

**II.
ŠÍŘENÍ VLN
A
NELINEÁRNÍ JEVY
V DISIPATIVNÍCH
SYSTÉMECH**

Prof. Ing. František Maršík DrSc.

ÚT AV ČR v.v.i.

V PRAZE 1990

II.

ŠÍŘENÍ VLN A NELINEÁRNÍ JEVY V DISIPATIVNÍCH SYSTÉMECH

Obsah

3. Šíření vln

3.1 Podmínky kompatibility na pohybujících se plochách

3.1.1 Podmínky kompatibility na zakřivených singulárních plochách

3.2 Rychlost šíření singulárních ploch

3.3 Klasifikace singulárních ploch

3.4 Zákony bilance na singulárních plochách

3.5 Rázové vlny v tekutinách

3.6 Pohyb rázových vln v tekutinách

3.7 Akcelerační a slabé vlny v tekutinách

3.8 Akcelerační vlny v pevných tělesech

3.8.1 Šíření akceleračních vln. Jednorozměrné přiblížení

3.9 Rázové vlny v pevných tělesech

3.9.1 Šíření rázových vln

- 4. Nelineární jevy v disipativních systémech
 - 4.1 Základní vlastnosti konzervativních a disipativních systémů
 - 4.2 Základní typy nestabilit v disipativních systémech
 - 4.2.1 Disipativní systémy s reálným vlastním číslem procházejícím nulou
 - 4.3. Stabílní a nestabílní pohyb
 - 4.3.1 Základní vlastnosti atraktorů nelineárních disipativních systémů
 - 4.3.2 Podivné atraktory
 - 4.3.3 Základní scénáře chaosu
 - 4.4 Hydrodynamická stabilita
 - 4.4.1 Stabilita smykové vrstvy
 - 4.4.2 Stabilita proudových polí vazké tekutiny.
Formulace problému
 - 4.4.3 Stabilita Poiseuillova proudění
 - 4.4.4 Kvalitativní vlastnosti plně vyvinuté turbulence
 - 4.5 Stabilita přenosu tepla
 - 4.5.1 Přenos tepla tekutinou. Formulace problému
 - 4.5.2 Hranice stability přenosu tepla. Bénardova nestabilita
 - 4.5.3 Nestabílní přenos tepla. Lorentzův model
 - 4.6 Základní vlastnosti laminárních smykových a mezních vrstev
 - 4.6.1 Rovnice laminární mezní vrstvy
 - 4.6.2 Přibližné řešení rovnice laminární mezní vrstvy
 - 4.6.3 Model blízkého úplavu s Kármánovou vírovou řadou
 - 4.7 Transsonická nestabilita

4.7.1 Frekvence a silové účinky transsonické nestability

5. Závěr

6. Literatura

3 . Šíření vln

V moderní fyzice kontinua se pod pojem vlna zahrnuje široká třída jevů. Každá porucha, která se šíří kontinuem konečnou rychlostí je považována za vlnu (klasifikace vln viz kap. 3.3). Její šíření je obecně popsáno soustavou nelineárních parciálně diferenciálních rovnic, které nelze snadno vyřešit. Nejčastěji se tyto rovnice v okolí nějakého ustáleného stavu kontinua linearizují a pak ale platí jen pro malé poruchy, většinou sinusové tvaru. V této kapitole se soustředíme na šíření nespojitostí, tzv. singulárních ploch, jejichž rychlost šíření a amplituda závisí na materiálových nelinearitách kontinua a jejich geometrii (Truesdell, Noll, 1965, Mc Carthy, 1975). Půjde nám především o nelineární chování těchto vln, při kterém dochází k jejich zesílení.

Po klasických pracech H. Hugoniota (1887, 1889) a J. Hadamarda (1903) o šíření rázových vln v dokonalém plynu následovaly významnější práce až v padesátých a šedesátých letech dvacátého století. Jde především o práce Ericksena (1953), Thomase (1957) a o rozsáhlé dílo Colemana a jeho spolupracovníků (viz dále). Mezníkem v rozvoji této teorie byla přesná formulace podmínek kompatibility na singulárních plochách, tzv. Thomasova delta derivace. Pomocí této derivace lze dát na ploše nespojitosti do vzájemné souvislosti zákony bilance, II. zákon termodynamiky, včetně odpovídajících konstitutivních vztahů, s jejím geometrickým tvarem.

3.1 Podmínky kompatibility na pohybujících se singulárních plochách

Singulární plochou v kontinuu nazýváme každou plochu

$$\omega(x^i, t) = 0, \text{ resp. } \Omega(X^I, t) = \omega(x^i(X^I, t), t), \quad (3.1.1)$$

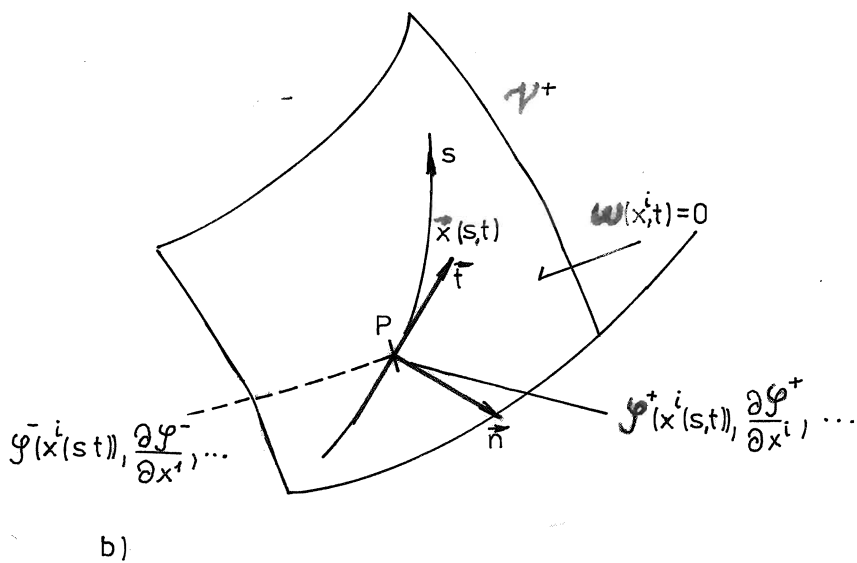
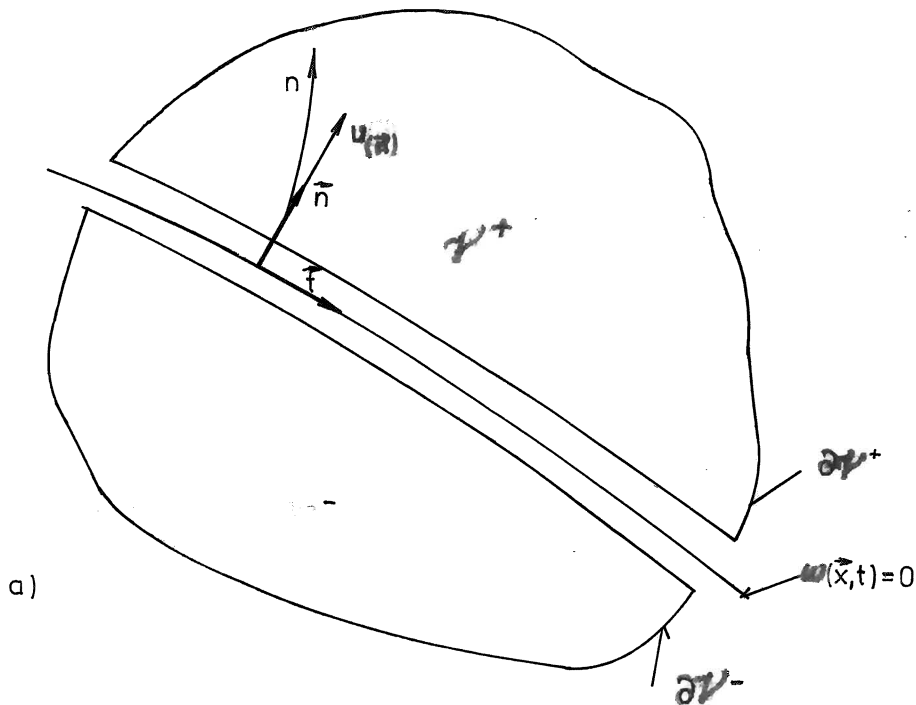
na které lze definovat normálu n_i, N_I a na níž dochází k nespojitosti nějaké fyzikální veličiny $\varphi(x^i, t)$ resp. $\phi(X^I, t)$ a nebo jejich derivaci. Požadujeme dále, aby na této ploše bylo možno zavést soustavu souřadnic ξ^1, ξ^2 a diferenciální a integrální počet. Jde tudíž o dvourozměrnou varietu, viz dodatky I.D1 a I.D2. Malými písmeny opět označujeme veličiny v prostorovém popisu (x^i, t) a velkými písmeny v materiálovém popisu (X^I, t) viz kap. I.3.1.

Nechť $\omega(x^i, t) = 0$ je pohybující se singulární plocha rozdělující oblast \mathcal{V} na dvě podoblasti $\mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-$ ohraničené plochami $\partial\mathcal{V}$ a $\partial\mathcal{V}^+$, viz obr. 3.1a) a obr. I.4.1. Nechť $\varphi(x^i, t)$ je funkce se spojitými derivacemi v podoblastech $\mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-$ a nechť funkce φ a její derivace $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ přecházejí spojitě na funkce φ^+, φ^- a $\frac{\partial\varphi^+}{\partial x^i}, \frac{\partial\varphi^-}{\partial x^i}$ při spojitém přechodu k ploše $\omega(x^i, t) = 0$. Předpokládejme dále, že na ploše existuje křivka $x^i = x^i(s, t)$ (pro $i = 1, 2, 3$), viz obr. 3.1b) a pro derivaci podél této křivky (podle parametru s) platí

br. 3.1 →

$$\frac{d\varphi^+}{ds} = \frac{\partial\varphi^+}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds}, \quad \frac{d\varphi^-}{ds} = \frac{\partial\varphi^-}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds}$$

$$(3.1.2)$$



obr.3.1

a) Singulární plocha $w(\vec{x},t)=0$ rozděluje těleso \mathcal{V} na dvě části $\mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-$ a pohybuje se rychlostí $u(\vec{n})$.

b) Veličina φ a nebo její derivace podél křivky $x^i=x^i(s,t)$ ($i=1,2,3$) vykazují na ploše w nespojitost.

V každém bodě x plochy $\omega(x^i, t) = 0$ existují limity φ^+, φ^- a $\frac{\partial \varphi^+}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi^-}{\partial x^i}$, které nemusí být sobě rovny. Jejich skok je definován

$$[[\varphi]] = \varphi^+ - \varphi^-, \quad \left[\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] \right] = \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial x^i} \quad (3.1.3)$$

(srovnej s(I.4.9)). Jestliže alespoň jeden ze skoků (3.1.3) je nenulový, pak plocha $\omega(x^i, t) = 0$ je singulární plocha vzhledem k veličině φ . Z derivací (3.1.2) plyne

$$\frac{d[[\varphi]]}{ds} = \left[\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] \right] \frac{dx^i}{ds}, \quad (3.1.4)$$

čili skok v tečných derivacích je roven tečné derivaci skoku. Dostali jsme tak výsledek důležitý pro další úlohy. Jedním důsledkem vztahu (3.1.4) je tzv. Maxwellův teorém: Skok gradientu spojitého pole $\varphi(x^i, t)$ je kolmý k singulární ploše, tj.

$$\left[\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] \right] = \bar{d} n_i, \quad \text{pro} \quad \bar{d} = \left[\left[n^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] \right] = \left[\left[\frac{d\varphi}{dn} \right] \right] \quad (3.1.5)$$

Definujeme vektor normály n plochy $\omega(x^i, t)$

$$n_i = \frac{1}{|\text{grad } \omega|} \frac{\partial \omega}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x^k} \frac{\partial \omega}{\partial x^l} \delta^{kl} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \quad (3.1.6)$$

a délkový parametr n podél normály, viz obr. 3.1a). Normála je samozřejmě stejná na obou stranách plochy, tj. $[[n^i]] = 0$.

Tečný vektor t ke křivce $x^i = x^i(s, t)$ je

$$t^i = \frac{dx^i}{ds} \quad \text{pro} \quad i, k, l = 1, 2, 3, \quad (3.1.7)$$

kde S je její délkový parametr, viz obr. 3.1b). Vzhledem k tomu, že pole $\varphi(x^i, t)$ je spojité, tj. $[[\varphi]] = 0$, je derivace (3.1.4) nulová a platnost vztahu (3.1.5) plyne z $(t^i n_i) = 0$.

Jestliže nahradíme $\varphi(x^i, t)$ ve vztahu (3.1.5) jeho derivací $\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ dostáváme vztah

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} \right] = \hat{d} n_i n_k, \text{ pro } \hat{d} = \left[n^i n^k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} \right] = \left[\frac{d^2 \varphi}{dn^2} \right], \quad (3.1.8)$$

jehož správnost opět plyne z derivace (3.1.4).

Velikost skoků \bar{d}, \hat{d} není derivací (3.1.4) nijak určena a v konkrétním případě je třeba použít zákonů bilance pro veličinu φ s příslušnými konstitutivními vztahy formulovanými pro singulární plochy, viz kap. 3.4. Vztahy (3.1.5) a (3.1.8) nazýváme podmínky kompatibility. Při jejich odvozování jsme předpokládali, že jde o rovinné plochy. V případě, že jde o plochy obecného tvaru je třeba uvažovat i jejich geometrii, zvláště podstatný je vliv zakřivení.

Vzhledem k tomu, že v materiálovém popisu je explicitně respektována existence materiálového bodu, je třeba přepsat vztahy (3.1.2) až (3.1.8) do materiálových souřadnic. Tato formulace má (vedle teoretických důvodů) největší význam při popisu dislokací a trhlin, které jsou materiálovými plochami (3.9.4). Pro skok tečných derivací veličiny $\phi(X^I, t)$ na ploše $\Omega(X^I, t) = 0$ viz (3.1.1)₁ platí

$$\frac{d[\phi]}{dS} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial X^I} \right] \frac{dX^I}{dS}, \quad \text{pro křivku } X^I = X^I(S, t), \quad I = 1, 2, 3. \quad (3.1.9)$$

Zde S je délkový parametr křivky. Normála k této ploše je s ohledem na (3.1.1)₁ rovna

$$N_K = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial X^K}}{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial X^K} \frac{\partial \Omega}{\partial X^L} \delta^{KL} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\partial x^i}{\partial X^K} n_i}{\left| \overset{-1}{\mathcal{C}} \right|}. \quad (3.1.10)$$

Při úpravě jsme použili Fingerova tenzoru $\overset{-1}{\mathcal{C}}^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial X^K} \frac{\partial x^j}{\partial X^L} \delta^{KL}$ (I.3.5.14) a definice normály v prostorovém popisu (3.1.6), tedy

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X^K} \frac{\partial \Omega}{\partial X^L} \delta^{KL} = \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \frac{\partial \omega}{\partial x^j} \overset{-1}{\mathcal{C}}^{ij} = (\text{grad } \omega)^2 n_i n_j \overset{-1}{\mathcal{C}}^{ij}. \quad (3.1.11)$$

S ohledem na polární rozklad deformačního gradientu (I.3.4.

20) píšeme

$$\overset{-1}{\mathcal{C}}^{ij} = \overset{-1}{\mathcal{C}}^i_k R^k_K \overset{-1}{\mathcal{C}}^j_l R^l_L \delta^{KL} = \overset{-1}{\mathcal{C}}^i_k \overset{-1}{\mathcal{C}}^j_l \delta^{kl} \quad (3.1.12)$$

(využíváme rovnosti (I.3.4.13) pro tenzor rotace s posunutím R^k_K viz (I.3.4.14)) a dostáváme identitu

$$\left| \overset{-1}{\mathcal{C}} \right| = \overset{-1}{\mathcal{C}}^{ij} n_i n_j = n_i n_j \overset{-1}{\mathcal{C}}^i_k \overset{-1}{\mathcal{C}}^j_l \delta^{kl} = \overset{-1}{\mathcal{C}}^i_k \overset{-1}{\mathcal{C}}^k_n = \left| \overset{-1}{\mathcal{C}} \right|^2. \quad (3.1.13)$$

Zavedli jsme vektor deformace ve směru normály n , jehož k -tá složka je

$$\frac{-1}{\mathcal{C}_n^k} = \frac{-1}{\mathcal{C}_k^i} n_i, \text{ resp. } \frac{-1}{\mathcal{C}_n^k} = \frac{-1}{\mathcal{C}_l^j} \delta^{lk} n_j. \quad (3.1.14)$$

Fyzikálně vyjadřuje deformaci jednotkové normály (3.1.6) s dodatečnou rotací při přechodu od referenčního stavu do stavu deformovaného (viz (I3.4.25) a obr. I.3.7) Velikost deformace je

$$\text{rovna } \left| \frac{-1}{\mathcal{C}_n^k} \right| = \frac{\rho_0 dA}{\rho da} \quad (3.1)$$

3.1)

Platnost vztahu plyne porovnáním definic normály (3.1.10), (I4.2.4) a (I4.2.3), totiž

$$N_K = \frac{1}{\left| \frac{-1}{\mathcal{C}_n^k} \right|} \frac{\partial x^i}{\partial X^K} \frac{da_i}{da} = \frac{dA_k}{dA} = j^{-1} \frac{\partial x^i}{\partial X^K} \frac{da_i}{dA} \quad i)$$

Při poslední úpravě jsme použili transformačního vztahu (I3.5.12)

Z výrazu i) a s ohledem na (I4.1.8) dostáváme poměr velikostí elementů plochy

$$\frac{dA}{da} = \frac{\left| \frac{-1}{\mathcal{C}_n^k} \right|}{j} = \frac{\rho}{\rho_0} \left| \frac{-1}{\mathcal{C}_n^k} \right| \quad ii)$$

kde j je jakobián pohybu materiálového bodu.

Podmínky kompatibility (3.1.5) a (3.1.8) mají v materiálovém popisu tvar

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial X^I} \right] = \bar{D} N_I, \quad \text{pro } \bar{D} = \left[N^I \frac{\partial \phi}{\partial X^I} \right] = \left[\frac{d\phi}{dN} \right] \quad (3.1.15)$$

a

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^I \partial X^K} \right] = \hat{D} N_I N_K, \quad \text{pro} \quad \hat{D} = \left[N^I N^K \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^I \partial X^K} \right] = \left[\frac{d^2 \phi}{dN^2} \right]$$

(3 .1.16)

přičemž velikost skoku derivací ve směru normály (podle délkového parametru N) není jimi určena.

3.1.1 Podmínky kompatibility na zakřivených singulárních plochách

Jak uvidíme na konci této kapitoly, závisí skok v derivaci (3.1.8) i na zakřivení plochy. Tento jev je zvláště dobře patrný při expanzi kulové plochy, kdy intenzita skoku klesá s rostoucím poloměrem. Půjde o rozšíření podmínek kompatibility (3.1.5) a (3.1.8), přičemž požadujeme, aby tyto podmínky dávaly do relace velikosti skoků funkce φ a jejich derivace napříč plochou, značíme

$$d = [\varphi] , \quad \bar{d} = \left[\left[n^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] \right] , \quad \hat{d} = \left[\left[n^i n^j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right] \right] \quad (3.1.17)$$

s jejich derivacemi po ploše, značíme

$$\frac{\partial d}{\partial \xi^\alpha} , \quad \frac{\partial^2 d}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} , \quad \frac{\partial \bar{d}}{\partial \xi^\alpha} \quad (3.1.18)$$

Zde ξ^α ($\alpha=1,2$) jsou souřadnice na ploše, dodatek I.D2.9.

Vydeme ze základního vztahu (3.1.4), který pro funkci $\varphi(x^i(\xi^\alpha), t)$ a její gradient $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$ má tvar

$$\frac{d[\varphi]}{ds} = \frac{\partial d}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{ds} = d_l \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{ds} \quad (3.1.19)$$

$$\frac{d \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right]}{ds} = \frac{d d_k}{ds} = \frac{\partial d_k}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{ds} = \frac{\partial d_k}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{ds} \quad (3.1.20)$$

resp.

$$\frac{\partial d}{\partial \xi^\alpha} = d_k \frac{\partial x^k}{\partial \xi^\alpha} \quad , \quad \frac{\partial d_k}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial d_k}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\alpha} \quad (3.1.21)$$

při označení

$$d_k = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right] \quad , \quad \bar{d}_k = \left[n^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^l \partial x^k} \right] \quad (3.1.22)$$

Vztahy (3.1.21) jsou podmínky kompatibility vyjádřené pomocí veličin d_k , $\frac{\partial d_k}{\partial x^l}$. Naším cílem je, veličiny (3.1.22) a jejich derivaci vyjádřit pomocí veličin (3.1.17), (3.1.18).

Vynásobíme podmínky (3.1.21) výrazem $a^{\alpha\beta} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta}$ a použijeme identity (D2.125). Tudiž s ohledem na označení (3.1.22) dostáváme podmínky kompatibility na zakřivených singulárních plochách

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right] = d_j = \bar{d}_j n_j + \delta_{jl} a^{\alpha\beta} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial d}{\partial \xi^\alpha} \quad (3.1.23)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right] = \frac{\partial d_j}{\partial x^i} = \bar{d}_j n_i + \delta_{il} a^{\alpha\beta} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial d_k}{\partial \xi^\alpha} \quad (3.1.24)$$

Podmínka (3.1.24) je symterická v indexech ij , takže z rovnosti $\left(\frac{\partial d_j}{\partial x^i} - \frac{\partial d_i}{\partial x^j} \right) n^i = 0$ plyne

$$\bar{d}_j = \hat{d}_j n_j + \delta_{jl} n^k a^{\alpha\beta} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial d_k}{\partial \xi^\alpha} \quad (3.1.25)$$

zde $a_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta} g_{ij}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) je metrický tenzor singulární plochy.

Při úpravě jsme využili toho, že $\underline{n} \cdot \underline{t} = 0$ a $\bar{d}_i n^i = \hat{d}$, viz (3.1.17)₃.

Derivaci $\frac{\partial d_j}{\partial \xi^\alpha}$ v podmínce kompatibility (3.1.24) je třeba nahradit pomocí veličin (3.1.17) a (3.1.18). Derivujeme vztah (3.1.23) podle ξ^α , tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_j}{\partial \xi^\alpha} &= \frac{\partial(\bar{d}n_j)}{\partial \xi^\alpha} + \delta_{jl} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left(a^{\alpha\beta} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial d}{\partial \xi^\beta} \right) = \\ &= n_j \frac{\partial \bar{d}}{\partial \xi^\alpha} + \bar{d} \frac{\partial n_j}{\partial \xi^\alpha} + \delta_{jl} a^{\alpha\beta} \left[\left(\frac{\partial x^l}{\partial \xi^\alpha} \right)_{;\alpha} \frac{\partial d}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial d}{\partial \xi^\beta} \right)_{;\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Uvážíme, že vedle derivací (D2.109) přecházejí na derivaci kovariantní (D2.111) i parciální derivace vektorů s komponentami vyjádřenými v bázi plochy (D2.108)₂, např. kartézské složky $\frac{\partial x^l}{\partial \xi^\alpha}$ bázevého vektoru, či složky gradientu $\frac{\partial d}{\partial \xi^\beta}$. Pomocí Gaussovy rovnice (D2.136) a Weingartenovy rovnice (D2.139) plochy upravíme (3.1.26) do tvaru

$$\frac{\partial d_j}{\partial \xi^\alpha} = n_j \frac{\partial \bar{d}}{\partial \xi^\alpha} - \bar{d} \delta_{jl} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\alpha} b^r{}_\alpha + \delta_{jl} a^{\alpha\beta} \left[b_{\alpha\alpha} n^l \frac{\partial d}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial d}{\partial \xi^\beta} \right)_{;\alpha} \right]. \quad (3.1.27)$$

Pro vyjádření (3.1.25) je třeba určit hodnotu skalárního součinu

$$n^i \frac{\partial d_j}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \bar{d}}{\partial \xi^\alpha} + b^r{}_\alpha \frac{\partial d}{\partial \xi^\beta}. \quad (3.1.28)$$

Zde $b_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} n_i$ jsou koeficienty druhé základní formy plochy vyjadřující její křivost.

Dosazením vztahů (3.1.25) a (3.1.28) do podmínky kompatibility (3.1.24) dostáváme její konečný tvar

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^i} \right] &= \hat{d} n_j n_i + (\delta_{jl} n_i + \delta_{il} n_j) a^{\alpha\beta} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\beta} \left(\frac{\partial \bar{d}}{\partial \xi^\alpha} + b^{\bar{\beta}}{}_\alpha \frac{\partial d}{\partial \xi^{\bar{\beta}}} \right) + \\ &+ \delta_{il} \delta_{jk} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^{\bar{\alpha}}} a^{\alpha\beta} a^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \left[\left(\frac{\partial d}{\partial \xi^{\bar{\beta}}} \right)_{;\alpha} - \bar{d} b^{\bar{\beta}}{}_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Tento vztah nazýváme Thomasova iterovaná geometrická podmínka kompatibility (Truesdell, Toupin, 1960).

Podmínky (3.1.23) a (3.1.29) jsou vyjádřeny pouze pomocí velikostí skoků napříč plochou (3.1.17) a derivací těchto skoků po ploše. Velikost skoku gradientu \bar{d} v podmínce (3.1.23) určíme ze skalárního součinu

$$\delta^{ji} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] = \left[\frac{d\varphi}{dn} \right]^2 = (\bar{d})^2 + a^{\alpha\beta} \frac{\partial d}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial d}{\partial \xi^\beta}. \quad (3.1.30)$$

Velikost skoku \hat{d} z podmínky (3.1.29) nalezneme zúžením

$$\begin{aligned} \left[\delta^{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right] &= \hat{d} + a^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial d}{\partial \xi^\beta} \right)_{;\alpha} - a^{\alpha\beta} b^{\bar{\beta}}{}_\alpha \bar{d} = \\ &= \left[\frac{d^2 \varphi}{dn^2} \right] + a^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial d}{\partial \xi^\beta} \right)_{;\alpha} - b^{\bar{\alpha}}{}_\alpha \left[\frac{d\varphi}{dn} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Porovnáním s podmínkami kompatibility na rovinných singulárních plochách (3.1.5) a (3.1.8) vidíme vliv zakřivení. V podmínce

(3.1.31) vystupuje stopa tenzoru b^α_α , která je rovna střední křivosti plochy (ID2.140). Stejným postupem odvodíme podmínky (3.1.23) a (3.1.29) v materiálových souřadnicích X^I, Ξ^α , (ID2.107)₂. Jejich tvar je stejný, jen nahradíme $x^i \rightarrow X^I$ a $f^\alpha \rightarrow \Xi^\alpha$ (analogicky podmínkám (3.1.15), (3.1.16)).

3.2 Rychlost šíření singulárních ploch

Singulární plocha (3.1.1) se pohybuje rychlostí u , která se určí z rovnice $\frac{\partial \omega}{\partial t} + u^i \frac{\partial \omega}{\partial x^i} = 0$. S ohledem na vektor normály (3.1.6) dostáváme pro rychlost postupu plochy ve směru normály v prostorovém popisu vztah

$$u_{(n)} = u^i n_i = - \frac{\frac{\partial \omega}{\partial t}}{\left(\delta^{kl} \frac{\partial \omega}{\partial x^k} \frac{\partial \omega}{\partial x^l} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.2.1)$$

viz obr. 3.1a). Je-li singulární plocha materiálovou plochou (13.9.9), pak je rychlost postupu u rovna rychlosti v materiálového bodu této plochy (13.9.13). Takovéto "nepropustné" plochy nazýváme kontaktní, na rozdíl od ploch nespojitosti, kterými materiálové body procházejí, viz kap. 3.3.

V materiálovém popisu $\Omega = \Omega(X^I, t)$ nazýváme rychlost postupu plochy

$$U_{(N)} = U^I N_I = - \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial t}}{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial X^K} \frac{\partial \Omega}{\partial X^L} \delta^{KL} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.2.2)$$

rychlostí šíření. Ze vztahu (3.2.2) plyne ^{3.2)}, že $U_{(N)}$ závisí na X^I , tj. na počáteční poloze materiálového bodu. Dostáváme tak obecně nekonečně mnoho rychlostí šíření $U_{(N)}$ (Truesdell, Toppin, 1960)

3.2) Předpokládejme např. kulovou singulární plochu

$$\Omega(X^I, t) = \delta_{KL} X^K X^L - c^2 t^2 = 0, \quad i)$$

její rychlost šíření je podle (3.2.2)

$$U_{(N)} = c = \frac{(\delta_{kl} X^k X^l)^{\frac{1}{2}}}{t} \quad \text{ii)}$$

Někdy se také nazývá "vnitřní" rychlostí vlny.

Budeme-li přítomnost (tj. čas t) považovat za počátek pohybu materiálového bodu (tj. za čas $t=0$), pak jeho poloha bude $X^I = \delta^I_i x^i$. Za těchto předpokladů je rovnice plochy

$$\omega(x^i, t) = \Omega(X^I, t) = 0, \quad \text{pro } X^I = \delta^I_i x^i \quad (3.2.3)$$

a vztah (3.2.2) dává tzv. lokální rychlost šíření singulární plochy, kterou značíme U . Tuto rychlost vypočteme tak, že dosadíme (3.2.3) do (3.2.1) s ohledem na (3.2.2) (pro $U_{(N)} = U$) dostáváme

$$U_{(n)} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial t}}{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial X^k} \frac{\partial \Omega}{\partial X^l} \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \frac{\partial X^l}{\partial x^l} \delta^{kl} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial t} U}{\frac{\partial \Omega}{\partial t}} \quad (3.2.4)$$

Odtud pak plyne konečný vztah pro lokální rychlost šíření

$$U = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial t} U_{(n)}}{\frac{\partial \omega}{\partial t}} = - \frac{\dot{\omega}}{\left(\delta^{kl} \frac{\partial \omega}{\partial x^k} \frac{\partial \omega}{\partial x^l} \right)^{\frac{1}{2}}} = U_{(n)} - \dot{x}_{(n)}, \quad (3.2.5)$$

protože

materiálová derivace rovnice plochy (3.2.3) je

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_{X^I} = \dot{\omega}(x^i, t) = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \dot{x}^i \frac{\partial \omega}{\partial x^i}. \text{ Dále pak za normálovou rychlost}$$

jsme dosadili ze vztahu (3.2.1) a označili $\dot{x}_{(n)} = \dot{x}^i n_i$,

kde $\dot{x}^i (=v^i)$ je rychlost toho materiálového bodu (I.3.1.2), který byl v čase t na singulární ploše (3.2.3) (měřeno v pevné soustavě souřadnic $x^i (i=1,2,3)$). Rychlost v^i je obvyklá unášivá rychlost prostředí. Vlna (3.2.3) se šíří vzhledem k prostředí rychlostí U . [Vztah mezi rychlostí šíření $U_{(N)}$ a lokální rychlostí šíření U plyne přímo z (3.2.2). Obecná rovnice plochy je

$$\omega(x^i, t) = \Omega(X^I, t) = 0 \quad \text{pro } x^i = x^i(X^I, t). \quad (3.2.6)$$

Použijeme-li vztahů (3.1.11) a (3.1.13) a s ohledem na (3.2.5) platí

$$U_{(N)} = - \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial t} \Big|_{x^i}}{|\text{grad } \omega| \Big|_{\frac{c}{n}}^{-\frac{1}{2}}} = - \frac{\dot{\omega}}{|\text{grad } \omega| \Big|_{\frac{c}{n}}^{-\frac{1}{2}}} = \frac{U}{\Big| \frac{c}{n} \Big|}. \quad (3.2.7)$$

Tyto dvě rychlosti se liší velikostí deformace ve směru normály. Jsou-li deformace malé je hodnota $\Big| \frac{c}{n} \Big|$ prakticky rovna jedné, viz pozn. 3.1) a rychlost $U_{(N)} = U$. Pro slabé a akcelerační vlny, viz kap. 3.3, je tato rychlost $U_{(N)}$ rovna rychlosti zvuku a značíme ji c . Pro rázové vlny je obecně $U_{(N)} \neq U \neq c$.

Hledáme rychlost změny funkce $\varphi(x^i, t)$ na ploše (3.2.6) pohybující se rychlostí (3.2.1). Zajímá nás jen ta rychlost, kterou naměří pozorovatel pohybující se s plochou na jedné, či druhé straně, viz obr. 3.1b). Tato rychlost změny bude dána součtem časové změny $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ v bodě prostoru x^i a změny v důsledku pohybu plochy ve směru normály. Definujeme operátory

$$\frac{\delta \varphi^+}{\delta t} = \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} + u_{(n)} n^k \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k}, \quad \frac{\delta \varphi^-}{\delta t} = \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} + u_{(n)} n^k \frac{\partial \varphi^-}{\partial x^k}, \quad (3.2.8)$$

které se nazývají Thomasova delta derivace (Mc Carthy, 1975).

Značíme funkci $\varphi(x^i, t) = \varphi(x^i(X^I, t), t) = \phi(X^I, t)$.

Rychlost šíření plochy $U_{(n)}$ může mít obecně na každé straně plochy různou hodnotu a v materiálovém popisu definujeme operátory rychlosti změny takto

$$\frac{\delta_D^+ \phi^+}{\delta t} = \dot{\phi}^+ + U_{(n)}^+ N^K \frac{\partial \phi^+}{\partial X^K}, \quad \frac{\delta_D^- \phi^-}{\delta t} = \dot{\phi}^- + U_{(n)}^- N^K \frac{\partial \phi^-}{\partial X^K}, \quad (3.2.9)$$

kde $\dot{\phi}^\pm = \left. \frac{\partial \phi^\pm}{\partial t} \right|_{X^I}$ je obvyklá materiálová derivace (I.3.7.1)

Vyjdeme z předpokladu, že delta derivace (3.2.8) a (3.2.9) existují na nějaké křivce na obou stranách singulární plochy. Za stejných předpokladů a stejným postupem jakým jsme odvodili vztah (3.1.4) pro skok tečných derivací, nalezneme tzv. kinematické podmínky kompatibility.

V případě, že na singulární ploše je nespojitá rychlost materiálového bodu (jde o rázovou vlnu, viz kap. 3.3) je na ní rozdíl rychlosti změn veličiny φ (3.2.8) roven

$$\frac{\delta [\varphi]}{\delta t} = \frac{\delta \varphi^+}{\delta t} - \frac{\delta \varphi^-}{\delta t} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + u_{(n)} \left[n^l \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right]. \quad (3.2.10)$$

Pro skok materiálové derivace (s ohledem na (3.2.9)) odvodíme

$$[\dot{\phi}] = \frac{\delta[\phi]}{\delta t} - \left[U_{(n)} N^k \frac{\partial \phi}{\partial X^k} \right] \quad (3.2.11)$$

Do prostorového popisu přejdeme pomocí vztahů (3.1.10), (3.2.7) a (3.1.12) až (3.1.14), skok materiálové derivace je vyjádřen ve tvaru

$$\begin{aligned} [\dot{\psi}] &= \frac{\delta[\psi]}{\delta t} - \left[U n^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right] = \\ &= \frac{\delta[\psi]}{\delta t} - U \left[n^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right] - [U] n^k \frac{\partial \psi^+}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Tuto podmínku jsme mohli odvodit přímo z definice materiálové derivace (I.3.7.4). Vztahy (3.2.10) až (3.2.12) jsou hledané obecné kinematické podmínky kompatibility pro rázové vlny.

Tyto podmínky se zjednoduší pro případ, kdy rychlost šíření U a rychlost materiálového bodu $\dot{x}_{(n)}^i$ jsou na singulární ploše spojité (jde o akcelerační vlny, viz kap. 3.3). Potom pro $\phi = x^i(X^I, t)$ z (3.2.11) užitím (3.1.10) a (3.2.7) plyne

$$[\dot{x}^i] = \frac{\delta[\dot{x}^i]}{\delta t} - \left[U_{(n)} N^k \frac{\partial x^i}{\partial X^k} \right] = \frac{\delta[\dot{x}^i]}{\delta t} - [U] n^i = 0, \quad (3.2.13)$$

tj. trajektorie je spojitá
nek lze odvodit vztah pro

$$\frac{\delta[x^i]}{\delta t} = 0 \quad . \text{ Za těchto podmí-}$$

$$\frac{\delta[\varphi]}{\delta t}, \quad (3.2.14)$$

který je ~~ekvivalentní (3.1.4)~~ a je výchozí pro nalezení podmínek kompatibility pro akcelerační vlny (viz kap. 3.3). V prostorovém popisu mají tvar

$$\frac{\delta[\varphi]}{\delta t} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + u_{(n)} \left[n^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] = [\dot{\varphi}] + U \left[n^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right], \quad (3.2.15)$$

kde

$$[\dot{\varphi}] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] + \dot{x}_{(n)}^i \left[n^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right],$$

který lze převést do souřadnic materiálových, tj.

$$\frac{\delta_D[\phi]}{\delta t} = [\dot{\phi}] + U_{(N)} \left[N^I \frac{\partial \phi}{\partial X^I} \right]. \quad (3.2.16)$$

Z hlediska praktického výpočtu bývá výhodnější vyjádřit podmínky (3.2.15), (3.2.16) pomocí derivace podél souřadnice n , resp. N , kolmé k singulární ploše, viz obr. 3.1a). Velikost n , resp. N , je vzdálenost měřená ve směru normály, tj.

$$dN = \underline{N} d\underline{X} = \frac{n_i \frac{\partial x^i}{\partial X^K} \frac{\partial X^K}{\partial x^l} dx^l}{\left| \frac{-\frac{1}{2}}{n} \right|} = \frac{n_i dx^i}{\left| \frac{-\frac{1}{2}}{n} \right|} = \frac{dn}{\left| \frac{-\frac{1}{2}}{n} \right|}. \quad (3.2.17)$$

Při odvození jsme vyšli od transformace elementu křivky (3.5.1) a vztahu pro normálu (3.1.10). Vztah (3.2.17) popisuje velikost deformace ve směru normály při přechodu od referenčního (počátečního) stavu do stavu aktuálního (srovnej s (3.1.14)). Uvažíme,

že

$$[\varphi(x^i, t)] = [\varphi(x^i(X^I, t), t)] = [\phi(X^I, t)]$$

a lokální rychlost posuvu singulární plochy vůči prostředí (3.

2.5) je spojitá, pak $dn = U dt$ a podmínka (3.2.15) má tvar

$$\frac{\delta[\varphi]}{\delta t} = U \frac{d[\varphi]}{dn} = U \frac{d[\phi]}{dN} \frac{dN}{dn} = U \frac{d[\phi]}{dN} = \frac{\delta_b[\phi]}{\delta t} .$$

(3.2.18)

Vzájemný vztah rychlosti šíření v deformovaném a nedeformovaném stavu je vyjádřen rovnicí (3.2.7).

Kinematické podmínky (3.2.11), (3.2.12), resp. (3.2.15), (3.2.16) spolu s podmínkami geometrickými (3.1.5), (3.1.8) a (3.1.15), (3.1.16) jsou východiskem ke studiu šíření akceleračních a rázových vln.

3.3 Klasifikace singulárních ploch

Označili jsme $\varphi(x^i, t) = \Phi(X^I, t)$ fyzikální veličinu definovanou na singulární ploše (3.1.1). Klasifikaci těchto ploch budeme provádět podle řádu spojitosti derivace trajektorie materiálového bodu, tj. pro $\Phi(X, t) = x^i(X^I, t)$.

Říkáme, že singulární plocha $\Omega(X^K, t) = 0$ je vlna řádu N , jestliže má funkce $x^i(X^K, t)$ následující vlastnosti:

- 1) $x^i(X^K, t)$ a její $N-1$ parciální derivace podle X^K jsou spojité funkce X^K a t pro všechna X^K, t
- 2) N -tá a vyšší parciální derivace funkce $x^i(X^K, t)$ mají na ploše skokovou nespojitost.

Singulární plocha 1. řádu se nazývá rázová vlna. Tudiž v rázové vlně je trajektorie materiálového bodu spojitá. Je-li jeho normálová složka rychlostí nespojitá, tj. $[[\dot{x}^i_n]] \neq 0$ a tangenciální složka spojitá, nazýváme takovou vlnu podélnou rázovou vlnou nebo krátce jen rázovou vlnou. Je-li však $[[\dot{x}^i_n]] = 0$ ale tangenciální složka má nespojitost, tj. $[[x^i]] \neq 0$ nazýváme takovou vlnu ~~vlnou~~ vrstvou. Podmínky kompatibility (3.1.15), (3.2.16) dávají pro $\Phi = x^i$ vztahy

$$\left[\frac{\partial x^i}{\partial X^I} \right] = D^i N_I, \quad D^i = \left[N^I \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \right], \quad [[\dot{x}^i]] = -U_{(N)} D^i. \quad (3.3.1)$$

V derivaci (3.2.11) jsme využili toho, že trajektorie je spojitá, tj. $[[x^i]] = 0$, $[[U_{(N)}]] = 0$ a zjistili jsme, že gradient trajektorie již spojitý není a jeho skok D^i souvisí s velikostí skoku rychlosti $[[\dot{x}^i]]$ na rázové vlně. Skok rychlosti

označíme $[[\dot{x}^i]] = [[v^i]] = d^i$ a nazýváme ho vektorovou amplitudou, či intenzitou rázové vlny.

Vyjádříme podmínku (3.3.1) v prostorovém zápisu. Vezmeme-li stav před vlnou jako referenční $(x^i)^+ = \delta^i_I X^I$ dostaneme rychlost šíření vlny U^+ . Stejně tak můžeme vzít stav za vlnou jako referenční, pak $(x^i)^- = \delta^i_I X^I$ a U^- . Potom s ohledem na (3.2.11) a (3.2.7) pro intenzitu rázové vlny platí

$$[[\dot{x}^i]] = -[[U]]n^i, \quad \text{resp. } [[\dot{x}_{(n)}^i]] = -[[U]] = U_2 - U_1 \quad (3.3.2)$$

viz obr. 3.2. Stejný výsledek dostáváme z podmínky (3.2.12) pro $\varphi = x^i$. Pro zakřivenou rázovou vlnu vyjdeme z podmínky (3.1.23). Avšak vzhledem k tomu, že $d^i = [[x^i]] = 0$ dostáváme opět (3.3.2).

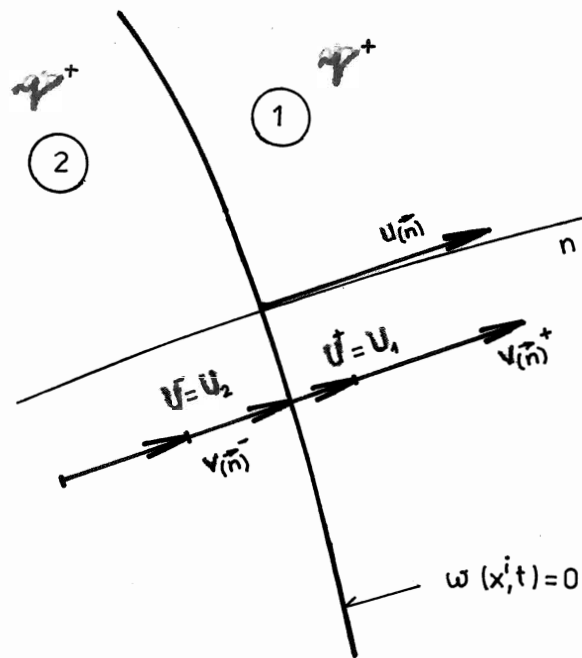
br. 3.2 → Singulární plocha 2. řádu se nazývá akcelerační vlnou. Pro ni je spojitá jak trajektorie, tak i její gradient. Využijeme této vlastnosti a dosadíme za ϕ postupně x^i (v rovnici (3.1.16) a $\frac{\partial x^i}{\partial X^K}$ (v 3.2.16). Výsledkem jsou podmínky kompatibility

$$\left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial X^I \partial X^K} \right] = \hat{D}^i N_I N_K, \quad \text{pro } \hat{D}^i = \left[N^I N^K \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^I \partial X^K} \right] \quad (3.3.3)$$

$$[[\dot{F}^i_K]] = \left[\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial X^K} \right] = -U_{(n)} \left[N^I \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^I \partial X^K} \right] = -U_{(n)} \hat{D}^i N_K. \quad (3.3.4)$$

Podobně i dosazením $\phi = \dot{x}^i$ do (3.2.16) a pomocí (3.3.4) odvodíme vztah pro skok zrychlení

$$[[\ddot{x}^i]] = U_{(n)}^2 \hat{D}^i = a^i \quad (3.3.5)$$



Obr.3.2

Singulární plocha $\omega(x^i, t) = 0$ se pohybuje rychlostí $U(\vec{n})$ vůči pevné soustavě souřadnic.

Veličinu a^i nazýváme vektorovou amplitudou akcelerační vlny. Je-li a^i rovnoběžná s normálou plochy, tj. $a^i = |a|n^i$ pak říkáme, že je vlna podélná. V případě, že je vektor a^i kolmý na normálu, tj. $a^i n_i = 0$, tak ji nazýváme příčnou vlnou. Pro zakřivené vlny vyjdeme z podmínky (3.1.29).

Vlny vyššího řádu $N \geq 3$ se nazývají slabé vlny. Předpokládá se, že roste-li amplituda vlny řádu N nade všechny meze, tak přechází ve vlnu řádu $N-1$. Tudiž akcelerační vlna přechází v rázovou vlnu a naopak, zeslábne-li rázová vlna, tak přejde ve vlnu akcelerační. Z tohoto důvodu budeme vyšetřovat časovou změnu jejich amplitudy a hledat podmínky jejího nárůstu.

Skok zrychlení (3.3.5) na singulární ploše považujeme za amplitudu vlny a^i . Potom časová změna této amplitudy vůči ploše je určena Thomasovou delta derivací (3.2.16). V materiálových souřadnicích platí

$$\frac{\delta_D [\ddot{x}^i]}{\delta t} = \frac{\delta_D a^i}{\delta t} = [\ddot{x}^i] + U_{(N)} \left[N^I \frac{\partial \ddot{x}^i}{\partial X^I} \right] \quad (3.3.6)$$

Poslední člen upravíme tak, že provedeme derivaci podmínky (3.3.4), kterou pak vynásobíme N^K . Protože $\frac{\delta_D N^K}{\delta t} = 0$, tj. normála se vzhledem k singulární ploše nemění, dostáváme

$$\left[N^K \frac{\partial \ddot{x}^i}{\partial X^K} \right] = -U_{(N)} \left[N^K N^I \frac{\partial^2 \ddot{x}^i}{\partial X^K \partial X^I} \right] - \frac{\delta_D}{\delta t} \left(\frac{a^i}{U_{(N)}} \right) \quad (3.3.7)$$

Dosazením do (3.3.6) plyne konečný tvar podmínky kompatibility pro akcelerační vlny

$$2 \frac{\delta_D a^i}{\delta t} - \frac{a^i}{U_{(N)}} \frac{\delta_D U_{(N)}}{\delta t} = \llbracket \ddot{x}^i \rrbracket - U_{(N)}^2 \llbracket N^K N^I \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^K \partial X^I} \rrbracket. \quad (3.3.8)$$

Stejným postupem odvodíme podmínky kompatibility i pro časový vývoj intenzity rázové vlny (3.3.1) (Truesdell, Toupin, 1960, Buckens, 1971), totiž

$$2 \frac{\delta_D \llbracket \dot{x}^i \rrbracket}{\delta t} - \frac{\llbracket x^i \rrbracket}{U_{(N)}} \frac{\delta_D U_{(N)}}{\delta t} = \llbracket \ddot{x}^i \rrbracket - U_{(N)}^2 \llbracket N^K N^I \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^K \partial X^I} \rrbracket. \quad (3.3.8)_1$$

Tyto podmínky jsou čistě kinematické. Vyjádřením pravé strany (3.3.8)₁ pomocí zákonů bilance a konstitutivních vztahů obdržíme diferenciální rovnici pro amplitudy $a^i(t)$, $d^i(t)$.

V prostorových souřadnicích mají podmínky (3.3.3) a (3.3.4) s ohledem na (3.1.15) tvar

$$\llbracket \frac{\partial^2 x^i}{\partial X^I \partial X^K} \rrbracket = \frac{a^i}{U^2} \frac{\partial x^k}{\partial X^I} \frac{\partial x^l}{\partial X^K} n_k n_l \quad (3.3.9)$$

$$\llbracket \dot{F}^i_K \rrbracket = \llbracket \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \rrbracket \frac{\partial x^k}{\partial X^K} = -\frac{a^i}{U} \frac{\partial x^k}{\partial X^K} n_k \quad (3.3.10)$$

resp.

$$\llbracket \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \rrbracket = -\frac{a^i}{U} n_k. \quad (3.3.10)_1$$

Kinematická podmínka (3.3.8) nabývá vzhledem ke vztahům (3.2.13), (3.2.10), (3.2.7) a definici normály (3.1.11) (při $\llbracket N^K \rrbracket = 0$) konečné podoby

$$2 \frac{\delta a^i}{\delta t} - \frac{a^i}{U} \frac{\delta U}{\delta t} = [\ddot{x}^i] - U^2 C^{lr} C^{js} \left[n_k n_j \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^r \partial x^s} \right]. \quad (3.3.11)$$

Fingerův tenzor $C^{kr} = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^r}{\partial X^R} \delta^{KR}$

se pro případ, kdy současný stav tělesa je stavem referenčním (např. pro tekutiny, viz kap. I.6), tj. pro $x^k = \delta^k_K X^K$ redukuje na tenzor jednotkový δ^{kr} . Tudiž podmínku (3.3.11) můžeme psát v jednodušším tvaru

$$2 \frac{\delta a^i}{\delta t} - \frac{a^i}{U} \frac{\delta U}{\delta t} = [\ddot{x}^i] - U^2 \left[n^k n^j \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} \right]. \quad (3.3.12)$$

Dostali jsme tak výchozí vztah pro popis amplitudy akceleračních vln, viz kap. 3.5. Podmínku (3.3.12) lze odvodit přímo ze vztahu (3.2.15), použijeme-li ho pro φ rovno \dot{x}^i a \ddot{x}^i . Potřebná je i podmínka kompatibility pro zakřivené plochy. Její tvar obdržíme z (3.1.29) pro $\varphi = v^i$ a s ohledem na (3.1.17), (3.3.10)₁ je roven

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k} \right] &= \left[n^r n^s \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^r \partial x^s} \right] n_j n_k - (\delta_{jl} n_k + \delta_{kl} n_j) a^{\alpha\beta} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{a^i}{U} \right) + \\ &+ \delta_{jl} \delta_{im} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^\alpha} a^{\alpha\beta} b^{\bar{\alpha}}{}_\alpha \left(\frac{a^i}{U} \right). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Ve speciálním případě, kdy $\frac{a^i}{U}$ je po ploše konstantní podmínkou (3.3.13) se redukuje na

$$\left[\delta^{jk} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k} \right] = \left[n^r n^s \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^r \partial x^s} \right] + b^{\bar{\alpha}}{}_\alpha \left(\frac{a^i}{U} \right), \quad (3.3.14)$$

$$2 \frac{\delta a^i}{\delta t} - \frac{a^i}{U} \frac{\delta U}{\delta t} = \llbracket \ddot{x}^i \rrbracket - U^2 C^{lr} C^{js} \llbracket n_k n_j \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^r \partial x^s} \rrbracket. \quad (3.3.11)$$

Fingerův tenzor $C^{kr} = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^r}{\partial X^R} \delta^{KR}$

se pro případ, kdy současný stav tělesa je stavem referenčním (např. pro tekutiny, viz kap. I.6), tj. pro $x^k = \delta^k_K X^K$ redukuje na tenzor jednotkový δ^{kr} . Tudíž podmínku (3.3.11) můžeme psát v jednodušším tvaru

$$2 \frac{\delta a^i}{\delta t} - \frac{a^i}{U} \frac{\delta U}{\delta t} = \llbracket \ddot{x}^i \rrbracket - U^2 \llbracket n^k n^j \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^k \partial x^j} \rrbracket. \quad (3.3.12)$$

Dostali jsme tak výchozí vztah pro popis amplitudy akceleračních vln, viz kap. 3.5. Podmínku (3.3.12) lze odvodit přímo ze vztahu (3.2.15), použijeme-li ho pro φ rovno \dot{x}^i a \ddot{x}^i . Potřebná je i podmínka kompatibility pro zakřivené plochy. Její tvar obdržíme z (3.1.29) pro $\varphi = v^i$ a s ohledem na (3.1.17), (3.3.10)₁ je roven

$$\begin{aligned} \llbracket \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k} \rrbracket &= \llbracket n^r n^s \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^r \partial x^s} \rrbracket n_j n_k - (\delta_{jl} n_k + \delta_{kl} n_j) a^{\alpha\beta} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{a^i}{U} \right) + \\ &+ \delta_{jl} \delta_{im} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^\alpha} a^{\alpha\beta} b^{\bar{\alpha}}{}_\alpha \left(\frac{a^i}{U} \right). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Ve speciálním případě, kdy $\frac{a^i}{U}$ je po ploše konstantní podmínkou (3.3.13) se redukuje na

$$\llbracket \delta^{jk} \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k} \rrbracket = \llbracket n^r n^s \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^r \partial x^s} \rrbracket + b^{\bar{\alpha}}{}_\alpha \left(\frac{a^i}{U} \right), \quad (3.3.14)$$

kde $b^\alpha_\alpha = -\frac{2}{R}$, \bar{R} je střední křivost plochy (I.D2.140).

Časovou změnu intenzity rázové vlny v prostorových souřadnicích odvodíme pomocí podmínky (3.2.12). Dosazením za $\varphi = \dot{x}^i$ a pomocí (3.3.2) nalezneme kinematickou podmínku kompatibility

$$\begin{aligned} \left[\left[\frac{\delta \dot{x}^i}{\delta t} \right] \right] &= \frac{\delta \left[\dot{x}^i \right]}{\delta t} = \left[\ddot{x}^i \right] + \left[\left[U n^\ell \frac{\partial v^i}{\partial x^\ell} \right] \right] = \\ &= \left[\ddot{x}^i \right] + U \left[\left[n^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right] \right] - \left[\dot{x}^\ell \right] \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\ell} \right)^+ \end{aligned}$$

(3.3.15)

Velikost skoků $\left[\ddot{x}^i \right]$, $\left[\left[n^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right] \right]$

nalezneme ze zákonů bilance, viz kap. 3.4, 3.5.

3.4 Zákony bilance na singulárních plochách

Zákony bilance z kap.I.4 budeme formulovat na ploše nespojitosti $\omega(x^i, t) = \Omega(X^I, t)$.

Spolu s konstitutivními vztahy (kap.I.6) jsou nezbytné při vyšetřování časové závislosti amplitudy rázových a akceleračních vln.

Z hlediska bilance příslušné veličiny je důležitá rychlost šíření plochy vůči prostředí. V materiálovém popisu je tato rychlost $U_{(N)}$ (3.2.2) a v popisu prostorovém U (3.2.5). Vzájemná relace mezi nimi je dána vztahem (3.2.7).

Bilance hmotnosti(I.4.1.4) v materiálovém popisu je

$$\left[\rho_0 U_{(N)} \right] = 0, \quad (3.4.1)$$

přičemž $U_{(N)} = (U^K - V^K) N_K$ je relativní rychlost vůči prostředí nacházející se v referenčním stavu s hustotou ρ_0 . Z tohoto důvodu jsou $U_{(N)}, \rho_0$ na obou stranách plochy stejné. V prostorovém popisu(I.4.1.6) má bilance hmotnosti tvar

$$\left[\rho U \right] = \rho_1 U_1 - \rho_2 U_2 = \left[\rho (u_{(n)} - v_{(n)}) \right] = 0, \quad (3.4.2)$$

kde $U_1 = u_{(n)} - v_{(n)}^+$ je relativní rychlost vlny vůči prostředí před vlnou a $U_2 = u_{(n)} - v_{(n)}^-$ za vlnou, viz obr. 3.2.

Rychlost vlny ve směru normály vzhledem k pevné soustavě souřadnic je $u_{(n)} = u^i n_i$. Rychlost prostředí před vlnou značíme $v_{(n)}^+$ a za vlnou $v_{(n)}^-$.

Nalezneme vzájemný vztah mezi zákonem bilance v materiálovém popisu (3.4.1) a prostorovém popisu (3.4.2). Jsou-li dA, da velikosti elementu singulární plochy $\Omega(X^I, t) = 0, \omega(x^i, t) = 0$

tak díky (3.2.7) a pozn. 3.1) platí

$$\rho_0 U_{(N)} dA = \rho_0 \frac{U}{|\vec{c}|} da = \rho U da. \quad (3.4.3)$$

V případě, že $dA = da$ tj. před vlnou (v referenčním stavu) a za vlnou (v aktuálním stavu) je vyšetřovaná velikost plochy stejná, platí

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = \rho_0 U_{(N)} \quad , \quad |\vec{c}| = j = \frac{\rho_0}{\rho} . \quad (3.4.4)$$

Tato formulace zákona bilance hmotnosti se používá pro rázové vlny jak v tekutinách, kap. 3.5, tak v pevných tělesech, kap. 3.9.

Bilance hybnosti (I.4.2.15) má s ohledem na (3.4.1) tvar

$$\left[\left[\rho_0 v^i U_{(N)} \right] \right] + \left[\left[T^{Ki} N_K \right] \right] = 0 \quad (3.4.5)$$

a v prostorovém popisu je bilance (I.4.2.17) na singulární ploše vyjádřena

$$\left[\left[\rho v^i U \right] \right] + \left[\left[t^{ki} n_k \right] \right] = 0. \quad (3.4.6)$$

Zde T^{Ki} je Piolův-Kirchhoffův tenzor pseudonapětí (I.4.2.9) a t^{ki} je obvyklý tenzor napětí, viz obr. I.3.16.

Bilance celkové energie (I.4.5.7), popř. (I.4.5.10) je dána vztahy

$$\left[\left[\rho_0 U_{(N)} \left(\frac{v^i v_i}{2} + u \right) \right] \right] + \left[\left[(T^{Ki} v_i - Q^K) N_K \right] \right] = 0 \quad (3.4.7)$$

$$\left[\left[\rho U \left(\frac{v^i v_i}{2} + u \right) \right] \right] + \left[\left[(t^{ki} v_i - q^k) n_k \right] \right] = 0. \quad (3.4.8)$$

Hustotu vnitřní energie značíme u a Q^k, q^k jsou hustoty tepelného toku.

Rovnice bilance entropie (I.4.6.12) a (I.4.6.13) vyjadřuje ten fakt, že entropie v prostředí za vlnou musí být vždy větší. Tudiž s ohledem na směr postupu vlny, viz obr. 3.2 a definici vztahu funkce (3.1.3) dostáváme nerovnice

$$\left[\rho_0 U_{(N)} s \right] + \left[J^k(S) N_k \right] \leq 0 \quad (3.4.9)$$

pro materiálový popis a

$$\left[\rho U_s \right] + \left[j^k(S) n_k \right] \leq 0 \quad (3.4.10)$$

v prostorovém popisu. $J^k(S)$, resp. $j^k(S)$ je tok entropie singulární plochou. V případě, že navíc existuje i přenos energie zářením, zahrnujeme ho do toků (I.4.6.10).

3.5 Rázové vlny v tekutinách

Vyjdeme ze zákonů bilance

hustoty (I.4.1.7)

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \quad (3.5.1)$$

hybnosti (I.4.2.16)

$$\rho \ddot{x}^i = \rho \dot{v}^i = \frac{\partial t^{ik}}{\partial x^k} \quad (3.5.2)$$

a energie (I.4.5.15)

$$\rho \dot{u} + \frac{\partial q^i}{\partial x^i} - t^{ki} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} = 0. \quad (3.5.3)$$

Omezíme se na Newtonovskou tekutinu (I.6.5.16), pro kterou je tenzor napětí roven (I.6.5.15)

$$t^{ij} = -p(\rho, T) \delta^{ij} + \mu_v(\rho, T) d_{(1)}^{ij} + 2\mu(\rho, T) d^{ij}, \quad (3.5.4)$$

kde

$$d_{(1)}^{ij} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}, \quad d^{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta^{il} \frac{\partial v^j}{\partial x^l} + \delta^{jl} \frac{\partial v^i}{\partial x^l} - \frac{2}{3} d_{(1)}^{ij} \right). \quad (3.5.5)$$

Vektor vedení tepla (I.6.5.14) je definován vztahem

$$q^k = -\lambda_T(\rho, T) \delta^{kl} \frac{\partial T}{\partial x^l}. \quad (3.5.6)$$

Zde μ_v , μ , λ_T jsou postupně objemová a smyková viskozita a koeficient tepelné vodivosti. Vnitřní energie u je pro kaloricky dokonalou tekutinu závislá jen na teplotě

$$\dot{u} = c_v \dot{T}. \quad (3.5.7)$$

Zákony bilance (3.4.4), (3.4.6), (3.4.8) a (3.4.10) nabývají pro tekutinu s konstitutivními vztahy (3.5.4) a (3.5.6) tvaru

$$[[\rho U]] = 0 \quad (3.5.8)$$

$$[[\rho U v^i - p n^i + \mu_v d_{(t)} n^i + 2\mu d^{ij} n_j]] = 0 \quad (3.5.9)$$

$$[[\rho U \left(\frac{(v)^2}{2} + u \right) - p v_{(n)} + \mu_v d_{(t)} v_{(n)} + 2\mu d^{ij} v_j n_j + \lambda n^l \frac{\partial T}{\partial x^l}]] = 0 \quad (3.5.10)$$

$$[[\rho U s + \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial x^l} n^l]] \leq 0. \quad (3.5.11)$$

Tyto rovnice platí pro libovolnou zakřivenou rázovou vlnu, která se pohybuje vůči pevné soustavě souřadnic rychlostí $U_{(n)} = v_{(n)}^+ + U^+ = v_{(n)}^- + U^-$. Za předpokladu, že v blízkém okolí rázové vlny jsou gradienty rychlostního a teplotního pole nulové, lze uvedené rovnice zjednodušit. Stačí vyšetřovat jen kolmou složku hybnosti, protože složka rychlosti $v_{(t)}$ tečná s rázovou vlnou je spojitá, tj. $[[v^i t_j]] = 0$. O tomto faktu se přesvědčíme tím, že bilanci hybnosti (3.5.9) vynásobíme skalárně tečným vektorem t (viz obr. 3.3) a použijeme (3.5.8). Výchozí rovnice bilance pro rázovou vlnu jsou

$$[[\rho U]] = 0$$

$$[[\rho U v_{(n)} - p]] = 0$$

$$[[\rho U \left(\frac{(v)^2}{2} + u \right) - p v_{(n)}]] = 0, \quad (v)^2 = (v_{(n)})^2 + (v_{(t)})^2 \quad (3.5.12)$$

$$[[\rho U s]] \leq 0.$$

Doplňme je ještě stavovou rovnicí dokonalého plynu

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\kappa-1}{\kappa} c_p T = (\kappa-1) u \quad (3.5.13)$$

a zavedeme stagnační entalpii (I.7.3.18) h_v , izentropickou rychlost zvuku c , kritickou rychlost zvuku c^* (I.7.4.7) následujícími vztahy

$$h_v = u + \frac{p}{\rho} + \frac{(v)^2}{2}, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \kappa \frac{p}{\rho},$$

$$c^{*2} = \frac{2(\kappa-1)}{\kappa+1} h_v. \quad (3.5.14)$$

Zde $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ je poměr specifických tepel. Omezíme se pro jednoduše na kolmou rázovou vlnu ($v_{(t)} = 0$). Hodnoty před rázovou vlnou označíme indexem 1, za ní indexem 2 a vypustíme u $v_{(n)}$ index (n) (viz obr. 3.3). Rovnice (3.5.12) pak píšeme ve tvaru

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 \quad (3.5.15)$$

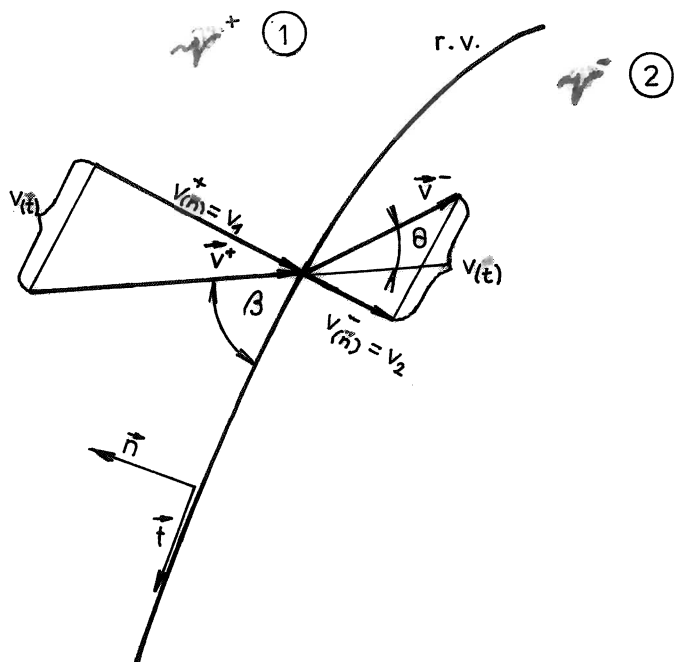
$$\rho_1 U_1 v_1 - p_1 = \rho_2 U_2 v_2 - p_2 \quad (3.5.16)$$

$$\rho_1 U_1 \left(\frac{(v_1)^2}{2} + u_1 \right) - p_1 v_1 = \rho_2 U_2 \left(\frac{(v_2)^2}{2} + u_2 \right) - p_2 v_2 \quad (3.5.17)$$

$$s_1 < s_2. \quad (3.5.18)$$

Dosadíme stagnační entalpii h_v do rovnice energie (3.5.17) a pomocí (3.5.15) a (3.5.16) nalezneme vztah pro rychlost rázové vlny vůči pevné soustavě souřadnic

$$u_{(n)} = \frac{[h_v]}{[v]} = \frac{h_{v1} - h_{v2}}{v_1 - v_2}. \quad (3.5.19)$$



Obr. 3.3

Stacionární zakřivená rázová vlna

Jestliže celková entalpie za vlnou vzroste, tj. $h_{c_2} > h_{c_1}$ vlna se posouvá proti proudu ($u_{(n)} < 0$) a naopak. Na obr. 3.4 je znázorněn pohyb rázové vlny na profilu, způsobený fluktuacemi tlaku v blízkém úplavu. Tlakové pulzace periodicky zvyšují a snižují stagnační entalpii h_{c_2} a rozkmitají rázovou vlnu (Maršík, Vlček, 1977; Vlček, 1978). Její pohyb je často doprovázen změnou intenzity $[[v]]$ viz kap. 3.6.

obr. 3.4

Předpokládejme stacionární rázovou vlnu $u_{(n)} = 0$ ($U_1 = -v_1, U_2 = -v_2$) pro kterou podle (3.5.19) musí platit, že stagnační entalpie před vlnou a za vlnou jsou stejné $h_{c_1} = h_{c_2} = h_c$. Potom ze vztahů (3.5.15) až (3.5.17) užitím (3.5.14) odvodíme tzv. Prandtlův vztah

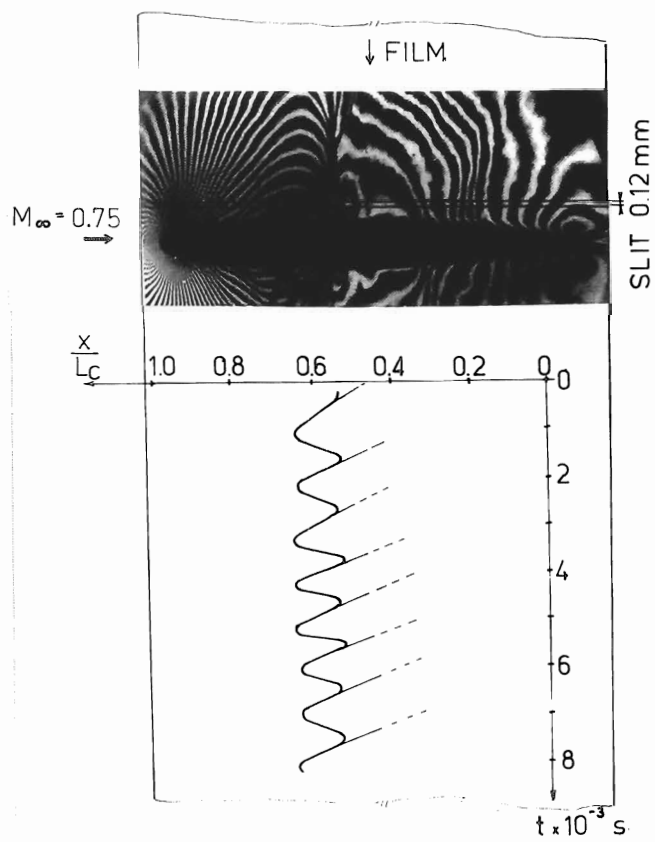
$$v_1 v_2 = (c^*)^2, \text{ resp. } \lambda_1 \lambda_2 = 1, \lambda_1 = \frac{v_1}{c^*}, \lambda_2 = \frac{v_2}{c^*}, \quad (3.5.20)$$

který dává do vztahu rychlost před vlnou v_1 s rychlostí za vlnou v_2 , resp. bezrozměrové rychlosti λ_1, λ_2 . Intenzita rázové vlny je

$$\frac{[[v]]}{v_1} = 1 - \left(\frac{c^*}{v_1}\right)^2, \quad v_1 - c^* = v_2 - c^* + v_1 \left[1 - \left(\frac{c^*}{v_1}\right)^2\right]. \quad (3.5.21)$$

Z druhého vztahu plyne, že je její amplituda nesymetrická kolem kritické rychlosti zvuku c^* (rychlost šíření zvuku při podmínkách proudění rychlosti zvuku, tj. $|v| = c = c^*$).

