

---

AKADEMIE VĚD ČESKÉ REPUBLIKY



---

Teze disertace

předkládané k získání titulu “doktor věd”  
ve skupině věd *fyzikálně-matematických*

název disertace:

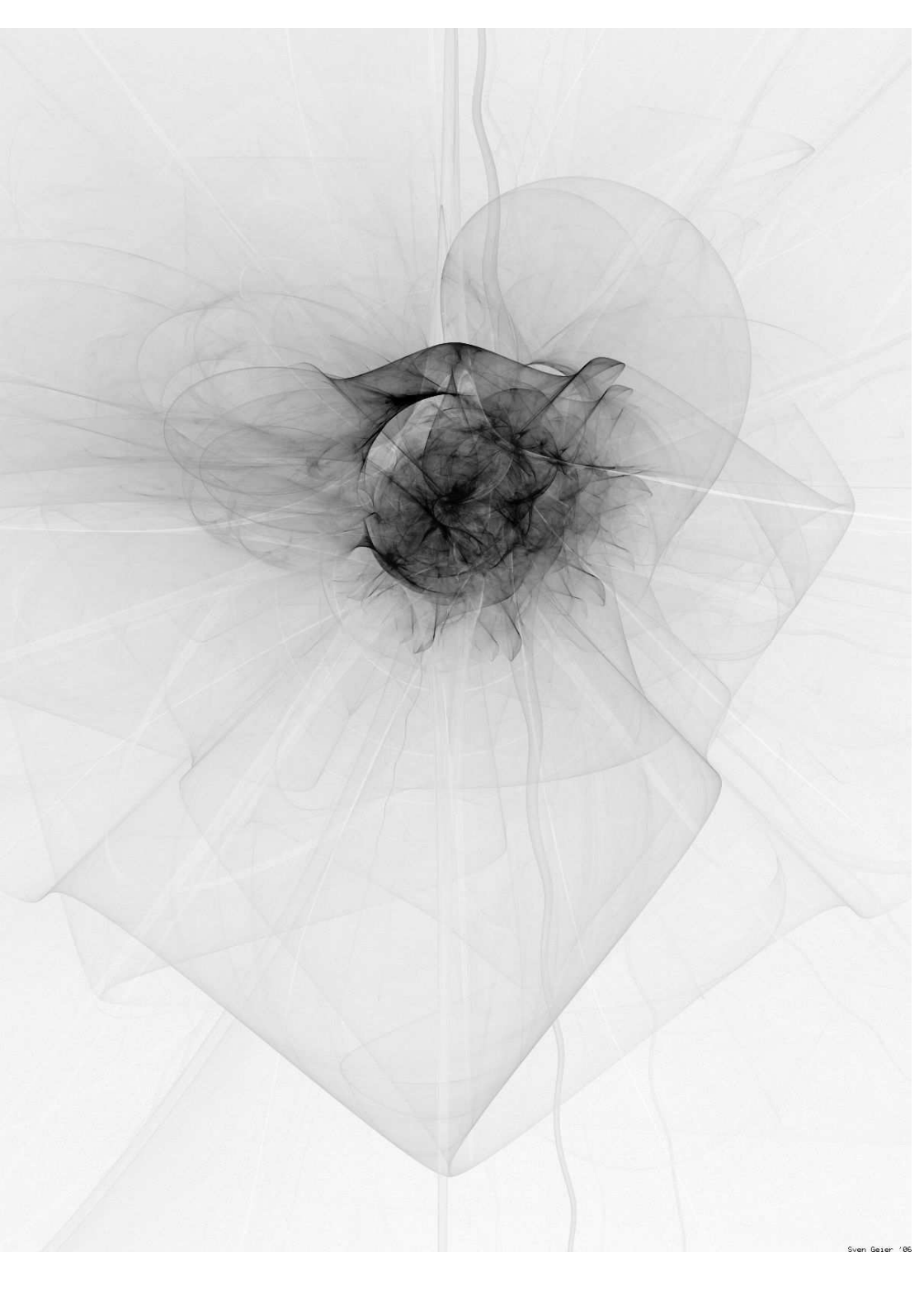
*K některým vlastnostem polí černých děr*

Komise pro obhajoby DSc. disertací v oboru *astronomie a astrofyzika*

Jméno uchazeče: Oldřich Semerák

Pracoviště uchazeče: Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta  
Ústav teoretické fyziky

Praha 2009



## Shrnutí

Černé díry jsou objekty, v jejichž předpovědi se obecná teorie relativity nejvíc odchyluje od newtonovské fyziky. Procesy odehrávající se v jejich blízkosti či nitru tradičně slouží jako prověrky našeho porozumění Einsteinově teorii a některé z nich i jako výzva ke hledání její kvantové verze. Procesy zahrnující černé díry se však zároveň zdají být nejpřirozenějším vysvětlením vlastností pozorovaných u některých astrofyzikálních zdrojů, především aktivních galaktických jader a rentgenových dvojhvězd, ale také u jader většiny “normálních” galaxií včetně té naší.

O izolovaných stacionárních černých dírách je “téměř vše známo”, ale jinak je tomu u děr, které interagují s další hmotou a/nebo kolem sebe nemají asymptoticky plochý prostoročas. Právě to jsou však aspekty reálného astrofyzikálního prostředí. V posledním desetiletí rozvíjený “téměř lokální” pojem izolovaných a dynamických horizontů slibuje, že poměry na hranici černé díry bude možné i v těchto obecnějších situacích popsat docela přesně. Vně a uvnitř horizontu je však přesné řešení Einsteinových rovnic myslitelné jen ve velmi symetrických případech. Z hlediska astrofyzikálních aplikací je jedním z přijatelných přiblížení stacionarita a axiální symetrie prostoročasu, přesněji silnější požadavek jeho tzv. cirkularity.

V této práci shrnuji poznatky o polích černých děr v cirkulárních prostoročasech, které jsem získal s několika svými kolegy a studenty. Rozděluji je do tří kapitol. Kapitola 5 obsahuje výsledky týkající se *statických* superpozic černé díry s axiálně symetrickými tenkými disky či toroidy, v kapitole 6 je zmíněn pokus o stacionární superpozici a v kap. 7 několik zjištění o pohybu kolem izolovaných děr, speciálně o určité (“extremálně urychlené”) třídě stacionárních kruhových pohybů, která byla rozpoznána až v 90. letech. Nejdříve však řadím kapitoly 2–4, v nichž jsou — po historickém a astrofyzikálním Úvodu 1 — probrány základní rysy cirkulárních prostoročasů a černých děr a tenkých disků jako jejich možných zdrojů.

## Summary

General theory of relativity deviates the most from Newtonian physics when predicting black holes. Processes occurring in the vicinity or interior of these objects traditionally serve as tests of our understanding of the Einstein's theory, and some of them also as a challenge to search for its quantum version. At the same time, processes involving black holes appear to be the most natural explanation of properties observed at certain astrophysical sources, first of all at active galactic nuclei and some X-ray binaries, but also at the nuclei of most "normal" galaxies including the our one.

"Almost everything" is known about isolated stationary black holes, but it is different with those which interact with other matter and/or do not live in asymptotically flat spacetime. However, these are exactly the aspects of the actual astrophysical environment. The "almost local" notion of isolated and dynamical horizons, developed in the last decade, promises that even in these more general situations it will be possible to describe the circumstances on the black-hole boundary quite accurately. But outside and inside horizon, exact solution of Einstein's equations is only conceivable in highly symmetric cases. One of "still acceptable" approximations is to assume stationarity and axial symmetry of spacetime (more precisely, its so called circularity).

This thesis summarizes what we have observed, with several my colleagues and students, in the fields of black holes in circular spacetimes. The results are divided into three sections. Section 5 concerns *static* superpositions of a black hole with axially symmetric thin discs or toroids, in section 6 our attempt at stationary superposition is mentioned and in section 7 some findings are added about the motion around isolated holes, in particular about the "extremally accelerated" class of stationary circular motions which was only recognized in the 90-ies. However, I begin with a historic and astrophysical Introduction 1 and with sections 2–4 touching basic features of circular spacetimes and of black holes and thin discs as their possible sources.

# 1 Úvod

Teorie relativity přinesla pronikavou změnu pohledu na kauzální strukturu světa. Má-li ve všech inerciálních systémech příčina předcházet následku, nesmí se podle speciální relativity žádný signál šířit rychleji než světlo. Pak spolu ale některé události nemohou *ani v zásadě* kauzálně souviset. Podle obecné relativity navíc hmota ovlivňuje (lokální) inerciální systémy tak, že pohybovat se vůči nim rychlostí světla může znamenat “stát” na sféře, jejíž vlastní plocha se nemění, popř. dokonce se vyvíjí *opačným* směrem, než by zmíněný pohyb napovídal. V prostoročasu tak mohou existovat oblasti, které nemůže opustit žádný signál — černé díry.

Historie černých děr začíná 22. prosince 1915, kdy Karl Schwarzschild píše Albertu Einsteinovi z ruské fronty, že našel sféricky symetrické řešení jeho měsíc starých polních rovnic. Popisuje pole bodového zdroje a Einstein je jím “machovský” udiven. 6. února 1916 odesílá Schwarzschild do Berlína druhý dopis, s vnitřním řešením pro sférickou “hvězdu” z nekoherentního prachu s konstantní hustotou. Řešení má zvláštní rys: hvězda (hmotnosti  $M$ ) nemůže být v žádném případě v rovnováze, je-li její poloměr menší než  $r = 2GM/c^2$ ; cokoliv, co se pod tímto “gravitačním” poloměrem vyskytne, včetně světla, je vtaženo do bodu  $r = 0$ . V r. 1930 naznačí S. Chandrasekhar, že to možná není jen akademická eventualita: zjistí, že “chladnou hvězdu” o hmotnosti  $M \gtrsim 1.5M_{\odot}$  nemůže žádný průběh tlaku udržet proti její vlastní gravitaci. Po vyčerpání jaderné energie by tedy centra velmi hmotných hvězd měla podléhat skutečně extrémní kontrakci. Většina fyziků považuje takový závěr za absurdní a irelevantní, a to i poté, co J. Oppenheimer a H. Snyder v r. 1939 spočítají průběh úplného gravitačního zhroucení sférické hvězdy z nekoherentního prachu pod gravitační poloměr. J. Wheeler ještě v r. 1958 raději spekuluje o tom, že se nukleony v kolabujícím jádře hvězdy nějak přemění na záření a to odnese koncentrující se energii pryč. O devět let později už začne užívat termínu “černá díra”. . .

Moderní historie černých děr začala v roce 1963, dvěma nezávislými objevy. 5. února astronoma M. Schmidta napadlo, že podivné spektrální čáry, pozorované u nového typu zdrojů nazvaných “kvasary”, jsou čarami běžně známými, ale posunutými neobyčejně daleko k červenému konci spektra. Zdroje tím pádem musí být nesmírně vzdálené, a tedy extrémně

svítivé. O pár měsíců později našel matematik R. Kerr řešení Einsteino-  
vých rovnic, o kterém se ukáže, že popisuje rotující černou díru. Během r.  
1964 navrhnou nezávisle E. Salpeter a Ja. Zeldovič, že ohromnou svítivost  
by mohla produkovat akrece látky na velmi kompaktní objekt. Na podzim  
pak matematik R. Penrose upřesní pomocí pojmu zachycených ploch zá-  
kladní vlastnost oblastí velmi silného gravitačního pole a následně zjistí,  
že uvnitř takových oblastí nemůže být prostoročas všude regulární. “Zlatý  
věk” černých děr a relativistické astrofyziky začíná.

Práce zpochybňující “realitu černých děr” (možnost regulárních ho-  
rizontů) se objevují i dnes, ale hlavní proud výzkumu se kloní k tomu, že  
černé díry nejenže mohou existovat, ale že jejich interakce s látkou a EM  
polem dokonce hraje ústřední roli v těch nejzajímavějších astrofyzikálních  
procesech — v aktivních galaktických jádrech, rentgenových dvojhvězdách  
a záblescích gamma. Gravitace a rotace (a EM pole) vlastně určují vývoj  
všech astrofyzikálních systémů. Pro jednotlivé těleso je typickým výsled-  
kem jejich souhry osově symetrický tvar, zploštělý podél rotační osy. Pokud  
je tlak v tomto “vertikálním” směru malý, zploští se těleso až na tenký disk.  
Tato představa je spojena se vznikem hvězd (viz sluneční soustavu) i galaxií.

Diskovitý tvar vytvoří také látka, která (s nenulovým orbitálním mo-  
mentem) přitéká do blízkosti nějakého tělesa. Je-li těleso velmi kompaktní,  
je v jeho blízkosti velmi nehomogenní gravitační pole, takže úhlová rychlost  
obíhající látky musí směrem “dolů” rychle růst a vizkozitní tření sousedních  
orbit může disk silně ohřívat. Nejnehomogennější je pole kolem černých  
děr, hlavně těch méně hmotných: Kretschmannův skalár, daný kvadrátem  
Riemannova tenzoru a reprezentující tedy kvadrát gravitačních slapových  
sil, vychází na Schwarzschildově horizontu  $\frac{3}{4M^4}$ . Vnitřní část disku kolem  
černé díry hvězdné hmotnosti ( $M \sim 10M_{\odot}$ ) se může zahřívat až na  $10^7$  K  
a zářit tedy v rentgenové oblasti. Z obrovské potenciální energie, se kterou  
látka přitéká do blízkosti černé díry, tak může být před jejím pádem pod  
horizont podstatná část přeměněna na tvrdé záření.

V energetice akrečních disků však zřejmě hrají podstatnou roli také  
elektromagnetické procesy, poněvadž poblíž centra je plyn ionizovaný. Je-  
jich prostřednictvím by mohla být uvolňována nejen energie disku, ale  
dokonce i rotační energie samotné díry. O těchto mechanismech se uvažuje  
zejména jako o “pohonech” směrových výtrysků, kterými může být látka

vyvrhována z blízkosti centra — často velmi vysokými rychlostmi — podél rotační osy disku. Kolimované “*jety*” se ukazují být typickým projevem akreční (magneto)hydrodynamiky; byly pozorovány u řady aktivních galaxií a supernov, ale také u protohvězd, pulsarů a rentgenových dvojhvězd.

## 1.1 Interagující černé díry

Při modelování akrece je akreující látka nahlížena jako testovací (předpokládá se, že má vůči centru zanedbatelnou hmotnost). Akreční tok se bere spojitý, kvazi-stacionární a osově symetrický a samozřejmě se zanedbává vyzařování gravitačních (a většinou i elektromagnetických) vln. Centrální černá díra se popisuje řešením Schwarzschilda nebo Kerrera — považuje se za izolovanou a stacionární a prostoročas kolem ní za asymptoticky plochý. Černé díry v kosmických systémech však nemají ani jednu z těchto vlastností. Naopak, aby se díra dala odhalit a studovat, musí být v interakci se svým okolím. Některé teoretické výsledky týkající se černých děr také žádnou z uvedených vlastností nepředpokládají a měly by tak být platné i pro astrofyzikální situace. Například tzv. zákony (termo)dynamiky černých děr omezují vývoj horizontů při jakýchkoliv dějích, přičemž předpokládají jen to, že neexistují nahé singularity a že veškerá hmota splňuje některou z tzv. energetických podmínek (zhruba řečeno že je přitažlivá). Na druhé straně platnost jiných závěrů zůstává v obecném případě otevřená; není například zcela vyjasněno, zda kromě sférické topologie nemůže mít horizont také topologii toroidální. Podobně nebylo obecně prokázáno, zda mohou být v rovnováze dvě černé díry, z nichž aspoň jedna není extrémně nabitá — otázkou speciálně je, zda by přitažlivost hmotností děr nemohl zcela kompenzovat odpudivý účinek jejich (souhlasných) rotačních momentů hybnosti.

Černé díry — obzvláště ty velmi hmotné — jsou sice v naprosté většině situací gravitačně natolik dominantní vůči svému okolí, že je v měřítcích galaktických jader, resp. dvojhvězd *lze* nahlížet jako *skoro* stacionární a *skoro* izolované a prostoročas v jejich určitém okolí *skoro* jako asymptoticky plochý (kosmologický člen nehraje v lokálním měřítku téměř žádný vliv). Je však těžké vyslovit podmínky vět jen *skoro* a zjišťovat, jak se jejich výroky “uvolní”, když se — byť jen takto “nepatrně” — uvolní jejich předpoklady. V případech výroků založených na vlastnostech stacionarity a izolovanosti se dá

zkoumat stabilita vůči malým perturbacím, což však vede na obtížné úlohy, zatím řešené jen pro velmi málo situací. Podobně je žádoucí zkoumat černé díry v asymptoticky ne-plochých, “kosmologických” prostoročasech, popsáných např. Friedmannovou-Lemaîtreovou-Robertsonovou-Walkerovou metrikou (a případně studovat perturbace takových řešení).

V posledním desetiletí byla ovšem zpochybněna astrofyzikální relevance i u některých “obecných” teorémů. Pozorování totiž ukázala, že vesmírná expanze se zrychluje, a ne zpomaluje, jak by se dalo čekat z přitažlivosti gravitace. To patrně odpovídá kladnosti kosmologického členu v Einsteinových rovnicích. Má-li tento člen charakter *zdrojového* členu, popisuje kosmologická konstanta (dělená  $8\pi$ ) hustotu energie zatím neznámého zdroje, který tvoří  $3/4$  celkové hustoty energie ve vesmíru. Zdroj odpovídající kosmologickému členu však nesplňuje silnou energetickou podmínku, které využívají např. teorémy o singularitách.

V předložené disertaci jsme se k takto obtížným partiím ani nepřiblížili. Pokusili jsme se v několika jednoduchých situacích ukázat, jaký vliv by na vlastnosti prostoročasu s černou dírou mohla mít hmota nacházející se vně horizontu. Vlastní gravitace látky akreující na černou díru může být podstatná hlavně pro stabilitu akrečního toku (a tím ovšem vůbec pro jeho základní parametry). Tento odhad se vztahuje hlavně k (aktivním) galaktickým jádrům, ale i v systémech stelární velikosti se mohou přechodně objevit “těžké” akreční struktury — dokonce o hmotnosti srovnatelné s hmotností kompaktního centra. Jedná se o disky tvořící se v posledních fázích vývoje velmi hmotné hvězdy kolem jejího kolabujícího jádra, a extrémně husté (neutronové) disky, vznikající při závěrečném splynutí těsného binárního systému černé díry a neutronové hvězdy nebo dvou neutronových hvězd. Na tyto velmi dynamické peripetie je soustředěna pozornost při snaze o přímou detekci gravitačních vln, nověji pak i při objasňování záblesků gama.

