, který nastává při $\chi = 1$ nedochází k útlumu žádné vlnové délky (stejně jako u schématu ETC (2.4.64)). Schéma je druhého řádu přesnosti v čase i v prostoru (2.19). Konkrétní použití - viz (2.5.49), (2.5.50).

obr. 2.32 →

Soustředíme se nyní na explicitní schémata (2.5.8), umožňující počítat s delším časovým krokem ($\chi > 1$). Jsou založena na principu jednoho prediktoru a několika korektorů. Jejich ideu ukážeme na dvourozměrném případě. Jde o iterační schéma, kde nulová iterace je prediktor

$$u_{i,j}^{(0)(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} \quad (2.5.17)$$

a dalších r iterací jsou korektory

$$\begin{aligned}
 U_{ij}^{(1)(n+1)} &= U_{ij}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2V_{ij}} (F_{ij}^{(n)} + F_{ij}^{(0)}) \\
 U_{ij}^{(2)(n+1)} &= U_{ij}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2V_{ij}} (F_{ij}^{(n)} + F_{ij}^{(1)}) \\
 &\vdots \\
 U_{ij}^{(r)(n+1)} &= U_{ij}^{(n)} - \frac{\Delta t}{V_{ij}} [(1-\theta)F_{ij}^{(n)} + \theta F_{ij}^{(r-1)}] \\
 U_{ij}^{(n+1)} &= U_{ij}^{(r)(n+1)}.
 \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Toto schéma navrhl Rizzi (1982).

Zde jsme analogicky (9.5.7) označili

$$F_{ij}^{(r)} = \int_{\partial V_{ij}} j^{\ell} (U_{ij}^{(r)(n+1)}) da_{\ell} \tag{2.5.19}$$

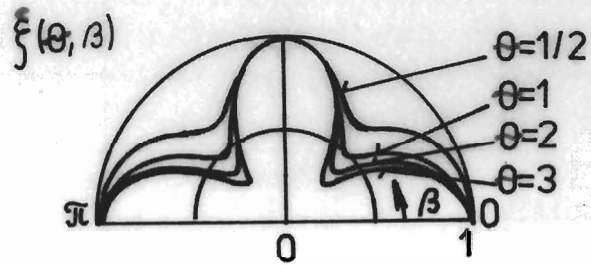
přičemž při integraci po hranici konečného objemu ∂V_{ij} předpokládáme na něm nějakou aproximaci řešení. Váhový faktor θ je zaveden až do r -té iterace.

Stabilitu tohoto schématu ukážeme pro jednorozměrnou rovnici (2.4.1) a pro $r = 3$. Platí

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_i^{(3)(n+1)} &= \underline{U}_i^{(n)} - \frac{\chi}{2} (\underline{U}_{i+1}^{(n)} - \underline{U}_{i-1}^{(n)}) + \frac{\theta \chi^4}{4} (\underline{U}_{i+2}^{(n)} - 2\underline{U}_i^{(n)} + \underline{U}_{i-2}^{(n)}) - \\
 &\quad - \frac{\theta \chi^3}{16} (\underline{U}_{i+3}^{(n)} - 3\underline{U}_{i+1}^{(n)} + 3\underline{U}_{i-1}^{(n)} - \underline{U}_{i-3}^{(n)}) .
 \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

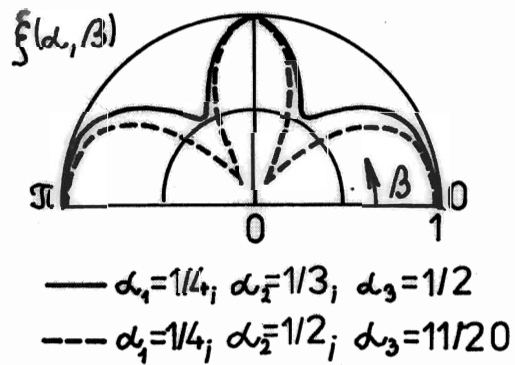
a koeficient zesílení je roven

$$\xi(\theta, \gamma) = 1 - \theta \gamma^2 + i \gamma \left(\frac{\theta}{2} \gamma^2 - 1 \right), \quad \gamma = \chi \sin \beta \tag{2.5.21}$$



Obr. 2.33

Polární graf koeficientu zesílení (2.5.22)
 pro Rizziho schéma pro $\chi = \chi_{max} = \sqrt{\frac{2}{\theta}}$.



Obr. 2.34

Polární graf koeficientu zesílení (2.5.25)
 pro Jamesonovo schéma $\chi = \chi_{max} = 2\sqrt{2}$.

resp.

$$|\xi(\theta, \gamma)| = \sqrt{1 + \left[(1-2\theta) + \left(\frac{\theta \chi^2}{2} \sin \beta \right)^2 \right] \chi^2 \sin^2 \beta} < 1 \quad (2.5.22)$$

Tudíž

schéma je stabilní pro

$$\chi \leq 2 \quad \text{při} \quad \theta \geq \frac{2}{\chi^2} \quad , \quad (2.5.23)$$

což je dvojnásobek v porovnání se schématem McCormackovým (2.5.16). Vztah (2.5.22) je uveden na obr. 2.33 (Hořejší, 1987).

obr. 2.33

Podobné schéma navrhl Jameson (1983) a má tvar

$$\begin{aligned} U_{ij}^{(0)(n+1)} &= U_{ij}^{(n)} \\ U_{ij}^{(1)(n+1)} &= U_{ij}^{(0)(n+1)} - \alpha_1 \Delta t F_{ij}^{(0)} \\ U_{ij}^{(2)(n+1)} &= U_{ij}^{(0)(n+1)} - \alpha_2 \Delta t F_{ij}^{(1)} \\ U_{ij}^{(3)(n+1)} &= U_{ij}^{(0)(n+1)} - \alpha_3 \Delta t F_{ij}^{(2)} \\ U_{ij}^{(4)(n+1)} &= U_{ij}^{(0)(n+1)} - \Delta t F_{ij}^{(3)} \\ U_{ij}^{(n+1)} &= U_{ij}^{(4)(n+1)} \quad , \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou konstanty, které se stejně jako v případě schématu (2.5.20) určí z podmínky stability. Ta má tvar

$$\xi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma) = 1 - \alpha_3 \gamma^2 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \gamma^4 + i \gamma (\alpha_2 \alpha_3 \gamma^2 - 1) \quad , \quad \gamma = \chi \sin \beta. \quad (2.5.25)$$

Pro koeficienty $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ a $\alpha_3 = \frac{1}{2}$ je schéma

4. řádu přesnosti v čase a 2. řádu přesnosti v prostoru. Je

stabilní pro $\chi = 2\sqrt{2}$ a průběh koeficientu zesílení (2.5.25) je uveden na obr. 2.34 (Hořejší, 1987).

obr. 2.34

Kvalitativně odlišná z hlediska stability jsou tzv. racionální Runge-Kuttova schémata (Wambecq, 1978). Při časové integraci se vychází ze soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (2.5.9) a tato integrace se realizuje ve dvou krocích (Satofuka, 1986). Jestliže pravou stranu rovnice (2.5.9) v n-té časové rovině označíme $\underline{F}_{ij}(\underline{u}_{ij}^{(n)})$ lze toto schéma formálně zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \underline{u}_{ij}^{(0)(n+1)} &= \underline{u}_{ij}^{(n)} \\ \underline{u}_{ij}^{(1)(n+1)} &= \Delta t \underline{F}_{ij}(\underline{u}_{ij}^{(0)(n+1)}) \\ \underline{u}_{ij}^{(2)(n+1)} &= \Delta t \underline{F}_{ij}(\underline{u}_{ij}^{(0)(n+1)} + c_2 \underline{u}_{ij}^{(1)(n+1)}) \\ \underline{u}_{ij}^{(n+1)} &= \underline{u}_{ij}^{(0)(n+1)} + \left[2 \underline{u}_{ij}^{(1)(n+1)} (\underline{u}_{ij}^{(1)(n+1)} \cdot \underline{u}_{ij}^{(3)(n+1)}) - \right. \\ &\quad \left. - \underline{u}_{ij}^{(3)(n+1)} (\underline{u}_{ij}^{(1)(n+1)} \cdot \underline{u}_{ij}^{(1)(n+1)}) \right] / (\underline{u}_{ij}^{(3)(n+1)} \cdot \underline{u}_{ij}^{(3)(n+1)}), \end{aligned}$$

(2.5.26)

kde $\underline{u}_{ij}^{(3)(n+1)} = b_1 \underline{u}_{ij}^{(1)(n+1)} + b_2 \underline{u}_{ij}^{(2)(n+1)}$ při $b_1 + b_2 = 1$

a $(\underline{u}_{ij}^{(r)(n+1)} \cdot \underline{u}_{ij}^{(r')(n+1)})$ značí skalární součiny odpovídajících vektorů ($r, r' = 1, 3$). Schéma (2.5.26) je obecně 1. řádu přesnosti v čase a v případě, že $b_2 c_2 = -\frac{1}{2}$ je 2. řádu. Jeho zvláštností je, že je explicitní a přesto je nepodmíněně stabilní (2.4.19), jestliže je splněna nerovnost

$$b_2 c_2 \leq -\frac{1}{2 \cos \beta (2 - \cos \beta)} \quad (2.5.27)$$

Nízký řád přesnosti tohoto schématu může být na překážku při výpočtu nestacionárních proudových polí a při numerické simulaci turbulence přímým řešením Navierových-Stokesových rovnic (Tokunaga, Satofuka, Miyagawa, 1986).

2.5.2 Implicitní schémata

Z průběhu koeficientu zesílení implicitních schémat (2.4.19) vidíme, že jsou nepodmíněně stabilní (Beam, Warming, 1976; Lerat a kol., 1982). Tato výhoda je však vykoupena většími nároky na paměť počítače při inverzi rozsáhlých matic. Realizace implicitních schémat v metodě konečných objemů vychází opět ze vztahu (2.5.8), kde tok v $n + \frac{1}{2}$ časové rovině si můžeme představit ve tvaru

$$F_{ij}^{(n+\frac{1}{2})} = \theta F_{ij}^{(n+1)} + (1-\theta) F_{ij}^{(n)} \quad \text{pro } \theta \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (2.5.28)$$

Pro $\theta = 1$ dostáváme implicitní metodu.