Poměr hustot na stacionární rázové vlně plyne dosazením (3.5.20) do rovnice (3.5.15)



Obr.3.4

Pohyb rázové vlny na profilu NACA 0012 v důsledku úplavových poruch (L_c je délka tětiny profilu)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1}{v_2} = (\lambda_1)^2 = \frac{(\kappa+1)(M_1)^2}{(\kappa-1)(M_1)^2+2}, \quad M_1 = \frac{v_1}{c}. \quad (3.5.22)$$

Při úpravě byly ještě užity vztahy (3.5.13) a (3.5.14). Skok tlaku lze s ohledem na (3.5.16) vyjádřit pouze jako funkci Machova čísla M_1

$$-\frac{[p]}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} [(M_1)^2 - 1]. \quad (3.5.23)$$

Pro relativní rychlost vlny vzhledem k prostředí 1 odtud plyne

$$U_1 = -v_1 = -c_1 \sqrt{1 + \frac{(\kappa+1)(p_2 - p_1)}{2\kappa p_1}}. \quad (3.5.24)$$

Tudíž slabá tlaková porucha (tj. $p_2 \rightarrow p_1$) se šíří rychlostí zvuku c_1 . Vyjádříme-li poměr hustot (3.5.22) v závislosti na poměru tlaků dostáváme tzv. Rankinův-Hugoniotův vztah

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \frac{p_2}{p_1}}. \quad (3.5.25)$$

Změnu entropie vypočteme integrací rovnice (I7.4.3)

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \right] \quad (3.5.26)$$

Dosazením ze vztahů (3.5.22) a (3.5.23) a pro hodnoty $(M_1)^2 - 1 \ll 1$ dostáváme zjednodušený vzorec (Liepmann, Roshko, 1957)

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{2\kappa}{3(\kappa+1)^2} [(M_1)^2 - 1]^3 = -\frac{(\kappa+1)}{12\kappa^2} \left[\frac{[p]}{p_1} \right]^3 > 0. \quad (3.5.27)$$

V důsledku II. zákona termodynamiky (3.5.18) se mohou realizovat jen případy $M_1^2 > 1$, tj. s ohledem na (3.5.23), jen kompresní rázové vlny. Expanzní rázové vlny jsou nepřipustné.

Vztahy (3.5.22) a (3.5.23) vyjadřující poměr skalárních veličin lze jednoduše rozšířit i na šikmé rázové vlny substitucí

$$M_1 \rightarrow M_1 \sin \beta. \quad (3.5.28)$$

Zde a dále M_1 znamená Machovo číslo celkové rychlosti před vlnou, tj. $M_1 = \frac{|v^+|}{c_1}$, viz obr. 3.3. Hodnotu Machova čísla za vlnou $M_2 = \frac{|v^-|}{c_2}$ určíme ze vztahů (3.5.22), (3.5.13) a (3.5.14) takto

$$\frac{(v_2)^2}{c_2^2} = M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta}{\kappa M_1^2 \sin^2 \beta - \frac{\kappa-1}{2}} \quad (3.5.29)$$

Vzájemnou relací mezi úhlem rázové vlny β a úhlem odklonu proudu θ v rázové vlně plyne z rovnosti tečných složek rychlosti $V_{(t)}$, viz obr. 3.3. Vyjdeme ze vztahů (3.5.22)

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\operatorname{tg}(\beta - \theta)}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{(\kappa-1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\kappa+1)M_1^2 \sin^2 \beta}, \quad (3.5.30)$$

a po několika algebraických úpravách dostáváme

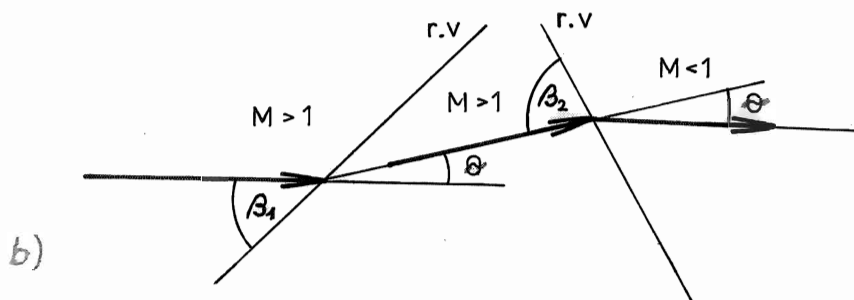
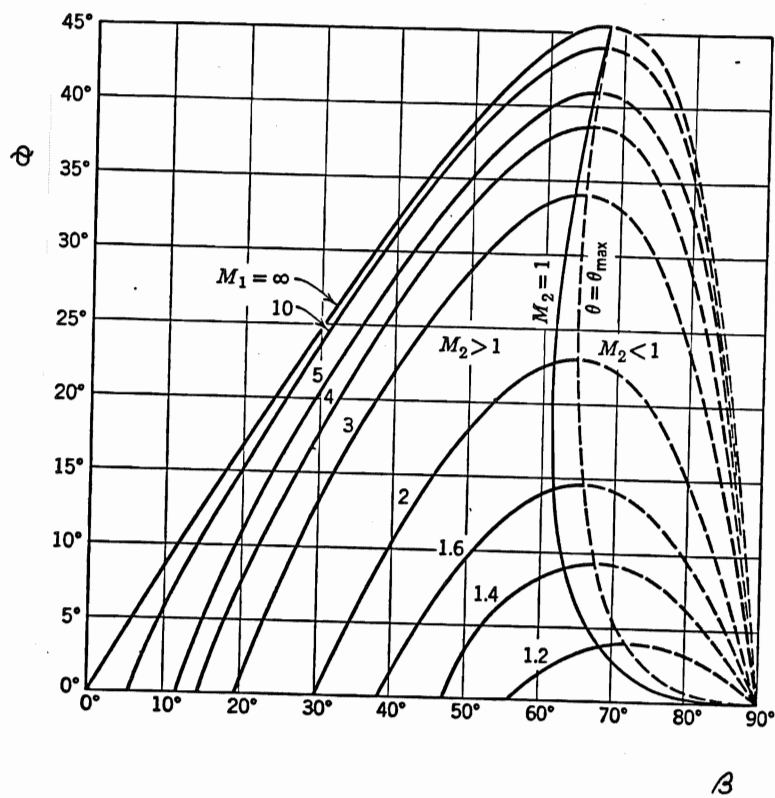
$$\operatorname{tg} \theta = 2 \cot \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\alpha + \cos 2\beta) + 2} \quad (3.5.31)$$

Z těchto výrazů plyne, že se proud průchodem rázovou vlnou k ní vždy přiklání. Závislost mezi θ a β pro konstantní M_1 je na obr. 3.5. Křivka $\theta = \theta_{\max}$ odděluje oblast supersonických rychlostí za šikmou rázovou vlnou ($M_2 > 1$) od oblasti subsonických rychlostí ($M_2 < 1$ - vyznačeno čárkovaně). Křivka $\theta = \theta_{\max}$ určuje maximální odklon rychlosti pro danou hodnotu M_1 . Pro hodnoty $\theta < \theta_{\max}$ existují dvě řešení za rázovou vlnou; jedno s přechodem do supersonického proudění a druhé do subsonického (vyjma oblasti $\theta \leq \theta_{\max}$, kde jsou obě subsonické). Prandtlův vztah (3.5.20) má pro šikmou rázovou vlnu tvar

$$V_{(n)}^+ V_{(n)}^- = (c^*)^2 - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} (V_{(t)})^2 \quad (3.5.32)$$

V některých případech proudění s rázovou vlnou dochází za ní v důsledku její interakce s mezní vrstvou (např. na stěnách obtékaných profilů) ke značným fluktuacím tlaku p' a energie e' (např. akustické). Celková stagnační entalpie proudu h_0 ale zůstává konstantní, takže s ohledem na (3.5.19) je rázová vlna stacionární ($U_{(n)} = 0$). Rovnice (3.5.15) až (3.5.17) pro kolmou rázovou vlnu ($V_{(t)} = 0$) píšeme ve tvaru

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (3.5.33)$$



Obr.3.5

- a) Závislost odklonu rychlosti θ na sklonu rázové vlny β , viz obr.3.3
- b) Pro daný odklon θ existují dvě řešení, jedno supersinické a druhé subsonické

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 + p' \quad (3.5.34)$$

$$\rho_1 v_1 \left(\frac{(v_1)^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \rho_2 v_2 \left(\frac{(v_2)^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} - e' \right). \quad (3.5.35)$$

Stejným způsobem jako při (3.5.20) z těchto rovnic odvodíme (Maršík, Vlček, 1980)

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 + \frac{\kappa \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1 \hat{p}}{\kappa + 1} + \frac{\hat{e}}{2\lambda_2} \right) \quad (3.5.36)$$

pro $\hat{e} = \frac{e'}{h_v}$, $\hat{p} = \frac{2p'}{\rho_1 v_1^2}$.

Jde o rozšíření Prandtlova vztahu (3.5.20), který umožňuje stanovit rychlost λ_2 za kolmou rázovou vlnou i v tom případě, že se část tlakové energie \hat{p} či celkové energie \hat{e} od proudu plynu oddělí a přemění se např. v energii akustickou či energii turbulentního pohybu. Je-li tato energie z oblasti za rázovou vlnou odvedena (popř. do ní dodána), naruší se rovnováha celkových entalpií

$$h_v = h_{v_1} = h_{v_2} + e'. \quad (3.5.37)$$

Rozdíl entalpií $h_{v_1} - h_{v_2}$ způsobí posuv rázové vlny podle (3.5.19) a je jedním z mechanismů transonické nestability rázové vlny, viz kap. 4.7

3.6 Pohyb rázových vln v tekutinách

Budeme vyšetřovat pohyb vln v nevyrovnaném rychlostním poli. Vyjdeme z podmínky kompatibility (. 3.3.15), které lze s ohledem na (. 3.2.5) napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\delta[v_i]}{\delta t} &= [\dot{v}^i] + \left[U n^l \frac{\partial v^i}{\partial x^l} \right] = \\ &= \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} + (v^l - v_k n^k n^l) \frac{\partial v^i}{\partial x^l} \right] + u_k \left[n^k n^l \frac{\partial v^i}{\partial x^l} \right]. \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Pro zakřivené vlny použijeme identitu (I.D2.125), která v případě rovinné vlny přechází na (I.D2.126), tj. $n^k n^l = \delta^{kl}$.

Potom časová změna intenzity rázové vlny je

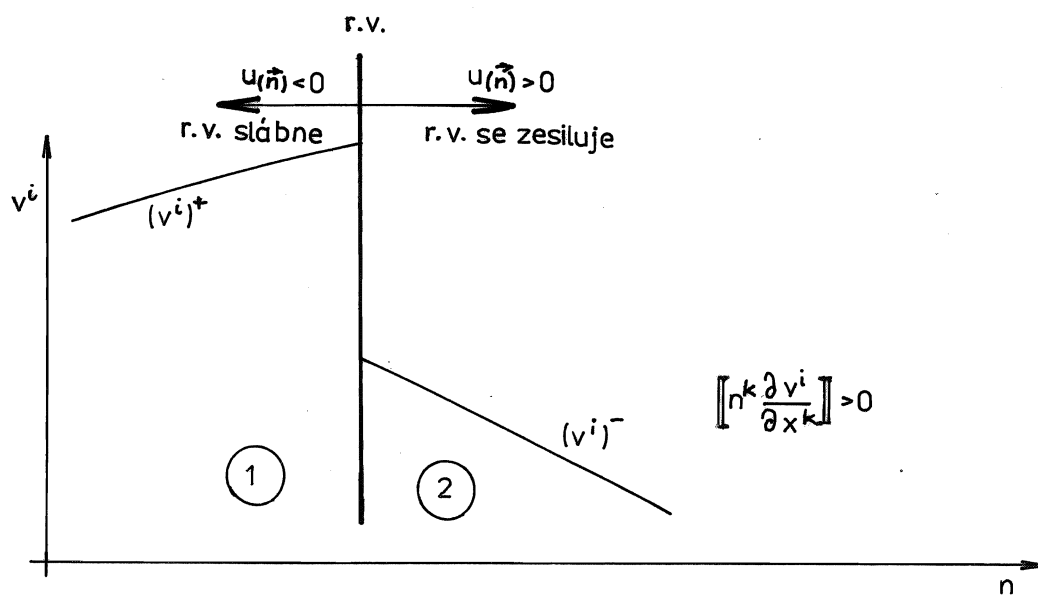
$$\frac{\delta[v^i]}{\delta t} = \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} \right] + u_{(n)} \left[n^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right], \quad (3.6.2)$$

kde u^k je její rychlost vzhledem k pevné soustavě souřadnic. Pro případ stacionárního pole ($\frac{\partial v^i}{\partial t} = 0$) z čistě kinematické podmínky (3.6.2) plyne

$$\begin{aligned} \frac{\delta[v^i]}{\delta t} \text{ roste pro } u_{(n)} \geq 0 \quad \left[n^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right] \geq 0 \\ \frac{\delta[v^i]}{\delta t} \text{ klesá pro } u_{(n)} \geq 0 \quad \left[n^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

(současně platí jen horní nebo dolní znaménka, viz obr. 3.6).

6r. 3.6 → Intenzita rázové vlny se mění (slábne) i v důsledku disipativních procesů, které v ní probíhají (Whitham, 1974). Tyto procesy jsou podmíněny gradienty rychlosti a teploty uvnitř vlny a jejich řešení musí vycházet ze zákonů bilance hmoty (. 3.5.1),



Obr.3.6

Kinematika rázové vlny v nerovnoměrném rychlostním poli

hybnosti (3.5.2) a energie (I4.5.3). Pro případ Newtonovské tekutiny s konstantními koeficienty viskozity μ_v, μ a tepelné vodivosti λ_T (3.5.4) až (3.5.6) je bilance hybnosti dána rovnicí

$$\dot{v}_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} = \left(\frac{\mu_v}{\rho} + \frac{\mu}{3\rho} \right) \frac{\partial v^l}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\mu}{\rho} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial v_i}{(\partial x^l)^2} \quad (3.6.4)$$

a bilanci energie jsme nahradili vztahem pro změnu entropie

$$\dot{s} = \frac{\lambda_T}{\rho T} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 T}{(\partial x^l)^2} \quad (3.6.5)$$

Zde jsme hustotu disipované energie (I.6.5.5) zanedbali jako veličinu malou vyššího řádu. Rovnice (3.6.5) nahrazuje rovnicí energie (3.5.3), protože jako nezávislé proměnné jsme vybrali v_i, s přičemž $T = T(p, s)$ a $p = p(\rho, s)$. Mezi změnou hustoty ρ' a rychlosti $v'_{(n)}$ platí v případě izentropického proudění relace 3.3)

$$\frac{\rho'}{\rho^+} = \pm (1 - M^+) \frac{v'_{(n)}}{c^+} \quad (3.6.6)$$

3.3)

Riemannovy invarianty jsou při proudění konstantní a vyjadřují závislost mezi veličinami $p, \rho, v_{(n)}$. Platí

$$c^2 dp = dp, \quad \frac{dp}{d\rho} = \pm c^2 \left(\rho \frac{dv_{(n)}}{c d\rho} + \frac{v_{(n)}}{c} \right) \quad \text{i)}$$

popř.

$$\frac{d\rho}{\rho} = \pm \left(1 - \frac{v_{(n)}}{c} \right) \frac{dv_{(n)}}{c} = \pm \left(1 - M_{(n)} \right) \frac{dv_{(n)}}{c} \quad \text{ii)}$$

Rovnice (3.6.4) a (3.6.5) přepíšeme do souřadnic t, n viz obr. 3.2, tzn., že nahradíme $v_\ell = v_{(n)} n_\ell$, takže pro podélnou vlnu dostáváme

$$\dot{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \left(\frac{c_v}{\rho} + \frac{4}{3} \frac{c}{\rho} \right) \frac{\partial^2 v}{(\partial n)^2}, \quad \dot{s} = \frac{\lambda_T}{\rho^+ T^+} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right). \quad (3.6.7)$$

Index (n) u $v_{(n)}$ jsme vypustili. Předpokládáme, že uvnitř vlny se gradienty všech veličin mění mnohem více než veličiny samotné.

Zavedeme poruchy v', ρ', p', T', s' vzhledem k vyrovnanému proudu před vlnou (značíme $+$) takto

$$v = v^+ + v', \quad \rho = \rho^+ + \rho', \quad p = p^+ + p', \quad T = T^+ + T', \quad s = s^+ + s'. \quad (3.6.8)$$

Pro tlakovou poruchu platí rozvoj

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^+ \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{(\partial \rho)^2} \right)_s^+ \rho'^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho^+ s' + \dots \quad (3.6.9)$$

a u entropie se omezíme jen na jeden člen, protože se ve slabých rázových vlnách mění jen velmi málo (3.5.27). Pro dokonalý plyn jsou parciální derivace rovny (3.4)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s^+ = \frac{\kappa - 1}{\kappa \rho R}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^+ = c^2, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{(\partial \rho)^2} \right)_s^+ = \frac{(\kappa - 1) c^2}{\rho}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho^+ = \frac{p}{c_v} = \frac{\rho c^2}{c_p}. \quad (3.6.10)$$

3.4)

Vyjdeme z definice entropie (3.5.7), vnitřní energie (3.5.7) a stavové rovnice (3.5.13) a nalezneme pro $p = p(\rho, s)$

$$dp = RTd\rho + R\rho dT$$

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds = \kappa \frac{p}{\rho} d\rho + \frac{p}{c_v} ds \quad \text{i)}$$

a stejně pro druhý diferenciál.

V rovnici pro entropii (3.6.7) dosadíme za $\frac{\partial p}{\partial n}$ z rovnice hybnosti (3.6.7) (bez vazkých členů a členů 2. řádu $\rho' \frac{\partial p'}{\partial n}$), takže s ohledem na (3.6.8)₁ dostáváme

$$\dot{s} = \frac{\lambda_T}{\rho^+ T^+} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{\partial}{\partial n} (\rho^+ \dot{v}), \quad \text{resp.} \quad s' = -\frac{(\kappa-1)\lambda_T}{c_p} \frac{\partial v'}{\partial n}. \quad (3.6.11)$$

Tím jsme všechny veličiny v rovnicích (3.6.7) vyjádřili pomocí v' . Ze vztahů (3.6.9), (3.6.11) dosadíme do rovnice

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (v^+ + v') \frac{\partial v'}{\partial n} + \left(\frac{1}{\rho^+} - \frac{\rho'}{(\rho^+)^2}\right) \frac{\partial p'}{\partial n} = \frac{1}{\rho^+} \left(\mu_v + \frac{4}{3}\mu\right) \frac{\partial^2 v'}{(\partial n)^2}, \quad (3.6.12)$$

kde členy $\frac{\partial v'}{\partial t}$, $\frac{\partial v'}{\partial n}$ považujeme za členy 1. řádu, $v' \frac{\partial v'}{\partial n}$; $\frac{\partial^2 v'}{(\partial n)^2}$ za členy 2. řádu a ostatní jsou členy vyšších řádů. Naposled uvedené členy zanedbáme. Dostáváme tak rovnici pro slabou rázovou vlnu, šířící se v prostředí unášeném rychlostí v^+ (resp. $M^+ = \frac{v^+}{c^+}$), tj.

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + c^+ \frac{\partial v'}{\partial n} + \hat{\alpha} v' \frac{\partial v'}{\partial n} = \hat{\gamma} \frac{\partial^2 v'}{(\partial n)^2}. \quad (3.6.13)$$

Pro jednoduchost jsme zavedli označení

$$\hat{\alpha} = 1 + (\kappa-2)[1 - (M^+)^2], \quad \hat{\gamma} = \frac{(\kappa-1)(c^+)^2 \lambda_T}{(c_p)^2} + \frac{1}{\rho^+} \left(\mu_v + \frac{4}{3}\mu\right).$$

Zavedeme soustavu souřadnou (\tilde{n}, t) spojenou s vlnou

$$\begin{aligned} t = t \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} - c^+ \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \\ \tilde{n} = n - c^+ t \quad , \quad \frac{\partial}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

a rovnice (3.6.13) dostává konečný tvar

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \hat{a} v' \frac{\partial v'}{\partial \tilde{n}} = \hat{\nu} \frac{\partial^2 v'}{(\partial \tilde{n})^2} \quad (3.6.15)$$

Tuto rovnici nazýváme rovnicí Burgerssovou a popisuje vývoj silné poruchy v proudovém poli. V důsledku toho, že v místech s nižší rychlostí v (s vyšší hustotou (I.7.4.9)₂) je větší rychlost šíření c dochází k nelineárnímu zkreslení amplitudy poruchy (druhý člen (3.6.15)) a k prudkému zestrmení čela vlny. Při tomto zestrmení vznikají velké gradienty a uplatňují se disipativní (tlumící) procesy (pravá strana (3.6.15)). Chování poruch v okolí obtékaného profilu je znázorněno na obr. 3.7, kde je dobře patrné zestrmování poruch od úplavu v závislosti na velikosti místního Machova čísla M^+ . Z těchto obrázků je vidět, že zestrmení či útlum poruchy závisí jak na intenzitě poruchy $|v'|$, M^+ , tak na vzdálenosti od zdroje.

3.7 → Soustředíme se na zestrmení poruchy. Zanedbáme disipativní člen ($\hat{\nu} \rightarrow 0$) a budeme předpokládat, že se porucha nachází v proudě s $M^+ = 1$ (pro $\hat{a} = 1$ je vzhledem k profilu stacionární, tj. $u = c = -v^+$). Hledáme řešení rovnice

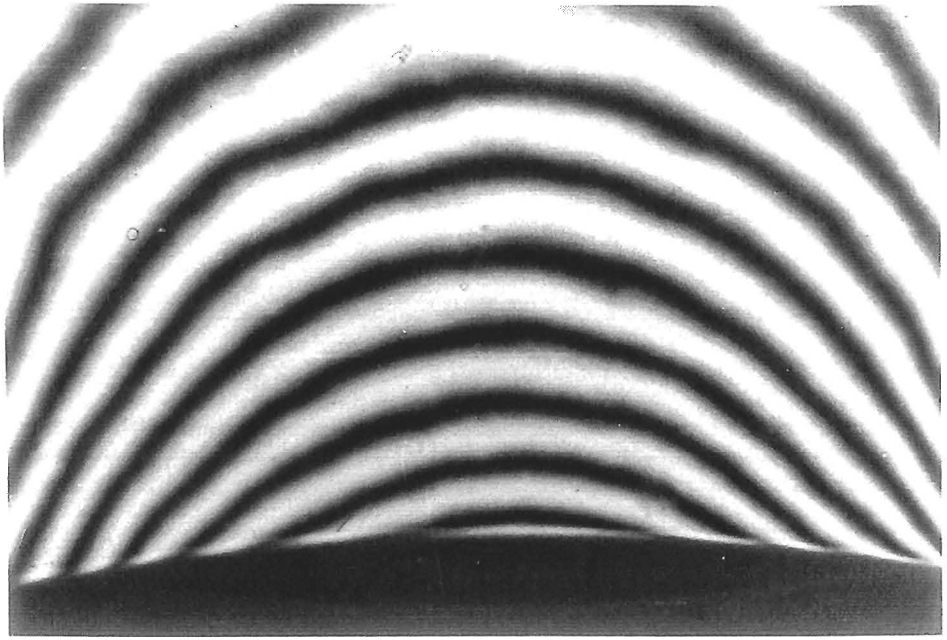
$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v' \frac{\partial v'}{\partial \tilde{n}} = 0 \quad (3.6.16)$$

Obr.3.7

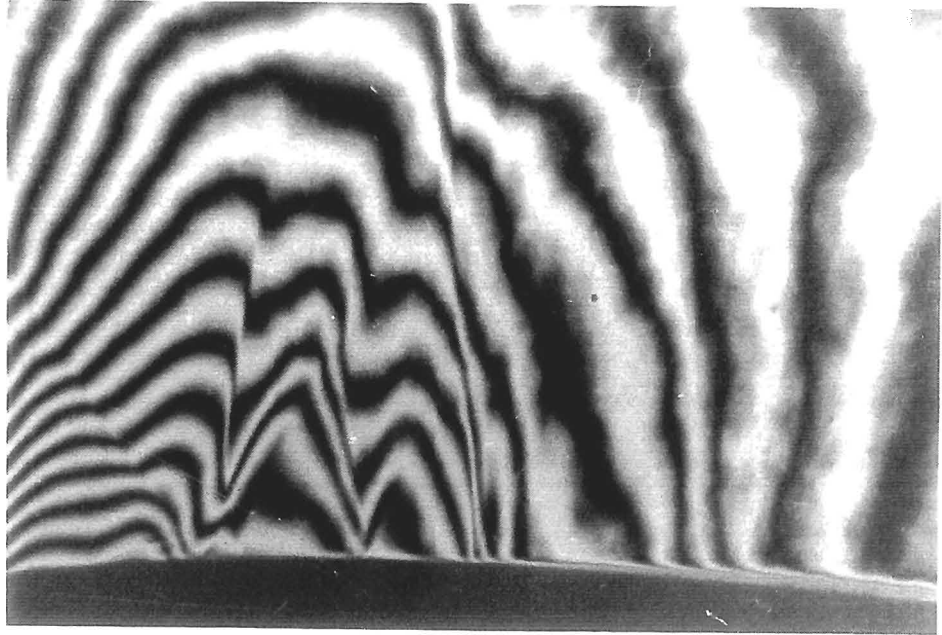
Sestřmování poruch v okolí profilu (experiment ÚT ČSAV)

- a) $M^+ < 1$ nedochází k sestřmování poruch
- b) $M^+ \approx 1$ poruchy se sestřmují a kumulují
- c) $M^+ \gg 1$ tvoří se rázová vlna

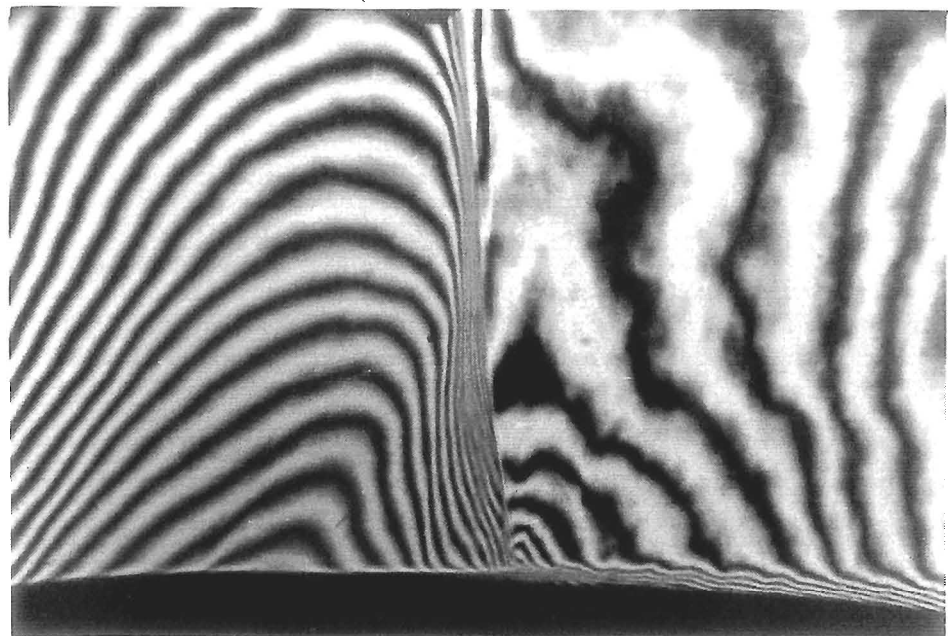
a)



b)



c)



v celé oblasti $\tilde{n} \in \langle -\infty, \infty \rangle$ se zadanou počáteční podmínkou (Cauchyho úloha)

$$v' = v'_0 \sin k \tilde{n} \quad \text{pro } t=0, \quad k = \frac{2\pi}{\ell}, \quad (3.6.17)$$

ℓ je vlnová délka. Nalezneme charakteristiky $\eta = \eta(\tilde{n}, t)$ rovnice (3.6.16) na níž je $v'(\eta) = v'(\tilde{n}, t) = \text{konst}$, viz kap. 2.4.

Určíme je z podmínky řešitelnosti soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + v' \frac{\partial v'}{\partial \tilde{n}} &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} dt + \frac{\partial v'}{\partial \tilde{n}} d\tilde{n} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

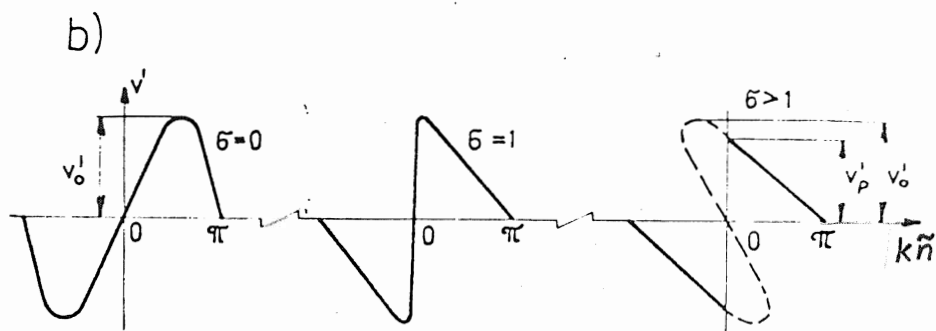
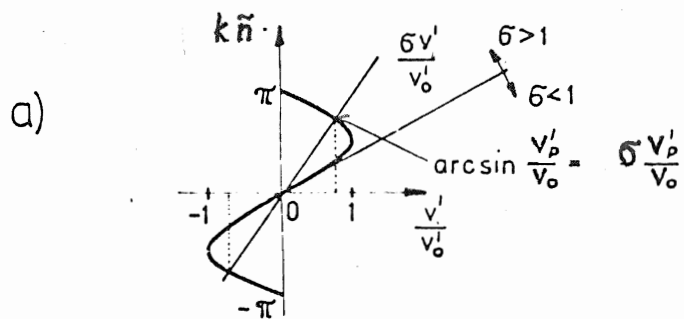
vzhledem k $\frac{\partial v'}{\partial t}, \frac{\partial v'}{\partial \tilde{n}}$. Řešení je nenulové jen v tom případě, je-li determinant soustavy roven nule, tj. $d\tilde{n} = v' dt$.

Takže $\eta = \tilde{n} - v't$ a řešení rovnice (3.6.16), které vyhovuje (3.6.17) je

$$\begin{aligned} v'(\tilde{n}, t) &= v'_0 \sin k(\tilde{n} - v'(\tilde{n}, t)t) = v'_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\ell} \tilde{n} - \sigma \frac{v'}{v'_0} \right), \\ \sigma &= \frac{2\pi v'_0 t}{\ell}. \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

Zavedli jsme parametr zestržení σ , viz obr. 3.8. Pro $\sigma = 1$ má vlna pilovitý charakter. Tento tvar nastane za čas $t_s = \frac{\ell}{2\pi v'_0}$, kde v'_0 je amplituda vlny. V bodě $\tilde{n} = 0$ jde o řešení rovnice $\arcsin\left(\frac{v'_p}{v'_0}\right) = -\sigma \frac{v'_p}{v'_0}$, které je možno podle obr. 3.8b) napsat přibližně ve tvaru

obr. 3.8 →



Obr.3.8

K nalezení tvaru Riemannových vln popsaných rovnicí (3.6.16)

- a) určení velikosti čela v'_p v sestrmené vlně $v' = v'_0 \sin(\sigma \frac{v'}{v'_0})$
 b) tvar vlny pro různé hodnoty parametru sestrmení $\sigma = k v'_0 t$

$$v'(t, \tilde{n}) = \begin{cases} \frac{v'_0}{\sigma+1} (-k\tilde{n} + \pi) & , k\tilde{n} \in (0, \pi) \\ -\frac{v'_0}{\sigma+1} (k\tilde{n} + \pi) & , k\tilde{n} \in (-\pi, 0) . \end{cases} \quad (3.6.20)$$

K zestrmení na $1/10 \cdot v'_0$ dochází pro $\sigma = 10\pi - 1$, což je pro $t_s = \frac{4,8 \ell}{v'_0}$. Je-li $M^+ < 1$ pak dojde k zestrmení na vzdálenosti $n_s = \sigma^+ (1 - M^+) t_s$, viz obr. 3.7b).

Nalezneme řešení rovnice (3.6.15) pro případ, kdy viskozita převažuje nad nelinearitou. Pro počáteční podmínku (3.6.17) dostáváme

$$v'(t, \tilde{n}) = v'_0 \exp\left(-\frac{4\alpha^2 \hat{\gamma} t}{\rho^2}\right) \sin \frac{2\alpha \tilde{n}}{\ell} \quad (3.6.21)$$

a k poklesu amplitudy na $\frac{v'_0}{e^2}$ dojde za čas $t_\mu = \frac{\ell^2}{\alpha^2 \hat{\gamma}}$, resp. na vzdálenosti $n_\mu = \sigma^+ (1 - M^+) t_\mu$.

Řešením Burgersovy rovnice (3.6.15) (3.5) nalezneme vývoj rázové vlny a vztah mezi tloušťkou jejího čela a její intenzitou. Pro počáteční rozdělení rychlosti

$$v'(\tilde{n}, t=0) = \bar{v}(\tilde{n}) \quad (3.6.22)$$

má řešení obecný tvar

$$v'(\tilde{n}, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\tilde{n}-x} \frac{\tilde{n}-x}{t} e^{-\frac{G}{2\alpha\hat{\gamma}}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{G}{2\alpha\hat{\gamma}}} dx} , \quad G(x, \tilde{n}, t) = \int_0^x \bar{v}(\tilde{x}) d\tilde{x} + \frac{(\tilde{n}-x)^2}{2t} .$$

(3.6.23)

3.5)

Obecné řešení této rovnice bylo nalezeno díky Hopfově-Coleově nelineární transformaci (Whitham, 1974)

$$v' = -2 \frac{\hat{y}}{\hat{a}} \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{n}}}{\varphi}, \quad \text{i)}$$

která převede Burgersovu rovnici na rovnici vedení tepla. Položíme nejdříve

$$v' = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{n}} \quad \text{ii)}$$

takže rovnice (3.6.15) přejde po integraci podle \tilde{n} na tvar

$$\hat{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{n}} \right)^2 = \frac{\hat{y}}{\hat{a}} \frac{\partial^2 \psi}{(\partial \tilde{n})^2}. \quad \text{iii)}$$

Použijeme-li nyní transformaci i), tj. $\psi = -2 \frac{\hat{y}}{\hat{a}} \ln \varphi$ dostáváme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \hat{a} \hat{y} \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial \tilde{n})^2} = \delta(\tilde{n}, t), \quad \text{iv)}$$

což je parabolická rovnice vedení tepla s počáteční podmínkou

$$\bar{\varphi}(\tilde{n}, t=0) = \exp \left[-\frac{\hat{a}}{2\hat{y}} \int_0^{\tilde{n}} \bar{v}(x) dx \right]. \quad \text{v)}$$

Zde $\delta(\tilde{n}, t)$ je Diracova Delta funkce reprezentující jednotkový zdroj tepla v bodě $\tilde{n}=0, t=0$. Fundamentální řešení rovnice iv)

(Vladimirov, 1967, postup, jak nalézt toto řešení je v pozn.³.8))

je

$$\mathcal{E}(\tilde{n}, t) = \frac{\theta(t)}{\sqrt{4x\hat{a}\hat{y}t}} \exp \left[-\frac{|\tilde{n}|^2}{4\hat{a}\hat{y}t} \right], \quad \text{vi)}$$

kde $\theta(t)$ je Heavisidova funkce^{16.3)}. Řešení rovnice iv) za počáteční podmínky v) je pak dáno konvolucí

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{n}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x) \mathcal{E}(\tilde{n}-x, t) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\hat{\alpha}\hat{\nu}t}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x) \exp\left[-\frac{(\tilde{n}-x)^2}{4\hat{\alpha}\hat{\nu}t}\right] dx. \end{aligned} \quad \text{vii)}$$

Dosazením do i) dostáváme hledané řešení (3.6.23).

Analýzou (3.6.23) nalezneme jak asymptotické řešení (3.6.20) pro $\hat{\nu} \rightarrow 0$, tak i řešení typu (3.6.21) pro $\hat{\nu} \rightarrow \infty$. Budeme vyšetřovat strukturu rázové vlny, jejíž počáteční tvar (3.6.22) byla "schodová" funkce

$$\bar{v} = \begin{cases} v^+, & \tilde{n} > 0 \\ v^- > v^+, & \tilde{n} < 0. \end{cases} \quad (3.6.24)$$

Dosazením do (3.6.23) a užitím integrálních formulí 3.6)

3.6)

viz Gradštejn, Ryžik, 1962

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\beta} - \gamma x} dx = \sqrt{\pi\beta} e^{\beta\gamma^2} [1 - \Phi(\gamma\sqrt{\beta})], \quad (\text{Re}\beta > 0),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-px^2 + 2qx} dx = \frac{q}{p} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{p}\right) \quad (\text{Re } p > 0).$$

odvodíme

$$v = v^+ + \frac{v^- - v^+}{1 + k \exp\left\{\frac{v^- - v^+}{2\hat{\alpha}\hat{\nu}} (\tilde{n} - u_{rv} t)\right\}}, \quad (3.6.25)$$

kde

$$u_{r.v.} = \frac{v^+ + v^-}{2}, \quad k = \frac{\Phi(v^+t - \tilde{n})}{\Phi(\tilde{n} - v^-t)}. \quad (3.6.26)$$

Pro nějaké pevné $\frac{\tilde{n}}{t}$ z intervalu $v^+ < \frac{\tilde{n}}{t} < v^-$ jde $k \rightarrow 1$ při $t \rightarrow \infty$. Dostáváme tak stacionární profil rázové vlny - obr. 3.9a)

$$v^- - v^+ = \frac{2\hat{\alpha}\hat{\nu}}{(\tilde{n} - u_{r.v.}t)} \ln \left| \frac{v^- - v}{v - v^+} \right|. \quad (3.6.27)$$

Tloušťku rázové vlny definujeme vztahem

$$\frac{l_{r.v.}}{2} = \frac{2\hat{\alpha}\hat{\nu}}{v^- - v^+} = \frac{4\{1 + (\kappa - 2)[1 - (M^+)^2]\}}{3\rho^+(v^- - v^+)} \mu \quad (3.6.28)$$

tak, že pokles rychlosti je roven $\frac{v^- - v}{v - v^+} = e$, viz obr. 3.9a). Tloušťka rázové vlny závisí tedy na intenzitě vlny $v^- - v^+$ a na velikosti $\hat{\nu}$, tj. především na smykové viskozitě μ a teplotní vodivosti λ_T (Hirschfelder, Curtiss, Bird, 1961).

n.3.9

→ Další důležité řešení Burgersovy rovnice odvodíme při počáteční podmínce

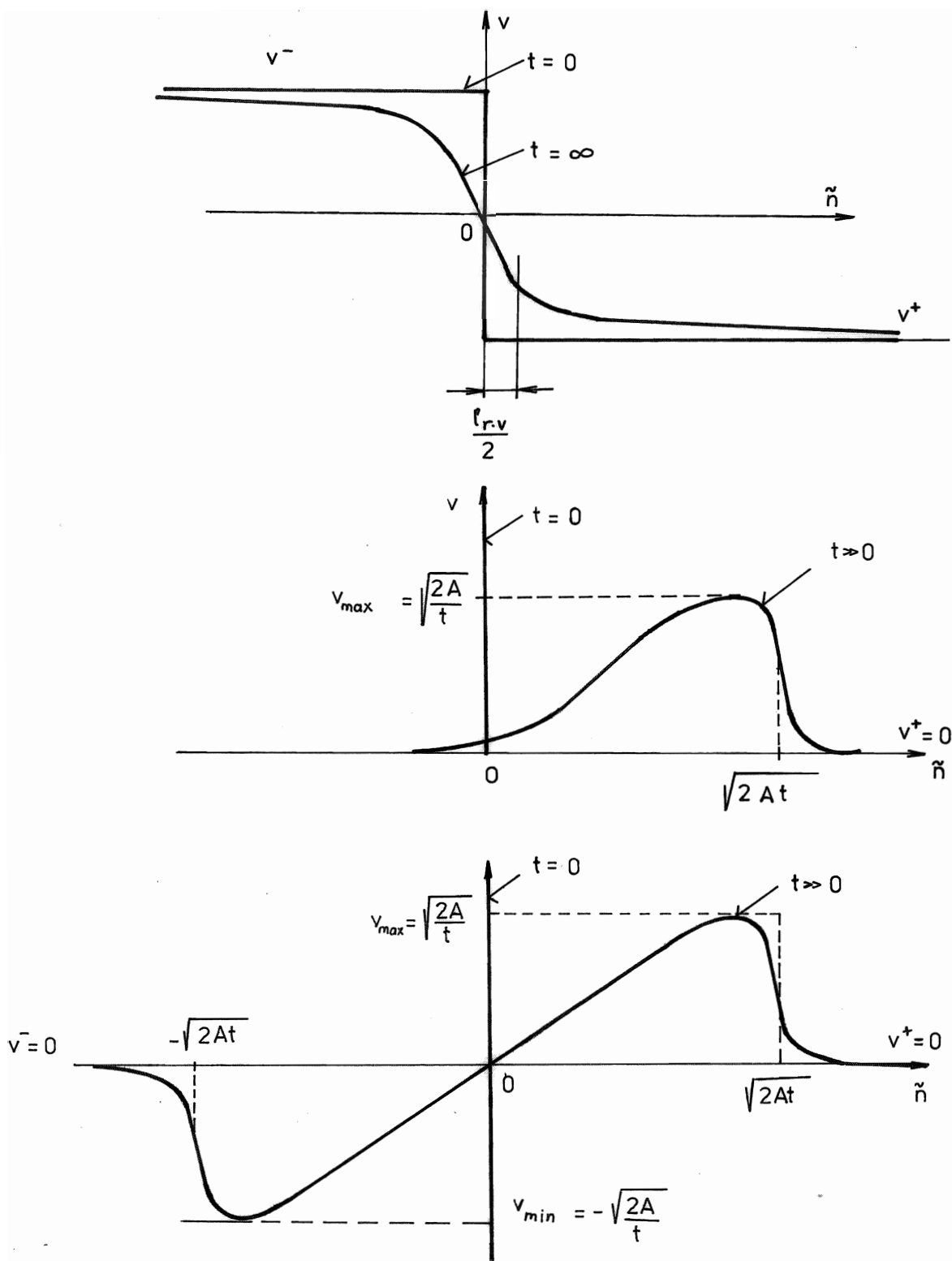
$$\bar{v}(\tilde{n}) = A\delta(\tilde{n}) \quad \text{pro } t=0. \quad (3.6.29)$$

Odpovídá "vzryvu" s intenzitou A v bodě $\tilde{n}=0$.

Zavedeme-li Reynoldsovo akustické číslo vztahem

$$R = \frac{1}{2\hat{\alpha}\hat{\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}(\tilde{n}) d\tilde{n} = \frac{A}{2\hat{\alpha}\hat{\nu}} \quad (3.6.30)$$

tak pro $R \rightarrow 0$ (silné disipativní účinky) má řešení tvar



Obr.3.9

Vývoj silných poruch

- a) rázové vlny
- b) vzryvu $\bar{v}(\tilde{x}) = A \delta(\tilde{x})$
- c) vznik N - vlny

$$v'(\tilde{n}, t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi\hat{\alpha}\hat{\nu}t}} \exp\left[-\frac{(\tilde{n})^2}{4\hat{\alpha}\hat{\nu}t}\right] \quad (3.6.31)$$

viz vztah vi) pozn. 3.5). Pro $R \rightarrow \infty$ má řešení (3.6.23) opět tvar (3.6.20), viz obr. 3.9b), tj.

$$v'(t, \tilde{n}) \sim \begin{cases} \frac{\tilde{n}}{t} & \text{pro } 0 < \tilde{n} < \sqrt{2At} \\ 0 & \text{pro ostatní.} \end{cases} \quad (3.6.32)$$

Čelo vlny je v okolí bodu $\tilde{n} - \sqrt{2At} = 0$ a je popsáno přibližně vztahem

$$v'(t, \tilde{n}) \sim \sqrt{\frac{2A}{t}} \frac{1}{1 + \exp\left\{\frac{1}{2\hat{\alpha}\hat{\nu}} \sqrt{\frac{2A}{t}} (\tilde{n} - \sqrt{2At}) + \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi A}{\hat{\alpha}\hat{\nu}}\right\}} \quad (3.6.33)$$

který souhlasí se vztahem (3.6.25) při $v^- - v^+ = \sqrt{\frac{2A}{t}}$ (Whitham, 1974). Rychlost posuvu čela v soustavě souřadnic unášené rychlostí \dot{c}^* (3.6.14) je $\tilde{u}_{r,v} = \sqrt{\frac{2A}{t}}$. Porucha (3.6.29) dostává pro $R \rightarrow \infty$ a $t \gg 0$ trojúhelníkový tvar (tzv. "hrb", viz obr. 3.9b) a srovnej s 3.7c).

Přelet nadzvukových letadel bývá doprovázen tzv. aerodynamickým třeskem ((Dvořák, 1986), který lze interpretovat jako tzv. N-vlnu, viz obr. 3.9c). Jde o řešení Burgersovy rovnice (3.6.15) ve tvaru 3.7)

$$v'(\tilde{n}, t) = \frac{\tilde{n} \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \exp\left(-\frac{(\tilde{n})^2}{4\hat{a}\hat{\nu}t}\right)}{t \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \exp\left(-\frac{(\tilde{n})^2}{4\hat{a}\hat{\nu}t}\right)\right]} \quad \text{pro } \alpha > 0, \quad (3.6.34)$$

které je kombinací řešení (3.6.31) a (3.6.32) a pro $t \rightarrow 0$ má vlastnost Diracovy funkce $\delta(\tilde{n})$ (3.7). Reynoldsovo akustické

3.7)

Vyjdeme z řešení rovnice vedení tepla, rovnice iv) pozn. (3.5) ve tvaru

$$\varphi(\tilde{n}, t) = 1 + \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \exp\left(-\frac{(\tilde{n})^2}{4\hat{a}\hat{\nu}t}\right) \quad \text{pro } \alpha > 0. \quad \text{i)}$$

Funkce

$$v'(\tilde{n}, t) = -\frac{2\hat{\nu}}{\hat{a}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}}}{\varphi} \quad \text{ii)}$$

musí být řešením Burgersovy rovnice a je rovna vztahu (3.6.34).

Funkce

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \exp\left(-\frac{(\tilde{n})^2}{4\hat{a}\hat{\nu}t}\right) = \delta(\tilde{n}) \quad \text{iii)}$$

je Diracovou funkcí (viz Vladimírov, 1967).

číslo (3.6.30) má pro hledanou část poruchy hodnotu

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{A}{2\hat{a}\hat{\nu}} = \frac{1}{2\hat{a}\hat{\nu}} \int_0^{\infty} v'(\tilde{n}, t=0) d\tilde{n} = -\frac{1}{(\hat{a})^2} \left[\ln \varphi \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{(\hat{a})^2} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha}{t}} \right). \end{aligned} \quad (3.6.35)$$

Pro $R_0 \rightarrow \infty$, $t \gg 0$

dostáváme řešení

$$v'(\tilde{n}, t) \sim \begin{cases} \frac{\tilde{n}}{t} & \text{pro } -\sqrt{2At} < \tilde{n} < \sqrt{2At} \\ 0 & \text{pro } |\tilde{n}| > \sqrt{2At} \end{cases} \quad (3.6.36)$$

Čela této N-vlny mají podobný tvar jako (3.6.3), viz obr. 3.9c). Velikost tlakového pulzu vyvolaného rázovou vlnou (3.6.25) "hrbem" (3.6.32), (3.6.33) a N-vlnou (3.6.36) vypočteme podle vztahu (3.6.6) ($M^+ = 0$, tj. prostředí před vlnou je v klidu) tak, že odpovídající rozložení rychlosti $v' = v'(n - c^+ t, t)$ dosadíme do vztahu

$$\frac{\Delta p}{p^+} \sim \alpha \frac{\rho'}{\rho^+} = \alpha \frac{v'}{c^+} \quad (3.6.37)$$

3.7 Akcelerační a slabé vlny v tekutinách

Amplituda a^i akcelerační vlny je rovna skoku zrychlení (3.3.5) na ploše nespojitosti. Její časová změna je popsána podmínkou kompatibility (3.3.12) a lze ji dobře nalézt zvláště v těch případech, kdy je tvar plochy předem znám. V tomto případě lze snadno určit skok $\left[\frac{\partial^2 v^i}{\partial x^j \partial x^k} \right]$ (3.3.13). Hlavní předností tohoto přístupu je postižení nelineárních jevů projevující se jak v důsledku nevyrovnaného proudového pole, tak i geometrie.

V teorii slabých vln (tzv. akustické přiblížení) vycházíme z linearizovaných rovnic, kde nelze popsat takové jevy jako je zestrmování poruch, viz obr. 3.8, a jejich kumulaci. Všechny veličiny používané v této teorii jsou reprezentovány spojitými funkcemi, včetně derivací.

Budeme vyšetřovat šíření zakřivených akceleračních vln v nevyrovnaném proudovém poli. Předpokládejme, že změna entropie je ve vlně tak malá, že ji lze zanedbat (jak vyplýne ze srovnání) se změnou entropie v rázové vlně (3.5.27). Vyjdeme z rovnic

$$\dot{\rho} = -\rho \frac{\partial v^l}{\partial x^l}, \quad \dot{v}_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i}, \quad p = p(\rho) = \frac{p_s}{\rho_s^{\kappa}} \rho^{\kappa}, \quad (3.7.1)$$

jsou to postupně rovnice bilance hmotnosti (3.5.1), bilance hybnosti (3.5.2) a rovnice izentropického procesu (I.7.4.4). V každém bodu proudového pole platí mezi p, ρ, T a unášivou rychlostí $|\underline{v}| = (v^i v_i)^{\frac{1}{2}}$ vztahy (I.7.4.9).

Amplitudu akcelerační vlny a_i (3.3.5) určíme z druhé rovnice (3.7.1) za předpokladu, že hustota ρ je skrz singulární plochu spojitá. Tudiž

$$a_i = [\ddot{x}_i] = - \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} \right] = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left[\frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right] = - \frac{c^2}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right], \quad (3.7.2)$$

kde $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ je kvadrát rychlosti zvuku (I.7.4.7)₁. Ze spojitosti hustoty $[\rho] = 0$, s ohledem na podmínku kompatibility (3.2.15) a díky rovnici bilance hmotnosti (3.7.1)₁ plyne

$$[\dot{\rho}] = - U \left[n^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right] = - \rho \left[\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right]. \quad (3.7.3)$$

Pro podélné vlny s amplitudou $a = a_i n^i$, zde n^i je vektor normály ve směru šíření, obdržíme dosazením (3.7.2) do (3.7.3) následující důležité vztahy pro akcelerační vlny

$$\left[\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right] = - \frac{a}{c}, \quad U = c, \quad \left[n^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right] = - \frac{\rho a}{c}, \quad [\dot{\rho}] = \frac{\rho a}{c}. \quad (3.7.4)$$

Srovnáním prvního výrazu se vztahem (3.3.10)₁ dostáváme druhou rovnici, podle které je rychlost šíření U akcelerační vlny rovna rychlosti zvuku c . Podmínka kompatibility (3.3.12) má pro zakřivenou plochu (3.3.14) tvar

$$2 \frac{\delta a}{\delta t} - \frac{a}{c} \frac{\delta c}{\delta t} = [\ddot{v}_i n^i] - c^2 \delta^{ij} \left[n^l \frac{\partial^2 v_l}{\partial x^i \partial x^j} \right] - \frac{2ca}{R}, \quad (3.7.5)$$

kde \bar{R} je střední křivost plochy (I.D2.140).

První dva členy na pravé straně podmínky (3.7.5) vyjádříme pomocí amplitudy poruchy. Vyjdeme z materiálové derivace zákona bilance hybnosti (3.7.1)₂, čili

$$\begin{aligned}
n^i \ddot{v}_i &= -n^i \overline{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right)} = -n^i \left[\frac{\partial \rho}{\partial x^i} \overline{\left(\frac{1}{\rho} \right)} + \frac{1}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right)} \right] = \\
&= -n^i \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right) - \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho^2} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right]. \quad (3.7.6)
\end{aligned}$$

Materiálová derivace gradientu hustoty je s ohledem na rovnici bilance hmotnosti (3.7.1)₁ rovna

$$\begin{aligned}
n^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} &= n^i \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x^i} \right) + v^l \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^l \partial x^i} \right] = \\
&= n^i \left(\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial x^i} - \frac{\partial \rho}{\partial x^l} \frac{\partial v^l}{\partial x^i} \right) = -n^i \left(\rho \frac{\partial^2 v^l}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial v^l}{\partial x^l} + \frac{\partial \rho}{\partial x^l} \frac{\partial v^l}{\partial x^i} \right).
\end{aligned}$$

(3.7.7)

Vztahy (3.7.6) a (3.7.7) dosadíme do podmínky kompatibility (3.7.5) a dostáváme výchozí rovnici pro změnu amplitudy zakřivené akcelerační vlny. Platí

$$\begin{aligned}
2 \frac{da}{dt} - \frac{a}{c} \frac{dc}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial \rho^2} \left[n^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \left[n^i \frac{\partial v^l}{\partial x^i} \frac{\partial \rho}{\partial x^l} \right] + \\
&+ \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \left[n^i \frac{\partial^2 v^l}{\partial x^i \partial x^l} \right] - \frac{2}{c} \delta^{ij} \left[n^l \frac{\partial^2 v^l}{\partial x^i \partial x^j} \right] - \frac{2ca}{R}.
\end{aligned}$$

(3.7.8)

Členy na pravé straně rovnice vyjádříme pomocí amplitudy vlny a stavem prostředí před vlnou (označené +). K tomu použijeme následující identity. Nechť φ, ψ jsou nějaké dvě veličiny definované v prostředí. Pak s ohledem na (3.1.3)₁ platí

$$[\varphi\psi] = \varphi^+[\psi] + \psi^+[\varphi] - [\varphi][\psi].$$

(3.7.9)

Třetí až pátý člen na pravé straně (3.7.8) určíme v závislosti na tvaru vlny.

Konkrétní využití podmínky kompatibility pro akcelerační vlny (3.7.8) ukážeme na příkladu šíření poruchy válcového tvaru v nevyrovnaném izentropickém proudu stlačitelné tekutiny. Předpokládejme, že jde o podélnou vlnu s poloměrem $r = \frac{R}{2}$ (I.D2.141), šířící se od úplavu obtékaného tělesa proti proudu, viz obr. 3.10. Na vlně zavedeme válcové souřadnice (r, θ, z) přičemž r má směr normály. Rychlostní pole vyjádříme vektorem $\mathbf{v} = (v_r, 0, 0)$ a diferenciální operátory (viz (I.D2.92), (I.D2.94) a (I.D2.95)) se redukuji na

$$n^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad n^i \frac{\partial v^l}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial v^l}{\partial x^l} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r},$$

$$n^i \frac{\partial^2 v^l}{\partial x^i \partial x^l} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} \right], \quad \delta^{ij} \left(n^l \frac{\partial^2 v_l}{\partial x^i \partial x^j} \right) = \frac{\partial^2 v_r}{(\partial r)^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r}.$$

(3.7.10)

Tyto dosadíme do podmínky (3.7.8) (pro $\mathcal{D} = \frac{\partial p}{\partial \varphi}$) a dostáváme

$$2 \frac{\delta a}{\delta t} - \frac{a}{c} \frac{\delta c}{\delta t} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{c^2}{\varrho} \right) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} \right] - \frac{\partial v_r}{\varrho r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] - \frac{c a}{r}.$$

(3.7.11)

Rychlost V_r je napříč vlnou spojitá.

Podmínku (3.7.11) upravíme na konečný tvar tak, že dosadíme (3.7.10) do (3.7.4)₂, (3.7.4)₃ a (3.7.2) a využijeme identity (3.7.9). Dostáváme

$$\frac{2\delta a}{\delta t} = - \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho^2} + \frac{c^2}{\rho} \right) \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^+ + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^+ - \frac{\rho v_r}{r c^2} \right] + \frac{c - v_r}{r} - \frac{1}{c} \frac{dc}{dt} \right\} a - \frac{\rho}{c^3} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} + \frac{c^2}{\rho} \right) a^2. \quad (3.7.12)$$

Při izentropickém proudění stlačitelné tekutiny popsaném vztahy (I.7.4.4) a (I.7.4.9) platí před vlnou

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} + \frac{c^2}{\rho} = \frac{\alpha c^2}{\rho}, \quad \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^+ + \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^+ = \frac{\rho}{c^2} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^+, \quad (3.7.13)$$

kde $V = v(r)$ je rychlost proudového pole podél souřadnice r , viz obr. 3.10a.

Vlna postupuje proudovým polem ve směru normály rychlostí $u_{(n)} = c + V_{(n)} = c - v$ (viz (3.2.5)). Takže $v_{(n)} = v_r = -v$ a všechny vztahy vyjádříme pomocí rychlosti V , čili

$$-2\hat{x} = \alpha (1 - M) \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^+ - \frac{c}{r} \left[1 - (\alpha - 1) M \right] + \frac{1}{c} \frac{dc}{dt}, \quad (3.7.14)$$

$$\hat{E} = -\frac{2c\hat{x}}{\alpha}, \quad \text{pro } M = \frac{v}{c} \quad (3.7.15)$$

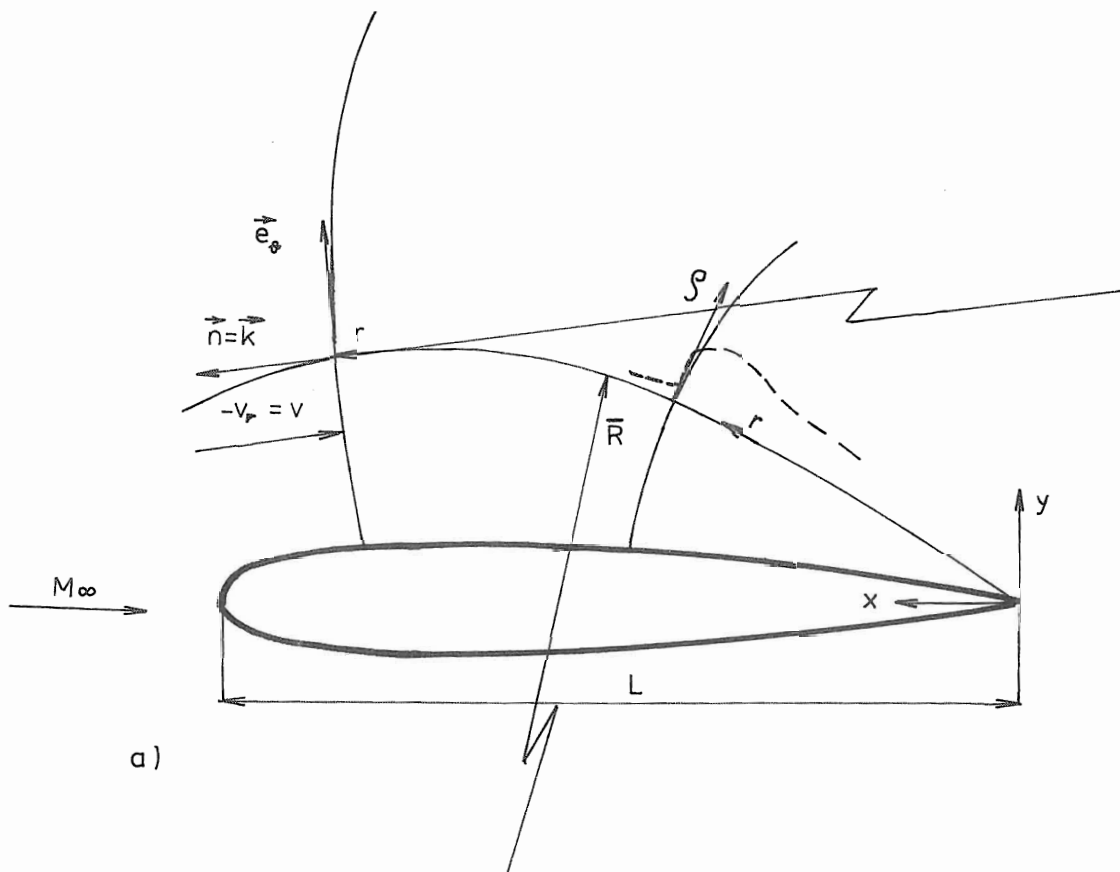
obr. 3.10 →

a rovnice (3.7.12) pro výpočet amplitudy akcelerační vlny má konečný tvar (Coleman, Gurtin, 1965, 1967)

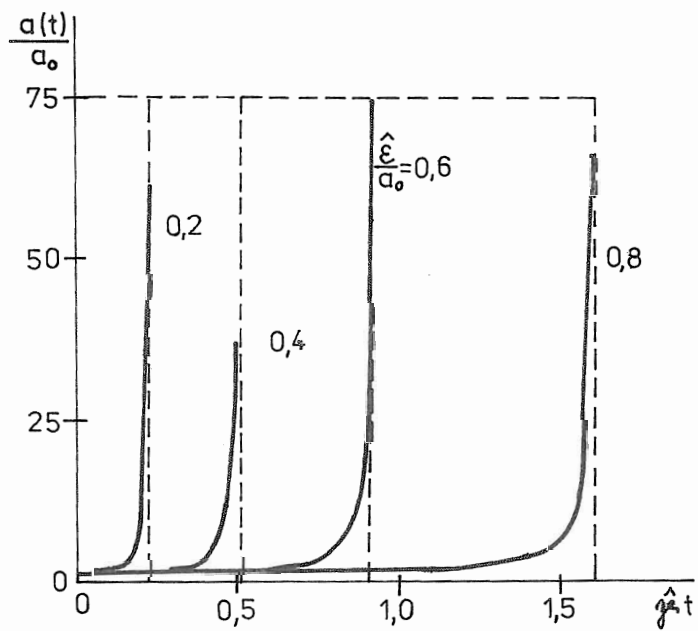
Obr.3.10

Šíření poruch od úplavu do okolí profilu

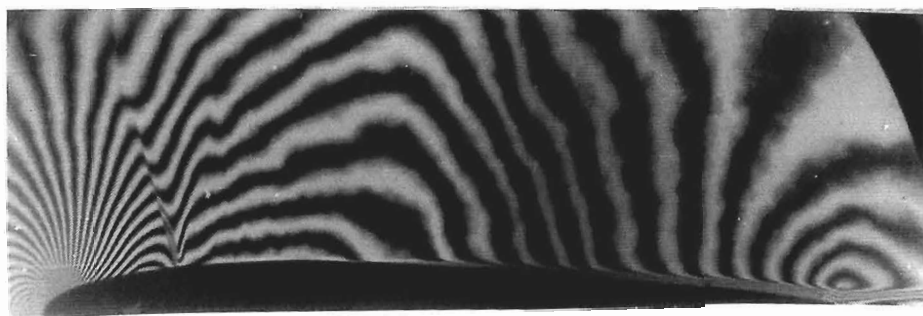
- a) stáčení poruch do oblasti větší rychlosti s vyznačením průběhu hustoty
- b) nárůst poměrné amplitudy $\frac{a(t)}{a_0}$ akcelerační vlny v závislosti na bezrozměrovém čase $\hat{y} \hat{t}$ pro různé hodnoty $\frac{\hat{\xi}}{a_0}$
- c) interferogram proudového pole v okolí profilu NACA 0012 při $M_\infty = 0,707$ (experiment ÚT ČSAV)



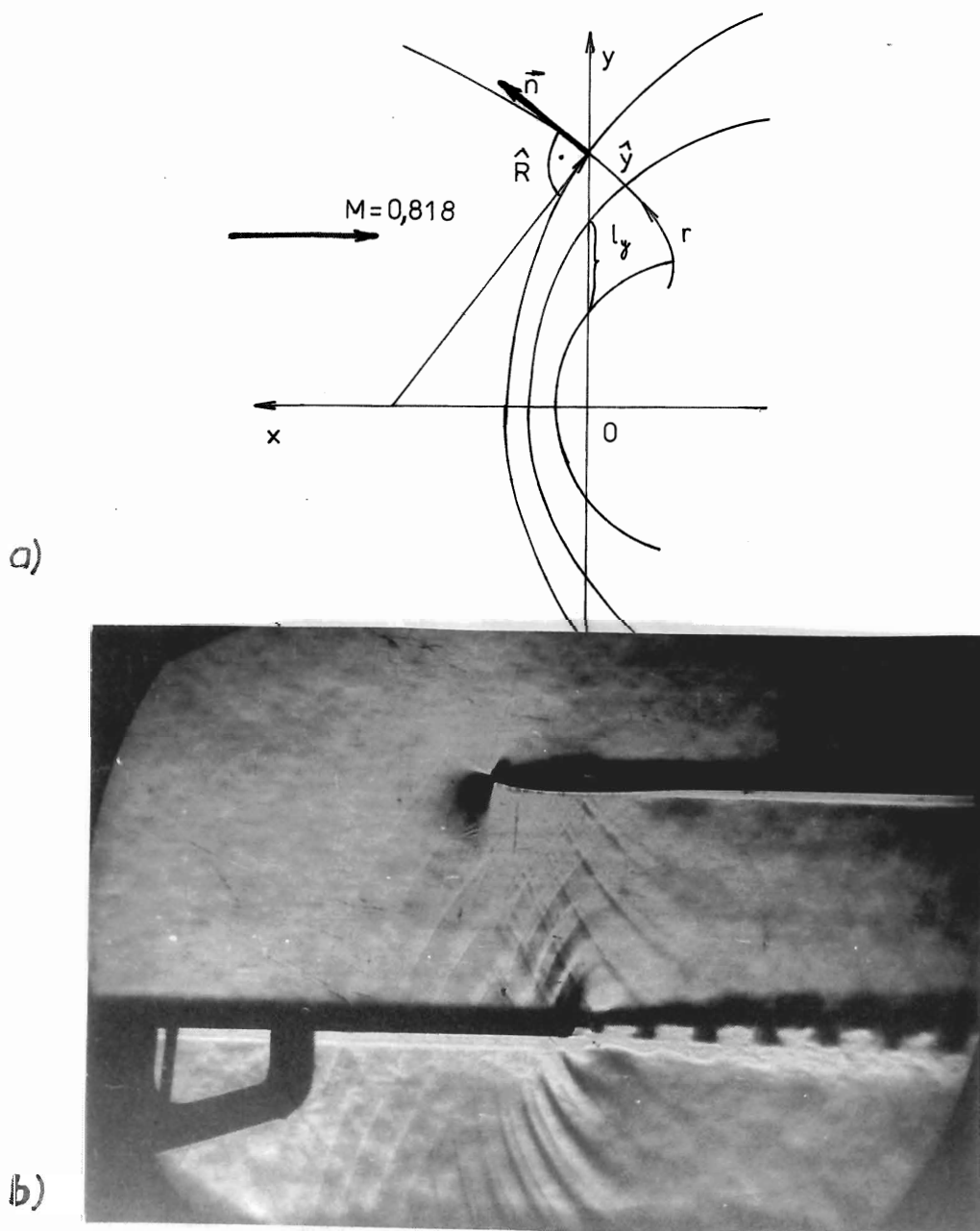
a)



b)



c)



Obr.3.11

- a) Stáčení poruch v rovině úplavu
- b) Poruchy generované Kármánovou vírovou řadou při $M_{\infty} = 0,818$ vedou k nestabilitě v mezní vrstvě na vedlejším profilu (experiment ÚT ČSAV)

$$\frac{\delta a}{\delta t} = -\hat{\gamma} a + \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\epsilon}} a^2. \quad (3.7.16)$$

Její řešení za předpokladu, že $\hat{\gamma}$, $\hat{\epsilon}$ jsou konstanty a pro počáteční podmínku $a(t=0) = a_0$ je

$$\frac{a}{a_0} = \frac{\frac{\hat{\epsilon}}{a_0}}{\left(\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} - 1\right)e^{\hat{\gamma}t} + 1}. \quad (3.7.17)$$

Proměnná amplituda $\frac{a}{a_0}$ se při šíření vlny mění v závislosti na parametrech proudového pole před vlnou:

- 1) klesá k nule, když je $\hat{\gamma} > 0$ a $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} > 1$ nebo $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} < 0$,
klesá k $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0}$ pro $\hat{\gamma} < 0$ a $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} > 1$
- 2) zůstává konstantní pro $a_0 = \hat{\epsilon}$
- 3) roste nade všechny meze pro $\hat{\gamma} > 0$, $0 < \frac{\hat{\epsilon}}{a_0} < 1$
a nebo pro $\hat{\gamma} < 0$ pro $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} < 1$.

Analýza stability stacionárního řešení rovnice (3.7.16) je uvedena v kap. 4.2.1, vztah 4.2.14.

Definujeme kritickou amplitudu vztahem $\frac{\hat{\epsilon}}{a_{\text{krit}}} = 1$ tj.

$$a_{\text{krit}} = \hat{\epsilon} = -\frac{2c\hat{\gamma}}{\alpha\epsilon} = c(1-M)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^+ - \frac{c^2}{\alpha\epsilon r} [1 - (\alpha\epsilon - 1)M] + \frac{1}{\alpha\epsilon} \frac{\delta c}{\delta t} \quad (3.7.18)$$

zahrnujícím postupně vliv gradientu rychlostního pole před vlnou, vliv zakřivení vlny a změnu rychlosti šíření. Je-li počáteční amplituda vlny a_0 větší než $\hat{\epsilon}$ dochází k jejímu nárůstu (alternativa 3)) za čas

$$t_{\infty} = \frac{1}{|\hat{\gamma}|} \ln \left| \frac{1}{1 - \frac{\hat{\epsilon}}{a_0}} \right| \quad (3.7.19)$$

viz obr. 3.10b).

$$\frac{\delta a}{\delta t} = -\hat{\gamma} a + \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\epsilon}} a^2. \quad (3.7.16)$$

Její řešení za předpokladu, že $\hat{\gamma}$, $\hat{\epsilon}$ jsou konstanty a pro počáteční podmínku $a(t=0) = a_0$ je

$$\frac{a}{a_0} = \frac{\frac{\hat{\epsilon}}{a_0}}{\left(\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} - 1\right)e^{\hat{\gamma}t} + 1}. \quad (3.7.17)$$

Proměnná amplituda $\frac{a}{a_0}$ se při šíření vlny mění v závislosti na parametrech proudového pole před vlnou:

1) klesá k nule, když je $\hat{\gamma} > 0$ a $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} > 1$ nebo $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} < 0$,

klesá k $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0}$ pro $\hat{\gamma} < 0$ a $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} > 1$

2) zůstává konstantní pro $a_0 = \hat{\epsilon}$

3) roste nade všechny meze pro $\hat{\gamma} > 0$, $0 < \frac{\hat{\epsilon}}{a_0} < 1$

a nebo pro $\hat{\gamma} < 0$ pro $\frac{\hat{\epsilon}}{a_0} < 1$.