Teoreticky lze gravitační účinek hmoty vně černé díry započítat v rámci numerického, perturbačního nebo přesného řešení Einsteinových rovnic. My budeme sledovat poslední možnost, ovšem za vysokých symetrií: budeme předpokládat, že systém černé díry a okolní hmoty je stacionární a axiálně symetrický (přesněji cirkulární) a že respektuje reflexní symetrii vůči ekvatoriální rovině. Kosmologickou konstantu klademe rovnu nule a předpokládáme asymptoticky plochý a mimo látku v okolí díry vaku-



ový prostoročas (speciálně nebereme v úvahu elektromagnetické pole — černou díru i okolní látku pokládáme za nenabitou). Matematický zápis provádíme v geometrizovaných jednotkách, v nichž rychlost světla a gravitační konstanta jsou rovny jedné, a dodržujeme konvence učebnice *Gravitation* (Misner, Thorne, Wheeler). Na rozdíl od samotné disertace nebudeme zde v tezích uvádět odkazy na literaturu, s výjimkou našich vlastních prací. V závěru připojený seznam je ovšem “kompletní”, stejný jako v disertaci. Totožné je také rozdělení textu na hlavní kapitoly.

## 2 Církulární prostoročasy

V této kapitole práce upřesňujeme pojmy stacionarity (případně dokonce statičnosti), axiální symetrie a cirkularity (ortogonální tranzitivity). Zhruba řečeno, stacionarita a axiální symetrie znamenají existenci Killingových vektorových polí  $\eta^\mu$  a  $\xi^\mu$ , z nichž první je (alespoň v určité oblasti) časupodobné (ve statickém případě navíc ortogonální k nadplochám) a druhé prostorupodobné s uzavřenými orbitami; cirkularita znamená integrabilitu rovin kolmých k rovinám definovaným Killingovými vektory. Metrika těchto vlastností nabývá nejkratšího tvaru v souřadnicích Weylova (cylindrického) typu, které jsou tvořeny parametry obou symetrií  $t$  a  $\phi$ , definovanými vztahy

$$\eta^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}, \quad \xi^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi},$$

a dále  $\rho$  a  $z$ , které pokrývají izotropním způsobem meridionální roviny:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + \chi^2 e^{-2\nu} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\lambda-2\nu} (d\rho^2 + dz^2), \quad (1)$$

kde funkce  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $\omega$ ,  $\lambda$  závisejí jen na  $\rho$ ,  $z$ . Díky povaze souřadnic  $t$  a  $\phi$  mají metrické složky  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$ ,  $g_{\phi\phi}$  invariantní význam — jsou totiž dány

$$g_{tt} = g_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu, \quad g_{t\phi} = g_{\mu\nu} \eta^\mu \xi^\nu, \quad g_{\phi\phi} = g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu.$$

Totéž pak platí i o “draggingové” funkci  $\omega \equiv -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$ , která popisuje úhlovou rychlost (vůči nekonečnu), s jakou “inerciální prostor” v daném místě kotouje se zdrojem (ve statickém případě je  $\omega = 0$ ), a rovněž o “lapse-funkci”

$$e^{2\nu} = -g_{tt} - g_{t\phi}\omega = -g_{tt} - 2g_{t\phi}\omega - g_{\phi\phi}\omega^2 = -g_{\mu\nu}(\eta^\mu + \omega\xi^\mu)(\eta^\nu + \omega\xi^\nu).$$

Základním rysem prostoročasů, kterými jsme se zabývali, je centrální černá díra. **Černá díra** je oblast prostoročasu, která nepatří do kauzální minulosti budoucího světelného nekonečna, tedy je ohraničena (budoucím) **horizontem událostí**. V obecné relativitě jsou známy i jiné “černoděrové” horizonty — **zdánlivý horizont** jako nadplocha, na níž má jedna z kolmých světelných kongruencí zápornou a druhá nulovou expanzi, a podobně zavedený novější pojem **horizontu izolovaného**. V asymptoticky plochém cirkulárním prostoročase však tyto definice splývají a horizont má několik jednoduchých vlastností: především je určen (invariantně) vztahem  $e^{2\nu} = 0$ , a tudíž vymizí na něm i subdeterminant  $(t, \phi)$ -části metriky

$$g_{tt}g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2 = -g_{\phi\phi}(-g_{tt} - g_{t\phi}\omega) = -g_{\phi\phi}e^{2\nu}$$

(kromě horizontu je subdeterminant nulový také na ose symetrie). Pozoruhodné je, že  $\omega$  je na horizontu všude stejná ( $= \omega_{\text{H}}$ ), t.j. “horizont rotuje vůči nekonečnu jako tuhé těleso”. V důsledku toho je **horizontem Killingovým**, protože pole  $\eta^\mu + \omega_{\text{H}}\xi^\mu$  je Killingovým polem a právě na horizontu se stává světelným. Z tohoto “generátoru” se dá vytvořit ještě jeden skalár, který je na horizontu všude stejný — tzv. **povrchová gravitace**  $\kappa_{\text{H}}$ . Je daná

$$(\kappa_{\text{H}})^2 \equiv \lim_{\rightarrow \text{H}} \left[ -\frac{1}{2}(\eta_\mu + \omega_{\text{H}}\xi_\mu)_{;\nu}(\eta^\mu + \omega_{\text{H}}\xi^\mu)^{;\nu} \right] = \lim_{\rightarrow \text{H}} \left[ g^{\alpha\beta}(e^\nu)_{,\alpha}(e^\nu)_{,\beta} \right]$$

a má význam limitní hodnoty velikosti zrychlení rovnoměrného kruhového pohybu ( $\rho, z = \text{konst}$ ), vztážené vůči asymptotickému inerciálnímu času.

Dalším znakem “silného pole” je **statická mez**. Tato plocha odděluje oblasti, v nichž je pole  $\eta^\mu$  časupodobné / prostorupodobné, tedy je určena rovností  $g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu = g_{tt} = 0$ , neboli  $e^{2\nu} = \chi\omega$  ( $\geq 0$ ). (“Vnější”) statická mez je vždy “nad” (vnějším) horizontem, jen na ose symetrie se plochy dotýkají; ve statickém případě, kdy  $g_{tt} = -e^{2\nu}$ , horizont a statická mez splývají.

Jak ukázali Penrose a Hawking, uvnitř horizontu nutně existuje oblast, kde je prostoročas singularní. V prostoročasech “našich” symetrií je singularita lineární a má topologii kružnice; ve statickém případě je bodová. **Singularity** se však mohou objevit i na horizontu nebo venku — v takových případech znamenají určitou patologii prostoročasu. Snahy o přesná řešení Einsteinových rovnic se potýkají s výskytem “podpurných

singularit”, jejichž prostřednictvím teorie signalizuje, že uvažované uspořádání zdrojů nemůže samo o sobě zůstat takovým, jaké je předpokládáno (např. stacionárním). Nejzávažnějšími jsou však singularity křivosti, které odpovídají místům s extrémně nehomogenním polem. Základní veličinou je zde Kretschmannův skalár  $R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda}$ , fyzikálně “kvadrát slapových sil”, případně vnitřní součiny derivací Riemannova tenzoru. Z Einsteinových rovnic je zřejmé, že singulární budou typicky nekonečně tenké zdroje nebo jejich okraje; potíže však mohou nastat i mimo oblasti s nenulovým tenzorem energie a hybnosti, např. v místech kolize gravitačních vln.

## 2.1 Einsteinovy rovnice

Netriviální a nezávislé Einsteinovy rovnice pro metriku (1) se nejčastěji uvádějí jako soustava pro funkce  $B$  (zavedené vztahem  $\chi \equiv \rho B$ ),  $\omega$  a  $\nu$ :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} B) = 8\pi\rho B(T_{\rho\rho} + T_{zz}), \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho^2 B^3 e^{-4\nu} \vec{\nabla} \omega) = -16\pi B e^{2\lambda-2\nu} T_\phi^t, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (B \vec{\nabla} \nu) - \frac{1}{2} \rho^2 B^3 e^{-4\nu} (\vec{\nabla} \omega)^2 = 4\pi B e^{2\lambda-2\nu} (T_i^i - 2\omega T_\phi^t - T_t^t), \quad (4)$$

kde  $\vec{\nabla}$  je gradient a  $\vec{\nabla} \cdot$  divergence v (uměle) plochém třírozměrném prostoru se souřadnicemi  $(\rho, z, \phi)$ , v axisymetrickém případě tedy  $\vec{\nabla} X = (X_{,\rho}, X_{,z}, 0)$  a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \rho^{-1}[(\rho X^\rho)_{,\rho} + (\rho X^z)_{,z}]$ . Pokud jsou známy  $B$ ,  $\omega$  a  $\nu$ , lze  $\lambda$  spočítat křivkovou integrací z výrazů daných jejich derivacemi.

První rovnice pro  $B$  je lineární, ale i tak ji lze vyřešit jen pro speciální  $T_{\mu\nu}$ . Nejsnadněji to jde v oblastech, kde je  $T_{\rho\rho} + T_{zz} = 0$  (to platí např. pro nekoherentní prach) a kde z rovnice zbývá jen  $B_{,\rho\rho} + \frac{2B_{,\rho}}{\rho} + B_{,zz} = 0$ . Obvykle se v tom případě volí řešení  $B = 1$  (tedy  $\chi = \rho$ ), při kterém v metrice zůstanou jen 3 neznámé funkce a nezávislé rovnice pro ně vypadají

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho^2 e^{-4\nu} \vec{\nabla} \omega) = -16\pi e^{2\lambda-2\nu} T_\phi^t, \quad (5)$$

$$\vec{\nabla}^2 \nu = \frac{\rho^2}{2e^{4\nu}} (\vec{\nabla} \omega)^2 + 4\pi e^{2\lambda-2\nu} (T_\phi^\phi - 2\omega T_\phi^t - T_t^t), \quad (6)$$

plus vztahy pro gradient  $\lambda$ . Rovnice bohužel zůstávají složitě provázány a jejich přímočaré řešení není obecně možné.

## 2.2 Ernstova rovnice

Úsporný zápis Einsteinových(-Maxwellových) rovnic pro stacionární metriku (a EM pole) navrhl koncem 60. let F. Ernst. Zápis nabývá zvlášť jednoduchého tvaru, pokud je prostoročas asymptoticky plochý, axiálně symetrický a cirkulární a pokud jeho zdroj navíc splňuje  $T_\rho^\rho + T_z^z = 0$  (jako např. tenký disk bez radiálního tlaku, viz příští kapitoly).

Ernstova formulace je těsněji než s “Carterovou-Bardeenovou” verzí metriky (1) spojena s verzí Weylovou-Papapetrouovou,

$$ds^2 = -f(dt - Ad\phi)^2 + f^{-1} \left[ \rho^2 d\phi^2 + e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) \right], \quad (7)$$

kteřá již počítá s  $T_\rho^\rho + T_z^z = 0$  (nejčastěji se volí ve vakuovém případě) a v níž místo  $\nu$ ,  $\omega$ ,  $\lambda$  vystupují jako neznámé funkce  $f = -g_{tt} = e^{2\nu} - \rho^2 e^{-2\nu} \omega^2$ ,  $A = -\frac{g_{t\phi}}{g_{tt}} = -\frac{\rho^2 e^{-2\nu} \omega}{f}$ ,  $e^{2\gamma} = -g_{tt} g_{\rho\rho} = f e^{2\lambda - 2\nu}$ . Einsteinovy rovnice vedou opět na kvadraturu pro  $\gamma$  a pro  $A$ ,  $f$  dávají

$$f \vec{\nabla} \cdot (f^2 \rho^{-2} \vec{\nabla} A) = -16\pi e^{2\gamma} T_t^\phi, \quad (8)$$

$$f \vec{\nabla}^2 f - (\vec{\nabla} f)^2 + f^4 \rho^{-2} (\vec{\nabla} A)^2 = 8\pi f e^{2\gamma} (T_\phi^\phi + 2AT_t^\phi - T_t^t). \quad (9)$$

Lze je shrnout do tzv. **Ernstovy rovnice**  $f \vec{\nabla}^2 \mathcal{E} = (\vec{\nabla} \mathcal{E})^2$  pro komplexní **Ernstův potenciál**  $\mathcal{E} \equiv f + i\Psi$ , jehož reálnou část tvoří  $f$  a imaginární je dána vztahy  $\rho\Psi_{,\rho} = f^2 A_{,z}$ ,  $\rho\Psi_{,z} = -f^2 A_{,\rho}$ . Rovnice se často přepisuje také do podoby  $(\xi\bar{\xi} - 1)\vec{\nabla}^2 \xi = 2\bar{\xi}(\vec{\nabla}\xi)^2$ , v níž  $\xi$  souvisí s  $\mathcal{E}$  jednoduchým vztahem  $\mathcal{E} = \frac{\xi-1}{\xi+1}$  ( $\Leftrightarrow \xi \equiv \frac{1+\mathcal{E}}{1-\mathcal{E}}$ ) a  $\bar{\xi}$  značí komplexní sdružení  $\xi$ .

Ernstova rovnice je klíčem k cirkulárním (elektro-)vakuovým prostoročasům se dvěma komutujícími symetriemi. Bylo ukázáno, že je úplně integrabilní a pomocí “generačních technik” se také podařilo najít obecné třídy jejích řešení. Problémem zůstává řešení “přimočarým”, fyzikálně motivovaným postupem a s jasně interpretovaným výsledkem.

## 2.3 Regularita prostoročasu: Kretschmannův invariant

**Kretschmannův invariant**  $R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda}$  je nejvýznamnější charakteristikou křivosti prostoročasu. V obecném, stacionárním případě je dán velmi dlouhým výrazem, obzvláště není-li vyjádřen ve vhodných souřadnicích. I

jeho hodnota ve speciálních místech se získává obtížně — typicky sestává z mnoha členů, jednotlivě i značně divergentních, které se přesto mohou (m.j. díky Einsteinovým rovnicím) celkově “vyrušit” v regulární a stručný výsledek. Než přímočarý postup — byť podpořený programy pro algebraické výpočty — bývá proto výhodnější uvědomit si nejdříve souvislost invariantu s jinými veličinami, jejichž chování lze mít lépe “pod kontrolou”.

V práci jsme skalár vyjádřili pomocí “3+1” rozkladu Riemannova tenzoru. Gaussovy-Codazziho rovnice vedou pro cirkulární prostoročas k

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda} &= 8 \left( a_i a_j + a_{i;j} - 2K_{im}K_j^m - 2K_{ij;\kappa}n^\kappa \right) \cdot \\ &\cdot \left( a_k a_l + a_{k;l} - 2K_{kn}K_l^n - 2K_{kl;\lambda}n^\lambda \right) h^{ik}h^{jl} + \\ &+ 3(K_{ij}K^{ij})^2 - 6K_j^i K_k^j K_l^k K_i^l - 8h^{jm}h^{kn}h^{lp}K_{jk;l}(K_{mn;p} - K_{mp;n}), \end{aligned} \quad (10)$$

kde  $h_{\mu\nu}$ ,  $K_{\mu\nu}$  jsou metrika a vnější křivost nadplochy  $t = \text{konst}$  a  $n^\mu$ ,  $a^\mu$  čtyř-rychlost a zrychlení ZAMO-kongruence (která je k nadploše kolmá).

## 2.4 Statický případ

V metrice (1) je ve statickém případě  $\omega = 0$ , takže

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + \chi^2 e^{-2\nu} d\phi^2 + e^{2\lambda-2\nu} (d\rho^2 + dz^2); \quad (11)$$

horizont splývá se statickou mezí a singularita je bodová (vnitřek černé díry ovšem Weylovy souřadnice nepokrývají). Z polních rovnic (2)–(3) zbývá

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} B) = 8\pi\rho B(T_{\rho\rho} + T_{zz}), \quad (12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (B \vec{\nabla} \nu) = 4\pi B e^{2\lambda-2\nu} (T_i^i - 2\omega T_\phi^t - T_t^t). \quad (13)$$

Pokud platí  $T_{\rho\rho} + T_{zz} = 0$  a lze tedy volit  $B = 1$  (t.j.  $\chi = \rho$ ), zůstávají v metrice jen dvě neznámé funkce  $\nu$ ,  $\lambda$  a rovnice pro ně se zjednodušují na

$$\nu_{,\rho\rho} + \nu_{,zz} + \frac{\nu_{,\rho}}{\rho} = 4\pi e^{2\lambda-2\nu} (T_\phi^\phi - T_t^t), \quad (14)$$

$$\lambda_{,\rho} - \rho(\nu_{,\rho})^2 + \rho(\nu_{,z})^2 = 4\pi\rho(T_{\rho\rho} - T_{zz}), \quad (15)$$

$$\lambda_{,z} - 2\rho\nu_{,\rho}\nu_{,z} = 8\pi\rho T_{\rho z}. \quad (16)$$

Mimo zdroje, kde  $T_{\mu\nu} = 0$ , se rovnice (14) stává Laplaceovou rovnicí ve válcových souřadnicích (a s axiální symetrií) a rovnice (15), (16) mají řešení

$$\lambda = \int_{\text{osa}}^{\rho, z} \rho \left\{ [(\nu_{,\rho})^2 - (\nu_{,z})^2] d\rho + 2\nu_{,\rho\nu_{,z}} dz \right\}, \quad (17)$$

kde je třeba integrovat po dráze procházející výhradně vakuovou oblastí.

Ve statickém případě se podstatně zjednodušuje i Kretschmannův skalár. Výsledek (11) se např. redukuje (díky tomu, že  $K_{\mu\nu} = 0$ ) na

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\mu\nu\kappa\lambda} = 8 (a_i a_j + a_{i;j})(a_k a_l + a_{k;l}) h^{ik} h^{jl} = \frac{8}{e^{2\nu}} (e^\nu)_{|ij} (e^\nu)^{|ij}.$$

## 2.5 Okrajové podmínky

Regularita geometrie na ose, na horizontu a v radiálním nekonečnu klade určité požadavky na řešení uvedených rovnic. Na regulární ose musí především platit, že obvod kružnic  $\{t = \text{konst}, \rho = \text{konst}, z = \text{konst}\}$ , t.j.  $\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi = 2\pi \sqrt{g_{\phi\phi}} = 2\pi \chi e^{-\nu}$ , je pro malá  $\rho$  lineární funkcí jejich “vlastního poloměru”  $\int_0^\rho \sqrt{g_{\rho\rho}} d\rho = \int_0^\rho e^{\lambda-\nu} d\rho$ , což vede k požadavku  $\chi \rightarrow \rho e^\lambda$  (v případě  $\chi = \rho$  tedy  $\lambda \rightarrow 0$ ). Vzhledem k axiální symetrii musí být dále skaláry  $g_{tt}$ ,  $g_{t\phi}$  a  $g_{\phi\phi}$  sudými funkcemi  $\rho$ , konkrétně  $g_{\phi\phi} = O(\rho^2)$ ,  $-g_{t\phi} = g_{\phi\phi} \omega = O(\rho^2)$ . Regularitu  $g_{\rho\rho} = g_{zz}$  pak již zajišťují polní rovnice.