Integraci (2.5.7) po stranách konečného objemu je možno realizovat pomocí konečných diferencí (stejně jako v jednorozměrném případě (2.5.10)). Označíme $x^1 = x$, $x^2 = y$ a zavedeme diferenciální operátory Δ_x , Δ_y . Např. na ortogonální síti, kde

$$n_1 = (1, 0), \quad n_2 = (0, 1), \quad \Delta_x u_{ij} = \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2\Delta x} \quad \text{a} \quad \Delta_y u_{ij} = \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2\Delta y}$$

je $V_{ij} = \Delta x \Delta y$ má integrace (2.5.7) tvar

$$\int_{\partial V_{ij}} [j^1(u_{ij}^{(n)}) n_1 + j^2(u_{ij}^{(n)}) n_2] da = [j^1(u_{i+1j}^{(n)}) - j^1(u_{i-1j}^{(n)})] \frac{\Delta y}{2} + [j^2(u_{ij+1}^{(n)}) - j^2(u_{ij-1}^{(n)})] \frac{\Delta x}{2} = \Delta x \Delta y [\Delta_x j_{ij}^{1(n)} + \Delta_y j_{ij}^{2(n)}].$$

(2.5.29)

Změnu řešení za jeden časový krok označíme

$$\delta u_{ij}^{(n)} = u_{ij}^{(n+1)} - u_{ij}^{(n)} \quad (2.5.30)$$

a tuto veličinu budeme považovat za neznámou.

Abychom nemuseli řešit soustavy nelineárních rovnic problém linearizujeme

$$\begin{aligned} \underline{j}_{ij}^{1(n+1)} &= \underline{j}_{ij}^{1(n)} + \delta \underline{j}_{ij}^{1(n)} = \underline{j}_{ij}^{1(n)} + \mathbf{A}^{(n)} \Big|_{ij} \delta u_{ij}^{(n)} \\ \underline{j}_{ij}^{2(n+1)} &= \underline{j}_{ij}^{2(n)} + \delta \underline{j}_{ij}^{2(n)} = \underline{j}_{ij}^{2(n)} + \mathbf{B}^{(n)} \Big|_{ij} \delta u_{ij}^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

Matice \mathbf{A} , \mathbf{B} jsou definovány vztahy (2.1.47), (2.1.48) nebo (2.1.33).

Dosazením (2.5.30), (2.5.28) s ohledem na (2.5.29) a (2.5.31) dostáváme obecný tvar implicitního schématu

$$\left[\mathbf{I} + \theta \Delta t \left(\Delta_x \mathbf{A}^{(n)} \Big|_{ij} + \Delta_y \mathbf{B}^{(n)} \Big|_{ij} \right) \right] \delta u_{ij}^{(n)} = -\Delta t \underline{F}_{ij}^{(n)}. \quad (2.5.32)$$

Provedeme-li redukci vztahu (2.5.32) pro rovnici (2.4.1) dostáváme

$$(1 + \theta \Delta t a \Delta_x) \delta u_i^{(n)} = -\Delta t a \Delta_x u_i^{(n)} \quad (2.5.33)$$

resp.

$$\delta u_i^{(n)} + \frac{\theta \chi}{2} (\delta u_{i+1}^{(n)} - \delta u_{i-1}^{(n)}) = -\frac{\chi}{2} (u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}). \quad (2.5.33)_1$$

Stejným postupem jako byl odvozen vztah (2.4.17) nalezneme koeficient zesílení schématu (2.5.33) ve tvaru

$$\xi(\chi, \beta) = \frac{1 + i\chi(\theta - 1)\sin\beta}{1 + i\chi\theta\sin\beta}. \quad (2.5.34)$$

Pro $\theta \geq \frac{1}{2}$ je nepodmíněně stabilní. V případě $\theta \neq \frac{1}{2}$ je prvního řádu přesnosti a pro $\theta = \frac{1}{2}$ je 2. řádu přesnosti v čase (2.19)

Při vyšetřování stability vícerozměrné úlohy přejdeme k proměnným (2.1.34) resp. (2.1.49) a tím k maticím (2.1.38) resp. (2.1.52). Schéma (2.5.32) přechází na tvar

$$[I + \theta \Delta t (\tilde{A}|_{ij} \Delta_x + \tilde{B}|_{ij} \Delta_y)] \delta u_{ij}^{(n)} = -\Delta t F_{ij}^{(n)}, \quad (2.5.35)$$

takže je nezbytné, určit vlastní čísla matice $C = \tilde{A}|_{ij} \Delta_x + \tilde{B}|_{ij} \Delta_y$.

Postup je stejný jako v jednorozměrném případě (2.5.32) a jeho výsledkem je, že schéma je stabilní v případě, když žádné vlastní číslo nemá absolutní hodnotu větší než jedna, viz pozn.2.18)

Předpokládejme, že řešení (2.5.32) probíhá na síti N uzlů. Matice rovnice (2.5.32) je tridiagonální, což vyžaduje při inverzi přibližně N^2 operací a pro dvourozměrný případ (síť $N \times N$) N^4 operací. Vícerozměrné problémy je výhodné řešit jako posloupnost problémů jednorozměrných, tzv. faktorizací. Beam a Warming (1978) navrhli schéma typu

$$(I + \theta \Delta t \Delta_x A^{(n)}|_{ij})(I + \theta \Delta t \Delta_y B^{(n)}|_{ij}) \delta u_{ij}^{(n)} = -\Delta t F_{ij}^{(n)}, \quad (2.5.36)$$

které je součinem dvou jednorozměrných operátorů (členy druhého řádu zanedbáváme). Inverze této soustavy rovnic probíhá ve dvou krocích

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{I} + \theta \Delta t \Delta_x A^{(n)}|_{ij}) \delta u_{ij}^{(n)} &= -\Delta t F_{ij}^{(n)} \\
 (\mathbb{I} + \theta \Delta t \Delta_y B^{(n)}|_{ij}) \delta u_{ij}^{(n)} &= \delta u_{ij}^{(n)}
 \end{aligned}
 \tag{2.5.37}$$

a počet operací je opět řádu N^2 . Schéma je nepodmíněně stabilní pro $\theta \geq \frac{1}{2}$ a vzhledem k tomu, že postup (2.5.37) odpovídá střídání směrů výpočtu, nazývá se také tento postup metoda střídavých směrů (ADI - Alternating Direction Implicit) (Jameson, Yoon, 1986).

Schéma (2.5.35) lze upravit i tak, že soustavy rovnic (2.5.37) jsou trojúhelníkové, tzv. L-U rozklad ^{2.15)} (Buratynski, Caughey, 1986).

$$[\mathbb{I} + \Delta_x^- A_1^{(n)}|_{ij} + \Delta_y^- B_1^{(n)}|_{ij}] [\mathbb{I} + \Delta_x^+ A_2^{(n)}|_{ij} + \Delta_y^+ B_2^{(n)}|_{ij}] \delta u_{ij}^{(n)} = -\Delta t F_{ij}^{(n)}.$$

(2.5.38)

Zde jsou $\Delta_x^- u_{ij} = \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{\Delta x}$, $\Delta_x^+ u_{ij} = \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{\Delta x}$

zpětný a dopředný diferenční operátor (stejně tak pro Δ_y^- , Δ_y^+) a musí být splněno

$$\begin{aligned}
 A_1^{(n)}|_{ij} + A_2^{(n)}|_{ij} &= \Delta t \theta A^{(n)}|_{ij} \\
 B_1^{(n)}|_{ij} + B_2^{(n)}|_{ij} &= \Delta t \theta B^{(n)}|_{ij}.
 \end{aligned}$$

(2.5.39)

Matice $A_1^{(n)}$ až $B_2^{(n)}$ mohou být vybrány celkem libovolně, protože podmínkami (2.5.39) je základní schéma (2.5.31) splněno (až na členy druhého řádu). Avšak z důvodů numerické stability je výhodné, aby v každém kroku byly řešeny diagonálně dominantní matice. Proto Jameson a Turkel (1981) navrhli matice ve tvaru

$$\begin{aligned} A_1^{(n)}|_{ij} &= \frac{\theta \Delta t}{2} (A^{(n)}|_{ij} + \lambda_1 I) - \frac{I}{4}, & A_2^{(n)}|_{ij} &= \frac{\theta \Delta t}{2} (A^{(n)}|_{ij} - \lambda_1 I) + \frac{I}{4} \\ B_2^{(n)}|_{ij} &= \frac{\theta \Delta t}{2} (B^{(n)}|_{ij} + \lambda_2 I) - \frac{I}{4}, & B_2^{(n)}|_{ij} &= \frac{\theta \Delta t}{2} (B^{(n)}|_{ij} - \lambda_2 I) + \frac{I}{4}, \end{aligned}$$

(2.5.40)

kde λ_1 a λ_2 jsou maximální vlastní čísla matic $A^{(n)}$ a $B^{(n)}$ viz kap.2.5.4a I je jednotková matice řádu 4×4 (závisí na počtu složek vektoru u)

Iterační proces (2.5.37) má s ohledem na (2.5.38) tvar

$$\begin{aligned} [I + \theta \Delta t (\Delta_x^- A_1^{(n)}|_{ij} + \Delta_y^- B^{(n)}|_{ij})] \delta u_{ij}^{(1)(n)} &= -\Delta t F_{ij}^{(n)} \\ [I + \theta \Delta t (\Delta_x^+ A_2^{(n)}|_{ij} + \Delta_y^+ B_2^{(n)}|_{ij})] \delta u_{ij}^{(n)} &= \delta u_{ij}^{(1)(n)} \end{aligned}$$

(2.5.41)

a spočívá nejprve v řešení horní a potom dolní trojúhelníkové soustavy.

Při periodické okrajové podmínce, viz obr. 2.20, již matice v (2.5.39) nejsou trojúhelníkové (mají nenulové prvky v opačném rohu), je proto nutné použít některý z relaxačních procesů^{2,15}, např. SLOR a nebo speciální metodu pro tento typ matic (Buratynski, Caughey, 1986).