Analýza stability stacionárního řešení rovnice (3.7.16) je uvedena v kap. 4.2.1, vztah 4.2.14.

Definujeme kritickou amplitudu vztahem $\frac{\hat{\epsilon}}{a_{\text{krit}}} = 1$ tj.

$$a_{\text{krit}} = \hat{\epsilon} = -\frac{2c\hat{\gamma}}{\alpha\epsilon} = c(1-M)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^+ - \frac{c^2}{\alpha\epsilon r} [1 - (\alpha\epsilon - 1)M] + \frac{1}{\alpha\epsilon} \frac{\delta c}{\delta t} \quad (3.7.18)$$

zahrnujícím postupně vliv gradientu rychlostního pole před vlnou, vliv zakřivení vlny a změnu rychlosti šíření. Je-li počáteční amplituda vlny a_0 větší než $\hat{\epsilon}$ dochází k jejímu nárůstu (alternativa 3)) za čas

$$t_{\infty} = \frac{1}{|\hat{\gamma}|} \ln \left| \frac{1}{1 - \frac{\hat{\epsilon}}{a_0}} \right| \quad (3.7.19)$$

viz obr. 3.10b).

Pro rovinné vlny ($r \rightarrow \infty$) a při zanedbání $\frac{\delta c}{\delta t}$ (předpokládáme, že rychlost šíření je konstantní) dostáváme pro kritickou amplitudu (3.7.18) vztah

$$\hat{E} = c(1-M)\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^+ . \quad (3.7.20)$$

Tudíž kritická amplituda se zmenšuje s $M \rightarrow 1$ a původní (počáteční) amplituda a_0 se v jednom místě proudového pole tlumí a v jiném zesiluje. Tento fakt je dobře patrný na interferogramu obr. 3.10c), kde je $\frac{\partial v}{\partial r} > 0$ a $M \rightarrow 1$ směrem k profilu. Těsně u profilu přechází porucha ve slabou rázovou vlnu.

3.7.1. Šíření slabých vln v unášeném prostředí

Slabé poruchy vznikající v úplavu (obr. 3.10) či v důsledku nestability v mezní vrstvě (obr. 3.11) se zestrnují a stáčejí proti proudu. V akustickém přiblížení je jejich šíření popsáno linearizovanými rovnicemi bilance (3.7.1)

Předpokládejme potenciální rychlostní pole ve tvaru

$$\varphi(x^i, t) = v_{0\ell} x^\ell + \varphi'(x^i, t), \quad v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = v_{0i} + \frac{\partial \varphi'}{\partial x^i}, \quad (3.7.21)$$

kde v_0 je unášivá rychlost a φ' je poruchový potenciál. Rychlost v_0 se může jen velmi málo měnit v závislosti na x^i , tj.

$$\left| \frac{\partial v_{0\ell}}{\partial x^i} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^i \partial x^\ell} \right|.$$

Za těchto předpokladů z rovnic (3.7.1)₁ a (3.7.1)₂ plyne

$$\dot{\rho} = -\rho_0 \delta^{\ell k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\ell \partial x^k} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \dot{p}, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = c^{-2}. \quad (3.7.22)$$

Bilance hybnosti (3.7.1)₂ vede pro pole (3.7.21) k podmínce

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0^\ell \frac{\partial \varphi}{\partial x^\ell} + \frac{1}{\rho_0} p \right) = 0, \quad \text{resp.} \quad \ddot{\varphi} + \frac{1}{\rho_0} \dot{p} = 0. \quad (3.7.23)$$

Dosazením (3.7.23) do (3.7.22) a zanedbáním malých členů vyššího řádu dostáváme výchozí rovnici akustické teorie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2v_0^\ell \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^\ell \partial t} + (v_0^\ell v_0^k - c^2 \delta^{\ell k}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\ell \partial x^k} = \delta(x^i, t). \quad (3.7.24)$$

Pravá strana této rovnice obsahuje zdroje poruch. Zde $\delta(\underline{x}'; t)$ je Diracova funkce vyjadřující jednotkový zdroj v počátku $\underline{x} = 0$ a v čase $t = 0$. Cauchyho úloha pro tuto rovnici je formulována v tom případě, jsou-li zadány počáteční podmínky

$$\begin{aligned}\varphi'(t=0, \underline{x}^i) &= \hat{\varphi}'(\underline{x}^i) \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t}(t=0, \underline{x}^i) &= \psi(\underline{x}^i).\end{aligned}\quad (3.7.25)$$

Rovnici šíření akustických vln (3.7.24) zredukujeme na dvou-rozměrný případ $\underline{x} = (x, y)$, $\underline{v} = (v_0, 0)$. Cílem je popsat vyzařování harmonických poruch z úplavu a proto předpokládáme zdroj poruch ve tvaru $e^{i\omega t} \delta(\underline{x}, y)$. Tudiž rovnice (3.7.23) má tvar

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} + [(v_0)^2 - c^2] \frac{\partial^2 \varphi'}{(\partial x)^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{(\partial y)^2} = e^{i\omega t} \delta(\underline{x}, y).\quad (3.7.26)$$

Fundamentální řešení 3.8) diferenciálního operátoru na levé straně je

$$\mathcal{E}(\underline{x}, y, t) = \frac{\theta(ct - |(x-vt)^2 + y^2|)}{2\pi c \sqrt{(ct)^2 - (x-v_0 t)^2 - y^2}}.\quad (3.7.27)$$

3.8)

Řešení operátoru

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} + [(v_0)^2 - c^2] \frac{\partial^2 \varphi'}{(\partial x)^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{(\partial y)^2} = \delta(\underline{x}, y, t) \quad i)$$

pro $\underline{x}, y \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$, tzv. fundamentální řešení, můžeme nalézt metodou Fourierovy transformace

$$F[\varphi'](\xi, \eta) = F = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x, y) e^{i(x\xi + y\eta)} dx dy,$$

$$F^{-1}[F](x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F[\varphi'](\xi, \eta) e^{-i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta = \varphi'(x, y) \quad \text{ii)}$$

(Vladimirov, 1967). Dosazením ii) do i) dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 F}{dt^2} - 2v_0 \xi \frac{dF}{dt} + [(\dot{c}^2 - v)^2 (\xi)^2 + \dot{c}^2 (\eta)^2] F = \delta(t), \quad \text{iii)}$$

protože Fourierův obraz derivace funkce je

$$F\left[\frac{\partial^{\alpha+\beta} \varphi'}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right](\xi, \eta) = (-i\xi)^\alpha (-i\eta)^\beta F[\varphi'](\xi, \eta). \quad \text{iv)}$$

(Použijeme-li integraci per partes za předpokladu, že funkce $\varphi'(x, y)$ a její derivace jsou pro $|x|, |y| \rightarrow \infty$ nulové). Řešení rovnice iii) hledáme ve tvaru $F = \Theta(t) \mathcal{Z}(t)$, kde $\Theta(t)$ je Heavisidova funkce (viz pozn. I.6.3), jejíž zobecněná derivace je $\delta(t)$. Zobecněná derivace $\frac{df}{dt}$ (Vladimirov, 1967) funkce $f(t)$, která má v bodě $t = t_0$ skok $[[f]]_{t_0} = f(t_0^+) - f(t_0^-)$ je definována pomocí integrálu (analogicky (2.1.2)) a je rovna

$$\frac{df}{dt} = \left\{ \frac{df}{dt} \right\}_{t \neq t_0} + [[f]]_{t_0} \delta(t - t_0). \quad \text{v)}$$

Zde $\left\{ \frac{df}{dt} \right\}_{t \neq t_0}$ je obvyklá derivace v bodech spojitosti, viz obr. 2.1. Ve smyslu derivace v) je rovnice iii) splněna za počátečních podmínek $\mathcal{Z}(0) = 0, \frac{d\mathcal{Z}}{dt}(0) = 1$ a její řešení je tudíž rovno

$$F = \frac{\theta(t)}{2ic|\vartheta|} \left[e^{i(v_0\xi + c|\vartheta|)t} - e^{-i(-v_0\xi + c|\vartheta|)t} \right]$$

vi)

$$\text{pro } \vartheta = \sqrt{(\xi)^2 + (\eta)^2}.$$

Fundamentální řešení (3.7.26) získáme zpětnou transformací ii). Skutečně, přechodem od souřadnic ξ, η k polárním souřadnicím ϑ, α , kde úhel α svírá vektor $v = (\xi, \eta)$ s vektorem $z = (v_0 t - x, -y)$ lze integrál zpětné transformaci přepsat

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, t) &= F^{-1}[F] = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2 c} \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} \sin(ct, \vartheta') e^{i\vartheta'|z|\cos\alpha} d\alpha d\vartheta' = \\ &= \frac{\theta(ct - |z|)}{2\pi c \sqrt{(ct)^2 - z^2}} \end{aligned}$$

vii)

Při úpravě jsme použili integrálních výrazů pro Besselovy funkce

$$J_0(|z|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i|z|\sin\alpha} d\alpha, \quad \int_0^{\infty} J_0(|z|\vartheta) \sin(ct\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - |z|^2}}$$

pro $|ct| > |z|$.

(Gradštejn, Rižik, 1962; formule 8.411 a 6.671).

Fundamentální řešení (3.7.27) plyne přechodem zpět k proměnným x, y .

Obecné řešení Cauchyho úlohy je pak dáno superpozicí poruch od počátečních podmínek (3.7.24) a od jejich zdroje $f(x^i, t)$
Má tvar konvoluce

$$\varphi'(x, y, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x-\xi, y-\eta, t-\tau) \left[\hat{\varphi}'(\xi, \eta) \delta(\tau) + \psi(\xi, \eta) \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} + f(\xi, \eta, \tau) \right] d\xi d\eta d\tau. \quad (3.7.28)$$

Protože nás zajímá především ustálený stav, je vliv počátečních podmínek nulový a hledané řešení je s ohledem na (3.7.27) dáno integrálem

$$\varphi'(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \iint_{S(z, ct)} \frac{e^{i\omega\tau} \delta(\xi, \eta) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - [x-\xi - v_0(t-\tau)]^2 - (y-\eta)^2}}, \quad (3.7.29)$$

kde $S(z, ct)$ je kružnice se středem v bodě $z = (v_0 t - x, y)$ o poloměru ct (unášena v záporném směru osy x rychlostí v_0 , viz obr. 3.11a). Provedením integrace po tomto kruhu dostáváme integrál

$$\varphi'(x, y, t) = \pm \frac{e^{-i\omega \left[t - \frac{Mx}{c(1-M^2)} \right]}}{2\pi c^2 \sqrt{1-M^2}} \int_{w_D}^{w_H} \frac{e^{\pm iaw}}{\sqrt{w^2 - 1}} dw, \quad (3.7.30)$$

kde jsme pro jednoduchost zavedli substituci

$$w^2 = \frac{x^2 M^2 + (1-M^2)[(c^2 - v^2)(t-\tau)^2 + 2v_0(t-\tau)]}{x^2 + y^2(1-M^2)}, \quad M = \frac{v_0}{c}$$

$$\tau = t - \frac{Mx \pm w \sqrt{x^2 + y^2(1-M^2)}}{c(1-M^2)}, \quad a = \frac{\omega \sqrt{x^2 + y^2(1-M^2)}}{c(1-M^2)} \quad (3.7.31)$$

$$w_D = w(\tau = t), \quad w_H = w(\tau = 0).$$

Integrační meze jsou v intervalu $1 \leq w_D \leq w_H < \infty$
 Integrál v (3.7.30) lze pro $(ct)^2, x^2 \gg y^2$ přibližně za-
 psat jako součet

$$\begin{aligned}
 -i \int_1^{\infty} \frac{\sin(aw) \mp i \cos(aw)}{\sqrt{w^2-1}} dw &= -\frac{\pi i}{2} [J_0(a) \pm i N_0(a)] = \\
 &= \begin{cases} -i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(a) \doteq -i \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{i(a - \frac{\pi}{4})} \\ i \frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(a) \doteq i \sqrt{\frac{\pi}{2a}} e^{-i(a - \frac{\pi}{4})} \end{cases} \quad (3.7.32)
 \end{aligned}$$

kde $J_0(a)$, $N_0(a)$, $H_0^{(1)}(a)$, $H_0^{(2)}(a)$
 jsou postupně Besselova, Neumannova a Hankelova funkce nultého
 řádu (Gradštejn, Rižik, 1962, formule 3.783, Tichonov, Samarskij
 1955). Poslední vztahy platí přibližně pro $|a| \gg 0$.

Dosazením (3.7.32) do integrálu (3.7.30) obdržíme konečné
 řešení rovnice (3.7.26) ve tvaru dvou válcových vlnoploch, z nichž
 ta, která se šíří proti proudu , viz obr. 3.11a), je popsána
 vztahem

$$\begin{aligned}
 \varphi'(x,y,t) &= \frac{Ae^{i\beta}}{\sqrt{x^2 + y^2(1-M^2)}} \quad , \quad \beta = \omega \left[t - \frac{Mx + \sqrt{x^2 + (1-M^2)y^2}}{c(1-M^2)} \right] , \\
 A &= -i \sqrt{\frac{1}{8c^3\omega}} \quad (3.7.33)
 \end{aligned}$$

(Maršik, 1978). Amplituda poruchy slábne se vzdáleností od zdroje
 a plochy konstantní fáze jsou kružnice $S(z,ct)$, jejichž rovnicí
 je $\beta = \text{konst.}$ Pro $\beta = 0$ a $z = ct$ dostáváme

$$(x + Mz)^2 + y^2 = (z)^2 \quad (3.7.34)$$

Naším cílem je, nalézt poloměr stáčení poruch \hat{R} a změnu vlnové délky v nevyrovnaném proudovém poli, jehož Machovo číslo se mění se vzdáleností y od profilu, tj. $M=M(y)$. Předpokládejme, že charakteristický rozměr tělesa L je mnohonásobně větší než vlnová délka poruchy. Její fázi si představíme ve tvaru

$$\beta(x, y, t) = \omega t - k_x x - k_y y = \text{konst.} \quad (3.7.35)$$

Potom definujeme vlnový vektor

$$\underline{k} = \left(-\frac{\partial \beta}{\partial x}, -\frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = |\underline{k}| \underline{n}, \quad \omega = \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad (3.7.36)$$

kde \underline{n} je jednotkový vektor normály k vlnoploše, viz obr. 3, 11a). Za předpokladu, že $\frac{\omega}{c}$ je konstantní, platí

$$\underline{k} = (k_x, k_y) = \frac{\omega}{c \tilde{r} (1-M^2)} \left(x + M \tilde{r}, (1-M^2)y + \frac{(x + M \tilde{r})(\tilde{r} + Mx)}{(1-M^2)} \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

pro $(\tilde{r})^2 = x^2 + (1-M^2)y^2$. (3.7.37)

Odtud nalezneme změnu vlnové délky (Dopplerův princip) v libovolném místě proudového pole. Proti proudu, tj. na profilu ($y=0$) a v rovině odtokové hrany ($x=0$), platí

$$k_x = \frac{2\pi}{\ell_x} = \frac{\omega}{c(1-M)} = \frac{2\pi}{\ell(1-M)}, \quad k_y = \frac{2\pi}{\ell_y} = \frac{\omega}{c\sqrt{1-M^2}}. \quad (3.7.38)$$

Tudíž vlnová délka ℓ vůči klidnému prostředí se v pohybujícím prostředí zkrátí na $\ell_x = (1-M)\ell$.

Poměr složek vlnového vektoru

$$\frac{k_y}{k_x} = \frac{(1-M^2)y}{x+M\tilde{r}} + \frac{\tilde{r} + Mx}{1-M^2} \frac{\partial M}{\partial y} \quad (3.7.39)$$

ukazuje vliv unášivé rychlosti (první člen) ^a gradientu proudového pole na stáčení čela vlny. Pro $\frac{\partial M}{\partial y} < 0$ se poruchy stáčí k profilu, tedy do oblasti s větší unášivou rychlostí, viz obr. 3.11b). První člen vztahu (3.7.39) nabývá v rovině odtokové hrany ($x=0$) hodnoty $\frac{1-M^2}{M}$ tudíž s rostoucím M se vlnový vektor \underline{k} sklání proti proudu.

Nalezneme poloměr stáčení \hat{R} pro případ vyrovnaného proudového pole, viz obr. 3.11a). Normála vlnoplochy (3.7.34) je

$$\underline{n} = (n_x, n_y) = \left(\frac{x+Mz}{z}, \frac{y}{z} \right). \quad (3.7.40)$$

Křivku, podél které se pohybuje bod vlnoplochy (zvukový paprsek) označíme $y=y(x)$. Délkový parametr r této křivky lze stanovit pomocí normály (3.7.40) takto

$$dr = \sqrt{1+y'^2} dx = n_x dx + n_y dy = (n_x + n_y y') dx \quad (3.7.41)$$

a odtud pak plyne

$$y' = -\frac{n_x n_y}{n_y^2 - 1} = \frac{y}{x+M^2}, \quad \frac{dx}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x+Mz}{z}. \quad (3.7.42)$$

Poloměr křivosti je definován vztahem (D2.116), tj.

$$\frac{1}{\hat{R}} = \frac{|\text{dn}|}{dr} = \frac{dx}{dr} \left[\left(\frac{\partial n_x}{\partial x} + y' \frac{\partial n_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial n_y}{\partial x} + y' \frac{\partial n_y}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{M_y}{z [z - M(x + Mz)]} \quad (3.7.43)$$

V rovině odtokové hrany ($x=0$) vede (3.7.43) na jednoduchou relaci $\hat{R} = \frac{\hat{y}}{M}$, která je experimentálně potvrzena na šlírovém záznamu proudového pole na obr. 3.11b). Poruchy v rovině odtokové hrany mají vlnovou délku l_y určenou vztahem (3.7.38)₂ a kterou lze snadno dát do relace s tloušťkou odtokové hrany L_H pomocí Strouhalova čísla

$$Sh = \frac{L_H \omega}{2\pi v} = \frac{L_H}{l_y} \sqrt{\frac{1}{M^2} - 1} \quad (3.7.44)$$

Pro podmínky na obr. 3.11b) dostáváme $Sh = 0,184$.

3.8 Akcelerační vlny v pevných tělesech. Obecná formulace

Stejně jako v tekutinách, kap. 3.7, je amplituda a^i akcelerační vlny rovna skoku zrychlení (3.3.5), resp. (3.3.10)₁ na ploše nespojitosti $\Omega(X^I, t) = 0$. Tento skok zrychlení je podle zákona bilance hybnosti (3.8.2) úměrný skoku objemových sil. Na ploše $\Omega(X^I, t) = 0$ jsou splněny podmínky kompatibility (3.3.8), resp. (3.3.11) spolu se zákony bilance a příslušnými konstitutivními vztahy.

Při šíření vlny budeme pro jednoduchost uvažovat konstantní entropii, i když disipace energie při procesu (tečení materiálu) může hrát značnou roli. Předpokládáme, že teplo vylučované při disipativním procesu je v důsledku tepelné vodivosti materiálu z místa vlny okamžitě odváděno, takže produkce entropie $\Sigma(S)$ je kompenzována tokem entropie $J(S)$, viz dále. Za těchto podmínek však dochází při šíření vlny i ke změnám teploty, což některé starší teorie šíření elastických vln neuvažují (Brdička, 1959; Brebta, Okrouhlik, Valeš, 1985).

Popis budeme provádět v materiálových souřadnicích X^I, t ($I=1,2,3$) (X je počáteční poloha materiálového bodu) a vyjdeme ze zákonů bilance v následujícím tvaru:

bilance hmotnosti (I.4.1.3)

$$\rho_0(X^I) = \text{konst} \quad (3.8.1)$$

bilance hybnosti (I.4.2.14)

$$\rho_0 \dot{v}^i - \frac{\partial T^{ki}}{\partial X^k} = 0 \quad (3.8.2)$$

bilance vnitřní energie (I.4.5.13)

$$\rho_0 \dot{u} + \frac{\partial Q^K}{\partial X^K} - T^{Ki} \frac{\partial v_i}{\partial X^K} = 0 \quad (3.8.3)$$

bilance entropie (I.4.6.8), (I.4.6.14)

$$\rho_0 \dot{s} + \frac{\partial}{\partial X^K} \left(\frac{Q^K}{T} \right) = \Sigma(S). \quad (3.8.4)$$

Dvoubodový tenzor napětí (I.4.2.9)

$$T^{Ki}(X, x, t) = \frac{\partial x^i}{\partial X^I} T^{KI} = j \cdot \frac{\partial X^K}{\partial x^l} t^{li} \quad (3.8.5)$$

lze pro případ malých deformací psát jako jednobodový takto

$$T^{Ki} = \delta_I^i T^{KI} = \delta_k^K t^{ik}. \quad (3.8.6)$$

Tenzory deformace jsou vyjádřeny vztahy (I.3.2.10) a (I.3.8.24)

$$\begin{aligned} e_{kl} &= E_{KL} \delta_k^K \delta_l^L, \\ \dot{e}_{kl} &= \dot{d}_{kl} = \dot{E}_{KL} \delta_k^K \delta_l^L, \end{aligned} \quad (3.8.7)$$

protože za předpokladu malých deformací lze přibližně psát

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^I} \doteq \delta_I^i, \quad \frac{\partial X^I}{\partial x^i} \doteq \delta_i^I. \quad (3.8.8)$$

Ve vztazích (3.8.7) jsme zanedbali veličiny malé vyšších řádů.

Konstitutivní vztahy pro tenzor napětí v případě homogenního izotropního termoviskoelastického materiálu, kap. I.6.4, píšeme ve tvaru

$$T^{IJ} = T_{el}^{IJ} + T_{dis}^{IJ} \quad , \quad (3.8.9)$$

kde elastická část tenzoru napětí je podobně jako při prostorovém popisu (I.6.4.35) rovna vztahu

$$T_{el}^{IJ} = -\beta(T-T_0)\delta^{IJ} + K E_{(1)}\delta^{IJ} + 2\mu(t)\overset{(0)}{E}^{IJ} \quad (3.8.10)$$

a disipativní část

$$T_{dis}^{IJ} = -2 \int_0^t \frac{d\mu(t-\tau)}{d\tau} \overset{(0)}{E}(\tau) d\tau. \quad (3.8.11)$$

Zde jsou K_0 modul objemového stlačení (I.6.3.6)₁, $\beta = 3K_0\alpha$, kde α je koeficient objemové teplotní roztažnosti (I.6.3.6)₂ a

$$\mu(t) = \mu_0 \left[\gamma + (1-\gamma)e^{-\frac{t}{b_1}} \right] \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (3.8.12)$$

je smykový modul zahrnující relaxační vlastnosti materiálu Maxwellova typu (I.6.4.34) (pomocí relaxačního času b_1 a konstanty γ , stopu tenzoru deformace objemové změny jsme označili $E_{(1)}$ a jeho deviátor (smykové změny) $\overset{(0)}{E}^{IJ}$. Pro lepší orientaci uvedeme jejich definice

$$E_{(1)} = \sum_{I=1}^3 E_{II} \doteq \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \quad ,$$

$$\overset{(0)}{E}^{IJ} = \frac{1}{2} (E^{IJ} + E^{JI}) - \frac{1}{3} E_{(1)} \delta^{IJ}. \quad (3.8.13)$$

Předpokládáme, že materiál je tepelně vodivý s koeficientem tepelné vodivosti λ , takže tepelný tok je roven

$$Q^K = -\lambda \delta^{KL} \frac{\partial T}{\partial X^L} \quad . \quad (3.8.14)$$

Konstitutivní vztah pro vnitřní energii je dán výrazem I6.3.14), který má v materiálovém popisu tvar

$$u(T, E_{IJ}) = u_0 + c_V(T - T_0) + \frac{\beta T_0}{\rho_0} E_{(1)} + \frac{1}{2\rho_0} [K_0 (E_{(1)})^2 + 2\mu(t) \overset{(0)}{E}_{(2)}] \quad (.3.8.15)$$

Zde $\overset{(0)}{E}_{(2)}$ je druhý invariant tenzoru deformace $(I6.3.2)_2, (ID3.22)$, tj.

$$\overset{(0)}{E}_{(2)} = \text{tr}(\overset{(0)}{E})^2 = \overset{(0)}{E}^{KL} \overset{(0)}{E}_{LK} \quad (.3.8.16)$$

Entropie $s = s(E_{KL}, T)$ je poslední veličinou, pro kterou musíme stanovit konstitutivní vztah. S ohledem na její definici (I6.20) platí

$$\dot{s} = \frac{\dot{u}}{T} - \frac{T_{el}^{IJ}}{\rho_0 T} \dot{E}_{IJ} \quad (.3.8.17)$$

Hustotu produkce entropie $\Sigma(S)$ (I4.6.14) vyjádříme díky (.3.8.17) ve tvaru

$$\begin{aligned} \Sigma(S) &= -\frac{T_{el}^{IJ}}{T} \dot{E}_{IJ} - \frac{Q^K}{T^2} \frac{\partial T}{\partial X^K} + \frac{T_{el}^{IJ} + T_{dis}^{IJ}}{T} \dot{E}_{IJ} = \\ &= \frac{\lambda \delta^{KL}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial X^K} \frac{\partial T}{\partial X^L} - \frac{2}{T} \int_0^t \frac{d\mu(t-\tau)}{d\tau} \overset{(0)}{E}_{IJ}(\tau) d\tau \cdot \dot{E}_{IJ} \geq 0. \end{aligned} \quad (.3.8.18)$$

Při úpravě jsme použili konstitutivních vztahů (.3.8.11) a (.3.8.14) a rozkladu gradientu rychlosti deformace (I3.8.1)

$$T^{Ki} \frac{\partial v_i}{\partial X^K} = T^{KL} \delta_L^i \frac{\partial v_i}{\partial X^K} = T^{KL} (\dot{E}_{KL} + W_{KL}) = T^{KL} \dot{E}_{KL}, \quad (3.8.19)$$

protože tenzor rychlosti rotace W_{KL} je antisymetrický a jeho součin se symetrickým tenzorem napětí T^{KL} (I.4.3.11) je nula. Z rovnice bilance entropie (3.8.4) lze určit změnu entropie \dot{S} .

V dalších úvahách se omezíme na procesy s konstantní entropií $\dot{S}=0$, čili

$$\frac{\partial}{\partial X^K} \left(\frac{Q^K}{T} \right) = \Sigma(S) \geq 0. \quad (3.8.20)$$

Tato podmínka je splněna, jestliže množství produkované entropie v jednotce objemu $\Sigma(S)$ je rovno entropii odvedené tokem

$$-J^K(S) = \frac{Q^K}{T} \quad (I.4.6.11). \text{ Hrubě řečeno, teplo vzniklé na sin-}$$

gulární ploše je okamžitě odváděno do okolí. Teplota i její derivace se však přechodem přes singulární plochu (akcelerační vlnu) mění skokem.

Předpoklad konstantní entropie vede díky (3.8.17), (3.8.15) a (3.8.10) na následující relaci mezi změnou teploty a deformace

$$\dot{T} = -\frac{\beta T}{\rho_0 \alpha_V} \dot{E}_{(1)} \quad (3.8.21)$$

(srovnej se vztahem (I.7.1.17)).

3.8.1 Šíření akceleračních vln. Jednorozměrné přiblížení

Omezíme se na podélné vlny $n_i \ddot{x}^i = \ddot{x}$ (pro $\underline{n} = (1, 0, 0), x^1 = x$) v jednorozměrném přiblížení, např. v tyči, ve směru její podélné souřadnice $X^1 = X$ (Buckens, 1971). V takovém případě je pohyb materiálového bodu X popsán funkcemi $x^i = x^i(X^1, t)$ pro $i = I = 1, 2, 3$. Potom Lagrangeův tenzor deformace (I.3.1.20) je s ohledem na (3.8.8) roven

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial X} \right)^2 - 1 \right], \quad E_{22} = E_{33} = -\epsilon E_{11}$$

$$\overset{(0)}{E}_{IJ} = \frac{2}{3} (1 + \epsilon) E_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.8.22)$$

resp.

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial X} = \frac{\partial^2 x}{(\partial X)^2}, \quad \dot{E}_{11} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial X}$$

Složka E_{11} vyjadřuje poměrné prodloužení (I.3.2.4) viz obr. I.7.2 a ϵ je Poissonovo číslo. Vzhledem k podmínkám kompatibility akceleračních vln (3.3.3), (3.3.4) odvodíme pro amplitudu vlny a (skok zrychlení) vztah

$$[\ddot{x}] = a = U_{(N)}^2 \left[\frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right] = -U_{(N)} \left[\dot{E}_{11} \right]. \quad (3.8.23)$$

Stejným způsobem nalezneme pro $\underline{N} = (1, 0, 0)$ vyjádření

$$\left[N^K N^I \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial X^K \partial X^I} \right] = \left[\frac{\partial \dot{E}_{11}}{\partial X} \right], \quad \dot{E}_{(4)} = (1 - 2\epsilon) \dot{E}_{11}. \quad (3.8.24)$$

Tenzor napětí (3.8.10) a (3.8.11) má v tomto přiblížení tvar

$$T_{el}^{11} = -\beta(T - T_0) + EE_{11}, \quad T_{dis}^{11} = -\frac{4(1+\epsilon)}{3} \int_0^t \frac{d\mu(t-\tau)}{d\tau} E_{11}(\tau) d\tau \quad (3.8.25)$$

viz (1.6.3.11).

Časovou změnu amplitudy a určíme z podmínky kompatibility (3.3.8) a rychlost šíření vlny $U_{(N)}$ ze vztahu (3.8.23). Vyjďme z bilance hybnosti (3.8.2) a s ohledem na (3.8.6) (3.8.25) a díky předpokladu izentropičnosti ve tvaru (3.8.21) dostáváme

$$\rho_0 [\dot{v}] = \left[\frac{\partial T^{11}(T, E_{11})}{\partial X} \right] = \rho_0 U_{(N)}^2 \left[\frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right] + \left[\frac{\partial T_{dis}^{11}}{\partial X} \right], \quad (3.8.26)$$

kde

$$U_{(N)}^2 = c^2 = \frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial T_{el}^{11}}{\partial T} \right)_{E_{11}} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial E_{11}} \right)_S + \left(\frac{\partial T_{el}^{11}}{\partial E_{11}} \right)_T \right] = (1-2\epsilon) \frac{\beta^2 \bar{T}}{\rho_0^2 c_v} + \frac{E}{\rho_0} \quad (3.8.26)_1$$

je rovno izentropické rychlosti šíření vlny. Tuto rychlost ztotožníme s rychlostí zvuku v daném prostředí. Izotermická rychlost podélné vlny je rovna $c = \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ a např. u oceli při normálních podmínkách je asi o 0,5% menší než rychlost izentropická. Protože teplota může mít na vlně nespojitost, budeme raději pracovat s její střední hodnotou $\bar{T} = \frac{T^+ + T^-}{2}$. Derivaci funkcionálu

(3.8.25) značíme $\frac{\partial T_{dis}^{11}}{\partial X}$ a je definována jako Fréchetův diferenciál (3.9), vztah iii).

3.9)

Fréchetův diferenciál funkcionálu

$$F(f(X, t)) = \int_0^t \mathcal{F}(f(X, \tau) d\tau$$

i)

je definován jako lineární operátor, viz pozn.^{I.7.4}, vztah i) takto

$$\begin{aligned} dF(f(X,t), g(X,t)) &= F(f(X,t) + g(X,t)) - F(f(X,t)) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\epsilon} \int_0^t \mathcal{F}(f(X,\tau) + \epsilon g(X,\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad \text{ii)}$$

kde funkce $g(X,\tau)$ je ze stejného prostoru jako funkce $f(X,\tau)$.

Ve funkcionálu (3.8.25)₂ je $f = E_{11}$ a za g volíme $\frac{\partial E_{11}}{\partial X}$. Potom s ohledem na definici ii) dostáváme

$$-\frac{4(1+\epsilon)}{3} \int_0^t \frac{d\mu(t-\tau)}{d\tau} \frac{\partial E_{11}(\tau)}{\partial X} d\tau = \frac{\partial T_{dis}^{11}}{\partial X}. \quad \text{iii)}$$

Pro čas $t=0$ je tento člen nulový a dostáváme vztah (3.8.23) a rychlost akcelerační vlny je jednoznačně určena výrazem (3.8.26)₁.

Vypočteme veličinu $[\ddot{x}]$ nutnou pro podmínku kompatibility (3.3.8). Stejným postupem, kterým jsme vypočetli derivace v (3.8.25) odvodíme

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{v} &= \frac{\partial^2 T^{11}(T, E_{11})}{\partial t \partial X} = \rho_0 c^2 \frac{\partial \dot{E}_{11}}{\partial X} + \frac{\beta^2 \dot{T}}{\rho_0 c_v} \frac{\partial E_{11}}{\partial X} + \left(\frac{\partial T_{dis}^{11}}{\partial X} \right) = \\ &= \rho_0 c^2 \frac{\partial \dot{E}_{11}}{\partial X} - \frac{\beta^3 T}{\rho_0^2 c_v^2} \dot{E}_{11} \frac{\partial E_{11}}{\partial X} - \frac{4}{3} (1+\epsilon) \left(\frac{d\mu(t-\tau)}{d\tau} \frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right) \Big|_{\tau=t} \quad (3.8.27) \end{aligned}$$

Pro skok zrychlení v čase $t \rightarrow 0$ na singulární ploše platí

$$[\ddot{v}] = c^2 \left[\frac{\partial \dot{E}_{11}}{\partial X} \right] - c_v \Gamma^3 \dot{T} \left[\dot{E}_{11} \frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right] - \frac{4}{3} (1+\epsilon) \frac{d\mu(t-\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t=0} \left[\frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right]. \quad (3.8.28)$$

Zavedli jsme Grüneisenovo číslo Γ a pro derivaci smykového modulu (3.8.12) uijeme označení $\mu'(0)$ tj.

$$\Gamma = \frac{3K_0\alpha}{\rho_0 c_v} = \frac{\beta}{\rho_0 c_v}, \quad \mu'(0) = \left. \frac{d\mu(t-\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t=0} = \frac{(1-\gamma)\mu_0}{b_1}. \quad (3.8.29)$$

Prostřední člen (3.8.28) upravíme pomocí identity (3.7.9) tak, abychom ho vyjádřily pomocí hodnot před vlnou (označených +). Vezmeme-li v úvahu (3.8.24) a (3.8.23), má podmínka kompatibility (3.3.8) (pro $U_{(M)} = c$) konečný tvar

$$\frac{\delta_0 a}{\delta t} = -\hat{\gamma} a + \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\epsilon}} a^2, \quad (3.8.30)$$

kde

$$2\hat{\gamma} = \frac{c_v \Gamma^3 \bar{T}}{c^2} \left(\dot{E}_{11}^+ - c \frac{\partial E_{11}^+}{\partial X} \right) + \frac{4}{3} (1+\epsilon) \frac{(1-\gamma)\mu_0}{c^3 b_1} - \frac{\delta_0 c}{c \delta t}. \quad (3.8.31)$$

$$\hat{\epsilon} = -\frac{2\hat{\gamma} c^3}{c_v \Gamma^3 \bar{T}}. \quad (3.8.32)$$

Řešení diferenciální rovnice (3.8.30) za předpokladu, že $\hat{\gamma}, \hat{\epsilon}$ jsou konstanty, je tzv. Colemanova, Gurtinova (1965) formule (3.7.17). Kritická amplituda poruchy je rovna $\hat{\epsilon}$, tj.

$$a_{\text{krit}} = \hat{\epsilon} = c^2 \left(\frac{\partial E_{11}^+}{\partial X} - \frac{1}{c} \dot{E}_{11}^+ \right) - \frac{4(1+\epsilon)(1-\gamma)c\mu_0}{3b_1 c_v \bar{T} \Gamma^3} \quad (3.8.33)$$

(předpokládáme, že rychlost vlny se nemění $\frac{\delta_0 c}{\delta t} = 0$). Je-li počáteční amplituda $a_0 > a_{\text{krit}}$, pak za čas t_∞ (3.7.19) vzroste nadevšechny meze a stává se rázovou vlnou, viz kap. 3.9.

Amplituda akcelerační vlny (3.8.23) násobená ρ_0 je podle (3.8.26) síla, jejíž velikost je rovna rozdílu vnějších objemových sil působících z různých stran plochy nespojitosti. Je-li tato síla větší než $\rho_0 a_{krit}$, tak v průběhu času narůstá, obr. 3.10b), v opačném případě se tlumí. Pro izotermické procesy $\dot{T}=0$ vypadne ze vztahu (3.8.27) člen, obsahující \dot{E}_{11} a na místo podmínky kompatibility (3.8.30) dostáváme

$$\frac{\delta_b a}{\delta t} = -\frac{2}{3}(1+\epsilon)\frac{(1-\gamma)\mu_0}{\sigma^3 b_1} a \quad (3.8.34)$$

Řešení této rovnice má charakter tlumené vlny

$$\frac{a(t)}{a_0} = \exp\left[-\frac{2(1+\epsilon)(1-\gamma)\mu_0 t}{3\sigma^3 b_1}\right] = \exp\left[-\frac{2(1+\epsilon)(1-\gamma)\rho_0 \mu_0}{3b_1 E} t\right] \quad (3.8.35)$$

Za předpokladu, že materiál je před vlnou v klidu, tj.

$\frac{\partial E_{11}^+}{\partial X} = \dot{E}_{11}^+ = 0$, je kritická amplituda určena jen velikostí relaxačního koeficientu b_1 . Pro křehké materiály ($b_1 \rightarrow \infty$) klesá. V případě dokonalého termoelastického materiálu (3.8.25) je $\gamma=1$, tudíž v rovnici (3.8.30) $\dot{\gamma}=0$ a amplituda vlny se při šíření nemění. V neuklidněném materiálu však může, podle (3.8.31), k nárůstu vlny dojít.

Prakticky nejzajímavější případ je ten, kdy kritická velikost poruchy $a_{krit} \rightarrow 0$ a čas nárůstu t_{∞} (3.7.19) zůstává konečný. Potom i malá síla velikosti $\rho_0 a_0 > \rho_0 a_{krit}$ narůstá a může vést až k poškození materiálu. (Srovnej s poruchou v proudu stlačitelné tekutiny na obr. 3.10c). V obecném případě mají zvláště velký vliv prostorové a časové změny deformace před poruchou (3.8.33).

Vztah

$$\frac{\partial E_{11}^+}{\partial X} - \frac{1}{\sigma} \dot{E}_{11}^+ \leq \frac{4(1+\epsilon)(1-\gamma)\mu_0}{3b_0 \bar{T} c_v \Gamma^3} \quad (3.8.36)$$

můžeme nazývat podmínkou nestability akceleračních vln a považovat ho za podmínku samovolného poškození materiálu. V některých případech, např. při ochlazování či zahřívání, tj. při velkých změnách teploty nalezneme \dot{E}_{11}^+ z rovnice bilance vnitřní energie (3.8.3). Dosadíme vztahy pro vnitřní energii (3.8.15), pro vedení ^{tepla} (3.8.14) a pro tenzor napětí (3.8.10) a zanedbáním malých členů vyššího řádu dostáváme

$$\dot{E}_{11}^+ = \frac{1}{\Gamma T^+} \left(\frac{\lambda}{\rho_0 c_v} \frac{\partial^2 T^+}{(\partial X)^2} - \dot{T}^+ \right) . \quad (.3.8.37)$$

Z podmínky (3.8.37) lze pak ocenit stabilitu poruch (3.8.23) i při teplotních změnách.

3.9 Rázové vlny v pevných tělesech. Základní vlastnosti

V následujících úvahách považujeme rázovou vlnu za plochu nespojitosti rychlosti materiálového bodu. Trajektorie bodu je však spojitá, takže nedochází k vytvoření nového povrchu. Podmínka kompatibility (3.3.1)₃ je

$$[[v^i]] = -U_{(N)} \left[N^I \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \right] \quad (3.9.1)$$

kde rozdíl rychlostí $[[v^i]] = v^{i+} - v^{i-}$ je definován jako intenzita rázové vlny, šířící se rychlostí $U_{(N)}$ (3.2.7) ve směru normály. Průchodem rázové vlny dochází k deformaci kontinua, kterou vyjádříme Lagrangeovým tenzorem deformace (I.3.1.20), tj.

$$E_{KL} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} \delta_{kl} - \delta_{KL} \right) \quad (3.9.2)$$

Stejně jako v kap. 3.8.1 budeme předpokládat jednorozměrné kontinuum, např. tyč, podél kterého se vlna šíří ve směru $\underline{N} = (1, 0, 0)$. Předpokládáme dále, že vlna je pouze podélná, tj. ve směru pohybu $\underline{N} = \underline{n} = (1, 0, 0)$. Tenzor deformace (3.9.2) má i v tomto případě složky (3.8.22) a pro gradient deformace přibližně platí

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \sqrt{1 + 2E_{11}} \doteq 1 + E_{11} \quad (3.9.3)$$

viz kap. I.6.3. Potřebné invarianty tenzoru deformace (3.8.13)₁, (3.8.16) jsou rovny

$$\begin{aligned} E_{(1)} &= (1 - 2\epsilon) E_{11} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} \\ E_{(2)}^{(0)} &= \frac{4}{3} (1 + \epsilon)^2 E_{11}^2 \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

a podmínku kompatibility (3.9.1) lze s ohledem na (3.9.3) vyjádřit takto

$$[v] = -U_{(N)}[E_{11}]. \quad (3.9.5)$$

Zákony bilance (3.4.4), (3.4.5), (3.4.7) a (3.4.9) na rázové vlně mají za uvedených předpokladů následující tvar:

$$[\rho_0 U_{(N)}] = 0, \quad \left| \frac{\dot{c}}{c} \right| = 1 + (1-2\epsilon)E_{11} \quad (3.9.6)$$

$$\rho_0 U_{(N)}[v] = -[T^{11}] \quad (3.9.7)$$

$$\rho_0 U_{(N)} \left[\frac{v^2}{2} + u \right] = -[T^{11}v] - [Q] \quad (3.9.8)$$

$$\rho_0 U_{(N)}[s] + [J(s)] \leq 0, \quad J(s) = -\frac{Q}{T}. \quad (3.9.9)$$

Konstitutivní vztahy uvažovaného termoviskoelastického materiálu lze podle (3.8.25), (3.8.14), (3.8.15) zapsat takto

$$T^{11} = -\beta(T-T_0) + EE_{11} - \frac{4}{3}(1+\epsilon) \int_0^t \frac{d\mu(t-\tau)}{d\tau} E_{11}(\tau) d\tau \quad (3.9.10)$$

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial X} \quad (3.9.11)$$

$$u = u_0 + c_v(T-T_0) + (1-2\epsilon) \frac{\beta T_0}{\rho_0} E_{11} + \frac{E}{2\rho_0} E_{11}^2. \quad (3.9.12)$$

Entropii jako funkci T, E_{11} nalezneme z definice (I.6.15) (viz též (I.7.1.16))

$$\dot{s}(T, E_{11}) = \frac{c_v}{T} \dot{T} + \frac{(1-2\epsilon)\beta}{\rho_0} \dot{E}_{11}. \quad (3.9.13)$$

Změny veličin T, Q, u a S na rázové vlně, která prochází v čase $t=0$ materiálovým bodem X jsou

$$[T^{(1)}] = -\beta [T] + E [E_{11}] = \rho_0 U_{(N)}^2 [E_{11}] \quad (3.9.14)$$

$$[Q] = -\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right] \quad (3.9.15)$$

$$[u] = c_v [T] + \frac{(1-2\sigma)\beta T_0}{\rho_0} [E_{11}] + \frac{E}{2\rho_0} [E_{11}^2] \quad (3.9.16)$$

$$[S] = c_v [\ln T] + \frac{(1-2\sigma)\beta}{\rho_0} [E_{11}] \quad (3.9.17)$$

$$\doteq c_v \frac{[T]}{T_0} + \frac{(1-2\sigma)\beta}{\rho_0} [E_{11}]$$

Teplotu před vlnou T^+ považujeme za referenční, tj. $T^+ = T_0$ a protože $1 \gg \frac{[T]}{T_0}$ lze členy malé vyššího řádu zanedbat.

Vyloučením skoku teploty $[T]$ z rovnice (3.9.17) pomocí (3.9.14) a užitím zákona bilance hybnosti (3.9.7) a podmínky (3.9.5) lze pro skok entropie na rázové vlně psát vztah

$$\Gamma T_0 [S] = - (U_{(N)}^2 - c^2) [E_{11}] \leq 0. \quad (3.9.18)$$

Zde $\Gamma = \frac{\beta}{c_v \rho_0}$ a c^2 je izentropická rychlost zvuku (3.8.26). Nerovnost je důsledek bilance entropie (3.9.9) za předpokladu, že tepelný tok je na rázové vlně spojitý, tj. $[Q] = 0$.

Ze vztahu (3.9.18) plynou důležité závěry o rychlosti šíření rázových vln:

$$U_{(N)}^2 \geq c^2 \quad \text{pro } [E_{11}] > 0 \text{ kompresní vlna}$$

$$U_{(N)}^2 \leq c^2 \quad \text{pro } [E_{11}] < 0 \text{ expansní vlna.} \quad (3.9.19)$$

V tomto přiblížení je kompresní vlna rychlejší než vlna expansní.

Nalezneme rychlost šíření rázových vln. Vyjdeme z podmínky kompatibility (3.9.5), kterou upravíme na tvar

$$-U_{(N)} \llbracket E_{11} \rrbracket (T^{11+} + T^{11-}) = \llbracket v T^{11} \rrbracket + v^+ T^{11-} - v^- T^{11+}. \quad (3.9.20)$$

Vynásobením rovnice bilance hybnosti (3.9.7) výrazem $v^+ + v^-$ dostáváme

$$\rho_0 U_{(N)} (v^+ - v^-)(v^+ + v^-) = \rho_0 U_{(N)} \llbracket v^2 \rrbracket = -\llbracket T^{11} v \rrbracket + v^+ T^{11-} - T^{11+} v^-. \quad (3.9.21)$$

Z rovnic (3.9.20) a (3.9.21) vyloučíme poslední členy a dosazením do bilance celkové energie (3.9.8) odvodíme Hugoniotovu rovnici (Buckens, 1971)

$$\llbracket u \rrbracket = -\frac{\llbracket T^{11} \rrbracket \llbracket E_{11} \rrbracket}{2\rho_0} + T^{11+} \frac{\llbracket E_{11} \rrbracket}{\rho_0} - \frac{\llbracket Q \rrbracket}{2\rho_0 U_{(N)}}. \quad (3.9.22)$$

Tato rovnice dává do relace skok vnitřní energie na rázové vlně se skoky napětí a deformace. Srovnáním s rovnicí (3.9.16) a vyloučením skoku teploty $\llbracket T \rrbracket$ z rovnice (3.9.14) odvodíme

$$U_{(N)}^2 = \frac{c^2 + \frac{\Gamma}{2\rho_0} G}{1 - \frac{\Gamma}{2} \llbracket E_{11} \rrbracket}, \quad (3.9.23)$$

kde

$$G = E(2E_{11}^+ - \llbracket E_{11} \rrbracket) - 2T^{11+} + \frac{\llbracket Q \rrbracket}{U_{(N)} \llbracket E_{11} \rrbracket} \quad (3.9.24)$$

vyjadřuje jednak vliv deformace E_{11}^+ a napětí T^{11+} , která jsou v materiálu před vlnou a jednak skok teplotního toku $\llbracket Q \rrbracket$ a skoku deformace $\llbracket E_{11} \rrbracket$.

Předpokládejme pro jednoduchost, že je materiál před příchodem rázové vlny v klidu, tj. $E_{11}^+ = T^{11+} = 0$ a $[[Q]] = 0$.

Potom je rychlost rázové vlny (3.9.23) rovna

$$U_{(N)}^2 = c^2 \frac{1 - \frac{\Gamma E}{2c^2 \rho_0} [[E_{11}]]}{1 - \frac{\Gamma}{2} [[E_{11}]]} \doteq c^2 . \quad (3.9.25)$$

Tudíž v tomto přiblížení je rychlost rázové vlny rovna izentropické rychlosti (3.8.26) akcelerační vlny. Stejnou rychlostí se šíří i slabé vlny. Vzhledem k tomu, že $T^{11+}(t=0) = E E_{11}^+$ (viz (3.9.10)), není rychlost rázové vlny podstatně ovlivněna ani elastickou deformací před jejím příchodem.

3.9.1 Šíření rázových vln

V předcházející kapitole jsme našli rychlost šíření rázové vlny v termoviskoelastickém tělese, vztah (3.9.25) a ukázali jsme, že je rovna izentropické rychlosti zvuku (3.8.26) a že její velikost prakticky nezávisí na intenzitě vlny a deformaci pole před vlnou. Tudiž podmínka kompatibility (3.3.8)₁ má pro náš případ, kdy platí $U_{(w)} = c$, $\frac{\delta_p c}{\delta t} = 0$ a vztah (3.9.3), tvar

$$\frac{2 \delta_p [v]}{\delta t} = [\dot{v}] - c^2 \left[\frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right] \quad (3.9.26)$$

Velikost skoku zrychlení $[\dot{v}]$ nalezeneme z rovnice bilance hybnosti

$$[\dot{v}] = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial T''}{\partial X} \right] = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial T''}{\partial E_{11}} \left[\frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right] + \frac{\partial T''}{\partial T} \left[\frac{\partial T}{\partial X} \right] + \left[\frac{\partial T''_{dis}}{\partial X} \right] \right) \quad (3.9.27)$$

při konstitutivním vztahu (3.9.10). Poslední člen v (3.9.27) je ze stejného důvodu jako v rovnici (3.8.25) roven nule. Skok gradientu teploty vyjádříme pomocí skoku tepelného toku na rázové vlně $[Q]$ (3.9.11) z Hugoniotovy rovnice (3.9.22). Tudiž

$$\frac{\beta}{\rho_0 \lambda} [Q] = \frac{2\beta}{\rho_0 \lambda} (E E_{11}^+ - T^{11+}) [v] - \frac{\beta}{\lambda c} \left(c^2 - \frac{E}{\rho_0} \right) [v]^2 \quad (3.9.28)$$

při úpravě jsme použili vztahů (3.9.14) a (3.9.5). Dosazením do rovnice (3.9.26) dostáváme rovnici pro časovou změnu intenzity rázové vlny ve tvaru

$$\frac{2 \delta_0 [v]}{\delta t} = - \left(c^2 - \frac{E}{\rho_0} \right) \left[\frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right] + \frac{2 \beta^2}{\rho_0 \lambda} (T^+ - T_0) [v] - \frac{\beta}{\lambda c} \left(c^2 - \frac{E}{\rho_0} \right) [v]^2. \quad (3.9.29)$$

Předpětí $E E_{11}^+ - T^{++}$, které je v materiálu před příchodem rázové vlny jsme vyjádřili pomocí teplotního rozdílu $T^+ - T_0$ z konstitutivního vztahu (3.9.10) (pro $t=0$). Uplatňuje se tedy jen termoelastická, přičemž T^+ je teplota před vlnou. Druhý člen ^{pak} vyjadřuje vliv teplotních ν nutí; obvykle je $T^+ = T_0$. S ohledem na definici izentropické rychlosti (3.8.26) obdržíme nerovnost

$$c^2 - \frac{E}{\rho_0} = \frac{(1-2\nu)\beta^2 T^+}{\rho_0^2 c_V} > 0. \quad (3.9.30)$$

Integraci rovnice (3.9.29) provedeme nejdříve pro případ, že teplota před vlnou je rovna teplotě referenční $T^+ = T_0$ a gradient deformace se nemění, tj. $\left[\frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right] = \frac{\partial E_{11}^+}{\partial X} - \frac{\partial E_{11}^-}{\partial X} = 0$.

Potom platí

$$\frac{[v]}{[v_0]} = \frac{1}{1 + \frac{[v_0] \beta}{2 \lambda c} \left(c^2 - \frac{E}{\rho_0} \right) (t - t_0)}, \quad (3.9.31)$$

kde $[v_0] = -c [E_{11}^0]$ je počáteční intenzita rázové vlny, resp. jí odpovídající deformace $[E_{11}^0]$. Amplituda této vlny naroste nade všechny meze za čas

$$t - t_0 = \frac{2 \lambda \rho_0^2 c_V}{(1-2\nu) [E_{11}^0] \beta^3 T_0} \quad (3.9.32)$$

V konečném čase může narůst jen kompresní vlna konečné amplitudy ($[\dot{E}_{11}] > 0$) za předpokladu, že tepelná vodivost materiálu je konečná (teplo vzniklé na vlně se nestačí odvést do okolí).

Uvedeme ještě integraci rovnice (3.9.29) pro obecný případ. Zavedeme označení

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2} \left(c^2 - \frac{E}{\rho_0} \right) \left[\frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right], & \Delta &= 4a_0 a_2 - a_1^2 \\ a_1 &= \frac{\beta^2}{\rho_0 \lambda} (T^+ - T_0), & \bar{b}_1 &= a_1 - \sqrt{-\Delta} \\ a_2 &= -\frac{\beta}{\lambda c} \left(c^2 - \frac{E}{\rho_0} \right), & \bar{b}_2 &= a_1 + \sqrt{-\Delta} \\ & & \bar{b}_3 &= 2a_2 [v_0]. \end{aligned} \quad (3.9.33)$$

Nechť $[v_0]$ je intenzita rázové vlny v čase $t=0$. Řešení rovnice (3.9.29) je

$$\frac{[v]}{[v_0]} = \frac{\bar{b}_2}{\bar{b}_3} \frac{\bar{b}_1 \left(1 + \frac{\bar{b}_2}{\bar{b}_3} \right) e^{-\sqrt{-\Delta} t} - \left(1 + \frac{\bar{b}_1}{\bar{b}_3} \right)}{\left(1 + \frac{\bar{b}_1}{\bar{b}_3} \right) - \left(1 + \frac{\bar{b}_2}{\bar{b}_3} \right) e^{-\sqrt{-\Delta} t}}. \quad (3.9.34)$$

V případě, že se gradient deformace nemění $\left[\frac{\partial E_{11}}{\partial X} \right]$ je $a_0 = 0$, $\bar{b}_1 = 0$ a vztah (3.9.34) vede ke stejné závislosti jako pro akcelerační vlny (3.7.17), přičemž

$$\hat{y} = -\sqrt{-\Delta} = -a_1, \quad \hat{v} = -\frac{a_1}{a_2} = \frac{c(T^+ - T_0)}{(1-2\nu)\Gamma T^+} = [v]_{\text{krit}}. \quad (3.9.35)$$

Tudíž kritická velikost amplitudy $[v]_{\text{krit}}$ je úměrná rozdílu $T^+ - T_0$, resp. napětí v důsledku tepelného rozdílu (při T_0 je v materiálu nulové napětí). Čas, za který naroste vlna o nadkritické amplitudě na nekonečnou velikost je podle (3.7.19) roven

$$t_{\infty} = \frac{\rho_0 \lambda}{\beta^2 (T^* - T_0)} \quad , \quad \text{pro}$$

$$[v_0] = \frac{e}{e-1} [v]_{\text{krit}} = 1,58 [v]_{\text{krit}} \quad (.3.9.36)$$

viz obr. 3.10b). Na jeho velikost má vliv i tepelná vodivost λ a ukazuje se, že čím je materiál horší vodič tepla, tím je i větší možnost nárůstu rázové vlny a případné poškození materiálu.

Na časové chování rázové vlny má i vliv skok gradientu deformace $\left[\frac{\partial E_H}{\partial X} \right]$ a je možno ho zjistit ve vztahu (3.9.34). V kapitole 3.3 je uvedeno, že narosteli amplituda akcelerační vlny nadevšechny meze, tak přechází ve vlnu rázovou. V pevných tělesech můžeme předpokládat, že nárůst amplitudy rázové vlny vede k nespojitosti trajektorie materiálového bodu a k vytvoření nového povrchu (trhlínky). Zde je třeba mít na paměti, že při nárůstu akcelerační vlny je důležitý relaxační čas materiálu b_1 (3.8.12) a při nárůstu rázové vlny tepelná vodivost λ (3.8.14). Tyto konstanty zcela určují kritickou velikost poruchy, jestliže v materiálu není nějaká zbytková deformace. Vliv křivosti vln je možné za cenu značných komplikací zahrnout pomocí odpovídajících podmínek kompatibility, viz kap. 3.1.1.

Analýzou stability stacionárního řešení rovnice (3.9.29) (viz kap. 4.2) bychom mohli určit podmínky, za kterých je rázová vlna šířící se tyčí stabilní či nestabilní.

4. Nelineární jevy v disipativních systémech.

Vyšetřování pohybu systému hmotných těles (bodů) vede k řešení soustav obyčejných nelineárních rovnic. Podobné soustavy rovnic dostáváme i při diskretizaci spojitých systémů.

Kvalitativní analýze takovýchto rovnic se věnovala řada vynikajících matematiků jako např. H. Poincaré, G.D. Birkhoff a A.M. Ljapunov. Speciálně problematice nelineárních oscilací jsou věnovány práce Andronova a jeho spolupracovníků (1966) a Guckenheime-
ra a Holmesa (1983), v české literatuře Holodniok a kol. (1986).

Studiu Hamiltonových systémů, jejich neintegrabilitě a vzniku chaosu, KAM-teorii (Kolmogorov - Arnold - Moser teorém tvrdí, že kvaziperiodické pohyby se zachovávají i při malých poruchách hamiltoniánu) jsou věnovány knihy Arnolda (1978), Lichtenberga a Liebermanna (1983), viz též knihu Balesca (1975).

V souladu s II. zákonem termodynamiky dochází při transformaci jednoho typu energie na druhý vždy k disipaci (rozptylu) energie (kap. I.3.12). Mírou disipace energie je produkce entropie, viz kap. I.8 (Prigogine, 1980; Nicolis, 1986). Otevřené systémy (vyměňují s okolím hmotu, energii, hybnost, apod.) mohou existovat ve stavech, ve kterých neustále produkují entropii. Vyprodukovaná entropie je odváděna do okolí, nebo jinými slovy, systém čerpá odpovídající energii, hmotu, apod. z prostředí, takže se celková entropie příliš nemění, popř. zůstává zcela konstantní. Takovéto stavy systému nazýváme dynamické a systém dynamickým systémem, resp. disipativním dynamickým systémem (přesné definice viz konec kap. 4.1).

4.1 Základní vlastnosti konzervativních a disipativních systémů

V disipativních systémech (přívlastek dynamický budeme vypouštět) vždy probíhají nějaké disipativní procesy, jejichž základní vlastností je časová nevratnost. Tuto vlastnost ukážeme na procesech probíhajících v termo-visko-elastickém materiálu. Tento materiál je popsán rovnicemi evolučního typu (2.1.20)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial j^i(\varphi)}{\partial x^i} = \sigma(\varphi), \quad (4.1.1)$$

kde φ je vektor makroskopických proměnných ^(2.1.21), jehož jednotlivé složky jsou např. hustota ρ , hybnost ρv^i , vnitřní energie u apod. Tok těchto veličin $j^i(\varphi)$ (2.1.22) a hustota produkce $\sigma(\varphi)$ (2.1.23) jsou určeny konkrétními konstitutivními vztahy, viz kap. I.6. Provedeme transformaci $t \rightarrow -t$ vyjadřující změnu chodu času. Existuje-li alespoň jedna složka vektorové rovnice (4.1.1), která je neinvariantní vůči této transformaci, je systém disipativní, čili procesy v něm probíhající jsou časově nevratné.

Typickým příkladem je proudění vazké stlačitelné tekutiny popsané rovnicemi (2.4.134) až (2.4.141), tj.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\partial j_{kon}^i(\varphi)}{\partial x^i} + \frac{\partial j_{dis}^i(\varphi)}{\partial x^i} \quad (4.1.2)$$

pro vektor proměnných

$$\varphi(x^i, t) = (\rho, \rho v^1, \rho v^2, \rho v^3, \rho e). \quad (4.1.3)$$

Veličiny

$$e = u + \frac{(v)^2}{2}, \quad p = (\kappa - 1)\rho \left(e - \frac{(v)^2}{2} \right),$$

$$T = \frac{1}{c_v} \left[e - \frac{(v)^2}{2} \right] \quad (4.1.4)$$

jsou postupně specifická energie e (suma vnitřní energie u a kinetické energie $\frac{(v)^2}{2}$), tlak p a teplota T . c_p, c_v jsou specifická tepla a $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$. Složky konvektivních toků jsou

$$j_{kon}^i(\varphi) = (\rho v^i, \rho v^i v^1 + p \delta^{i1}, \rho v^i v^2 + p \delta^{i2}, \rho v^i v^3 + p \delta^{i3}, \rho v^i (e + \frac{p}{\rho}))$$

pro $i = 1, 2, 3$.

Pro Newtonovskou tekutinu má disipativní část tenzoru tlaku tvar

$$t_{dis}^{ij} = \mu \left(\delta^{jl} \frac{\partial v^i}{\partial x^l} + \delta^{il} \frac{\partial v^j}{\partial x^l} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right) \quad (4.1.6)$$

a vektor vedení tepla je

$$q^i = -\lambda \delta^{il} \frac{\partial T}{\partial x^l}, \quad (4.1.7)$$

kde μ, λ jsou postupně smyková viskozita a tepelná vodivost.

Složky disipativních toků jsou

$$\underline{j}_{dis}^i(\varphi) = (t_{dis}^{i1}, t_{dis}^{i2}, t_{dis}^{i3}, t_{dis}^{il} v_l - q^i), \quad \text{pro } i=1,2,3. \quad (4.1.8)$$

Rovnice (4.1.2), ve kterých je vektor $\underline{j}_{dis}^i(\varphi)$ definován pomocí konstitutivních vztahů (4.1.6) a (4.1.7) nazýváme rovnicemi Navierovými-Stokesovými, viz (4.4.2).

Při transformaci $t \rightarrow -t$ mění rychlost materiálového bodu znaménko, tj. $v^i = \dot{x}^i \rightarrow -v^i$ a ostatní veličiny znaménko v důsledku axiomu objektivit nemění (viz kap. I.5.2). Přetransformovaná rovnice (4.1.2) má s přihlédnutím k definici toků (4.1.5) a (4.1.8) tvar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial j_{kon}^i(\varphi)}{\partial x^i} - \frac{\partial j_{dis}^i(\varphi)}{\partial x^i}, \quad (4.1.9)$$

ze kterého vidíme, že invarianci vůči záměně směru času ruší disipativní část rovnice. Je tím explicitně potvrzeno, že disipativní procesy, které způsobují produkci entropie (I.8.1) vedou i k časové nevratnosti procesů. Dále odtud plyne, že konvektivní část toku k časové nevratnosti nevede, což je plně v souladu se zákony klasické mechaniky pro konzervativní systémy^{4.1)}, které jsou rovněž invariantní vůči záměně směru času, viz rovnice (I.7.4.17)

4.1)

Klasická, popř. kvantová mechanika hmotných bodů je formulována pomocí akční (někdy též účinkové) funkce S (srovnej s kap. I.7.4). Pro jeden hmotný bod o hmotnosti m ve vnějším energetickém poli

$V(x^i, t)$ platí (Landau, Lifšic, 1965, 1963)

$$S(x^i(t), t, x^i(t_1), t_1) = \int_{t_1}^t L(x^i(t), \dot{x}^i(t), t) dt,$$

i)

kde $x^i(t), \dot{x}^i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) jsou kartézské souřadnice polohy (trajektorie) a složky rychlosti tohoto hmotného bodu. Lagrangeova funkce je pak definována jako rozdíl kinetické $m \frac{(\dot{x}^i)^2}{2}$ a potenciální energie $V(x^i, t)$ a v kartézských souřadnicích má tvar

$$L(x^i(t), \dot{x}^i(t), t) = \frac{m(\dot{x}^i)^2}{2} - V(x^i, t).$$

ii)

Trajektorie $x^i(t)$ hmotného bodu je určena extrémem (minimem) funkcionalu i), tj. podmínkou $\delta S = 0$. Tato podmínka (viz (2.2.2)) lze vyjádřit takto

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{\partial S}{\partial x^i} \delta x^i(t) + \frac{\partial S}{\partial x^i} \delta x^i(t_1) = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta x^i \Big|_{t_1}^t - \int_{t_1}^t \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right] \delta x^i dt = 0. \end{aligned}$$

iii)

Jsou-li t_1, t nějaké pevné časy, pak je $\delta x^i(t_1), \delta x^i(t) = 0$ a extrém nastává za podmínky

$$\frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

iv)

což jsou Lagrangeovy rovnice a s ohledem na tvar funkce ii) jsou ekvivalentní Newtonově pohybové rovnici $m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$.

Předpokládáme, že integrál v podmínce iii) je nulový pro každý (i proměnný) čas t pak $\delta x^i(t) \neq 0$ a z podmínky extrému iii) ještě plyne vyjádření pro impuls p_i jako gradient akční funkce

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial S}{\partial x^i} \quad \text{v)}$$

Časová derivace funkce i) je pak rovna

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x^i} \dot{x}^i = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{x}^i = L(x^i, \dot{x}^i, t). \quad \text{vi)}$$

Na místo funkce $L(x^i, \dot{x}^i, t)$ je výhodné zavést pomocí Legendrovovy transformace funkci

$$H(x^i, p_i, t) = p_i \dot{x}^i - L(x^i, \dot{x}^i, t), \quad \text{vii)}$$

která, jak se snadno přesvědčíme dosazením do ii), má význam součtu kinetické a potenciální energie a je funkcí pouze proměnných $x^i(t), p_i(t), t$. Tuto funkci nazýváme hamiltoniánem systému. Diferenciál této funkce je s ohledem na v) a iv) roven

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \dot{x}^i dp_i - \dot{p}_i dx^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Porovnáním členů dostáváme Hamiltonovy harmonicky sdružené rovnice

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad \text{viii)}$$

Dosazením hamiltoniánu vii) do vi) dostáváme Hamiltonovu-Jacobiho rovnici

$$\frac{\partial S(x^i, t)}{\partial t} + H\left(x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i}, t\right) = 0, \quad \text{ix)}$$

která stejně tak jako rovnice viii) je obecným vyjádřením zákona pohybu mechanických nekonzervativních (hamiltonián vii) závisí explicitně na čase) systémů. Rovnice ix) je skalární a je tudíž invariární vůči transformaci souřadnic (viz I.D2). Potom i tvar rovnic viii) pro křivočaré souřadnice q^i a zobecnělé impulsy p^i je stejný. Tento fakt je nazýván kanonickou invariancí

Pro soustavu (systém) N hmotných bodů má hamiltonián vii) tvar

$$H = \sum_{k=1}^N m_k \frac{(\dot{x}_k)^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k,n=1}^N V_{kn}(|x_k - x_n|, t), \quad \text{x)}$$

kde první člen vyjadřuje kinetickou energii všech částic a

$V_{kn}(|x_k - x_n|, t)$ je jak energie vzájemné interakce hmotných bodů, tak i vliv vnějšího prostředí. Hamiltonovy rovnice viii) tohoto systému mají tvar (Balescu, 1975)

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, N. \quad \text{xi)}$$

Říkáme, že systém skládající se z N vzájemně interagujících hmotných bodů (molekul, atomů) je konzervativní, jestliže jeho hamiltonián nezávisí explicitně na čase, tj. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Invariance rovnic xi) vůči transformaci $t \rightarrow -t$ je pro konzervativní systém zřejmá ($x_k(t) = x_k(-t)$, $p_k(t) = -p_k(-t)$).

Pozn.

Jako v případě konzervativního systému, jehož celková energie $H = \text{konst}$, tak i v případě systému nekonzervativního by se zdálo, že řešení problému N částic je otázkou jen velkého množství matematických operací. Bohužel, vzhledem k nelineárnímu charakteru pohybových rovnic x_i), je i numerické řešení diskutabilní. Rozmanitost interakcí mezi podsystémy (částicemi) má za následek nestabilitu ve vývoji systému, a to především z hlediska chování jednotlivých trajektorií. Je dokázáno, že existuje systém o počtu částic $N > 3$ pro^{který} existuje taková oblast počátečních podmínek, ve které malá změna těchto podmínek má za následek velké změny v chování trajektorií jednotlivých částic. Systém není stabilní ve smyslu Ljapunova a hromaděním takových nestabilit se vývoj systému stává prakticky nevratným a tedy disipativním (i když rovnice x_i) jsou časově invariantní) (Prigogine, 1967;1980; Balescu, 1975).

Dynamické disipativní systémy lze charakterizovat i z mikroskopického hlediska. Předpokládejme, že se systém (těleso) skládá z N částic (atomů, molekul), jejichž souřadnice a impulsy značíme $x_n, p_n, (n=1,2,\dots,N)$. Pohyb těchto částic je popsán Hamiltonovými rovnicemi, pozn. 4.1), vztah x_i).

Nerovnovážná statistická fyzika vychází z rozdělovací funkce $\mathcal{F}(x_n, p_n, t)$ popisovaného systému (Balescu, 1975). Tato funkce je definována v $6N$ rozměrném fázovém prostoru, jehož element značíme $d\Omega = dx_1 dx_2 \dots dx_N dp_1 dp_2 \dots dp_N$. Vyjadřuje hustotu pravděpodobnosti, se kterou se zkoumaný systém nachází v čase t v mikroskopickém stavu $(x_1, x_2, \dots, x_N, p_1, p_2, \dots, p_N)$.

Z teorie kanonických transformací (Landau, Lifšic, 1965; Kvasnica, 1983) plyne, že jak pro konzervativní systémy, tak pro systémy nekonzervativní se v průběhu času velikost elementu objemu fázového prostoru (F.P.) nemění, viz obr. 4.1.