Na horizontu je, jak bylo již zmíněno,  $e^{2\nu} = 0$ ,  $\omega = \text{konst} \equiv \omega_H$ . Aby azimutální obvod horizontu  $2\pi(\chi e^{-\nu})_H$  nebyl nekonečný, musí na něm být také  $\chi = 0$  (v případě  $\chi = \rho$  tedy  $\rho = 0$ , stejně jako na ose). Podobně regularita  $g_{\rho\rho} = g_{zz} = e^{2\lambda-2\nu}$  vyžaduje, aby na horizontu bylo i  $e^{2\lambda} = 0$ . (K detailnější diskusi horizontu je ovšem vhodné přejít do souřadnic sferoidálního typu.)

Podmínky asymptotické plochosti v nekonečnu pro metriku (1) znějí  $\nu \rightarrow -\frac{M}{r} + O(r^{-2})$ ,  $\chi \rightarrow r + O(r^{-1})$ ,  $\omega \rightarrow \frac{2J}{r^3} + O(r^{-4})$ ,  $\lambda \rightarrow O(r^{-2})$ , kde  $r$  je jakákoli radiální souřadnice, která jde asymptoticky k  $\sqrt{\rho^2 + z^2}$  (má asymptoticky význam vlastní radiální vzdálenosti), a  $M$  a  $J$  mají význam celkové hmotnosti a celkového momentu hybnosti.<sup>1</sup> Tyto integrální

<sup>1</sup> Přesný pojem asymptotické plochosti ovšem není jednoduchý a pro důkladnou a souřadnicově nezávislou diskusi je třeba vyhledat specializovanou literaturu.

parametry se zároveň dají (ve stacionárních a axiálně symetrických prostoročasech) vyjádřit “geometricky”, pomocí tzv. Komarových integrálů, v podobě součtu příspěvků od díry a od vnější hmoty,

$$M = M_H + \int_{\Sigma > H} (T_i^i - T_t^t) \sqrt{-g} d^3x, \quad J = J_H + \int_{\Sigma > H} T_\phi^t \sqrt{-g} d^3x, \quad (18)$$

kde vnější příspěvky (počítané přes nějakou prostorupodobnou nadplochu vně horizontu, “ $\Sigma > H$ ”) jsme již zapsali v “killingovských” souřadnicích  $(t, \dots, \phi)$ . Je vidět, že výraz  $(T_i^i - T_t^t)$  — přesněji  $e^{2\lambda-2\nu}(T_i^i - T_t^t)$  — hraje stejnou roli jako hustota hmotnosti v Newtonově teorii.

### 3 Černá díra jako centrální zdroj

V souřadnicích Weylova typu je  $g_{\rho\rho} = g_{zz}$ , jsou v nich jednoduché polní rovnice a v případě zdroje s hranicí podél  $z = \text{konst}$  se v nich také dobře diskutují okrajové podmínky na jeho povrchu. Cyklindrické souřadnice však nejsou vhodné k popisu vnitřních oblastí prostoročasu, speciálně k diskusi podmínek na sferoidálním horizontu. Kapitola 3 proto začíná zavedením tří soustav sferoidálního typu — Boyerových-Lindquistových souřadnic, bezrozměrných sferoidálních souřadnic a izotropických souřadnic.

Přestože na stacionárním horizontu se nemůže nacházet žádná látka (a EM pole neuvažujeme), tedy je tam jistě  $T_{\rho\rho} + T_{zz} = 0$ , při jeho studiu je výhodné vycházet z obecné cirkulární metriky (1) (v níž pokládáme  $\chi \equiv \rho B$ ) a jako řešení rovnice (2) nevolit  $B = 1$ , nýbrž  $B = 1 - \frac{k^2}{4(\rho^2 + z^2)}$ , kde  $k$  je nezáporná konstanta. Přejdem  $\rho = R \sin \theta$ ,  $z = R \cos \theta$  do **izotropických souřadnic**  $(R, \theta)$  se pak metrika uvede do tvaru

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + (RB e^{-\nu} \sin \theta)^2 (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\lambda-2\nu} (dR^2 + R^2 d\theta^2),$$

přičemž  $B = 1 - \frac{k^2}{4R^2}$ . Jak víme, horizont je dán  $e^\nu = 0$ , takže má-li na něm být metrika regulární a mají-li být kladné a konečné jeho obvody v azimutálním i v latitudinálním směru, t.j.  $(2\pi RB e^{-\nu} \sin \theta)$  i  $(2R \int_0^\pi e^{\lambda-\nu} d\theta)$ , musí na něm platit  $(0 < e^{\lambda-\nu} < \infty) \Rightarrow (R > 0) \Rightarrow (B = 0) \Rightarrow (R = \frac{k}{2})$ .

### 3.1 Podmínky na (vakuovém) horizontu

Shrňeme, jak jsme v disertaci uvažovali o podmínkách na horizontu:

- Předpokládáme, že platí  $(T_\rho^\rho + T_z^z =) T_R^R + T_\theta^\theta = 0$  a zvolíme zmíněné řešení Einsteinovy rovnice pro  $B$ , tedy  $B = 1 - \frac{k^2}{4R^2}$ . Zapišeme (s tímto  $B$ , m.j. tedy s  $B_{,\theta} = 0$ ) zbylé polní rovnice v izotropických souřadnicích.
- Má-li být horizont (daný  $e^\nu = 0$ ) regulární, musí na něm být  $B = 0$  (t.j.  $R = k/2$ ),  $Be^{-\nu}$  konečně kladné,  $e^\lambda = 0$ ,  $e^{\lambda-\nu}$  konečně kladné,  $\omega_{,\theta} = 0$ ; navíc z jedné z Einsteinových rovnic vyplývá, že  $\omega_{,R}/B$  tam musí být konečné (tedy  $\omega_{,R} = 0$ ). Prohlídkou členů polních rovnic se dále zjistí, že do řádu  $O(B)$  včetně popisuje poměry na horizontu soustava

$$R\omega_{,RR} + \frac{2}{B}(3 - B)\omega_{,R} - 4R\omega_{,R\nu,R} = 0, \quad (19)$$

$$RB^2\nu_{,RR} + 2B\nu_{,R} = 0; \quad (20)$$

v (20) necháváme “navíc”  $B$ , aby členy byly na horizontu konečné.

- Řešením této soustavy jsou

$$\nu_H(R, \theta) = N(\theta) + \ln \frac{1 - \frac{k}{2R}}{1 + \frac{k}{2R}} \left[ +O(B^2) \right], \quad (21)$$

$$\omega_H(R, \theta) = \omega_H(k/2) + \frac{kW(\theta)}{M^2} \left[ \frac{2^9 k^3 R^3}{(2R + k)^6} - 1 \right] \left[ +O(B^4) \right],$$

kde  $\omega_H(k/2)$  je konečná konstanta a  $N(\theta)$ ,  $W(\theta)$  jsou regulární funkce, specifické pro konkrétní prostoročas; z rozměrových důvodů jsme zavedli další konstantu  $M$  rozměru hmotnosti/délky. “Dodatky”  $[+O(B^n)]$  upřesňují, že  $\nu_H$  je možno změnit o členy řádu  $O(B^2)$  a  $\omega_H$  o členy řádu  $O(B^4)$ , aniž by se porušila platnost rovnic do uvažovaného řádu  $O(B)$ .

- Dosazením  $\nu_H$  (21) a  $B$  do zbylých polních rovnic<sup>2</sup> dostáváme pro  $\lambda$

$$RB\lambda_{,R} = -2 \frac{4R^2 - 3k^2}{4R^2 + k^2}, \quad \lambda_{,\theta} = 2\nu_{,\theta} = 2 \frac{dN}{d\theta}. \quad (22)$$

<sup>2</sup> Do řádu  $O(B)$  nepromlouvá do průběhu  $\lambda$  na horizontu funkce  $\omega$  — podobně jako tam nemá vliv ani na chování funkce  $\nu$ .



Nejjednodušším řešením vyhovujícím do řádu  $O(B)$  je

$$\lambda_{\text{H}}(R, \theta) = 2N(\theta) - 2N(0) + \ln B \left[ +O(B^2) \right]. \quad (23)$$

- Jako příklad v práci určujeme tvary funkcí a konstant pro Kerrovo řešení.
- Metriku horizontu jakožto 2D-plochy  $\{t = \text{konst}, R = k/2\}$  vyjádříme

$$\begin{aligned} ds_{\text{H}}^2 &= (g_{\theta\theta})_{\text{H}} d\theta^2 + (g_{\phi\phi})_{\text{H}} d\phi^2 = \\ &= (R^2 B^2 e^{-2\nu})_{R=k/2} \left[ (e^{2\lambda} B^{-2})_{R=k/2} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right] = \\ &= 4k^2 e^{-2N(\theta)} \left[ e^{4N(\theta) - 4N(0)} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

- Pomocí uvedených průběhů lze pro Gaussovu křivost horizontu obdržet

$$\mathcal{K}_{\text{H}} \equiv \mathcal{K}(R = k/2) = \frac{1 + N_{,\theta\theta} - 2(N_{,\theta})^2 + 3N_{,\theta} \cot \theta}{4k^2 e^{2N(\theta) - 4N(0)}}. \quad (25)$$

Jako příklad jsme opět výsledek vyčíslili pro Kerrovo řešení.

- Konečně zjišťovali jsme, jak se na regulárním horizontu chová Kretschmannův invariant. Speciálně ve statickém případě se redukuje na

$$(R_{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\mu\nu\kappa\lambda})_{\text{H}} = 12(\mathcal{K}_{\text{H}})^2.$$

## 3.2 Parametry černé díry

Znalost průběhu metriky na horizontu umožňuje spočítat (“lokálně”) důležité parametry černé díry. **Plocha horizontu** a jeho **povrchová gravitace**,

$$A = \oint_{\text{H}} \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} d\theta d\phi, \quad (\kappa_{\text{H}})^2 \equiv \left[ g^{\alpha\beta} (e^{\nu})_{,\alpha} (e^{\nu})_{,\beta} \right]_{\text{H}},$$

vycházejí po dosazení  $\nu_{\text{H}}$  a  $\lambda_{\text{H}}$

$$A = 2\pi \int_0^{\pi} (R^2 B e^{\lambda - 2\nu})_{\text{H}} \sin \theta d\theta = \frac{16\pi k^2}{e^{2N(0)}}, \quad (26)$$

$$(\kappa_{\text{H}})^2 = \left\{ e^{4\nu - 2\lambda} \left[ (\nu_{,R})^2 + R^{-2} (\nu_{,\theta})^2 \right] \right\}_{\text{H}} = \frac{e^{4N(0)}}{16k^2}. \quad (27)$$

Veličiny jsou si tedy nepřímou úměrné,

$$A = \frac{\pi e^{2N(0)}}{(\kappa_H)^2} = \frac{4\pi k}{\kappa_H}. \quad (28)$$

Tento vztah platí pro všechny stacionární axiálně symetrické horizonty.

Azimutální a latitudinální vlastní **obvod horizontu** vycházejí

$$o_H^{\text{azi}} = \left( \frac{4\pi k}{e^{N(\theta)}} \sin \theta \right)_{\theta=\pi/2} = \frac{4\pi k}{e^{N(\pi/2)}}, \quad o_H^{\text{lati}} = \frac{4k}{e^{2N(0)}} \int_0^\pi e^{N(\theta)} d\theta.$$

Dosažením  $\nu_H$ ,  $\omega_H$  a  $\lambda_H$  do Komarových integrálů, upravených na

$$J_H = -\frac{k^4}{2^7} \int_0^\pi \left( B^3 e^{-4\nu} \omega_{,R} \right)_{R=k/2} \sin^3 \theta d\theta,$$

$$M_H = \frac{k^2}{8} \int_0^\pi (B\nu_{,R})_{R=k/2} \sin \theta d\theta + 2\omega_H J_H,$$

jsme dostali pro **hmotnost a moment hybnosti** černé díry

$$J_H = \frac{3k^4}{M^2} \int_0^\pi W(\theta) e^{-4N(\theta)} \sin^3 \theta d\theta, \quad M_H = k + 2\omega_H J_H.$$

(Poslední, univerzální vztah bývá citován jako Smarrova formule.)

Nakonec jsme dosažením patřičných  $N(\theta)$ ,  $W(\theta)$  zkontrolovali, že pro Kerrovo řešení parametry vycházejí, jak mají.

Je zřejmé, že ne všechny zmíněné parametry jsou nezávislé. Ve skutečnosti je jakákoliv černá díra v cirkulárním prostoročasu popsána *dvěma* nezávislými parametry; podle okolností se za ně obvykle volí  $(k, \omega_H)$ ,  $(k, \kappa_H)$ , nebo  $(A, J_H)$ . Pokud je v prostoročasu přítomna další hmota, je samozřejmě třeba dalších veličin k popisu jejího uspořádání a pohybu.

## 4 Tenké ekvatoriální disky

Jsou-li vně černé díry další zdroje, je třeba splnit také podmínky na jejich povrchu. V případě rozlehlých zdrojů obnáší úplná diskuse i vnitřní řešení,

zatímco u nekonečně tenkých zdrojů žádají polní rovnice určité vztahy mezi normálovými gradienty metriky a příslušným tenzorem energie a hybnosti.

My uvažujeme jako zdroj metriky (1) tenký disk ležící v ekvatoriální rovině ( $z = 0$ ). Tenzor energie a hybnosti je tedy všude nulový, jen v určitém rozsahu poloměřů  $\rho$  je úměrný delta-funkci  $\delta(z)$ . Metrické funkce  $\chi, \nu, \omega, \lambda$  jsou všude spojité, mají však podél disku skok v prvních normálových derivacích  $\chi_{,z}, \nu_{,z}, \omega_{,z}, \lambda_{,z}$  (ten dále indukuje členy úměrné  $\delta(z)$  v Riemannově tenzoru, v souhlasu s tvarem  $T_{\mu\nu}$ ). Předpokládáme dále, že prostoročas je vůči rovině disku zrcadlově symetrický, tedy že  $\chi, \nu, \omega, \lambda$  jsou sudými funkcemi  $z$ . Pak  $z$ -derivace jsou naopak v  $z$  liché, zatímco jejich sudé mocniny a násobky (např.  $\chi_{,z}\nu_{,z}$ ) sudé (ty na  $z = 0$  skok nemají).

Tenzor energie a hybnosti tenkého zdroje v rovině  $z = 0$  zapíšeme

$$e^{2\lambda-2\nu}T_{\nu}^{\mu} \equiv S_{\nu}^{\mu}(\rho)\delta(z) \quad (29)$$

a integrací polních rovnic přes infinitesimální interval  $[z = 0^-, z = 0^+]$  najdeme vztah mezi  $S_{\nu}^{\mu}$  a normálovým skokem gradientů metriky. K integrálům přispějí jen členy úměrné  $\delta(z)$ , tedy zdrojové pravé strany a na levé straně členy s 2. derivacemi  $\chi_{,zz}, \nu_{,zz}, \omega_{,zz}, \lambda_{,zz}$ . V případě tenkých disků můžeme klást  $T_z^z = 0, T_z^{\rho} = 0$  a pro disky bez radiálního tlaku ( $T_{\rho}^{\rho} = 0$ ) navíc volit  $\chi = \rho$  (t.j.  $B = 1$ ). Z polních rovnic za těchto okolností plyne

$$8\pi S_{\phi}^t = -\rho^2 e^{-4\nu} \omega_{,z}, \quad (30)$$

$$8\pi S_{\phi}^{\phi} = 4\rho\nu_{,\rho}\nu_{,z} - \rho^2 e^{-4\nu} \omega_{,z}(\omega + \rho\omega_{,\rho}), \quad (31)$$

$$8\pi S_t^t = -4\nu_{,z}(1 - \rho\nu_{,\rho}) + \rho^2 e^{-4\nu} \omega_{,z}(\omega - \rho\omega_{,\rho}) \quad (32)$$

(vztahy je třeba vyčíslit v  $z \rightarrow 0^+$ ).

## 4.1 Fyzikální parametry disku

Pokračujeme několika poznámkami k interpretaci disku bez radiálního tlaku ( $S_{\rho}^{\rho} = 0$ ), kdy ze složek plošného tenzoru  $S_{\nu}^{\mu}$  zbývají jen  $S_t^t, S_{\phi}^t, S_{\phi}^{\phi}$ . Je-li  $(S_{\phi}^{\phi} - S_t^t)^2 + 4S_{\phi}^t S_t^{\phi} \geq 0$ , má vlastní úloha  $S_{\nu}^{\mu}\zeta^{\nu} = \lambda\zeta^{\mu}$  dvě reálná řešení ( $\lambda_{\pm}, \zeta_{\pm}^{\mu}$ ) a zdroj  $S^{\mu\nu}$  lze diagonalizovat do podoby

$$S^{\mu\nu} = -\lambda_{-}\zeta_{-}^{\mu}\zeta_{-}^{\nu} + \lambda_{+}\zeta_{+}^{\mu}\zeta_{+}^{\nu} = \sigma U^{\mu}U^{\nu} + PW^{\mu}W^{\nu}, \quad (33)$$

t.j. interpretovat látku disku jako ideální tekutinu. Vlastní hodnoty  $\sigma \equiv -\lambda_-$ ,  $P \equiv \lambda_+$  určují plošnou hustotu energie a azimutální tlak (měřené v její klidové soustavě),  $\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} \equiv \frac{\lambda_- S^t}{S^\phi}$  úhlovou rychlost a vlastní vektory čtyř-rychlost tekutiny a jednotkový “azimutální” vektor kolmý k  $U^\mu$ ,

$$\begin{aligned} U^\mu &\equiv \zeta_-^\mu = U^t(1, 0, 0, \Omega), & U_\alpha &= U^t(g_{tt} + g_{t\phi}\Omega, 0, 0, g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega), \\ W^\mu &\equiv \zeta_+^\mu = \frac{1}{K}(U_\phi, 0, 0, -U_t), & W_\alpha &= K(-U^\phi, 0, 0, U^t), \\ U^t &= \frac{1}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2\nu} - g_{\phi\phi}(\Omega - \omega)^2}}, \\ K^2 &\equiv -2\eta_{[\mu}\xi_{\nu]}\eta^\mu\xi^\nu = (g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = g_{\phi\phi}e^{2\nu} = \chi^2. \end{aligned}$$

V dalším jsme se pak omezili na disky z ideální tekutiny.