2.5.3 Tlumicí členy numerických schémat. Metoda multigrid

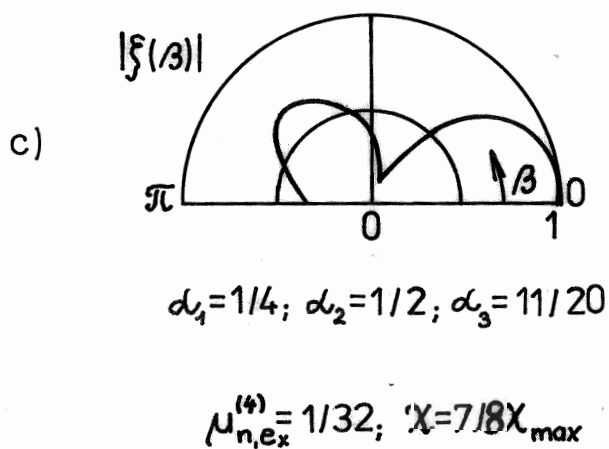
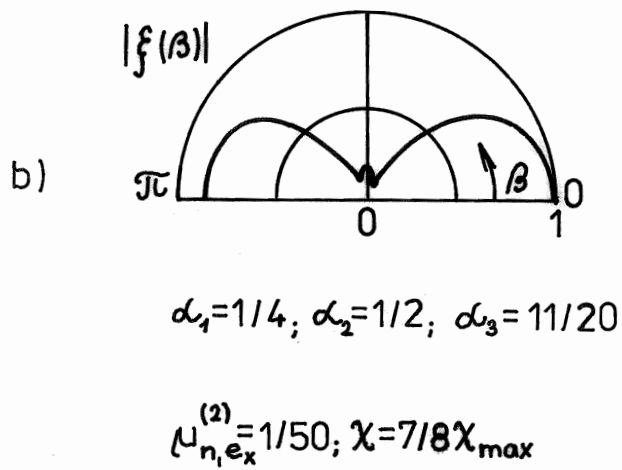
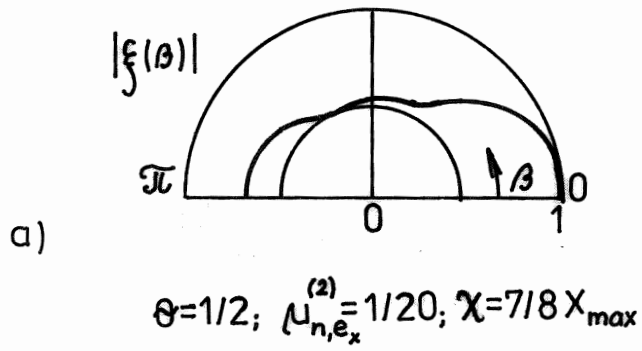
Při výpočtech proudových polí, především při transsonických rychlostech, kdy se v proudovém poli objevuje rázová vlna, dochází k nežádoucím numerickým oscilacím s krátkou vlnovou délkou ($l \sim 2\Delta x$). Krátké vlnové délky se tlumí pomocí viskózních členů, které mají obvykle tvar

$$(\Delta x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_n^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (\Delta x)^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_n^{(4)} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right), \quad (2.5.42)$$

přičemž koeficienty numerické viskozity $\mu_n^{(2)}$, $\mu_n^{(4)}$ mohou být také považovány za konstanty a stát před derivacemi 2. a 4. řádu. První výraz modeluje skutečnou fyzikální viskozitu tekutiny (viz (2.3.81)) a způsobuje proto "rozmáznutí" rázové vlny a utlumení (disipaci) oscilací v jejím blízkém okolí. Tento typ numerické viskozity netlumí již tak silně oscilace v hladké části řešení, kde je výhodnější člen se čtvrtou derivací.

Koeficienty numerické viskozity $\mu_n^{(2)}$, $\mu_n^{(4)}$ musí mít následující vlastnosti:

- i) citlivost k nespojitostem typu rázové vlny; $\mu_n^{(2)}$ by měla být řádu Δx , značíme $\mu_n^{(2)} = O(\Delta x)$
- ii) vystupují v konzervativním tvaru (2.1.20)
- iii) ve spojitě oblasti nemají vliv na přesnost numerického schématu, tj. $\mu_n^{(2)}, \mu_n^{(4)} = O((\Delta x)^{r-1})$, kde r je řád přesnosti schématu v prostorových proměnných
- iv) zachovávají lineární stabilitu základního schématu.



Obr. 2.35

Polární grafy koeficientu přechodu (pro

- a) Rizziho schéma (2.5.20) s disipativním členem (2.5.44)
- b) Jamesonovo schéma (2.5.24) s disipativním členem (2.5.44)
- c) Jamesonovo schéma (2.5.24) s disipativním členem (2.5.45)

Vlivy disipace (viskozity) (2.5.42) budeme analyzovat na obecném implicitním schématu (2.5.31) redukováném na jednorozměrný případ

$$\begin{aligned} & \left[I + \theta \Delta t a \Delta_x - \Delta t \Delta x \Delta_x \left(\mu_{n,im}^{(2)} \Delta_x \right) + \Delta t (\Delta x)^3 \Delta_x \left(\mu_{n,im}^{(4)} \Delta_{xxx} \right) \right] \delta \underline{u}_i^{(n)} = \\ & = -\Delta t \left[a \Delta_x - \Delta x \Delta_x \left(\mu_{n,ex}^{(2)} \Delta_x \right) + (\Delta x)^3 \Delta_x \left(\mu_{n,ex}^{(4)} \Delta_{xxx} \right) \right] \underline{u}_i^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.5.43)$$

Diferenční operátory jsou definovány následujícím způsobem

$$\Delta_x (\mu \Delta_x \underline{u}_i) = \frac{\left[\mu_{i+\frac{1}{2}} (\underline{u}_{i+1} - \underline{u}_i) - \mu_{i-\frac{1}{2}} (\underline{u}_i - \underline{u}_{i-1}) \right]}{(\Delta x)^2} \quad (2.5.44)$$

$$\Delta_x (\mu \Delta_{xxx} \underline{u}_i) = \frac{\left[\mu_{i+\frac{1}{2}} (\underline{u}_{i+2} - 3\underline{u}_{i+1} + 3\underline{u}_i - \underline{u}_{i-1}) - \mu_{i-\frac{1}{2}} (\underline{u}_{i+1} - 3\underline{u}_i + 3\underline{u}_{i-1} - \underline{u}_{i-2}) \right]}{(\Delta x)^4} \quad (2.5.45)$$

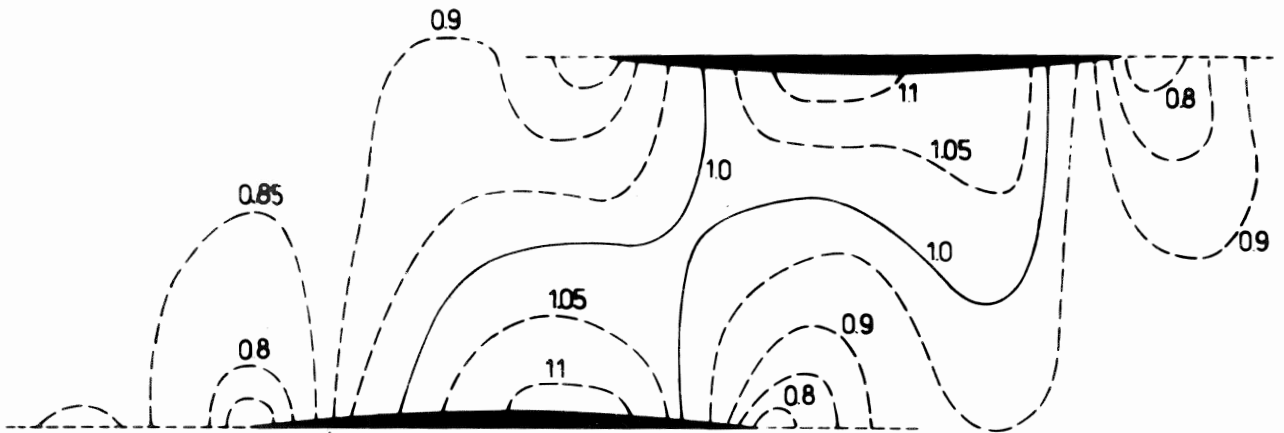
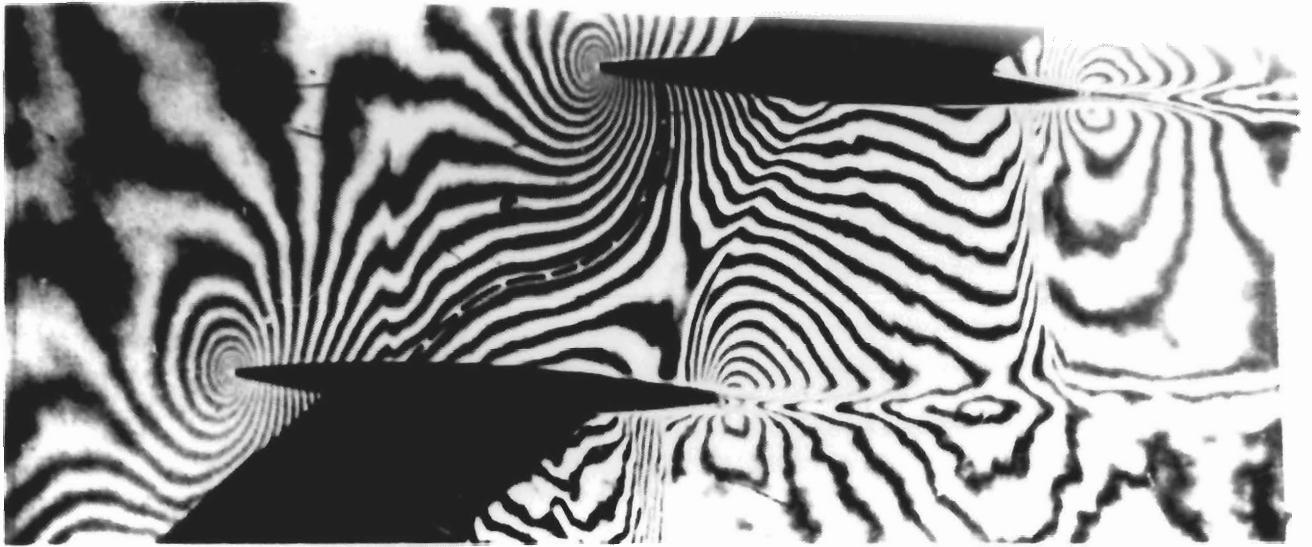
Dodáním pouze explicitní numerické viskozity $\mu_{n,ex}^{(2)}$, $\mu_{n,ex}^{(4)}$ zůstává matice tridiagonální, ale zmenšuje se hranice stability. Pro explicitní schémata (2.5.18) a (2.5.24) je uveden průběh koeficientu zesílení $\xi(\beta)$ na obr. 2.35 a, b, c (Hořejší, 1987).