Rozdělovací funkce je normována k jedné, tj.

$$\int_{\text{F.P.}} \mathcal{F}(x_n, p_n, t) d\Omega = 1. \quad (4.1.10)$$

Diferenciální rovnici pro funkci \mathcal{F} dostáváme časovou derivací této podmínky

$$\overline{\dot{\mathcal{F}}} = \int_{\text{F.P.}} \dot{\mathcal{F}} d\Omega + \int_{\text{F.P.}} \mathcal{F} \dot{d\Omega} = 0. \quad (4.1.11)$$

Uvážíme-li, že v případě systému popsaného časově invariantními rovnicemi klasické či kvantové mechaniky ^{4.1)} platí $\dot{d\Omega} = 0$ plyne z (4.1.11) obvyklá Liouvillova rovnice

$$\dot{\mathcal{F}} = \frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_n} \dot{p}_n \right) = 0. \quad (4.1.12)$$

Tato rovnice má největší význam v tom případě, když předpokládáme, že rozdělovací funkce závisí na nějakých makroskopických parametrech $w_m = w_m(\underline{x}, t)$. Bed fázového prostoru $(w_1(\underline{x}, t), w_2(\underline{x}, t), \dots, w_{N_f}(\underline{x}, t))$ pak definuje makroskopický stav uvažovaného systému. Pro nehomogenní systém jsou tyto parametry určeny nějakými fenomenologickými rovnicemi

$$\frac{dw_m}{dt} = F_m(w_k, a_s, x, t) \quad \text{pro } k, m = 1, 2, \dots, N_f$$

$$s = 1, 2, \dots, N_c,$$

(4.1.13)

kde a_1, a_2, \dots, a_{N_c} je soubor vnitřních (někdy nazývaných řídicích) parametrů systému. Tyto parametry vyjadřují jednak vliv okrajových podmínek, např. velikost přestupu tepla, výměnu impulsu s okolím, Reynoldsovo číslo a jednak vliv vnitřních procesů, např. velikost vzájemných vazeb, tlumení, apod. (viz Tab. 4.1). Způsob odvození viz dále, např. (4.2.26).

Liouvillova rovnice (4.1.12) má pak tvar

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial w_m} \dot{w}_m = 0$$

(4.1.14)

a pro konzervativní systémy $\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0\right)$ je tato rovnice zaručeně splněna tehdy, je-li $\dot{w}_m = 0$. Tudíž pro parametry, které jsou pro uvažovaný systém integrály pohybu, přičemž $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w_m)$. Na tomto řešení je založena statistická termodynamika 4.2) (Kvasnica, 1983).

4.2)

Předpokládejme, že $w_m = H = \text{konst}$ je celková energie systému. Tento systém si představíme jako sjednocení velkého systému H_0 (termostatu) a malého systému $E = E(x, p)$ (molekuly).
 Rozdělovací funkce celého systému $\mathcal{F}(H) = \mathcal{F}(H_0 + E) = \mathcal{F}(H_0) \cdot \mathcal{F}(E)$

Dynamický systém	Interpretace parametrů W_n	Interpretace vnitřních parametrů a_s
Klasická mechanika hmotných bodů (částic)	souřadnice q impulzy p	energie vzájemného působení, vliv vnějších podmínek
Hydrodynamika	Fourierovy módy polí hustoty, rychlosti a energie	okrajové podmínky, Reynoldsovo číslo Re , Rayleighovo číslo Ra , apod.
Chemické reakce	pole koncentrací	okrajové podmínky, konstanty chemických reakcí, apod.

Tabulka 4.1

Dynamické systémy a jejich parametry

je rovna jejich součinu (podsystemy jsou vzájemně nezávislé).
Z normovací podmínky (4.1.10) dostáváme

$$\int_{F.P.} \mathcal{F}(H) d\Omega = \mathcal{F}(H_0) \int_{F.P.} \mathcal{F}(E) d\Omega = \exp\left[\frac{f}{kT}\right] Q = 1$$

i)

kde Q je partiční funkce a f je volná energie, k je Boltzmannova konstanta a T je teplota, viz kap. I.7.5.

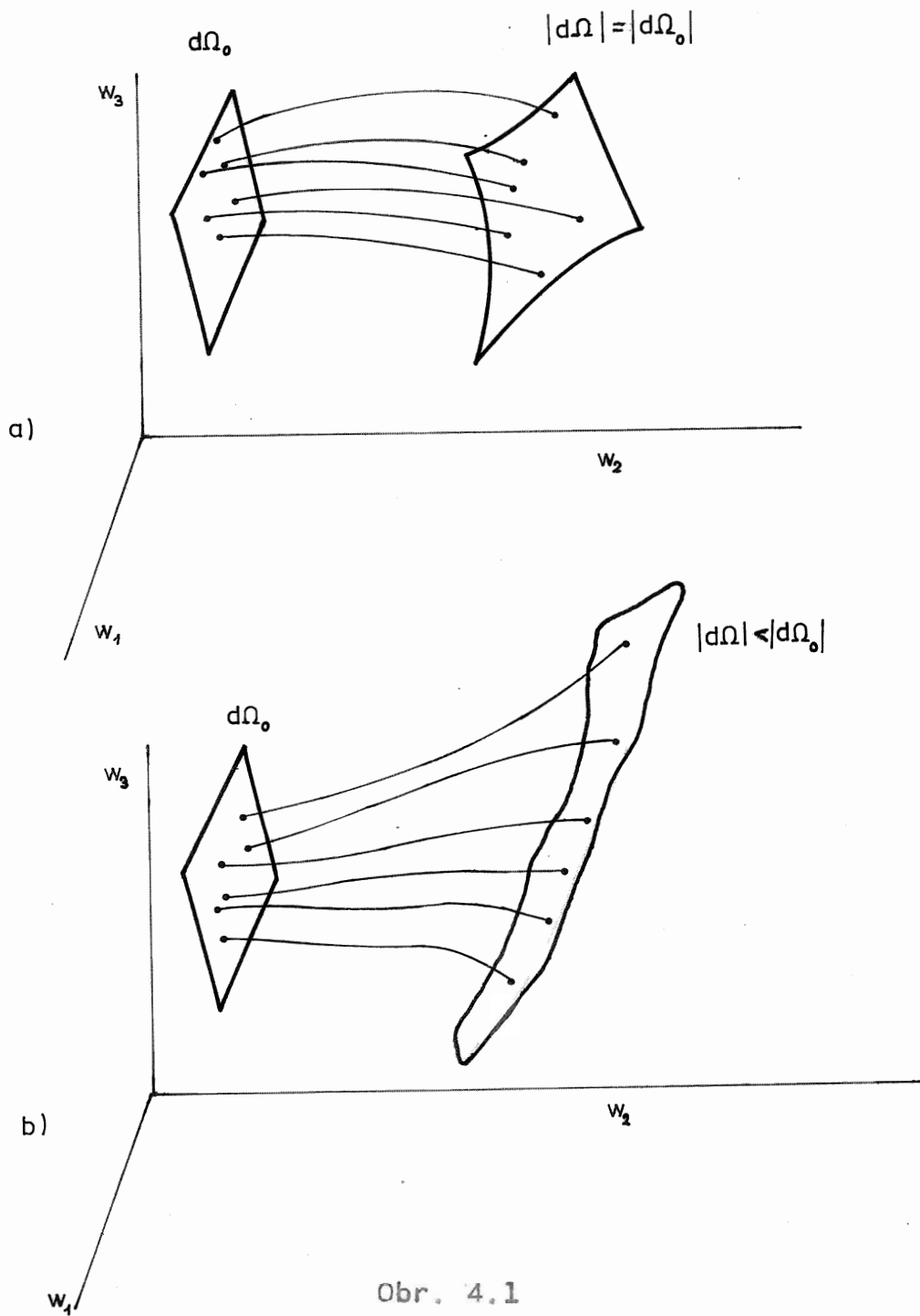
Liouvillova rovnice ve tvaru (4.1.12), resp. (4.1.14) platí pouze pro časově vratné nedisipativní systémy.

Základním předpokladem pro odvozené Liouvillovy rovnice (4.1.12), resp. (4.1.14) byla rovnost fázových objemů, tj. $\dot{d}\Omega = 0$ viz obr. 4.1. Avšak, v každém systému N vzájemně interagujících částic dochází k časové nevrátlosti, viz pozn. v odst. 4.1. Potom ale se mění i velikost elementu fázového objemu.

r. 4.1 → Vyjdeme z fenomenologických rovnic (4.1.13) pro obecný dynamický systém, jejichž řešení (předpokládejme, že existuje) bude ve tvaru

$$w_m = w_m(w_n^{(0)}(a_s, \underline{x}) | \underline{x}, t) \quad \text{pro } m, \eta = 1, 2, \dots, N_f \\ s = 1, 2, \dots, N_v . \quad (4.1.15)$$

Zde $w_n^{(0)}(\underline{x})$ je počáteční podmínka v bodě \underline{x} . Označíme $d\Omega_0$ element objemu odpovídajícího fázového prostoru na počátku (viz obr. 4.1b). Transformace tohoto elementu do času t je podle (I.3.5.17) a s ohledem na (4.1.15) rovna



Obr. 4.1

Časová změna elementu objemu fázového prostoru
 a) pro časově vratný systém
 b) pro disipativní časově nevratný systém

$$d\Omega = \left| \det \frac{\partial w_m}{\partial w_n^{(0)}} \right| d\Omega_0. \quad (4.1.16)$$

Jeho časová derivace je díky vztahu (I.3.10.4) a s ohledem na (4.1.15) dána vztahem

$$\dot{d\Omega} = \overline{\det \left(\frac{\partial w_m}{\partial w_n^{(0)}} \right)} d\Omega_0 = \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\partial F_m}{\partial w_m} d\Omega. \quad (4.1.17)$$

Z derivace normální podmínky (4.1.11) pak plyne obecný tvar Liouvillový rovnice

$$\dot{\mathcal{F}} = -\mathcal{F} \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\partial F_m}{\partial w_m} \neq 0. \quad (4.1.18)$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí (4.1.14) je patrné, že fázový prostor pro časově vratné konzervativní procesy se chová jako nestlačitelná tekutina ($\dot{\rho} = -\rho \operatorname{div} \underline{v} = 0$) a pro disipativní procesy se chová jako stlačitelná tekutina ($\dot{\rho} = -\rho \operatorname{div} \underline{v} \neq 0$).

Časovou změnu velikosti fázového objemu můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{\dot{d\Omega}}{d\Omega} = \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\partial F_m}{\partial w_m} = \operatorname{div} F \begin{cases} = 0 \\ < 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{konzervativní dynamický} \\ \text{system (časově vratný)} \\ \\ \text{disipativní dynamický} \\ \text{system (časově nevratný)} \end{array} \quad (4.1.19)$$

(Prigogine, 1962; Nicolis, 1986). ^(*) *uvedeme příklad* Znaménko divergence pro disipativní systémy určíme rozбором ^(dissipativního) jednoduchého systému - tlumeného harmonického oscilátoru

$$\frac{dw_1}{dt} = w_2 = F_1$$

$$\frac{dw_2}{dt} = -2\gamma w_2 - \omega^2 w_1 = F_2 \quad (4.1.20)$$

Jde o lineární systém a proto můžeme předpokládat řešení ve tvaru

$$w_1 = \text{Re} \left\{ A \exp \left[(-\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}) t \right] \right\}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.1.21)$$

Zde $\text{Re}\{z\} = a$ značí reálnou část komplexního čísla $z = a + ib$. Pro $\omega > \gamma > 0$ dostáváme tlumené harmonické kmity

$$w_1 = w_1^{(0)} e^{-\gamma t} \cos \left[\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \right) t + \alpha \right], \quad A = w_1^{(0)} e^{i\alpha} \quad (4.1.22)$$

kde α je nějaký fázový posuv. Dosazením (4.1.20) do podmínky (4.1.19) dostaneme skutečně

$$\frac{\partial F_1}{\partial w_1} + \frac{\partial F_2}{\partial w_2} = -2\gamma < 0 \quad \text{pro } \gamma > 0. \quad (4.1.23)$$

Tudíž velikost fázového objemu se u disipativních systémů s časem zmenšuje. Ke kvantitativnímu popisu této změny se zavádí speciální (Hausdorfova nebo-li fraktální) míra, která je měřítkem disipativnosti, resp. chaotičnosti chování systému.

* Znaménko divergence určíme z mikroskopické definice entropie

$$S - S_{eq} = k \ln \mathcal{F}$$

kde k je Boltzmannova konstanta a \mathcal{F} je rozdělovací funkce rychlosti částic (molekul, atomů), která je získána řešením Boltzmannovy kinetické rovnice, viz vztah (I.11.3). Z bilance entropie pro celý systém (1,1) pak pomocí tohoto vztahu určíme

$$k \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\mathcal{F}} = \dot{S} = J(s) + P(s)$$

Porovnáním s rovnicí (4.1.18) plyne, že divergence je záporná, je-li $\dot{S} > 0$. Tato nerovnost platí i pro takové otevřené systémy, pro které je produkce entropie $P(S)$ větší než přítok záporné entropie z okolí.

4.3)

Říkáme, že R je unitární prostor, jestliže je lineárním prostorem, ve kterém každé dvojici prvků $f, g \in R$ (bodů či funkcí) je přiřazeno buď reálné nebo komplexní číslo (f, g) nazývané skalárním součinem. Skalární součin vyhovuje následujícím podmínkám:

- a) $(cf, g) = c(f, g)$ kde c je nějaké komplexní číslo
- b) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$
- c) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ ($\overline{(\quad)}$ označuje číslo komplexně sdružené)
- d) $(f, f) > 0$ pro $f \neq 0$

pro všechna $f, g, h \in R$.

Typické příklady skalárního součinu jsou:

$$(\underline{x} \cdot \underline{y}) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \quad \text{pro } \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{viz (I.D2.3)}$$

$$(f, g) = \int_V f(x^i) g(x^i) dv \quad \text{pro } f, g \in L_2(V), \quad \text{viz pozn. 2.1)}$$

Říkáme, že dva prvky $f, g \in R$ jsou ortogonální jestliže

$$(f, g) = 0. \quad \text{i)}$$

Množina prvků $f_j (j=1, 2, \dots)$ (konečná či nekonečná) se nazývá ortonormálním systémem (množinou) jestliže platí

$$(f_j, f_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \neq k \\ 1 & \text{pro } j = k \end{cases} \quad \text{ii)}$$

Libovolný počet p prvků ortonormálního systému M je lineárně nezávislý jestliže platí rovnost

$$\sum_{j=1}^p c_j f_j = 0 \quad \text{jen pro } c_j = 0 \quad (j=1,2,\dots,p) \quad \text{iii)}$$

K vytvoření ortonormálního systému g_i ($i=1,2,\dots$) z lineárně nezávislých prvků f_j ($j=1,2,\dots$) užíváme tzv. Schmidovu ortonormalizační proceduru:

$$g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, \quad g_k = \frac{h_k}{\|h_k\|} \quad \text{iv)}$$

kde

$$h_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} (f_k, g_j) g_j \quad (k=2,3,\dots)$$

pro normu definovanou skalárním součinem

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} \quad \text{v)}$$

Nechť je f libovolný prvek (funkce) unitárního prostoru R a g_k ($k=1,2,\dots$) je v tomto prostoru ortonormální systém. Potom

$$a_k = (f, g_k), \quad k=1,2,\dots \quad \text{vi)}$$

nazýváme Fourierovým koeficientem a platí následující věta o aproximaci: Funkce $f \in R$ je aproximována řadou

$$f = \sum_k a_k g_k \quad \text{vii)}$$

s přesností $\delta^2 = \left\| f - \sum_k a_k g_k \right\|^2$ a tato aproximace je na systému ortonormálních funkcí iv) nejlepší, jestliže a_k jsou Fourierovy koeficienty vi) (Collatz, 1970). Řadu vii) nazýváme Fourierovou řadou vzhledem k systému $g_k (k=1,2,\dots)$ a platí tzv. Besselova nerovnost

$$\sum_{j=1}^k |a_j|^2 \leq (f, f) \quad k=1,2,\dots \quad \text{viii)}$$

Říkáme, že ortonormální systém $g_k (k=1,2,\dots)$ v unitárním prostoru R je úplný, jestliže ho nelze doplnit dalšími prvky z R tak, aby i nový systém byl ortonormální.

Je-li v Fourierově řadě vii) systém $g_k (k=1,2,\dots)$ úplný, tak Besselova nerovnost viii) přechází na tzv. vztah úplnosti, tj.

$$(f, f) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$$

a aproximace může být provedena s libovolnou přesností (tj. $\delta^2 \rightarrow 0$).

Nejčastějším příkladem úplného systému ortonormálních funkcí definovaných na intervalu $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ (tj. v $L_2(-\pi, \pi)$) jsou funkce

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad (n=1,2,\dots) \quad \text{ix)}$$

Fourierova řada vii) funkce $f(x)$ vzhledem k systému ix) je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \text{x)}$$

pro

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky \, dy, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky \, dy, \quad \text{xi)}$$

$$k=0,1,2,\dots$$

V komplexním zápisu má systém x) tvar

$$\frac{1}{2\pi} e^{ikx} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{xii)}$$

a Fourierova řada x) je dána vztahem

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{pro} \quad c_k = \bar{c}_{-k} = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iyk} dy. \quad \text{xiii)}$$

Zásadním problémem je nalezení výchozích rovnic (4.1.13) popisovaného disipativního dynamického systému. Vycházíme-li z formulace založené na termodynamice kontinua, jsou základem rovnice (4.1.1).

Formální odvození rovnic (4.1.13) ukážeme pro případ termoviskózní tekutiny popsané rovnicemi (4.1.2) užitím tzv. Fourierovy - Galerkinovy metody. V této metodě předpokládáme, že řešení $\varphi(x^i, t)$ lze rozložit do Fourierovy řady 4.3)

$$\varphi(x^i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \psi_n(x^i), \quad w_n(t) = \int_V \varphi(x^i, t) \psi_n(x^i) dv, \quad (4.1.24)$$

kde $\psi_n(x^i)$ patří do nějakého úplného ortonormálního systému funkcí a $w_n(t)$ jsou odpovídající Fourierovy koeficienty.

Řešení ve tvaru (4.1.24) dosadíme do výchozí rovnice (4.1.2) takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dw_n}{dt} \psi_n = \mathcal{F} \left(\sum_n w_n \psi_n, \sum_m w_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x^i}, \dots, x, t \right), \quad (4.1.25)$$

kde jsme funkcí \mathcal{F} označili celou pravou stranu rovnice. Podstatné je, že závisí jen na neznámých $w_n(t)$ a známých funkcích ψ_n a jejich derivacích. Vynásobením (4.1.25) funkcí ψ_m a integrací přes V dostáváme vzhledem k ortonormalitě ψ_m ($m=1,2,\dots$) rovnice typu

$$\frac{dw_m}{dt} = F_m(w_k, a_s) \quad \text{pro } m, k = 1, 2, \dots, N_f \\ s = 1, 2, \dots, N_c. \quad (4.1.26)$$

Soubor vnitřních parametrů a_1, a_2, \dots, a_{N_c} má stejný význam jako v soustavě (4.1.13).

Počáteční podmínky mají obvyklý tvar

$$w_m(t=0) = w_m^{(0)}. \quad (4.1.27)$$

Okrajové podmínky jsou podobně jako při Galerkinově metodě respektovány vhodnou volbou funkcí $\psi(x^i)$ a parametrů λ_s viz kap. 2.2.1.

Funkcí F_m jsme označili pravou stranu (4.2.25) po provedení integrace přes V . Tím také explicitně zmizela závislost na x (vliv nehomogenit). Obecně však tato závislost může existovat a je možno ji respektovat rozdělením objemu V na konečné prvky či objemy^a použít některou z aproximací kapitoly 2.

V teorii Navierových-Stokesových rovnic se zavádí Galerkinova aproximace pomocí funkcí ψ_n , které jsou řešením Laplaceova operátoru při daných okrajových podmínkách (jde většinou o nestlačitelnou tekutinu, Horák, 1987). Potom se dokazuje teorém o

centrální varietě, podle kterého při této konečněrozměrné aproximaci nedochází ke ztrátě informace o stabilitě řešení (Marsden, Mc Craken, 1976).

Uvedeme definici dynamického systému: Systém diferenciálních rovnic (4.1.13), popř. (4.1.26) za počátečních podmínek (4.1.27) pro konkrétní soubor vnitřních parametrů Q_5 nazýváme dynamickým systémem. Jestliže funkce F_m resp. \underline{F}_m splňují podmínku $\sum_{m=1}^{N_f} \frac{\partial F_m}{\partial W_m} < 0$, resp. $\sum_{m=1}^{N_f} \frac{\partial \underline{F}_m}{\partial \underline{W}_m} < 0$ nazýváme tento systém rovnic disipativním dynamickým systémem.

Divergenci (4.1.19) definujeme v tomto $N_f \times M$ rozměrném prostoru takto:

$$\sum_{m=1}^{N_f} \frac{\partial F_m}{\partial W_m} = \sum_{m=1}^{N_f} \sum_{\alpha=1}^M \frac{\partial F_m^{(\alpha)}}{\partial W_m^{(\alpha)}} \quad (4.2.28)$$

pro $\underline{F}_m = (F_m^{(1)}, F_m^{(2)}, \dots, F_m^{(M)})$, $\underline{W}_m = (W_m^{(1)}, W_m^{(2)}, \dots, W_m^{(M)})$,

kde $\alpha = 1, 2, \dots, M$ je rozměr vektoru $\underline{\psi}$ makroskopických proměnných (pro rovnici (4.1.3) je $M = 5$).

Někdy je za dynamický systém považována každá soustava rovnic (algebraických či diferenciálních), popisující časový vývoj (změnu stavu) materiálového systému (tělesa), např. rovnice (4.1.1) a (4.1.2) (Ott, 1981). Velké množství různých dynamických systémů je popsáno v knihách M. Kubička a M. Marka (1983) a M. Marka a I. Schreibera (1984).

4.2 Základní typy nestabilit v disipativních systémech

Při časovém vývoji disipativních systémů dochází ke změnám, které zásadně mění jejich strukturu. Typickým příkladem je průchod nestabilitou, za kterou dochází k novému uspořádání, např. odtržení proudu za tělesem a vznik Karmánovy vírové řady, viz obr.4.21, Rayleighova-Benardova nestabilita při přestupu tepla apod. Ve fázovém prostoru, viz obr. 4.1b) se toto chování projevuje tím, že fázové trajektorie, které byly v počátečním stavu blízko sebe se v průběhu času dostávají od sebe velmi daleko. Vývoj systému není stabilní v Ljapunovově smyslu, viz kap.I.7. Objevuje se neperiodický pohyb, kvaziperiodická oscilace (poměr frekvencí je irracionální číslo) nebo dokonce oscilace periodické. Superpozicí těchto třech typů pohybů se výsledný pohyb jeví jako neuspořádaný a nazýváme ho chaosem.

Uvedeme obecný postup vyšetřování stability dynamických systémů, ze kterého vyplynou tři základní, nejčastěji studované typy nestabilit^{4.4}). (Eckmann, 1981; Nicolis, 1986). Soustavu rovnic (4.1.26) (pro $M = 1$) rozvineme v okolí nějakého referenčního stavu $w_m^{(s)}$ (pro $m = 1, 2, \dots, N_f$) do Taylorovy řady. Tudiž pro malou odchylku $w_m' = w_m - w_m^{(s)}$ při respektování členů vyššího řádu $H_m(w_n', a_r)$ platí soustava obyčejných rovnic

$$\frac{dw_m'}{dt} = \sum_{m=1}^{N_f} L_{mn}(w_k^{(s)}, a_r) w_n' + H_m(w_r', a_r),$$

kde

$$L_{mn}(w_k^{(s)}, a_r) = \frac{\partial F_m(w_k^{(s)}, a_r)}{\partial w_n} \quad \text{pro} \quad \begin{matrix} m, n, k = 1, 2, \dots, N_f \\ r = 1, 2, \dots, N_c. \end{matrix} \quad (4.2.1)$$

4.4)

Uvedeme kvalitativní vyšetřování soustav diferenciálních rovnic (4.1.26), ^{které,} se obvykle nazývá Ljapunovova metoda lineárního modelu (Hirsch, Smale, 1974; Dvořák, Maršík, Andrej, 1982). Její princip ukážeme na příkladu dvou rovnic

$$\begin{aligned}\frac{dw_1}{dt} &= F_1(w_1, w_2, a) \\ \frac{dw_2}{dt} &= F_2(w_1, w_2, a).\end{aligned}\tag{i)}$$

Tyto rovnice linearizujeme v okolí stacionárního stavu $w_1^{(s)}, w_2^{(s)}$ definovaného vztahy

$$F_1(w_1^{(s)}, w_2^{(s)}, a) = 0, \quad F_2(w_1^{(s)}, w_2^{(s)}, a) = 0.\tag{ii)}$$

Obdržíme rovnice typu (4.2.1); tj.

$$\begin{aligned}\frac{dw'_1}{dt} &= L_{11}w'_1 + L_{12}w'_2 + H_1(w'_1, w'_2, a) \\ \frac{dw'_2}{dt} &= L_{21}w'_1 + L_{22}w'_2 + H_2(w'_1, w'_2, a) \\ \text{pro } L_{mn} &= \frac{\partial F_m}{\partial w_n}(w_k^{(s)}, a) \quad m, n, k = 1, 2,\end{aligned}\tag{iii)}$$

pro které platí předpoklady Hartmanovy věty. Za těchto předpokladů pak kvalitu řešení rovnice i) v okolí bodu ii) určuje soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{w}_1}{dt} &= L_{11}\hat{w}_1 + L_{12}\hat{w}_2 \\ \frac{d\hat{w}_2}{dt} &= L_{21}\hat{w}_1 + L_{22}\hat{w}_2.\end{aligned}\tag{iv)}$$

Řešení této soustavy budeme hledat ve tvaru $\hat{w}_1 \sim e^{\lambda t}$, $\hat{w}_2 \sim e^{\lambda t}$, takže dosazením do soustavy iv) vidíme, že se problém redukuje na nalezení vlastních čísel λ matice L_{mn} tj.

$$\det \begin{bmatrix} L_{11} - \lambda & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad \text{v)}$$

$$\text{resp. } \lambda_{1,2} = \frac{L_{11} + L_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{L_{11} + L_{22}}{2}\right)^2 + L_{21}L_{12}}.$$

Tato vlastní čísla závisí na parametru (tj. $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(a)$) a jsou určující pro časové chování řešení rovnic i) v okolí $w_1^{(s)}$, $w_2^{(s)}$. Vzhledem k tomu, že řešení soustavy iv) je dáno superpozicí obou partikulárních řešení platí

$$\begin{aligned} \hat{w}_1(t, a) &= b_{11} e^{\lambda_1(a)t} + b_{12} e^{\lambda_2(a)t} \\ \hat{w}_2(t, a) &= b_{21} e^{\lambda_1(a)t} + b_{22} e^{\lambda_2(a)t}, \end{aligned} \quad \text{vi)}$$

kde koeficienty b_{mn} ($m, n = 1, 2$) jsou určeny z počátečních podmínek tak, že $\hat{w}_m(t=0, a) = \hat{w}_m^{(0)}(a) = \text{Re}\{b_{m1} + b_{m2}\}$ pro $m = 1, 2$, viz 4.1.21.

Základní typy řešení soustavy vi) a tím i soustavy i) v okolí stacionárního stavu ii) jsou zobrazeny fázovými trajektoriemi ve fázovém prostoru \hat{w}_1, \hat{w}_2 na obr. 4.2. Šipky ukazují směr času. Předpokládejme, že vlastní čísla $\lambda_{1,2}$ jsou reálná, pak existují následující možnosti:

- a) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ tzv. sedlo; viz obr. 4.2.a). Zaneseny jsou i počáteční podmínky.
- b) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ tzv. uzel; viz obr. 4.2b). Trajektorie jsou přímky

c) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

tzv. nevlastní uzel, viz obr. 4.2c).

Odpovídá případu, kdy řád matice L_{mn} minus hodnota matice $\hat{L}_{mn} = L_{mn} - \lambda \delta_{mn}$, tzv. nulita matice \hat{L} , kterou označíme

je ostře $\hat{\mu}$ menší než násobnost vlastního čísla λ .

V našem případě $\hat{\mu} = 2 - 1 < 2$.

Potom je matice L_{mn} Jordanova typu (Faddějev, Faddějevová, 1964) a existuje ještě jedno řešení tvaru

$$\begin{aligned} \hat{w}_1(t, a) &= b_{11} e^{\lambda_1(a)t} + t b_{12} e^{\lambda_2(a)t} \\ \hat{w}_2(t, a) &= b_{21} e^{\lambda_1(a)t} + t b_{22} e^{\lambda_2(a)t} \end{aligned}$$

vii)

Je-li $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ pak časové šipky směřují opačným směrem.

d) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

rovněž uzel, viz obr. 4.2d).

V případě komplexních čísel $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ jsou tyto možnosti:

e) $\alpha < 0, \omega < 0$

tzv. propad a pro $\alpha > 0, \omega > 0$

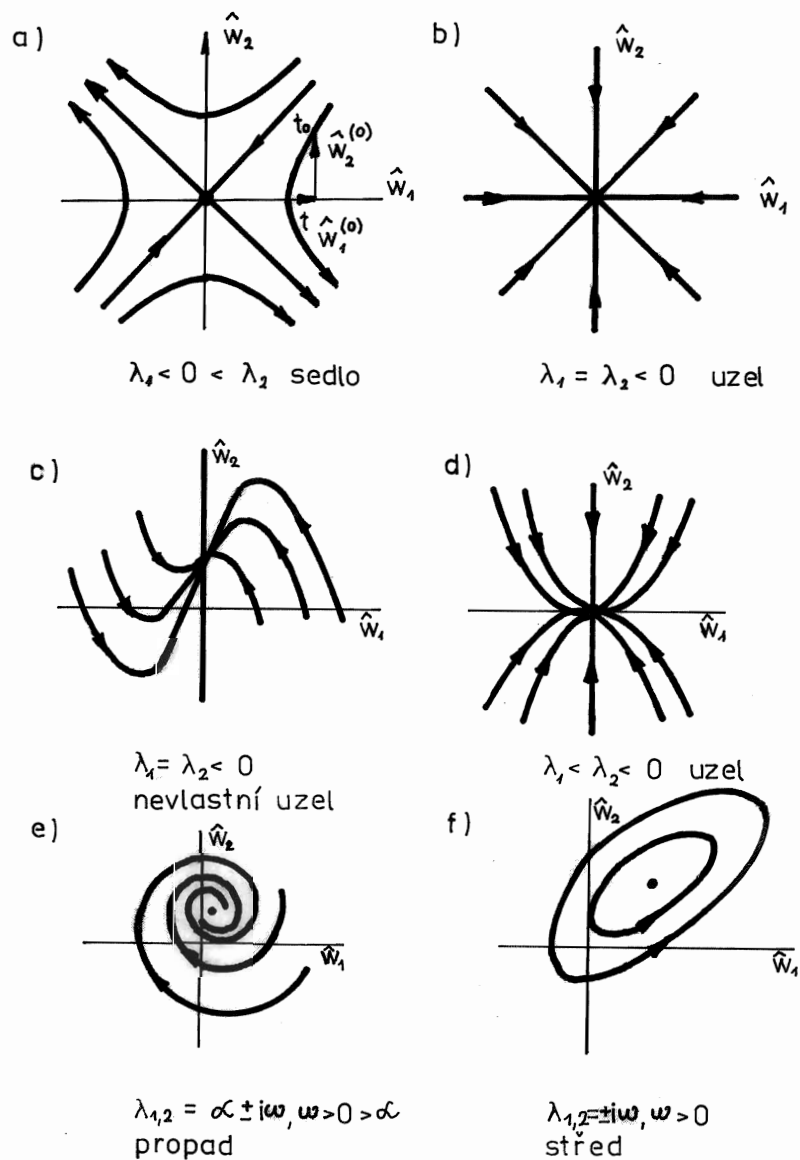
tzv. zdroj. Tento typ řešení se někdy nazývá souhrnně ohnisko.

f) $\alpha = 0, \omega \neq 0$

tzv. střed (tzn. vlastní čísla jsou ryze imaginární)

obr. 42 →

Řešení typu f) nesplňuje předpoklady Hartmannovy věty, tudíž ani řešení původní rovnice i) nemusí být typu střed. Ukážeme to na jednoduchém příkladu



Obr. 4,2

Základní typy řešení soustavy dvou lineárních rovnic iv) (viz pozn. 4.4)

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y + x h(r)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x + y h(r) \quad \text{pro } r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

viii)

kde $h(r) < 0$ pro $0 < r \leq 1$ a $h(r) \rightarrow 0$ při $r \rightarrow 0$.

Vlastní čísla v) této soustavy jsou ryze imaginární $\lambda_1 = i\omega$,

$\lambda_2 = -i\omega$ a pro $h(r) = 0$ je skutečně řešením střed.

Avšak, původní nelineární soustava viii) má v bodě $x = y = 0$

řešení typu propad, jelikož

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) = r h(r) < 0.$$

ix)

Poloměr se s rostoucím časem ($t \rightarrow \infty$) zmenšuje.

Pro referenční stav $w_m^{(s)}$ (tj. $w_m' = 0$) platí původní soustava rovnic (4.1.26)

$$\frac{dw_m^{(s)}}{dt} = F_m(w_k^{(s)}, a_r) \quad \text{pro } \begin{matrix} m, k = 1, 2, \dots, N_f \\ r = 1, 2, \dots, N_c \end{matrix} \quad (4.2.2)$$

za počátečních podmínek (4.1.27). Vzhledem k tomu, že nás nejvíce zajímají stacionární referenční stavy, budeme na místo soustavy (4.2.2) řešit soustavu algebraických rovnic

$$F_m(w_k^{(s)}, a_r) = 0 \quad \text{pro } \begin{matrix} m, k = 1, 2, \dots, N_f \\ r = 1, 2, \dots, N_c \end{matrix} \quad (4.2.3)$$

Při respektování členů vyšších řádů $H_m(w'_n, \lambda_r)$ je soustava rovnic (4.2.1) ekvivalentní výchozí soustavě (4.1.26) Avšak ani rovnice (4.2.1) nelze dobře analyticky řešit, proto je snaha nalézt takovou transformaci

$$\hat{w}_m = R_m(w'_n) , \quad (4.2.4)$$

jejíž jakobián je pro $w'_n = 0$ různý od nuly, která ji převádí na soustavu homogenních lineárních rovnic

$$\frac{d\hat{w}_m}{dt} = \sum_{n=1}^{N_f} L_{mn}(w_k^{(s)}, a_r) \hat{w}_n \quad \text{pro } m, n, k = 1, 2, \dots, N_f \\ r = 1, 2, \dots, N_v. \quad (4.2.5)$$

Je otázkou, zda tímto postupem získáme dostatečně přesnou informaci o vlastnostech řešení nelineární soustavy (4.1.26) v okolí referenčních stavů (4.2.2) resp. (4.2.3). Proto je třeba dokázat, že topologické vlastnosti řešení soustavy (4.2.1) (především smysl jeho parametrizace) jsou ekvivalentní s vlastnostmi řešení jednodušší soustavy (4.2.5). Na tuto otázku odpovídá následující věta (Hartmann, 1970):

Předpokládejme, že matice L_{mn} (pro $m, n = 1, 2, \dots, N_f$) nemá vlastní číslo s nulovou reálnou částí a $H_m(w'_n, a_r)$ jsou spojité funkce pro malé hodnoty $\|w'_n\|$ a v referenčním stavu splňují podmínky $H_m(w'_n = 0, a_r) = 0$

a $\frac{\partial H_m(w'_n = 0, a_r)}{\partial w'_n} = 0$. Nechť jsou

$$w'_m(t, a_r, w_n^{(0)}) , \quad \hat{w}_m(t, a_r, \hat{w}_n^{(0)}) \quad \text{pro } m, n = 1, 2, \dots, N_f \\ r = 1, 2, \dots, N_v$$

postupně řešení soustavy rovnic (4.2.1) a (4.2.5) za počátečních podmínek $w_n^{(0)}$ a $\hat{w}_n^{(0)}$.

Za těchto předpokladů existuje spojitě, vzájemně jednoznačné zobrazení (4.2.4), které převádí v okolí $w_n' = 0$ řešení rovnice (4.2.1) na řešení rovnice (4.2.5) a zachovává jeho parametrizaci podle času.

Podle této věty je topologická struktura množiny řešení soustavy rovnic (4.2.1), resp. (4.1.26) v okolí bodu $w_n' = 0$ ekvivalentní se strukturou řešení soustavy lineárních rovnic (4.2.5). Předpoklad neexistence nulové reálné části vlastních čísel matice L_{mn} je velice podstatný, protože v případě, že je reálná část nulová, má rovnice (4.2.5) uzavřené integrální křivky (netlumené oscilující řešení), které původní rovnice (4.2.1) mít nemusí (4.4).

Jestliže matice L_{mn} nemá vlastní čísla s nulovou reálnou částí v bodu $w_k^{(s)}$ (stacionární řešení (4.2.3)) tak se tento bod nazývá nedegenerovaný pevný bod zobrazení (4.2.3), resp. hyperbolický bod. Tyto body vytvářejí hyperbolickou strukturu fázového prostoru (resp. hyperbolickou množinu) a hrají důležitou roli v dynamice času (Guckenheimer, Holmes, 1983) (srovnej s definicí atraktoru a podivného atraktoru, kap. 4.3).

4.2.1 Disipativní systémy s reálným vlastním číslem procházejícím nulou

Lineární operátor L_{mn} si představíme v blokově diagonálním tvaru

$$L = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_c & , & 0 \\ 0 & , & A \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

kde λ_c je kritická hodnota vlastního čísla a matice A žádná kritická vlastní čísla neobsahuje. Vlastní číslo λ považujeme za jeden z vnitřních parametrů Q_s . Rovnice typu (4.2.1), kde λ_c je kritická hodnota vlastního čísla mohou mít následující tvar

$$\frac{dw}{dt} = (\lambda - \lambda_c)w - (w)^2 \quad (4.2.7)$$

$$\frac{dw}{dt} = (\lambda - \lambda_c)w - (w)^2 \quad (4.2.8)$$

$$\frac{dw}{dt} = (\lambda - \lambda_c)w - a(w)^3. \quad (4.2.9)$$

Budeme vyšetřovat dynamický systém charakterizovaný rovnicí (4.2.7). Metodou lineárního modelu ^{4.4)} zjistíme, že stacionární stav

$$W_{(1),(2)}^{(s)} = \pm \sqrt{\lambda - \lambda_c} \quad (4.2.10)$$

má stabilní větev $W_{(1)}^{(s)} = \sqrt{\lambda - \lambda_c}$ a nestabilní větev $W_{(2)}^{(s)} = -\sqrt{\lambda - \lambda_c}$, viz obr. 4.3a).

Bližíme-li se s $\lambda \rightarrow \lambda_c$ zprava, splyne stabilní řešení (je dokonce asymptoticky stabilní, protože $w \sim e^{-2\sqrt{\lambda - \lambda_c}(t-t_0)}$) s nestabilním a vzájemně se vyruší. Z tohoto důvodu nazýváme λ_c limitním bodem a typ nestability - bifurkace - se nazývá inverzní sedlový bod. Integrací rovnice (4.2.7) při počáteční podmínce $w(t=t^{(0)}) = w^{(0)}$ pro $\lambda > \lambda_c$ dostáváme

$$w(t) = \frac{\sqrt{\lambda - \lambda_c} [(1 + \Gamma) w^{(0)} - \sqrt{\lambda - \lambda_c} (1 - \Gamma)]}{\sqrt{\lambda - \lambda_c} (1 + \Gamma) - (1 - \Gamma) w^{(0)}}$$

kde

$$\Gamma = e^{2\sqrt{\lambda - \lambda_c}(t - t^{(0)})}$$

(4.2.11)

a pro $t \rightarrow \infty$ dostáváme stabilní stacionární řešení $w^{(s)} = \sqrt{\lambda - \lambda_c}$.

Pro oblast nalevo od λ_c , tj. $\lambda < \lambda_c$ má řešení tvar

$$w(t) = \frac{\omega w^{(0)} \cotg [\omega(t - t^{(0)})] - \omega^2}{\omega \cotg [\omega(t - t^{(0)})] + w^{(0)}}$$

kde

$$\omega = \sqrt{\lambda_c - \lambda}$$

(4.2.12)

které má některé rysy periodického řešení. Určíme hodnoty v čase $t^{(k)}$ určeném vztahem $\omega(t^{(k)} - t^{(0)}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

(pro $k = 1, 2, \dots$). Tudiž

$$w(t^{(k)}) = \frac{\omega(w^{(0)} - \omega)}{w^{(0)} + \omega} = -\frac{\omega^3}{(w^{(0)} + \omega)^2} \left[1 - \frac{(w^{(0)})^2}{\omega^2} \right]$$

(4.2.13)

$$\text{pro } t^{(k)} = t^{(0)} + \frac{\pi}{\omega} \left(k + \frac{1}{4} \right)$$

a dostáváme tak možnost zobrazovat hodnoty řešení rovnice (4.2.7) v určitých diskrétních časových rovinách pomocí rekurentního

vztahu. Další vlastnosti tohoto pohybu budou studovány pomocí Poincarého mapy (viz kap. 4.2.2) a jak uvidíme dále, má tento pohyb vlastnosti Pomeanova-Mannevilleova (1980) scénáře chaosu (Eckmann, 1981).

Stacionární řešení rovnice (4.2.8) má také dvě větve

$$\begin{aligned} W_{(1)}^{(s)} &= 0 \\ W_{(2)}^{(s)} &= \lambda - \lambda_c, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

jejichž stabilita je vyznačena na obr. 4.3b). V kritické hodnotě λ_c dochází k výměně stability; stabilní větev se stává nestabilní a naopak. Tento typ nestability se nazývá transkritická bifurkace.

Pozn.: Rovnice (3.7.16) popisující časovou změnu amplitudy akcelerační vlny má stejné vlastnosti jako rovnice (4.2.8). Má dvě stabilní řešení $a_1^{(s)} = 0$ pro $\hat{y} > 0$ a $a_2^{(s)} = \hat{\epsilon}$ pro $\hat{y} < 0$.

Diferenciální rovnice (4.2.9) má tři větve stacionárních řešení

$$\begin{aligned} W_{(1)}^{(s)} &= 0 && \text{pro } \lambda < \lambda_c \\ W_{(2),(3)}^{(s)} &= \pm \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_c}{a}} && \text{pro } \lambda > \lambda_c, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

jejichž stabilita je znázorněna na obr. 4.3c). Tento typ nestability se nazývá pitchfork bifurkace (pitchfork - anglicky podávky) a při $\lambda \rightarrow \lambda_c$ zprava splynou dvě stabilní řešení $W_{(2)}^{(s)}$, $W_{(3)}^{(s)}$ s nestabilním řešením $W_{(1)}^{(s)}$. Pro $\lambda < \lambda_c$ existuje jen stabilní řešení $W_{(1)}^{(s)}$. Přímou integrací rovnice (4.2.9) dostáváme

$$W(t) = \pm \frac{W^{(0)}}{\left[\left[1 - \frac{a}{\alpha} (W^{(0)})^2 \right] e^{-2\alpha(t-t^{(0)})} + \frac{a}{\alpha} (W^{(0)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha = \lambda - \lambda_c$$

(4.2.16)

odkud tyto vlastnosti řešení pro $t \rightarrow \infty$ plynou rovněž.

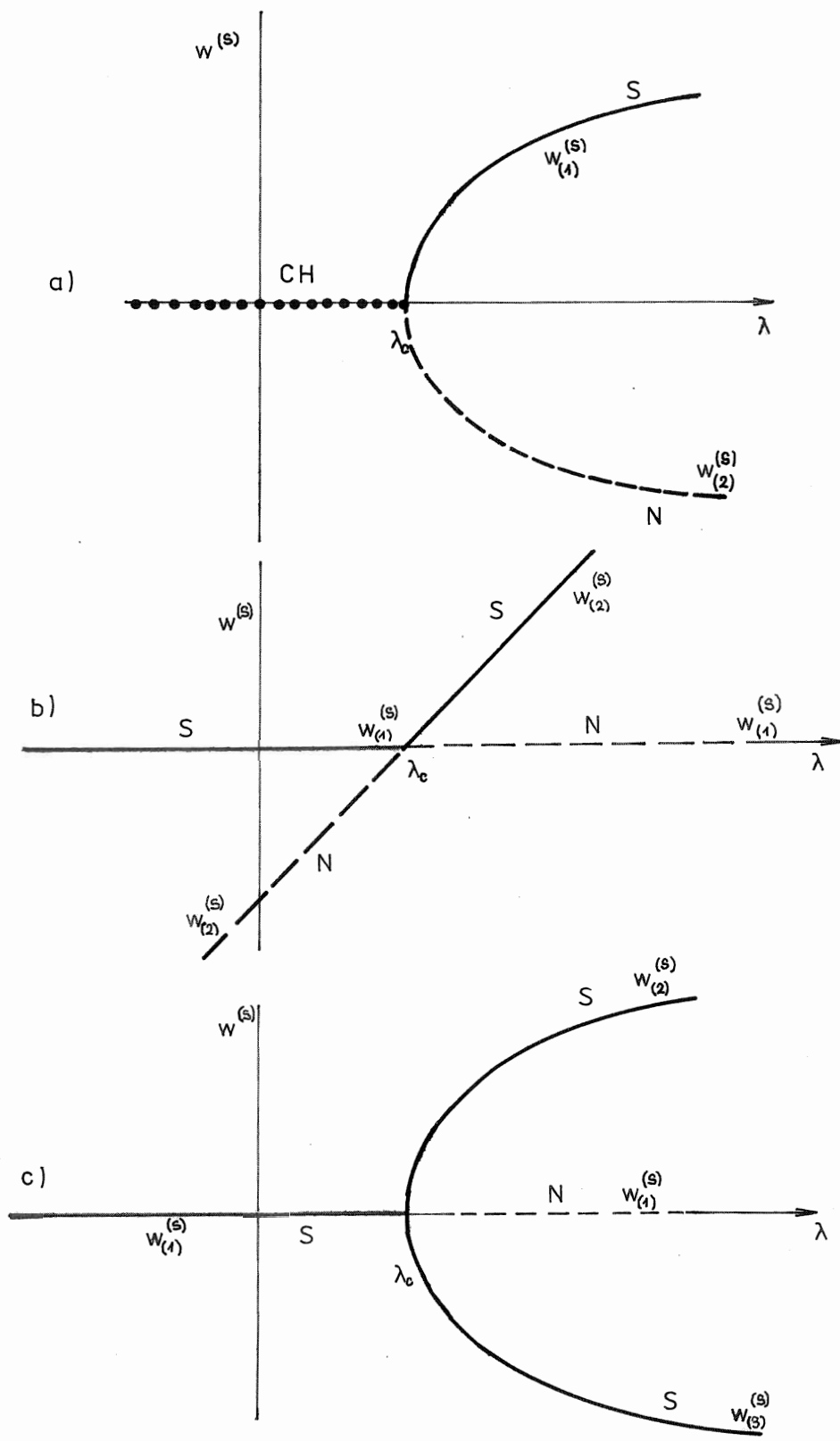
br. 4.3 → Řešení rovnice (4.2.9) se pro $\lambda > \lambda_c$ rozpadá na dvě řešení. V jednorozměrném fázovém prostoru to znamená, že pro hodnotu $\lambda > \lambda_c$ existují pro čas $t > t_0$ dvě různé hodnoty $w(t)$ (4.2.16). Jde-li o problém ve dvourozměrném fázovém prostoru, kde stabilním řešením pro $\lambda < \lambda_c$ je nějaká periodická orbita, je pro $\lambda > \lambda_c$ stabilním řešením orbita s dvounásobnou periodou, viz dále, vztah (4.2.22). Stejně lze tuto bifurkaci interpretovat i v N_f rozměrném prostoru, kde se rozdvouje $N_f - 1$ rozměrná nadplocha. V trojrozměrném prostoru to je povrch anuloidu. Projde-li pohyb kaskádou bifurkací typu pitchfork, při nichž se vždy zdvojnásobí perioda, dostáváme chaotický pohyb podle tzv. Feigenbaumova scénáře (1978), viz kap. 4.3.1 (Landau, Lifšic, 1986).

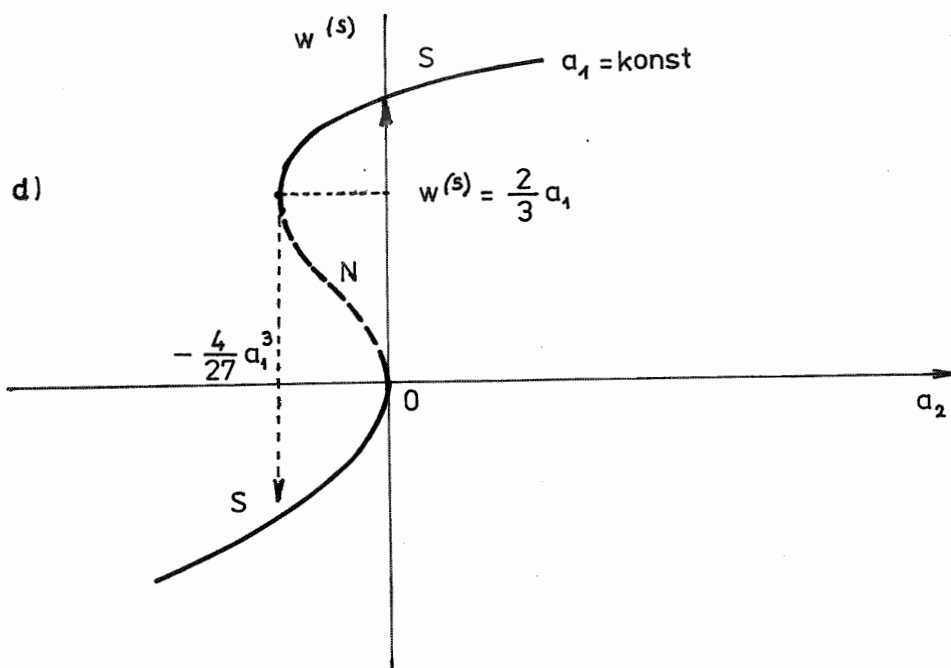
Kombinací rovnic (4.2.7) až (4.2.9) dostaneme dynamický systém

$$\frac{dw}{dt} = -(w)^3 + a_1(w)^2 + a_2, \quad (4.2.17)$$

který závisí na dvou vnitřních parametrech a_1, a_2 . Jeho tři stacionární řešení jsou definována rovnicí

$$(w^{(s)})^3 - a_1(w^{(s)})^2 - a_2 = 0. \quad (4.2.18)$$





Obr. 4.3

Základní typy nestabilit v jednorozměrném fázovém prostoru

S - stabilní, N - nestabilní

CH - neexistuje reálné stacionární řešení

- a) bifurkace typu inverzní sedlo
- b) transkritická bifurkace
- c) pitchfork bifurkace
- d) nestabilita typu cusp.

Ke změně stability dochází v bodech určených podmínkou

$$-3(w^{(s)})^2 + 2a_1 w^{(s)} = 0.$$

V proměnných a_1, a_2 jsou tyto body s ohledem na (4.2.8) určeny podmínkami $4a_1^3 + 27a_2 = 0, a_2 = 0$, viz obr. 4.3d). Jde o nestabilitu typu cusp, popisující jevy s hysterezí (Thom, 1975).

4.2.2 Disipativní systémy s dvojicí komplexních vlastních čísel. Hopfova bifurkace

Lineární operátor L_{mn} v rovnici (4.2.1) budeme předpokládat ve tvaru

$$L = \begin{bmatrix} \mu - \mu_c + i\omega & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_c - i\omega & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}, \quad (4.2.19)$$

kde označíme μ_c kritickou hodnotu reálné složky vlastního čísla operátoru L_{mn} . Matice A neobsahuje μ_c . Stejnou úpravou jako při analýze rovnice viii) v pozn. 4.4) přejdeme k proměnným r, φ , tj. $(w_1, w_2) = r e^{i\varphi}$, kde r je amplituda a φ fáze. Rovnice (4.2.1) pro trajektorie ve dvourozměrném fázovém prostoru (w_1, w_2) můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= (\mu - \mu_c)r - ar^3 \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \quad r = \sqrt{(w_1)^2 + (w_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Postupem uvedeným při analýze stability rovnice (4.2.9) zjistíme, že pro $a > 0$ existuje stabilní řešení

$$\begin{aligned} r^{(s)} &= 0 && \text{pro } \mu < \mu_c \\ r^{(s)} &= \sqrt{\frac{\mu - \mu_c}{a}} && \text{pro } \mu > \mu_c \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

je nestabilním řešením $r^{(s)} = 0$ pro $\mu > \mu_c$. V bodě $\mu = \mu_c$ dochází k tzv. Hopfově bifurkaci.

Ve fázovém prostoru (w_1, w_2) je tento pohyb reprezentován spirálami, které pro $\mu < \mu_c$ směřují do počátku a pro $\mu > \mu_c$ směřují k limitní kružnici $r^{(s)} = \sqrt{\frac{\mu - \mu_c}{a}}$, viz obr. 4.4

Na limitní kružnici jde již o periodický pohyb s frekvencí $\omega = \frac{2\pi}{T}$ popsaný rovnicemi $(w_1, w_2) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$.

Perioda tohoto pohybu je T .

Ukážeme nyní zdvojnásobení periody pohybu v důsledku bifurkace řešení typu pitchfork (4.2.15) popsaného rovnicemi

$$w_1 = r \cos \omega t$$

$$w_2 = r \sin \omega t$$

$$\frac{dw_3}{dt} = (\lambda - \lambda_c) w_3 - a(w_3)^3, \quad \text{pro } \lambda > \lambda_c.$$

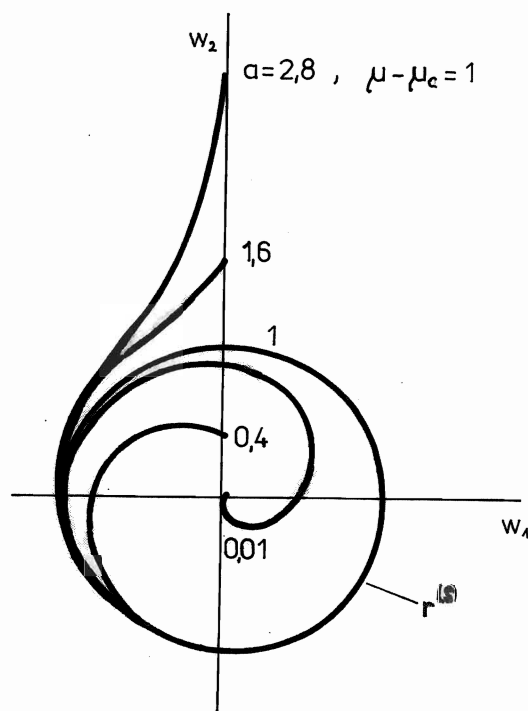
(4.2.22)

Pro hodnoty $\lambda < \lambda_c$ existuje jen jedno stabilní řešení, viz obr. 4.5a) a to $w_{3(1)}^{(s)} = 0$. Pro nadkritické hodnoty $\lambda > \lambda_c$

se toto řešení stává nestabilním a existují dvě stacionární řešení $w_{3(2)}^{(s)} = \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_c}{a}}$ a $w_{3(3)}^{(s)} = -\sqrt{\frac{\lambda - \lambda_c}{a}}$, viz obr. 4.5b).

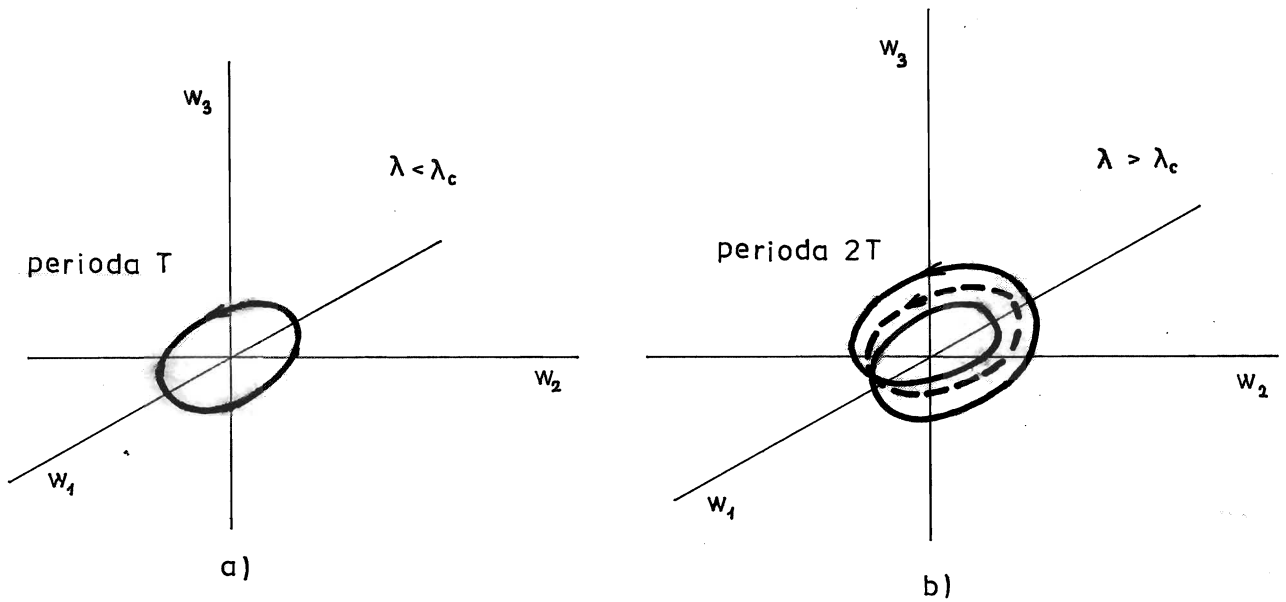
Podobná situace nastane, je-li periodický pohyb důsledkem nějakého limitního cyklu, např. (4.2.20). Potom po několika bifurkacích limitních cyklů dostáváme natolik složitý pohyb, že se mluví o chaosu Ruellově-Takensově (1971) typu, viz kap. 4.3.3.

Znázorňování trajektorií ve vícerozměrném, např. N_f rozměrném, fázovém prostoru by bylo nepřehledné. Zavádíme proto tzv. Poincarého zobrazení nebo Poincarého mapu, která je definována obecně průsečíky trajektorií s nějakou transversální (kolmou) nadplochou \mathcal{X} dimenze $N_f - 1$. Pro trojrozměrný dynamický



Obr. 4.4

Limitní cyklus (viz rovnici (4.2.22)). Pro $\mu < \mu_c$ je stabilní bod $r^{(s)} = 0$ a pro $\mu > \mu_c$ je stabilní kružnice o poloměru $r^{(s)} = \sqrt{\frac{\mu - \mu_c}{a}}$. V bodě $\mu = \mu_c$ nastává Hopfova bifurkace.



Obr. 4.5

Bifurkace periodického pohybu typu pitchfork

se zdvojením periody

a) existuje jedno stacionární řešení $w_{3(1)}^{(s)} = 0$

b) existují dvě stacionární řešení $w_{3(2)}^{(s)} = w_{3(3)}^{(s)} = \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_c}{a}}$

system

$$\frac{dw_m}{dt} = F_m(w_k, \lambda), \quad m, k = 1, 2, 3 \quad (4.2.23)$$

vybereme plochu π např. jako rovinu $w_3 = konst$, viz obr. 4.6. V každém okamžiku, kdy trajektorie protíná plochu π zaznamenáme průsečíky, např. body A, B, C. Tyto body pak reprezentují časový vývoj systému a Poincarého mapa tudíž reprezentuje transformaci bodů plochy π do sebe. Jestliže všechny průsečíky trajektorie s plochou jsou vzájemně rozlišitelné (je Hausdorffovým prostorem 4.5) tak je transformace invertibilní. V případě, že má pohyb chaotický charakter, je transformace neinvertibilní (nelze určit počáteční stav), viz kap. 4.3.

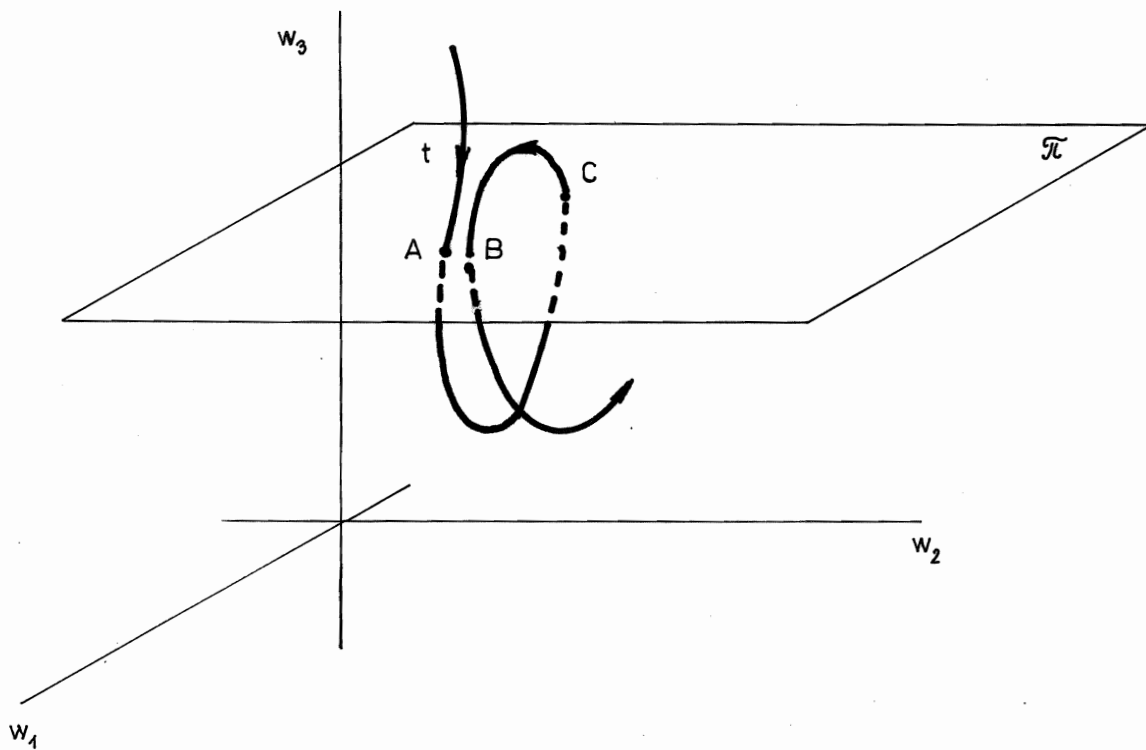
Jako příklad uvedeme dvourozměrnou Poincarého mapu dynamického systému (4.2.22). Kolmou plochu definujeme jako rovinu (w_2, w_3) , tj. $w_1 = 0$. Časový interval mezi jednotlivými průsečíky je $\Delta t = \frac{\pi}{\omega}$. S ohledem na vztah (4.2.16) dostáváme dvourozměrné zobrazení

$$w_2^{(n+1)} = (-1)^n w_2^{(n)}$$

$$w_3^{(n+1)} = \pm \frac{w_3^{(n)}}{\left[\left[1 - \frac{a}{\alpha} (w_3^{(n)})^2 \right] \Gamma + \frac{a}{\alpha} (w_3^{(n)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha = \lambda - \lambda_c, \Gamma = e^{-\frac{2\pi\alpha}{\omega}}$$

(4.2.24)

které dává do vztahu stavy systému v čase $t^{(n)}$ a v čase $t^{(n+1)}$. Na tomto příkladu je rovněž patrné, jakým způsobem se projeví na Poincarého mapě zdvojnásobení periody (dvě znaménka v zobrazení (4.2.24)₂), srovnej s obr. 4.5.



Obr. 4.6

Poincarého mapa dynamického systému (4.2.23)

4.3 Stabilní a nestabilní pohyb

Úplnou integraci systému diferenciálních rovnic nahradíme Poincarého mapou. Snižíme tak počet rovnic o jednu a můžeme na nejjednodušším rekurentním vztahu (4.3.1) studovat časový vývoj dynamických disipativních systémů. Potom zobrazení - Poincarého mapa

$$w^{(n+1)} = f(w^{(n)}, \lambda)$$

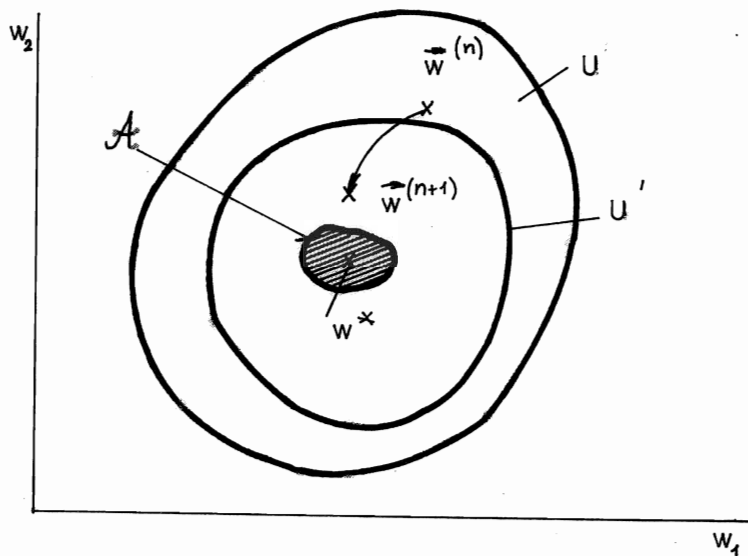
(4.3.1)

odpovídá nějakému dvourozměrnému systému, resp. jeho pohybu, s jednou periodickou proměnnou, např. rovnice (4.2.22)₁ a (4.2.22)₃. Na příkladu jednorozměrného zobrazení (4.3.1) ukážeme základní vlastnosti pohybu odpovídajícího dynamického systému, včetně vzniku chaosu.

Mějme posloupnost bodů $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}$ generovaných zobrazením (4.3.1), pro které platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} w^{(n)} = w^*$. Potom bod $w^* = f(w^*, \lambda)$ nazýváme pevným bodem zobrazení (4.3.1). Tomuto bodu odpovídá rovnovážný stav systému, protože s rostoucím časem ($t \rightarrow \infty$) se systém k tomuto stavu přibližuje.

Kompaktní množinu \mathcal{A} pevných bodů zobrazení (4.3.1) nazýváme atraktorem, jestliže má množina \mathcal{A} otevřené kontrahující okolí U . Říkáme, že okolí $U \supset \mathcal{A}$ je kontrahující, jestliže pro každé $w^{(n)} \in U'$ existuje takové otevřené okolí, že $w^{(n+1)} = f(w^{(n)}, \lambda) \in U'$ přičemž $U' \supset U$ a navíc pro $n \rightarrow \infty$ platí $\mathcal{A} = \bigcap U'$, viz obr. 4.7.

obr. 4.7 →



Obr. 4.7

Poincarého mapa znázorňující atraktor A pro trojrozměrný fázový prostor

Z uvedené definice vyplývá, že atraktor je tvořen otevřenou množinou stabilních stacionárních bodů typu uzlů a propad. Na-proti tomu, pevné body zobrazení (4.3.1) typu sedlo a zdroj do atraktoru nepatří. Definice atraktoru ve vícerozměrném fázovém prostoru je stejná (w nahradíme $(w_1, w_2, \dots, w_{N_f})$). Konkrétní postup hledání atraktoru je uveden v kap. 4.3.1.

4.5)

Systém τ podmnožin množiny X se nazývá topologie na X má-li následující tři vlastnosti (Rudin, 1977)

- 1) Platí $O \in \tau, X \in \tau$
- 2) Jestliže je $V_i \in \tau$ pro $i=1,2,\dots,n$, potom platí $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \tau$ (n je konečné přirozené číslo)
- 3) Je-li $\{V_\alpha\}$ libovolný systém množin z τ (konečný, spočetný nebo i nespočetný) platí $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

Je-li τ topologie na X , nazýváme X topologickým prostorem a prvky systému τ otevřenými množinami.

Množinu $Y \subset X$ nazveme uzavřenou jestliže její dopl-něk, tj. množina $X - Y$ je množina otevřená. Uzávěr \bar{Y} množi-ny $Y \subset X$ je nejmenší uzavřená podmnožina X , která obsa-huje Y .

Je-li $\{V_\alpha\}$ nějaký systém otevřených množin, jejichž sjednocení $\bigcup_\alpha V_\alpha$ obsahuje množinu $K \subset X$, potom existuje konečný podsystém systému $\{V_\alpha\}$ jehož sjednocení rovněž obsa-huje K . Potom říkáme, že je množina K kompaktní.

Okolí bodu $p \in X$ je každá otevřená podmnožina X , která obsahuje p . X je Hausdorffův prostor (množina).

jestliže platí: Je-li $p, q \in X$ a $p \neq q$, potom p má okolí U a q okolí V takové, že $U \cap V = \emptyset$.

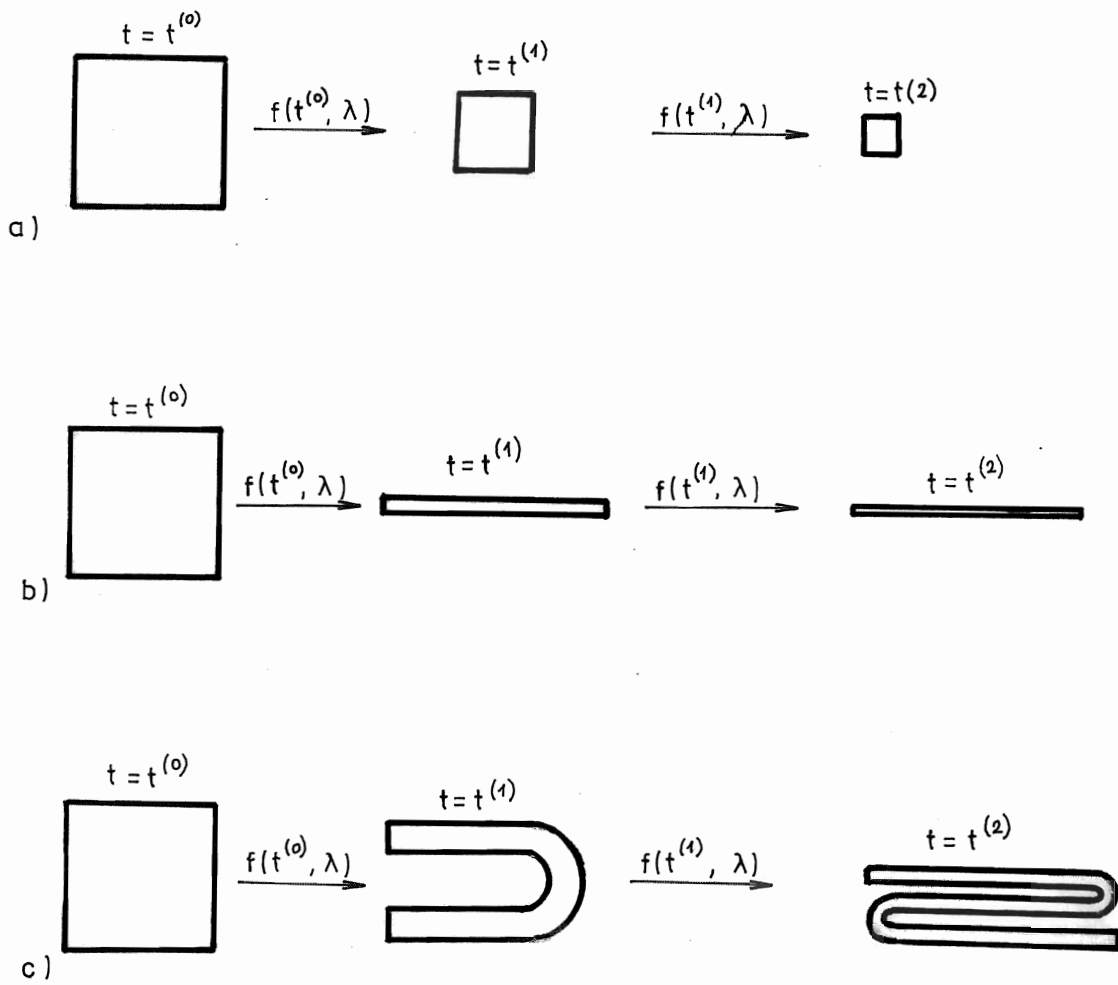
Heineho-Borelova věta: Kompaktní podmnožiny euklidovského prostoru R^n jsou právě ty množiny, které jsou uzavřené a omezené.