**Hmotnost a rotační moment hybnosti disku**  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{J}$  jsme opět zaplali pomocí Komarových integrálů. Platí-li  $T_{\rho\rho} + T_{zz} = 0$  a lze tedy položit  $\chi = \rho$ , získají se využitím “tekutinového” tvaru  $S^{\mu\nu}$  explicitní tvary

$$\mathcal{J} = 2\pi \int_{\text{disk}} (\sigma + P) \frac{\rho e^{-2\nu}(\Omega - \omega)}{1 - \rho^2 e^{-4\nu}(\Omega - \omega)^2} g_{\phi\phi} d\rho, \quad (34)$$

$$\mathcal{M} = 2\pi \int_{\text{disk}} (\sigma + P + 2\Omega S_\phi^t) \rho d\rho; \quad (35)$$

ve speciálním případě  $\Omega = \text{konst}$  je  $\mathcal{M} = 2\pi \int_{\text{disk}} (\sigma + P) \rho d\rho + 2\Omega\mathcal{J}$ .

Jinou alternativou je vyjádřit v integrálech složky  $S_{\nu}^\mu$  pomocí skoků normálových polí. Položí-li se opět  $\chi = \rho$ , dospěje se tak k vyjádření

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{4} \int_{\text{disk}} \rho^3 e^{-4\nu} \omega_{,z} d\rho, \quad \mathcal{M} = \int_{\text{disk}} \left( \nu_{,z} - \frac{1}{2} \rho^2 e^{-4\nu} \omega \omega_{,z} \right) \rho d\rho \quad (36)$$

( $\omega_{,z}$  a  $\nu_{,z}$  se rozumí vyčísleny v  $z \rightarrow 0^+$ ).

## 4.2 Kontra-rotující disky

Reálný systém zůstane stacionární jen tehdy, když bude pro jeho elementy v rovnováze gravitace s tlakovým působením a setrvačností. Pro ekvatoriální tenké disky daných symetrií působí všechny tyto síly čistě v radiálním

směru (azimutální tlak je sice také nenulový, ale *gradient* tlaku samozřejmě žádnou azimutální složku nemá). Při interpretaci protiváhy gravitace si lze disk představit jako pevnou strukturu (soustavu kruhových “obručů”), nebo naopak jako nekoherentní směs azimutálních proudů částic. V astrofyzikálním kontextu se obvykle uvažuje druhá krajní možnost — že disk je tvořen dvěma prostupujícími se (neinteragujícími) proudy částic, pohybujících se v opačných azimutálních směrech po kruhových drahách. Omezíme-li se opět na případ bez radiálního tlaku ( $T_\rho^\rho = 0$ ), jsou tyto dráhy geodetikami. Tensor energie a hybnosti popsaného **kontra-rotujícího disku** má tedy tvar

$$S^{\mu\nu} = \sigma_+ U_+^\mu U_+^\nu + \sigma_- U_-^\mu U_-^\nu, \quad (37)$$

kde znaménko  $+/-$  značí veličiny charakterizující proud obíhající (vůči “celkové” rychlosti  $U^\mu$ ) v kladném/záporném směru  $\phi$ . Rychlosti  $U_\pm^\mu$  mají odpovídat geodetickému pohybu, což znamená hodnotám úhlové rychlosti

$$\Omega_\pm = \frac{\rho^2 \omega_{,\rho} + 2\rho\omega(1 - \rho\nu_{,\rho}) \pm \sqrt{\rho^4(\omega_{,\rho})^2 + 4\rho\nu_{,\rho}e^{4\nu}(1 - \rho\nu_{,\rho})}}{2\rho(1 - \rho\nu_{,\rho})}.$$

Základní podmínkou kontra-rotující interpretace je nezápornost výrazu pod odmocninou, tedy  $\rho^4(\omega_{,\rho})^2 + 4\rho\nu_{,\rho}e^{4\nu}(1 - \rho\nu_{,\rho}) \geq 0$ .

Porovnáním stop (33) a (37) je vidět, že musí platit  $\sigma_+ + \sigma_- = \sigma - P$ , a snadno se získá také vztah  $\frac{P}{\sigma} = -\frac{U_+^\mu W_\mu}{U_+^\nu U_\nu} \frac{U_-^\kappa W_\kappa}{U_-^\lambda U_\lambda} = -(\hat{v}_+^\mu W_\mu)(\hat{v}_-^\nu W_\nu)$ , který říká, že “rychlost zvuku” v disku je rovna součinu relativních rychlostí “prográdního” a “retrográdního” proudů vůči místnímu klidovému systému tekutiny danému  $U^\mu$ . Tyto rychlosti jsou definovány  $\hat{v}_\pm^\mu = \frac{U_\pm^\alpha W_\alpha}{U_\pm^\beta U_\beta} W^\mu$ .

### 4.3 Fyzikální požadavky na disk

Má-li řešení odpovídat aspoň přibližně fyzikální realitě, nemohou parametry disku nabývat jakýchkoli hodnot. V práci probíráme následující požadavky:

- **Energetické podmínky** v různých verzích stanoví, že “všichni fyzikální pozorovatelé (t.j. ti s časupodobnou či limitně světelnou, do budoucna orientovanou čtyř-rychlostí) se mají shodnout na tom, že gravitace je přitažlivá”, a vedou k určitým nerovnostem pro parametry tekutinového

disku. Silnější je požadavek kontra-rotující interpretace s nezápornými  $\sigma_{\pm}$ ; na rozdíl od energetických podmínek totiž vynucuje **nezáporný tlak**. Spolu s ním energetické podmínky implikují  $\sigma \geq P \geq 0$ .

- K určitým omezením vede také **požadavek podsvětelného pohybu** elementů disku. V práci jej opět aplikujeme na disk z ideální tekutiny a speciálně na disk z kontra-rotujících geodetických proudů.
- **Požadavek stability** orbit disku vede k vyšetřování tzv. **epicyklických oscilací**. Díky symetriím a spojitosti tečných složek pole na disku lze uvažovat zvláště čistě horizontální ( $\delta z = 0$ ) a čistě vertikální ( $\delta \rho = 0$ ) perturbace. V práci ukazujeme, jak odvodit odpovídající oscilační frekvence a diskutujeme, co z výsledků plyne pro stabilitu disku.
- Kromě uvedených bodů se kontrolují obvyklé obecnější podmínky na prostoročas — nesingularnost, absence uzavřených časupodobných světočar a asymptotické vlastnosti (pokud se neuvažuje kosmologické “pozadí”, požaduje se asymptotická plochost).

## 4.4 Statický případ

Ve statickém případě ( $\omega = 0$ ) jsou polní rovnice výrazně jednodušší. Je-li radiální tlak  $S_{\rho}^{\rho} = 0$  a zvolí se  $\chi = \rho$ , zbývají ze zdroje (30)–(32) jen složky

$$2\pi S_{\phi}^{\phi} = \rho\nu_{,\rho}\nu_{,z}, \quad 2\pi S_t^t = -\nu_{,z}(1 - \rho\nu_{,\rho}),$$

kde pravé strany jsou opět vyčísleny v  $z \rightarrow 0^+$ . Je vidět, že pro ně platí  $(S_{\phi}^{\phi} - S_t^t)\rho\nu_{,\rho} = S_{\phi}^{\phi}$ , což je podmínka hydrostatické rovnováhy. Výraz  $(S_{\phi}^{\phi} - S_t^t)$  tedy hraje roli celkové (plošné) hustoty energie jakožto zdroje gravitace — to ostatně víme už z rovnic (14) a (18); tuto hustotu označíme

$$S_{\phi}^{\phi} - S_t^t = P + \sigma = \frac{\nu_{,z}(z \rightarrow 0^+)}{2\pi} \equiv w(\rho). \quad (38)$$

Vlastnosti disků se ve statickém případě značně zjednodušují. Vlastními hodnotami  $S_{\nu}^{\mu}$  jsou  $\lambda_+ = S_{\phi}^{\phi} = P$ ,  $\lambda_- = S_t^t = -\sigma$  a vlastními

vektory  $U^\mu = U^t \delta_t^\mu$ ,  $U_\alpha = -\frac{1}{U^t} \delta_\alpha^t$ ,  $W^\mu = \frac{1}{KU^t} \delta_\phi^\mu$ ,  $W_\alpha = KU^t \delta_\alpha^\phi$ , kde  $U^t = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} = e^{-\nu}$ . Parametry kontra-rotujícího modelu nabývají hodnot

$$\Omega_\pm = \pm \frac{e^{2\nu}}{\rho} \sqrt{\frac{\rho\nu_{,\rho}}{1 - \rho\nu_{,\rho}}}, \quad U_\pm^t = \frac{1}{e^\nu} \sqrt{\frac{1 - \rho\nu_{,\rho}}{1 - 2\rho\nu_{,\rho}}}, \quad \sigma_\pm (U_\pm^t)^2 = \frac{\sigma}{2e^{2\nu}}.$$

Úhlové rychlosti  $\Omega_\pm$  jsou reálné a odpovídají časupodobnému pohybu v oblastech, kde platí  $0 \leq 2\rho\nu_{,\rho} \leq 1$ .

Celkový moment hybnosti disku (i celého prostoročasu) je samozřejmě nulový, hmotnost disku podle (35), resp. (36) se redukuje na

$$\mathcal{M} = 2\pi \int_{\text{disk}} (\sigma + P) \rho d\rho = \int_{\text{disk}} \nu_{,z} \rho d\rho. \quad (39)$$

Horizontální a vertikální epicyklická frekvence vycházejí

$$\begin{aligned} (\kappa_\pm^\parallel)^2 &= \Gamma^\rho_{tt,\rho} - 4\Gamma^\rho_{tt}\Gamma^t_{t\rho} + \left( \Gamma^\rho_{\phi\phi,\rho} - 4\Gamma^\rho_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi\rho} \right) \Omega_\pm^2 = \\ &= \frac{e^{4\nu-2\lambda}}{1 - \rho\nu_{,\rho}} \left[ \nu_{,\rho\rho} + 4\rho(\nu_{,\rho})^3 + \frac{3}{\rho} \nu_{,\rho}(1 - 2\rho\nu_{,\rho}) \right], \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} (\kappa_\pm^\perp)^2 &= \Gamma^z_{tz,z} - 4\Gamma^z_{tz}\Gamma^t_{tz} + \left( \Gamma^z_{\phi\phi,z} - 4\Gamma^z_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi z} \right) \Omega_\pm^2 = \\ &= \frac{e^{4\nu-2\lambda}}{1 - \rho\nu_{,\rho}} \left[ \nu_{,zz} - 4(\nu_{,z})^2(1 - 2\rho\nu_{,\rho}) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

## 5 Tenké disky kolem statických černých děř

Ve statickém prostoročasu je rotace vyloučena, resp. musí být přesně kompenzována, jako v případě identických kontra-rotujících proudů hmoty. Ve Weylových souřadnicích zbývají z Einsteinových rovnic vně zdrojů (ve vakuu) jen Laplaceova rovnice  $\vec{\nabla}^2\nu = 0$  a kvadratura (17) pro  $\lambda$ . Nalezení potenciálu  $\nu$  je tedy stejné jako u osově symetrické úlohy v Newtonově gravitaci či v elektrostace a pole vícenásobných zdrojů se díky linearitě Laplaceovy rovnice najdou prostě sečtením dílčích potenciálů. Odlišnost od newtonovské situace představuje druhá metrická funkce  $\lambda$ . Při jejím výpočtu se může dokonce ukázat, že získaná superpozice není fyzikálně přijatelná

— mohou se např. objevit podpůrné singularity. Výsledný systém zdrojů kromě toho nemusí jít rozumně interpretovat (může vyjít záporná hustota či tlak, hmota pohybující se nadsvětelně, apod.). Realistických superpozic tak bylo i ve statickém případě nalezeno jen málo. V disertaci se věnujeme superpozicím Schwarzschildovy černé díry s invertovanými kontra-rotujícími tenkými disky Morgana & Morganové a s disky s mocninným radiálním průběhem hustoty (a pro zajímavost i s jednoduchým tlustým toroidem).

## 5.1 Invertované kontra-rotující “MM” disky

V r. 1994 vzali Lemos & Letelier starší řešení Morgana & Morganové pro (konečný) “první” kontra-rotující tenký disk a invertovali jej vůči vnějšímu okraji. Získali tak metriku pro nekonečný tenký disk, který je uprostřed “děravý”, takže ho lze superponovat s černou dírou. Tímto prostoročasem jsme se zabývali v článcích [186, 187, 183, 184, 211]. Zajímalo nás především, jak se jeho vlastnosti mění s hmotností disku a s polohou okraje disku.<sup>3</sup>

Morgan & Morganová ve skutečnosti našli celou “rodinu” řešení odpovídajících konečným kontra-rotujícím diskům. Superpozicemi černé díry s invertovanými “vyššími” členy rodiny jsme se zabývali v článku [178]. Newtonovská hustota invertovaného  $m$ -tého disku ( $m = 1, 2, \dots$ ) je

$$w^{(m)}(\rho) = \frac{2^{2m}(m!)^2 \mathcal{M} b}{(2m)! \pi^2 \rho^3} \left(1 - \frac{b^2}{\rho^2}\right)^{m-1/2} \quad (42)$$

a odpovídající gravitační potenciál

$$\nu^{(m)}(x, y) = -\frac{2^{2m+1}(m!)^2 \mathcal{M}}{\pi b} \frac{\sum_{n=0}^m C_{2n}^{(m)} i Q_{2n}(i|Y|) P_{2n}(X)}{\sqrt{x^2 + 1 - y^2}}, \quad (43)$$

kde  $\mathcal{M}$  je hmotnost disku a  $b$  je Weylův poloměr jeho vnitřního okraje,  $x \in \langle 0, \infty \rangle$  a  $y \in \langle -1, 1 \rangle$  jsou zploštělé sferoidální souřadnice, dané vztahy

<sup>3</sup> V prvních dvou pracích jsme jako vnější zdroj uvažovali také nekonečně tenký prsteneček, popsaný dávným řešením Bacha & Weyla, a jako centrální zdroj také tzv. Appellův prsteneček, odpovídající ještě staršímu řešení známému z elektrostatiky. Appellův prsteneček má totiž řadu rysů Kerrova pole *rotující* černé díry (samozřejmě však nezahrnuje dragging). Zde si všimneme jen případu černé díry s diskem, který je astrofyzikálně nejvýznamnější.



$\rho^2 = b^2(x^2 + 1)(1 - y^2)$ ,  $z = bxy$ , dále  $Y \equiv \frac{y}{\sqrt{x^2+1-y^2}}$ ,  $X \equiv \frac{x}{\sqrt{x^2+1-y^2}}$  jsou jejich invertované protějšky,

$$C_{2n}^{(m)} \equiv \frac{(-1)^n (4n + 1)(2n)!(m + n)!}{(n!)^2 (m - n)!(2m + 2n + 1)!} \quad (n \leq m)$$

a  $P_{2n}$  a  $Q_{2n}$  značí Legendreovy polynomy a Legendreovy funkce 2. druhu. Zmíníme krátce, jaké vlastnosti výsledných prostoročasů nás zajímaly:

- Tvar výsledného pole jsme znázornili na jeho siločárách, totiž integrálních křivkách čtyř-zrychlení statických pozorovatelů  $a^\mu = \nabla^\mu \nu$ .
- Vykreslili jsme, jak se s růstem relativní hmotnosti disku nebo s poklesem jeho poloměru stává černá díra zploštělou; od jistých (byť nerealistických) hodnot klesne Gaussova křivost horizontu na ose až do záporných hodnot.
- Gravitační vliv disku jsme ilustrovali také na tvarech časupodobných geodetik částic vypouštěných z nebo do blízkosti centra.
- Zvláště jsme sledovali vliv parametrů disku na polohu významných kruhových ekvatoriálních geodetik (světelné, a mezní stabilní), protože na poloze těchto orbit by měl kriticky záviset tok hmoty v akrečních discích.<sup>4</sup> Přesněji řečeno jsme pro určitý typ disku generovali posloupnost superpozic tak, že jsme postupně zvyšovali relativní hmotnost disku a jeho vnitřní okraj přitom stále drželi na nejmenší možné hodnotě, pro kterou šlo celý disk interpretovat jako dva kontra-rotující proudy částic na časupodobných kruhových ekvatoriálních geodetikách, stabilních vůči “horizontálním” i “vertikálním” perturbacím (takový disk také odpovídá nezápornému azimutálnímu tlaku a splňuje energetické podmínky).

<sup>4</sup> Výroky o poloze jsou souřadnicově závislé. Používali jsme proto nejen schwarzschildovský poloměr  $r$  [v ekvatoriální rovině s ním Weylův poloměr souvisí  $\rho = \sqrt{r(r - 2M)}$ ], ale také fyzikálnější míry — obvodový poloměr  $r_{\text{cf}} \equiv \sqrt{g_{\phi\phi}(\rho)} = \rho e^{-\nu(\rho)} = r e^{-\nu_{\text{disc}}(r)}$  a vlastní radiální vzdálenost od horizontu  $d_\rho \equiv \int_0^\rho \sqrt{g_{\rho\rho}(\rho)} d\rho = \int_{2M}^r \frac{e^{(\lambda - \lambda_{\text{Schw}} - \nu_{\text{disc}})(r)}}{\sqrt{1 - 2M/r}} dr$  (obě počítáme v ekvatoriální rovině, t.j. pro  $z = 0$ , resp.  $\theta = \pi/2$ ). Přejichod k fyzikálním poloměrům je netriviální, poněvadž vztahy obsahují funkce  $\nu_{\text{disc}}$  a  $\lambda_{\text{disc}}$ ; dané  $r$  tedy odpovídá pro různé disky různým  $r_{\text{cf}}$  a  $d_\rho$  (a naopak). Ukázalo se nicméně, že mezi obrázky vyneseny v  $r$ ,  $r_{\text{cf}}$  a  $d_\rho$  není moc velký rozdíl.