obr. 2.35

Uvedeme konkrétní numerický výpočet dvourozměrných Eulerových rovnic (2.4.140) (pro $\hat{j}_{dis}^i(\varphi) = 0$, $i, j, \ell = 1, 2$). Vektor neznámých je

$$\underline{u} = (\varrho, \varrho v^1, \varrho v^2, \varrho e) \quad (2.5.46)$$

a jejich divergentní zápis je dán



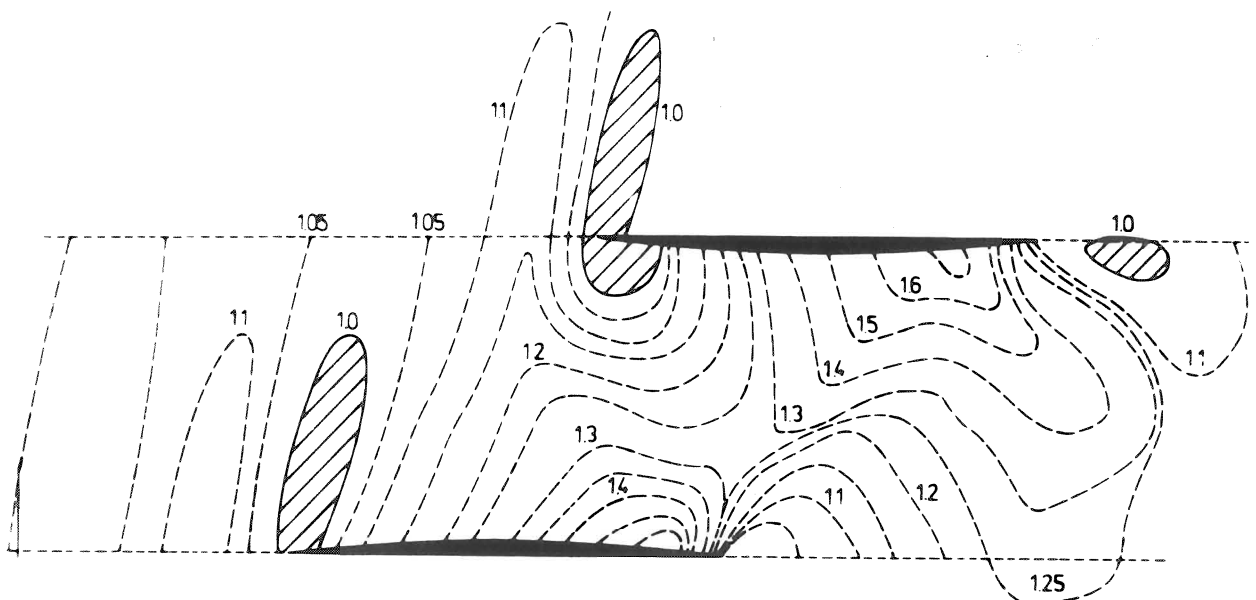
Obr. 2.36

a)

Interferogram proudového pole profilové mříže DCA 8% a jeho výpočet metodou (Mc Cormack) (2.5.39), (2.5.50)

rychlost proudu před mříží

$$M_{\infty} = 0,91; \quad \text{úhel náběhu } \alpha_{in} = 0,2^{\circ}$$



Obr.2.36

b)

rychlost proudu před mříží

$M_{\infty} = 1,13$; úhel náběhu $\alpha_{in} = 0,3^{\circ}$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v^1 \\ \rho v^2 \\ \rho e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho v^1 \\ \rho (v^1)^2 + p \\ \rho v^1 v^2 \\ \rho v^1 (e + \frac{p}{\rho}) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \rho v^2 \\ \rho v^2 v^1 \\ \rho (v^2)^2 + p \\ \rho v^2 (e + \frac{p}{\rho}) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.5.47)$$

kde

$$p = \frac{\alpha-1}{2} \left\{ 2\rho e - \rho [(v^1)^2 + (v^2)^2] \right\} \quad (2.5.48)$$

Pro složité geometrické oblasti je lepší použít rovnice (2.5.47) v transformovaném tvaru (2.1.45). Soustava rovnic (2.5.47) je výchozí pro metodu konečných objemů (2.5.2) v mechanice tekutin.

Soustředíme se na McCormackovo explicitní schéma prediktor (2.5.11)

$$\underline{u}_{ij}^{(0)(n+1)} = \underline{u}_{ij}^{(n)} - \frac{\Delta t}{V_{ij}} \underline{F}_{ij}^{(n)} \quad (2.5.49)$$

korektor (2.5.14)

$$\underline{u}_{ij}^{(n+1)} = \underline{u}_{ij}^{(n)} - \frac{\Delta t}{2V_{ij}} (\underline{F}_{ij}^{(n)} + \underline{F}_{ij}^{(0)}) + \Delta x \Delta t D_{dis}(\underline{u}_{ij}^{(n)}) \quad (2.5.50)$$

Výpočet toků $\underline{F}_{ij}^{(n)}$, $\underline{F}_{ij}^{(0)}$ je proveden podle vztahu (2.5.29) a člen $D_{dis}(\underline{u}_{ij}^{(n)})$ je explicitní numerická viskozita s derivací 2. řádu

$$D_{dis}(\underline{u}^{(n)}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{n,ex,1}^{(2)}(|\underline{u}^{(n)}|) \frac{\partial \underline{u}^{(n)}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{n,ex,2}^{(2)}(|\underline{u}^{(n)}|) \frac{\partial \underline{u}^{(n)}}{\partial x} \right] \quad (2.5.51)$$

přičemž jsou derivace nahrazeny diferenčním operátorem (2.5.44) Na obr. 2.36 a, b jsou uvedena rychlostní pole (čáry konstantního

Machova čísla $M = \frac{|V|}{c}$) při proudění lopatkovou mříží, tvořenou z 8% dvoukruhových profilů (Kozel, Vavřincová, 1987).

6.2.36 → Z uvedeného interferogramu (experiment ÚT ČSAV) je patrný velmi dobrý souhlas jak v průběhu čelních, tak i patních rázových vln a čar konstantního Machova čísla. Rázové vlny jsou v důsledku numerické viskozity poněkud "rozmáznuty" ($\mu_{n,ex,1}^{(2)} \sim 1,3|u^{(n)}|, \mu_{n,ex,2}^{(2)} \sim 0,5|u^{(n)}|$). Toto "rozmáznutí" je tím menší, čím jemnější je síť ($\Delta x \rightarrow 0$).

V případě, že je numerická viskozita zavedena jenom implicitně, je hranice stability (2.5.34) schémat zachována, ale matice soustavy (2.5.43) je pro $\mu_{n,in}^{(2)} \neq 0$ tridiagonální a při $\mu_{n,in}^{(4)} \neq 0$ pětidiagonální. Tlumení viskózním členem s $\mu_{n,in}^{(4)}$ je důležité při odstraňování oscilací krátké vlnové délky ($l \sim 2\Delta x$), které se výrazně projevují při metodě multigrid.

Metoda multigrid pro implicitní schémata k řešení stacionárních Eulerových rovnic byla poprvé užita v r.1981 (R.H. Ni, 1981). Tento princip rozpracoval Jameson (1983) užitím schématu (2.5.37).

Předpokládejme, že výpočet probíhá na dvou sítích s charakteristickými rozměry $\Delta x = h, 2h$ (viz obr. 2.18). Hodnoty proměnných $u^{(n)k}$ na jemnější síti transformujeme na hustší síť podle pravidla

$$\underline{u}^{(1)2h} = \sum_{e_h} (V_{e_h}^h u^{(n)h}) V_{e_{2h}}^{2h} \quad (2.5.52)$$

Zde jsme označili $V_{e_h}^h$ objem (ve dvourozměrném případě plochu) konečného objemu při síti s rozměrem h a $V_{e_{2h}}^{2h}$ pro hustší síť, tj. $V_{e_{2h}}^{2h} = \sum_{e_h} V_{e_h}^h$, kde e_h probíhá $(i,j), (i-1,j), (i-1,j-1), (i,j-1)$ (viz obr. 2.30). Operaci (2.5.52) nazýváme restrikcí (srovnej s operátorem I_h^{2h} (2.3.135)).

Stacionární řešení Eulerových rovnic musí v každém bodě sítě vyhovovat vztahu

$$\underline{F}_{ij}^{(n)h} = \int_{\partial V_{ij}^h} j^l(\underline{u}(t^{(n)}, \underline{x})) n_l da = \underline{F}_{e_h}^{(n)h} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.5.53)$$

tj. bilance veličin (2.5.46) v objemu V_{ij}^h konverguje k nule. Velikost zbytkového toku nazýváme reziduem (srovnej s (2.3.127)) na síti charakteristického rozměru h . Řešení $\underline{u}_{ij}^{(n)2h}, \underline{u}_{ij}^{(n)4h}, \dots$ na hustých sítích a jejich využití opět na síti nejjemnější se provádí následujícím způsobem:

- I) Výpočet řešení $\underline{u}_{ij}^{(n)h}$ podle schématu (2.5.37) s reziduem (2.5.53)
- II) Transformace řešení $\underline{u}_{ij}^{(n)h}$ (restrikce) operátorem (2.5.52)
- III) Výběr rezidua z jemné sítě pro hrubou síť je proveden takto:

1) definujeme tzv. "hmací" funkci

$$\underline{P}_{e_{2h}}^{2h} = \sum_{e_h} \underline{F}_{e_h}^{(n)h} - \underline{F}_{e_{2h}}^{(1)2h}, \quad (2.5.54)$$

kde

$$\underline{F}_{e_{2h}}^{(1)2h} = \int_{\partial V_{e_{2h}}^{2h}} j^l(\underline{u}^{(1)2h}) n_l da \quad (2.5.55)$$

je reziduum získané z řešení (2.5.52).

2) výpočet na hrubé síti s rozměrem $2h$ a reziduem

$$\underline{F}_{e_{2h}}^{(n)2h} = \underline{F}_{e_{2h}}^{(1)2h} + \underline{P}_{e_{2h}}^{2h} = \sum_{e_h} \underline{F}_{e_h}^{(n)h} \quad (2.5.56)$$

podle schématu (2.5.37) při stejném Courantově čísle χ .