Atraktor kontrahuje objem fázového prostoru, viz obr. 4.8a). To však neznamená, že se musí kontrahovat ve všech směrech stejně, viz obr. 4.8b) resp. obr. 4.8c). Jestliže při kontrakci na obr. 4.8a) můžeme předpokládat, že dva blízko ležící body na počátku pohybu budou ležet blízko sebe stále, nemusí tento předpoklad platit pro atraktory na obr. 4.8b), c).

obr. 4.8

Sledujme citlivost pohybu na počátečních podmínkách. Nechť všechny body nějakého okolí U , viz obr. 4.7, konvergují k jednomu atraktoru A . Nechť dále platí, že libovolné body, které byly na počátku libovolně blízko u sebe jsou po dostatečně dlouhé době od sebe makroskopicky vzdáleny. Takovýto atraktor pak nazýváme podivný atraktor (anglicky strange atraktor), někdy je nazýván atraktorem chaotickým (Lorentz, 1963).

Podivné atraktory nejsou body či orbity periodických pohybů. Zjišťujeme, že existuje velké množství atraktorů, které nejsou triviální (tj. nejsou ani pevnými body či limitními cykly), ale nejsou ani podivnými atraktory. Všechny vykazují pohyb více či méně chaotický. Pohyb odpovídající podivnému atraktoru nazýváme pohybem chaotickým, resp. turbulentním a pohyb odpovídající jakémukoliv netriviálnímu atraktoru nazýváme slabě turbulentní, resp. eratický. Numerickou cestou (v důsledku zaokrouhlovacích chyb) bývá často těžké rozhodnout o jaký typ atraktoru jde.



Obr. 4.8

Kontrakce objemu fázového prostoru pro disipativní dynamický systém

- a) rovnoměrným zmenšováním
- b) zvětšováním délky
- c) protahováním délky a skládáním

4.3.1 Základní vlastnosti atraktorů nelineárních disipativních systémů

Vyjdeme z jednorozměrné neinvertibilní transformace

$$w^{(n+1)} = 1 - \lambda (w^{(n)})^2 \quad \text{pro } \lambda \in \langle 0, 2 \rangle \quad (4.3.2)$$

zobrazující interval $\langle -1, 1 \rangle$ na sebe, a kterou lze chápat jako zjednodušení vztahu (4.2.13) pro $t^{(n)} = t^{(0)} + \frac{\pi}{4\omega}$, $t^{(n+1)} = t^{(n)} + \frac{\pi}{\omega}$. Transformace je neinvertibilní, protože hodnotě

v čase $t^{(n)}$ jsou přiřazeny dvě hodnoty v čase $t^{(n+1)}$

Perioda pohybu je $T = t^{(n+1)} - t^{(n)} = \frac{\pi}{\omega}$. Pevné body zobrazení (4.3.2) jsou (viz obr. 4.9a))

$$w^* = 1 - \lambda (w^*)^2, \quad \text{resp. } w_{1,2}^* = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}. \quad (4.3.3)$$

obr. 4.9 a, b)

Jejich stabilitu určíme metodou analogickou metodě lineárního modelu 4.4). Pevný bod zobrazení (4.3.1) je definován rovnicí

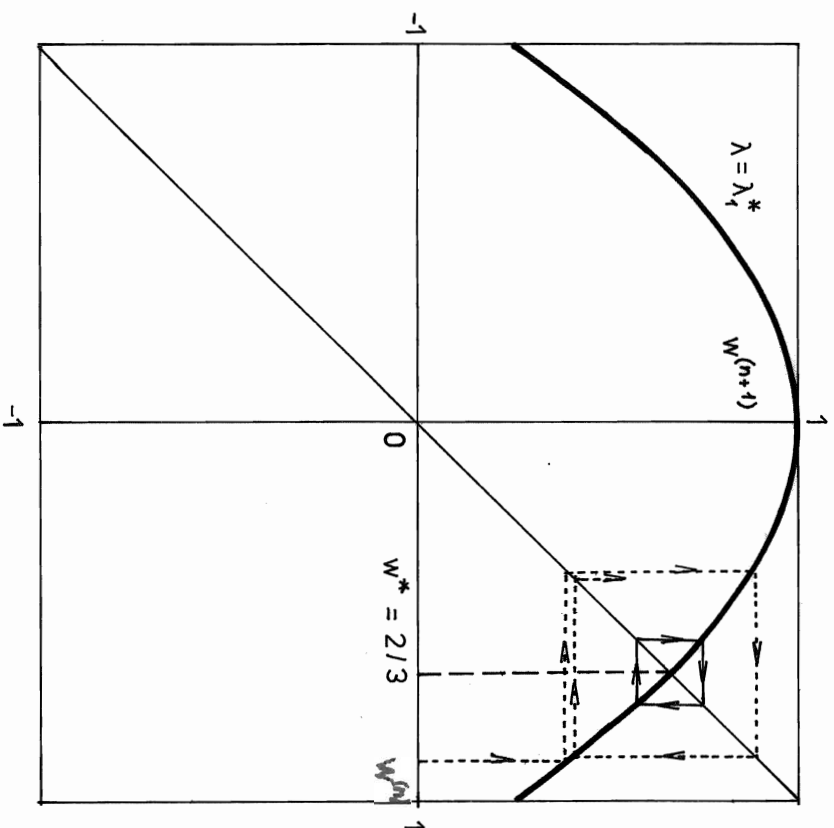
$$w^* = f(w^*, \lambda) \quad (4.3.4)$$

a je roven stacionárnímu stavu $w^{(s)} = w^*$ odpovídajícího pohybu. Definujeme odchylky $\delta w^{(n)}$, $\delta w^{(n+1)}$ od tohoto stavu, takže

$$w^{(n+1)} = w^* + \delta w^{(n+1)}, \quad w^{(n)} = w^* + \delta w^{(n)}. \quad (4.3.5)$$

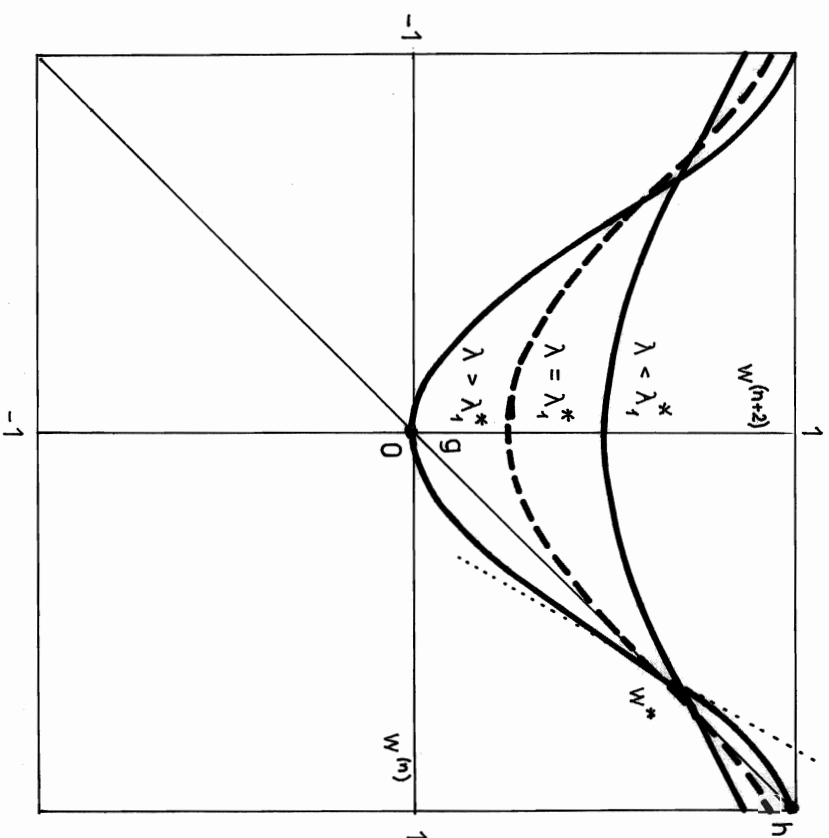
Zobrazení (4.3.1) pak píšeme ve tvaru

$$w^{(n+1)} = 1 - \lambda (w^{(n)})^2$$



a)

$$w^{(n+2)} = f^{(2)}(w^{(n)}, \lambda)$$



b)

Obr. 4.9

- a) pevný bod w^* je atraktor a dochází v něm pro $\lambda = \lambda_1^* = \frac{3}{4}$ k bifurkaci
 b) pevné body zobrazení g, h zobrazení (4.3.11) odpovídají bifurkaci zdvojení periody při $\lambda > \lambda_1^*$

$$w^* + \delta w^{(n+1)} = f(w^*, \lambda) + \frac{\partial f(w^*, \lambda)}{\partial w} \delta w^{(n)}. \quad (4.3.6)$$

Říkáme, že stacionární stav $w^* = f(w^*, \lambda)$, který je pevným bodem zobrazení (4.3.1) je současně atraktorem, jestliže platí

$$\left| \frac{\delta w^{(n+1)}}{\delta w^{(n)}} \right| = \left| \frac{\partial f(w^*, \lambda)}{\partial w} \right| < 1, \quad (4.3.7)$$

čili velikost odchylek s s nárůstem času stále zmenšuje.

Zvláštní význam má hranice stability

$$\frac{\delta w^{(n+1)}}{\delta w^{(n)}} = \frac{\partial f(w^*, \lambda)}{\partial w} = \pm 1, \quad (4.3.8)$$

kdy porucha nemění svoji amplitudu. Znaménko plus odpovídá periodickému pohybu a v případě znaménka minus přechází porucha po dvou periodách, tj. $\delta w^{(n+2)} = \delta w^{(n)}$ sama v sebe. Je to případ bifurkace zdvojení periody, $T \rightarrow 2T$. Stabilitou těchto případů se budeme zabývat podrobněji, protože jsou nástupem ke složitým periodickým a chaotickým pohybům.

Vyšetřujeme vlastnosti pevných bodů (4.3.3). Tyto body jsou atraktory, je-li splněna nerovnost (4.3.7), tj.

$$\left| \frac{\delta w^{(n+1)}}{\delta w^{(n)}} \right| = |2\lambda w^*| = |1 \mp \sqrt{1+4\lambda}| < 1, \quad (4.3.9)$$

čili pro $\lambda \in (0, \frac{3}{4})$. Hranice stability (4.3.8) nastávají pro $\lambda = 0$ a $\lambda = \lambda_1^* = \frac{3}{4}$. Periodický pohyb nastává

v triviálním případě $\lambda = 0$ a pro těsné pravé oblasti bodu λ_1^* .
 Je otázkou, jaké bude mít vlastnosti transformace (4.3.2), resp. její znázorňovaný pohyb, v oblasti nestability $\lambda \in (\frac{3}{4}, 2)$.

Odpověď na tuto otázku začneme vyšetřováním stability pohybu s dvojnásobnou periodou. Takový pohyb lze obecně zapsat ve tvaru

$$w^{(n+2)} = f(f(w^{(n)}, \lambda), \lambda) = f^{(2)}(w^{(n)}, \lambda) \quad (4.3.10)$$

a pro případ (4.3.2) dostáváme

$$w^{(n+2)} = 1 - \lambda + 2\lambda^2(w^{(n)})^2 - \lambda^3(w^{(n)})^4. \quad (4.3.11)$$

Pevné body zobrazení (4.3.10) označíme w^*, g, h, \dots a jsou určeny rovnicemi

$$w^* = f^{(2)}(w^*, \lambda), \quad g = f^{(2)}(g, \lambda), \quad h = f^{(2)}(h, \lambda), \dots, \quad (4.3.12)$$

přičemž dochází ke zdvojnásobení periody $g = f(h, \lambda), h = f(g, \lambda)$.

Jinými slovy, ke stabilnímu dvoubodovému cyklu g, h, g, h, \dots .

Konkrétní případ zobrazení (4.3.11) viz obr. 4.9b).

Vyšetřujme nyní stabilitu pevných bodů (4.3.12). Dosadíme do rovnice pohybu (4.3.10) analogicky (4.3.5)

$$w^{(n+2)} = g + \delta w^{(n+2)}, \quad w^{(n)} = g + \delta w^{(n)}. \quad (4.3.13)$$

Stejně i pro druhý bod h . Pro poměr odchylek platí

$$\frac{\delta w^{(n+2)}}{\delta w^{(n)}} = \frac{\partial f^{(2)}(g, \lambda)}{\partial w} = \frac{\partial f^{(2)}(h, \lambda)}{\partial w} = \frac{\partial f(g, \lambda)}{\partial w} \frac{\partial f(h, \lambda)}{\partial w}.$$

(4.3.14)

Pevný bod w^* ztrácí pro $\lambda > \lambda_1^*$ stabilitu ($\frac{\partial f^{(2)}(w^*, \lambda)}{\partial w} > 1 \dots$ tečkovaná čára na obr. 4.9b)); body g, h jsou stabilní. Derivace (4.3.14) je pro $\lambda = \lambda_1^*$ rovna jedné a pak se s rostoucím λ zmenšuje, až při nějaké další hodnotě $\lambda > \lambda_2^*$ je menší než minus jedna. Cyklus g, h se stává nestabilní a v pevných bodech g, h dochází ke stejné situaci jako došlo v bodě w^* při $\lambda = \lambda_1^*$. Co nastane dále se vydedukuje stejným postupem ze zobrazení. $w^{(n+4)} = f^{(2)}(f^{(2)}(w^{(n)}, \lambda), \lambda)$. Ztratí-li cyklus g, h stabilitu, objeví se současně stabilní čtyřbodový periodický cyklus; např. $r, s, t, u, r, s, t, u, \dots$, který opět po ztrátě stability při $\lambda > \lambda_3^*$ vede k osmibodovému cyklu, atd.

Tyto postupné bifurkace zdvojení periody, tzv. 2^k -bodové cykly ($k=1, 2, \dots$) nastávající při hodnotách λ_k^* jsou stabilní na geometricky se zmenšujících intervalech stability

$\lambda_k^* - \lambda_{k-1}^*$. Pro tyto intervaly platí

$$\frac{\lambda_k^* - \lambda_{k-1}^*}{\lambda_{k+1}^* - \lambda_k^*} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \text{konst} (= 4,669201),$$

(4.3.15)

přičemž $\lambda_k^* \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_\infty^* (= 1,401)$. Hodnoty v závorce platí pro pohyb podle (4.3.2). Bod λ_∞^* odpovídá nekonečnému počtu postupných bifurkací a nazývá se akumulární bod (viz obr. 4.9d).

Feigenbaum (1978) odvodil rovnici (4.3.15) na základě měřítkové podobnosti (tzv. scaling laws), podle které je v okolí kritického bodu, např. fázového přechodu, popis systému invariantní vůči všem měřítkovým transformacím. Tato rovnice představuje určitý druh universalitu při přechodu od pohybu deterministického k pohybu chaotickému. Uvedené vlastnosti zobrazení (4.3.2) nezávisí na detailní funkční závislosti, avšak je nutné, aby zobrazení mělo kvadratické maximum. Jiné typy závislosti je třeba vyšetřovat zvlášť a je zřejmé, že povedou k jinému druhu universalitu.

n.4.9cd) →

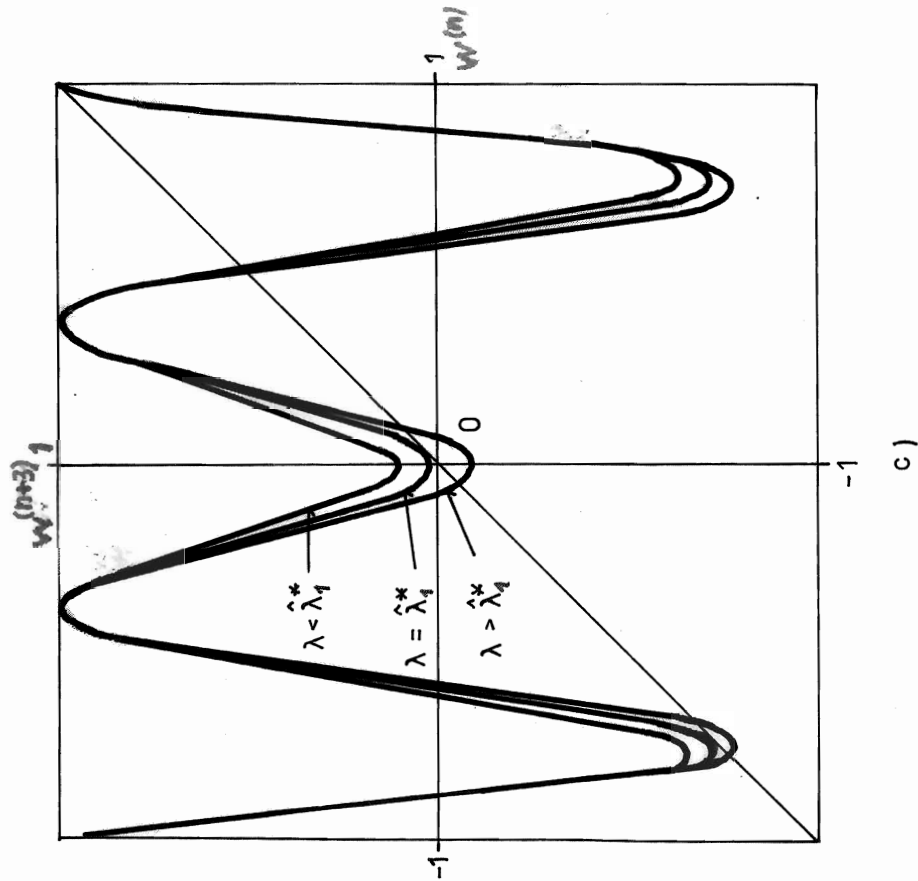
Pozorujme nyní pohyb dynamického systému (4.3.2) s periodou 2^k . Trajektorie pohybu prochází nějakým intervalem $\lambda \in (\lambda_\infty^* - \varepsilon, \lambda_\infty^* + \varepsilon)$ (pro $\varepsilon > 0$) vždy po 2^k iteracích a vyšetřujeme-li pevné body zobrazení $f^{(2^k)}(w^{(0)}, \lambda)$ při nějakých pevných počátečních podmínkách $w^{(0)}$ jeví se nám tento pohyb v uvedeném intervalu zcela chaotický. Vzdařováním se od akumulčního bodu λ_∞^* napravo zmenšuje se rovněž počet cyklů, až se objeví chaotický pohyb na největším spojitém intervalu. Existují tudíž intervaly stability periodických pohybů i v oblasti $\lambda \in (\lambda_\infty^*, 2)$.

Obecně řečeno, objeví se nejprve periodický pohyb s periodou N ($= 3, 5, 7, \dots$) který prochází bifurkační zdvojení periody tak, že vznikají periody $2^k N$ s akumulčním bodem při $k \rightarrow \infty$. Největší interval přísluší $N=3$ a začíná hodnotou $\hat{\lambda}_1^* = \frac{7}{4}$, kterou určíme z podmínky hranice stability (4.3.8) pro zobrazení

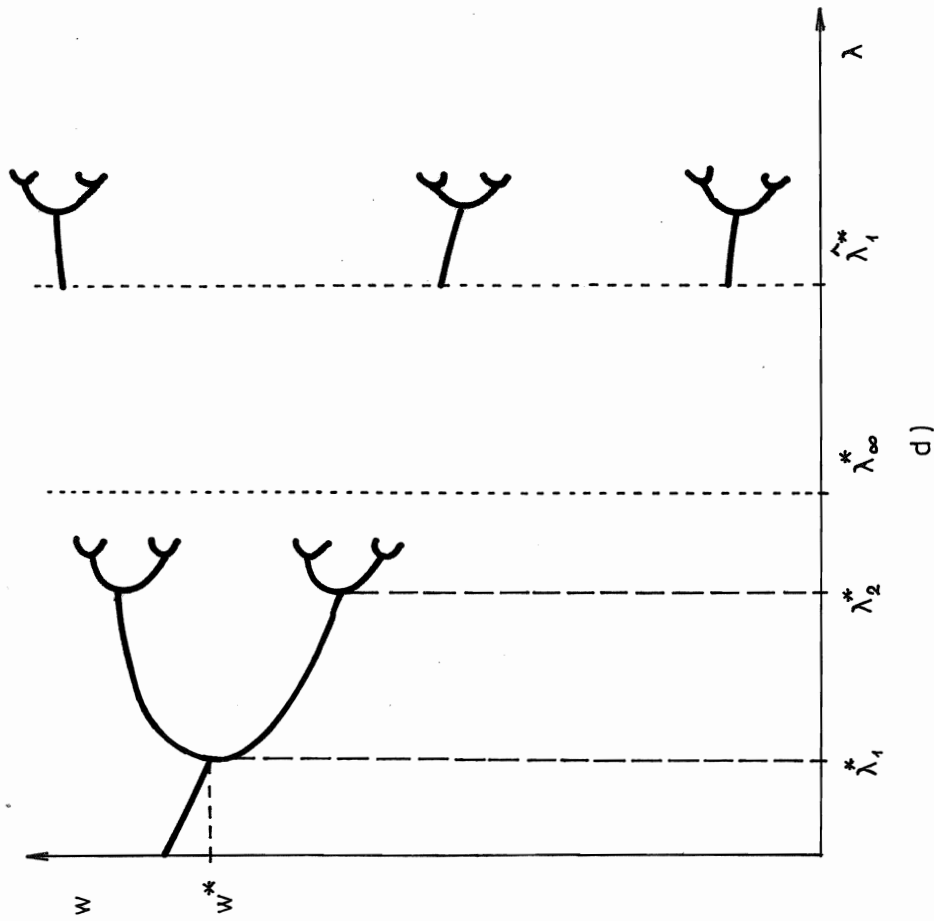
$$w^{(n+3)} = f^{(3)}(w^{(n)}, \lambda), \quad \text{viz obr. 4.9c). S růstem } \lambda \text{ se nejprve objeví dva nové průsečíky s } w^{(n+3)} = w^{(n)}, \text{ přičemž v jednom}$$

z nich je $\left| \frac{\partial f^{(3)}}{\partial w} \right| < 1$, což odpovídá stabilnímu pohybu a druhý je nestabilní. Stabilní body se dále rozdvoují jak bylo popsáno

$$w^{(n+3)} = f^{(3)}(w^{(n)}, \lambda)$$



c)



d)

Obr. 4.9c), d)

- c) zdvojování periody s $\lambda > \hat{\lambda}_1^* = \frac{3}{4}$ pro pohyb $w^{(n+3)}$ s trojnásobnou periodou
- d) schématické znázornění (bez měřítka) posloupnosti bifurkací pro zobrazení typu (4.3.2)

výše, viz obr. 4.9d). Tento jev, kdy se objeví periodický pohyb v oblasti za pohybem chaotickým se nazývá tangenciální bifurkace (Ott, 1981). Určit, zda i v této oblasti dojde k chaotickému pohybu je otevřená otázka a je zatím zkoumána, většinou numericky. Numerické experimenty ukazují na obrovskou citlivost k počátečním podmínkám, vedoucí k velmi dlouhým stabilním periodám bez typických příznaků chaosu. Pohyb má více charakter intermitentní turbulence (Eckmann, 1981).

4.3.2 Podivné atraktory

Velikost elementu objemu fázového prostoru $|d\Omega|$ vyjadřující množinu blízkých stavů dynamického systému se s časem buď nemění (pro nedisipativní systém) a nebo se zmenšuje (pro disipativní systém), viz obr. 4.1. Je-li systém stabilní, pak dva libovolně dostatečně blízké body se v průběhu času ještě více přiblíží, až utvoří hromadný bod, obecně otevřenou množinu, zvanou atraktor - viz kap. 4.3. Dochází tak při vývoji systému ke zmenšení velikosti objemu zaujímaného jeho stavem ve fázovém prostoru, viz obr. 4.7 a 4.8. V případě konečného či spočetného počtu stacionárních stavů je tento objem nulový. Ukážeme nyní, že i velikost množiny stacionárních stavů nelineárních disipativních systémů, charakterizovaných podivným atraktorem a jejichž pohyb je chaotický se rovněž zmenšuje, i když v poněkud jiném smyslu.

Předpokládejme, že stacionární pohyb dynamického systému je periodický. Počet period je roven počtu pevných bodů příslušného zobrazení (např. (4.3.4)) a je v tomto smyslu roven počtu stacionárních bodů, viz obr. 4.9d) pro nějaké pevné λ . Tyto pevné body tvoří atraktor daného zobrazení a jejich velikost (míra v jednorozměrném prostoru) je nulová. Ve dvourozměrném prostoru může být takovýto atraktor obecně tvořen body či křivkami, v trojrozměrném prostoru plochou, křivkami či body atd. pro n -vícerozměrné problémy. Tedy, vždy je míra atraktoru v příslušném prostoru nulová. Na první pohled by se zdálo, že všechny možnosti jsou vyčerpány, tj., že atraktory dynamických disipativních systémů (včetně podivných atraktorů) jsou množiny míry nula. K odlišení velikosti atraktorů používáme tzv. Hausdorffovy míry v prostorech s fraktální

(neceločíselnou) dimenzi^{4.6)}

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

(4.3.16)

(Mandelbrot[†], 1982). Podivné atraktory nazýváme takové otevřené množiny stacionárních stavů disipativních dynamických systémů, které mají fraktální dimenzi.

4.6)

Mějme nějakou Hausdorffovu množinu^{4.5)}, kterou pokryjeme systémem $N(\varepsilon)$ "krychlí v objemu ε^d ". Potom celková míra (velikost či objem) uvažované množiny je nějaké konečné reálné číslo

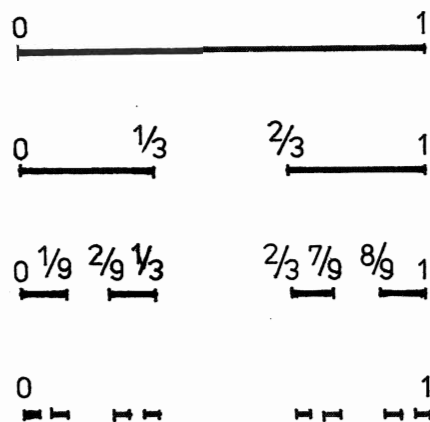
$$\Omega = N(\varepsilon) \varepsilon^d. \quad \text{i)}$$

d nazýváme Hausdorffovou dimenzí množiny a její definice (4.3.16) plyne ze vztahu i). Dimenze d není obecně celé číslo a proto se nazývá fraktální dimenzí a odpovídající množina fraktalem (Štěpánek[†], 1987).

Pro obyčejné množiny dává definice (4.3.16) obvykle celočíselné dimenze. Tak pro množinu izolovaných bodů máme $N(\varepsilon) = N$ a $d=0$. Pro úsečku délky L je $N(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon}$, takže $d=1$. Pro dvourozměrnou plochu velikosti S platí $N(\varepsilon) = \frac{S}{\varepsilon^2}$ a $d=2$.

Typickým příkladem množiny s neceločíselnou dimenzí je Cantorova množina, viz obr. 4.10. Tuto množinu zkonstruujeme na intervalu $x \in \langle 0, 1 \rangle$ tak[†], že odstraníme střední třetinu $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Zbylé dva intervaly rozdělíme opět na třetiny a odstraníme z nich prostřední třetinu a tento proces nekonečněkrát opakujeme. To, co zůstane, je nespočetná množina hromadných bodů, jejíž Lebesquova míra je nula (Kolmogorov[†], Fomin[†], 1975). Takovouto množinu nazýváme Cantorovou. Pro její pokrytí platí

4.4.10



Obr. 4.10

První tři kroky při konstrukci Cantorovy množiny

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{3}, & N(\varepsilon) &= 2 \\ \varepsilon &= \frac{1}{9}, & N(\varepsilon) &= 2^2 \\ &\vdots \\ \varepsilon &= \left(\frac{1}{3}\right)^p, & N(\varepsilon) &= 2^p, \end{aligned}$$

takže podle (4.3.16) je její dimenze rovna

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309. \quad \text{ii)}$$

V prostoru této fraktální dimenze je její délka podle i) rovna jedné

Nalezení velikosti fraktální dimenze atraktoru a nebo alespoň určení jejího horního odhadu je základním problémem této teorie. V předchozí kapitole byla ukázána struktura množiny stacionárních stavů dynamického systému (4.3.2). Ze schématického obr. 4.9d) je patrné, že pro $\lambda < \lambda_{\infty}^*$, kdy existuje jen nějaký konečný počet stacionárních stavů, je dimenze atraktoru $d=0$. Avšak při $\lambda \rightarrow \lambda_{\infty}^*$ má množina stacionárních stavů vlastnosti Cantorovy množiny (4.6) a můžeme s ohledem na definici (4.3.16) pro dimenzi atraktoru psát

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln 2 \frac{p}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad \text{pro } p \rightarrow \infty. \quad (4.3.17)$$

Jde o neurčitý výraz, který nelze bez konkrétní kvantitativní analýzy posloupnosti bifurkací vyčíslit. Pro řadu podivných atraktorů je fraktální dimenze nalezena numericky (Ott, 1981).

Poznamenejme, že Cantorova množina má vlastnosti měřítkové podobnosti. Skutečně, díky její konstrukci, je množina mezi body

0 a 1 stejná jako její část mezi body 0 a $1/3$, viz obr. 4.10. Rozdíl je pouze v její velikosti, která je v poměru 3 : 1.

Jedna z možností jak odhadnout fraktální dimenzi podivného atraktoru i ve vícerozměrném prostoru je pomocí tzv. Ljapunovových čísel l_i , kde i označuje dimenzi fázového prostoru ($i = 1, 2, \dots$). Pro případ dvourozměrné Poincarého mapy

$$\begin{aligned} w_1^{(n+1)} &= f_1(w_1^{(n)}, w_2^{(n)}) \\ w_2^{(n+1)} &= f_2(w_1^{(n)}, w_2^{(n)}), \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

viz např. obr. 4.11 jsou Ljapunovova čísla l_1, l_2 střední hodnoty hlavních směrů prodloužení nějakého malého kruhu.

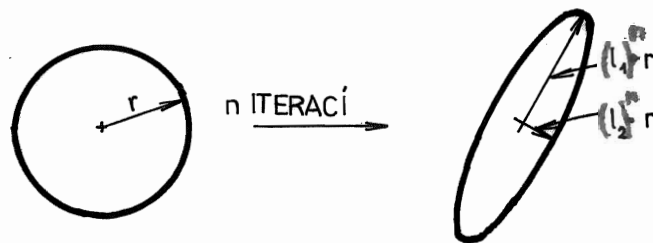
Deformace nějakého malého kruhu o poloměru r (obecně elementu plochy) za jednu iteraci je určena vlastními čísly matice

$$J^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})}{\partial w_2} \\ \frac{\partial f_2(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})}{\partial w_1} & \frac{\partial f_2(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})}{\partial w_2} \end{bmatrix}, \quad (4.3.19)$$

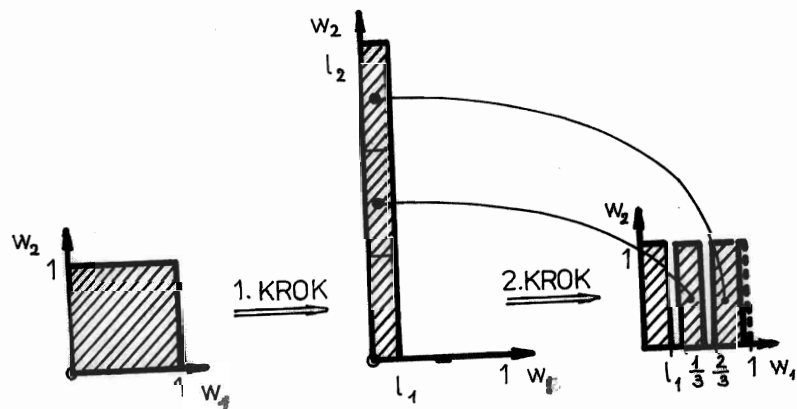
které označíme $l_1^{(n)}, l_2^{(n)}$, viz kap. I.3.3, obr. I.3.3. Po $n+1$ iteracích máme $n+1$ matic

$$J^{(n)}, J^{(n-1)}, J^{(n-2)}, \dots, J^{(0)}, \quad (4.3.20)$$

kde $J^{(0)}$ je matice (4.3.19) při počátečních podmínkách $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}$, viz obr. 4.11a). Ljapunovova čísla pohybu (4.3.18) definujeme jako střední geometrický průměr



a)



b)

Obr. 4.11

- a) Po n -iteracích se dostatečně malý kruh o poloměru r přibližně transformuje na elipsu s poloosami $(l_1)^n \cdot r, (l_2)^n \cdot r$
- b) Zobrazení (4.3.23) pro $l_1 = \frac{2}{9}, l_2 = 3$.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (l_1^{(n-1)} \cdot l_2^{(n-2)} \cdot \dots \cdot l_1^{(0)})^{\frac{1}{n}} \\
 l_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (l_2^{(n-1)} \cdot l_2^{(n-2)} \cdot \dots \cdot l_2^{(0)})^{\frac{1}{n}}
 \end{aligned}
 \tag{4.3.21}$$

Tato čísla určují průměrné natažení blízkých bodů.

Předpokládejme, že $l_1 > l_2$. Jestliže je zobrazení chaotické pak musí být $l_1 > 1$ tak, že vzdálenost mezi dvěma blízkými body se nárůstem iterací (v průběhu času) zvětšuje, viz obr. 4.8b). Pro $l_1 \cdot l_2 < 1$ je zobrazení kontrahující, viz obr. 4.8a) a pro $l_1 \cdot l_2 = 1$ se velikost plochy zachovává. Výpočet l_1 a l_2 se provádí většinou numericky a v případě, že $l_1 > 1$ považujeme pohyb (4.3.18) za chaotický.

Z praktického hlediska je velice užitečný vztah mezi Ljapunovými čísly l_i a fraktální dimenzí podivného atraktoru (Kaplan, Yorke, 1979). Pro dvourozměrné zobrazení (4.3.18) s $l_2 > 1 > l_1$, $l_1 \cdot l_2 < 1$ platí vztah

$$d = 1 - \frac{\ln l_2}{\ln \left(\frac{1}{l_1} \right)} .
 \tag{4.3.22}$$

Tento vztah selhává v některých případech, ve kterých Ljapunovova čísla závisí na w_1, w_2 . Relaci (4.3.22) odvodíme pomocí tzv. pekařské transformace (4.7)

4.7)

Funkce mod (a, b) , někdy psáno jako $a \bmod b$ je rovna zbytku při dělení čísla a číslem b . Je definována vztahem

$$\text{mod}(a, b) = a - \left[\frac{a}{b} \right] \cdot b ,$$

kde $\left[\frac{a}{b} \right]$ je celá část čísla $\frac{a}{b}$ tak, že $\left[\frac{a}{b} \right] \leq \frac{a}{b}$.

$$w_2^{(n+1)} = \text{mod}(l_2 w_2^{(n)}, 1)$$

$$w_1^{(n+1)} = l_1 w_1^{(n)} + w_2^{(n)} - \frac{\text{mod}(l_2 w_2^{(n)}, 1)}{l_2} . \quad (4.3.23)$$

Tato transformace sestává ze dvou kroků. První krok je natažení podle osy w_2 s koeficientem proložení l_2 a kontrakce ve směru osy w_1 s koeficientem kontrakce l_1 . Ve druhém kroku, za předpokladu, že l_2 je celé číslo, je protažená plocha naskládána do jednotkového čtverce tak, jak je ukázáno na obr. 4.11b) (srovnej s obr. 4.8c)). Pro $n \rightarrow \infty$ vede tato transformace k podivnému atraktoru.

Vlastní čísla matice $J^{(n)}$ pro pekařskou transformaci (4.3.23) jsou l_1, l_2 ($l_1 \cdot l_2 < 1$). Po p iteracích, které reprezentují p -násobné zopakování postupu na obr. 4.11b), bude původní fázový prostor (čtverec $(w_1, w_2) \in \langle 0, 1 \rangle^2$) tvořen $(l_2)^p$ svislými proužky s tloušťkou $(l_1)^p$. Použijeme nyní definici fraktální dimenze (4.3.16) s tím, že tuto množinu (podivný atraktor) pokryjeme čtverečky se stranou o velikosti $\varepsilon = (l_1)^p$, jejichž počet je přibližně $N(\varepsilon) \doteq \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^p$, viz obr. 4.11b).

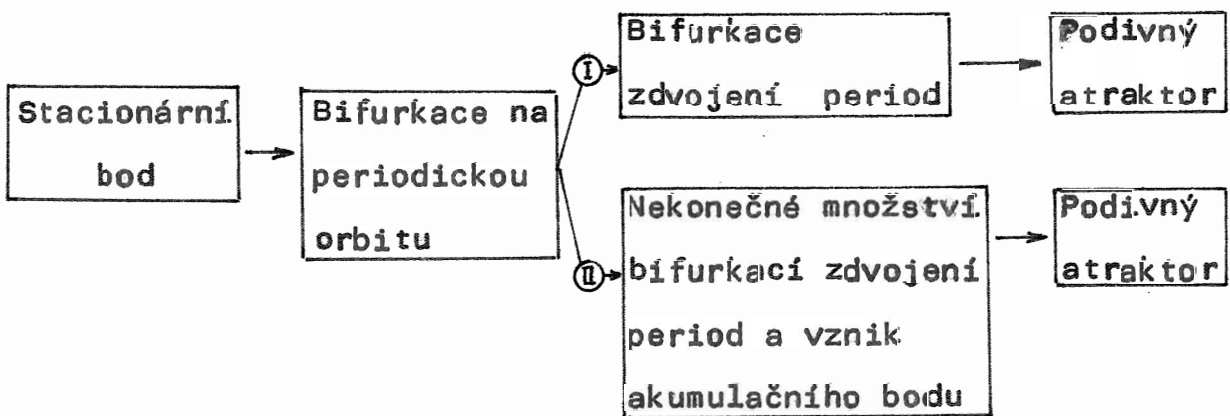
Odvodili jsme vztah (4.3.22), který se užívá při odhadu fraktální dimenze podivných atraktorů soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Metody a pojmy uvedené v kap. 4.3 až 4.3.2 jsou základní při určování vlastností chaosu, resp. turbulence (viz kap. 4.3.3).

4.3.3 Základní scénáře chaosu

Snaha nalézt zákonitosti v chaotickém pohybu dynamických disipativních systémů vede v prvním přiblížení k jednoduchým modelům. Tyto modely vykazují řadu vlastností, které lze fyzikálně interpretovat jako turbulenci, resp. obecně jako chaos. Omezíme se na čtyři typické scénáře chaosu, které se v literatuře vyskytují nejčastěji, viz Tabulka 4.2. (Ott, 1981; Eckmann, 1981; Horák, 1987, 1988).

Tab 4.2

Typické rysy, které doprovází vznik chaosu, resp. vznik podivného atraktoru, lze shrnout do následujícího schématu



Cesta označená **I** odpovídá Ruellově-Takensově a Pomeauově-Mannevillově scénářům chaosu. Feigenbaumův scénář odpovídá cestě označené **II**. Landau^{4.8} si představoval turbulenci jako hierarchii nestabilit narůstající se zvětšujícím se Reynoldsovým číslem Re . Číslo Re hraje při proudění vazké tekutiny roli parametru λ přičemž kritická hodnota Reynoldsova čísla Re_{krit} (nad ní je proudění s plně vyvinutou turbulencí) odpovídá akumulárnímu bodu λ_{∞}^* .

4.8) V literatuře je často nazýván Landaův-Hopfův scénář turbulence.

Scénář	Ruelle-Takens (1971)	Feigenbaum (1978)	Fornau-Wanneville (1981)	Landau (1944, 1986)
Typ bifurkace	Hopfova, kap 4.2.2	Pitchfork, kap.4.2.1 a kap.4.3.1	Inverzní sedlový bod kap.4.2.1	Hopfova, kap.4.2.2
Přechod k chaosu	Pravděpodobně po třech bifurkacích se objeví podivný atraktor	Nekonečná posloupnost zdvojení periody s univěrsálním zákonem (4.3.15)	Intermitentní přechod k chaosu, viz (4.3.25)	vznik velkého počtu frekvencí, včetně fázových posuvů
Experimentální ověření	Měření energetického spektra a korelací	Konstantní pokles energie módu při zdvojení periody, viz (4.3.24)	Porovnání s měřeními v reálném čase	Měření energetického spektra a korelací
Vliv vnějšího šumu	nemá vliv	Dlouhé periody (nízké frekvence) mizí	Působí na dobu trvání stabilní oblasti	neví se

Tab.4.2

Nejčastější scénáře chaosu

tj. $Re_{krit} = \lambda_{\infty}^*$. Pohyb systému je v této oblasti periodický, přičemž počet frekvencí neustále roste, takže v limitě tvoří nekonečnou (ale spočetnou) množinu (např. jako přirozená čísla). Tento druh pohybu ale není ve skutečnosti chaotický. Důvodem je nenulová časová korelace takovýchto periodických funkcí. Proto je existence chaosu podmíněna existencí podivného atraktoru a ten, v případě Landauova scénáře není prokázán, protože fraktální dimenze (4.3.16) atraktoru skládajícího se ze spočetného množství izolovaných bodů je nulová (4.6).

V Tabulce 4.2. jsou uvedeny některé typické znaky jednotlivých scénářů chaosu tak, aby bylo možno experimentem rozhodnout, s jakou přesností je sledovaný chaotický pohyb modelován. Nejvíce informací je známo o Feigenbaumově scénáři, kde vedle univerzálního zákona je možno i stanovit změnu energií dvou po sobě jdoucích periodických pohybů. Definujeme energii pohybu s periodou $T^{(k+1)} = 2T^{(k)} = 2^{(k+1)}T_0$ integrálem

$$I^{(k+1)} = \frac{1}{T^{(k+1)}} \int_0^{T^{(k+1)}} [w^{(k+1)}(t) - w^{(k+1)}(t+T^{(k)})]^2 dt \quad (4.3.24)$$

a stejně $I^{(k)}$. S ohledem na vlastnosti $w^{(k+1)}$ pro velké k (Feigenbaum, 1979) dostáváme po integraci vztah $\frac{I^{(k)}}{I^{(k+1)}} = 10,8$, vyjadřující poměr energie pohybů s periodami $T^{(k)}$ a $T^{(k+1)}$. Odtud i plyne silný vliv vnějšího šumu na pohyby s dlouhými periodami.

Scénář Pomeaův-Mannevillův odpovídá více intermitentnímu charakteru turbulence a je popsán zobrazením, které má jeden stabilní a jeden nestabilní pevný bod, viz rovnici (4.2.7) a obr. 4,3a).

Máme-li na mysli proudění vazké tekutiny bude vnitřním parametrem systému opět Reynoldsovo číslo Re , přičemž pro $Re < Re_{krit}$ bude existovat pouze stabilní laminární proudění. To odpovídá parametrům $\lambda > \lambda_c$ na obr. 4.3a), takže v rovnici (4.2.7) zaměníme $\lambda - \lambda_c$ na $-(Re - Re_{krit})$ a základní vlastnosti phybu takového systému plynou ze vztahů (4.2.11) a (4.2.12). Skutečně, pro případ $Re > Re_{krit}$ plyne ze vztahu (4.2.12), že existují takové časové intervaly τ , ve kterých vzroste řešení nade všechny meze (nulový jmenovatel). Pro tento časový interval platí

$$\tau = t - t^{(0)} = K_{itm} (Re - Re_{krit})^{-\frac{1}{2}},$$

$$\text{pro } K_{itm} = \text{arccotg} \left(-\frac{w^{(0)}}{\sqrt{Re - Re_{krit}}} \right), \quad (4.3.25)$$

odkud plyne, že doba mezi jednotlivými "vzryvy" ubývá s nárůstem Re (Landau, Lifšic, 1986). V důsledku závislosti K_{itm} na počáteční hodnotě $w^{(0)}$ je zjevný vliv vnějších poruch (změna $w^{(0)}$) na dobu trvání relativně stabilní oblasti (Eckmann, 1981).

V mechanice pevných těles se také objevují rovnice s chaotickým řešením. Nelinearita a disipace, které systém vedou k takovému chování mohou být buď v okrajových podmínkách nebo ve vnitřních zpětných vazbách, v tlumení či buzení. V prvním případě jde o soustavy a rázy, jako např. mechanická kladiva, buchary, vibrační dopravníky, apod., viz např. Peterka (1981). V druhém případě jde např. o ozubená soukolí, podvozky železničních vagonů a obecně o soustavy s náhodným buzením (Dobiáš, 1988). Podobným jevům dochází i v elektrických obvodech (Kotek a kol., 1973), v laserech (Arecchi, Harrison, 1987), v chemických systémech (Kadomcev, 1984) a jinde.

4.4 Hydrodynamická stabilita

Původcem nestabilního chování tekutiny jsou transportní, obecně řečeno disipativní, procesy a dále pak takové vlastnosti jako stlačitelnost a tepelná roztažnost. Typickým příkladem nestability je turbulentní proudění tekutin, kde má rozhodující vliv na její vznik viskozita (Schlichting, 1965; Chandrasekhar, 1961; Lin, 1955), viz kap. 4.4.3. Bénardova nestabilita, která doprovází intenzivní přestup tepla (např. var tekutin) je způsobena jednak tepelnou vodivostí, tepelnou roztažností tekutiny a rovněž její viskozitou (Glansdorff, Prigogine, 1971; Legros, Platten, 1978). Vzájemné působení stlačitelnosti a viskozity vede k tzv. transonické nestabilitě, která se projevuje nestacionárními pulzacemi v proudovém poli v blízkosti obtékaných těles či v kanálech při transonických rychlostech, viz kap. 4.4.5 (Dvořák, 1986; Meier, 1976; Maršik, Vlček, 1977, 1980).

Uvedeme základní rovnice proudění stlačitelné termoviskózní Newtonovy tekutiny. Tento typ tekutin je určen konstitutivními vztahy (4.1.4), (4.1.6) a (4.1.7). Dále budeme předpokládat, že koeficient viskozity μ a koeficient tepelné vodivosti λ jsou konstanty. Rovnice bilance, viz kap. I.4, mají pak v prostorových souřadnicích (x^i, t) ($i=1,2,3$) následující tvar.

Označíme hustotu tekutiny ρ a její rychlost v^i ($i=1,2,3$). Zákon bilance hmotnosti (rovnice kontinuity (I.4.1.5)) je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} = 0. \quad (4.4.1)$$

V tekutinách je definován statický tlak $p = p(\rho, T)$, viz kap. I.6.4, pro který platí konstitutivní vztah, viz např. (I.7.5.15) a (I.7.5.19). Rovnice bilance hybnosti (I.4.2.16) je za předpokladu, že $t^{ij} = -p(\rho, T)\delta^{ij} + t_{dis}^{ij}$, (viz (I.6.5.11)) a při zanedbání vnějších objemových sil rovna

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^l v^i + p)}{\partial x^l} = \frac{\partial t_{dis}^{il}}{\partial x^l} = \mu \frac{\partial^2 v^i}{(\partial x^l)^2} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^l} \right).$$

(4.4.2)

Disipativní část tenzoru napětí t_{dis}^{ij} jsme uvažovali ve tvaru (4.1.6). Rovnici (4.4.2) nazýváme Navierovou-Stokesovou rovnicí pro stlačitelnou tekutinu.

Vynásobíme-li skalárně rovnici hybnosti (4.4.2) vektorem rychlosti v_i , dostáváme rovnici bilance mechanické energie (I.4.4.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{v}{2} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\rho v^l \frac{(v)^2}{2} - t^{li} v_i \right] + p \frac{\partial v^l}{\partial x^l} = -\sigma \left(\rho \frac{(v)^2}{2} \right)$$

(4.4.3)

pro

$$\sigma \left(\rho \frac{(v)^2}{2} \right) = t_{dis}^{lj} \frac{\partial v_j}{\partial x^l} = 2\mu \overset{\circ}{d}_{(2)}, \quad \frac{(v)^2}{2} = \frac{v^i v_i}{2},$$

(4.4.4)

kde

$$\overset{\circ}{d}_{(2)} = \overset{\circ}{d}^{kl} \cdot \overset{\circ}{d}_{kl}, \quad \overset{\circ}{d}_{kl} = d_{kl} - \frac{d_{(1)}}{3} \delta_{kl}, \quad d_{(1)} = \frac{\partial v^l}{\partial x^l},$$

(4.4.5)

$$d_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^l} + \frac{\partial v_l}{\partial x^k} \right),$$

viz vztahy (I.6.4.2)₁ a (I.6.4.2)₂. Tudiž disipace kinetické energie $\sigma \left(\rho \frac{(v)^2}{2} \right)$ je způsobena jen smykovou viskozitou μ a je

úměrná jen velikosti rychlosti smykových změn, viz pozn. I.6.6.

4.9)

Hustotu disipace kinetické energie určíme ze součinu

$$\begin{aligned} t_{dis}^{lj} \frac{\partial v_j}{\partial x^l} &= t_{dis}^{lj} (d_{lj} + w_{lj}) = 2\mu \overset{\circ}{d}^{lj} \left(d_{lj} - \frac{d_{(1)}}{3} \delta_{lj} + \frac{d_{(1)}}{3} \delta_{lj} + w_{lj} \right) = \\ &= 2\mu \overset{\circ}{d}_{(2)} \end{aligned}$$

Při úpravě jsme vyšli z rozkladu gradientu rychlostního pole (I.3.8.1) a uvážili jsme, že součiny symetrického tenzoru s nulovou stopou $\overset{\circ}{d}^{lj}$ s tenzorem antisymetrickým w_{lj} a jednotkovým tenzorem δ_{lj} jsou nuly.

Bilance vnitřní energie u je dána rovnicí (I.4.5.15) a za uvedených předpokladů má tvar

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v^l)}{\partial x^l} + p \frac{\partial v^l}{\partial x^l} = \lambda \frac{\partial^2 T}{(\partial x^l)^2} + \sigma(\rho u), \quad (4.4.6)$$

kde hustota produkce vnitřní energie

$$\sigma(\rho u) = 2\mu \overset{\circ}{d}_{(2)} = -\sigma \left(\rho \frac{(v^l)^2}{2} \right) \quad (4.4.7)$$

je rovna disipaci kinetické energie (4.4.4). Rovnost (4.4.7) je důsledkem zákona bilance celkové energie $e = u + \frac{(v)^2}{2}$ (pátá složka ve vektorové rovnici (4.1.2)). Produkce celkové energie je nulová, tj. $\sigma(\rho e) = 0$, protože pro celkovou energii platí zákon zachování, tj. celková energie nikde nevzniká ani nezániká.

4.4.1 Stabilita smykové vrstvy

Při obtékání povrchu (roviny) vazkou tekutinou ulpívá tato tekutina na povrchu a vzniká mezní vrstva. Mezní vrstva je speciálním případem smykové vrstvy, ke které dochází na hranici dotyku dvou rovnoběžných proudů v různé rychlosti. Tuto hranici si lze ve zidealizovaném případě představit jako plochu tangenciální nespojitosti rychlosti, o které se nechá dokázat, že při sebemenší interakci proudů (přenos hybnosti přes plochu, např. v důsledku viskozity tekutiny) se stává nestabilní a zbortí se (Landau, Lifšic, 1986). V reálném případě to odpovídá nestabilitě smykové či mezní vrstvy, jejichž hranice stability budeme vyšetřovat.

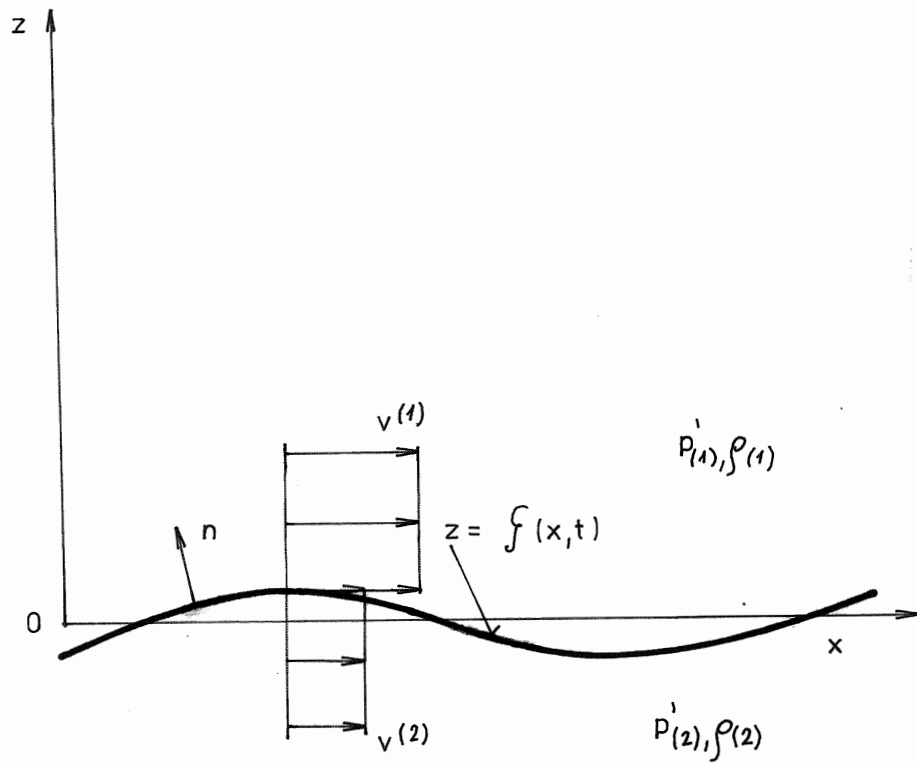
Předpokládejme dva rovnoběžné proudy tekutiny s osou x oddělené plochou

$$\omega(x, z, t) = z - \xi(x, t) = 0, \quad (4.4.8)$$

kde $\xi(x, t)$ je deformace dělicí hranice ve směru osy z obr. 4.12. Značíme $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, přičemž závislost na y neuvažujeme a problém předpokládáme dvourozměrný. Rychlost šíření plochy nespojitosti ve směru normály vypočteme podle vztahu (3.2.5). Předpokládáme, že je tato rychlost přibližně nulová a v'_x, v'_z jsou fluktuace rychlosti ve směru osy x a osy z kolem střední rychlosti \bar{v}_x a $\bar{v}_z = 0$. Tudiž

$$-\frac{\dot{\omega}}{|\text{grad } \omega|} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\bar{v}_x + v'_x) \frac{\partial \xi}{\partial x} - v'_z = 0, \quad |\text{grad } \omega| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2} \doteq 1 \quad (4.4.9)$$

a prohnutí dělicí plochy v bodě $x, z=0$ a v čase t je popsáno rovnicí



Obr. 4.12

Nestabilita tangenciální nespojitosti rychlosti

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_z' - \bar{v}_x \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4.4.10)$$

Zanedbali jsme veličiny vyšších řádů $v_x' \frac{\partial \xi}{\partial x}, \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$.

Popíšeme proudění tekutiny po obou stranách plochy (4.4.8) zjednodušenými rovnicemi (4.4.1) a (4.4.2). Rychlostní pole má tvar $v^i = \bar{v}^i + v'^i$, $\bar{v}^i = \text{konst}$ (pro $i=1,2,3$), tlak je $p = \bar{p} + p'$ pro $\bar{p} = \text{konst}$ a tekutina je nestlačitelná. Protože nás zajímá jen vliv samotné tangenciální nespojitosti, zanedbáme vliv vazkosti a teploty. Rovnice kontinuity (4.4.1) a rovnice hybnosti (4.4.2) mají tvar

$$\frac{\partial v'^i}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial v'^i}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial v'^i}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x^i}. \quad (4.4.11)$$

Jestliže zavedeme divergenci druhé rovnice dostáváme rovnici

$$\frac{\partial^2 p'}{(\partial x^i)^2} = 0 \quad (4.4.12)$$

pro tlakové poruchy na hranici proudů $\sqrt{\frac{\text{o rychlostech}}{\bar{v}_x^{(1)}, \bar{v}_x^{(2)}}}$, viz obr.4.12.

Současným řešením rovnic (4.4.10) a (4.4.12) obdržíme základní vlastnosti proudů na ploše nespojitosti. Řešení hledáme ve tvaru

$$\xi(x, z, t) = Z(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad p' = P(z) e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.4.13)$$

a z rovnice (4.4.10) plyne: $v'_z = i\xi(k\bar{v}_x - \omega)$. Podobně
 dosazením (4.4.13)₂ do (4.4.12) dostáváme $p' = \text{konst} e^{i(kx - \omega t)} e^{-kz}$.
 Užitím z-tové složky rovnice (4.4.11) je

$$\frac{\partial v'_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial v'_z}{\partial x} = \frac{k}{\rho} p' = i v'_z (k\bar{v}_x - \omega) \quad (4.4.14)$$

a složka rychlosti tekutiny na hranici (4.4.8) má rovněž tvar
 $v'_z = \text{konst} \cdot e^{i(kx - \omega t)}$.

Výsledkem řešení rovnic (4.4.10) a (4.4.12) jsou vztahy pro poruchovou složku rychlosti v'_z tj.

$$v'_z = i\xi(k\bar{v}_x - \omega) \quad , \quad v'_z = \frac{k p'}{i\rho(k\bar{v}_x - \omega)} \quad (4.4.15)$$

Vyloučením v'_z obdržíme vztah pro tlakovou poruchu

$$p' = -\xi \rho \frac{(k\bar{v}_x - \omega)^2}{k} \quad (4.4.16)$$

O stabilitě hranice nespojitosti můžeme rozhodnout, známe-li vztah mezi frekvencí ω a vlnovým číslem k . Tento vztah nalezneme z podmínky rovnosti tlaků napříč (srovnej s kap. 4.4.4).

Předpokládejme, že horní proud na obr. 4.12 ($z > 0$) má rychlost $v_x^{(1)}$ a hustotu $\rho_{(1)}$ a dolní proud $z < 0$, $v_x^{(2)} = 0$ a $\rho_{(2)}$.

Potom podle (4.4.16) platí

$$p'_{(1)} = -\frac{\xi \rho_{(1)} (k\bar{v}_x^{(1)} - \omega)^2}{k} \quad , \quad p'_{(2)} = \frac{\xi \rho_{(2)} \omega^2}{k} \quad (4.4.17)$$

kde pro $z < 0$ jsme uvažovali řešení rovnic (4.4.12) se členem e^{kz} . Podmínka rovnosti tlaků $P'_{(1)} = P'_{(2)}$ vede na hledaný vztah

$$\omega = k v_x^{(1)} \frac{\rho_{(1)} \pm i \sqrt{\rho_{(1)} \rho_{(2)}}}{\rho_{(1)} + \rho_{(2)}} \quad (4.4.18)$$

Frekvence ω je obecně komplexní veličinou a bude mít vždy složku s kladnou imaginární částí. Dosazením do řešení (4.4.13) vidíme, že se deformace dělicí hranice bude s časem zvětšovat.

Nestabilita tangenciální nespojitosti, resp. smykové vrstvy, je principiální a dochází k ní i při nepatrné fluktuaci tlaku, či rychlosti. K takové fluktuaci v reálné tekutině i při sebemenší viskozitě vždy dochází, i když nespojitost rychlostí není tak ostrá. Tento poznatek má obecnější platnost z hlediska dynamických systémů, protože v nich dochází v důsledku disipace energie (resp. produkce entropie) k samovolným fluktuacím, viz kap. I.3.13 a vztah (I.7.3.36).

4.4.2 Stabilita proudových polí vazké tekutiny.

Formulace problému

Proudění vazké tekutiny je popsáno rovnicemi (4.4.1), (4.4.2) a (4.4.6) včetně vztahů (4.1.4). Numerické řešení rovnic proudění je uvedeno v kap. 2.4.4. Problém je v celé obecnosti natolik složitý, že jeho analýza stability je značně nepřehledná. Některé obecné závěry o jeho stabilitě jsou uvedeny v kap. 1.7.3.1.

Za účelem zjednodušení se omezíme na proudění nestlačitelné ($\rho = \text{konst}$), tepelně dokonale vodivé ($T = \text{konst}$), vazké tekutiny. Za těchto předpokladů je proudění popsáno rovnicemi

$$\frac{\partial v^l}{\partial x^l} = 0 \quad (4.4.19)$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^l \frac{\partial v^i}{\partial x^l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v^i}{(\partial x^l)^2} \quad (4.4.20)$$

pro $i, l = 1, 2, 3$.

Tyto rovnice můžeme ještě zjednodušit zavedením bezrozměrových proměnných

$$\tilde{x}^i = \frac{x^i}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{v}^i = \frac{v^i}{U_\infty}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U_\infty^2}, \quad Re = \frac{U_\infty L \rho}{\mu},$$

$$\frac{L}{U_\infty T} = 1,$$

(4.4.21)

kde L je charakteristický délkový rozměr oblasti, U_∞ charak-

teristická rychlost proudu (např. v nekonečnu) a $T = \frac{L}{U_\infty}$ je charakteristický časový interval a Re je Reynoldsovo číslo. Vynecháme-li vlnku nad proměnnými, mají výchozí rovnice (4.4.19) a (4.4.20) tvar

$$\frac{\partial v^\ell}{\partial x^\ell} = 0 \quad (4.4.22)$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\ell \frac{\partial v^i}{\partial x^\ell} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v^i}{(\partial x^\ell)^2} \quad (4.4.23)$$

Konkrétní formulaci problému stability provedeme pro dvou-rozměrný problém ($i, j, \ell = 1, 2$). Hranice stability vyšetřujeme metodou lineárního modelu 4.4) tak, že v okolí stacionárního stavu $V^i(x^k), P(x^k)$ rovnice (4.4.22) a (4.4.23) linearizujeme. Tudiž řešení předpokládáme ve tvaru

$$\begin{aligned} v^i(x^\ell, t) &= V^i(x^\ell) + v^i(x^\ell, t) \\ p(x^\ell, t) &= P(x^\ell) + p'(x^\ell, t). \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Dosažením do rovnic (4.4.22) a (4.4.23) dostáváme po zanedbání členů vyšších řádů $v^\ell \frac{\partial v^i}{\partial x^\ell}$ soustavu rovnic stacionárního proudění

$$\frac{\partial V^i}{\partial x^i} = 0 \quad (4.4.25)$$

$$V^\ell \frac{\partial V^i}{\partial x^\ell} + \frac{\partial P}{\partial x^i} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V^i}{(\partial x^\ell)^2} \quad (4.4.26)$$

a soustavu lineárních rovnic pro poruchy

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0 \quad (4.4.27)$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + V^l \frac{\partial v^i}{\partial x^l} + v^l \frac{\partial V^i}{\partial x^l} + \frac{\partial p^i}{\partial x^i} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v^i}{(\partial x^l)^2} \quad (4.4.28)$$

Soustavu parciálních diferenciálních rovnic (4.4.27) a (4.4.28) převedeme na řešení jediné obyčejné diferenciální rovnice.

Místo indexovaných proměnných použijeme značení

$$\begin{aligned} v^{1'} &= u' & v^{l2} &= v' \\ V^1 &= U & V^2 &= V \\ x^1 &= x & x^2 &= y, \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

takže rovnice (4.4.28) píšeme ve tvaru

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (4.4.30)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + v' \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) = - \frac{\partial p^i}{\partial x} \quad (4.4.31)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + u' \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} + v' \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) = - \frac{\partial p^i}{\partial y} \quad (4.4.32)$$

Z nich eliminujeme tlakový gradient tak, že rovnici (4.4.31) derivujeme parciálně podle y a rovnici (4.4.32) podle x a odečteme je od sebe. Užitím rovnice kontinuity (4.4.30) přejdeme k jedné

neznámé, např. v' . Pro poruchu v' použijeme obvyklé vyjádření 4.4)

$$v'(x,y,t) = \hat{v}(y) e^{ik(x-ct)}, \quad (4.4.33)$$

kde k je vlnové číslo a c komplexní rychlost vlny, \hat{v} značí amplitudu poruchy. Dostáváme tak rovnici pro poruchu v' .

Do takto vzniklé rovnice dosadíme poruchu (4.4.33) a po úpravě (značíme $D^n = \frac{d^n}{dy^n}$) dostáváme rovnici pro amplitudu poruchy $\hat{v}(y)$

$$\begin{aligned} D^4 \hat{v} + k^4 \hat{v} - 2k^2 D^2 \hat{v} + \text{Re} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} D \hat{v} + \text{Re} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} D \hat{v} - \text{Re} V D^2 \hat{v} - \text{Re} k^2 V D \hat{v} = & (4.4.34) \\ = i \text{Re} c k^3 \hat{v} - i \text{Re} k^3 U \hat{v} - i \text{Re} c k D^2 \hat{v} - i \text{Re} k \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \hat{v} - i \text{Re} k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \hat{v} - i \text{Re} k U D^2 \hat{v}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že speciálním případem této rovnice je známá Orr-Sommerfeldova rovnice (Schlichting, 1965; Lin, 1955)

$$(D^2 - k^2)^2 \hat{v} = ik \text{Re} [(U - c)(D^2 - k^2) - D^2 U] \hat{v}, \quad (4.4.35)$$

která platí pro paralelní Poiseuillova proudění, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením podmínky $V=0$.

V této formulaci budeme problémem hydrodynamické stability rozumět určení kritických hodnot Reynoldsova čísla Re , při kterých dochází k zesilování poruch, předpokládaných ve tvaru (4.4.33). Z matematického hlediska jde o nalezení amplitudy poruchy $\hat{v}(y)$ za daných okrajových podmínek a pro zadané vlnové číslo poruchy $k = \frac{2\pi}{\ell}$ (ℓ je vlnová délka) a zadané číslo Re .

Rovnice (4.4.34) resp. (4.4.35) má však nenulové řešení jen pro nějakou určitou hodnotu $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{re} + i\mathcal{C}_{im}$ tzv. vlastní čísla. Z hlediska stability nás zajímá pouze znaménko u imaginární části. Je-li $\mathcal{C}_{im} < 0$ poruchy rychlosti v proudovém poli se tlumí a proudění je stabilní, naopak je-li $\mathcal{C}_{im} > 0$ amplituda poruch roste a proudění se stává nestabilním - dochází k přechodu do turbulence. Hodnota $\mathcal{C}_{im} = 0$ je mez tzv. neutrální stability.