Zjistili jsme, že hmotnější disky jsou ve vnitřních částech obecně stabilnější vůči horizontálním perturbacím a méně stabilní vůči vertikálním perturbacím. Ukázalo se, že fixace vnitřního okraje na mezní stabilní orbitu celkového prostoročasu není zaručeným receptem, jak udržovat během zvyšování jeho hmotnosti stále celý disk stabilní — většinou totiž nestabilita dříve ohrozí vnitřek disku, ne samotný okraj. (“V praxi” by taková okolnost mohla znamenat tendenci k radiální fragmentaci.)

- Zakreslili jsme také průběhy frekvenčních posunů mezi pozorovateli na kruhových ekvatoriálních orbitách a nekonečnem. Mezi pozorovatelem obíhajícím úhlovou rychlostí  $\Omega \equiv d\phi/dt$  a pozorovatelem stojícím v nekonečnu je posun  $g \equiv \frac{f_\infty}{f_{\text{emit}}} = e^\nu \sqrt{1 - e^{-4\nu} \rho^2 \Omega^2}$ ; speciálně pro pozorovatele statického tedy  $g = e^\nu$  a pro volně obíhajícího  $g = e^\nu \sqrt{\frac{1-2\rho\nu,\rho}{1-\rho\nu,\rho}}$ .

## 5.2 Disky s mocninným průběhem hustoty

Některé rysy složeného prostoročasu dost závisí na konkrétním profilu hustoty, a tak jsme chtěli výsledky pro invertované “MM-disky” porovnat s nějakou jinou třídou řešení. Kromě toho, disky MM-typu mají v hustotě odmocninu  $\sqrt{b^2 - \rho^2}$ , jejíž radiální derivace na vnitřním okraji divergují. Díky tomu tam divergují určité derivace potenciálu, a tedy i křivostní invarianty příslušného řádu [173]. Abychom zjistili, zda přítomnost takové singularity výrazně nedeformuje studované vlastnosti, zvolili jsme v další práci [179] třídu disků, jejichž hustota je dána mocninami (Weylova) poloměru, totiž

$$w^{(m,n)}(\rho) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)_m}{m!} \frac{\mathcal{M}b}{2\pi\rho^3} \left(1 - \frac{b^n}{\rho^n}\right)^m, \quad (44)$$

kde  $m, n$  jsou přirozená,  $(a)_m = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$  je Pochhammerův symbol a  $\mathcal{M}$  hmotnost disku. Průběhy jsou na vnitřním okraji  $\rho = b$  regulární se všemi derivacemi, přičemž prvních  $m-1$  derivací tam dokonce vymizí. Okraj disku je však přesto singulární, totiž  $m$ +prvé a vyšší radiální derivace potenciálu tam divergují. Na ose má potenciál  $\nu^{(m,n)}(\rho = 0, z)$  tvar

$$-\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)_m}{m!} \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{b^2 + z^2}} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{kn+2} \binom{m}{k} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; 2 + \frac{kn}{2}; \frac{1}{1 + b^2/z^2}\right)$$

( ${}_2F_1$  je Gaussova hypergeometrická funkce) a “kdekoliv” na  $\sqrt{\rho^2 + z^2} < b$

$$\nu^{(m,n)}(\rho, z) = -\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)_m \mathcal{M}}{n} \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_{2j}(0) P_{2j}\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) (\rho^2 + z^2)^j}{\binom{2+2j}{n}_{m+1} b^{2j}}.$$

V oblasti  $\sqrt{\rho^2 + z^2} > b$  je obecný rozvoj delší — pro liché  $n$  totiž obsahuje logaritmické členy, které se nedají “rutinně” odečíst z průběhu na ose.

Zajímalo nás, které stránky gravitačního vlivu disků jsou “obecné” (dané celkovou hmotností, ale nepřilíš jejím přesným rozložením) a které naopak specifické pro určitý disk (t.j. určitý průběh hustoty). V parametrické rovině  $(\mathcal{M}, b)$  jsme opět vymezili oblasti, v nichž složené řešení splňuje základní podmínky kontra-rotující interpretace. Zkušenosti nabyté při studiu “MM” a “mocninných” disků by se zatím daly shrnout do tří bodů:

- Složená pole (černé díry a disku) se chovají zhruba ve shodě s intuicí, a to již intuicí newtonovskou. Jemnější detaily, závislé na vyšších derivacích hustoty, jsou však těžko odhadnutelné — zejména tedy stabilita.
- Gravitace disku může silně ovlivnit vlastnosti kruhových orbit v ekvatoriální rovině. Právě tyto orbity však disk tvoří (pomocí nich je interpretován), takže disk může mít silný vliv především “sám na sebe”. Lze tudíž odhadnout, že v reálném (dynamickém) případě se disk může díky své vlastní gravitaci uspořádat do výrazně jiné konfigurace, než kdyby vlastní pole “necítil”. To se nemusí týkat jen disků s velkou celkovou hmotností — zejména pro zmíněné “jemnější” vlastnosti typu stability je podstatný detailní průběh pole v daném místě, a tedy přesný tvar hustoty.
- S rostoucí hmotností disku či s přibližováním jeho okraje k černé díře se nestabilita objevuje nejdřív *uvnitř* disku, nikoliv na jeho vnitřním okraji, což by v reálném případě mohlo znamenat sklon k radiální fragmentaci.

Je ovšem třeba dodat, že získaná řešení jsou umělá a dost možná daleko od reality: jejich parametry jsou voleny “ručně”, nevyplývají z žádného modelu akrece, a nezachycují tedy ani odezvu disku na jeho vlastní gravitaci. Nedostatkem je také staticčnost studovaných konfigurací — odhaduje se, že reálné akreční systémy spíše rychle rotují. Nalezení pole stacionárního

disku (natož pak jeho “superpozice” s rotující černou dírou) je však mnohem obtížnějším problémem, který dosud nebyl uspokojivě vyřešen.

### 5.3 Pro srovnání: díra s tlustým toroidem

V článku [199] jsme s černou dírou pro zajímavost “sečetli” také pole tlustého toroidu. Potenciál toroidu je ve Weylových souřadnicích určen

$$\nu_{\text{tor}}(\rho, z) = -\frac{2\mathcal{M}}{\sqrt{\delta_+\delta_-}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n\left(\frac{\rho^2 + z^2 - a^2}{\delta_+\delta_-}\right) P_{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^2 + z^2 + a^2}{\delta_+\delta_-}\right),$$

kde  $\mathcal{M}$  je opět hmotnost,  $\delta_{\pm} \equiv \sqrt{(\rho \pm a)^2 + z^2}$ ,  $a$  je “velký” poloměr toru,  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  jsou Čebyševovy polynomy,  $P_{n-\frac{1}{2}}$  jsou Legendreovy funkce 1. druhu a polocelého stupně (toroidální funkce) a  $A_n$  jsou integrály z funkcí  $A_n^{(\varrho)} = (-1)^n \frac{4\pi^2 \varrho \epsilon_n a}{\mathcal{M}} {}_3F_2^{\text{reg}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1-n, 1+n; \frac{\varrho^2}{a^2}\right)$  (vynásobených hustotou) přes objem toroidu; zde dále  $\varrho$  je radiální vzdálenost od osy toroidu v souřadnicové rovině  $\{\rho, z\}$ , koeficient  $\epsilon_n$  je  $\frac{1}{2}$  pro  $n=0$  a 1 pro  $n>0$ , a  ${}_3F_2^{\text{reg}}(\dots; 1-n, 1+n; \cdot) \equiv \frac{{}_3F_2^{\text{reg}}(\dots; 1-n, 1+n; \cdot)}{\Gamma(1-n)\Gamma(1+n)}$  značí regularizovanou verzi zobecněné hypergeometrické funkce  ${}_3F_2$ .

Jako konkrétní ukázkou jsme uvažovali toroid “kruhového” průřezu  $\varrho \leq b$  s hustotou mocninného průběhu  $w(\varrho) = \frac{(1+k)(2+k)\mathcal{M}}{4\pi^2 ab^2} \left(1 - \frac{\varrho}{b}\right)^k$  ( $k$  je nezáporné celé číslo), nezávislou na lokálním latitudinálním úhlu.

Vlastnosti složeného pole toroidu a Schwarzschildovy černé díry jsme opět ilustrovali na integrálních křivkách zrychlení statické kongruence, na vývoji tvaru horizontu v závislosti na parametrech toru a na několika sadách časupodobných geodetik. Ukázali jsme také, že na povrchu toru a v rovníkové rovině mezi dírou a toroidem je Kretschmannův skalár konečný.

## 6 Tenké disky kolem rotujících černých děr

V Úvodu jsme se zmínili o “generačních technikách”, kterými se dá vyprodukovat prakticky jakékoliv řešení Einsteinových rovnic se dvěma komutujícími symetriemi. Kromě již dříve známých metrik byla těmito algoritmy skutečně odvozena i řada nových. Naprostá většina z nich však zůstává

bez interpretace a jen u nemnoha lze doufat, že by mohly popisovat něco realistického, speciálně pak černou díru superponovanou s nějakým dalším polem. (Slibnými se ukázaly být některé návrhy V. Manka a jeho spolupracovníků a výsledky D. Korotkina, C. Kleina a O. Richtera.)

## 6.1 “Pěstování” Weylovy metriky metodou inverzního rozptylu

V článku [210] jsme zkusili, zda pole rotující černé díry obklopené tenkým axisymetrickým diskem nelze “vygenerovat” metodou inverzního rozptylu Bělinského & Zacharova. V návaznosti na práce S. Chaudhuriho & K. Dase jsme nejdříve aplikovali verzi postupu se dvěma reálnými “solitony” na metriku Weylova typu (t.j. statickou a axiálně symetrickou). Výsledek se dá ve sferoidálních souřadnicích  $(t, r, \theta, \phi)$  Boyerova-Lindquistova typu zapsat ve tvaru Kerrova-NUT řešení,

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta}{\Sigma} \left( \mathcal{P} e^{\hat{\nu}} dt + \mathcal{S} e^{-\hat{\nu}} d\phi \right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} \left( \mathcal{R} e^{\hat{\nu}} dt - \mathcal{T} e^{-\hat{\nu}} d\phi \right)^2 + \\ & + \bar{C}^2 e^{2\hat{\lambda}-2\hat{\nu}} \left( \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Obsahuje dvě funkce určené kvadraturami a závisí na dvou potenciálech výchozí metriky a na pěti nezávislých konstantách; v průběhu odvozování lze také volit dvě znaménka. Speciálně Kerrovo-NUT řešení vyjde v případě, že výchozí prostoročas je plochý. Omezíme-li se na reflexně symetrická a asymptoticky plochá řešení obsahující černou díru a nastavíme přirozeným způsobem souřadný systém (m.j. volíme  $\bar{C}^2 = 1$ ), zbyde pouze volnost ve volbě výchozího řešení  $(\hat{\nu}, \hat{\lambda})$  a dvou konstant; ty označíme stejně jako u izolovaných černých děr  $M, a$ . Funkce v metrice (45) pak nabývají tvaru

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2Mr + a^2, \\ \Sigma &= \left( r \cosh u - \frac{Mr - a^2}{k} \sinh u \right)^2 + a^2 (\cos \theta \cosh v + \sinh v)^2, \\ \mathcal{P} &= \cosh u - \frac{M}{k} \sinh u, \\ \mathcal{R} &= a \cosh v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= a \left[ (1 + \cos^2 \theta) \cosh v + 2 \cos \theta \sinh v - 2\mathcal{P}e^{2\hat{\nu}} \right], \\ \mathcal{T} &= (r^2 - a^2) \cosh u - \left( \frac{M\Delta}{k} + 2kr \right) \sinh u + 2a\mathcal{R}e^{2\hat{\nu}},\end{aligned}$$

kde  $k \equiv \sqrt{M^2 - a^2}$  a funkce  $u, v$  jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned}v_{,\theta} &= -\frac{\Delta u_{,r}}{k \sin \theta} = \frac{2\Delta}{\Delta + k^2 \sin^2 \theta} [(r - M)\hat{\nu}_{,r} \sin \theta + \hat{\nu}_{,\theta} \cos \theta], \\ v_{,r} &= \frac{u_{,\theta}}{k \sin \theta} = -\frac{2}{\Delta + k^2 \sin^2 \theta} [(r - M)\hat{\nu}_{,\theta} \sin \theta - \Delta \hat{\nu}_{,r} \cos \theta].\end{aligned}$$

Horizont je určen větším kořenem rovnice  $\Delta = 0$  a singularita rovnicí  $\Sigma = 0$ . Plocha horizontu, povrchová gravitace a úhlová rychlost vycházejí

$$A = 4\pi(r_{\text{H}}^2 e^{-2\hat{\nu}_{\text{H}}(0)} + a^2 e^{2\hat{\nu}_{\text{H}}(0)}), \quad \kappa_{\text{H}} = \frac{4\pi k}{A}, \quad \omega_{\text{H}} = \frac{4\pi a}{A} \cosh 2\hat{\nu}_{\text{H}}(0)$$

[ $\hat{\nu}_{\text{H}}(0)$  značí  $\hat{\nu}_{\text{H}}$  na ose] a jeho Gaussova křivost je na ose dána výrazem

$$\frac{(r_{\text{H}}^2 - a^2 e^{4\hat{\nu}_{\text{H}}(0)}) [1 - 4\hat{\nu}_{\text{H},\cos \theta}(0)] - 2a^2}{(r_{\text{H}}^2 + a^2 e^{4\hat{\nu}_{\text{H}}(0)})^2} e^{2\hat{\nu}_{\text{H}}(0)},$$

který se může stát při rychlé rotaci (pro dost velké  $a$ ) záporným.

Prostorčas má také statickou mez — tam, kde je  $\Delta \mathcal{P}^2 = a^2 \sin^2 \theta \cosh^2 v$ .

Po přepisu do Weylova-Lewisova-Papapetrouova tvaru je z asymptotik gravitačního potenciálu a draggingové úhlové rychlosti,

$$\nu = -\frac{M + \hat{M}}{r} + O(r^{-2}), \quad \omega = \frac{2a(M + 2\hat{M})}{r^3} + O(r^{-4}),$$

vidět, že  $M + \hat{M}$  je celková hmotnost a  $(M + 2\hat{M})a$  celkový moment hybnosti řešení;  $\hat{M}$  značíme hmotnost výchozího prostorčasu, u něhož jsme předpokládali asymptotický průběh  $\hat{\nu} = -\hat{M}/r + O(r^{-2})$ .

Jako konkrétní příklad jsme spočítali průběh funkcí  $u, v$  pro Lemosův-Letelierův disk jako výchozí prostorčas — ten, který jsme v předchozí kapitole studovali superponovaný se Schwarzschildovou černou dírou. Výpočet Kretschmannova invariantu neodhalil žádné singularity mimo horizont. Našli jsme také souřadnice, v nichž je horizont regulární; limitně na horizontu mají význam Kerrových vcházejících / vycházejících souřadnic.

Řada vlastností metriky (45) se velmi zjednodušuje v extrémní limitě  $k \rightarrow 0$ . Hodnota “vnějšího gravitačního pole”  $(\hat{\nu}_i, \hat{\lambda}_i)$  na horizontu klesá v této limitě k nule [175]. To odpovídá “vypuzování” vnějších (stacionárních axisymetrických) polí z rotujících a nabitých černých děr, které bylo v literatuře pozorováno — jako obdoba Meissnerova efektu u (supra)vodičů — na testovacích i přesných polích magnetických.

## 6.2 Nefyzikálnost získaného řešení

V článku [176] jsme analyzovali řadu vlastností metriky (45), a to především pro konkrétní případ invertovaného prvního kontra-rotujícího disku Morgana & Morganové jakožto “startovního” zdroje. Vynesli jsme parametry horizontu, rozměr statické meze a radiální průběh významných ekvatoriálních úhlových rychlostí v závislosti na konstantách řešení (specifickém momentu hybnosti černé díry  $a/M$ , relativní hmotnosti disku  $\hat{M}/M$  a jeho vnitřním poloměru  $b/M$ ) a speciálně se zabývali extrémní limitou řešení ( $a \rightarrow M$ ). Ačkoliv všechny tyto vlastnosti se zdály být rozumnými, obrázky vlastního tvaru horizontu ukázaly, že horizont má v rovníkové rovině nehladké “vklenutí”, takže vzniklo podezření, že v této rovině není ani pod okrajem výchozího disku vakuum, ale je tam naindukována vrstva hmoty. Zjistili jsme, že metrické složky  $g_{tt}$  a  $g_{\phi\phi}$  skutečně mají v této rovině skok v normálových derivacích  $g_{tt,\theta}$  a  $g_{\phi\phi,\theta}$ , a to i pod okrajem disku; odpovídající plošná hustota vyšla kladná i záporná v závislosti na parametrech řešení a na poloměru. Z obecného tvaru metriky (45) se pak potvrdilo, že zjištěný problém vzniká pro *jakékoli* výchozí řešení Weylova typu  $(\hat{\nu}, \hat{\lambda})$ .

Patologie, se kterou jsme se zde setkali, je typickou ukázkou úskalí “generačních technik” — důmyslných matematických postupů, které je však těžké propojit s fyzikální motivací a kontrolou. Použitá metoda konkrétně “dosadila” doprostřed disku černou díru, avšak bez úpravy parametrů disku (průběhu jeho hustoty a momentu hybnosti) do podoby, v níž by každá z jeho orbit mohla na svém poloměru existovat bez další vnější síly. Musela proto být doplněna podpůrná plocha, která systém fixuje proti nestacionárnímu vývoji, t.j. zaručuje pro výslednou soustavu zdrojů splnění polních rovnic daných symetrií (zde drží hmotu disku, aby nespadla do centra nebo naopak neodletěla pryč). Této patologie se nejspíš není možné zbavit ani

vyříznutím určité části prostoročasu. Jinou otázkou je, zda by nešlo již vyjít z prostoročasu s černou dírou a vhodnou metodou jej pouze “roztočit”.

Stav znalostí v oblasti přesného popisu disků kolem černých děr jsme před časem shrnuli v příspěvku [174] a v přehledu [100]; v tom jsme zmínili i základy teorie testovacích disků kolem černých děr a studium těžkých disků ve větších vzdálenostech od centra, kde k popisu stačí Newtonova teorie.