3) výpočet na ještě hrubší síti s rozměrem $4h$ a reziduem

$$F_{e_{4h}}^{(n)h} = F_{e_{4h}}^{4h} + P_{e_{4h}}^{4h} = \sum_{e_{2h}} (F_{e_{2h}}^{(n)2h} + P_{e_{2h}}^{2h}) =$$

$$= \sum_{e_{2h}} (F_{e_{2h}}^{(n)2h} - F_{e_{2h}}^{(1)2h} + \sum_{e_h} F_{e_h}^{(n)h}) \quad (2.5.57)$$

kde $F_{e_{2h}}^{(n)2h}$ je reziduum vypočtené podle jeho definice (2.5.53) z řešení $u_{ij}^{(n)2h}$ získaného v předchozím kroku 2). Výpočet rezidua podle (2.5.57) lze rozšířit na další hustší síť tak, že řešení na nejhrubší síti závisí na reziduu sítě nejjemnější. Časové kroky jsou voleny tak, aby číslo λ bylo na všech sítích stejné.

IV) Korekce $\delta u_{ij}^{(n)}$ (2.5.30) vypočtená na každé síti je přenášena k následující jemnější síti bilineární interpolací, viz obr. 2.37 d.

Obr. 2.37

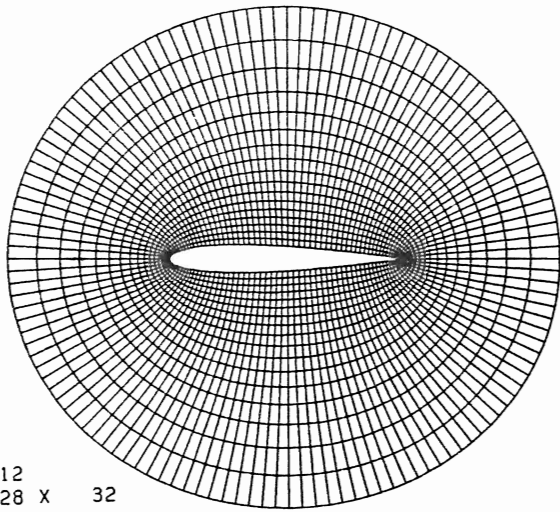
Procesy I až IV se opakují. Konečné řešení na nejjemnější síti je nezávislé na volbě okrajových podmínek na hrubých sítích. Okrajové podmínky se zadávají na každé síti obvyklým způsobem.^{2,26)}

2.26)

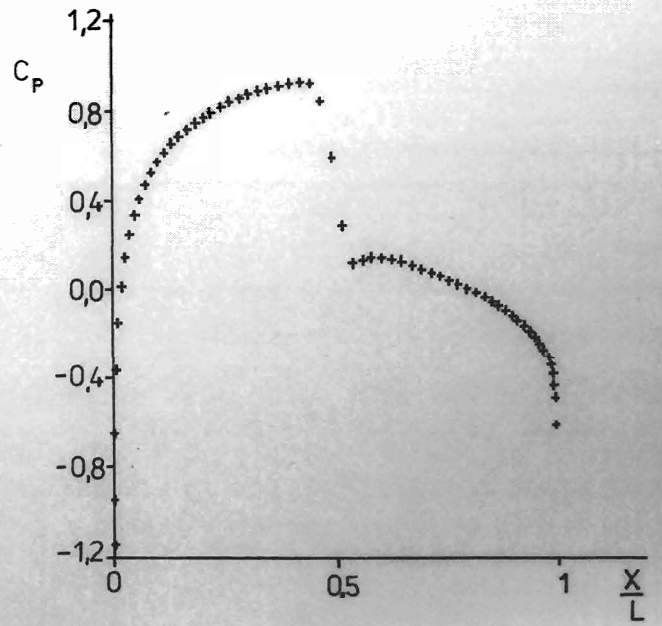
Např. podmínka neprostupnosti stěn $\rho(v^i n_i) = 0$ vede s ohledem na 2. a 3. rovnici (2.5.47) na výpočet derivace $\frac{\partial p}{\partial n} = \rho v_l^k v_l \frac{\partial n^k}{\partial x^l}$

($k, l = 1, 2$), kde $\underline{n} = (n_1, n_2)$ je normála profilu. Tuto derivaci tlaku extrapolujeme z povrchu pomocí okolních nódů. Není-li použita síť ortogonální, typu 29.37 a), je výhodné použít transformovaných rovnic (2.1.45).^{Zadávání} okrajových podmínek daleko od profilu, je uvedeno v kap. 2.5.4.

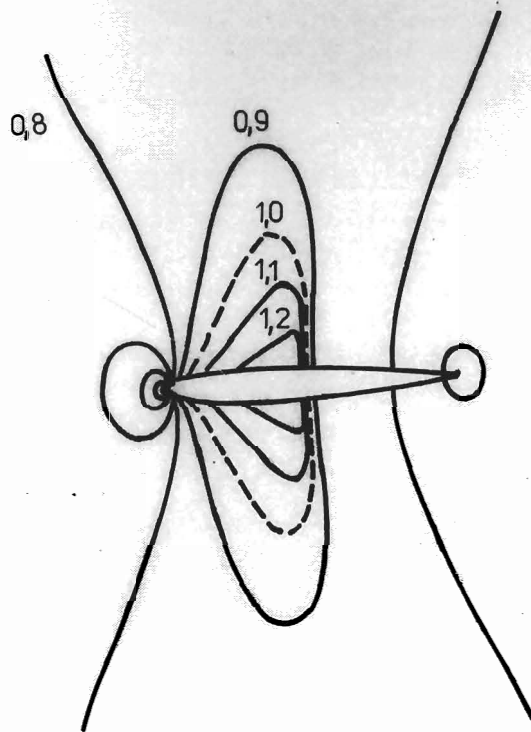
NACA 0012
GRID 128 X 32



a)

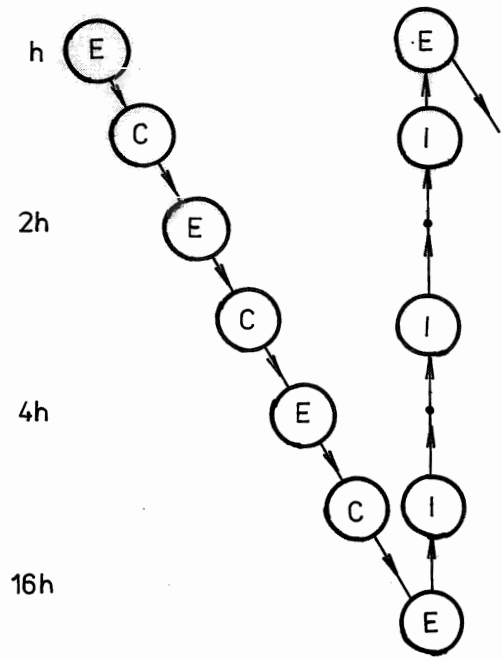


b)

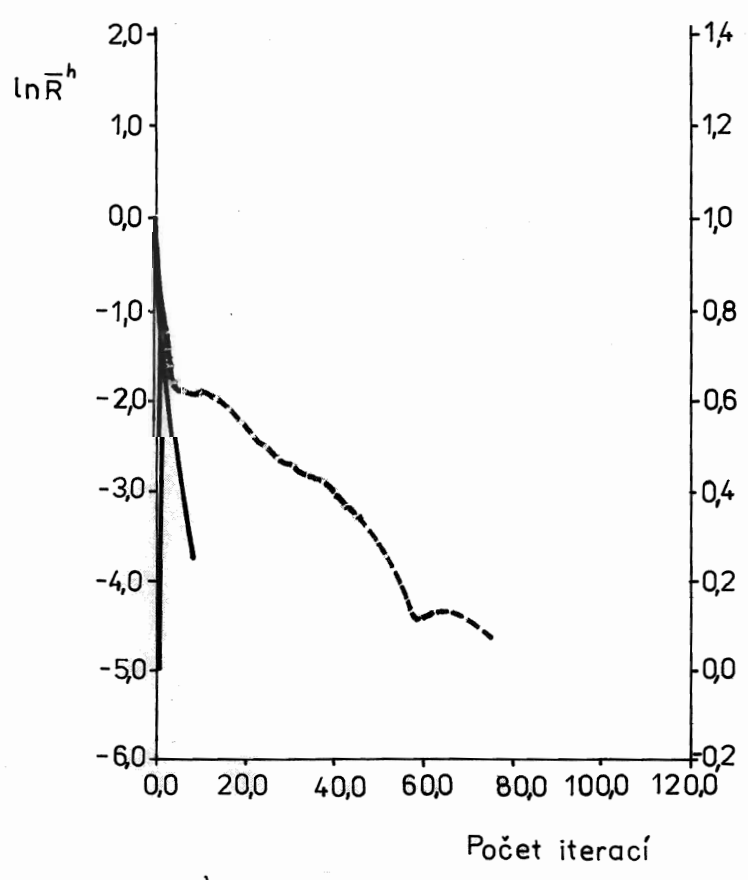


c)

Sit'

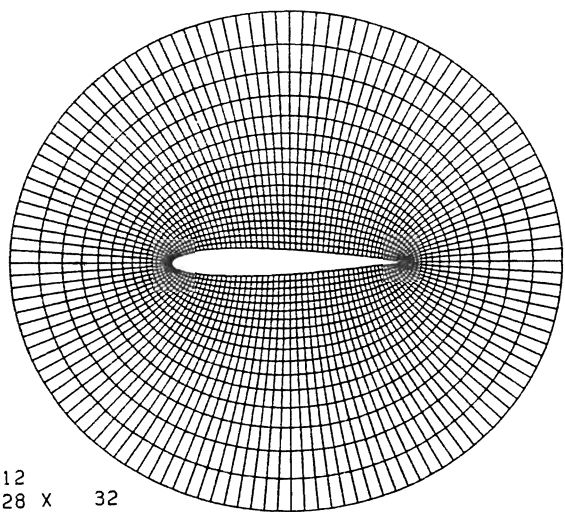


d)