4.4.3 Stabilita Poiseuillova proudění

Určování podmínek stability proudových polí ukážeme na příkladu dvourozměrného nestlačitelného proudění mezi dvěma stěnami viz obr. 4.13a). Stacionární stav je určen rovnicemi (4.4.25) a (4.4.26). Předpokládáme-li vyrovnané proudové pole $U(y)$, $V=0$ s okrajovou podmínkou $U(-L)=U(L)=0$ vedou tyto rovnice k řešení

$$U(y) = -\frac{L^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right]. \quad (4.4.36)$$

Rychlostní profil je parabolický s maximem rychlosti

$$U_{\infty} = -\frac{L^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Zavedením bezrozměrových proměnných (4.4.21) dostáváme stacionární stav Poiseuillova proudění ve tvaru

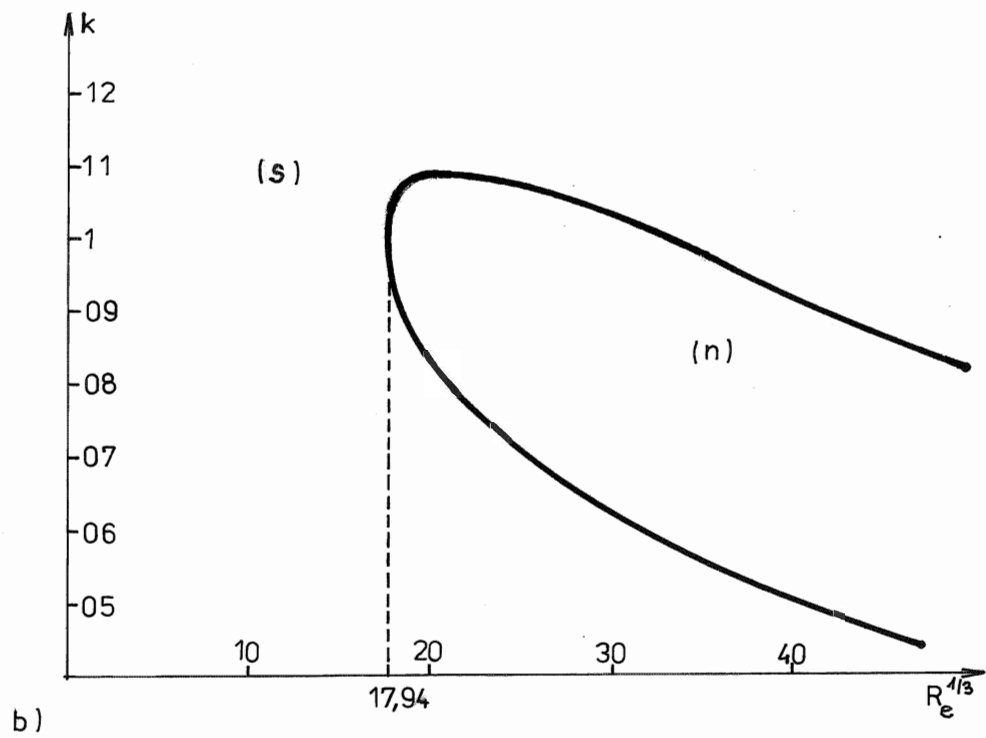
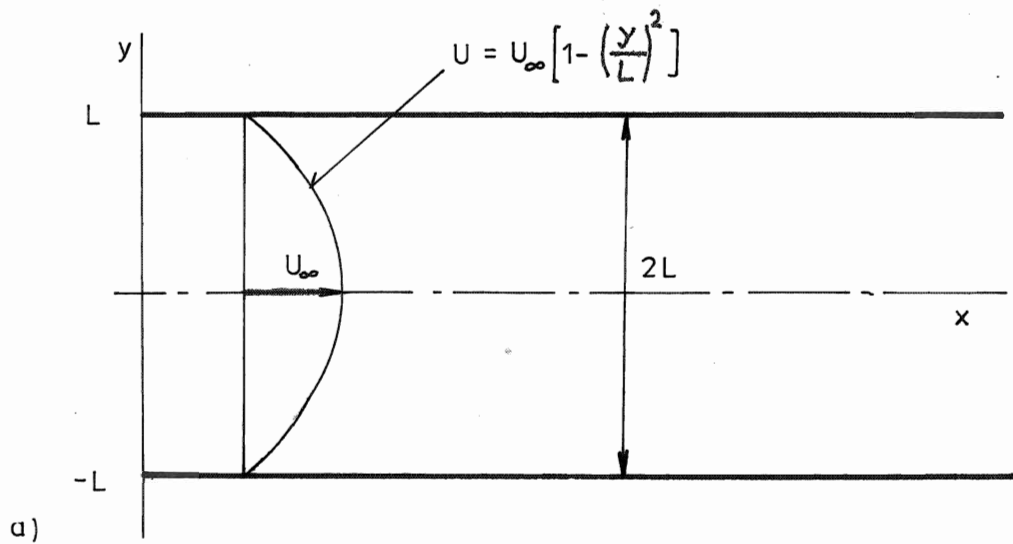
$$\tilde{U} = 1 - \tilde{y}^2, \quad Re = \frac{\rho L U_{\infty}}{\mu}. \quad (4.4.37)$$

obr. 4.13

Dříve než budeme vyšetřovat stabilitu konkrétního stavu (4.4.37) ukážeme obecný postup pro stacionární stav daný rovnicemi (4.4.25) a (4.4.26). Použijeme metody rozšířeného variančního počtu (1.3.51) jejíž základní idea je sestavení kvadratického funkcionálu, jehož extrém při dodatečné podmínce, viz (4.4.45) nastává jen tehdy, je-li splněna rovnice (4.4.34).^{4.10)}

4.10)

I. Prigogine a P. Glansdorff (1971) nazývají tuto metodu metodou



Obr. 4.13

Stabilita rovinného Poiseuillova proudění

a) Poiseuillovo proudění s $Re = \frac{\rho L U_{\infty}}{\mu}$

b) oblasti stability (s) a nestability (n)

lokálního potenciálu. V principu je tento postup shodný s Gyarmátiho variačním počtem v kap. I.8.1.

Hledejme variační formulaci k soustavě linearizovaných rovnic (4.4.27) a (4.4.28), resp. (4.4.30) až (4.4.32). Rovnici (4.4.32) nejdříve budeme parciálně derivovat podle x a zároveň ji formálně vydělíme hodnotou $i\dot{k}$ (význam této úpravy se ukáže později). Dále postupuje stejně jako např. v (Glansdorff, Prigogine, 1971), tj. vztah (4.4.31) násobíme $-\delta u'$ a vztah (4.4.32) $-\delta v'$ a obě rovnice sečteme.

Využijeme navíc následující předpoklad a úpravy ($i, j = 1, 2$)

$$v'^i = v_0'^i + \delta v'^i \quad (4.4.38)$$

$$-\frac{\partial v'^i}{\partial t} \delta v'^i = -\frac{\partial (v_0'^i + \delta v'^i)}{\partial t} \delta v'_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta v'^i \delta v'_i) - \frac{\partial v_0'^i}{\partial t} \delta v'_i \quad (4.4.39) \quad 4.11)$$

$$V^j \frac{\partial v'^i}{\partial x_j} \delta v'_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (V^j v'^i \delta v'_i) - \frac{\partial V^j}{\partial x_j} v'^i \delta v'_i - V^j v'^i \delta \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.4.40)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial x_i} \delta v'^i = \frac{\partial}{\partial x_i} (p' \delta v'^i) - p' \delta \left(\frac{\partial v'^i}{\partial x_i} \right).$$

4.11)

Připomínáme, že platí sumační konvence přes indexy vystupující v součinu křížem, např. $\delta v'^i \delta v'_i = \sum_{i=1}^2 \delta v'^i \delta v'_i$.

V kartézských souřadnicích navíc platí $\delta v'^i = \delta v'_i$,

viz Dodatek (I/D2).

Sečtené rovnice integrujeme přes objem V (v našem případě jde o dvourozměrnou oblast v rovině x, y) a užitím Gaussovy věty (2.1.3) obdržíme integrální výraz

$$\delta \int_{\partial V} L^i(v''^i, v_0''^i, p', p_0') da_j + \delta \int_V \mathcal{L}(v''^i, v_0''^i, \frac{\partial v''^i}{\partial x^i}, \frac{\partial v_0''^i}{\partial x^i}, \dots) d\underline{v} = 0. \quad (4.4.41)$$

Při variaci jsou veličiny s indexem považovány za konstantu. Integrál přes povrch ∂V (v našem případě křivku) reprezentuje okrajové podmínky. Objemový integrál je kvadratický funkcionál. Konkrétní tvar funkcí L^i a \mathcal{L} uvedeme dále až pro řešenou rovnici (4.4.34).

Zavedeme obvyklý tvar

$$\begin{aligned} v' &= \hat{v}(y) e^{ik(x-ct)} \\ u' &= \hat{u}(y) e^{ik(x-ct)} \\ p' &= \hat{p}(y) e^{ik(x-ct)} \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

a navíc vzhledem k rovnici kontinuity (4.4.30) musí platit

$$\hat{u}(y) = \frac{i}{k} \frac{d\hat{v}(y)}{dy}. \quad (4.4.43)$$

Pozn.:

Vhodnost první úpravy (derivace rovnice (4.4.32)) je zřejmá, protože při odvození rovnice (4.4.34) jsme rovnice (4.4.31) a (4.4.32) rovněž derivovali. Tyto derivace je nutno brát v úvahu, abychom dostali funkcionál, jehož extrém (4.4.41) nastává právě pro rovnici (4.4.34).

Dosazením vztahů (4.4.42), (4.4.43) do (4.4.41) obdržíme integrální výraz ve dvou proměnných \hat{v}, \hat{p} . Dále je možné eliminovat \hat{p} pomocí rovnice (4.4.31) a vztahů (4.4.42). S ohledem na okrajové podmínky členy L^j ($j=1,2$) vypadnou ($\hat{v}, D\hat{v}$ jsou na hranici nulové) a po algebraických úpravách (vynásobení $k^2 Re$) dostáváme konečnou podobu funkcionálu

$$\begin{aligned} \phi(\hat{v}, \hat{v}_0, D\hat{v}, D\hat{v}_0) = \int_V & \left[-ik Re v D\hat{v}_0 D\hat{v} - ik^3 v Re \hat{v}_0 \hat{v} + k^2 D\hat{v}_0 D\hat{v} - \frac{1}{2} (D^2 \hat{v})^2 + k^4 \hat{v}_0 \hat{v} + \right. \\ & + \frac{k^2}{2} (D\hat{v})^2 + 2D^2 \hat{v}_0 D\hat{v} - ik Re U \hat{v}_0 D^2 \hat{v} - 2ik Re \frac{\partial U}{\partial y} \hat{v}_0 D\hat{v} + ik^3 Re U \hat{v}_0 \hat{v} + \\ & + 2ik Re \frac{\partial V}{\partial x} D\hat{v}_0 \hat{v} + Re k^2 \frac{\partial U}{\partial x} \hat{v}_0 v + Re ik \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \hat{v} \hat{v} + 2Re ik \frac{\partial V}{\partial x} \hat{v}_0 D\hat{v} - \\ & \left. - k^2 Re V D\hat{v}_0 \hat{v} - 2Re k^2 V \hat{v}_0 D\hat{v} - k^2 Re \frac{\partial V}{\partial y} \hat{v}_0 \hat{v} + 2Re V D^2 \hat{v}_0 D\hat{v} + Re V D\hat{v}_0 D\hat{v} \right] dx dy. \end{aligned}$$

(4.4.44)

Přesvědčíme se, že extrém tohoto funkcionálu, viz (2.2.9), (2.2.20), lze formálně napsat takto

$$\frac{\delta \phi}{\delta \hat{v}} = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{v}} - D \frac{\partial \phi}{\partial (D\hat{v})} + D^2 \frac{\partial \phi}{\partial (D^2 \hat{v})} = 0$$

$$D = \frac{d}{dy}. \quad (4.4.45)$$

Tato rovnice dává s využitím pomocné podmínky

$$\hat{v}_0 = \hat{v} \quad (4.4.46)$$

rovnici (4.4.34).

Funkcionál (4.4.44) spolu s pomocnou podmínkou (4.4.45) reprezentuje variační princip pro problém hydrodynamické stability.

Vyplývá z něho iterační proces stejně jako z funkcionálu (2.3.51) Stejným postupem jako v případě funkcionálu (2.3.51) bychom mohli stanovit oblast stability odpovídajícího iteračního procesu. Nebudeme se zabývat analýzou stability výpočtu, ale uvedeme konkrétní výpočet vlastních čísel $\sigma = \sigma_{re} + i\sigma_{im}$ pro Poiseuillovo proudění (4.4.37). Budeme hledat hranici stability $\sigma_{im} = 0$, přičemž pro $\sigma_{im} > 0$ je proudění nestabilní. Vzhledem k tomu, že problém je převeden na výpočet vlastních čísel příslušné matice (viz dále) nesouvisí stabilita výpočtu se stabilitou proudového pole tak, jak tomu bylo u většiny problémů kap. 2.

Funkcionál (4.4.44) má pro Poiseuillovo proudění (4.4.37) tvar (Platten, 1971) (vlnku nad \tilde{U} a \tilde{y} vynecháme

$$\begin{aligned} \phi(\hat{v}, \hat{v}_0, D\hat{v}, D\hat{v}_0) = & \int_{-1}^1 \left[-ik\sigma \operatorname{Re} D\hat{v}_0 D\hat{v} - ik^3 \operatorname{Re} \hat{v}_0 \hat{v} + k^2 D\hat{v}_0 D\hat{v} - \frac{1}{2} k^2 (D^2 \hat{v})^2 + \right. \\ & + k^4 \hat{v}_0 \hat{v} + \frac{k^2}{2} (D\hat{v})^2 + 2D^2 \hat{v}_0 D^2 \hat{v} - ik \operatorname{Re} \hat{v}_0 D^2 \hat{v} - 2ik \operatorname{Re} \frac{\partial U}{\partial y} \hat{v}_0 D\hat{v} + \\ & \left. + ik^3 \operatorname{Re} U \hat{v}_0 \hat{v} \right] dy. \end{aligned}$$

(4.4.47)

Extrém tohoto funkcionálu je dán rovnicí (4.4.45), která spolu s podmínkou (4.4.47) dává Orrovu-Sommerfeldovu rovnici (4.4.35). Hledáme neznámou funkci $\hat{v}(y)$ na intervalu $y \in \langle -1, 1 \rangle$ Rayleighovou-Ritzovou metodou (někdy nazývanou Ritzova-Galerkinova metoda), viz kap. 2.2.1. Řešení předpokládáme ve tvaru řady

$$\hat{V} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n, \quad \hat{V}_0 = \sum_{n=1}^N \alpha_n^{(0)} \psi_n, \quad (4.4.48)$$

kde aproximační funkce ψ_n splňují okrajové podmínky úlohy a jsou tvořeny pomocí Čebyševových polynomů T_n . Tudiž

$$\psi_n(y) = (1-y^2)^2 T_{2(n-1)}(y)$$

$$T_n(y) = \cos(n \arccos y) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2y)^{n-2m},$$

(4.4.49)

kde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ se rovná $\frac{n}{2}$ pro n sudé a $\frac{n-1}{2}$ pro n liché. Dosadíme aproximaci (4.4.48) do funkcionálu (4.4.47) a integraci per partes zjednodušíme. Minimum vzhledem k α_n nalezneme tak, že derivací podle α_n ($n=1,2,\dots,N$) položíme rovnou nule (2.2.37). Užitím pomocné podmínky (4.4.47); tj. $\alpha_n = \alpha_n^{(0)}$ dostáváme homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\sum_{k=1}^N (A_{nk} - \nu B_{nk}) \alpha_k = 0, \quad n=1,2,\dots,N,$$

(4.4.50)

která má netriviální řešení jenom tehdy, jestliže ν jsou vlastní čísla (3.3.3.10) matice $C_{mk} = \sum_{n=1}^N B_{mn}^{-1} A_{nk}$, kde B_{mn}^{-1} je inverzní matice k matici B_{mn} . Po výpočtu inverzní matice (např. L, U rozkladem, Ralston, 1978) nalezneme všechna vlastní

čísla matice C_{nk} (např. Jacobiovou metodou (Wilkinson, Reinsch, 1971)). Koeficienty uvedených matic nalezneme buď analytickou nebo numerickou integrací

$$A_{nk} = I_{nk}^{(2)} + 2k^2 I_{nk}^{(1)} + k^4 I_{nk}^{(0)} + ik \operatorname{Re} (k^2 J_{nk}^{(0)} + J_{nk}^{(1)} + J_{nk}^{(2)})$$

$$B_{nk} = ik \operatorname{Re} (I_{nk}^{(1)} + k^2 I_{nk}^{(0)}) , \quad (4.4.51)$$

kde

$$I_{nk}^{(0)} = \int_{-1}^1 \psi_n \psi_k dy , \quad J_{nk}^{(0)} = \int_{-1}^1 U \psi_n \psi_k dy ,$$

$$I_{nk}^{(1)} = \int_{-1}^1 D \psi_n D \psi_k dy , \quad J_{nk}^{(1)} = \int_{-1}^1 DU \psi_n \psi_k dy ,$$

$$I_{nk}^{(2)} = \int_{-1}^1 D^2 \psi_n D^2 \psi_k dy , \quad J_{nk}^{(2)} = - \int_{-1}^1 U \psi_n D^2 \psi_k dy .$$

Konkrétní numerické výpočty (Platten et al., 1974) ukázaly, že je třeba počítat minimálně s dvojnásobnou přesností (lépe s čtyřnásobnou, tj. 28 platných čísel) při aproximaci s $N = 20$. Za těchto podmínek bylo získáno kritické Reynoldsovo číslo ^{4.11)} Poiseuillova proudění s přesností

$$5772,22 < \operatorname{Re}_{\text{krit}} < 5772,23 \quad \text{pro} \quad k = 1,02056. \quad (4.4.52)$$

Oblast stability v rovině (k, Re) je uvedena na obr. 4.13b). Vzhledem k tomu, že $k = \frac{2\pi}{\ell}$ je vidět, že nestabilní se stávají poruchy (4.4.42) s vlnovou délkou $\ell_{krit} \sim 6,3$, tedy více než je dvojnásobná šířka kanálu. Z tvaru oblasti nestability plyne, že s rostoucím Re se poruchy nejkratší vlnové délky utlumí a nestabilní jsou poruchy s dlouhou vlnovou délkou. Pro limitní případ $Re \rightarrow \infty$ se tlumí všechny poruchy a tekutina se chová jako nevazká. Horní křivka na obr. 4.13b) má průběh $k \sim Re^{-\frac{1}{11}}$ a dolní $k \sim Re^{-\frac{1}{3}}$ při frekvencích $\omega \sim k^3$. Stejně závěry plynou i z energetických úvah; viz následující kapitulu.

4.12)

Experimentální hodnota Re je pro technické trubky s obvyklou drsností mnohem nižší 2000- 2350 (Hibš a kol., 1960).

4.4.4 Kvalitativní vlastnosti plně vyvinuté turbulence

Předpokládejme, že v nějaké oblasti s charakteristickým rozměrem L je turbulentní proudění. Velikost rychlosti tekutiny $v(x^i, t)$ v nějakém pevném bodě x^i , v čase t , se představíme jako superpozici flukтуаční složky v' a střední rychlosti \bar{v} (Landau, Lifšic, 1986).

Fluktuace rychlosti si rozdělíme podle amplitudy na

- velké s nízkou frekvencí $\frac{\bar{v}}{L}$ a s velkou částí celkové kinetické energie
- malé s vysokou frekvencí $\frac{v'_e}{\ell}$ pro velikost turbulentního útvaru (např. víru) charakteristického rozměru $\ell \ll L$ s velikostí pulzace v'_e . Souhrnná kinetická energie těchto pulzací je značně menší.

Vzájemná relace setrvačných a vazkých sil plyne z rovnice bilance hybnosti (4.4.23). Setrvačné síly převládají pro $Re \rightarrow \infty$ a vazké pro $Re \rightarrow 0$. Účinek obou sil na proudění je srovnatelný pro $Re \sim 1$, takže je v těchto případech vázána velikost charakteristického rozměru poruchy a velikost viskozity při dané rychlosti proudu. Je pak zřejmé, že velké fluktuace, které mají měřítko srovnatelné s L nedisipují v důsledku molekulární kinematické viskozity $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (I.7.5.20), protože $Re = \frac{\Delta \bar{v} \cdot L}{\nu} \rightarrow \infty$. Zde jsme $\Delta \bar{v}$ označili střední rychlost pohybu rozpadajících se velkých pulzací (např. víry v blízkém úplavu). Naopak pro malé pulzace v'_e s rozměrem ℓ se rozpadají (disipují) v důsledku vazkosti ν jestliže platí

$$Re_e = \frac{v_e' \cdot l}{\nu} \approx 1, \quad \nu \sim v_e' \cdot l. \quad (4.4.53)$$

Chceme-li vyjádřit i rozpad velkých vírů zavedeme tzv. turbulentní kinematickou viskozitu ν_{turb} vztahem

$$Re_{turb} = \frac{\Delta \bar{v} L}{\nu_{turb}} \approx 1, \quad \nu_{turb} \sim \Delta \bar{v} L. \quad (4.4.54)$$

Definujeme-li Reynoldsovo číslo jako $Re = \frac{\Delta \bar{v} \cdot L}{\nu}$ nalezneme vzhledem k (4.4.53) a (4.4.54) vztah

$$\frac{\nu_{turb}}{\nu} \sim \frac{\Delta \bar{v} L}{\nu} = Re, \quad (4.4.55)$$

takže turbulentní viskozita roste s Re . Pro případy plně vyvinuté izotropní homogenní turbulence je $Re \gg Re_{krit}$ (viz např. (4.4.52)) a turbulentní viskozita je mnohonásobně větší než molekulární.

Obrátíme nyní pozornost ke vztahu ((4.4.7)*, který vyjadřuje, že disipace kinetické energie je rovna produkci vnitřní energie (vzrůst teploty). Přitom je velikost disipace kinetické energie způsobena turbulentní viskozitou (4.4.54) a produkce vnitřní energie viskozitou molekulární (4.4.53). Její velikost je podle vztahu (4.4.44) přibližně rovna

$$-\sigma \left(\frac{v^2}{2} \right) = \sigma(u) \sim \nu_{turb} \left(\frac{\Delta \bar{v}}{L} \right)^2 \sim \nu \left(\frac{v_e'}{l} \right)^2. \quad (4.4.56)$$

Vyloučením viskozity ν podle (4.4.53) dostáváme známý Kolmogorovův-Obochorovův zákon

$$v'_\ell \sim (\sigma(u) \cdot \ell)^{\frac{1}{3}} \quad (4.4.57)$$

pro velikost turbulentních fluktuací v'_ℓ o velikosti ℓ .

Velikost turbulentních útvarů ℓ , které se rozpadají (disipují) v důsledku molekulární viskozity ν jsou charakterizovány podmínkou (4.4.53). Pomocí (4.4.57) lze tuto velikost vyjádřit jako

$$\ell = \ell_0 \sim \left(\frac{\nu^3}{\sigma(u)} \right)^{\frac{1}{4}} \sim \frac{L}{Re^{\frac{3}{4}}} \quad (4.4.58)$$

a nazýváme ji Kolmogorovova disipační délka.

Shrneme-li výše uvedené úvahy můžeme přesněji specifikovat počáteční rozdělení fluktuací. Velké fluktuace, tzv. oblast energie je charakterizována intervalem $\ell_0 \ll \ell \ll L$ a pro ni platí uvedená, tzv. Kolmogorovova teorie turbulence. Malé jsou ty fluktuace, pro které platí $\ell \leq \ell_0$ jde o tzv. oblast disipace.

Zavedeme vlnové číslo fluktuace $k \sim \frac{1}{\ell}$ a nechť je $E(k)dk$ kinetická energie pulsací v jednotce hmotnosti tekutiny v intervalu dk . Potom můžeme vzhledem k (4.4.57) psát

$$E(k) \sim \frac{(v'_\ell)^2}{\Delta k} \sim \sigma^{\frac{2}{3}}(u) \cdot k^{-\frac{5}{3}} \quad \text{resp.}$$

$$\int_k^\infty E(k) dk \sim \left(\frac{\sigma(u)}{k} \right)^{\frac{2}{3}} \sim (v'_\ell)^2 \quad (4.4.59)$$

a veličinu $E(k)$ interpretujeme jako rozložení energie fluktuací v závislosti na vlnové délce či frekvenci (při $\omega \sim \sqrt{k}$).

Jestliže je $k_0 \sim \frac{1}{l_0}$, pak rozsah mezi největším vlnovým číslem a nejmenším vlnovým číslem turbulence je podle (4.4.57) $\frac{1}{L} < k < \frac{Re^{3/4}}{L}$.

Závěrem uvedeme pro ilustraci některé horní odhady velikosti fraktální dimenze podivného atraktoru d pro Navierovy-Stokesovy rovnice (4.4.2). Tyto výsledky lze odvodit metodami kap. 4.3, přičemž kvalitativní závislost tohoto odhadu se vyjadřuje poměrem

$\frac{L}{l_0}$. Podle Temama (1985) platí, že v případě trojrozměrného proudění pro dimenzi d platí $d \leq \text{konst} \left(\frac{L}{l_0}\right)^3$.

Analogicky pro dvourozměrné nestlačitelné proudění je $d \leq \text{konst} \cdot Re^{\frac{4}{3}}$.

4.5 Stabilita přenosu tepla

Vyšetřování přestupu tepla v tekutinách vystupuje do popředí v řadě technických problémů, např. při ohřevu tekutin (varu), při chlazení a také při studiu zemské atmosféry a při vývoji metod pro meteorologické předpovědi. Experimentálně tento problém studoval již v r. 1901 M. Bénard a jeho teoretickou analýzu provedl Lord Rayleigh v r. 1916 (viz např. Chadrasekhar, 1961; Lin 1955; Glansdorff, Prigogine, 1971).

Nejvíce zajímavá je situace, kdy přestup tepla vedením (kondukcí) přejde k konvektivní a utvoří se nová, relativně stabilní struktura vírů v buňkách. Tuto vířovou strukturu můžeme snadno sami pozorovat při intenzivním varu slabé vrstvy vody v dostatečně široké nádobě. Tento jev se nazývá Bénardova nestabilita.

Teoretické studium Bénardovy nestability je prováděno v zásadě dvěma způsoby. Jednak linearizací výchozích rovnic (Rayleigh, 1916 - viz kap. 4.5.2) a jednak vytvořením nelineárního modelu a studiem jeho vlastností (Lorentz, 1963 - viz kap. 4.5.3). Zvláště druhý postup je velmi perspektivní a je intenzivně v současné době studován. Ukazuje se, že i tento jev lze popisovat metodami teorie disipativních dynamických systémů, jejichž limitním chováním je chování chaotické.

4.5.1 Přenos tepla tekutinou. Formulace problému

Budeme předpokládat Newtonovskou tekutinu, která se nachází mezi dvěma stěnami, kde spodní stěna ($z=0$) je zahřívána, viz obr. 4.14a). Uvažujme, že hustota tekutiny ρ závisí pouze na teplotě T podle vztahu

$$\delta\rho = -\frac{\partial\rho}{\partial T} \delta T, \quad \text{resp. } \rho = \rho_0 [1 - \beta\alpha(T - T_0)], \quad (4.5.1)$$

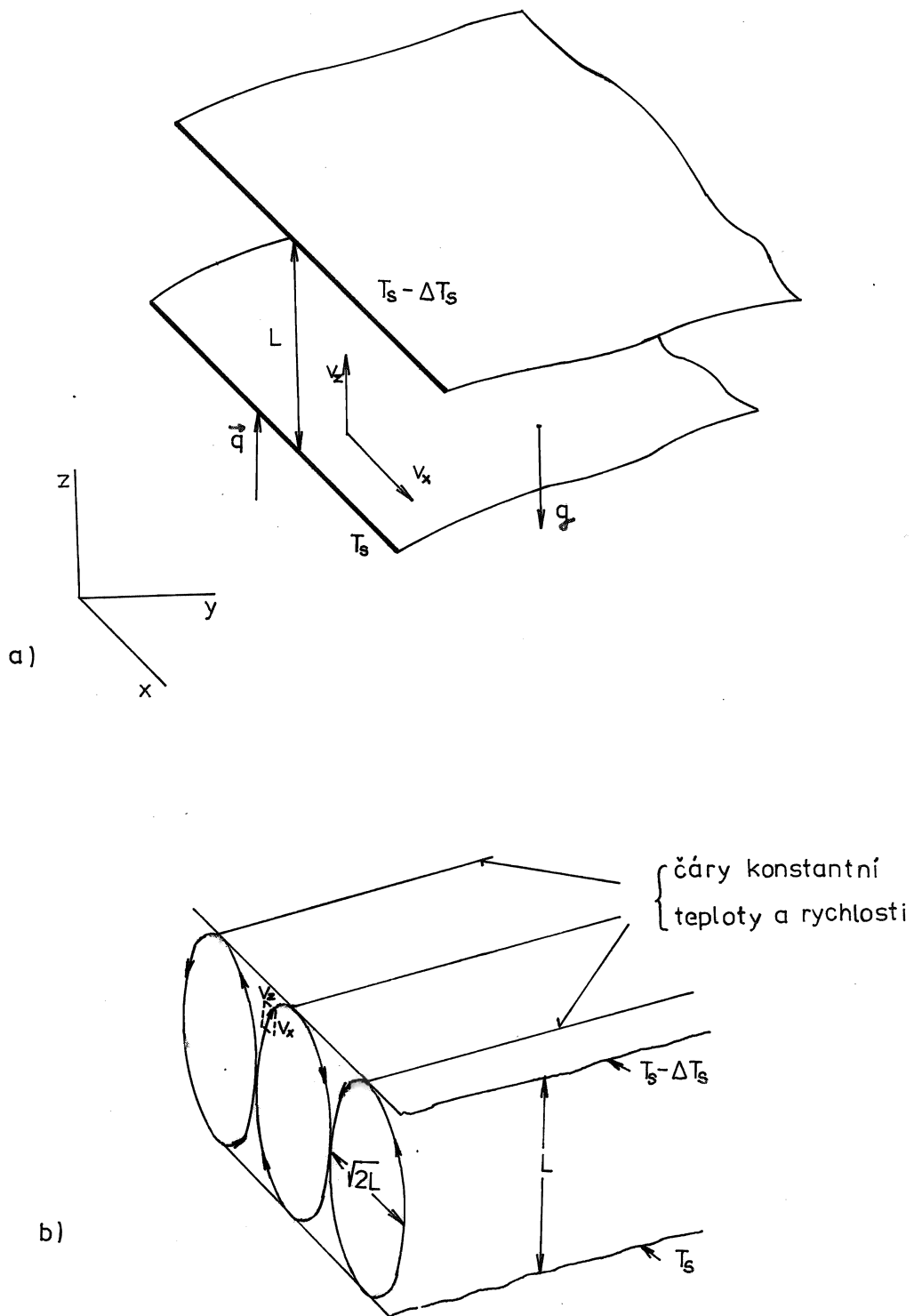
kde $\delta\rho = \rho - \rho_0$, $\delta T = T - T_0$ jsou odchylky od stacionárních hodnot ρ_0, T_0 a kde $\beta\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T} \right)_p$ je koeficient objemové roztažnosti (I.6.3.6)₂. V důsledku změny hustoty tekutiny se uplatní i vliv gravitace, takže do rovnice bilance hybnosti (4.4.2) zahrneme i objemovou sílu $\rho_0 \mathbf{f} = (0, 0, -g\delta\rho) = (0, 0, \beta\alpha g \rho_0 \delta T)$.

→ Vycházíme z toho, že relativní změny hustoty $\frac{\dot{\rho}}{\rho_0}$ jsou velmi malé, takže rovnice bilance hmotnosti (4.4.1) má tvar

$$\frac{\partial v^l}{\partial x^l} = 0, \quad (4.5.2)$$

odpovídající nestlačitelné tekutině. Díky tomu, je bilance hybnosti (4.4.2) rovna

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^l \frac{\partial v_i}{\partial x^l} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x^i} = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 v_i}{(\partial x^l)^2} + f_i. \quad (4.5.3)$$



Obr. 4.14

Přenos tepla v tekutině v gravitačním poli - Bénardův problém

a) teplo q zahřívá spodní stěnu

b) Lorentzův model nestabilního přenosu tepla pro případ volných hranic

V rovnici bilance energie (4.4.6) zanedbáváme hustotu produkce vnitřní energie (4.4.7) způsobenou viskozitou. Za předpokladu kaloricky dokonalé tekutiny (tj. $\delta u = c_v \delta T$, kde c_v je specifické teplo při konstantním objemu (I.6.1.6)) má rovnice energie tvar

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} + v^l \frac{\partial T}{\partial x^l} = \frac{\lambda}{\rho_0 c_v} \frac{\partial^2 T}{(\partial x^l)^2} \quad (4.5.4)$$

Zjednodušené rovnice (4.5.2), (4.5.3) a (4.5.4) se nazývají Boussinesquova aproximace Navierových-Stokesových rovnic. Přijatelnost této aproximace je dána především přijatelností předpokladů (4.5.1) a (4.5.2), které lze přepsat takto

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\alpha T_0 \left(\frac{\dot{T}}{T_0} \right) = -\frac{\partial v^l}{\partial x^l} = 0. \quad (4.5.5)$$

Tudíž $3\alpha T_0$ musí být malé. Pro dokonalý plyn $p = \rho RT$ (I.7.5.19) platí $3\alpha T_0 = 1$ a pro kapaliny (I.7.5.15) je situace mnohem příznivější (např. pro vodu při $T_0 = 373^\circ\text{K}$ je $3\alpha T_0 \approx 0,0515$). Veličina $\frac{\dot{T}}{T_0}$ se zvětšuje s klesající teplotou, takže při nízkých teplotách ($T_0 \rightarrow 0$) ztrácí Boussinesquova aproximace své oprávnění.

Rovnice (4.5.2) až (4.5.4) budeme řešit pro uspořádání na obr. 4.14. Stacionární řešení těchto rovnic je

$$v_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad p_0 = \text{konst}, \quad T_0 = T_s - \frac{\Delta T_s}{L} z, \quad (4.5.6)$$

kde ΔT_s je rozdíl teplot dolní a horní stěny a L je jejich vzdálenost. V tomto stavu dochází ke stacionárnímu přenosu tepla vedením podle rovnice $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$.

Na stacionární řešení (4.5.6) superponujeme poruchy v'_i, p', T' a hledáme řešení ve tvaru

$$v_i = v'_i, \quad p = p_0 + p', \quad T = T_0 + T'. \quad (4.5.6)_1$$

Dosazením do výchozích rovnic (4.5.2) až (4.5.4) a zanedbáním veličin malých vyššího řádu dostáváme lineární rovnice pro v'_i, p', T' . Nalezením vlastních čísel (metodami uvedenými v kap. 4.2) zjistíme oblasti stabilního (konduktivního) a nestabilního (s přirozenou konvekci) přenosu tepla.

Největší gradient teploty je ve směru osy $z = x^3$ takže lze přibližně psát $v^l \frac{\partial T}{\partial x^l} \doteq v^3 \frac{\Delta T_s}{L}$ a rovnice energie (4.5.4) se zjednoduší na rovnici

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = v'^3 \frac{\Delta T_s}{L} + \frac{\lambda}{\rho_0 c_v} \frac{\partial^2 T'}{(\partial x^l)^2}. \quad (4.5.7)$$

V ní vystupují jen dvě neznámé v'^3 a T' . V rovnici (4.5.3) vyloučíme p (aplikací operace $\text{rot} \cdot \text{rot}$) a soustředíme se jen na složku v'^3 . Po řadě úprav (4.13) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 v'^3}{(\partial x^l)^2} = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2}{(\partial x^l)^2} \left(\frac{\partial^2 v'^3}{(\partial x^k)^2} \right) + 3\alpha g \left(\frac{\partial^2 T'}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 T'}{(\partial x^2)^2} \right) \quad (4.5.8)$$

($l, k = 1, 2, 3$).

Pro rovnici (4.5.2) platí

$$\frac{\partial v^l}{\partial x^l} = 0. \quad (4.5.9)$$

Rovnice (4.5.7) až (4.5.9) popisují přenos tepla i v nestacionárním případě a požadujeme, aby vyhovovaly okrajovým podmínkám

$$v_i' = 0 \quad (i=1,2,3), \quad \frac{\partial v^3}{\partial x^3} = 0, \quad T' = 0 \quad \text{pro } x^3=0 \text{ a } x^3=L. \quad (4.5.10)$$

Je-li v $x^3=L$ volná hladina (volná hranice) pak podmínku

$$\frac{\partial v^3}{\partial x^3} = 0 \quad \text{nahradíme podmínkou } \frac{\partial^2 v^3}{(\partial x^3)^2} = 0.$$

4.13)

Konvektivní člen $v^l \frac{\partial v_i}{\partial x^l}$ v rovnici bilance hybnosti (4.5.3) upravíme pomocí vektoru vířivosti (I.3.8.3)

$$w^i = (\text{rot } \underline{v})^i = e^{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x^j}$$

s použitím identity

$$e^{ijk} e_{rsk} = \delta_r^i \delta_s^j - \delta_s^i \delta_r^j \quad (\text{viz pozn. (I.3.8)}). \quad \text{i)}$$

Tudíž

$$\begin{aligned} v^l \frac{\partial v_i}{\partial x^l} &= \delta_e^r \delta_i^k v^l \frac{\partial v_k}{\partial x^r} = (\delta_e^r \delta_i^l - \delta_i^r \delta_e^l) v^l \frac{\partial v_k}{\partial x^r} + \delta_i^r \delta_e^k v^l \frac{\partial v_k}{\partial x^r} = \\ &= e^{rkt} e_{lit} v^l \frac{\partial v_k}{\partial x^r} + v^k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = -e_{ilt} v^l w^t + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{v^k v_k}{2} \right). \quad \text{ii)} \end{aligned}$$

Tuto identitu můžeme také zapsat v operátorovém tvaru

$$(\underline{v} \cdot \text{grad}) \underline{v} = \text{grad} \left(\frac{(\underline{v})^2}{2} \right) - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v},$$

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \left(i^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \varphi + i^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \varphi + i^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \varphi \right), \quad \text{rot} \underline{a} = \nabla \times \underline{a}. \quad \text{iii)}$$

Uvážíme ještě následující identity plynoucí z definic diferenciálních operátorů, viz (I.D.1.2), (φ je skalár, \underline{a} je vektor)

$$e^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} e_k^{rs} \frac{\partial a_s}{\partial x^r} = (\delta^{ir} \delta^{js} - \delta^{is} \delta^{jr}) \frac{\partial^2 a_s}{\partial x^i \partial x^r} = \delta^{ir} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right) - \frac{\partial^2 a^i}{(\partial x^r)^2},$$

$$\text{resp.} \quad \text{rot}(\text{rot} \underline{a}) = \text{grad} \text{div} \underline{a} - \text{div} \text{grad} \underline{a} \quad \text{iv)}$$

$$e^{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} = 0, \quad \text{resp.} \quad \text{rot} \text{grad} \varphi = 0 \quad \text{vi)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} e^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} = 0, \quad \text{resp.} \quad \text{div} \text{rot} \underline{a} = 0. \quad \text{vii)}$$

Rovnici (4.5.3) přepíšeme s ohledem na iii) do tvaru

$$\text{grad} \left[\frac{(\underline{v})^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right] - \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \frac{\mu}{\rho_0} \text{div} \text{grad} \underline{v} + \underline{f} - \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \quad \text{vii)}$$

a aplikujeme na ni operaci $\text{rot}(\text{rot} \text{iv})$. První člen na levé straně bude s ohledem na identitu v) roven nule a druhý člen je $\text{rot}(\text{rot}(\underline{v} \times \underline{w}))$.
Uvážíme, za jakých podmínek je

druhý člen roven nule. Předpokládejme, že se cirkulace podél každé křivky v tekutině zachovává, pak musí být splněna podmínka

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{rot}(w \times v) = 0$$

viz (I.3.10.19), ze které snadno odvodíme

$$\text{rot}(\text{rot}(v \times w)) = \frac{\partial \text{rot } w}{\partial t}. \quad \text{viii)}$$

Tento předpoklad však nemusí platit zcela obecně. Uvažovaný člen bude tudíž nulový, jestliže rotace vířivosti nebude záviset v žádném bodě tekutiny (nejde o materiálový bod) explicitně na čase, čili $\frac{\partial \text{rot } w}{\partial t} = 0$.

Pravou stranu rovnice vii) upravíme tak, že na ní aplikujeme operátory z pravé strany identity iv). S ohledem na rovnici bilance hmoty (4.5.9) a tvar vnější objemové síly f dostáváme konečný tvar rovnice (4.5.8) (platí $\text{div grad} = \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$).

4.5.2 Hranice stability přenosu tepla, Bénardova nestabilita

Z matematického hlediska jde o nalezení stabilního řešení rovnic (4.5.7) a (4.5.8). K tomu je třeba nalézt vlastní čísla těchto lineárních operátorů.

Předpokládejme řešení T', v'^3 ve tvaru postupných rovinných vln

$$\begin{aligned} v' &= \hat{v}(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \omega t] \\ T' &= \hat{T}(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \omega t] \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

(souřadnicový index jsme vypustili a značíme $x^1=x, x^2=y, x^3=z$)

Frekvence $\omega = \omega_{re} + i\omega_{im}$ je obecně komplexní veličina a

$$k = [(k_x)^2 + (k_y)^2]^{\frac{1}{2}} \quad \text{je vlnové číslo. Dosazením vztahů (4.5.11)}$$

do rovnic (4.5.8) a (4.5.7) dostáváme

$$\omega \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \hat{v} = \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 \hat{v} - 3\alpha g k^2 \hat{T} \quad (4.5.12)$$

$$\omega \hat{T} = \frac{\Delta T_s}{L} \hat{v} + \frac{\lambda}{\rho_0 c_v} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \hat{T} \quad (4.5.13)$$

s okrajovými podmínkami (4.5.10)

$$\hat{T} = \hat{v} = 0 \quad \text{pro } z=0 \quad \text{a } z=L \quad (4.5.14)$$

a

$$\frac{d\hat{v}}{dz} = 0 \quad \text{pro pevnou stěnu} \quad (4.5.15)_1$$

nebo

$$\frac{d^2\hat{v}}{dz^2} = 0 \quad \text{pro volnou hranici.} \quad (4.5.15)_2$$

Pro jednoduchost zavedeme bezrozměrné veličiny

$$\xi = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{k^2 \rho_0}{\mu} t \quad (4.5.16)$$

$$\gamma = kL, \quad \sigma = \frac{\rho_0 L^2}{\mu} \omega \quad (4.5.17)$$

kde (4.5.16) jsou bezrozměrné souřadnice a čas, a (4.5.17) jsou bezrozměrné vlnové číslo a frekvence. V nich mají rovnice (4.5.12) (4.5.13) tvar

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \gamma^2\right)\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \gamma^2 - \sigma\right)\hat{v} = \frac{3\rho_0 \alpha g L^2 \gamma^2}{\mu} \hat{T} \quad (4.5.18)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \gamma^2 - \frac{Pr}{\alpha} \sigma\right)\hat{T} = -\left(\frac{\Delta T_s \rho_0 c_v}{\lambda} L\right)\hat{v}, \quad (4.5.19)$$

kde $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ označuje Prandtlovo číslo a $\alpha = \frac{c_p}{c_v}$.

Hranice stability přenosu tepla je dána podmínkou $\omega_{re}=0$, resp. $\sigma_{re}=0$. Abychom mohli rovnice (4.5.18), (4.5.19) dále zjednodušit je třeba dokázat, že i $\sigma_{im}=0$, takže na hranici stability platí $\sigma=0$. Tuto vlastnost nebudeme dokazovat (je dokázána např. v Lin, 1955), ale budeme ji předpokládat, neboť i v případě, že $\sigma_{im} \neq 0$ dochází (pro $Pr=\infty$) pouze ke změně fáze postupných vln (4.5.11) a ke změně amplitudy poruch nedochází. Tudíž pro hranici stability ($\sigma=0$) mají rovnice přenosu tepla konečný tvar

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \gamma^2\right) \hat{v} = \frac{3\rho_0^2 \alpha g L^2 \gamma^2}{c^2} \hat{T} \quad (4.5.20)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \gamma^2\right) \hat{T} = -\frac{\Delta T_0 \rho_0 c_v L}{\lambda} \hat{v} \quad (4.5.21)$$

a vyloučením \hat{T} dostáváme konečnou rovnici

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \gamma^2\right)^3 \hat{v} = -Ra \gamma^2 \hat{v} \quad (4.5.22)$$

pro velikost amplitudy poruchy rychlosti. zde $Ra = \frac{3\alpha g \rho_0^2 c_v L^3 \Delta T_s}{\lambda \mu}$

je Rayleighovo číslo, které charakterizuje přenos tepla vedením. Okrajové podmínky (4.5.14) jsou

$$\hat{v} = 0, \quad \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \gamma^2\right)^2 \hat{v} = 0, \quad \text{pro } \xi=0 \text{ a } \xi=1 \quad (4.5.23)$$

a vztahy (4.5.15). Stejná rovnice může být odvozena i pro průběh amplitudy teploty \hat{T} .

Řešení rovnice (4.5.22) s okrajovými podmínkami (4.5.23) a (4.5.15) je problémem vlastních hodnot pro Ra . Cílem je nalézt takové velikosti Ra, γ , tzv. vlastní hodnoty, pro které existuje nenulové řešení rovnice (4.5.22) splňující potřebné okrajové podmínky. Řešení předpokládáme ve tvaru řady

$$\hat{v} = \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{a}_n \cos(\pi n \xi) + \hat{b}_n \sin(\pi n \xi)] \quad (4.5.24)$$

(viz poznámku 4.3) vztah x) protože goniometrické funkce vyhovují rovnici (4.5.22), resp. jsou vlastními funkcemi tohoto diferenciálního operátoru. Koeficienty \hat{a}_n, \hat{b}_n budeme hledat tak, aby řešení vyhovovalo okrajovým podmínkám (4.5.23), (4.5.15). Dosazením rozvoje do rovnice (4.5.22), tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{[(\pi n)^2 + \gamma^2]^3 - Ra \gamma^2\} [\hat{a}_n \cos(\pi n \xi) + \hat{b}_n \sin(\pi n \xi)] = 0 \quad (4.5.25)$$

dostáváme soustavu homogenních lineárních algebraických rovnic pro $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_2, \dots$. Z podmínky, že determinant této soustavy musí být nula, určíme jejich vazbu s parametry úlohy Ra, γ . Obecnou metodu řešení problému vlastních hodnot diferenciálních rovnic viz např. Tichonov, Samarskij, 1955; Vladimirov, 1967. S úspěchem lze rovněž použít metodu lokálního potenciálu jako v kap.4.4.3 (Legros, Platten, 1978).

Omezíme se na nejjednodušší případ, kdy obě hranice jsou volné (podmínka 4.5.15)₂. Rovnici (4.5.22) a všem potřebným

okrajovým podmínkám (4.5.23), (4.5.15) vyhovuje funkce

$$\hat{v} = \hat{b}_n \sin(\pi n \xi), \quad (4.5.26)$$

bez jakéhokoliv omezení na koeficient \hat{b}_n . Dosazením do (4.5.22) dostáváme totiž rovnici (4.5.25) ve tvaru

$$[(\pi n)^2 + \gamma^2]^3 - Ra \gamma^2 = 0 \quad \text{pro } n=1,2,\dots \quad (4.5.27)$$

odkud pro základní nód ($n=1$) plyne

$$Ra = \frac{(\pi^2 + \gamma^2)^3}{\gamma^2}. \quad (4.5.28)$$

Získali jsme tak vztah pro hodnotu Reyleighova čísla v závislosti na vlnovém čísle γ (4.5.17)₁.

Nejnižší hodnota Ra při níž dochází ke ztrátě stability přenosu tepla vedením a nastupuje přenos tepla konvekcí se nazývá kritické Rayleighovo číslo a značíme ho Ra_{krit} . Pro případ volné hranice určíme minimum ze vztahu (4.5.28), tj. z podmínky

$$\frac{\partial Ra}{\partial \gamma^2} = \frac{(\pi^2 + \gamma^2)^2}{\gamma^4} (2\gamma^2 - \pi^2) = 0, \quad (4.5.29)$$

resp. $\gamma_{\text{krit}}^2 = \frac{\pi^2}{2}$. Takže kritické hodnoty Ra a vlnové délky l_{krit} jsou

$$\begin{aligned} Ra_{\text{krit}} &= \frac{27}{4} \pi^4 = 6575 \\ l_{\text{krit}} &= \frac{2\pi L}{\gamma_{\text{krit}}} = 2^{\frac{3}{2}} L. \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

Základní mód zkoumané nestability je schématicky znázorněn na obr. 4.14b).

V případě pevných stěn (4.5.15)₁ lze uvedeným způsobem nalézt hodnoty (Chandrasekhar, 1961; Lin, 1955)

$$Ra_{krit} = (2\pi)^4 \cdot 1,0957 = 1707,7$$

$$l_{krit} = 2,016 L. \quad (4.5.31)$$

Podmínka (4.5.25) vede v tomto případě na soustavu lineárních homogenních rovnic.

Stejně jako v případě Poiseuillova proudění v kap. 4.4.3 jsme metodou lineárního modelu (kap. 4.2) našli hranice stability přenosu tepla v tekutině. Zjistili jsme, že "spouštěcí mechanismus" nestability je opět v disipativních procesech, tj. viskozitě a tepelné vodivosti, samozřejmě při vzniku konvektivního pohybu tekutiny. Tento pohyb je tentokrát vyvolán teplotní roztažností tekutiny (4.5.1) a vlivem gravitačního pole a nazývá se někdy přirozenou konvekcí. Systematickým experimentálním výzkumem přenosu tepla v tekutinách v závislosti na Rayleighově čísle Ra a Prandtlově čísle Pr lze zjistit v zásadě pět oblastí chování tekutiny (viz obr. 4.15). Experimentálně zjištěné hodnoty Ra_{krit} se blíží hodnotám mezi (4.5.30) a (4.5.31). Vyjimkou jsou experimenty, kdy zahříváný povrch je pórovitý. Potom Ra_{krit} silně klesá a intenzivní nestacionární přestup tepla nastává již při

$$Ra_{krit}^* \geq 4\pi^2.$$

Zde je Rayleighovo číslo

$$Ra^* = \frac{3\alpha g \rho_0^2 c_V L^3 \Delta T_0 F}{4\lambda^*},$$

kde λ^* je tepelná vodivost pórézního prostředí považovaného v teorii za fiktivní tekutinu a F zahrnuje poměr

tloušťky pórezního prostředí vůči vrstvě tekutiny, bývá 10^{-5} - 10^{-8} , viz např. Bernard, Caltagirone (1978).

pr 4.15

Poznámka:

Stejnou rovnicí jako je rovnice (4.5.22) s okrajovými podmínkami pro pevné stěny je popsáno tzv. Couettovo proudění. Je to proudění nestlačitelné vazké tekutiny mezi dvěma válcovými stěnami s poloměry $R_1 < R_2$ otáčejícími se ve stejném smyslu úhlovými rychlostmi Ω_1, Ω_2 . K nestabilitě proudového pole dochází pro

$$Ra_{krit} = -Ta_{krit} = 1707,7, \text{ kde}$$

$$Ta = -\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)^4 Re^2 \left(1 + \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) A,$$

$$A = \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 (\Omega_2 - 1)}{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1},$$

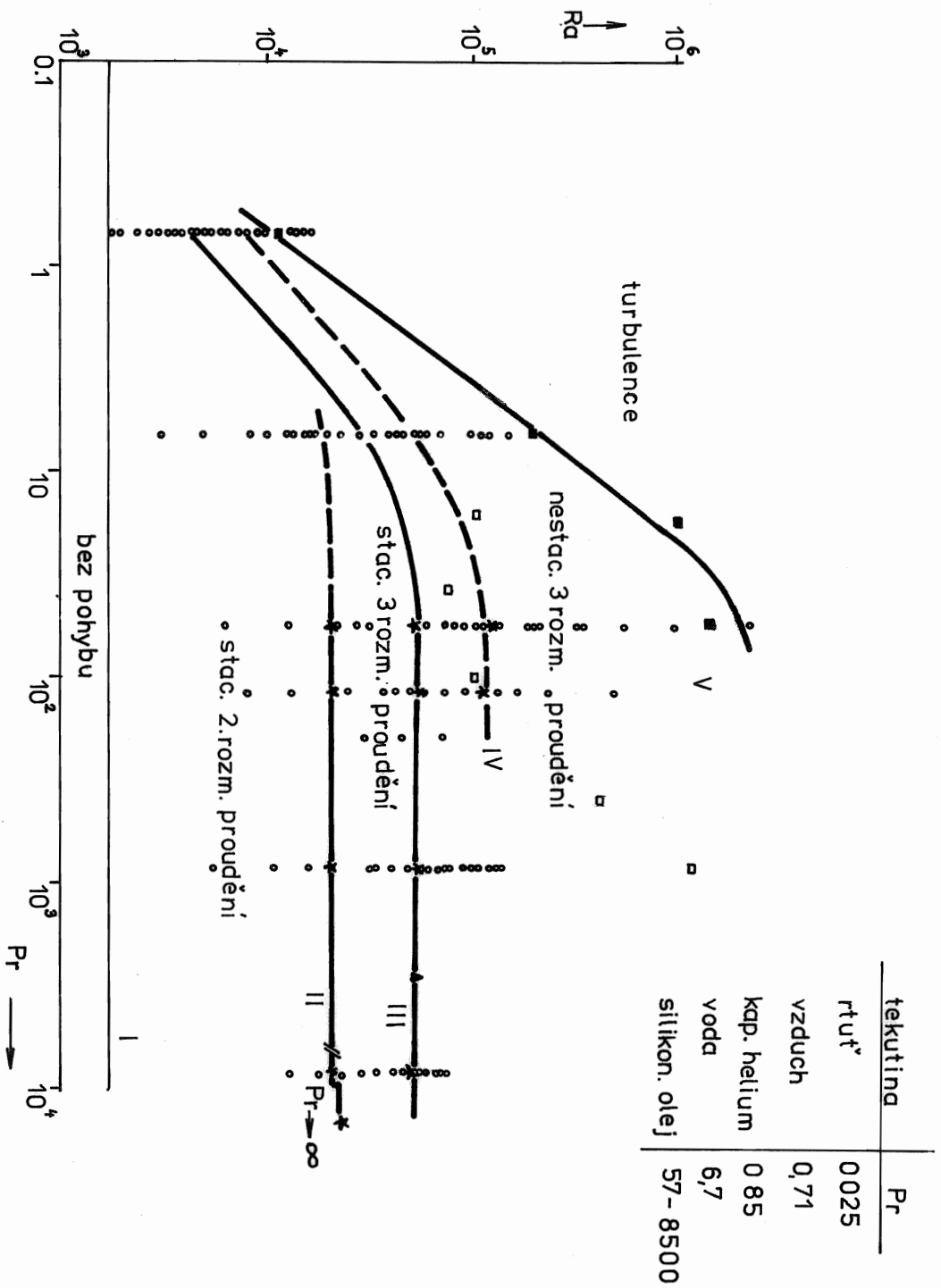
$$Re = \frac{\rho \Omega_1 R_1^2}{\mu}.$$

(4.5.32)

Charakter proudění mezi stěnami válců je stejný jako na obr.

4.14b), přičemž konvekce je vybuzena odstředivou silou (Lin, 1955).

Tato nestabilita byla zkoumána jak experimentálně, tak i teoreticky již v roce 1923 G.I. Taylorem a proto ji nazýváme Taylorovou nestabilitou.



Obr. 4.15

Text k obr. 4.15

Vlastnosti proudového pole při přenosu tepla v závislosti na Prandtlově a Rayleighově čísle (podle Krishnamurtiho (1970))

- ✱ bod přechodu (skoková změna Nu na obr. 4.17)
- nestacionární proudění (Rosby, Krishnamurti)
- turbulentní proudění
- ▲ přechod do nestacionárního proudění
- stacionární konvekce

Křivky I - V vyznačují kvalitativní změny v proudovém poli (oblasti přechodu), které jsou většinou doprovázeny skokovou změnou intenzity přenosu tepla.

4.5.3 Nestabilní přenos tepla. Lorentzův model

Za hranicí nestability již není možno popsat přenos tepla linearizovanými rovnicemi (4.5.7) až (4.5.9). I když je možno si představit pohyb tekutiny rozložený na jednotlivé módy, nejsou již tyto módy vzájemně nezávislé jako v linearizovaném případě, ale vzájemně se ovlivňují. Obecný postup odvození diferenciálních rovnic pro jednotlivé módy (tzv. Galerkinovská aproximace) je uveden na konci kap. 4.1.

Nejjednodušší a silně zidealizovaný model, který má ještě fyzikální význam byl odvozen E.N. Lorentzem v roce 1963. Tento model předpokládá, že přenos tepla je popsán Boussinesquovou aproximací a je pouze dvourozměrný (závislost jen na x, z). Uvažuje dále jen tři Fourierovy komponenty (tzv. módy) v rozvoji (4.1.24) ve tvaru:

- jeden mód proudové funkce $\psi(x, z, t)$, tak jak je znázorněn na obr. 4.14b), tj. s vlnovou délkou $(4.5.30)_2$. Rozměr buňky (víru) je L ve směru z a $\frac{\ell_{krit}}{2}$ ve směru x . Takovouto buňku nazýváme základní.
- jeden tepelný mód odpovídající základní buňce
- druhý tepelný mód s druhou harmonickou ve směru z . Tento mód přispívá ke střednímu toku tepla ve směru z , ale nemá žádnou periodicitu ve směru x a y .

Uvedeme odvození Lorentzova modelu tak, aby byl zřejmý jeho fyzikální obsah. Rovnici bilance hmotnosti splníme identicky zavedením proudové funkce $\psi(x, z, t)$. Jednotlivé složky rychlosti pak jsou

$$\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (4.5.33)$$

Rovnici bilance hybnosti (4.5.3) zapišeme ve tvaru (viz pozn. 4.13), vztah vii))

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} + \frac{\mu}{\rho_0} \text{div grad} \underline{v} + \underline{f} - \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \quad (4.5.34)$$

pro $\underline{f} = (0, 0, 3\alpha g \delta T)$, $\delta T = T - T_0$.

Aplikujeme-li na obě strany rovnice (4.5.34) operaci rot je levá strana nula (rot grad $\psi = 0$) a dostáváme s ohledem na (4.5.33) 4.14) rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x,z)} + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2(\nabla^2 \psi) + 3\alpha g \frac{\partial \delta T}{\partial x} \quad (4.5.35)$$

$$(\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}).$$

4.14)

Využijeme identity rot grad $\psi = 0$ viz pozn.4.13), vztah v) a z definice rot \underline{v} platí

$$\text{rot} \underline{v} = (0, -\nabla^2 \psi, 0), \quad \underline{v} \times \text{rot} \underline{v} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \nabla^2 \psi, 0, \frac{\partial \psi}{\partial z} \nabla^2 \psi \right),$$

$$\text{rot}(\underline{v} \times \text{rot} \underline{v}) = \left(0, \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x,z)}, 0 \right); \quad \text{rot} \underline{f} = \left(0, -3\alpha g \frac{\partial \delta T}{\partial x}, 0 \right) \quad 1)$$

Připomeneme definici jakobiánu, viz pozn. I.6.1)

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial x}. \quad \text{ii)}$$

Uvážíme-li dále, že $\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi$
(viz kap. I.D2.7) lze psát

$$\text{rot}(\nabla^2 \underline{v}) = \nabla^2(\text{rot } \underline{v}) = (0, -\nabla^2(\nabla^2 \psi), 0). \quad \text{iii)}$$

Dosazením vztahů i) a iii) do rovnice (4.5.34) máme hledanou rovnici (4.5.35).

Za stejných předpokladů přechází rovnice bilance energie (4.5.4) na rovnici pro změnu teploty $\delta T(x, z, t)$

(tj. $T = T_s - \frac{\Delta T_s}{L} z + \delta T$).

Po úpravě má výchozí tvar

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} = - \frac{\partial(\psi, \delta T)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T_s}{L} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\lambda}{\rho_0 c_v} \nabla^2(\delta T). \quad (4.5.36)$$

Okrajové podmínky formulujeme pouze na hranici $z=0$ a $z=L$,

kde budeme předpokládat, že hranici tvoří proudnice $\psi=0$.

Jde o podmínku ^{volné} hladiny, tj.

$$\psi=0, \quad \nabla^2 \psi=0, \quad \delta T=0 \quad \text{pro } z=0, z=L. \quad (4.5.37)$$

Rovnice (4.5.35), (4.5.36) se někdy nazývají rovnice Satzmannovy (1962). Popisují dvourozměrný přestup tepla za přítomnosti konvekce a jsou výchozí k odvození rovnic Lorentzova modelu.

Vyjdeme z Galerkinovské aproximace (viz konec kap. 4.1), která respektuje všechny tři výše uvedené předpoklady a okrajové podmínky (4.5.37), tj.

$$\psi(x, z, t) = \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \frac{\lambda \sqrt{2}}{\rho_0 c_V} v(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi \alpha x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (4.5.38)$$

$$\delta T(x, z, t) = \frac{Ra_{krit} \Delta T_s}{\pi Ra} \left[\sqrt{2} T_1(t) \cos\left(\frac{\pi \alpha x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) - T_2(t) \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \right], \quad (4.5.39)$$

kde $v(t), T_1(t), T_2(t)$ jsou pouze funkce času. $v(t)$ je úměrné intenzitě konvektivního pohybu a $T_1(t)$ je úměrné teplotnímu rozdílu mezi stoupajícím a klesajícím proudem. Jejich znaménka označují, že teplá tekutina stoupá a studená klesá. Veličina $T_2(t)$ je úměrná velikosti deformace vertikálního teplotního profilu od profilu lineárního (4.5.6)₃. Její kladná hodnota ukazuje, že teplotní gradient bude blízko hranic ($z=0, z=L$) větší. Vzhledem k tomu, že předpokládáme volné hranice, je kritické Rayleighovo číslo Ra_{krit} a kritická vlnová délka ℓ_{krit} dány vztahem (4.5.30) Odtud plyne i velikost příčného rozměru víru $\frac{\ell_{krit}}{2} = \sqrt{2} L$. Zavedeme bezrozměrnou veličinu $\alpha = L / (\ell_{krit} / 2) = \frac{\pi^2}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, takže lze psát $Ra_{krit} = \pi^4 \alpha^{-2} (1 + \alpha^2)^3$.

Rozvoje (4.5.38) a (4.5.39) dosadíme do výchozích rovnic (4.5.35) a (4.5.36). Použijeme obvyklé identity pro goniometrické

funkce, přičemž jiné kombinace těchto funkcí než jsou v rozvoji (4.5.38) a (4.5.39) vypustíme. Porovnáním odpovídajících členů dostáváme rovnice Lorentzova modelu

$$\frac{dv}{dt} = -Pr_v v + Pr_v T_1$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{Ra}{Ra_{krit}} v - T_1 - v T_2$$

$$\frac{dT_2}{dt} = v T_1 - b T_2 .$$

(4.5.40)

Vzhledem ke zjednodušení jsme zavedli bezrozměrný čas

$$\tau = \frac{\pi(1+a^2)\lambda t}{\rho_0 c_v L^2} \quad \text{a parametr} \quad b = \frac{4}{1+a^2} = \frac{8}{3} .$$

Prandtlovo číslo jsme zde zavedli vztahem $Pr_v = \frac{\mu c_v}{\lambda}$,

pro které platí $Pr_v = \frac{\mu c_v}{\lambda} = \frac{Pr}{\alpha}$.

V literatuře se většinou v 1. rovnici (4.5.40) užívá na místo Pr_v číslo Pr (pro nestlačitelné kapaliny platí $\alpha \doteq 1$).

Lorentzův model (4.5.40) lze interpretovat jako dobrý model přenosu tepla jen pro mírně nadkritické hodnoty Ra . Nelze však očekávat, že by řešení těchto rovnic v důsledku velkého zjednodušení odpovídalo řešení rovnic (4.5.35) a (4.5.36) i pro případy silné konvekce. Obecně se uznává, že Galerkinovská aproximace výchozích rovnic je dobrá, jestliže sama splňuje základní zákony bilance, v našem případě bilance y-ové složky vířivosti rot $v|_y$ a bilanci vnitřní energie (Horák, 1985). Dále je nutno poznamenat, že uvedené odvození rovnic (4.5.40) není jediné, a že lze tyto rovnice získat i jinými způsoby, např. jako rovnice pohybu vodního

kola (Sparrow, 1982). To současně znamená, že tento nelineární model, resp. dynamický systém, má obecnější fyzikální význam.

Časová změna fázového objemu $d\Omega = dv dT_1 dT_2$
je podle (4.1.19) rovna

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{dT_1}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial T_2} \left(\frac{dT_2}{dt} \right) = -(Pr + 1 + b) < 0. \quad (4.5.41)$$

Jde tudíž o disipativní dynamický systém, jehož stacionární stavy mohou tvořit množinu, která má vlastnosti podivného atraktoru a takový systém pak vykazuje chaotické chování, viz kap. 4.3.1.

Vlastnosti stacionárních bodů určíme metodou lineárního modelu viz kap. 4.2. Systém lineárních rovnic (4.2.5) má pro systém rovnic (4.5.40), při $Pr_v = Pr$ tvar

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{v}}{dt} &= -Pr \hat{v} + Pr \hat{T}_1 \\ \frac{d\hat{T}_1}{dt} &= \left(\frac{Ra}{Ra_{krit}} - T_2^{(s)} \right) \hat{T}_1 - v^{(s)} \hat{T}_2 \\ \frac{d\hat{T}_2}{dt} &= T_1^{(s)} \hat{v} + v^{(s)} \hat{T}_1 - b \hat{T}_2 \end{aligned} \quad (4.5.42)$$

kde $v^{(s)}, T_1^{(s)}, T_2^{(s)}$ jsou stacionární řešení rovnic (4.5.40). Zjistíme, že existuje jedno stacionární řešení bez konvekce $v^{(s)} = T_1^{(s)} = T_2^{(s)} = 0$ a charakteristická rovnice pro soustavu (4.5.42) je

$$(b + \lambda) \left[\lambda^2 + (Pr + 1)\lambda + Pr \left(1 - \frac{Ra}{Ra_{krit}} \right) \right] = 0. \quad (4.5.43)$$

Hranice stability nastává pro vlastní číslo $\lambda=0$ v případě $Ra = Ra_{krit}$, což je v souladu s Rayleighovým výsledkem (4.5.30).

Pro $Ra > Ra_{krit}$ existují ještě další dva stacionární stavy

$$v^{(s)} = T_1^{(s)} = \pm \sqrt{b \left(\frac{Ra}{Ra_{krit}} - 1 \right)}, \quad T_2^{(s)} = \frac{Ra}{Ra_{krit}} - 1, \quad (4.5.44)$$

pro něž charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 + (Pr + b + 1)\lambda^2 + \left(\frac{Ra}{Ra_{krit}} + Pr \right) b \lambda + 2Prb \left(\frac{Ra}{Ra_{krit}} - 1 \right) = 0. \quad (4.5.45)$$

Tato rovnice má pro $Ra > Ra_{krit}$ jeden záporný kořen a dva kořeny komplexně sdružené. Komplexní kořeny se stávají ryze imaginární, jestliže součin koeficientů $u\lambda^2$ a λ je roven konstantnímu členu, čili pro

$$Ra = Ra_{krit} \frac{Pr(Pr + b + 3)}{Pr - b - 1} = Ra_{krit} Pr \frac{3Pr + 17}{3Pr - 11} = Ra_T. \quad (4.5.46)$$

Za kritickou hodnotou Ra_T již stacionární konvekce (4.5.44) není stabilní. Jestliže je $Pr < b + 1 = \frac{11}{3}$, pak neexistuje žádné kladné Ra , pro které by platilo $Ra < Ra_T$, takže konvektivní proudění je stabilní, viz body S_1, S_2 na obr. 4.16b). Avšak pro $Pr > b + 1$ je konvektivní proudění (4.5.44)

nestabilní pro $Ra > Ra_T$ a jak E.N. Lorentz (1963) výpočtem na počítači ukázal, má toto řešení pravděpodobně chaotické chování. Vlastnosti Lorentzova modelu jsou souhrnně znázorněny na obr. 4.16a).

br. 4.16 →

Numerické řešení rovnic (4.5.40) v nestabilní oblasti

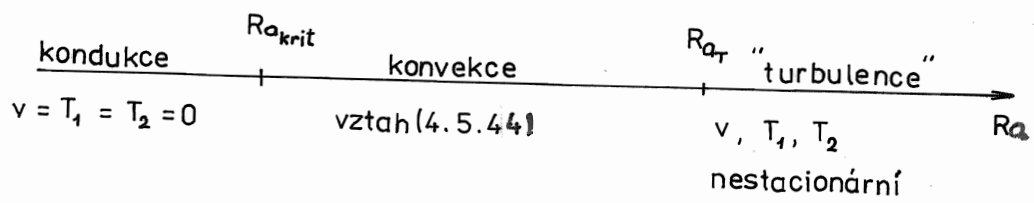
$$Pr = 10, b = \frac{8}{3}, Ra = 28 Ra_{krit} > Ra_T = 24,74 \cdot Ra_{krit}$$

je uvedeno na obr. 4.16b). Časový krok výpočtu byl $\Delta\tau = 0,01$.

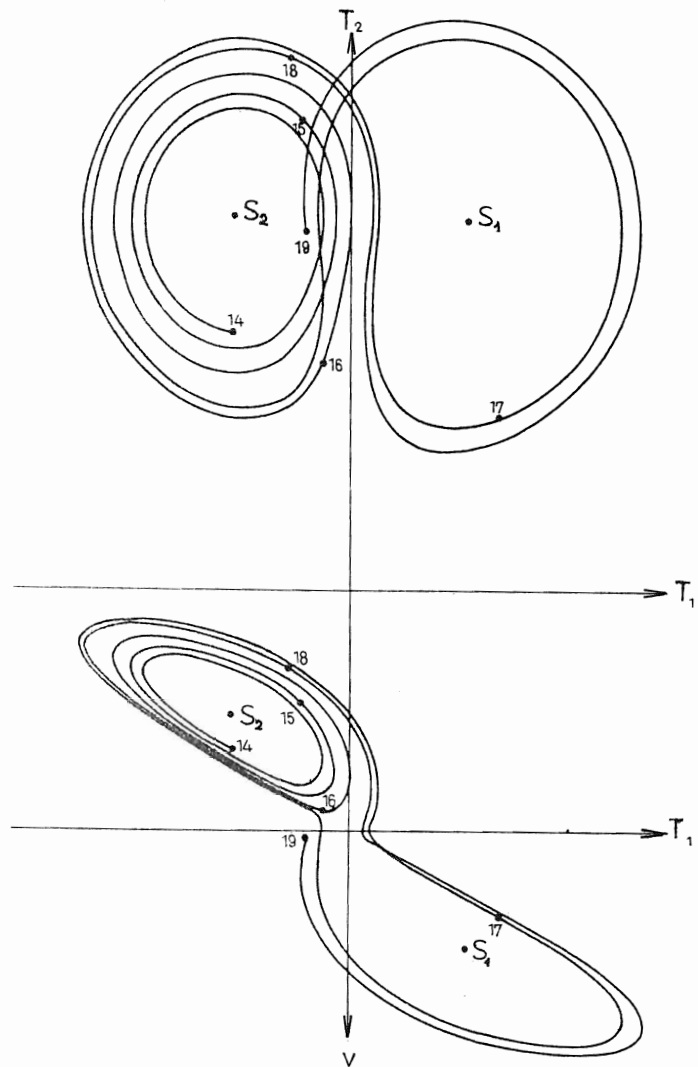
Nepravidelná změna všech komponent je zřejmá. Výpočet navíc ukázal, že i pro $Ra \leq Ra_T$ směřuje řešení ke stacionárnímu stavu (4.5.44). Analýzou numerického řešení Lorentz ukázal, že pro $Ra = 28 Ra_{krit}$ vytvářejí orbity ve fázovém prostoru "plochu" o velice malé tloušťce s velice komplikovanou strukturou. Provedeme-li průnik této "plochy" s kolmou přímkou zjistíme, že tento průnik je množina s fraktálním rozměrem $0 < d < 1$ stejně jako Cantorova množina viz obr. 4.10. Otázka, zda množina trajektorií Lorentzova modelu (pro $\tau \rightarrow \infty$) je podivný atraktor, není dosud zcela uspokojivě vyřešena a není tudíž ani exaktně dokázáno, zda má řešení chaotický (turbulentní) charakter (Sparow, 1982).