### 6.3 Jiné výsledky z literatury

“Generační techniky” se i nadále zdají být nadějnou cestou k metrice popisující rotující černou díru s dalším axiálně symetrickým zdrojem. Vycházejí z teorie integrabilních systémů, rozvíjené od konce 60. let pro nelineární parciální diferenciální rovnice, které lze formulovat jako podmínku kompatibility určité lineární soustavy (tzv. Laxova páru). Soustava obsahuje nový, obecně komplexní (“spektrální”) parametr, který může nabývat spojitě jakýchkoli hodnot (to odráží symetrii problému vůči jisté nekonečně-rozměrné grupě). Řešení lineární úlohy se hledá jako funkce tohoto parametru, již se předem předepíše určité analytické vlastnosti. Postup se objevil v teorii evolučních (hyperbolických) rovnic, ale koncem 70. let našli Bělin-skij se Zacharovem a Maison lineární systém také pro vakuové Einsteinovy rovnice se dvěma komutujícími symetriemi (t.j. pro Ernstovu rovnici).

V posledních 10 letech postoupili v hledání fyzikálně zajímavých řešení Ernstovy rovnice nejdále Neugebauer & Meinel, Korotkin a Klein. C. Klein identifikoval podtřídu Korotkinových “hypereliptických” řešení, která odpovídá asymptoticky plochým prostoročasům symetrických vůči ekvatoriální rovině a regulárním všude kromě určitého povrchu. Výsledné metriky mají Minkowskiho limitu a v ultra-relativistické limitě se blíží k extrémnímu Kerrovu řešení. Jako konkrétní příklad získal Klein metriku pro pole kontra-rotujícího stacionárního tenkého disku. Našel také Ernstův potenciál odpovídající nelineární superpozici nekonečného a uprostřed “děravého” tenkého disku s Kerrovou černou dírou. Řešení této třídy jsou vně horizontu (včetně) a disku regulární a za určité volby konstant (nulového NUT parametru) asymptoticky plochá. Spolu s J. Frauendienerem vyvinul Klein i numerický kód pro explicitní výpočet Ernstova potenciálu, tedy metrických funkcí (srov. [158]). Otevřenou zůstává otázka “přímého” postupu,



t.j. řešení okrajové úlohy pro disk *předem zadaného* průběhu hustoty.

Zajímavé výsledky přicházely v poslední době také z numerické oblasti, zejména od M. Ansorga a D. Petroffa. Při studiu černých děr obklopených tlustým prstencem s vlastní gravitací (rotujícím vůči nekonečnu jako tuhé těleso) zjistili pomocí numericky získaných řešení, že pokud je toroid dost hmotný a rotuje dost rychle, může mít díra v jeho centru moment hybnosti vyšší než je “extrémní” hodnota  $J = M^2$  a může mít dokonce zápornou Komarovu hmotnost. (Jedná se o první příklad záporné Komarovy hmotnosti jednotlivého objektu v regulárním prostoročasu, v němž je všude splněna slabá energetická podmínka.) Numerické algoritmy jsou dnes již schopny řešit konfiguraci černé díry obklopené látkou dokonce i v *nestacionárním* případě. Nový hydrodynamický program nedávno předložili P. Montero, J. Font & M. Shibata; při jeho testování nejdříve počítali stacionární a axisymetrické rovnovážné situace. Lze předpokládat, že v budoucnu se budou věnovat m.j. stále ještě otevřenému problému tzv. *runaway* nestability, která je dosti “robustním” rysem fyziky *tlustých* disků kolem černých děr. Tyto systémy se totiž typicky chovají tak, že pokud se malá část hmotnosti disku, který právě vyplňuje svou “Rocheovu oblast” (kritickou hladinu efektivního potenciálu), přesune do díry, změní se potenciál tak, že kritická ekviplocha kontrahuje dovnitř disku, takže je umožněn další odtok jeho látky do díry. Proces je lavinovitý a měl by vést k překotnému zhroucení celého disku pod horizont. Nestabilita byla zkoumána za různých zjednodušení analyticky i numericky, ale konečná odpověď má teprve přijít.

## 7 Orbity v cirkulárních prostoročasech

Nejen akreční disky, ale vlastně veškeré zhruba stacionární diskovité struktury tvoří “v průměru” látka na přibližně kruhových drahách. Studium kruhových orbit je tak nezbytnou součástí úloh v astrofyzice i jinde. V teorii relativity zaujímají kruhové orbity výsadní postavení i bez ohledu na jakýkoli “praktický” význam. Teorie totiž přináší nové, ne-newtonovské dynamické efekty, které se — zejména ve stacionárních a axiálně symetrických (nebo aspoň helikálně symetrických) prostoročasech — projevují v “čisté” podobě právě na kruhových orbitách. Již ve speciální relativitě slouží rov-

noměrně rotující systém jako druhá nejjednodušší neinerciální “laboratoř” (po lineárně urychlené) a Ehrenfestův “paradox” rotujícího kotouče dodnes vyvolává diskuse i v odborné literatuře. S obecnou relativitou vstupuje do hry i “opravdová” gravitace (křivost), což je zvláště zajímavé proto, že i její působení závisí na rychlosti (přispívá k ní totiž i kinetická energie, jak je zřejmé z principu ekvivalence). Zdrojem pole je hustota hybnosti a její tok, což přináší efekty spojené se “strháváním inerciálního prostoru” (*draggingem*) kolem pohybujícího se zdroje. Z větší části je lze pochopit v analogii s elektrodynamikou, kde — na rozdíl od Newtonovy teorie gravitace — zdrojové proudy také budí určitou (magnetickou) složku pole.

Ve stacionárních a axiálně symetrických prostoročasech se kruhové orbity, probíhané stálou úhlovou rychlostí  $\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt}$ , někdy nazývají “kvazi-Killingovými”, protože tečný vektor každé jednotlivé orbity

$$u^\mu = \frac{\eta^\mu + \Omega \xi^\mu}{|\eta^\mu + \Omega \xi^\mu|} = u^t(1, 0, 0, \Omega), \quad u^t = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}$$

je Killingovým vektorem. Tečné pole celé kongruence kruhových orbit však Killingovým není, protože úhlová rychlost  $\Omega$  je pak již obecně závislá na místě. Odpovídající čtyř-zrychlení  $a_\mu = u_{\mu;\nu}u^\nu$  se dá vyjádřit například

$$a_\mu = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}u^\alpha u^\beta = -(\ln u^t)_{,\mu} + u^t\Omega_{,\mu}\ell = u^t(\gamma_{,\mu} - \Omega\ell_{,\mu}), \quad (46)$$

kde  $\gamma = -u_t$  je specifická energie a  $\ell = u_\phi$  moment hybnosti vůči nekonečnu.

## 7.1 Privilegované stacionární kruhové kongruence

V rámci stacionárních kruhových pohybů existuje několik význačných časupodobných kongruencí, které lze z různých důvodů považovat za “neobíhající”. První je dána úhlovou rychlostí  $\Omega = \omega$  (proto angl. zkratka **L NRF**) a má  $\ell = 0$  (proto též zkratka **ZAMO**). Její tečné pole  $u^\mu$  je ortogonální k nadplochám  $t = \text{konst}$  a má tedy nulovou vířivost. Testovací částice, které volně padají z klidu z radiálního nekonečna, nemají vůči ZAMO žádnou azimutální rychlost. **Statičtí pozorovatelé** obíhají s  $\Omega = 0$ , tedy jsou v klidu vůči asymptotickému inerciálnímu systému. Jsou však časupodobní jen vně statické meze. Prostoročasy izolovaných stacionárních černých děr

(t.j. Kerrovy-Newmanovy) jsou algebraicky speciální, konkrétně Petrovova typu D, takže v nich existují dva (dvojnásobně degenerované) hlavní nulové směry. Stacionární kruhová kongruence s  $\Omega = \frac{a}{r^2+a^2}$  (zvaná **Carterova** či **kanonická**) je tam privilegovaná tím, že (kromě prostoročasových symetrií) částečně reflektuje algebraickou strukturu křivosti, totiž hlavní nulové směry jsou vůči ní čistě radiální. Kongruence je všude vně horizontu času podobná a její úhlová rychlost je větší než u kongruence ZAMO.

Poslední návrh na “neobíhající” pozorovatele je poměrně nedávný. Jedná se o **extremálně urychlenou kongruenci**, určenou vztahem pro lokální extrém velikosti čtyř-zrychlení,  $\frac{\partial(a_r a^r)}{\partial\Omega} = 0$ . Její úhlová rychlost se dá vyjádřit explicitně jen v rovníkové rovině; na rozdíl od všech zmíněných úhlových rychlostí je záporná — pohyb směřuje *proti* rotaci centra.<sup>5</sup> To odpovídá známé skutečnosti, že kontra-rotující satelity přitahuje centrum silněji než ko-rotující. Kongruence je privilegována z několika hledisek:

- V newtonovském i schwarzschildovském poli je neobíhající satelit přitahován k centru silněji než všechny, které nějakou tečnou rychlost mají — mezi všemi stacionárními satelity na dané orbitě má největší zrychlení. Extremální velikost zrychlení je tedy přirozeným kritériem ne-obíhání.
- Čtyř-zrychlení extrémně urychlených pozorovatelů je podél jejich světočar přenášeno Fermiho přenosem. Pokud tedy takový pozorovatel namíří setrvačnický směr, který lokálně vnímá jako radiální (směr tíže, daný jeho vlastním zrychlením), pak setrvačnický v tomto směru zůstane — nebude vůči směru tíže konat precesi.
- Tam, kde existují ko-rotující i kontra-rotující kruhové *geodetiky* (tedy v rovníkové rovině nad kontra-rotující fotonovou dráhou), mají právě vůči těmto pozorovatelům stejně velikou (a opačně orientovanou) rychlost. Díky tomu mají vůči nim také stejnou periodu (neboli “gravitomagnetický hodinový efekt” je pro extrémně urychlené pozorovatele nulový).
- Křivku v  $d$ -rozměrném prostoru lze invariantně charakterizovat  $d$  skalárními křivostmi; u světočar ( $d=4$ ) je první křivostí velikost zrychlení

<sup>5</sup> Přesněji tomu tak je nad “kontra-rotující” fotonovou kruhovou orbitou; pod “ko-rotující” fotonovou orbitou je příslušná úhlová rychlost naopak kladná; mezi fotonovými orbitami je průběh  $(a_r a^r)(\Omega)$  monotónní, tedy vůbec nemá lokální extrém.

$\sqrt{a_\nu a^t}$ . Extremálně urychlené stacionární kruhové světočáry mají nulovou druhou křivost (= první torzi), tedy jsou v určitém smyslu “rovinné”.

Ve statickém případě všechny uvedené kongruence “ne-obíhajících” pozorovatelů přecházejí v pozorovatele statické ( $\Omega = 0$ ).

Náš zájem o stacionární kruhové kongruence začal prací [29], věnovanou geodetikám v Kerrových polích, a pokračoval ve [160, 161, 165, 169, 170, 171]. Postupně jsme se soustředili hlavně na extrémně urychlenou kongruenci a s ohledem na její vlastnosti ji navrhli jako nejpřirozenější standard “ne-rotování” (tedy obdobu newtonovských stojících pozorovatelů) v cirkulárních prostoročasech. (Např. i podle Bonnora & Steadmana mají tito pozorovatelé “*a better claim to be called non-rotating than the LNRF*”.)

V článku [170] jsme se ovšem zabývali stacionárními kruhovými pohyby i obecně a odvodili pro ně jednoduché geometrické vztahy mezi proměnnými několika typů problémů: mechanikou jedné testovací částice, precesí setrvačnicků vůči význačným směrům, geometrickými parametry (křivostmi) orbit zaváženými ve Frenetově-Serretově formalismu a vlastnostmi celé kruhové kongruence (její vířivostí a příčnou deformací). Zajímaly nás i “praktičtější” aspekty, speciálně otázka, co by vlastně naměřil v (uzavřené) orbitující laboratoři skutečný pozorovatel a jak by z toho mohl dovodit parametry své dráhy a prostoročasu [181], a také zda by podobnou úlohu mohl vyřešit vzdálený pozorovatel na základě pozorování zdroje obíhajícího kolem černé díry (např. v akrečním disku) [185, 102].

V posledním desetiletí přispívali k dané oblasti hlavně R. Jantzen a D. Bini a jejich spolupracovníci.

## 7.2 Rotosféry v cirkulárních prostoročasech

Představme si testovací částici obíhající stálou úhlovou rychlostí  $\Omega$  po kruhové dráze o poloměru  $r$  kolem sféricky symetrického tělesa hmotnosti  $M$ . V klasické fyzice má odpovídající zrychlení  $\left(\frac{M}{r^2} - r\Omega^2\right)$  kladné maximum při  $\Omega = 0$  a klesá do  $-\infty$  s  $|\Omega|$  rostoucím do  $+\infty$ . V relativitě to ve velmi silném poli může být částečně nebo úplně naopak. Například ve Schwarzschildově poli se zrychlení chová “klasicky” nad poloměrem  $r = 3M$  fotonové kruhové orbity, avšak na  $r < 3M$  má při  $\Omega = 0$  (kladné) *minimum*

a s  $|\Omega|$  blížící se největší možné hodnotě  $r^{-1}\sqrt{1-2M/r}$  jde naopak do  $+\infty$ . V oblasti  $r < 3M$  (nazvané *rotosférou*) tudíž vzrůst  $|\Omega|$  vynucuje *zvyšování* tahu ve směru *od* centra. Nastávají tam i další zvláštnosti: gyroskopy precedují *souhlasně* s orbitální úhlovou rychlostí; obrací se Rayleighovo kritérium lokální stability ekvatoriálního disku z částic na kruhových orbitách, totiž disk je stabilní, pokud moment hybnosti *klesá* s rostoucím  $r$ ; a působí-li v disku viskozitní tření, odnáší moment hybnosti *dovnitř*, ne ven.

Rotosféram (v obecných cirkulárních prostoročasech) jsme věnovali hlavně článek [169]. Ve srovnání se statickým případem dochází ve stationárním poli k “draggingu”, díky němuž již přímý a zpětný azimutální směr nejsou ekvivalentní. Radiální zrychlení se pak chová “intuitivně” pro kruhové dráhy nad vnější (kontra-rotující) a opačně pod vnitřní (ko-rotující) fotonovou orbitou. Mezi fotonovými orbitami zrychlení monotónně klesá z  $+\infty$  do  $-\infty$  pro  $\Omega$  rostoucí z  $\Omega_{\min}$  po  $\Omega_{\max}$ , tedy — zhruba řečeno — poblíž  $\Omega_{\max}$  se chová “intuitivně”, zatímco poblíž  $\Omega_{\min}$  opačně. V článcích [169, 170] byla vyjasněna souvislost mezi anomálním chováním zrychlení a precesí gyroskopů přenášených po kruhových drahách. Našli jsme také vztah  $\frac{\partial a_\mu}{\partial \Omega} = 2u^t (\omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}) \xi^t$  mezi derivací zrychlení a tenzory vířivosti ( $\omega_{\mu\nu}$ ) a příčné deformace ( $\sigma_{\mu\nu}$ ) kruhové kongruence. Tím se m.j. upřesnily souvislosti “rotosférových” efektů s chováním složky příčné deformace, jež vyvolává viskozitní moment (a tím teplo a záření) v akrečních discích.

Lze očekávat, že zmíněné anomální chování zrychlení není vázáno jen na čistě azimutální pohyb a že se projevuje i při obecném tangenciálním pohybu. Potvrdili jsme to na polárních sférických orbitách [162]; ukázalo se, že i v tomto případě tvoří předěl nejvnitřnější — fotonová — sférická polární geodetika. Jsou-li centrum i sledovaná částice nabitě, vstupuje do hry i Lorentzova síla, která je (rovněž) závislá na rychlosti. Jak jsme ukázali v práci [180] (viz i [27]), chování zrychlení se tím však nijak zásadně nemění.

### 7.3 Interpretace pohybu částic a gyroskopů

Pozornost věnovaná od konce 80. let rotosféram oživila snahu o “vysvětlení” jevů příčících se newtonovské intuici v obecně platném a kovariantním, ale také jednoduchém a heuristicky plausibilním jazyce. Byly navrženy dvě hlavní, odlišné definice “gravitačních a inerciálních sil”. V první je gravi-

tační síla striktně nezávislá na rychlosti a anomální chování je vyvoláno obratem ve směru působení odstředivé síly v blízkosti zdroje. Odpovídající geometrickou intuici poskytuje tzv. optická referenční geometrie — konformně zdeformovaná tří-metrika, v níž se světlo pohybuje po přímkách (odstředivá síla pak působí na vše, co oproti němu “zatáčí”). V druhém pohledu se odstředivá síla chová “normálně”, ale gravitační síla obsahuje čtverec relativního Lorentzova faktoru (“kinetická energie má váhu” jako každá energie v obecné relativitě) a poblíž zdroje překoná všechny ostatní síly. (Zastávali jsme tento druhý pohled, např. spolu s F. de Felicem, D. Pagem, C. Barrabèsem, B. Boisseauem & W. Israelem či V. Frolovem & I. Novikovem. V úvodu článku [169] je přehled literatury, kde byl jeden či druhý přístup použit k interpretaci různých procesů.)

Naše příspěvky k tématu jsou spojeny hlavně s článkem [163], v němž jsme navrhli obecný předpis pro rozštěpení čtyř-zrychlení na příspěvky od gravitační síly, draggingu, Coriolisovy síly, odstředivé síly a tečné složky inerciálního odporu. Je formulován pomocí veličin měřených ZAMO pozorovatelem vzhledem k jeho lokální prostorové bázi LNRF.<sup>6</sup> Ukázali jsme, že rozklad dává “přirozené” výsledky pro jednoduché typy pohybu v Kerrově(-Newmanově) poli a jeho speciálních případech [161, 163, 180] a že poskytuje interpretaci různých vlastností jako jsou (de)kolimační efekty (viz [29]), výskyt “repulsivní” oblasti, ergosféry a horizontu, či nedosažitelnost singularity pro geodetiky, které nejsou vázány na rovníkovou rovinu [164, 168]. V práci [180] (pro Kerrovo pozadí už v [167]) jsme obdobně interpretovali i pohyb po sférických polárních drahách a v pracích [166, 167] také precesi gyroskopů přenášených po jednoduchých typech drah v Kerrově poli.