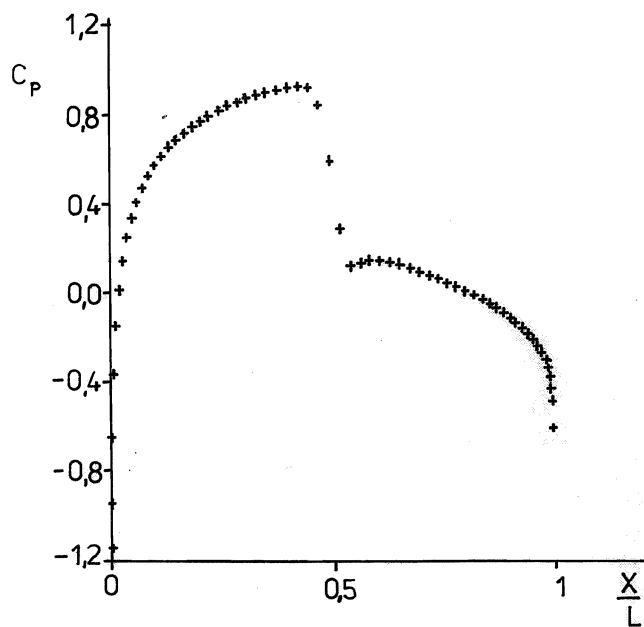


e)

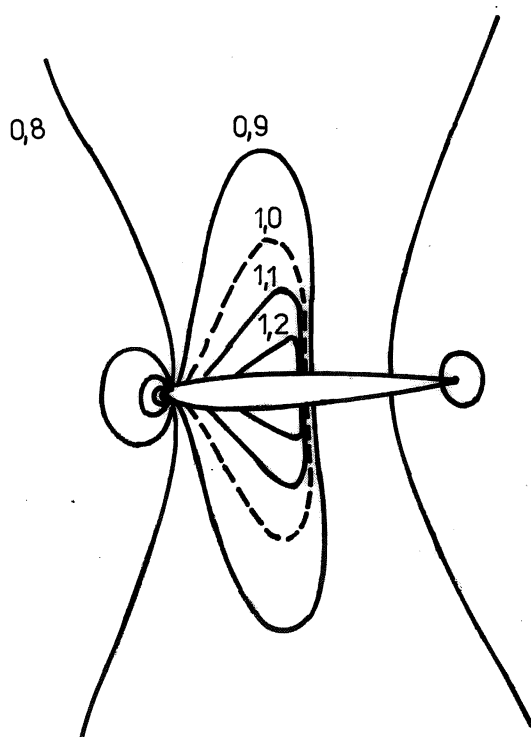
NACA 0012
GRID 128 X 32



a)



b)



c)

Obr. 2.37

Řešení Eulerových rovnic (2.5.37) v okolí profilu NACA 0012

implicitní metodou (2.5.37) (srovnej s obr. 2.19)

a) použitá síť (tzv. O - síť, nejjemnější 128 x 32)

b) průběh tlakového koeficientu C_p

c) rozložení Machova čísla v okolí profilu

d) multigrid na čtyřech sítích, (E) - výpočet (2.5.37)

(C) - výběr rezidua (2.5.56), (2.5.57),

(I) - interpolace

d) ---- rychlost konvergence na jedné síti

—— rychlost konvergence s multigridem

Interpolace odchylky $\underline{\delta u}_{ij}^{(n)}$ (2.5.30) zpět k nejjemnější síti zanáší do výpočtu chyby, které není možno ztlumit. Proto je velice důležité, aby numerické schéma mělo schopnost tlumit poruchy vysoké frekvence. Toho lze dosáhnout pomocí viskózních členů (2.5.42) se 4. derivací.

Budeme vyšetřovat stabilitu dvourozměrného modelového problému

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x^\ell} - \mu_{n,in}^{(2)} \sum_{\ell=1}^2 \Delta x^\ell \frac{\partial^2 u}{(\partial x^\ell)^2} + \mu_{n,in}^{(4)} \sum_{\ell=1}^2 (\Delta x^\ell)^3 \frac{\partial^4 u}{(\partial x^\ell)^4} = \\ = \mu_{n,ex}^{(2)} \sum_{\ell=1}^2 \Delta x^\ell \frac{\partial^2 u}{(\partial x^\ell)^2} - \mu_{n,ex}^{(4)} \sum_{\ell=1}^2 (\Delta x^\ell)^3 \frac{\partial^4 u}{(\partial x^\ell)^4} \end{aligned} \quad (2.5.58)$$

von Neumannovou metodou (2.18). Řešení předpokládáme ve tvaru

$$u_{ij}^{(n+1)} = \xi(\chi, \beta_1, \beta_2) u_{ij}^{(n)} \cdot e^{i(k_1 x^1 + k_2 x^2)}, \quad \text{kde } u_{ij}^{(n)} = \alpha_{k_1, k_2} \xi(t^n, k_1, k_2).$$

Numerický výpočet rovnice (2.5.58) provádíme metodou faktorizace (2.5.37) na pravidelné síti $k = \Delta x^1 = \Delta x^2$. Protože nám jde o útlum poruch nejkratších vlnových délek stanovíme koeficient zesílení jen pro $\beta_1 = \beta_2 = \bar{\chi}$

$$\xi(\chi, \bar{\chi}) = \frac{[4\chi(\mu_{n,im}^{(2)} + 4\mu_{n,im}^{(4)})]^2 + 2[4\chi(\mu_{n,im}^{(2)} + 4\mu_{n,im}^{(4)})] + 1 - 8\chi(\mu_{n,ex}^{(2)} + 4\mu_{n,ex}^{(4)})}{1 + 8\chi(\mu_{n,im}^{(2)} + 4\mu_{n,im}^{(4)}) + (4\chi)^2(\mu_{n,im}^{(2)} + 4\mu_{n,im}^{(4)})^2}, \quad \chi = \frac{\Delta t}{h}. \quad (2.5.59)$$

Vhodnou volbou závislostí koeficientů numerické viskozity lze dosáhnout i toho, že $\xi(\chi, \bar{\chi}) = 0$ tj.

$$\mu_{n,in}^{(2)} + 4\mu_{n,in}^{(4)} = \frac{1}{4\chi} \left(2\sqrt{2\chi(\mu_{n,ex}^{(2)} + 4\mu_{n,ex}^{(4)})} - 1 \right). \quad (2.5.60)$$

Ze závislosti (2.5.59) plyne numerickými experimenty ověřený poznatek, že implicitní tlumení ^{vyhlazuje} oscilace mnohem lépe než explicitní.

Konkrétní užití metody multigríd, kroky I - IV, je uvedeno na obr. 2.37 (Jameson, Yoon, 1986) a pro srovnání je řešeno stejné zadání jako na obr. 2.19. Rovnice (2.5.47) byly počítány implicitním schématem (2.5.37) s uvažováním obou viskozit (2.5.42). Vztah mezi implicitní a explicitní viskozitou byl určen vzorcem (2.5.60), tj.

$$\mu_{n,in}^{(2)} = \frac{1}{4\chi} (2\sqrt{2\chi\mu_{n,ex}^{(2)}} - 1) \quad , \quad \mu_{n,in}^{(4)} = \frac{1}{4\chi} (\sqrt{2\chi\mu_{n,ex}^{(4)}} - \frac{1}{4}) . \quad (2.5.61)$$

Mírou konvergence byl logaritmus střední kvadratické odchylky hustoty na jemné síti, tj.

$$\ln R^h = \ln \frac{\left[\sum_{i,j}^N (\rho_{ij}^{(m)h} - \rho_{ij}^{(n-1)h})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{N \rho_0} \quad , \quad (2.5.62)$$

kde N^h je počet uzlů a ρ_0 klidová hustota. Jak je patrné z obr. 2.37c.) je konvergence s multigrídem na čtyřech sítích s numerickou viskozitou (2.5.61) asi 15x rychlejší než při výpočtu na jedné síti. Jeden cyklus multigrídu je přibližně roven, co do práce počítače, 4/3 iterací na nejjemnější síti (protože

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{4}{3}$). Tudiž počet cyklů multigrídu, viz obr. 2.37d)

je přibližně $\frac{3}{4} \times$ (počet iterací). Dalšího zrychlení konvergence ke stacionárnímu stavu by bylo možno dosáhnout ještě užitím proměnného χ , tj. proměnného časového kroku, viz (2.5.59).

Pro řešení stacionárních Eulerových rovnic je implicitní metoda (2.5.37) poněkud náročnější než víceúrovňová explicitní metoda (2.5.24) s metodou multigrid. Avšak pro řešení nestacionárních problémů se jeví implicitní metody výhodnější.

2.5.4 Zadávání okrajových podmínek pro hyperbolické rovnice

Parciální diferenciální rovnice nazýváme hyperbolickými, jestliže v řešené oblasti existují takové reálné křivky, např. (2.4.5), (2.2.27) (ve dvourozměrných oblastech) a nebo plochy či objemy (v oblastech troj a čtyřrozměrných), tzv. charakteristiky, podél kterých není řešení nezávislé. Navíc lze ukázat (viz dále), že pro tento typ rovnic existují veličiny, tzv. invarianty, které jsou podél charakteristik konstantní. Proto není možno zadávat libovolně na hranici řešené oblasti počáteční a okrajové podmínky, viz obr. 2.21, resp. okrajové podmínky, viz obr. 2.5. Z tohoto důvodu je nezbytné zjistit, které charakteristiky vycházejí ven z řešené oblasti a odpovídající okrajovou podmínku přizpůsobit (extrapolovat) zevnitř.

Budeme vyšetřovat případ proudění na obr. 2.38a). Uvažujme nějaký bod P na hranici ∂V řešené oblasti V . Touto hranicí proud tekutiny buď vstupuje $v^1 > 0$ nebo vystupuje $v^1 < 0$. Předpokládejme, že je proudění popsáno Eulerovými rovnicemi (viz kap. 2.1.2), které z důvodu snažšího kvalitativního rozboru zjednodušíme do tvaru (2.1.36). Jestliže je tok v okolí bodu P vyrovnaný, pak rovnice (2.1.36) přechází na jednorozměrnou homogenní rovnici

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial w}{\partial x^1} = 0 \quad \underline{w} = (\varrho, v^1, v^2, v^3), \quad (2.5.63)$$

kde \tilde{A} je určeno výrazem (2.1.38)₁.