Praktické důsledky uvedeného způsobu řešení přestupu tepla budou zřejmé, zavedeme-li obvyklým způsobem koeficient přestupu tepla α . Tepelný tok je pak

$$q = \alpha \Delta T_s = -\lambda \left. \frac{\partial(T_0 + \delta T)}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (4.5.47)$$



a)



b)

Obr. 4.16

Základní vlastnosti Lorentzova modelu (4.5.40)

a) Změna režimů vedení tepla v závislosti na Ra

b) Projekce numerického řešení na roviny T_2, T_1 a v, T_1 (čísla 14,15,atd. označují 1400,1500,atd. časových kroků)

Stacionární stavy (4.5.44) jsou označeny S_1, S_2 .

a vzhledem k (4.5.6)₃ a (4.5.39) můžeme psát

$$-\lambda \frac{\partial(T_0 + \delta T)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \lambda \frac{\Delta T_s}{L} + \frac{2\lambda Ra_{\text{krit}} \Delta T_s \langle T_2(t) \rangle}{L Ra} \quad (4.5.48)$$

(příspěvek prvního členu (4.5.39) je v průměru nulový). Zde

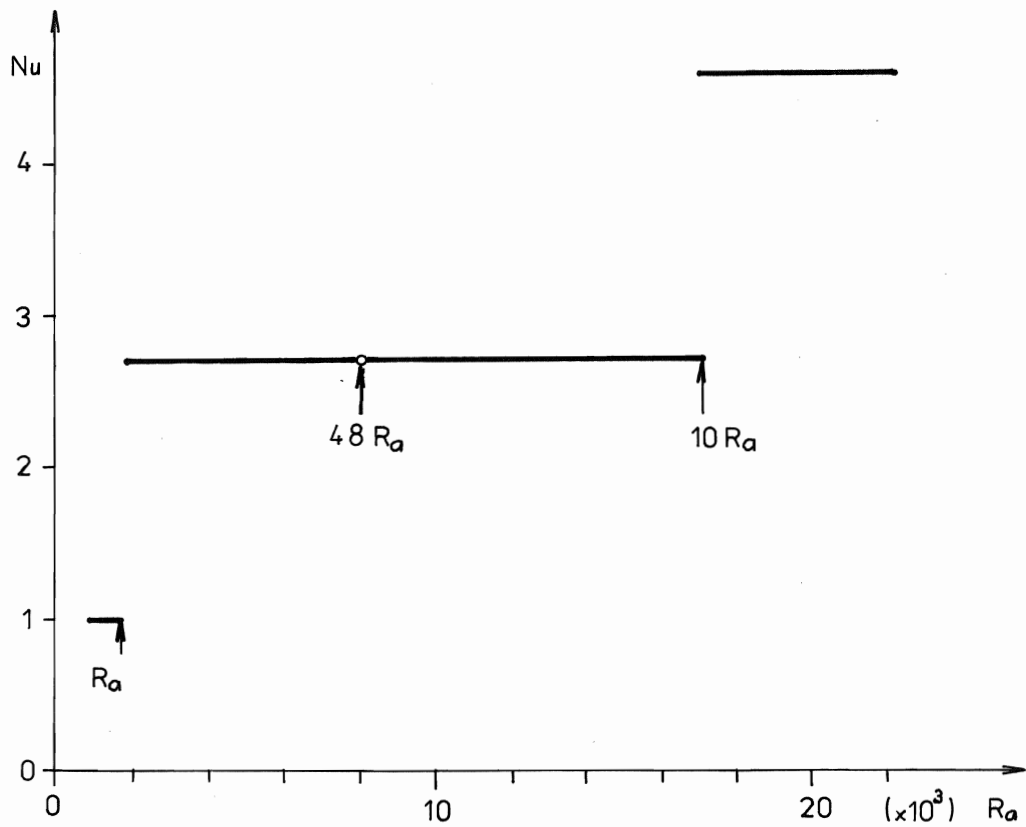
$\langle T_2(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t T_2(t') dt'$ je střední časová hodnota, kterou lze numericky dobře stanovit. Zavedeme-li Nusseltovo číslo

$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda}$, můžeme přenos tepla (4.5.47) vyjádřit

$$Nu = 1 + \frac{2Ra_{\text{krit}}}{Ra} \langle T_2(t) \rangle. \quad (4.5.49)$$

obr. 4.17 →

Odtud je patrné, jak konvektivní přenos (vztah (4.5.44)), tak i "turbulentní" přenos tepla přispívají k přenosu tepla kondukcí. Experimenty ukazují, že Lorentzův model souhlasí s údaji experimentu jen pro $Ra_{\text{krit}} < Ra \leq Ra_T$ (Martin, 1975). Na obr. 4.17 je uvedena experimentální závislost $Nu = Nu(Ra)$ pro vodorovnou vrstvu vody zahřívanou zdola. Skokové změny odpovídají změnám v proudovém poli, viz obr. 4.15.



Obr. 4.17

Experimentální závislost (Krishnamurti, 1970) přestupu tepla vyjádřeného Nusseltovým číslem Nu na Rayleighově čísle Ra (pro vodu $Pr = 6,7$).

4.6 Základní vlastnosti laminárních smykových mezních vrstev

Při obtékání tělesa se vliv vazkosti soustřeďuje v těsné blízkosti jeho povrchu do oblasti proudového pole, které nazýváme mezní vrstvou. V místech, kde povrchová proudnice opouští těleso (v bodě odtržení) přechází mezní vrstva na vrstvu smykovou. Smykové vrstvy oddělují vnější proudové pole od úplavu a tvoří jeho přirozené hranice, viz obr. 4. ²¹. Principiální nestabilita smykových vrstev byla ukázána v kap. 4.4.1. Konkrétním vlastnostem mezních a smykových vrstev budou věnovány následující kapitoly.

Vyjdeme z rovnic stlačitelné Newtonovské tekutiny (4.4.1), (4.4.2) a (4.4.6). Omezíme se na dvourozměrný případ (x, y, t) , takže uvedené rovnice mají tvar:

Rovnice bilance hmotnosti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0, \quad (4.6.1)$$

rovnice bilance hybnosti

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \\ + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Rovnicí bilance energie (4.4.6) je výhodné zapsat pomocí entalpie h , resp. celkové entalpie h_v , které jsou definovány vztahy (I.7.3.27), (I.7.3.18)

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad , \quad h_v = u + \frac{p}{\rho} + \frac{|v|^2}{2} \quad , \quad |v|^2 = (v_x)^2 + (v_y)^2 .$$

(4.6.3)

Tudíž s ohledem na poslední složku soustavy rovnic (4.1.2) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(h_v - \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x h_v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y h_v) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(t_{xx}^{(dis)} v_x + t_{xy}^{(dis)} v_y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(t_{yx}^{(dis)} v_x + t_{yy}^{(dis)} v_y \right) , \end{aligned}$$

(4.6.4)

kde jsme předpokládali, že $dh = c_p dT$ a disipativní část tenzoru napětí je podle (4.6.1) rovna

$$t_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad , \quad t_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad ,$$

$$t_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) .$$

(4.6.5)

Pro kaloricky dokonalý plyn platí dále vztahy (4.1.4). Stavovou rovnici plynu a závislost viskozity (resp. tepelné vodivosti) na teplotě píšeme ve tvaru

$$p = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \rho h, \quad h = c_p T, \quad \mu(x, y) = \frac{\mu_1}{T_1} \nu(x) T(x, y) \quad (4.6.6)$$

s konstantou $\nu(x)$ definovanou vztahem

$$\nu(x) = \left(\frac{T_w}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{T_1 + T_{St}}{T_w + T}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \text{konst.} \quad (4.6.7)$$

Zde T_w je teplota obtékané stěny, T_1 teplota proudu vně mezní vrstvy a T_{St} je Stewartsonova konstanta (pro vzduch je $T_{St} = 114$).

4.6.1 Rovnice laminární mezní vrstvy

Výchozí předpoklady teorie mezní vrstvy ukážeme na příkladu nestlačitelné kapaliny s konstantním μ, λ . Pro oblast mezní vrstvy použijeme souřadnice, které se co nejvíce podobají tvaru obtékané stěny, viz obr. 4.18. Pro případ rovné nebo mírně zakřivené stěny použijeme souřadnice (x, y) .

Obr. 4.18

Rovnice nestlačitelného proudění vazké tekutiny jsou:

rovnice bilance hmotnosti

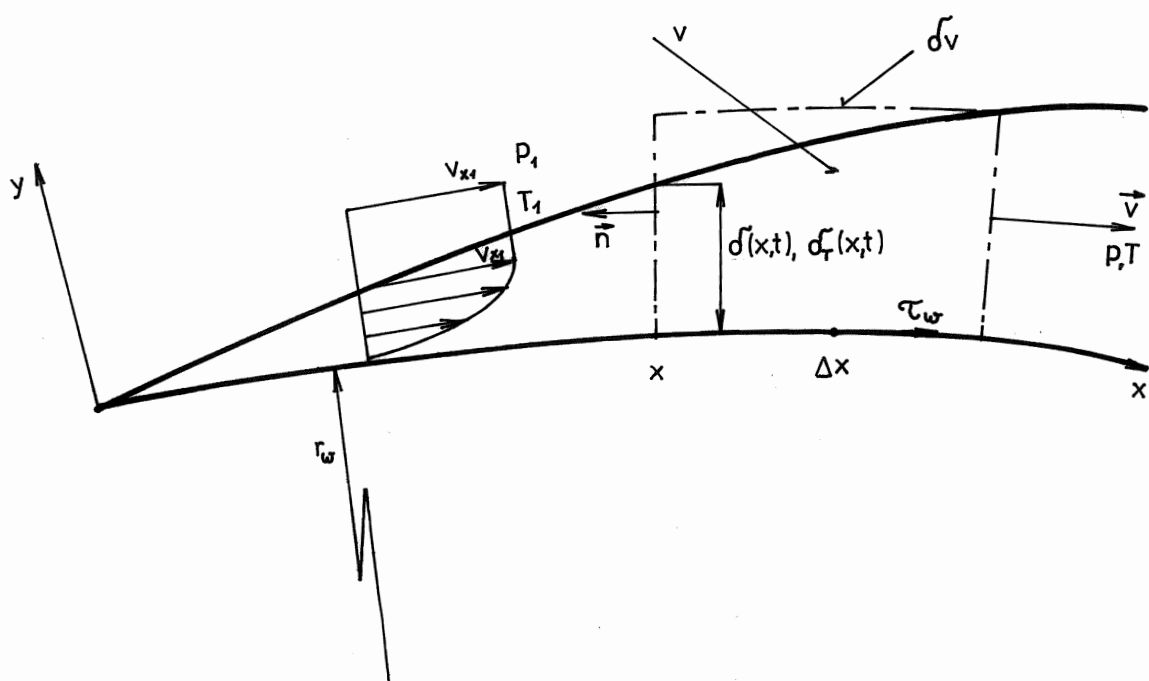
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.6.8)$$

rovnice bilance hybnosti

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 v_x}{(\partial x)^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{(\partial y)^2} \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v_y}{(\partial x)^2} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{(\partial y)^2} \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

a rovnice bilance energie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u - \frac{|v|^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x h_w) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y h_w) &= \\ = \frac{\partial}{\partial x} (t_{xx}^{(dis)} v_x + t_{xy}^{(dis)} v_y) + \lambda \frac{\partial^2 T}{(\partial x)^2} + \\ - \frac{\partial}{\partial y} (t_{yx}^{(dis)} v_x + t_{yy}^{(dis)} v_y) + \lambda \frac{\partial^2 T}{(\partial y)^2}. \end{aligned} \quad (4.6.10)$$



Obr. 4.18

K odvození rovnic mezní vrstvy ; $\delta(x)$, $\delta_T(x)$ jsou postupně
 omluvní tloušťka rychlostní a teplotní mezní vrstvy.

Vně mezní vrstvy je vliv vazkosti nepodstatný.

Pro disipativní část tenzoru napětí (4.6.5) platí

$$t_{xx}^{(dis)} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad t_{xy}^{(dis)} = t_{yx}^{(dis)} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$t_{yy}^{(dis)} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

(4.6.11)

Další obecně přijímaná zjednodušení rovnic a vztahů (4.6.8) až (4.6.11) jsou důsledkem fyzikálních vlastností mezních a smykových vrstev. Nazývají se Prandtlovy předpoklady a lze je shrnout do následujících bodů (Shapiro, 1954; Schlichting, 1965):

I)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \ll \frac{\partial v_x}{\partial y}; \quad \text{resp.} \quad \frac{v_y}{v_{x1}} \doteq \frac{\delta}{x} \ll 1$$

(4.6.12)

Z rovnice (4.6.8) přibližně platí

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} \doteq -\frac{\Delta v_y}{\Delta y} \quad \text{pro} \quad \Delta v_x \doteq -v_{x1}, \quad \Delta v_y \doteq v_y, \quad \Delta x \doteq x, \quad \Delta y \doteq \delta.$$

Veličinu δ nazýváme smluvní tloušťkou mezní vrstvy a je mnohem menší než její podélný rozměr x .

II) dominantní setrvačné, vazké a vnější povrchové síly jsou vyjádřeny členy

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad -\mu \frac{\partial^2 v_x}{(\partial y)^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x}.$$

(4.6.13)

Stejnou úvahou jako v I) dostáváme

$$\frac{\rho v_{x1}^2}{\Delta x} + \rho \frac{v_y v_{x1}}{\delta} = -\frac{\Delta p}{\Delta x} + \mu \frac{v_{x1}}{(\Delta x)^2} + \mu \frac{v_{x1}}{\delta^2} \quad (4.6.14)$$

a s ohledem na (4.6.12) platí

$$2 \frac{v_{x1}^2}{\Delta x} = -\frac{\Delta p}{\rho \Delta x} + \frac{\mu v_{x1}}{\rho \delta^2} + \frac{\mu v_{x1}}{\rho (\Delta x)^2} \quad (4.6.15)$$

Odtud je zřejmé, že poslední člen na pravé straně je zanedbatelný ve srovnání s ostatními členy. Pro proudění bez tlakového gradientu ($\Delta p = 0, \Delta x = x$) obdržíme jednoduše závislost pro tloušťku mezní vrstvy

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho x v_{x1}}} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}}, \quad Re_x = \frac{\rho x v_{x1}}{\mu} \quad (4.6.16)$$

Z rovnováhy vnější síly (tlakového gradientu) a vazkých sil odvodíme (4.15) kvalitativní vlastnosti odtržení mezní vrstvy vyvolané tlakovým gradientem

$$\Delta p \sim \rho v_{x1}^2 \left(\frac{\Delta x}{x_s} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (4.6.17)$$

kde Δx je vzdálenost, na které působí vzrůstající tlak Δp , aby v bodě x_s (měřeno od náběžné hrany) došlo k odtržení.

4.15)

Uvažujme rovnováhu tlakových a vazkých sil v mezní vrstvě ($y < \delta$) ve tvaru

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \mu \frac{v_x(y)}{(y)^2} \quad \text{i)}$$

pro lineární rychlostní profil $\frac{v_{x1}}{\delta} = \frac{v_x(y)}{y}$.

Předpokládáme-li, že i v mezí vrstvě platí Bernoulliho rovnice ve tvaru $v_x^2(y) \doteq 2 \frac{\Delta p}{\rho}$, dostáváme vyloučením y ze i) za pomoci kvalitativního vztahu (4.6.16) závislost (4.6.17).

III) tlak napříč mezí a smykovou vrstvou je popsán rovnicí

$$\frac{\partial p}{\partial y} \doteq \frac{\Delta p}{\delta} = -\frac{(v_{x1})^2}{r_w} \quad (4.6.18)$$

Z bilance kolmé složky hybnosti (4.6.9)₂ plyne

$$\frac{2 v_{x1} v_y}{\Delta x} \doteq -\frac{\Delta p}{\rho \delta} + \frac{\mu}{\rho \Delta x} \left[\frac{v_{x1}}{\delta} + \frac{v_y}{\Delta x} \right] \quad (4.6.19)$$

Všechny členy jsou ve srovnání s členem $\frac{\Delta p}{\rho \delta}$ mnohem menší.

Tudíž $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ vyjma případu silně zakřiveného povrchu (poloměr zakřivení r_w), kdy dominantní setrvačnou silou (na levé straně) je síla odstředivá $\frac{(v_{x1})^2}{r_w}$.

IV) pro teplotní mezí vrstvu o smluvní tloušťce δ_T platí stejně jako v I)

$$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \delta_T = \delta. \quad (4.6.20)$$

Všechny uvedené předpoklady platí i pro stlačitelnou tekutinu.

Zákony bilance (4.6.8) až (4.6.10) a vztahy (4.6.11) upravíme podle předpokladů I až IV. Dostáváme rovnice nestlačitelné mezní vrstvy, jejichž nejčastější tvar je (Schlichting, 1965)

bilance hmotnosti

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.6.21)$$

bilance hybnosti

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{(\partial y)^2} \quad (4.6.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.6.23)$$

a bilance energie

$$\rho \frac{\partial h_v}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial h_v}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h_v}{\partial y} = \rho c_p \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h}{Pr} + \frac{(v_x)^2}{2} \right) \right] \quad (4.6.24)$$

Tuto rovnici můžeme za předpokladu $Pr=1$ a $h + \frac{(v_x)^2}{2} = h_v$

přepsat do tvaru

$$\dot{h}_v = \frac{\partial h_v}{\partial t} + v_x \frac{\partial h_v}{\partial x} + v_y \frac{\partial h_v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 h_v}{(\partial y)^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.6.25)$$

Tečkou jsme označili materiálovou derivaci. Rovnice má jedno triviální řešení v případě, že $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ a to $h_v = \text{konst.}$

Za těchto předpokladů je rovnice energie splněna identicky. Pro tekutiny s $Pr=1$ (vzduch má $Pr = 0,71$) je vliv viskozity kompenzován vlivem tepelné ^{vodivosti.} Obecně je změna celkové entalpie doprovázena časovou změnou tlaku.

Rovnice stlačitelné mezní vrstvy získáme z rovnic bilance (4.6.1), (4.6.2) a (4.6.4) s uvažováním Prandtlových předpokladů I až IV. Bilance hmotnosti (4.6.1) zůstává beze změny. Rovnice bilance hybnosti mají tvar

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (4.6.26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.6.27)$$

a rovnice energie je

$$\rho \frac{\partial h_v}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial h_v}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h_v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(v_x)^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.6.28)$$

Poslední rovnici můžeme upravit zavedením bezrozměrné entalpie

$$\mathcal{H} = \frac{h_v}{h_{v1}} - 1, \quad h_v = h + \frac{(v_x)^2}{2}, \quad h_{v1} = h_1 + \frac{(v_{x1})^2}{2} = \text{konst}, \quad (4.6.29)$$

kde indexem 1 jsou označeny veličiny vně mezní vrstvy, kde je vliv vazkosti zanedbatelný. Potom má rovnice (4.6.28) tvar

$$\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \right) + \frac{Pr-1}{Pr h_{cv}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{h_{cv}} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.6.30)$$

Z této rovnice je ihned patrné, že pro $Pr = 1$ je tato rovnice podobná rovnici (4.6.25) a její triviální řešení je $\mathcal{H} = konst$ (při $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$). Za tohoto předpokladu je rovnice bilance energie splněna identicky i pro stlačitelnou tekutinu. Výsledky získané za tohoto předpokladu mají však více kvalitativní charakter, protože vedle $Pr \neq 1$ se mění i h_{cv} napříč mezní vrstvou (v běžné aerodynamické praxi až o 20%).

Rovnice stacionární stlačitelné mezní vrstvy (4.6.1), (4.6.26) a (4.6.27) a rovnice stacionární nestlačitelné mezní vrstvy (4.6.21) až (4.6.23) (pro $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$) jsou do té míry podobné, že lze mezi nimi nalézt transformaci. Tato transformace 4.16) dává možnost provádět analýzu jednodušších rovnic nestlačitelné mezní vrstvy. Jedno přibližné řešení je uvedeno v následující kapitole.

4.16)

Označme

$$\bar{x} = \varphi_1(x)$$

$$\bar{y} = \varphi_2(x, y)$$

i)

transformaci souřadnic převádějící stlačitelné proudění v rovině (x, y) do roviny ^{ne}stlačitelného proudění (\bar{x}, \bar{y}) (označené pruhem). Obecný tvar této transformace našel Dorodnicin (1942). V případě,

kdy závislost viskozity na teplotě je dána lineárním vztahem
 (4.6.6)₃ zjednoduší se tato transformace na tvar

$$\bar{x} = \int_0^x c(x) \left(\frac{h_1}{h_{c1}} \right)^{\frac{3\alpha-1}{2(\alpha-1)}} dx \quad \text{ii)}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{h_1}{h_{c1}} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_{01}} dy$$

pro $\frac{h_1}{h_{c1}} = \frac{T_1}{T_{c1}} = \Lambda_1 = 1 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} (\lambda_1)^2$,

kde $h_1 = h_1(x) = c_p T_1(x)$ je entalpie, $h_{c1} = c_p T_{c1} = \text{konst}$
 je celková entalpie a $\rho_{01} = \text{konst}$, $p_{01} = \text{konst}$ jsou klidová hustota
 a klidový tlak tekutiny vně mezní vrstvy. Vně mezní vrstvy rovněž
 předpokládáme izentropické proudění $p_1 = p_{01} \left(\frac{\rho_1}{\rho_{01}} \right)^\alpha$
 s bezrozměrnou rychlostí $\lambda_1 = \frac{v_{x1}}{c^*}$. Vztahy ii) nazýváme Ste-
 wartsonovou-illingworthovou transformací (Chang, 1972). Rychlost
 a bezrozměrná entalpie se transformuje podle vztahů

$$\begin{aligned} v_x(x,y) &= \left(\frac{h_1}{h_{c1}} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{\mathcal{H}}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{h_c(x,y)}{h_{c1}} - 1 = \\ &= \frac{\bar{h}(\bar{x}, \bar{y})}{h_{c1}} + \frac{h_1(x) [v_x(\bar{x}, \bar{y})]^2}{2h_{c1}^2} - 1. \end{aligned}$$

iii)

Má-li např. vnější proud zvukovou rychlost ($M_1 = 1$), pak

$$\bar{x} \doteq 0,5x, \quad \bar{\delta}(\bar{x}) \doteq 0,51 \delta(x), \quad \bar{v}_{x1}(\bar{x}) \doteq 1,05 v_{x1}(x). \quad \text{iv)}$$

Dosazením ii), iii) do rovnic stacionární stlačitelné mezní vrstvy (4.6.1), (4.6.26) až (4.6.28) dostáváme rovnice

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{v)}$$

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = \bar{v}_{x1} \frac{\partial \bar{v}_{x1}}{\partial \bar{x}} (1 + \overline{\mathcal{H}}) + \frac{\mu_{01}}{\rho_{01}} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{(\partial \bar{y})^2} \quad \text{vi)}$$

$$\bar{v}_x \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \overline{\mathcal{H}}}{\partial \bar{y}} = \frac{\mu_{01}}{\rho_{01}} \left[\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \overline{\mathcal{H}}}{(\partial \bar{y})^2} + \frac{Pr-1}{Pr} \frac{\frac{\alpha-1}{2} (M_1)^2(x)}{1 + \frac{\alpha-1}{2} (M_1)^2(x)} \frac{\partial^2}{(\partial \bar{y})^2} \left(\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{x1}} \right)^2 \right], \quad \text{vii)}$$

kde $M_1(x)$ je Machovo číslo vnějšího proudu, viz (2.3.71), (I.7.4.9), a μ_{01} je viskozita tekutiny vně mezní vrstvy v klidu. Za předpokladu $\overline{\mathcal{H}} = 0$ a $Pr = 1$ dostáváme rovnice stacionární stlačitelné mezní vrstvy (4.6.21) až (4.6.23), přičemž rovnice bilance energie je splněna identicky.

4.6.2 Přibližné řešení rovnic laminární mezní vrstvy

Budeme vycházet z předpokladu, že $h_c = h_{c1} = \text{konst}$

a $Pr = 1$. Potom lze rovnice stacionární stlačitelné mezní vrstvy převést na rovnice stacionární nestlačitelné mezní vrstvy za předpokladu, že rovnice (4.6.21) až (4.6.23)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.6.31)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} - v_{x1} \frac{dv_{x1}}{dx} = \gamma_{01} \frac{\partial^2 v_x}{(\partial y)^2}, \quad \gamma_{01} = \frac{\mu_{01}}{\rho_{01}} \quad (4.6.32)$$

popisují s přijatelnou přesností i nestacionární stlačitelnou mezní vrstvu a smykovou vrstvu. Předpokládáme dále, že časové fluktuace tlaku a hustoty v jakémkoliv místě proudového pole jsou zanedbatelné ($\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, stejně jako při Boussinesquově aproximaci (kap. 4.5.1)) Změna velikosti rychlosti při Stewartsonově-Illingworthově transformaci je nepodstatná (vztah iv v poznámce 4.16), takže se i nepodstatně změní rovnice bilance hybnosti (4.6.26). Rozložení tlaku vně mezní vrstvy jsme nahradili rozložením rychlosti tak, jak plyne z bilance hybnosti, tj.

$$\frac{1}{\rho_{01}} \frac{\partial p}{\partial x} = -v_{x1} \frac{dv_{x1}}{dx} - \frac{\partial v_{x1}}{\partial t}$$

Budeme hledat přibližné řešení rovnic (4.6.31), (4.6.32), tj. funkce $v_x(t, x, y)$, $v_y(t, x, y)$ v oblasti V , kde se uplatňuje vliv vazkosti. Oblast má velikost $V = \Delta x \times (\delta + \frac{d\delta}{dx} \Delta x)$

a povrch ∂V s normálou \underline{n} , viz obr. 4.19. Uvedeny jsou rovněž okrajové podmínky. Počáteční podmínky $v_x(t=0, x, y) = v_x^{(0)}(x, y)$,

$v_y(t=0, x, y) = v_y^{(0)}(x, y)$ musí vyhovovat i podmínkám
 okrajovým. Ve stacionárním případě ($\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$) nejsou počáteční
 podmínky nutné. Řešení budeme předpokládat ve tvaru mocninné
 řady a odvodíme jednu parciální diferenciální rovnici pro tloušť-
 ku mezní vrstvy $\delta(x, t)$.

obr. 4.19 → Integrujeme rovnici hybnosti (4.6.32) přes pevný objem V .
 Integraci podle x můžeme vypustit ($\Delta x \rightarrow 0$), takže s
 ohledem na okrajové podmínky dostáváme integrál

$$\int_0^{\delta(x,t)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} - v_{x1} \frac{dv_{x1}}{dx} \right) dy = \int_0^{\delta(x,t)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_{01}}{\rho_{01}} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy = - \frac{\tau_w}{\rho_{01}}, \quad (4.6.33)$$

pro $\tau_w = \mu_{01} \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_w$, tj. pro $y=0$. (4.6.34)

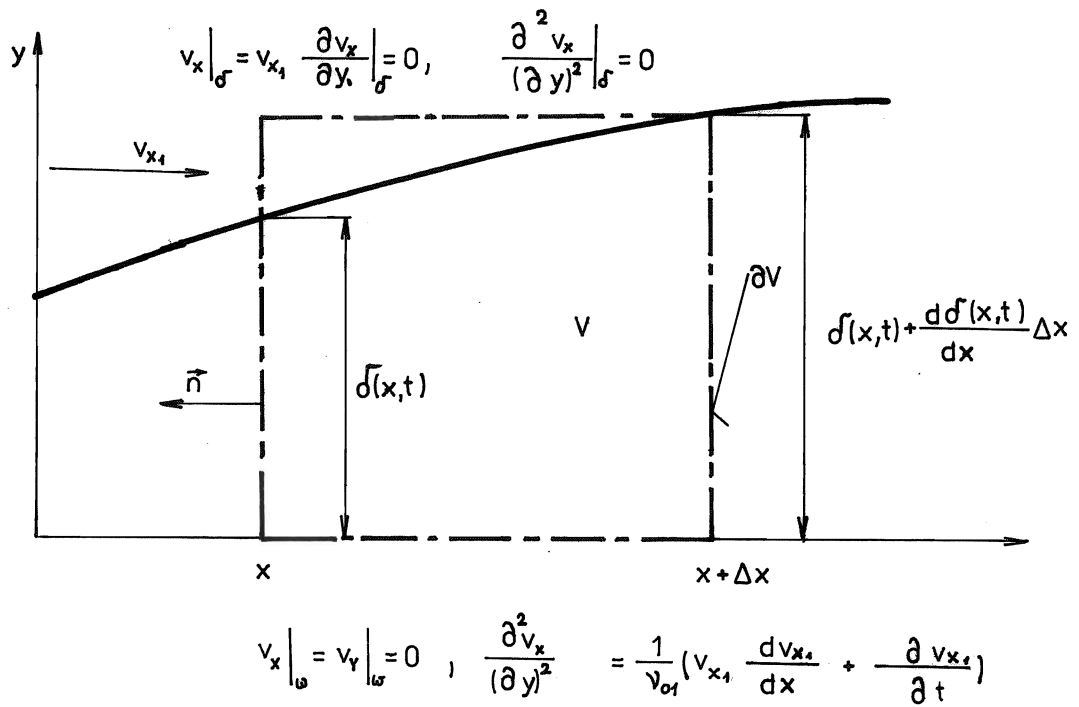
Veličina $\tau_w \left[\frac{N}{m^2} \right]$ je tečné napětí a vyjadřuje přenos hyb-
 nosti mezi tekutinou a obtékanou stěnou. Složku rychlosti v_y
 vyloučíme pomocí rovnice kontinuity (4.6.31), takže

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial (v_x v_y)}{\partial y}. \quad (4.6.35)$$

Po integraci druhého členu odvodíme pomocný vztah

$$\int_0^{\delta(x,t)} \frac{\partial (v_x v_y)}{\partial y} dy = v_{x1}(x, t) v_y(x, y = \delta(x, t)) = v_{x1}(x, t) \int_0^{\delta(x,t)} \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = -v_{x1}(x, t) \int_0^{\delta(x,t)} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy.$$

(4.6.36)



Obr. 4.19

Okrajové podmínky pro rovnice nestlačitelné
mezní vrstvy

Dosazením (4.6.35) a (4.6.36) do integrálu (4.6.33) máme

$$\int_0^{\delta(x,t)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) dy - v_{x1} \int_0^{\delta(x,t)} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \left(\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} \right) \delta(x,t) + \frac{\tau_w}{\rho_{01}} = 0.$$

(4.6.37)

Tímto postupem lze odvodit tzv. Kármánovu integrální rovnici mezní vrstvy (záměnou pořadí integrace a derivace), která má velký význam pro přibližné řešení stacionární mezní vrstvy (Lojčanskij, 1950; Chang, 1972). Pro naše účely je výchozí integrální rovnice (4.6.37), kterou využijeme k nalezení rovnice pro vývoj smluvní tloušťky mezní vrstvy $\delta(x,t)$ v závislosti na vnější rychlosti $v_{x1}(x,t)$.

Předpokládejme analogicky Polhausenovu přiblížení (Chang, 1972), rozložení rychlosti v mezní vrstvě ve tvaru polynomu 4. stupně. Koeficienty polynomu jsou určeny tak, aby rychlostní profil splňoval okrajové podmínky (obr. 4.19). Snadno se přesvědčíme, že všem podmínkám vyhovuje funkce

$$v_x(x,y,t) = v_{x1}(x,t) f(a,\xi)$$

$$f(a,\xi) = (3-a)\xi + 3(a-1)\xi^2 + (1-3a)\xi^3 + \xi^4, \quad \xi = \frac{y}{\delta(x,t)} \quad (4.6.38)$$

pro

$$a = 1 - \frac{\delta^2}{6\nu_{01}v_{x1}} \left(\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{x1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} \right).$$

(4.6.39)

Do integrální rovnice (4.6.37)

dosadíme rychlost (4.6.38). Jednotlivé derivace jsou

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = f \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} - v_{x1} \frac{\xi}{\delta} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \delta}{\partial t} + v_{x1} \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = f \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} - v_{x1} \frac{\xi}{\delta} \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \delta}{\partial x} + v_{x1} \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} , \quad (4.6.40)$$

kde derivace $\frac{\partial a}{\partial t}$, $\frac{\partial a}{\partial x}$ upravíme pomocí (4.6.39)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{2(a-1)}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1-a}{v_{x1}} \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} - \frac{\delta^2}{6v_{01}v_{x1}} \left(\frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial t^2} + \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + v_{x1} \frac{\partial^2 v_{x1}}{\partial t \partial x} \right)$$

(4.6.41)

a stejně tak pro derivaci $\frac{\partial a}{\partial x}$. Kvůli zjednodušení zanedbáme poslední člen ve vztahu (4.6.41). Tento předpoklad je přípustný pro případ stacionárního vnějšího proudu s malými gradienty (tj. $\frac{\partial^2 v_{x1}}{(\partial x)^2} \ll \frac{\partial v_{x1}}{\partial x}$). Zavedeme-li následující

označení

$$A = - \int_0^1 (2f+1) \frac{\partial f}{\partial \xi} \xi d\xi + 2(a-1) \int_0^1 (2f-1) \frac{\partial f}{\partial a} d\xi =$$

$$= (a-7,2991)(a+3,6990) \cdot 3,9682 \cdot 10^{-3} + (1-a)(a-3,5) \cdot 1,1238$$

$$B = \int_0^1 (2f^2 - f - 1) d\xi + (1-a) \int_0^1 (2f-1) \frac{\partial f}{\partial a} d\xi =$$

$$= (a-12,7453)(a+10,9453) \cdot 7,9365 \cdot 10^{-3} + (a-1)(a-3,5) \cdot 0,5619$$

$$C = - \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi} \xi d\xi + 2(a-1) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial a} d\xi = - \frac{a+5}{20} + \frac{1-a}{2}$$

$$D = \int_0^1 (f-1) d\xi + (1-a) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial a} d\xi = - \frac{a+5}{20} + \frac{a-1}{4}$$

$$\tau_w = \frac{\mu_{01} v_{x1}}{\delta} (3-a)$$

(4.6.42)

lze integrální rovnici (4.6.37) napsat ve tvaru

$$D\delta^2 \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + C v_{x1} \delta \frac{\partial \delta}{\partial t} + B v_{x1} \delta^2 \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + A \delta v_{x1}^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = -\frac{\gamma_{01}}{\rho_{01}} v_{x1} (3-\alpha) = -\frac{\tau_w \delta}{\rho_{01}} \quad (4.6.43)$$

Odvodili jsme nelineární diferenciální rovnici pro $\delta^2(x,t)$

Budeme hledat její přibližné řešení za počátečních a okrajových podmínek

$$\delta(x, t=0) = \hat{\delta}(x), \quad \delta(x=x_0, t) = \delta_0(t), \quad (4.6.44)$$

přičemž vnější rychlost $v_{x1}(x,t)$ považujeme za zadaný parametr. Tato zjednodušení problému mezní vrstvy lze považovat za Gelerkinovskou aproximaci (viz konec kap. 4.1) rovnic mezní vrstvy (4.6.31) (4.6.32). Tato aproximace je vhodná, protože splňuje jak rovnici bilance hmotnosti (viz úpravu (4.6.36)), tak i s jistou přibližností (zanedbání v (4.6.41)) bilanci hybnosti.

Uvedeme přibližné řešení rovnice (4.6.43) vhodné pro zpomalující se proudění. Podle vztahu (4.6.39) tento parametr popisuje pro

$\alpha < 1$	zrychlující se proudění
$\alpha = 1$	proudění s konstantní rychlostí
$\alpha > 1$	zpomalující se proudění
$\alpha = 3$	bod s $\tau_w = 0$, tj. bod odtržení mezní vrstvy.

Pro případ stacionárního vnějšího proudu $\left(\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} = \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0\right)$, lze v oblasti parametrů $\alpha \in \langle 1, 3,5 \rangle$ rovnici (4.6.43) zjednodušit

$$\frac{d\delta^2}{dx} + \frac{2B\delta^2}{A} \frac{dv_{x1}}{dx} = -\frac{2\gamma_{01}C}{v_{x1}A}$$

(4.6.45)

pro $\frac{2B}{A} \doteq 18,8$, $-\frac{2C}{A} = -17(a-1) + 34$.

(4.6.46)

Aproximace (4.6.46) dostatečně přesně vyhovuje i v obou významných bodech $a = 1$ (vyrovnaný proud), $a = 3$ (bod odtržení). Rovnice (4.6.45) přechází na obyčejnou diferenciální rovnici (Maršik, 1981)

$$\frac{d\delta^2}{dx^2} + \frac{16\delta^2}{v_{x1}} \frac{dv_{x1}}{dx} - \frac{34\gamma_{01}}{v_{x1}} = 0,$$

(4.6.47)

jejímž řešením je

$$\delta^2(x) = \delta^2(x_0) + \frac{34\gamma_{01} \int_{x_0}^x v_{x1}^{15}(s) ds}{v_{x1}^{16}(x)}$$

(4.6.48)

kde $\delta^2(x_0)$ je okrajová podmínka v bodě $x = x_0$.

V případě konstantního vnějšího pole ($v_{x1}(x) = \text{konst}$, $\delta^2(x_0) = 0$) dostáváme Polhausenův vztah

$$\delta^2(x) = \frac{34\gamma_{01}x}{v_{x1}}$$

(4.6.49)

Přesnost řešení rovnic mezní vrstvy (4.6.31), (4.6.32) se nejčastěji určuje pomocí polohy bodu odtržení proudu x_s (někdy mluvíme o odtržení mezní vrstvy). V uvedeném přiblížení je bod x_s určen hodnotou $a = 3$ a pro stacionární proudění pro něj plyne z (4.6.39) a (4.6.48) podmínka

$$\frac{dv_{x1}}{dx} \left(\frac{x_0}{v_{x1}(x_0)} + \frac{\int_{x_0}^{x_s} v_{x1}^{15}(s) ds}{v_{x1}^{16}(x_s)} \right) = -\frac{12}{34} \quad (4.6.50)$$

Při obtékání těles určujeme bod odtržení pomocí tlakového koeficientu

$$C_{ps} = \frac{p(x_s) - p(x_0)}{\frac{1}{2} \rho_{01} v_{x1}^2(x_0)} = 1 - \frac{v_{x1}^2(x_s)}{v_{x1}^2(x_0)}, \quad (4.6.51)$$

z jehož hodnoty stanovíme velikost tlaku $p(x_s)$, resp. rychlosti $v_{x1}(x_s)$ v bodě odtržení. Ve vnějším proudu platí mezi rychlostí a tlakem vztah $p(x_s) - p(x_0) = -\frac{\rho_{01}}{2} (v_{x1}^2(x_s) - v_{x1}^2(x_0))$.

Konkrétní hodnoty C_{ps} jsou pro rozložení rychlosti

$$1. \quad v_{x1}(x) = v_{\max} \left(1 - \frac{x}{L} \right), \quad 2. \quad v_{x1}(x) = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$3. \quad v_{x1}(x) = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right], \quad 4. \quad v_{x1}(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} v_{\max} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

$$5. \quad v_{x1}(x) = v_{max} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^8 \right],$$

$$6. \quad v_{x1}(x) = v_{max} \cdot \sinh \left(\frac{x}{L} \right)$$

6. 4. 3. →

vedeny v tabulce 4.3.. Srovnání ukazuje, že pro zpomalující se proudění dává uvedená metoda dobré výsledky. Hodnoty C_{ps} se značně liší pro rozložení 4 a 6, kde existuje i oblast zrychlujícího se proudění ($a < 1$). Hodnotu C_{ps} pro stlačitelnou mezní vrstvu nalezneme 4.17) pomocí Stewartsonovy-illingworthovy transformace (viz pozn. 4.16)).

4.17)

Kriterium odtržení mezní vrstvy(4.6.50) přetransformujeme podle ^{ta} vz. hů ii) pozn.4.16). Čili

$$\frac{d\bar{x}}{dx} = v(x) \Lambda_1^{\frac{3ae-1}{2(ae-1)}} \quad i)$$

a uvážíme-li, že $v(x) \doteq 1$ a $\Lambda_1(x_0) \doteq \Lambda_1(x_s)$

dostáváme kriterium odtržení stlačitelné mezní vrstvy

$$\frac{1}{\Lambda_1(x_0)} \frac{d\lambda_1}{dx} \left[\frac{x_0}{\lambda_1(x_0)} + \frac{\int_{x_0}^{x_s} \lambda_1^{15}(s) ds}{\lambda_1^{16}(x_s)} \right] = -\frac{12}{34} \quad ii)$$

Tabulka 4.3.

Tlakový koeficient v bodě odtržení určeny různými metodami (Chang, 1972) pro různá rozložení rychlosti

metoda / rozložení rychlosti	1	2	3	4	5	6
numerické řešení	0,226	0,142	0,089	0,056	0,056	0,062
Pohlhausen	0,305	0,192	0,118	-	0,067	-
Thwaites	0,217	0,133	0,074	0,041	0,040	0,046
Lojčjanskij	0,236	0,141	0,080	0,066	0,044	-
uvedená metoda	0,211	0,140	0,090	0,084	0,0569	0,088

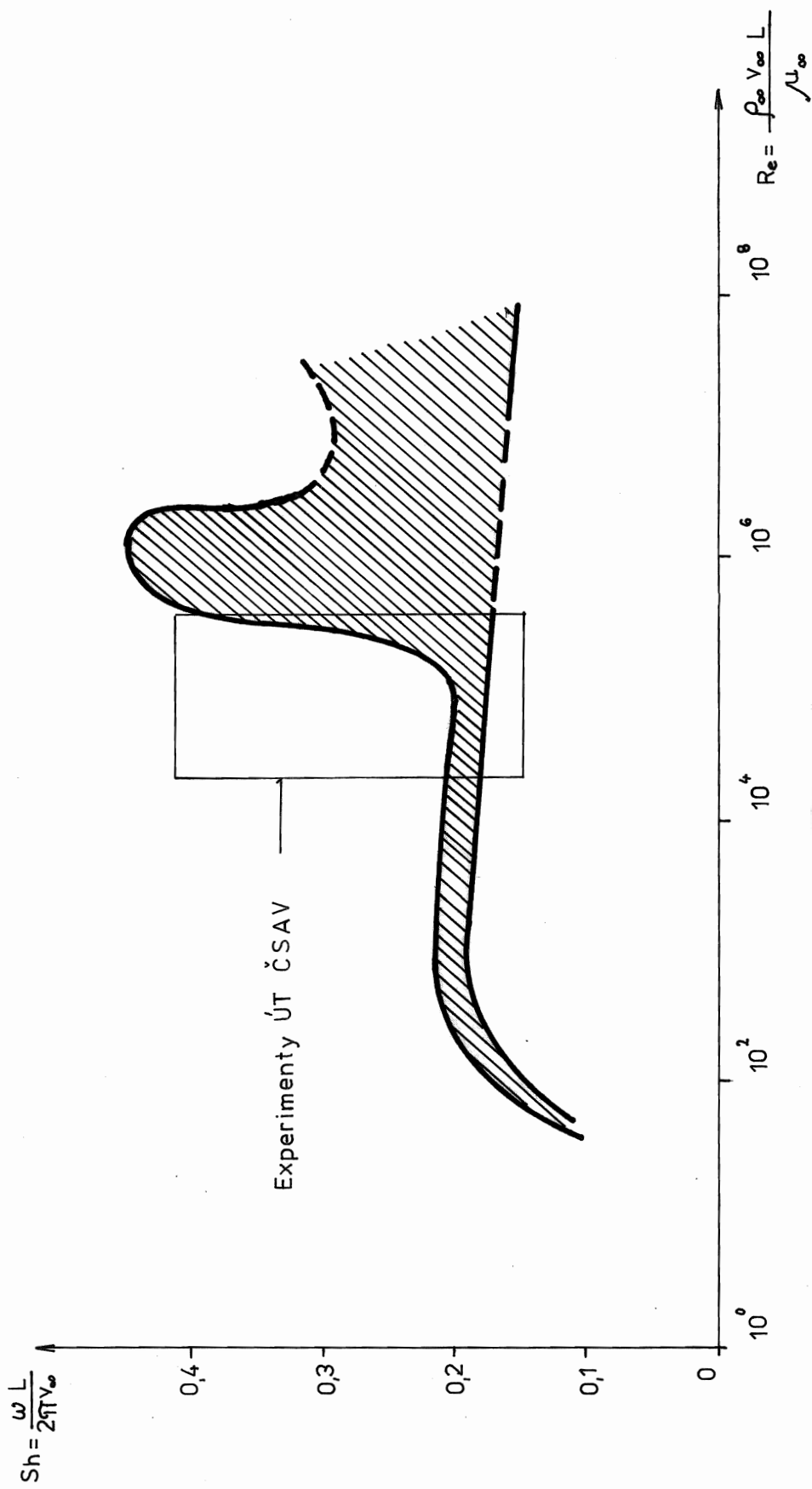
4.6.3 Model blízkého úplavu s Kármánovou vírovou řadou

Při obtékání těles vazkou tekutinou s Reynoldsovým číslem 20 až 10^5 dochází těsně za tělesem ke vzniku periodických pulzací (vírů), které se v některých případech uspořádají do vírové řady (viz např. obr. 4.21a) Typická závislost frekvence pulzací ω vyjádřená pomocí Strouhalova čísla $Sh = \frac{\omega L}{2\pi v_\infty}$ na číslu $Re = \frac{\rho_\infty v_\infty L}{\mu_\infty}$ je uvedena na obr. 4.20. Zde je L charakteristický rozměr obtékaného tělesa a index „ ∞ “ označuje hodnoty vyrovnaného proudu. Vznik víru je doprovázen tlakovým pulzem, který se přenáší na těleso. Vzniká tak nebezpečí, že se vlastní frekvence obtékaného tělesa dostane do rezonance s periodickými pulzacemi úplavu. V tomto případě dochází k silnému vzájemnému ovlivnění proudového pole a tělesa, které může mít za následek i jeho poškození. Toto ovlivňování je zvláště silné v případě transsonického obtékání, kdy pulzace proudu jsou značné - viz kap. 4.6.5.

br. 4.20 → Model úplavových vírů pochází od Theodora von Kármána (4.18), viz obr. 4.21c) (Brdička, 1959; Kočin, Kibel, Rose, 1963). Jeho řešení vychází ze superpozice vyrovnaného proudového pole a proudového pole vírové řady. Rozdíl hybnosti mezi vyrovnaným polem a polem s vírovou řadou vede ke známému vzorci pro střední odpor tělesa za dobu Δt

4.18)

Proudnice Kármánovy vírové řady jsou v soustavě souřadnic (x,y) spojené s úplavovými víry popsány rovnicí



Obr. 4.20

Závislost frekvence (Strouhalova čísla Sh) pulzací v úplavu (válec, tupé těleso) na Reynoldsově čísle Re (Novák, 1980)

$$\frac{\sin \frac{2\pi x}{\ell} + \operatorname{sh} \frac{2\pi y}{\ell}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi y}{\ell}} = C \quad C \in \langle -\sqrt{2}, +\sqrt{2} \rangle \quad \text{i)}$$

Pro $C=0$ dostáváme rovnici střední proudnice (střednici) ve tvaru

$$y = -\frac{\ell}{2\pi} \operatorname{arcsch} \left(\sin \frac{2\pi x}{\ell} \right). \quad \text{ii)}$$

Toto proudové pole je stabilní vůči malým poruchám jen v tom případě, kdy víry jsou položeny střídavě a je splněna podmínka

$$\operatorname{ch} \frac{\pi L}{\ell} = \sqrt{2} \quad , \quad \text{resp.} \quad \frac{L}{\ell} = 0,2806 \quad \text{iii)}$$

(Kočin, Kibel, Rose, 1963).

Karmánův model vírové řady vede k velmi uspokojivému vyjádření odporu tělesa (4.6.52). Nedovoluje však určit frekvenci úplavových poruch a nerespektuje existenci smykové vrstvy na hranici úplavu.

ve tvaru

$$F_R = \rho_{\infty} \ell v_{\infty}^2 \left[0,7936 \frac{v_v}{v_{\infty}} - 0,3141 \left(\frac{v_v}{v_{\infty}} \right)^2 \right]. \quad (4.6.52)$$

Zde v_{∞} je rychlost pohybu tělesa, v_v je rychlost pohybu vírů a ℓ jejich vzdálenost (resp. $v_v = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\omega \ell}{2\pi} = \frac{v_{\infty} \operatorname{Sh} \ell}{L}$, kde Δt je jejich perioda). Naším cílem bude, nalézt hodnotu čísla Sh v případě existence vírové řady v závislosti na tvaru

úplavu a určit velikost pulzující složky zpětné síly na těleso.

obr. 4.21 → Mezní vrstva na obtékaném tělese přechází v úplavu ve vrstvu smykovou. Principiální nestabilita smykové vrstvy je diskutována v kap. 4.4.1. Ukážeme, že smyková vrstva a vnitřní část úplavu jsou v jakési rezonanci a vzájemně se ovlivňují. Z těchto rezonančních vlastností určíme velikost Strouhalova čísla vírové řady. O vnitřní části úplavu budeme předpokládat, že je tvořena vyvinutou dvourozměrnou vírovou řadou. Uvažujeme stacionární (periodický) nevazký model. Proudové pole uvnitř úplavu si představíme jako superpozici vyrovnaného proudu a rychlostního pole víru, viz obr. 4.21b) (Bejan, 1982).

V přirozených souřadnicích \tilde{x}, \tilde{y} (\tilde{x} má směr vektoru rychlosti v - proudnice - a \tilde{y} je kolmá, viz obr. 4.21) má bilance hmotnosti tvar

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial \tilde{x}} + \rho v \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (4.6.53)$$

a bilance hybnosti ve směru \tilde{x}

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (4.6.54)$$

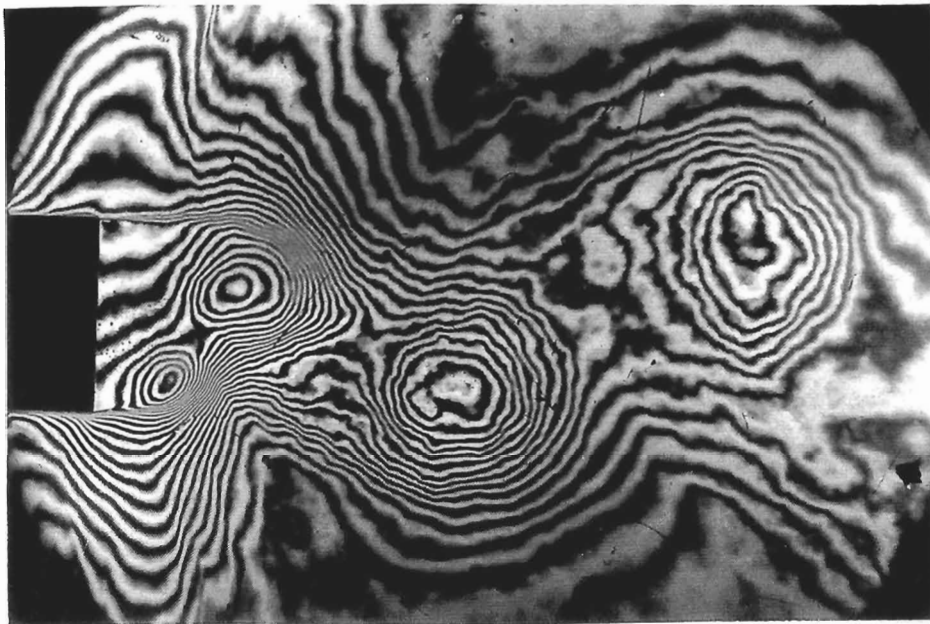
ve směru \tilde{y}

$$\rho v^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial p}{\partial \tilde{y}} = 0. \quad (4.6.55)$$

Úhel odklonu od rovnoběžného proudu značíme θ , přičemž platí

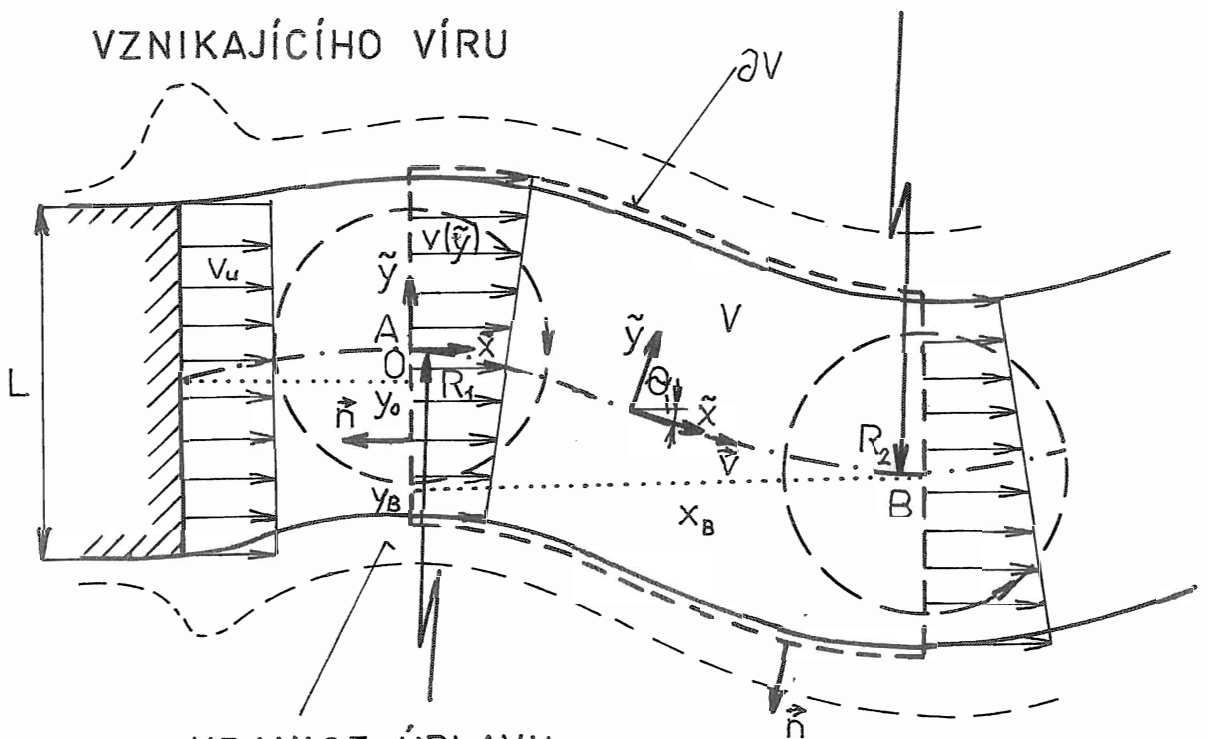
$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{R},$$

kde R je poloměr křivosti proudnice.



a)

TLAKOVÝ PULZ OD
VZNIKAJÍCÍHO VÍRU



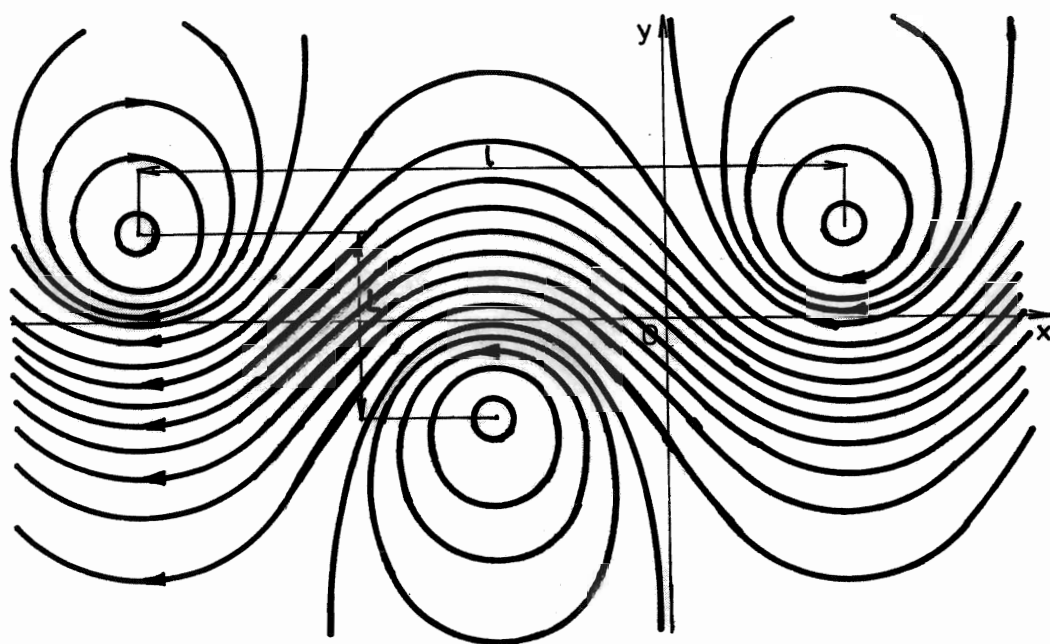
b)

HRANICE ÚPLAVU
(SMYKOVÁ VRSTVA)

Obr. 4.21

Vírová řada za tělesem

- a) symetrické obtékání desky $M_\infty = 0,8$, $Sh = 0,2$ (experiment ÚTČ)
- b) schématické znázornění bilance momentu hybnosti ve vírové řadě
 \bar{x} , \bar{y} jsou přirozené souřadnice



Obr. 4.21

c) Proudnice Kármánovy vírové řady ^{4.18)} v soustavě (x,y)
 spojené s úplavovými víry

Bilanci momentu hybnosti vzhledem k bodu A v konstantním objemu V , $(\tilde{x}_A = 0, \tilde{y}_A = 0)$, (viz obr. 4.21) zapišeme v integrálním tvaru 4.19)

$$-\int_{\partial V} \tilde{y} \rho v^2 da_{\tilde{x}} = -\int_{\partial V} (\tilde{x} p da_{\tilde{y}} - \tilde{y} p da_{\tilde{x}}) \quad (4.6.56)$$

Zde $da_{\tilde{x}} = d\tilde{y}d\tilde{z}$, $da_{\tilde{y}} = d\tilde{x}d\tilde{z}$ jsou složky elementu povrchu ∂V s uvažováním vnější normály. Objem V je volen tak, aby obsahoval nějakou část úplavu.

4.19)

Bilance momentu hybnosti (I.4.3.6) je v kartézských souřadnicích vyjádřena rovností momentu setrvačných sil s momentem vnějších povrchových sil (objemové síly neuvažujeme), tj.

$$\begin{aligned} \int_V [(\underline{x} - \underline{y}_0) \wedge \rho \underline{v}]^{ij} d\tau &= \int_V [\rho (x^i - y_0^i) v^j - (x^j - y_0^j) v^i] d\tau = \\ &= \int_{\partial V} [(x^i - y_0^i) t^{kj} - (x^j - y_0^j) t^{ki}] da_{\underline{k}}. \end{aligned} \quad \text{i)}$$

Vnější součin \wedge obou vektorů $\underline{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\underline{b} = (b^1, b^2, b^3)$ (viz pozn. I.3.14) je definován jako antisymetrický tenzor, jehož ij -tá složka je $(\underline{a} \wedge \underline{b})^{ij} = a^i b^j - a^j b^i$.

Výraz na levé straně upravíme, viz (I.4.3.6)

$$\begin{aligned} \int_V [(\underline{x} - \underline{y}_0) \wedge \rho \underline{v}]^{ij} d\tau &= \int_V \rho [(\underline{x} - \underline{y}_0) \wedge \underline{v}]^{ij} d\tau = \\ &= \int_V \left\{ \rho \frac{\partial}{\partial t} [(\underline{x} - \underline{y}_0) \wedge \underline{v}]^{ij} + \rho v^k \frac{\partial}{\partial x^k} [(\underline{x} - \underline{y}_0) \wedge \underline{v}]^{ij} \right\} d\tau. \end{aligned} \quad \text{ii)}$$

Ve stacionárním případě je první člen posledního integrálu nulový

a $\frac{\partial(\rho v^l)}{\partial x^l} = 0$, takže moment setrvačných sil ii) můžeme zapsat ve tvaru

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x^l} \{ [(x - y_0) \wedge v]^{ij} \rho v^l \} dV = \int_{\partial V} [(x - y_0) \wedge v]^{ij} \rho v^l da_l. \quad \text{iii)}$$

Bilance momentu hybnosti má pro tento případ tvar

$$\int_{\partial V} [(x^i - y_0^i) v^j - (x^j - y_0^j) v^i] \rho v^l da_l = \int_{\partial V} [(x^i - y_0^i) t^{kj} - (x^j - y_0^j) t^{ki}] da_k.$$

iv)

Složku momentu hybnosti $(x \wedge \rho v) \times y = x \rho v_y - y \rho v_x$

lze interpretovat složkou vektoru kolmou k rovině papíru a pro dvourozměrný případ na obr. 4.21 je $y_0 = (0, 0)$, $x = (\tilde{x}, \tilde{y})$, $v_x = v$, $v_y = 0$.

Rovnice (4.6.56) je výchozí pro odvození kmitů úplavu. K jejímu řešení je třeba nalézt rozložení rychlosti a tlaku napříč úplavem. Z rovnice bilance hybnosti podél proudnice (4.6.54) plyne

$$\frac{v^2(\tilde{y})}{2} + \frac{p(\tilde{y})}{\rho_u} = konst \quad (4.6.57)$$

a z rovnice (4.6.55) dostáváme

$$p(\tilde{y}) = p_u - \int_0^{\tilde{y}} \frac{\rho_u v_u^2}{R} d\tilde{y} = p_u - \frac{\rho_u v_u^2}{R} \tilde{y}, \quad (4.6.58)$$

kde v_u, p_u, ρ_u jsou hodnoty vyrovnaného proudu v úplavu. Dosazením (4.6.58) získáme rozložení rychlosti

$$\frac{v(\tilde{y})}{v_u} = \sqrt{1 + \frac{2\tilde{y}}{R}}. \quad (4.6.59)$$

Provedeme integraci po povrchu ∂V (viz obr. 4.21b) v zákonu bilance momentu hybnosti. Integrály pro da_y se vzájemně vyruší, takže dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{S_A} \left[\tilde{y} \rho_u v_u^2 \left(1 + \frac{2\tilde{y}}{R}\right) + \tilde{y} \left(p_u - \frac{\rho_u v_u^2 \tilde{y}}{R}\right) \right] d\tilde{y} d\tilde{z} = \\ = \int_{S_B} \left[(\tilde{y} - y_B) \rho_u v_u^2 \left(1 + \frac{2\tilde{y}}{R}\right) + (\tilde{y} - y_B) \left(p_u - \frac{\rho_u v_u^2 \tilde{y}}{R}\right) \right] d\tilde{y} d\tilde{z}, \end{aligned} \quad (4.6.60)$$

kde integrace probíhá po vstupní ploše S_A a výstupní ploše S_B objemu V . Tyto plochy jsou současně kolnými průřezy úplavu a jsou v zásadě obdélníkové ($S = L \cdot Z$ za plochým tělesem hloubky Z) a kruhové ($S = \frac{\pi L^2}{4}$ za rotačním tělesem, element kruhové plochy je $2\pi r dr$). Integrály liché funkce v (4.6.60) jsou nulové a integrál

$$I = \int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} = \begin{cases} \frac{L^3 Z}{12} \\ \frac{\pi L^4}{64} \end{cases}$$

(4.6.61)

je moment setrvačnosti průřezu. Rovnici bilance momentu hybnosti (4.6.60) píšeme ve tvaru

$$\frac{I_A}{R_A} = \frac{I_B}{R_B} - y_B \left(1 + \frac{C_{pu}}{2} \right) S_B \quad (4.6.62)$$

$$C_{pu} = \frac{\rho_u}{\frac{1}{2} \rho_u y_u^2} ,$$

kde indexy A, B označují polohu průřezu a C_{pu} je tlakový koeficient vyrovnaného proudu v úplavu.

Střednice úplavu, na které leží body A, B je popsána křivkou $y_B = y_B(\tilde{x})$, kde \tilde{x} je její přírozený (délkový) parametr, takže poloměr křivosti R_B v bodě B je určen vztahem

$$\frac{1}{R_B} = - \frac{d^2 y_B}{(d\tilde{x})^2} \quad (4.6.63)$$

(viz I.D2.116). Bod B může být libovolným bodem střednice a proto index B vypustíme. Její tvar je popsán křivkou $y = y(\tilde{x})$, která je řešením lineární diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 y}{(d\tilde{x})^2} + k^2 y = - \frac{I_A}{R_A I(\tilde{x})} , \quad (4.6.64)$$

kterou získáme z rovnice (4.6.62). Jde o rovnici buzených stacionárních kmitů, jejichž vlnové číslo je

$$k = \frac{2\pi}{l} = \sqrt{\frac{S(\tilde{x})}{I(\tilde{x})} \left(1 + \frac{C_{pu}}{2} \right)} \quad (4.6.65)$$

a budící silou je $-\frac{I_A}{R_A}$.

Rovnici (4.6.64) budeme řešit, za předpokladu, že $k, I(\tilde{x}) = I_A$ jsou konstanty, jako počáteční úlohu, tj. na intervalu $\tilde{x} \in \langle 0, \infty \rangle$ za počátečních podmínek $y(0+) = y_0, \frac{dy(0+)}{d\tilde{x}} = 0$.

Střednice je tudíž v bodě $\tilde{x} = 0$ vychýlena o y_0 . Použijeme metody Laplaceovy transformace (viz pozn. I.6.3). Obraz řešení je $F(s)$ a obraz rovnice (4.6.64) za odpovídajících počátečních podmínek

$$s^2 F(s) - y_0 + k^2 F(s) = -\frac{1}{s R_A} \quad (4.6.66)$$

resp.

$$F(s) = -\frac{1}{R_A s(s^2 + k^2)} + \frac{s y_0}{s^2 + k^2}$$

Zpětnou Laplaceovu transformací (Korn, 1973) získáme hledané řešení

$$y(\tilde{x}) = -\frac{1}{k^2 R_A} + \left(\frac{1}{R_A k^2} + y_0 \right) \cos k\tilde{x} = -\frac{2}{k^2 R_A} \sin^2 \left(\frac{k\tilde{x}}{2} \right) + y_0 \cos k\tilde{x} \quad (4.6.67)$$

(srovnej se střednicí Kármánovy vírové řady, pozn. 4.18), vztah ii))
 Jde o harmonické kmity, jejichž vlnové číslo (4.6.65) závisí jak na průřezu úplavu S , tak i na momentu setrvačnosti průřezu (4.6.61) a proudovém poli v úplavu vyjádřeném koeficientem tlaku C_{pu} . Amplituda kmitů střednice, kterou jsme označili y_0 souvisí v obecném případě s počátečním poloměrem křivosti R_A a vlnovým číslem k . V jednoduchém případě, kdy $R_A \rightarrow \infty$ (v bodě A je vyrovnaný proud) je amplituda nezávislá.

K určení frekvence úplavu musíme nalézt rychlost pohybu vírů. Tato rychlost je závislá na rychlosti postupu poruch na

hranici úplavu, přičemž tuto hranici považujeme za smykovou vrstvu vyhovující rovnici (4.6.43). Její koeficienty považujeme za konstanty, jejichž velikost určíme z experimentu z hodnot čísla Sh.

Rovnici smykové vrstvy napíšeme ve tvaru

$$D\delta \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + C_{v_{x1}} \frac{\partial \delta}{\partial t} + B_{v_{x1}} \delta \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + A_{v_{x1}}^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = - \frac{\tau_w}{\rho_{01}} .$$

(4.6.68)

Vnější proudové pole si představíme jako superpozici vyrovnaného proudu v_{∞} a poruchové složky $v' e^{i(kx + \omega t)}$ reprezentované postupnou vlnou ve směru záporné osy x , tj. ve směru od úplavu. Tloušťku smykové vrstvy hledáme ve tvaru

$$\delta(x,t) = \delta_{\infty} + \delta' e^{i(kx + \omega t)} ,$$

(4.6.69)

kde δ_{∞} je nějaká konstantní tloušťka odpovídající vyrovnanému proudu a δ' je amplituda poruchy. Smykové napětí (4.6.42)₅ považujeme za malou veličinu ($a \approx 3$) a předpokládáme ho ve tvaru $\tau_w = \tau_w' e^{i(kx + \omega t)}$.

Dosazením do rovnice (4.6.68) a zanedbáním malých členů vyššího řádu dostáváme

$$\omega(D\delta_{\infty} v' + C_{v_{\infty}} \delta') + k(B_{v_{\infty}} \delta_{\infty} v' + A_{v_{\infty}}^2 \delta') = \frac{i \tau_w'}{\rho_{01}} .$$

(4.6.70)

Vlnové číslo postupné vlny, která se utváří na hranici úplavu je

$$k = -\frac{\omega \left(D \delta_{\infty} \frac{v'}{v_{\infty}} + C \delta' \right)}{v_{\infty} \left(B \delta_{\infty} \frac{v'}{v_{\infty}} + A \delta' \right)} + \frac{i \tau'_w}{\rho_{01} v_{\infty}^2 \left(B \delta_{\infty} \frac{v'}{v_{\infty}} + A \delta' \right)} \quad (4.6.71)$$

Uvážíme-li, že $\delta_{\infty} \sim \delta', \frac{v'}{v_{\infty}} \ll 1$ a že při $a = 3$ je $A = 1,01, B = -1,63, C = -7/5, D = 0,1$ lze vztah (4.6.71) zjednodušit

$$k = -\frac{\omega C}{v_{\infty} A} + i \frac{\tau'_w}{\rho_{01} v_{\infty}^2 A \delta'} \quad (4.6.72)$$

Reálná část vlnového čísla je rovna $\frac{2\pi}{\ell}$. V případě, že je kladná, odpovídá vlně postupující od úplavu k odtokové hraně. Imaginární část určuje zesílení poruchy ($\tau'_w < 0$), popř. zeslabení ($\tau'_w > 0$). Změna rychlosti je

$$\frac{v}{v_{\infty}} = 1 + \frac{v'}{v_{\infty}} e^{-\frac{\tau'_w x}{\rho_{01} v_{\infty}^2 A \delta'}} \cos \left[\omega \left(\frac{C}{v_{\infty} A} x + t \right) \right] \quad (4.6.73)$$

Tudíž pro $\tau'_w < 0$ ($a > 3$) porucha narůstá, což je patrné i z interferogramu na obr. 4.21a.

Velikost frekvence vírové řady nalezneme porovnáním reálné části (4.6.72) se vztahem (4.6.65). Odtud plyne pro Strouhalovo číslo vztah

$$Sh = \frac{\omega L}{2\pi v_{\infty}} = -\frac{LA}{2\pi C} \sqrt{\frac{S}{I} \left(1 + \frac{C_{pu}}{2} \right)} \quad (4.6.74)$$

ze kterého určíme velikost $\frac{A}{C}$ na hranici smykové vrstvy.