## 7.4 Pohyb částice se spinem

Podél *zadané* světočáry  $u^\mu$  se spin (vlastní moment hybnosti) testovacího setrvačnicku vyvíjí podle rovnice Fermiho-Walkerova přenosu; příslušné zrychlení  $a_\mu$  na vývoji setrvačnicku nezávisí, připisuje se plně dodané vnější síle (působící v těžišti). To je však adekvátní jen pro malé hodnoty spinu. Požadavek podsvětelného pohybu elementů tělesa totiž zdola omezuje jeho

<sup>6</sup> Jedná se vlastně o zobecnění návrhu F. de Felicem, učiněného ve Schwarzschildově poli a rozšířeného na pole Kerrovo v [161].

velikost (zhruba na  $\gtrsim \frac{s}{m}$ , kde  $s$  je jeho spin a  $m$  hmotnost) — a při nenulové velikosti ovlivňují vývoj tělesa i slapové síly, způsobené nehomogenitou gravitačního pole a popsané Riemannovým tenzorem. Pokud tedy světočára předešlá není a kromě vývoje spinu je třeba řešit i samotný pohyb, jedná se o obtížnější, svázaný problém. Je-li těleso malé vůči poloměru křivosti prostoročasu a z jeho multipólů se vezmou v úvahu jen první dva (tzv. “pól-dipól” aproximace), vede úloha na rovnice Mathissona a Papapetroua,

$$\frac{Dp^\mu}{d\tau} = -\frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} u^\nu S^{\kappa\lambda}, \quad \frac{DS^{\mu\nu}}{d\tau} = p^\mu u^\nu - p^\nu u^\mu,$$

kde  $S^{\mu\nu} \equiv \int_{x^0=\text{const}} (T^{\nu 0} \delta x^\mu - T^{\mu 0} \delta x^\nu) \sqrt{-g} d^3x$  je tenzor spinu tělesa a  $p^\mu \equiv \int_{x^0=\text{const}} T^{\mu 0} \sqrt{-g} d^3x + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} \frac{u^\rho}{u^0} S^{\sigma 0} = m u^\mu - u_\sigma \frac{DS^{\mu\sigma}}{d\tau}$  jeho hybnost;  $u^\mu(\tau)$  značí tečný vektor k reprezentativní světočáře tělesa a  $m \equiv -p_\sigma u^\sigma$  hmotnost tělesa v systému s ní spojeném. Rovnice je třeba “uzavřít” třemi podmínkami, které fakticky vybírají reprezentativní světočáru (ta není jednoznačná už ve speciální relativitě, jelikož pojem těžiště není lorentzovsky invariantní). Rozumnými jsou podmínky, které se dají uvést do tvaru  $V_\sigma S^{\mu\sigma} = 0$ , kde  $V^\alpha$  je časupodobný vektor. Obvykle se volí jedna z podmínek  $S^{0i} = 0$ ,  $u_\sigma S^{\mu\sigma} = 0$ ,  $p_\sigma S^{\mu\sigma} = 0$  (jejich význam je vysvětlen v [121]).

V článku [172] (rovněž [177]) jsme zjišťovali (za užití podmínky  $p_\sigma S^{\mu\sigma} = 0$ ), jak se “zapnutím” spinu změní trajektorie volných částic v Kerrově poli, počítané předtím v práci [29]. V [121] jsme pak porovnali různé dodatečné podmínky a navrhli pojem “minimální světotrubice” jako ukazatele efektivní velikosti “částice”. Vykreslení této trubice v několika situacích ukázalo, že při velkém spinu a ve velmi nehomogenním poli (např. poblíž černé díry) může být “pól-dipólová” aproximace problematická (“částice” není vůči horizontu zanedbatelně malá). V článku [121] jsme také navrhli další možnou dodatečnou podmínku,  $w_\sigma S^{\mu\sigma} = 0$ , kde  $w^\mu$  je nějaký časupodobný vektor, paralelně přenášený podél reprezentativní světočáry (tedy  $w_\sigma w^\sigma = -1$ ,  $Dw^\mu/d\tau = 0$ ). Za této podmínky platí jednoduše  $p^\mu = m u^\mu$  a  $m$  je konstantou pohybu, takže Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice znějí

$$m \frac{Du^\mu}{d\tau} = -\frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} u^\nu S^{\kappa\lambda}, \quad \frac{DS^{\mu\nu}}{d\tau} = 0.$$

## 7.5 Poslední vývoj v oblasti

Práce o pohybu částic a jeho dynamické interpretaci vůči určité třídě pozorovatelů se objevovaly i v posledním desetiletí. Různé přístupy byly porovnány a geometricky pochopeny v rámci obecného jazyka relativních zrychlení, založeného na gravito-elektromagnetické praxi 3+1 rozštěpení (Jantzen, Bini a spolupracovníci). Rozvíjen byl i pohled považující “gravitační sílu” za striktně nezávislou na rychlosti a odpovídající pohybu v “optické geometrii” (Foertsch et al., Jonsson, Stuchlík). Nedávné příspěvky k otázkám pohybu částic se spinem jsou zmíněny v úvodu článku [121].

## Literatura — naše práce

- [1] Bičák J., Semerák O., 1999, *Interplay between forces in Kerr-Newman field*, in Piran T. (ed.), Proc. 8th M. Grossmann Meeting on Gen. Rel., (World Scientific, Singapore), p. 401
- [2] Bičák J., Semerák O., Hadrava P., 1993, *Collimation effects of the Kerr field*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **263**, 545
- [3] Karas V., Huré J.-M., Semerák O., 2004, *Gravitating discs around black holes* (Topical Review), Class. Quantum Grav. **21**, R1
- [4] Karas V., Semerák O., de Felice F., 2003, *Variability of black-hole binary sources and Lense-Thirring orbital precession*, in Ruffini R., Sigismondi C. (eds.), *Nonlinear Gravitodynamics / The Lense-Thirring Effect*, Proc. 3rd W. Fairbank Meeting (World Scientific, Singapore), p. 282
- [5] Kyrián K., Semerák O., 2007, *Spinning test particles in a Kerr field — II*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **382**, 1922
- [6] Požár N., Semerák O., Šácha J., Žáček M., Zellerin T., 2007, *Exact solutions for discs around stationary black holes*, in Karas V., G. Matt (eds.), *Black Holes from Stars to Galaxies — Across the Range of Masses*, Proc. IAU Symp. 238 (Cambridge Univ. Press, Cambridge), p. 433
- [7] Semerák O., 1993, *Stationary frames in the Kerr field*, Gen. Rel. Grav. **25**, 1041



- 
- [8] Semerák O., 1994, *On the competition of forces in the Kerr field*, Astron. Astrophys. **291**, 679
  - [9] Semerák O., 1995, *On the occurrence of rotospheres in the Kerr field*, Physica Scr. **52**, 488
  - [10] Semerák O., 1995, *What forces drive the relativistic motion?*, Nuovo Cim. B **110**, 973
  - [11] Semerák O., 1996, *Collimation (and other) effects of the Kerr field: an interpretation*, Astrophys. Lett. Commun. **33**, 275
  - [12] Semerák O., 1996, *Extremally accelerated observers in stationary axisymmetric spacetimes*, Gen. Rel. Grav. **28**, 1151
  - [13] Semerák O., 1996, *What forces act in relativistic gyroscope precession?*, Class. Quantum Grav. **13**, 2987
  - [14] Semerák O., 1997, *Gyroscope on polar orbit in the Kerr field*, Gen. Rel. Grav. **29**, 153
  - [15] Semerák O., 1997, *Forces at the Kerr singularity*, Astrophys. Space Sci. **250** 235
  - [16] Semerák O., 1998, *Rotospheres in stationary axisymmetric spacetimes*, Annals Phys. **263**, 133
  - [17] Semerák O., 1998, *Circular orbits in stationary axisymmetric spacetimes*, Gen. Rel. Grav. **30**, 1203
  - [18] Semerák O., 1999, *Gravitomagnetic clock effect and extremely accelerated observers*, Class. Quantum Grav. **16** 3769
  - [19] Semerák O., 1999, *Spinning test particles in a Kerr field — I*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **308**, 863
  - [20] Semerák O., 2001, *Curvature singularity around first Morgan-Morgan disc*, Class. Quantum Grav. **18**, 3589
  - [21] Semerák O., 2002, *Towards gravitating discs around rotating black holes*, in O. Semerák, J. Podolský and M. Žofka (eds.), *Gravitation: Following the Prague Inspiration*, A Volume in Celebration of the 60th Birthday of Jiří Bičák (World Scientific, Singapore), p. 111
  - [22] Semerák O., 2002, *Expulsion of external fields from extreme horizons: example of an external gravitational field*, Czech. J. Phys. **52**, 11
  - [23] Semerák O., 2002, *Thin disc around a rotating black hole, but with support in-between*, Class. Quantum Grav. **19**, 3829

- [24] Semerák O., 2003, *Spinning particles in the Kerr field*, in Ruffini R., Sigismondi C. (eds.), *Nonlinear Gravitodynamics / The Lense-Thirring Effect*, Proc. 3rd W. Fairbank Meeting (World Scientific, Singapore), p. 74
- [25] Semerák O., 2003, *Gravitating discs around a Schwarzschild black hole: III*, *Class. Quantum Grav.* **20**, 1613
- [26] Semerák O., 2004, *Exact power-law discs around static black holes*, *Class. Quantum Grav.* **21**, 2203
- [27] Semerák O., Bičák J., 1997, *The interplay between forces in the Kerr-Newman field*, *Class. Quantum Grav.* **14**, 3135
- [28] Semerák O., de Felice F., 1997, *Quasi-local measurements and orientation in black-hole fields*, *Class. Quantum Grav.* **14**, 2381
- [29] Semerák O., Karas V., 1999, *Pseudo-Newtonian models of a rotating black hole field*, *Astron. Astrophys.* **343**, 325
- [30] Semerák O., Žáček M., 2000, *Static discs around a Schwarzschild black hole: I*, *Class. Quantum Grav.* **17**, 1613
- [31] Semerák O., Žáček M., 2000, *Oscillations of static disks around Schwarzschild black holes: Effect of self-gravitation*, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **52**, 1067
- [32] Semerák O., Karas V., de Felice F., 1999, *Parameters of black holes in sources with periodic variability*, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **51**, 571
- [33] Semerák O., Zellerin T., Žáček M., 1999, *The structure of superposed Weyl fields*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **308**, 691 (Erratum: 2001, **322**, 207)
- [34] Semerák O., Žáček M., Zellerin T., 1999, *Test-particle motion in superposed Weyl fields*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **308**, 705
- [35] Šácha J., Semerák O., 2005, *Toroidal source around a static black hole*, *Czech. J. Phys.* **55**, 139
- [36] Zellerin T., Semerák O., 2000, *Two-soliton stationary axisymmetric sprouts from Weyl seeds*, *Class. Quantum Grav.* **17**, 5103
- [37] Žáček M., Semerák O., 2002, *Static discs around a Schwarzschild black hole: II*, *Czech. J. Phys.* **52**, 19

## Literatura — úplná podle disertace

- [1] Abbassi S., Ghanbari J., Salehi F., 2006, *Self-similar evolutionary solutions of self-gravitating, polytropic  $\beta$ -viscous disks*, *Astron. Astrophys.* **460**, 357
- [2] Abramowicz M. A., 1974, *Theory of level surfaces inside relativistic, rotating stars. II*, *Acta Astron.* **24**, 45
- [3] Abramowicz M. A., 1990, *Centrifugal force — a few surprises*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **245**, 733
- [4] Abramowicz M. A., Prasanna A. R., 1990, *Centrifugal force reversal near a Schwarzschild black hole*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **245**, 720
- [5] Abramowicz M. A., Calvani M., Nobili L., 1980, *Thick accretion disks with super-Eddington luminosities*, *Astrophys. J.* **242**, 772
- [6] Abramowicz M. A., Calvani M., Nobili L., 1983, *Runaway instability in accretion disks orbiting black holes*, *Nature* **302**, 597
- [7] Abramowicz M. A., Curir A., Schwarzenberg-Czerny A., Wilson R. E., 1984, *Self-gravity and global structure of accretion discs*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **208**, 279
- [8] Abramowicz M., Jaroszyński M., Sikora M., 1978, *Relativistic, accreting disks*, *Astron. Astrophys.* **63**, 221
- [9] Abramowicz M. A., Kluźniak W., Lasota J.-P., 2002, *No observational proof of the black-hole event-horizon*, *Astron. Astrophys.* **396**, L31
- [10] Abramowicz M. A., Nurowski P., Wex N., 1993, *Covariant definition of inertial forces*, *Class. Quantum Grav.* **10**, L183
- [11] Abramowicz M. A., Nurowski P., Wex N., 1995, *Optical reference geometry for stationary and axially symmetric spacetimes*, *Class. Quantum Grav.* **12**, 1467
- [12] Anandan J., Dadhich N., Singh P., 2003, *Action principle formulation for the motion of extended bodies in general relativity*, *Phys. Rev. D* **68**, 124014
- [13] Andalib S. W., Tohline J. E., Christodoulou D. M., 1997, *A survey of the principal modes of nonaxisymmetric instability in self-gravitating accretion disk models*, *Astrophys. J. Suppl.* **108**, 471

- [14] Anderson M. R., Lemos J. P. S., 1988, *Viscous shear in the Kerr metric*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **233**, 489
- [15] Ansorg M., Hennig J., 2008, *The inner Cauchy horizon of axisymmetric and stationary black holes with surrounding matter* Class. Quantum Grav. **25**, 222001
- [16] Ansorg M., Petroff D., 2005, *Black holes surrounded by uniformly rotating rings*, Phys. Rev D **72**, 024019
- [17] Ansorg M., Petroff D., 2006, *Negative Komar mass of single objects in regular, asymptotically flat spacetimes*, Class. Quantum Grav. **23**, L81
- [18] Ansorg M., Kleinwächter A., Meinel R., Neugebauer G., 2002, *Dirichlet boundary value problems of the Ernst equation*, Phys. Rev. D **65**, 044006
- [19] Ashtekar A., Krishnan B., 2004, *Isolated and dynamical horizons and their applications*, Living Reviews in Relativity 2004-10 (Max Planck Soc.)
- [20] Bardeen J. M., 1973, *Rapidly Rotating Stars, Disks, and Black Holes*, in DeWitt C., DeWitt B. S. (eds.), *Black Holes*, Les Houches 1972 (Gordon and Breach, New York), p. 241
- [21] Barrabès C., Boisseau B., Israel W., 1995, *Orbits, forces and accretion dynamics near spinning black holes*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **276**, 432
- [22] Belinskii V. A., Zakharov V. E., 1978, *Integration of Einstein's equations by an inverse scattering method and calculation of exact soliton solutions*, Sov. Phys. JETP **48**, 985
- [23] Belinskii V. A., Zakharov V. E., 1979, *Stationary gravitational solitons with axial symmetry*, Sov. Phys. JETP **50**, 1
- [24] Bičák J., 2000, *Black holes under external influence*, Pramana **55**, 481
- [25] Bičák J., Dvořák L., 1976, *Stationary electromagnetic fields around black holes. II. General solutions and the fields of some special sources near a Kerr black hole*, Gen. Rel. Grav. **7**, 959
- [26] Bičák J., Ledvinka T., 2000, *Electromagnetic fields around black holes and Meissner effect*, Nuovo Cim. B **115**, 739

- [27] Bičák J., Semerák O., 1999, *Interplay between forces in Kerr-Newman field*, in Piran T. (ed.), Proc. 8th M. Grossmann Meeting on Gen. Rel., (World Scientific, Singapore), p. 401
- [28] Bičák J., Lynden-Bell D., Katz J., 1993, *Relativistic discs and flat galaxy models*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **265**, 126
- [29] Bičák J., Semerák O., Hadrava P., 1993, *Collimation effects of the Kerr field*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **263**, 545
- [30] Bini D., 2003, *On the geometrization of inertial forces in relativity*, Nuovo Cim. B **118**, 1055
- [31] Bini D., Jantzen R., 2006, *Inertial forces in relativity*, in Novello M., Bergliaffa S. P., Ruffini R. (eds.), Proc. 10th M. Grossmann Meeting, Rio de Janeiro 2003 (World Scientific, Singapore), p. 1892
- [32] Bini D., Carini P., Jantzen R. T., 1997, *The intrinsic derivative and centrifugal forces in general relativity. I. Theoretical foundations*, Int. J. Mod. Phys. D **6**, 1
- [33] Bini D., Carini P., Jantzen R. T., 1997, *The intrinsic derivative and centrifugal forces in general relativity. II. Applications to circular orbits in some familiar stationary axisymmetric spacetimes*, Int. J. Mod. Phys. D **6**, 143
- [34] Bini D., Cherubini C., Geralico A., Jantzen R. T., 2008, *Physical frames along circular orbits in stationary axisymmetric spacetimes*, Gen. Rel. Grav. **40**, 985
- [35] Bini D., de Felice F., Geralico A., 2007, *Strains and axial outflows in the field of a rotating black hole*, Phys. Rev. D **76**, 047502
- [36] Bini D., de Felice F., Jantzen R. T., 1999, *Absolute and relative Frenet-Serret frames and Fermi-Walker transport*, Class. Quantum Grav. **16**, 2105
- [37] Bini D., Fortini P., Geralico A., Ortolan A., 2008, *Quadrupole effects on the motion of extended bodies in Kerr spacetime*, Class. Quantum Grav. **25**, 125007
- [38] Bini D., Jantzen R. T., Merloni A., 1999, *Geometric interpretation of the Frenet-Serret frame description of circular orbits in stationary axisymmetric spacetimes*, Class. Quantum Grav. **16**, 1333