Charakteristiky této rovnice budeme hledat postupem, uvedeným v kap. 2.4. Najdeme nejprve vlastní čísla $\lambda_r = \left(\frac{dx^1}{dt}\right)_r$ matice \tilde{A} tj.

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{I} & \tilde{A} \\ \tilde{I} & \lambda \tilde{I} \end{bmatrix} = \det |\tilde{A} - \lambda \tilde{I}| = 0$$

resp.

$$\det \begin{bmatrix} v^1 - \lambda & \rho & 0 & 0 \\ \frac{c_T^2}{\rho} & (1-k)v^1 - \lambda & -kv^2 & -kv^3 \\ 0 & 0 & v^1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^1 - \lambda \end{bmatrix} = (v^1 - \lambda)^2 [(v^1 - \lambda)[(1-k)v^1 - \lambda] - (c_T^2)^2] = 0. \quad (2.5.64)$$

Existují čtyři vlastní čísla

$$\lambda_1 = v^1, \lambda_2 = v^1, \lambda_3 = v^1 - c_-, \lambda_4 = v^1 - c_+ \quad (2.5.65)$$

kde

$$c_{\pm} = \frac{kv^1}{2} \pm \left[\left(\frac{kv^1}{2} \right)^2 + c_T^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.5.66)$$

a $c_T^2 = \frac{p}{\rho}$ (... izotermická rychlost zvuku).

K těmto vlastním číslům existují vlastní vektory, pomocí nichž sestrojíme transformaci, kterou převedeme matici \tilde{A} do diagonálního tvaru a tím rovnicí (2.5.63) do tzv. kanonického tvaru.

Z tohoto kanonického tvaru lze odvodit veličiny, tzv. Riemannovy invarianty, které zůstávají podél charakteristik konstantní (Godunov, 1971) 2.27)

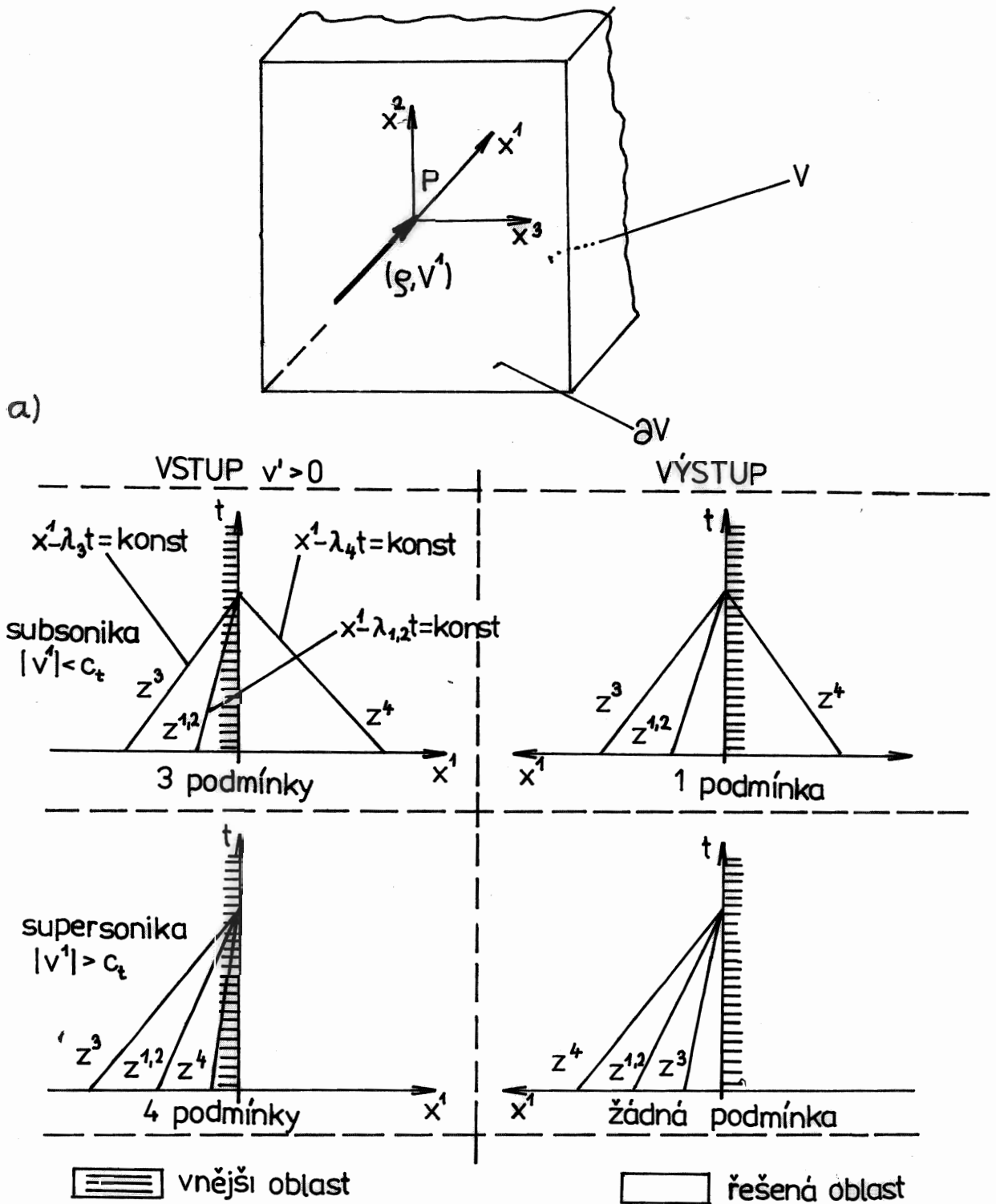
Obi. 2.38

2.27)

Transformace rovnice (2.5.63) do diagonálního tvaru je ekvivalentní s úlohou, nalézt vlastní čísla λ_j matice \tilde{A} a k nim odpovídající vlastní vektory y_j (1.3.10). Postup ukážeme na jednorozměrných Eulerových rovnicích (2.5.47)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho(v^2 + p) \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix} = 0.$$

i)



b)

Obr. 2.38

Zadávání okrajových podmínek pro hyperbolické rovnice

a) znázornění vstupních podmínek

b) počet zadávaných podmínek na vstupu, resp. výstupu při subsonickém a supersonickém proudění

← S ohledem na (2.1.24) a (2.1.44) je $p = (\kappa - 1) \rho e - \frac{\kappa - 1}{2} \rho v^2$.

Rovnici i), kterou formálně zapíšeme $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$

linearizujeme na tvar (2.5.63), viz kap. 2.1.2, $\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0$,

kde

$$\underline{u} = (\rho, \rho v, \rho e)$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & , & 1 & , & 0 \\ \frac{\kappa - 3}{2} (v)^2 & , & (3 - \kappa)v & , & \kappa - 1 \\ (\kappa - 1)v^3 - \kappa e v & , & -\frac{3}{2}(\kappa - 1)v^2 + \kappa e & , & \kappa v \end{bmatrix} \quad \text{ii)}$$

(srovnej s maticí (2.1.47) pro $v^1 = v_1^1 = v$, $\sqrt{g} = 1$, $\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} = \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} = 0$, $\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} = 0$).

Přejdeme k proměnným $\underline{w} = (\rho, v, p)$, ve kterých bude zřejmá vzájemná souvislost rychlosti pohybu v a rychlosti zvuku $c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s^{1/2}$.

Použijeme transformaci P a P^{-1} (viz (2.1.49) a (2.1.50)) tak, že

$$P \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + AP \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} = 0, \quad \text{kde } d\underline{u} = P d\underline{w}, d\underline{w} = P^{-1} d\underline{u} \quad \text{iii)}$$

vynásobíme zleva maticí inverzní P^{-1} a dostáváme konečný tvar jednorozměrných linearizovaných Eulerových rovnic v proměnných ρ, v, p

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} = 0.$$

iv)

Konkrétní tvar jednotlivých matic je

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} v, \rho, 0 \\ 0, v, \frac{1}{\rho} \\ 0, \rho c^2, v \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1, 0, 0 \\ v, \rho, 0 \\ \frac{v^2}{2}, \rho v, \frac{1}{\alpha-1} \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & , & \frac{1}{\rho} & , & 0 \\ (\alpha-1)\frac{v^2}{2} & , & -(\alpha-1)v & , & \alpha-1 \end{bmatrix}.$$

v)

Vlastní čísla matice \tilde{A} jsou dány podmínkou (2.5.64), která pro případ rovnic iv) vede na algebraickou rovnici

$$(v-\lambda)[(v-\lambda)^2 - c^2] = 0.$$

vi)

Její kořeny jsou hledaná vlastní čísla.

$$\lambda_1 = v, \quad \lambda_2 = v + c, \quad \lambda_3 = v - c.$$

vii)

Vzhledem k tomu, že se při transformaci P (vztah v)) vlastní čísla nemění, jsou vii) vlastními čísly i matice A (vztah ii)). Vypočteme k nim odpovídající vlastní vektory, viz pozn.^{L3.10}.

Tyto vektory tvoří sloupce matice N , tj.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c^2} \\ 0 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c^2} \\ 0 & \frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\rho c}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

viii)

Pomocí těchto matic lze soustavu iv) převést do diagonálního tvaru (srovnej s maticí ii) v pozn. I. 3.10),

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

ix)

kde

$$z = N^{-1} w, \quad N^{-1} \tilde{A} N = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

x)

Tvar rovnice ix) nazýváme kanonickým a proměnné z Riemannovy invarianty. V našem případě iv) jsou invarianty s ohledem na viii) rovny

$$z^1 = \rho - \frac{p}{c^2} = \text{konst.}, \quad z^2 = p + \rho c v = \text{konst.}, \quad z^3 = p - \rho c v = \text{konst.}$$

xi)

a jsou podél charakteristik $\eta^{\gamma} = \eta^{\gamma}(x, t) = \text{konst}$ definovaných rovnicemi

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_{\gamma} \quad (\text{pro } \gamma = 1, 2, 3)$$

xii)

konstantní. Rovnice ix) lze totiž zapsat do tvaru

$$\left. \frac{dz^{\gamma}(x, t)}{dt} \right|_{\eta^{\gamma} = \text{konst}} = \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial t} + \lambda_{\gamma} \frac{\partial z^{\gamma}}{\partial x} = 0 \quad (\text{pro } \gamma = 1, 2, 3, \text{ nesčítá se přes } \gamma)$$

xiii)

odkud je invariance veličin z^{γ} již zřejmá (Godunov, 1971). Invariance z^{γ} se užívá k řešení hyperbolických rovnic tzv. metodou charakteristik (Tichonov, Samarskij, 1955; Liepmann, Roshko, 1957).