Pro obdélníkový průřez úplavu charakterizovaného poměrem

$\frac{S}{I} = \frac{12}{L^2}$ nabývá $Sh = 0,186$ pro $\frac{A}{C} = -0,338$ (za předpokladu $C_{pu} \ll 1$) tj. pro $a \approx 3,25$. Pro kruhový průřez průměru L je $\frac{S}{I} = \frac{16}{L^2}$ takže pro stejnou hodnotu a je $Sh \approx 0,215$.

Vzájemná vazba mezi frekvencí smykové vrstvy a frekvencí úplavu je vyjádřena vztahem (4.6.71). Jen při jejich vzájemné rezonanci dochází ke vzniku stabilní vírové řady. Tuto rezonanci je možno narušit dostatečně dlouhou (více než $5L$) dělicí planžetou v úplavu, čímž se zabrání vzniku vírů. Další možnost je i změnou tlaku (tj. změna C_{pu} vyfukováním či odsáváním).

Velikost tlakového pulzu na těleso vyvolané^{ho} odtržením mezní vrstvy odhadneme pomocí vztahu (4.6.39). Uvážíme, že pro $a = 1$ neexistuje žádný tlakový gradient a pro $a = 3,25$ nastává vírová řada. Vztah (4.6.39) přepíšeme do tvaru

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{6(a-1)\mu_{o1} v_{x1}}{\delta^2}, \quad (4.6.75)$$

kde $p_1(x,t)$, $\delta(x,t)$, $v_{x1}(x,t)$, $a(x,t)$ charakterizují proudové pole podél obtékaného tělesa před bodem odtržení. Představíme si je ve tvaru

$$\begin{aligned} v_{x1} &= \bar{v}_x(x) + \frac{v'}{(x)^2} \cos(kx + \omega t) \\ \delta &= \bar{\delta}(x) + \delta'(x,t) \\ p_1 &= \bar{p}(x) + p'(x,t), \end{aligned} \quad (4.6.76)$$

kde s pruhem jsme označili stacionární hodnoty podél povrchu a s čárkou časově závislé poruchy. Předpokládáme, že poruchy jsou válcové vlnoplochy (3.7.30) a jdou jednak z bodu odtržení ($x=0$) proti proudu (ve směru záporné osy x), pak je fáze vlny $kx + \omega t$

pro

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{\alpha(1-\bar{M})} \quad (4.6.77)$$

a jednak po proudu směrem k bodu odtržení, pak $kx - \omega t$

pro

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{\alpha(1+\bar{M})} \quad (4.6.78)$$

Zde α je místní rychlost zvuku a $\bar{M} = \frac{\bar{V}_x}{c}$ je Machovo číslo na obtékaném povrchu. V případě stabilní vírové řady, která je důsledkem rezonance smykové vrstvy a úplavu, viz obr. 4.21a), b), se uplatňují pouze poruchy jdoucí proti proudu (4.6.67).

Tlakový gradient (4.6.75) má s ohledem na rovnici (4.6.76)₃ také dvě části, protože

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{6(a-1)\mu_{01}\bar{V}_x}{\delta^2} \left[1 + \frac{v'}{(x)^2 \bar{V}_x} \cos(kx \pm \omega t) \right] \quad (4.6.79)$$

Ta část gradientu, která doprovází odtržení bez vírové řady ($a = 3$) má velikost

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{12\mu_{01}\bar{V}_x}{\delta^2} \quad (4.6.80)$$

Např. pro vnější vyrovnaný proud $v_x = v_\infty$ je tato část s ohledem na tloušťku mezní vrstvy (4.6.4⁹) rovna

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\rho_{01}v_\infty^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial C_p}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad (4.6.81)$$

(srovnej s (4.6.17))

Pulzující složka gradientu je

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{v'}{(x)^2 \bar{v}} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) \cos(kx \pm \omega t) \quad (4.6.82)$$

a integrací po povrchu tělesa od bodu odtržení můžeme přibližně psát

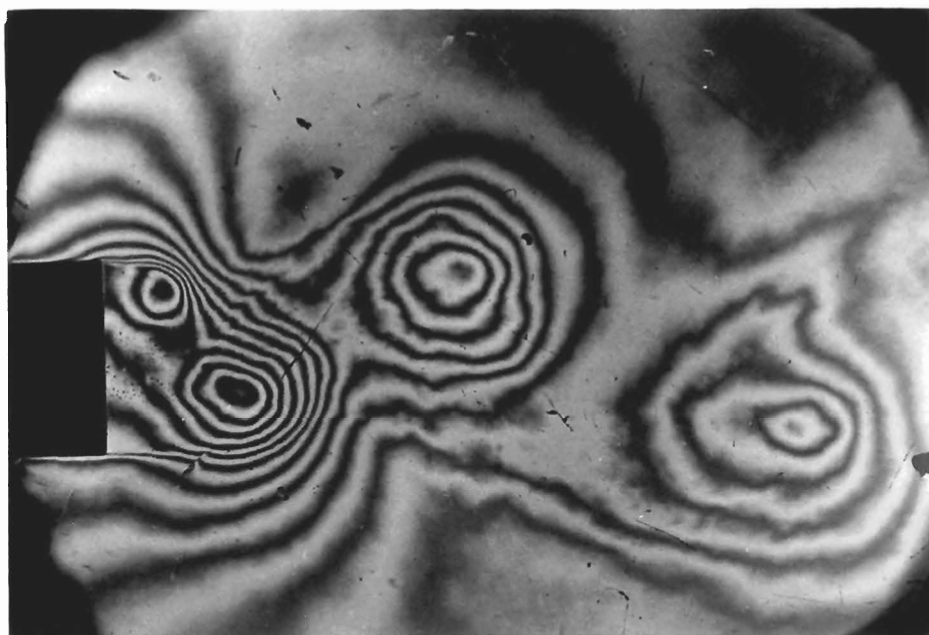
$$\frac{p(x,t)}{p_0} = \frac{\bar{p}(x)}{p_0} + \frac{\Delta p}{(x)^2 p_0} \sin(kx \pm \omega t). \quad (4.6.83)$$

Zde Δp je tlaková pulzace, \bar{p} je stacionární (resp. střední) rozložení tlaku po povrchu obtékaného tělesa a p_0 je klidový tlak tekutiny. Velikost Δp a průběh \bar{p}, \bar{M} je většinou třeba určit buď experimentálně (viz např. obr. 4.23) a nebo vhodným numerickým výpočtem (viz např. kap. 2.4.4). Frekvenci pulzací lze vyjádřit Strouhalovým číslem (4.6.74) $\omega = \frac{2\pi Sh v_{\infty}}{L}$.

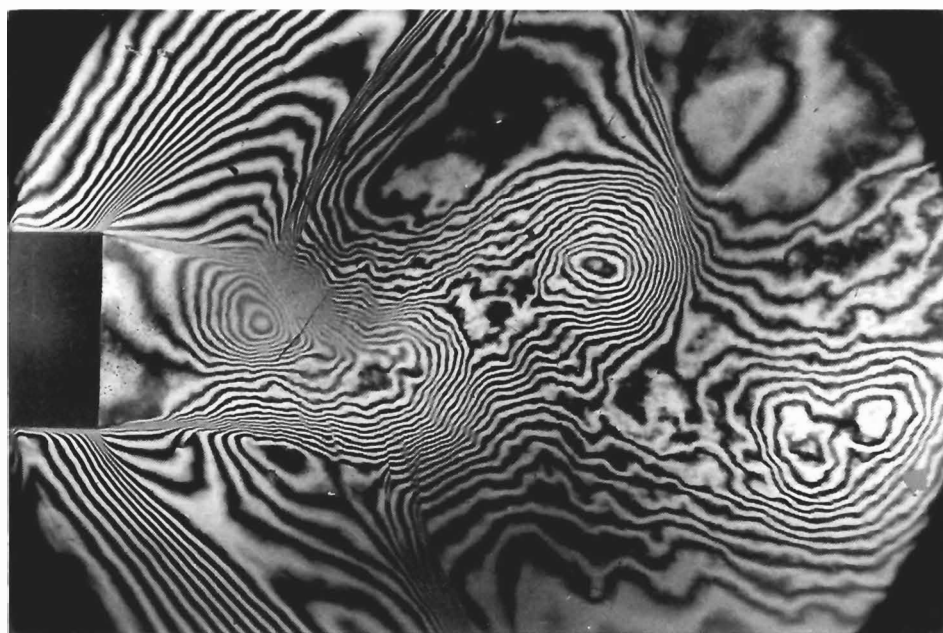
Tlakové změny na povrchu obtékaného tělesa mají za následek silové účinky na těleso, jejichž časová závislost může být buď periodická (např. od Kármánovy vírové řady, transsonické nestability) a nebo stochastická (od turbulentních proudů). Následkem těchto sil se může obtékané těleso rozkmitat a pulzace proudového pole se mohou dostat do rezonance s vlastními kmity obtékaného tělesa. Rozkmitané těleso čerpá svoji energii a hybnost z obtékané tekutiny a naopak, přičemž dochází k silnému vzájemnému ovliv-

ňování-interakci. Interakce je zvláště silná jestliže tlaková změna na povrchu obtékaného tělesa vede ke změně jeho tvaru (deformaci) tak, že odpovídající změna v proudovém poli způsobí další nárůst této deformace (jde-li o kladnou zpětnou vazbu). Vzhledem k tomu, že rozhodující roli zde hrají elastic-
ké vlastnosti obtékaného tělesa a silové účinky proudových polí, nazýváme tento jev aeroelasticitou. V některých případech má tato interakce za následek i poškození tělesa. Může dojít např. ke zborcení mostu či chladicí věže (Fischer a kol., 1977), k destrukci křídla letadla (Försching, 1984), k rozkmitání protékaných skořepin (trubek) (Horáček, Zolotarjev, 1984) apod.

obr. 4.22 → Tlakové pulzace doprovázející vznik úplavových vírů jsou dobře patrné na interferogramech na obr. 4.22. Při rychlostech s $\bar{M} < 1$ pronikají poruchy i proti proudu, obr. 4.22a), kdežto při rychlostech $\bar{M} \approx 1$ dochází ke vzniku expanzních oblastí s $\bar{M} > 1$, které jsou uzavřeny rázovými vlnami, obr. 4.22b). Poruchy proti proudu nepronikají. Neexistuje-li možnost přenosu úplavových poruch kolem náběžné hrany tělesa, je jejich frekvence rovna frekvenci úplavu (4.6.74). Tato situace nastává při obtékání dlouhých těles a při velkých supersonických rychlostech v rovině úplavu. Případům, kdy poruchy obíhají náběžnou hranu je věnována následující kapitola.



a)



b)

Obr. 4.22

Interferogramy proudového pole blízkého úplavu při obtékání rovinné desky

a) $M_\infty = 0,5$, $Sh = 0,2$, $Re_\infty = 4 \cdot 10^5$ - tlaková porucha ^{proniká} proti proudu

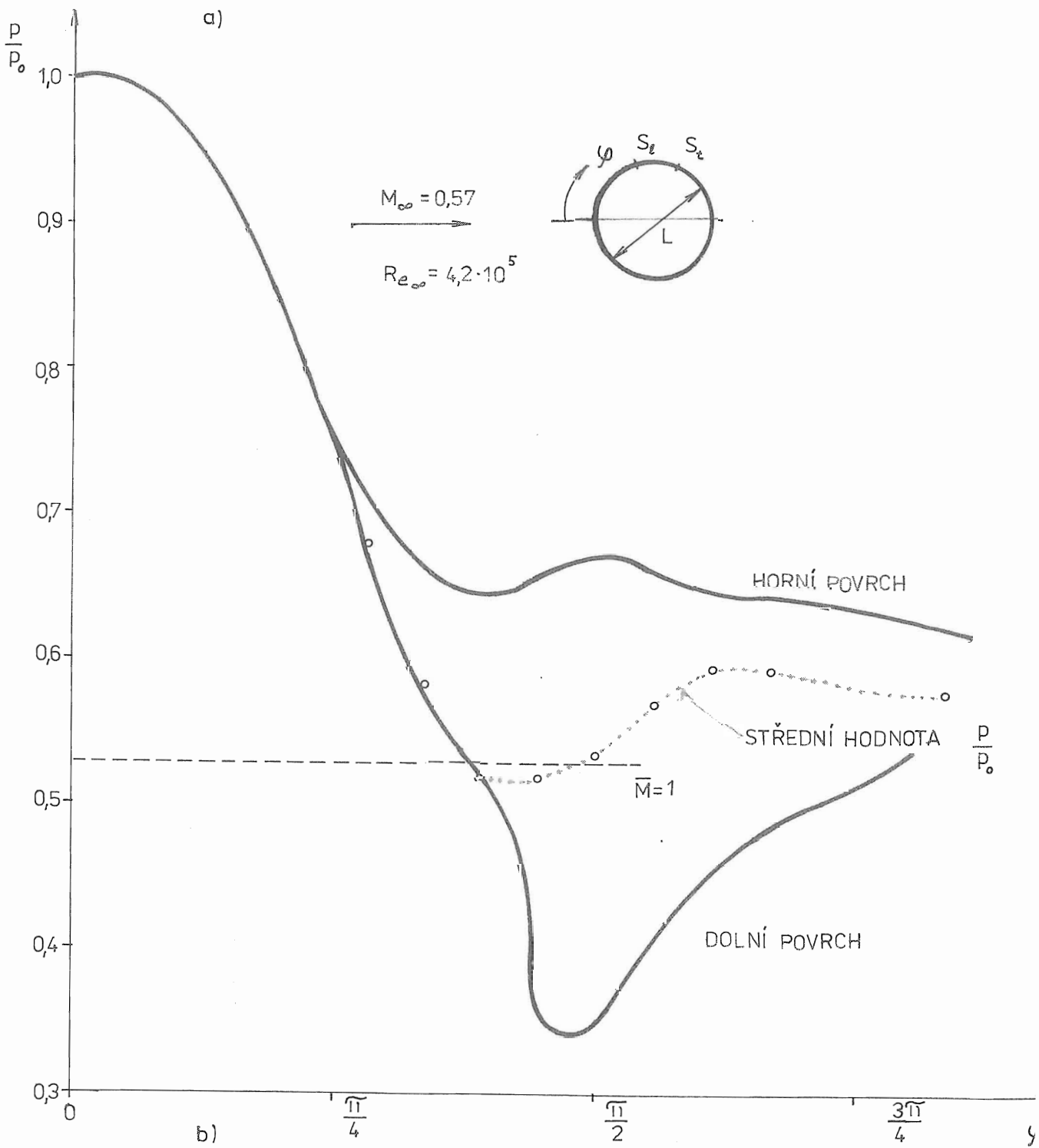
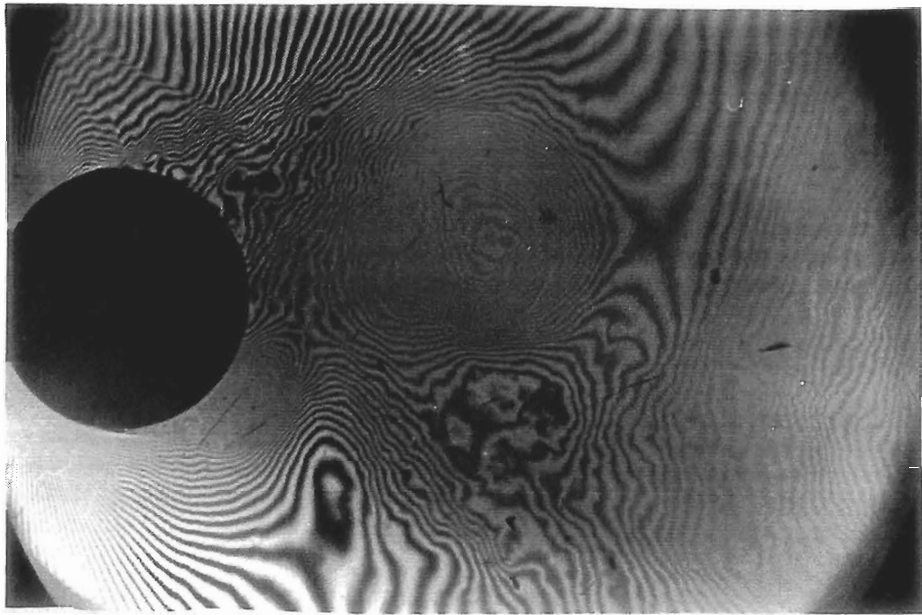
b) $M_\infty = 1,05$, $Sh = 0,2$, $Re_\infty = 6,2 \cdot 10^5$ - slabé tlakové poruchy proti proudu pronikat nemohou

4.7 Transsonická nestabilita

Proudění nazýváme transsonickým, jestliže existuje v proudovém poli oblast, kde je rychlost tekutiny nadzvuková ($M > 1$). Např. při obtékání rotačního válce se taková oblast objevuje při rychlosti $M_\infty \geq 0,505$ ($\lambda_\infty \geq 0,54$). Při rovnosti se objevuje zvuková rychlost ($M = 1$) pouze v izolovaných bodech. Takovou rychlost nabíhajícího proudu nazýváme kritickou. Při nevazkém obtékání je kritická rychlost menší, $M_\infty = 0,428$ ($\lambda_\infty = 0,46$), protože při vazkém obtékání dochází k odtržení mezní vrstvy a tím ke změně efektivního tvaru obtékaného tělesa. Pro laminární mezní vrstvu nastává odtržení při 81° a pro turbulentní mezní vrstvu při 110° , viz obr. 4.23, body S_t, S_t .

obr. 4.23 → Typické nestacionární transsonické proudové pole lze pozorovat při obtékání rotačního válce, viz interferogram na obr. 4.23a). Mechanismus vzniku periodických pulzací je jiný než při vírové řadě v úplavu za tělesem. Pravidelná vírová řada není ani v blízkém úplavu příliš výrazná. Strouhalovo číslo pulzací není pro oblast charakterizovanou čísly $Re_\infty \in (5 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^5)$, $M_\infty \in (0,5, 1)$ konstantní, ale pohybuje se v rozmezí hodnot $Sh \in (0,18; 0,45)$, viz obr. 4.20 (viz též Chang, 1972). Jejich silové účinky jsou uvedeny na obr. 4.23b).

Na základě rozboru výše uvedených jevů budeme definovat transsonickou nestabilitu takto: Transsonickou nestabilitou nazýváme periodické rozkmitání transsonického proudového pole, spojené především se změnou velikosti a polohy supersonické oblasti na profilu a se změnou polohy bodů odtržení mezní vrstvy.



Obr. 4.23

Nestabilní příčné obtékání rotačního válce (experiment ÚT ČSAV)

- a) interferogram pro $M_\infty = 0,57$, $Re_\infty = 4,2 \cdot 10^5$ (metoda konečné šířky proužku)
- b) odpovídající okamžitá hodnota rozložení tlaku po povrchu válce

Stanovení frekvence pulzací při transsonické nestabilitě a jejím silovým účinkům se budeme věnovat v následujících kapitolách. Určení velikosti frekvence se jako první věnoval R. Dvořák (1964) při studiu stability interakce rázové vlny s mezní vrstvou. V důsledku odtržení mezní vrstvy rázovou vlnou dochází totiž ke změně efektivního tvaru obtékaného tělesa. Poloha bodu odtržení je u některých těles nestabilní a je značně citlivá k tlakovým poruchám, které pronikají od úplavu jednak mezní vrstvou a jednak vnějším proudovým polem (Dvořák, 1986). U těles se značným poklesem rychlosti (nárůstem tlaku) v blízkosti odtokové hrany, např. rotační válec, či 18% dvoukruhový profil, je změna tohoto tvaru natolik výrazná, že vede k velkým změnám v okolním proudovém poli. Naproti tomu u těles štíhlých, s pozvojným poklesem rychlosti (např. NACA 0012, viz obr. 2.10), je vliv úplavových poruch zanedbatelný (Maršík, 1978). Ke stejnému jevu dochází i v kanálech při proudění s odtržením, vyvolaným rázovou vlnou (Meier, 1976).

4.7.1 Frekvence a silové účinky transsonické nestability

Z interferogramů na obr. 4.24a),c) je patrné, že základní mechanismus nestability je třeba hledat v pohybu rázových vln podél povrchu. Rázová vlna se v tekutině šíří rychlostí danou vztahem (3.5.24), čili její relativní rychlost vůči prostředí před vlnou je

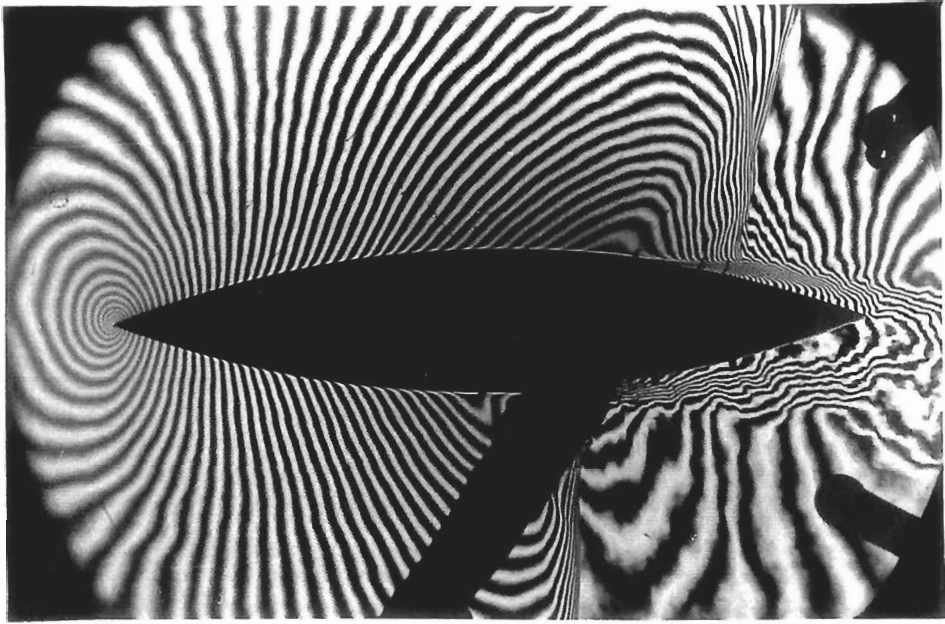
$$-u^+ = -c^+ \sqrt{1 - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p^- - p^+}{p^+}} \quad (4.7.1)$$

Rázová vlna je tudíž nestacionární vůči obtékanému profilu jestliže je rychlost prostředí před vlnou v^+ stejně velká jako u^+ ale opačná. Vůči pevné soustavě souřadnic (vůči profilu) se rázová vlna pohybuje proti proudu jen v tom případě, je-li klidová (celková) entalpie h_c^- za vlnou větší než před vlnou. Potom se pohybuje rychlostí - viz (3.5.19)

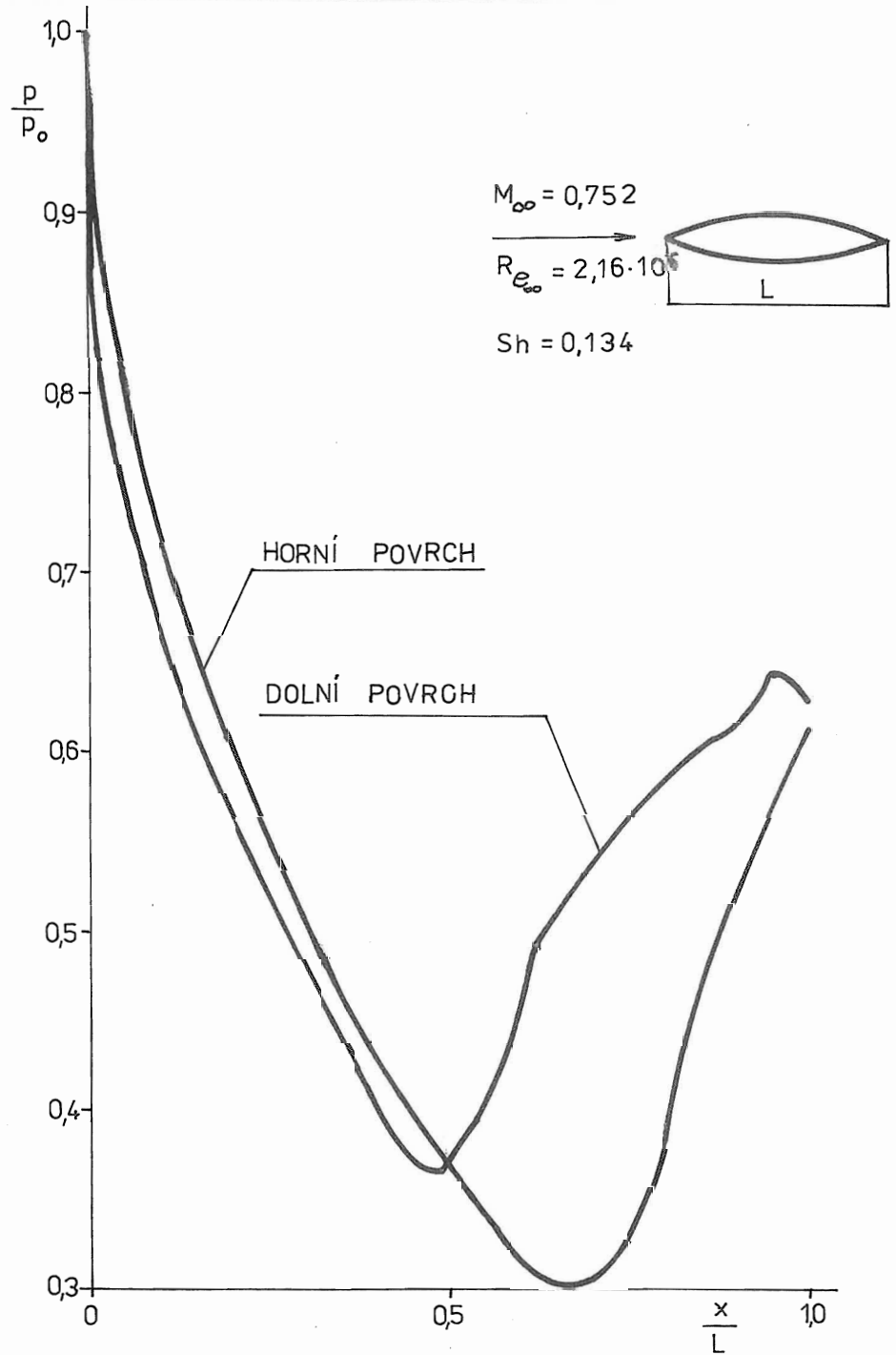
$$u = \frac{h_c^+ - h_c^-}{v^+ - v^-} \quad (4.7.2)$$

obr. 4.24

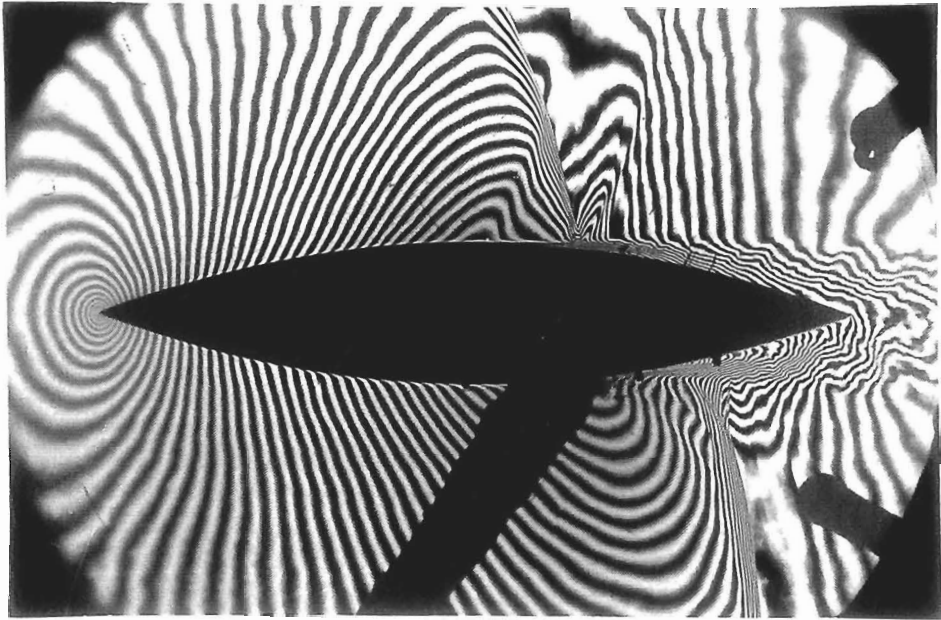
Při transsonické nestabilitě dochází ke změně celkové entalpie v blízkém úplavu hlavně pak přechodem tlakové energie, viz obr. 4.24b), a energie akustické. Potom $h_c^- = h_c^+ + h_c^i$ a podle (4.7.2) dochází k pohybu rázové vlny. Vlna je na horním povrchu (obr. 4.24a) doprovázena odtržením mezní vrstvy s následnou změnou efektivního tvaru povrchu a změnou cirkulace rychlostí kolem profilu. Postupem proti proudu (viz obr. 4.24c) rázová vlna slábne, mění se v poruchu, která obchází náběžnou hranu a je



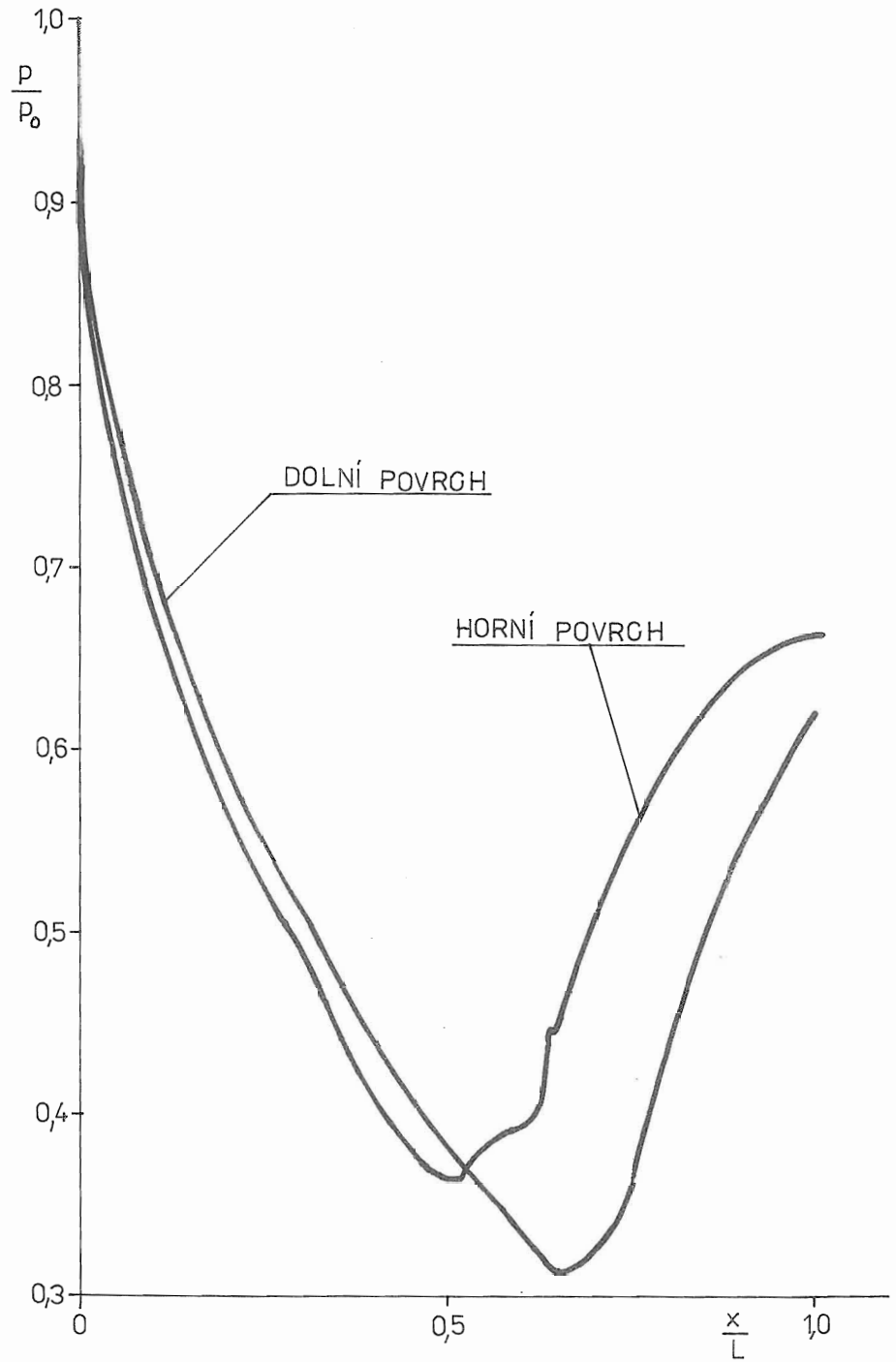
a)



b)



c)



d)

Obr. 4.24

Transsonická nestabilita při obtékání 18% dvoukruhového profilu
(experiment ÚT ČSAV)

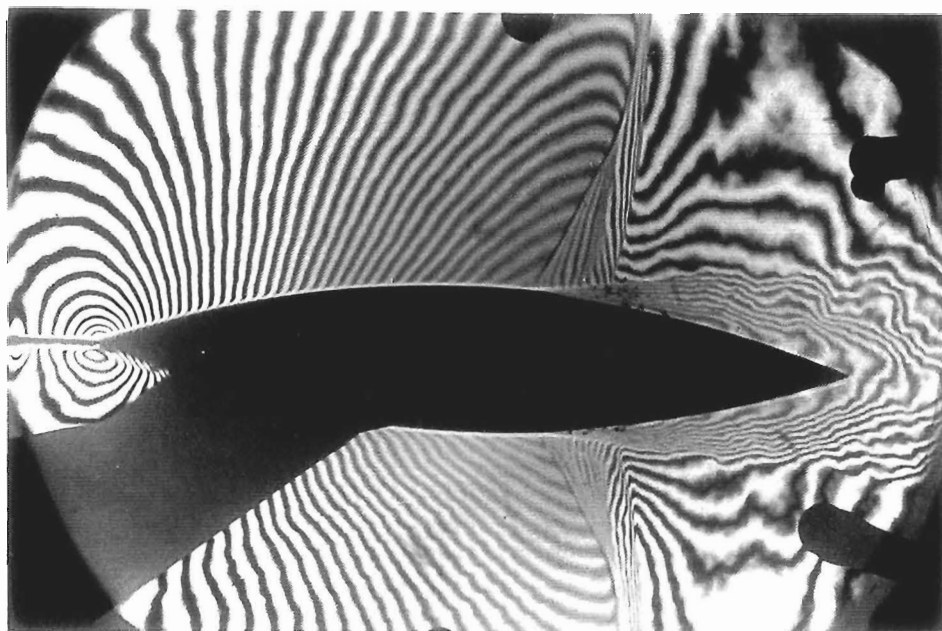
a),c) interferogramy proudového pole v opačných fázích
jedné periody

b),d) odpovídající rozložení tlaku

srážena proudem zpět k odtokové hraně. Dochází k urychlení proudu na dolním povrchu a ke vzniku silné rázové vlny s odtržením proudu. Tlak na horní části profilu v odtrženém proudění je vyšší (viz obr. 4.24d)) a přenáší se do části spodní. Tím se zvětší celková entalpie za dolní rázovou vlnou, která se proto pohybuje zpět proti proudu stejně, jako tomu bylo v první polovině periody na horním povrchu. Dochází ke vzájemné vazbě šíření poruch v úplavu a kolem náběžné hrany. Zabráníme-li pronikání poruch kolem náběžné hrany či blízkým úplavem, proudové pole se stabilizuje. Na interferogramu na obr. 4.25 je ukázáno, že stačí relativně slabá a krátká planžeta zabránit pronikání poruch kolem náběžné hrany. Vzhledem ke značným tlakovým pulzům v blízkém úplavu nestačí ke stabilizaci proudového pole krátká planžeta, viz obr. 4.26. Stejně jako ke stabilizaci vírové řady je i zde třeba použít tuhou destičku, dlouhou i několik L .

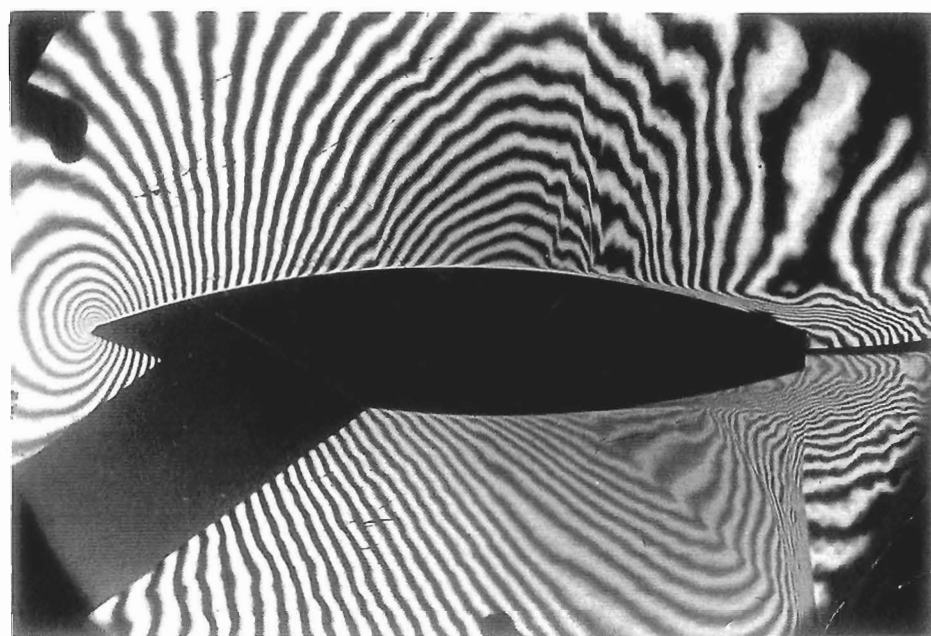
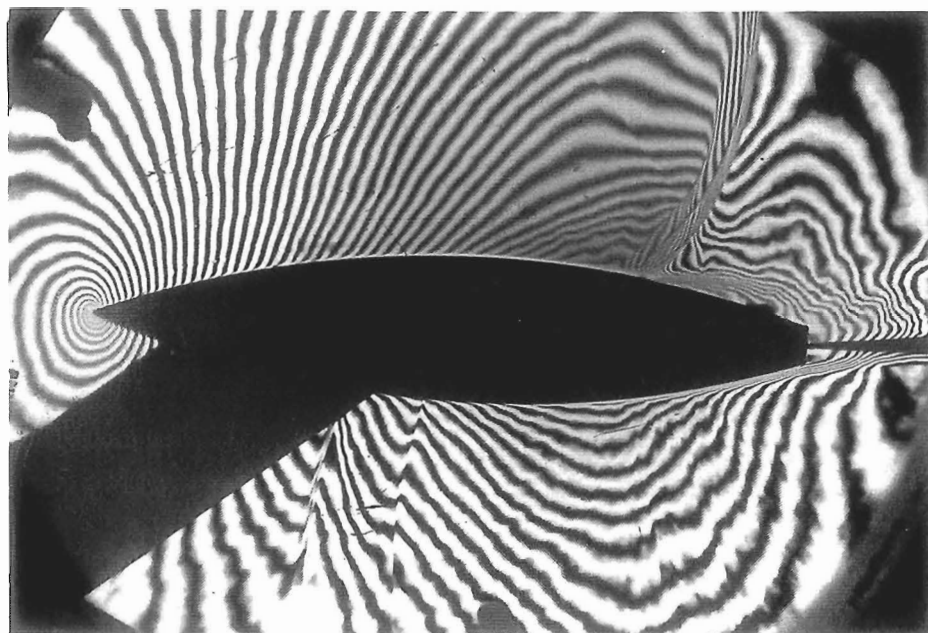
Jak vyplynulo z uvedených experimentů (Maršík, Vlček, 1980) existuje při transsonické nestabilitě, stejně jako v případě vírové řady, vzájemná vazba (rezonance) mezi poruchami v úplavu a poruchami vnějšího pole. Vyjdeme tedy z předpokladu, že frekvence transsonické nestability je dána frekvencí změn proudového pole kolem profilu. Určíme čas potřebný k tomu, aby porucha z bodu S_1 (viz obr. 4.27) došla kolem náběžné hrany do bodu S_2 a zpět. Předpokládáme-li, že v dostatečné vzdálenosti od profilu je tato porucha tak slabá, že se šíří rychlosti zvuku (ve vztahu (4.7.1) $\rho^- \approx \rho^+$) je čas jedné periody roven (Maršík, Vlček, 1980)

$$T = 2 \left[\frac{L_1}{a_\infty(1-M_\infty)} + \frac{L_1}{a_\infty(1+M_\infty)} \right] = \frac{4L_1}{a_\infty(1-M_\infty^2)} \quad (4.7.3)$$



Obr. 4,25

Stabilizující účinek planžety před obtékaným profilem
v nestabilní oblasti $M_{\infty} = 0,752$



Obr. 4,26

Ke stabilizaci transsonické nestability nestačí krátká
planžeta v odtokové hraně, $M_{\infty} = 0,752$

Strouhalovo číslo transsonické nestability je dáno vztahem

$$Sh = \frac{L}{T v_{\infty}} = \frac{L(1-M_{\infty}^2)}{4L_1 M_{\infty}}$$

(4.7.4)

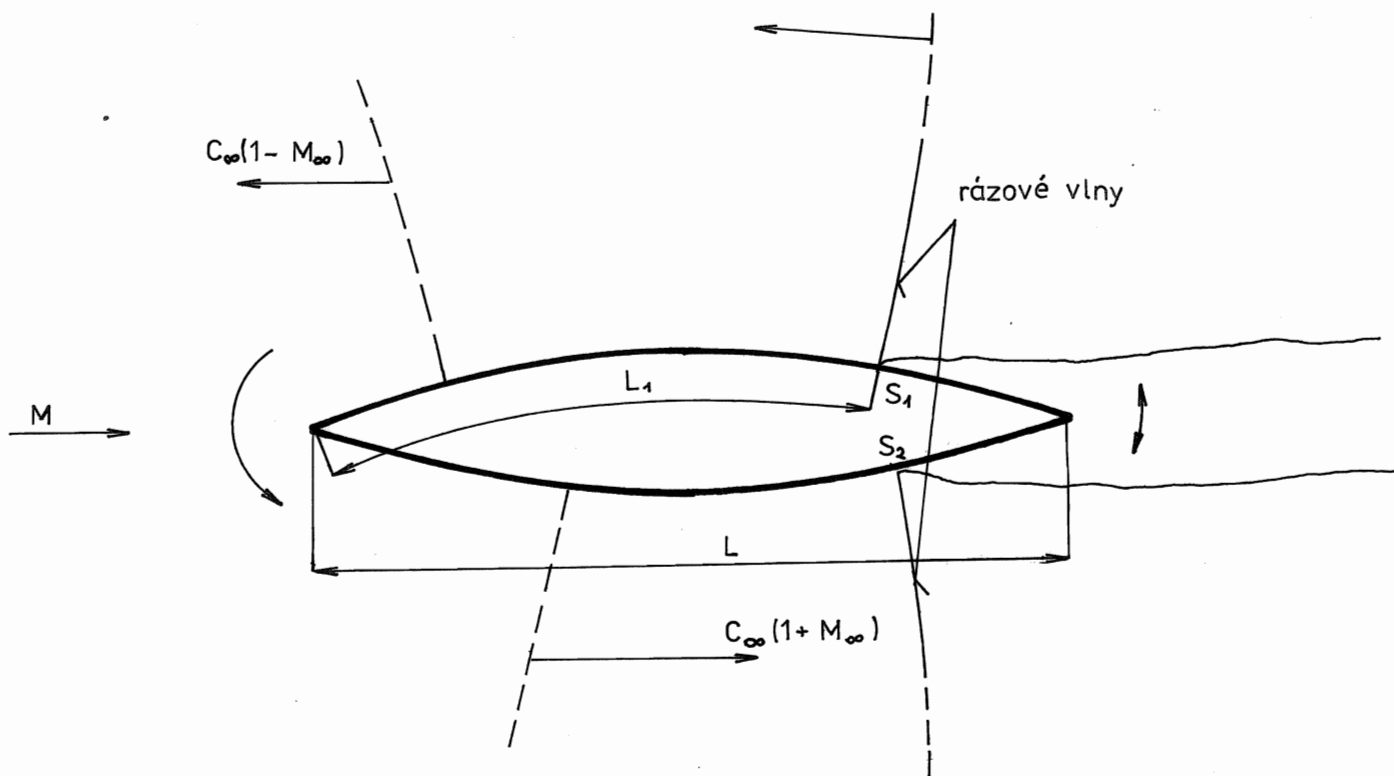
obr. 4.27 →

Pro experimenty provedené na 18% dvoukruhovém profilu s $L = 120\text{mm}$ $M_{\infty} = 0,752$ ($v_{\infty} = 242 \text{ m/s}$) byla naměřena frekvence 270 Hz, tj. $Sh = 0,134$. Podle vztahu (4.7.4), za předpokladu $L = L_1$ dostáváme $Sh = 0,14$. Vzhledem k tomu, že střední vzdálenost bodu odtržení L_1 je blízká charakteristickému rozměru, je souhlas s experimentem dobrý. Pro případ transsonické nestability na rotačním válci, viz obr. 4.23, je třeba odhadnout velikost $L_1 \doteq \frac{\pi L}{4}$.

Dosazením do (4.7.3) plyne pro válec $Sh = \frac{1-M_{\infty}^2}{\pi M_{\infty}^2}$

a pro experiment na obr. 4.23 vychází $Sh = 0,377$, což je opět v dobré shodě s experimenty, viz obr. 4.20.

Odhad silových účinků se provádí stejně jako v případě vírové řady pomocí vztahů (4.6.83). Zásadním problémem je určení velikosti změny tlaku Δp v úplavu. Dosud lze spolehlivě určit pouze experimentálně tak, že současně použijeme pneumatické měření (tlakové snimače) a optickou metodu (interferometr), viz obr. 4.23 a 4.24. Numerické řešení transsonického nestacionárního proudění zatím postačující úrovně nedosahuje.



Obr. 4.27

Schématické znázornění vzniku transsonické nestability

5. Závěr

Konkrétní příklady této knihy ukázaly jen malou část problematiky, kterou lze řešit metodami termodynamiky kontinua. Úmyslně, aby nenarostl neúměrně rozsah knihy, nebyly zahrnuty systémy, skládající se z většího počtu chemických komponent, mezi kterými probíhají chemické reakce, dále systémy s fázovými přechody a nebyla ani uvažována elektromagnetická interakce.

K přesnějšimu popisu takových problémů jako jsou např. koroze při mechanické zátěži, životnost a spolehlivost konstrukčních materiálů, technologické procesy (tváření, tuhnutí, tepelné zpracování, apod.) bude nezbytné uvažovat jednotlivé chemické komponenty, různé fáze a jejich interakci. Velký prostor pro aplikaci nerovnovážné termodynamiky se rovněž otevírá v biologických vědách, např. v biomechanice, při vývoji biomateriálů, umělých orgánů apod. Z uvedeného přehledu problémů plyne, že by bylo potřebné zpracovat ze stejného hlediska i termodynamiku chemicky reagujících směsí s uvažováním elektromagnetické interakce.

Závěrem připomeneme důležitý fakt, že řešení konkrétních příkladů vede zpět k upřesnění výchozích předpokladů a zákonů teorie a je nevyhnutelným článkem při poznávání objektivní reality.

Literatura

- ANDRONOV A., VIT A., KHAIKIN C. (1966): Theory of Oscillators, Pergamon Press, Oxford.
- ARECCHI F.T., HARRISON R.G. (1987): Instabilities and Chaos in Quantum Optics, Springer-Verlag, Berlin.
- ARNOLD V.I. (1978): Mathematical methods of classical mechanics, Springer Verlag, New York.
- BAKER A.J. (1983): Finite Element Computational Fluid Mechanics, Mc Graw-Hill Book Company, New York.
- BALESCU R. (1975): Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics, John Wiley and Sons, New York.
- BEAM R.W., WARMING R.F. (1976): An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation Form, Journal of Computational Physics, Vol.23. pp 87-110
- BEAM R., WARMING R.F. (1978): An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations, AIAA Journal, Vol.16, pp 393-402.
- BEJAN A. (1982): Entropy generation through heat and fluid flow, Wiley - Interscience, New York.
- BÉNARD M. (1901): Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent, Ann. Chim. (Phys.) 23, str. 62-144
- BERNARD J.J., CALTAGIRONE J.P. (1978): Instabilités thermoconvectives en milieu poreux et en gaz raréfiés, Lecture Notes in Physics 72, Springer-Verlag.
- BREPTA R., OKROUHLÍK M., VALEŠ F. (1985): Vlnové a rázové děje v pevných tělesech a metody jejich řešení, Academia, Praha.

- BRANDT A. (1977): Multi-level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems, Mathematics Computational, Vol.31.
- BRDIČKA M. (1959): Mechanika kontinua, ČSAV, Praha.
- BUCKENS F. (1971): Chocs dans les Solides in Chocs et ondes de Choc, Tome 1., Ed. A.L.Jaumotte Masson et C^{ie}, Éditeurs, Paris.
- BURATYNSKI E.K., CAUGHEY D.A. (1986): An Implicit LU Scheme for the Euler Equations Applied to Arbitrary Cascades, AIAA Journal, Vol 24, No.1, pp 39-46.
- CARTHY Mc M.F. (1975): Singular Surfaces and Waves, in Continuum Physics Vol II, Ed. A.C. Eringen, Academic Press, New York.
- CAUSON D.M. (1988): A Total Variation Diminishing Scheme for Computational Aerodynamics, Proceedings of II. International Conference on Hyperbolic Problems, Aachen Springer Verlag.
- CLARKE J.F., CHESNEY Mc M. (1964): The Dynamics of Real Gases, Butterworths, London.
- COLEMAN B.D., GURTIN M.E. (1967): Thermodynamics with internal state variables, The Journal of Chemical Physics, Vol.17, No.2, pp 597-613.
- COLEMAN B.D., GURTIN M.E. (1965): Waves in Materials with Memory I, II, III, Springer Verlag, New York.
- CONNOR J.J., BREBBIA C.A. (1976): Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newnes-Butterworths, London.
- COLLATZ L. (1964): Funktionsanalysis und Numerische Mathematik, Springer Verlag, Berlin. český překlad: Funkcionální analýza a numerická matematika, SNTL Praha, 1976.

- DOBIÁŠ I. (1988): Nelineární dynamické soustavy s náhodnými vstupy, Academia, Praha.
- DANĚK V. (1987): Numerické řešení transsonického proudění metodou konečných prvků s uvažováním vazkosti v okolí profilů. Kandidátská disertační práce, ÚT ČSAV, Praha
- DANĚK V. (1986): Numerical Solution of Transonic Potential Flows with Finite Elements Method Using Multigrid Technique, Acta Technica ČSAV, No.3, p.359.
- DECONINCK H., HIRSCH CH. (1982): A Multigrid Method for the Transonic Full Potential Equation Diskretized with Finite Elements on an Arbitrary Body Fitted Mesh, Journal of Computational Physics, Vol. 48, No.3, p. 344.
- DONEA J. (1984): A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.20, pp. 101-119.
- DORODNICYN A.A. (1942): Pograničnyj sloj v sžimajemoj židkosti, Prikladnaja matematika i mechanika, sv.6.
- DVOŘÁK R. (1964): On the unsteady boundary layer.shock wave interaction in the lower transonic region, Archiwum mechaniki stosowanej, Vol.16, No.2, str.211-222.
- DVOŘÁK I., MARŠÍK F., ANDREJ L. (1982): Biodynamika, Academia, Praha.
- DVOŘÁK R.(1986): Transsonické proudění, Academia, Praha.
- ECKMANN J.P. (1981): Roads to turbulence in dissipative dynamical systems, Reviews of Modern Physics, Vol.53, No.4, Part 1, pp. 643-654.

- ERICKSEN J.L. (1953): On the propagation of waves in isotropic incompressible perfectly elastic materials, J. Rat. Mech. Anal. 2, pp. 329-337.
- FADDĚJEV D.K., FADDĚJEVOVÁ V.N. (1964): Numerické metody lineární algebry, SNTL, Praha.
- FEDORENKO R.P. (1961): Žurnal vyčislitelnoj matematiki i fiziki, č.5
- FEIGENBAUM M.J. (1978): Qualitative universality for a class of nonlinear transformations, J. Stat. Phys. 19, 25.
- FEISTAUER M. (1981): Diskrétní metody řešení diferenciálních rovnic, SPN UK MFF, Praha.
- FEISTAUER M., NEČAS J. (1985): On the Solvability of Transonic Potential Flow Problems, Z. für Analysis and ihre Anwendungen, Bd 4(4), 305-329.
- FINLAYSON B.A. (1972): The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New York.
- FISCHER O., KOLOUŠEK V., PIRNER M. (1977): Aeroelasticita stavebních konstrukcí, Academia, Praha.
- FÖRSCHING H. W. (1974): Grundlagen der Aeroelastik, Springer Verlag, Berlin.
- FUČÍK S., KUFNER A. (1978): Nelineární diferenciální rovnice, SNTL, Praha.
- GHONEIM H. (1986): Thermoviscoplasticity by Finite Elements: Dynamic Loading of a Thick-Walled Cylinder, Journal of Thermal Stresses 9, 346-358.
- GODUNOV S.K. (1971): Uravnění matematika fiziki, "Nauka", Moskva.
- GODUNOV S.K., RJABEŇKIJ V.S. (1973): Izd. "Nauka", Moskva.
- GLANSDORFF P., PRIGOGINE I. (1971): Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations, Wiley-Interscience, London.

- GRADŠTEJN I.S., RYŽIK I.M. (1962): Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij, Gosudarstvennoje izdatelstvo, Moskva.
- GUCKENHEIMER J., HOLMES P. (1983): Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York.
- HACKBUSCH W. (1985): Multigrid Methods and Applications, Springer Verlag, Berlin.
- HADAMARD J. (1903): Lecon sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique, Hermann, Paris.
- HAFEZ M., MURMAN E.M., SOUTH J.C. (1978): Artificial Compressibility for Numerical Solution of Transonic Full Potential Equation, AIAA Paper-78-1148.
- HARTMAN P. (1964): Ordinary differential equations, John Wiley, New York. ruský překlad: Obykvennyje differencialnyje uravnenija, Izdatelstvo "Mir", Moskva, 1970.
- HIBŠ M. a kol. (1960): Tabulky pro konstruktéry (proudění), SNTL, Praha.
- HIRSCHFELDER J.O., CURTIS CH.F., BIRD R.B. (1954): Molecular Theory of Gases and Liquids, John Wiley, New York. ruský překlad: Molekularnaja teorija gazov i židkostěj, Izdatelstvo Inostranoj Literatury, Moskva, 1961.
- HIRSCH M.W., SMALE S. (1974): Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York.
- HOLODNIOK M., KLÍČ A., KUBÍČEK M., MAREK M. (1986): Metody analýzy nelineárních dynamických modelů, Academia, Praha.
- HORÁK J. (1985): Systémy hydrodynamického typu, podivné atraktory, fraktaly a experiment, Čs. časopis pro fyziku, Sekce A, Sv.35, str. 1 - 20.

- HORÁK J. (1988): Stochastičnost dynamických systémů a její kritérium. Čs. časopis pro fyziku (sekce A) 38, č.3, str.230-247.
- HORÁK J. (1987): Navierova-Stokesova rovnice a turbulence, Čs. časopis pro fyziku (sekce A) 37, str. 344-356.
- HORÁČEK J., ZOLOTAREV I. (1984): Vlijanije zakreplenija krajev cilindričeskoj oboločki s protekajuščej židkostju na jejo dinamičeskije charakteristiki, Prikladnaja mehanika, Tom 20, No 8, str. 88.
- HOŘEJŠÍ I. (1987): Vlastnosti diferenčních schémat typu Rungeho-Kutta pro řešení úloh proudění, Strojn. čas. 38, č.2, str.221.
- HUGONIOT H. (1887): Memoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits. Journal de l'École Polytechnique, Paris, 57, str. 1-97
- CHANDRASEKHAR S. (1961): Hydrodynamic and Hydromagnetic stability, Clarendon, Oxford.
- CHANG P.K. (1970): Separation of flow, Pergamon Press, Oxford, ruský překlad: Otryvnyje tečenija, Izd."Mir", Moskva, 1972.
- JAMESON A. (1975): Transonic Potential Flow Calculations in Conservation Form, Proc. AIAA 2nd Computational Fluid Dynamics Conference, Hartford, Conn.
- JAMESON A., YOON S. (1986): Multigrid Solution of the Euler Equations Using Implicit Schemes, AIAA Journal, Vol.24. No.11, pp. 1737-1743.
- JAMESON A., TURKEL E. (1981): Implicit Schemes and LU Decomposition, Mathematics of Computation, Vol.37, pp. 385-397.
- JAMESON A. (1983): The Evolution of Computational Methods in Aerodynamics, Transactions of the ASME, Vol. 50, str. 1052.

- KADOMCEV B.B. (1984): Sinergetika - Sbornik statej, Moskva, "Mir".
- KALITKIN N.N. (1978): Čislennyje metody, Nauka, Moskva.
- KAPLAN J.L., YORKE J.A. (1979): Functional differential Equations and Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 730, Springer Verlag, Berlin, p. 228.
- KOČIN N.E., KIBEL I.A., ROZE N.V. (1963): Teoretičeskaja gidrodinamika I. a II. díl, Gosudarstvennoje Izdatelstvo Fiziko-Matematičeskoj Literatury, Moskva.
- KOSCHEL W., LÖTZERICH M., VORNBERGER A. (1986): Explicit Method for Solvling the N-S equations Using a Finite Element Method, Finite Approximations in Fluid Mechanics, Vieweg Verlag.
- KOTEK Z., KUBÍK S., RAZÍM M. (1973): Nelineární dynamické systémy, SNTL, Praha.
- KOZEL K. (1986): Užití přídavných členů k vylepšení vlastností stability Laxova-Wendroffova diferenčního schématu, Strojň. čas. 37, č.5, 613-627.
- KRISHNAMURTI R. (1970): On the transition to turbulent convection, Part 2. The transition to time-dependent flow, J. Fluid Mech. 42, p. 309.
- KUBÍČEK M., MAREK M. (1983): Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures, Springer Series in Computational Physics.
- KVASNICA J. (1983): Statistická fyzika, Academia, Praha.
- LANDAU L.D. (1944): On the problem of turbulence, Dokl. Akademii Nauk SSSR 44, str. 311-314.
- LANDAU L.D., LIFŠIC E.M. (1986): Hidrodinamika, Izd. Nauka, Moskva.
- LANDAU L., LIFŠIC E.M. (1965): Teorija uprugosti, Izd. Nauka, Moskva.
- LANDAU L., LIFŠIC E.M. (1963): Kvantovaja mechanika, nereljativničeskaja teorija, Fizmatgiz.

- LEGROS J.C., PLATTEN J.K. (1978): Les instabilités hydrodynamiques en convection libre, forcée et mixte, Lecture Notes in Physics 72, Springer-Verlag, Berlin.
- LERAT A., SIDES J., DARU V. (1982): An Implicit Finite Volume Scheme for Solving the Euler Equations, Proc. 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Aachen 1982, Krause E. ed. Springer, pp. 343-349.
- LICHTENBERG A.J., LIEBERMAN M.A. (1983): Regular and Stochastic Motion, Springer Verlag. New York. ruský překlad: Reguljarnaja i stochastičeskaja dinamika, Izd. "Mir", Moskva, 1984.
- LIN C.C. (1955): The theory of hydrodynamic stability, Cambridge. ruský překlad: Teorija gidrodinamičeskoj ustojčivosti, Moskva, 1958.
- LÖHNER R., MORGAN K., PERAIRE J., VAHDATI M. (1987): Finite Element Finite Element Flux-Corrected Transport (FEM-FCT) for the Euler and Navier-Stokes Equations, NASA rep. 178233, ICASE rep. no 87-4.
- LÖHNER R., MORGAN K., ZIENKIEWICZ O.C. (1984): The Solution of Nonlinear Hyperbolic Equation Systems by the Finite Element Method, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.4, 1043-1063.
- LÖHNER R., PATNAIK G., BORIS J.P., ORAN E.S., BOOK D.L. (1986): Applications of the Method of Flux-Corrected Transport to Generalized Meshes, Lecture Notes in Physics 264, Springer Verlag, Berlin.
- LOJČANSKIJ L.G. (1950): Mechanika židkosti i gaza, Gosudarstvennoje izdatelstvo tehniko-teoreričeskoj literatury, Moskva.

- LÖTZERICH M. (1987): Beitrag zur Strömungsberechnung in Turbomaschinen mit der Hilfe Methode der Finite Elemente, Dr-Ing. Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen, Technische Hochschule Aachen.
- LORENTZ E.N. (1963): Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos.Sci. 20, p. 130
- Mc CARTHY M.F. (1975): Singular Surfaces and Waves, In: Continuum Physics, Vol II, Ed. A.C. Eringen, Academic Pres, New York.
- MANDELBROT B.B. (1982): The fractal geometry of nature, Freeman, San Francisco.
- MAREK M., SCHREIBER I. (1984): Stochastické chování deterministic-
kých systémů, Academia, Praha.
- MARSDEN T.E., MC GRABEN M. (1976): The Hopf bifurcation and its applications, Springer-Verlag.
- MARŠÍK F., DANĚK V. (1984): Stability and Numerical Calculation of Potential Transonic Flow, Proceedings of the International Conference on Numerical Methods and Applications, Sofia.
- MARŠÍK F., DANĚK V., ŠAFARÍK P. (1985): Zrychlení konvergence při řešení transsonického proudění v kanálech a lopatkových mřížích, Zpráva ÚT ČSAV Z-955/85.
- MARŠÍK F. (1983): Výpočet transsonického proudění v kanálech metodou konečných prvků. Strojn. čas. 34, č.1-2, str.7-22.
- MARŠÍK F. (1981): Variational Solution and Optimization of Laminar Boundary Layer, Acta technica ČSAV, No 2, str. 135-151.
- MARŠÍK F., VLČEK V. (1980): Šíření úplavových poruch v proudovém poli izolovaného profilu při vysokých Reynoldsových číslech Zpráva ÚT ČSAV Z-645/78, Praha.

- MARŠÍK F. (1978): The upstream propagation of wake-generated disturbances in the lower transonic region, Strojn. čas. 29, č.2, str. 202.
- MARŠÍK F. (1981): časový vývoj termodynamických systémů a variační principy nerovnovážné termodynamiky, část I a II, Strojn. čas. 32, č.5, str. 611-635, 649-669.
- MARŠÍK F., MARŠÍK J. (1986): Numerické řešení nelineární difuze MKP v časově proměnné oblasti, Sborník konference Matematické metody v technických vědách I, Karlovy Vary.
- MARŠÍK F., ŠAFAŘÍK P. (1982): Výpočet proudového pole dokonalé tekutinx variačními metodami, Zpráva ÚT ČSAV Z-796/82, Praha.
- MARŠÍK F. (1988): Tepelné a mechanické zatěžování termoviskoplastického materiálu. Formulace problému, Zpráva ÚT ČSAV Z-1090/88.
- MARŠÍK F., VLČEK V. (1977): Některé modely a výsledky měření transsonické nestability na izolovaném profilu, Zpráva ÚT ČSAV Z-580/77, Praha.
- MARŠÍK F., MARŠÍK J., BEDNÁŘ J., DOBEŠ J.(1989): Numerical stability of 2D diffusion with the great gradients, Acta technica
- MARŠÍK F., ŠAFAŘÍK P. (1983): Výpočet proudového pole dokonalé tekutiny variačními metodami II, Zpráva ÚT ČSAV Z-855/83.
- MARŠÍK F. (1989): Thermodynamics approach to stability of transonic flow and its numerical solution, Acta technica

- MARTIN P.C. (1975): The onset of turbulence: A review of recent developments in theory and experiment In: Statistical Physics Ed. L. Páland, P. Szépfalusy, Akadémiai Kiadó, Budapest.
- MEIER G.E.A. (1976): Shock induced flow oscillations in a Laval nozzle, In: Symposium Transsonicum II Eds. K. Oswatitsch, D. Rues, Springer Verlag, Berlin
- MIELE A. (1965): Theory of optimum aerodynamic shapes, Academic Press, New York, ruský překlad: Teoriya optimalnykh aerodinamičeskich form, Izd. "Mir", Moskva, 1969.
- MORTON K.W., PARROTT A.K. (1980): Generalized Galerkin Methods for First-Order Hyperbolic Equations, J. Comput. Phys. 36, 249-270.
- NI R.H. (1981): A Multiple Grid Scheme for Solving the Euler Equations, Proc. AIAA 5th Computational Fluid Dynamics Conference, Palo Alto, California, pp. 257-264.
- NICOLIS G. (1986): Dissipative systems, Rep. Prof. Phys. 49, pp. 873-949.
- NOVÁK J. (1980): Výpočet některých veličin charakterizujících obtékání kruhového válce při periodickém odtrhávání vírů, Strojírnoství, č.9.
- OTT E. (1981): Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems, Reviews of Modern Physics, Vol.53, No.4, Part I, pp. 655-671.
- PETERKA F. (1981): Úvod do kmitání mechanických soustav s vnitřními rázy, Academia, Praha.
- PLATTEN J.K. (1971): On a variational formulation for hydrodynamic stability, Int. Journal of Eng. Sci. Vol.9, pp. 37-48.

- PLATTEN J.K., FLANDROY P., VANDERBORCK G. (1974): Variation and accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation, *Int.Engng Sci*, Vol.12, pp. 995-1006.
- POMEAU Y.,MANNEVILLE P. (1980): Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Commun. Math. Phys.* 74, pp. 189
- PRIGOGINE I. (1962): *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, Interscience Publisher, New York, Ruský překlad: Neravnovesnaja statističeskaja mehanika, Izd. "Mir", Moskva, 1964.
- PRIGOGINE I. (1967): *Thermodynamics of Irreversible Processes*, John Wiley and Sons, New York.
- PRIGOGINE I. (1980): *From Being to Becoming*, W.H. Freeman and company, San Francisco.
- RALSTON A. (1978): *Základy numerické matematiky*, Academia, Praha.
- RAYLEIGH Lord (1916): On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, *Scientific Papers* 6, pp. 432-446.
- REKTORYS K. (1974): *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, SNTL Praha.
- RICHTMAYER R.D., MORTON K.W. (1967): *Difference methods for initial-value problems*, Interscience Publishers, New York. ruský překlad: Raznostnye metody rešenija krajevych zadač, Izd. "Mir", Moskva, 1972.
- RIZZI A., VIVIAND H. (1981): *Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves*, Notes on numerical fluid mechanics, Vol.3, Vieweg.

- RIZZI A. (1982): Damped Euler-Equation Method do Compute Transonic Flow Arround Wing-Body Combinations, AIAA Journal, Vol.20, No.10.
- RUELLE D., TAKENS F. (1971): On the nature of turbulence, Comm. Math. Phys. 20, pp. 167-192.
- RUDIN W. (1977): Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, Praha.
- SALTZMAN B. (1962): Finite amplitude free convection as an initial value problem - I, J. atmos.Sci 19, pp. 329-341.
- SATOFUKA N. (1986): Method of Lines Approach to the Numerical Solution of Fluid Dynamic Equations, Lecture Notes in Physics 264, Springer-Verlag, Berlin.
- SHAPIRO A.H. (1954): The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, The Ronald Press Comp. N.Y.
- SCHLICHTING H. (1965): Grenzschicht-Theorie, G. Braun, Karlsruhe.
- SPARROW C. (1982): The Lorentz Equations, Bifurcations, Chaos and Strange Attractors, Springer-Verlag, New York.
- ŠTĚPÁNEK P. (1987): Fraktální útvary v geometrii a v přírodě, Čs.čas. pro fyziku, Sekce A, sv.37, č.4, str.329-424.
- TEMAM R. (1985): Connection Between Two Classical Approaches to Turbulence: The Convectioal Theory and the Attractors, In: Theoretical Approaches to Turbulence, ed. Dwoyer D.L., Hussaini M.Y., Voigt R.G., Springer-Verlag, New York.
- THOM R. (1975): Structural Stability and Morphogenesis, The Benjamin/Cummings, London.

- THOMAS T.Y. (1957): Extended compatibility conditions for the study of surface of discontinuity in continuum mechanics, J.Math. Mech., 6, pp. 311-322.
- TICHONOV A.N., SAMARSKIJ A.A. (1955): Rovnice matematické fyziky, Nakl. ČSAV, Praha
- TOKUNAGA H., SATOFUGA M., MIYAGAWA H. (1986): Direct Simulation of Shear Flow Turbulence in a Plane Channel by Sixth Order Accurate Method of Lines with New Sixth Order Accurate Multi-Grid Poisson Solver, Lecture Notes in Physics 264, Springer-Verlag, Berlin.
- TRUESDELL C., NOLL W. (1965): The Non-linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik Vol III/3 (ed.S.Flügge), Springer-Verlag, Berlin.
- TRUESDELL C., TOUPIN R.A. (1960): The Classical Field Theories, In: Handbuch der Physik, ed. S. Flügge, Band III/1, Springer Verlag, Berlin.
- VARGA R.S. (1962): Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Inc. New Jersey.
- VALCHÁŘOVÁ J. (1986): Soudobé numerické metody v mechanice kontinua, SNTL Praha.
- VLČEK V., MARŠÍK F. (1980): Vznik nestacionarit při obtékání profilu vazkou stlačitelnou tekutinou, Zpráva ÚT ČSAV Z-725/80.
- VLČEK V. (1978): Some experimental results connected with the transonic instabilities on an airfoil. Strojň.čas. sv.29, č.3, str.342-354.
- VLADIMIROV V.S. (1967): Uravněníja matematiceskoj fiziki, Izd. "Nauka", Moskva.

- WAMBECQ A. (1978): Rational Runge-Kutta Methods for Solving Systems of Ordinary Differential Equations, Computing 20, pp. 333-342.
- WHITHAM G.B. (1974): Linear and nonlinear waves, John Wiley, New York.
- WILKINSON J.H., REINSCH C.H. (1971): Handbook for Automatic Computation, Linear Algebra, Vol.2, Springer-Verlag.
- ZALESAK S.T. (1979): Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport algorithmus for Fluids, J. Comput. Physics 31, p. 335.