Najdeme vlastní vektory y_γ I.3.10) matice \tilde{A} (2.1.38), tj.

$$\sum_{k=1}^4 \tilde{A}_{k\gamma}^i y_\gamma^k = \lambda_\gamma^i y_\gamma^i \quad (\text{nesčítá se přes } \gamma), \quad (2.5.67)$$

abychom pomocí nich mohli nalézt diagonalizující transformaci N . Tyto vlastní vektory tvoří sloupce matice N a je možno je volit tak, že dostáváme

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & 1 \\ (c_T)^2 & , & -\rho c_- & , & -\rho k v^2 & , & -\rho k v^3 \\ -(c_T)^2 & , & \rho c_+ & , & \rho k v^2 & , & \rho k v^3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \frac{k \rho v^2}{(c_T)^2} & , & \frac{k \rho v^3}{(c_T)^2} & , & \frac{c_+}{(c_T)^2(c_+ - c_-)} & , & \frac{c_-}{(c_T)^2(c_+ - c_-)} \\ 0 & , & 0 & , & \frac{1}{\rho(c_+ - c_-)} & , & \frac{1}{\rho(c_+ - c_-)} \\ 1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 1 & , & 0 & , & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.68)$$

a platí tudíž

$$N^{-1} \tilde{A} N = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4). \quad (2.5.69)$$

Vektor proměnných W pak můžeme přetransformovat do charakteristických proměnných (Riemannových invariantů) Z pomocí

$$Z = N^{-1} W. \quad (2.5.70)$$

Kanonický tvar rovnice (2.5.63) je

$$\left. \frac{dz^\gamma(x,t)}{dt} \right|_{\eta^\gamma = \text{konst}} = \frac{\partial z^\gamma}{\partial t} + \lambda_\gamma \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^1} = 0 \quad (2.5.71)$$

pro $\gamma = 1, 2, 3, 4$ - nesčítá se přes γ ,

kde $\eta^{\nu} = x^1 - \lambda_{\nu} t = \text{konst.}$ jsou charakteristiky rovnice (2.5.63)

Tudíž Riemannovy invarianty Z^{ν} jsou podél charakteristik konstantní. Této zkušenosti využíváme při určování neznámých okrajových podmínek v tom případě, kdy charakteristiky míří z řešené oblasti. Extrapolujeme podél nich řešení z řešené oblasti a určíme původní proměnné $w = Nz$ na hranici pro další časovou iteraci. Rozdělení okrajových podmínek pro různé typy proudění je na obr.2.38b).

Pro úplnost ještě uvedeme vlastní čísla linearizovaných Eulerových rovnic v obecných křivočarých souřadnicích (2.1.51). Vlastní čísla matice \tilde{A}^{kl} (2.1.52) jsou

$$\lambda_1 = \lambda_2 = v^1, \quad \lambda_{3,4} = v^1 \pm \frac{c}{\sqrt{g}} \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \xi^2}\right)^2} \quad (2.5.72)$$

a matice \tilde{B}^{kl}

$$\lambda_1 = \lambda_2 = v^2, \quad \lambda_{3,4} = v^2 \pm \frac{c}{D} \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial \xi^1}\right)^2} \quad (2.5.73)$$

Stejným postupem jako výše nalezneme vlastní vektory y^{ν} matice \tilde{N} a invarianty z .

2.6 Princip metody konečných diferencí

Princip této metody vychází z lokální formulace řešeného problému. Tím jsou dávány do relace jen hodnoty v jednom bodě prostoru, či v jednom časovém okamžiku. V metodě konečných diferencí, někdy též nazývané metoda sítí, se nahrazují derivace diferencemi a problém se tak převádí na soustavy algebraických rovnic pro neznámé hodnoty řešení u_{ij} v uzlech sítě i, j .

Každou derivaci můžeme nahradit symetrickou konečnou diferencí, tj. (viz obr. 2.39)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.6.1)$$

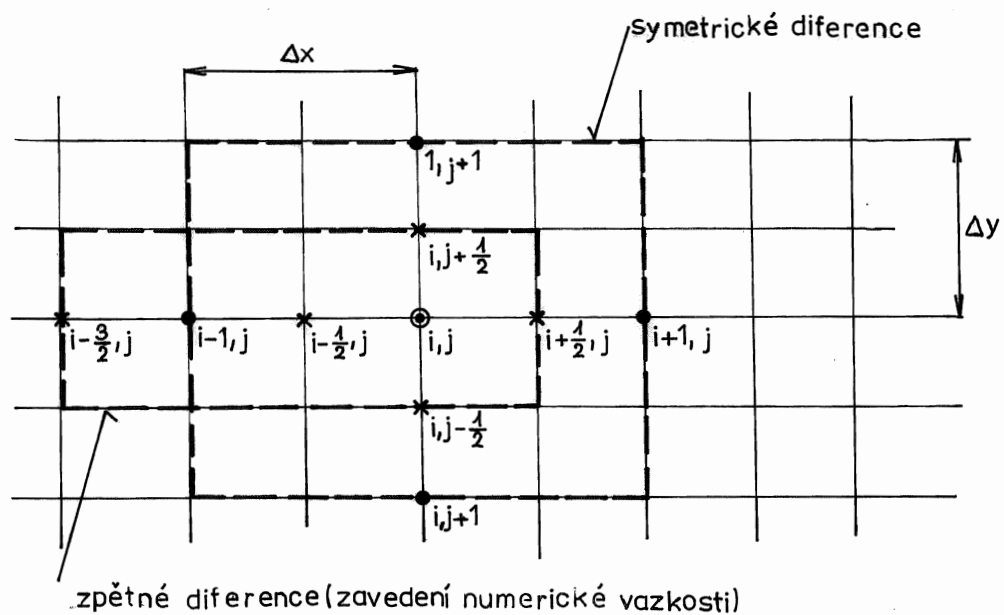
a nebo diferencí nesymetrickou. Z kritérií stability v kap. 2.4 plyne, že pro hyperbolické problémy je třeba symetrickou diferencí nahrazovat zpětnou diferencí, viz (2.4.16)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}, \text{ resp. } \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}. \quad (2.6.2)$$

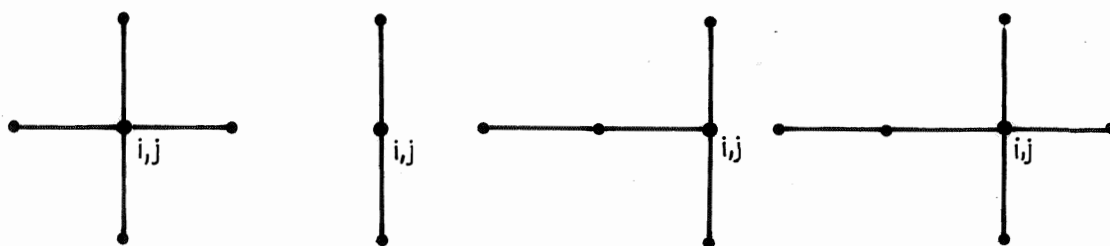
Obr. 2.39 → Obvyklý postup v metodě konečných diferencí ukážeme na rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (2.6.3)$$

pod kterou si můžeme představit rovnici bilance hmotnosti (2.3.54) pro dvourozměrný případ $f = \rho v^1$, $g = \rho v^2$. Tato rovnice mění při zvukové rychlosti svůj typ z eliptické na hyperbolickou a proto při odvozování numerického schématu je třeba přejít od symetrické difference k diferencí zpětné. To se provádí pomocí přepínací funkce



a)



b)

Obr. 2.39

Základní schémata metody konečných divergencí

a) vyjádření lokální bilance v bodě (i, j)

b) schémata pro různé typy rovnic

$$\mu_{n,ij} = \begin{cases} 0 & \text{eliptický bod} \\ 1 & \text{hyperbolický bod} \end{cases}, \quad (2.6.4)$$

kterou můžeme interpretovat jako numerickou viskozitu (2.3.81) a nebo (2.5.42)₁.

Diferenční schéma pro konzervativní zápis rovnice (2.6.3)

je

$$(1 - \mu_{n,ij}) \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \mu_{n,i-1,j} \frac{f_{i-\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{3}{2},j}}{\Delta x} - \frac{g_{i,j+\frac{1}{2}} - g_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = 0. \quad (2.6.5)$$

Síťové body realizující plně diferenní konzervativní schéma jsou uvedeny na obr. 2.39b). Existence rázového bodu je způsobena hodnotou $\mu_{n,ij} = 0$ a $\mu_{n,ij} = 1$. Diferenční schéma (2.6.5) pak můžeme upravit

$$\frac{f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \mu_{n,i-1,j} \frac{f_{i-\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{3}{2},j}}{\Delta x} - \mu_{n,ij} \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \dots \quad (2.6.6)$$

Vrátíme-li se zpět k parciálním derivacím vidíme, že řešíme v podstatě rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_n \frac{\partial f}{\partial x} \right) + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2], \quad (2.6.7)$$

která proti původní rovnici (2.6.3) obsahuje člen s vazností μ_n . Tímto způsobem se lze z podmínek stability schématu (2.4.19) pro hyperbolický problém (což souvisí s existencí charakteristiky a nutností zpětné difference) dobrat k nutnosti, zavést numerickou viskozitu, Porovnej s tlumením poruch krátké vlnové délky, kap. 2.5.3.

Metoda konečných diferencí vedla díky své jednoduchosti ke konkrétním výsledkům dříve, než metoda konečných prvků či metoda konečných objemů. Její hlavní nevýhodou je špatná aplikace okrajových podmínek na oblastech složitého geometrického tvaru. Nicméně, zkušenosti získané touto metodou obohatily obě předcházející metody v kap. 2.3 až 2.5. Jde především o souvislost numerické viskozity μ_n a zpětné difference ^{2.25)} (2.6.5), (2.6.7), na kterou v souvislosti s řešením transsonického potenciálního proudění (současný výskyt eliptické, parabolické a hyperbolické oblasti) nejdříve poukázali Godunov (1971, 1973), Jameson (1975) a Hafez, Murman, South (1978).