- [39] Blaes O. M., Arras P., Fragile P. C., 2006, *Oscillation modes of relativistic slender tori*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **369**, 1235
- [40] Bodo G., Curir A., 1992, *Models of self-gravitating accretion disks*, Astron. Astrophys. **253**, 318
- [41] Bonnor W. B., Steadman B. R., 1999, *The gravitomagnetic clock effect*, Class. Quantum Grav. **16**, 1853
- [42] Boyer R. H., 1965, *Rotating fluid masses in general relativity*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **61**, 527
- [43] Bretón N., Denisova T. E., Manko V. S., 1997, *A Kerr black hole in the external gravitational field*, Phys. Lett. A **230**, 7
- [44] Camenzind M., 2007, *Compact Objects in Astrophysics* (Springer, Berlin Heidelberg)
- [45] Cannizzo J. K., 1992, *Accretion disks in active galactic nuclei – Vertically explicit models*, Astrophys. J. **385**, 94
- [46] Cannizzo J. K., Reiff C. M., 1992, *Accretion disks in active galactic nuclei – Vertically averaged models*, Astrophys. J. **385**, 87
- [47] Carter B., 1973, *Black Hole Equilibrium States*, in DeWitt C., DeWitt B. S. (eds.), *Black Holes*, Les Houches 1972 (Gordon and Breach, New York), p. 57
- [48] Carter B., 1979, *The general theory of the mechanical, electromagnetic and thermodynamic properties of black holes*, in Hawking S. W., Israel W. (eds.), *General Relativity, An Einstein centenary survey* (Cambridge Univ. Press, Cambridge), p. 294
- [49] Chakrabarti S. K., 1988, *Spacetime with self-gravitating thick disc*, J. Astrophys. Astron. **9**, 49
- [50] Chamorro A., Gregory R., Stewart J. M., 1987, *Static axisymmetric discs and gravitational collapse*, Proc. Roy. Soc. London A **413**, 251
- [51] Chandrasekhar S., 1979, *An introduction to the theory of the Kerr metric and its perturbations*, in Hawking S. W., Israel W. (eds.), *General Relativity, An Einstein Centenary Survey* (Cambridge Univ. Press, Cambridge), p. 370
- [52] Chandrasekhar S., 1983, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford Univ. Press, New York)

- [53] Chaudhuri S., Das K. C., 1997, *Two-Soliton Solutions of Axially Symmetric Metrics*, Gen. Rel. Grav. **29**, 75
- [54] Chaudhuri S., Das K. C., 1997, *Axially symmetric metrics from Laplace's seed by inverse scattering method*, J. Math. Phys. **38**, 5792
- [55] Cherubini C., Bini D., Capozziello S., Ruffini R., 2002, *Second order scalar invariants of the Riemann tensor: applications to black hole spacetimes*, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 827
- [56] Christodoulou D. M., 1993, *The stability of accretion tori. V. Unstable modes and avoided crossings in extended, self-gravitating annuli*, Astrophys. J. **412**, 696
- [57] Christodoulou D. M., Narayan R., 1992, *The stability of accretion tori. IV. Fission and fragmentation of slender, self-gravitating annuli*, Astrophys. J. **388**, 451
- [58] Chrzanowski P. L., 1975, *Vector potential and metric perturbations of a rotating black hole*, Phys. Rev. D **11**, 2042
- [59] Chrzanowski P. L., 1976, *Applications of metric perturbations of a rotating black hole: Distortion of the event horizon*, Phys. Rev. D **13**, 806
- [60] Daigne F., Font J. A., 2004, *The runaway instability of thick accretion discs around black holes — II. Non-constant angular momentum discs*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **349**, 841 (erratum: dtto **351**, 1120)
- [61] de Felice F., 1991, *Rotating frames and measurements of forces in general relativity*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **252**, 197
- [62] de Felice F., Usseglio-Tomasset S., 1991, *On the pre-horizon regime in the Kerr metric*, Class. Q. Gravity **8**, 1871
- [63] de Felice F., Zanotti O., 2000, *Jet dynamics in black hole physics: acceleration during subparsec collimation*, Gen. Rel. Grav. **32**, 1449
- [64] Demianski M., 1976, *Stationary axially symmetric perturbations of a rotating black hole*, Gen. Rel. Grav. **7**, 551
- [65] Dixon W. G., 1964, *A covariant multipole formalism for extended test bodies in general relativity*, Nuovo Cim. **34**, 317
- [66] Duschl W. J., Britsch M., 2006, *A gravitational instability-driven viscosity in self-gravitating accretion disks*, Astrophys. J. **653**, L89

- [67] Eriguchi Y., Müller E., 1993, *Structure and circulation of self-gravitating toroids*, *Astrophys. J.* **416**, 666
- [68] Ernst F. J., 1968, *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem*, *Phys. Rev.* **167**, 1175
- [69] Ernst F. J., 1968, *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem II*, *Phys. Rev.* **168**, 1415
- [70] Fernandes J. F. Q., Lun A. W. C., 1996, *Gauge invariant perturbations of black holes. I. Schwarzschild space-time*, *J. Math. Phys.* **37**, 836
- [71] Fernandes J. F. Q., Lun A. W. C., 1997, *Gauge invariant perturbations of black holes. II. Kerr space-time*, *J. Math. Phys.* **38**, 330
- [72] Fishbone L. G., Moncrief V., 1976, *Relativistic fluid disks in orbit around Kerr black holes*, *Astrophys. J.* **207**, 962
- [73] Foertsch T., Hasse W., Perlick V., 2003, *Inertial forces and photon surfaces in arbitrary spacetimes*, *Class. Quantum Grav.* **21**, 4635
- [74] Font J. A., Daigne F., 2002, *The runaway instability of thick accretion discs around black holes — I. The constant angular momentum case*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **334**, 383
- [75] Frauendiener J., Klein C., 2004, *Hyperelliptic theta-functions and spectral methods*, *J. Comp. Appl. Math.* **167**, 193
- [76] Frauendiener J., Klein C., 2006, *Hyperelliptic theta-functions and spectral methods: KdV and KP solutions*, *Lett. Math. Phys.* **76**, 249
- [77] Frolov V. P., Shoom A. A., 2007, *Interior of distorted black holes*, *Phys. Rev. D* **76**, 064037
- [78] Fukue J., Sakamoto C., 1992, *Vertical structures of self-gravitating gaseous disks around a central object*, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **44** (1992) 553
- [79] Geroch R. P., 1971, *A method for generating solutions of Einstein's equations*, *J. Math. Phys.* **12**, 918
- [80] Geroch R., Hartle J. B., 1982, *Distorted black holes*, *J. Math. Phys.* **23**, 680
- [81] Ghanbari J., Abbassi S., 2004, *Equilibria of a self-gravitating, rotating disc around a magnetized compact object*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **350**, 1437



- [82] González G. A., Letelier P. S., 1999, *Relativistic static thin discs with radial stress support*, *Class. Quantum Grav.* **16**, 479
- [83] González G. A., Letelier P. S., 2000, *Rotating relativistic thin discs*, *Phys. Rev. D* **62**, 064025
- [84] González G. A., Gutiérrez-Piñeres A. C., 2008, *Counterrotating dust disk around a Schwarzschild black hole: new fully integrated explicit exact solution*, arXiv:0811.3002v1 [gr-qc]
- [85] González G. A., Gutiérrez-Piñeres A. C., Viña-Cervantes V. M., 2008, *Relativistic static thin dust disks with an inner edge: An infinite family of new exact solutions*, arXiv:0811.3869v1 [gr-qc]
- [86] Goodman J., Narayan R., 1988, *The stability of accretion tori. III – The effect of self-gravity*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **231**, 97
- [87] Greene R. D., Schucking E. L., Vishveshwara C. V., 1975, *The rest frame in stationary space-times with axial symmetry*, *J. Math. Phys.* **16**, 153
- [88] Hashimoto M., Eriguchi Y., Müller E., 1995, *Equilibrium structure of self-gravitating Keplerian disks*, *Astron. Astrophys.* **297**, 135
- [89] Hawking S. W., 1973, *The Event Horizon*, in DeWitt C., DeWitt B. S. (eds.), *Black Holes*, Les Houches 1972 (Gordon and Breach, New York), p. 1
- [90] Hawking S. W., Ellis G. F. R., 1973, *The large scale structure of space-time* (Cambridge Univ. Press, Cambridge)
- [91] Hennig J., Ansorg M., Cederbaum C., 2008, *A universal inequality between the angular momentum and horizon area for axisymmetric and stationary black holes with surrounding matter*, *Class. Quantum Grav.* **25**, 162002
- [92] Heusler M., 1996, *Black Hole Uniqueness Theorems*, Cambridge Lect. Notes Phys. 6 (Cambridge Univ. Press, Cambridge)
- [93] Huré J.-M., 1998, *Properties of self-gravitating  $\alpha$ -discs revisited. General scaling laws*, *Astron. Astrophys.* **337**, 625
- [94] Huré J.-M., 2000, *On the transition to self-gravity in low mass AGN and YSO accretion discs*, *Astron. Astrophys.* **358**, 378
- [95] Israel W., 1967, *Event horizons in static vacuum space-times*, *Phys. Rev.* **164**, 1776

- [96] Jantzen R. T., Carini P., Bini D., 1992, *The Many Faces of Gravitoelectromagnetism*, *Annals Phys.* **215**, 1
- [97] Jaroszyński M., Abramowicz M. A., Paczyński B., 1980, *Supercritical accretion disks around black holes*, *Acta Astron.* **30**, 1
- [98] Jonsson R., 2006, *Inertial forces and the foundations of optical geometry*, *Class. Quantum Grav.* **23**, 1
- [99] Jonsson R., 2006, *A covariant formalism of spin precession with respect to a reference congruence*, *Class. Quantum Grav.* **23**, 37
- [100] Karas V., Huré J.-M., Semerák O., 2004, *Gravitating discs around black holes* (Topical Review), *Class. Quantum Grav.* **21**, R1
- [101] Karas V., Lanza A., Vokrouhlický D., 1995, *Emission-line profiles from self-gravitating thin disks*, *Astrophys. J.* **440**, 108
- [102] Karas V., Semerák O., de Felice F., 2003, *Variability of black-hole binary sources and Lense-Thirring orbital precession*, in Ruffini R., Sigismondi C. (eds.), *Nonlinear Gravitodynamics / The Lense-Thirring Effect*, Proc. 3rd W. Fairbank Meeting (World Scientific, Singapore), p. 282
- [103] Kato S., 2001, *Basic properties of thin-disk oscillations*, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **53**, 1
- [104] Kato S., Fukue J., Mineshige S., 1998, *Black-hole Accretion Disks* (Kyoto Univ. Press, Kyoto)
- [105] Katz J., Bičák J., Lynden-Bell D., 1999, *Disc sources for conformastationary metrics*, *Class. Quantum Grav.* **16**, 4023
- [106] Kegeles L. S., Cohen J. M., 1979, *Constructive procedure for perturbations of spacetimes*, *Phys. Rev. D* **19**, 1641
- [107] Khanna R., Chakrabarti S. K., 1992, *Effects of a self-gravitating disc on test particle motion around a Kerr black hole*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **259**, 1
- [108] Klein C., 1997, *Counter-rotating dust rings around a static black hole*, *Class. Quantum Grav.* **14**, 2267
- [109] Klein C., 2003, *Exact relativistic treatment of stationary black-hole-disk systems*, *Phys. Rev. D* **68**, 027501
- [110] Klein C., Richter O., 2005, *Ernst Equation and Riemann Surfaces: Analytical and Numerical Methods*, *Lect. Notes Phys.* 685 (Springer, Berlin)

- [111] Komissarov S. S., McKinney J. C., 2007, *The “Meissner effect” and the Blandford-Znajek mechanism in conductive black hole magnetospheres*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **377**, L49
- [112] Kordas P., 1999, *Aspects of solution-generating techniques for spacetimes with two commuting Killing vectors*, Gen. Rel. Grav. **31**, 1941
- [113] Korotkin D. A., 1988, *Finite-gap solutions of the stationary axisymmetric Einstein equations in Vacuum*, Theor. Math. Phys. **77**, 1018
- [114] Korotkin D. A., 1993, *Elliptic solutions of stationary axisymmetric Einstein equation*, Class. Quantum Grav. **10**, 2587
- [115] Kozłowski M., Jaroszyński M., Abramowicz M. A., 1978, *The analytic theory of fluid disks orbiting the Kerr black hole*, Astron. Astrophys. **63**, 209
- [116] Kozłowski M., Wiita P. J., Paczyński B., 1979, *Self-gravitating accretion disk models with realistic equations of state and opacities*, Acta Astron. **29**, 157
- [117] Kramer D., 1987, *The Ernst equation in general relativity*, Czech. J. Phys. **37**, 350
- [118] Krori K. D., Bhattacharjee R., 1986, *A Kerr object embedded in a gravitational field*, J. Math. Phys. **27**, 1056
- [119] Krori K. D., Bhattacharjee R., 1990, *A Kerr object embedded in a gravitational field. II*, J. Math. Phys. **31**, 147
- [120] Kuchař K., 1968, *Základy obecné teorie relativity* (Academia, Praha)
- [121] Kyrian K., Semerák O., 2007, *Spinning test particles in a Kerr field — II*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **382**, 1922
- [122] Lanza A., 1992, *Self-gravitating thin disks around rapidly rotating black holes*, Astrophys. J. **389**, 141
- [123] Ledvinka T., 1998, *Thin disks as sources of stationary axisymmetric electrovacuum spacetimes*, Ph.D. Thesis (Charles Univ., Prague)
- [124] Lemos J. P. S., Letelier P. S., 1994, *Exact general relativistic thin disks around black holes*, Phys. Rev. D **49**, 5135
- [125] Letelier P. S., 1999, *Exact general relativistic disks with magnetic fields*, Phys. Rev. D **60**, 104042
- [126] Lin D. N. C., Pringle J. E., 1987, *A viscosity prescription for a self-gravitating accretion disc*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **225**, 607

- 
- [127] Linet B., 1977, *Stationary axisymmetric test fields on a Kerr metric*, Phys. Lett. A **60**, 395
- [128] MacCallum M. A. H., Mars M., Vera R., 2007, *Stationary axisymmetric exteriors for perturbations of isolated bodies in general relativity, to second order*, Phys. Rev. D **75**, 024017
- [129] Maison D., 1978, *Are the stationary, axially symmetric Einstein equations completely integrable?*, Phys. Rev. Lett. **41**, 521
- [130] Maison D., 1979, *On the complete integrability of the stationary, axially symmetric Einstein equations*, J. Math. Phys. **20**, 871
- [131] Manko V. S., Sanabria-Gómez J. D., Manko O. V., 2000, *Nine-parameter electrovac metric involving rational functions*, Phys. Rev. D **62**, 044048
- [132] Masreliez C. J., 2007, *Motion, inertia and special relativity — a novel perspective*, Physica Scr. **75**, 119
- [133] Medved A. J. M., Martin D., Visser M., 2004, *Dirty black holes: spacetime geometry and near-horizon symmetries*, Class. Quantum Grav. **21**, 3111
- [134] Medved A. J. M., Martin D., Visser M., 2004, *Dirty black holes: symmetries at stationary non-static horizons*, Phys. Rev. D **70**, 024009
- [135] Mineshige S., Umemura M., 1996, *Self-similar, self-gravitating viscous disks*, Astrophys. J. **469**, L49
- [136] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., 1973, *Gravitation* (Freeman, New York)
- [137] Montero P. J., Font J. A., Shibata M., 2008, *Nada: A new code for studying self-gravitating tori around black holes*, Phys. Rev. D **78**, 064037
- [138] Montero P. J., Rezzolla L., Yoshida S., 2004, *Oscillations of vertically integrated relativistic tori — II. Axisymmetric modes in a Kerr spacetime*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **354**, 1040
- [139] Morgan T., Morgan L., 1969, *The gravitational field of a disk*, Phys. Rev. **183**, 1097
- [140] Morgan L., Morgan T., 1970, *Gravitational field of shells and disks in general relativity*, Phys. Rev. D **2**, 2756

- [141] Neugebauer G., Meinel R., 2003, *Progress in relativistic gravitational theory using the inverse scattering method*, J. Math. Phys. **44**, 3407
- [142] Nishida S., Eriguchi Y., 1994, *A general relativistic toroid around a black hole*, Astrophys. J. **427**, 429
- [143] Novikov I. D., Thorne K. S., 1973, *Astrophysics of Black Holes*, in DeWitt C., DeWitt B. S. (eds.), *Black Holes*, Les Houches 1972 (Gordon and Breach, New York), p. 343
- [144] Ohashi A., 2003, *Multipole particle in relativity*, Phys. Rev. D **68**, 044009
- [145] Ortega-Rodríguez M., Silbergleit A., Wagoner R., 2008, *Normal modes of black hole accretion disks*, Geophys. Astron. Fluid Dyn. **102**, 75
- [146] Ostriker J., 1964, *The equilibrium of self-gravitating rings*, Astrophys. J. **140**, 1067
- [147] Paczyński B., 1978, *A model of selfgravitating accretion disk*, Acta Astr. **28**, 91
- [148] Paczyński B., 1978, *A model of selfgravitating accretion disk with a hot corona*, Acta Astr. **28**, 241
- [149] Paczyński B., 1980, *A model of a thick disk with a surface accretion layer*, Acta Astron. **30**, 347
- [150] Paczyński B., 1982, *Thick accretion disks around black holes*, Astron. Gesellschaft Mitteilungen **57**, 27
- [151] Paczyński B., Wiita P. J., 1980, *Thick accretion disks and supercritical luminosities*, Astron. Astrophys. **88**, 23
- [152] Page, D. N., 1993, *Relative alternatives*, Sci. Am. **269**, No. 2, 5
- [153] Page D. N., 1998, *Maximal acceleration is non-rotating*, Class. Quantum Grav. **15**, 1669
- [154] Papaloizou J. C. B., Savonije G. J., 1991, *Instabilities in self-gravitating gaseous discs*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **248**, 353
- [155] Pareja M. J., 2000, *Inertial forces and rotational effects in an interior stationary axisymmetric exact solution*, Class. Quantum Grav. **17**, 3769

- [156] Pichon C., Lynden-Bell D., 1996, *New sources for Kerr and other metrics: rotating relativistic discs with pressure support*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **280**, 1007
- [157] Poisson E., 2004, *A Relativist's Toolkit. The Mathematics of Black-Hole Mechanics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge)
- [158] Požár N., Semerák O., Šácha J., Žáček M., Zellerin T., 2007, *Exact solutions for discs around stationary black holes*, in Karas V., G. Matt (eds.), *Black Holes from Stars to Galaxies — Across the Range of Masses*, Proc. IAU Symp. 238 (Cambridge Univ. Press, Cambridge), p. 433
- [159] Sakimoto P. J., Coroniti F. V., 1981, *Accretion disk models for QSOs and active galactic nuclei – The role of magnetic viscosity*, Astrophys. J. **247**, 19
- [160] Semerák O., 1993, *Stationary frames in the Kerr field*, Gen. Rel. Grav. **25**, 1041
- [161] Semerák O., 1994, *On the competition of forces in the Kerr field*, Astron. Astrophys. **291**, 679
- [162] Semerák O., 1995, *On the occurrence of rotospheres in the Kerr field*, Physica Scr. **52**, 488
- [163] Semerák O., 1995, *What forces drive the relativistic motion?*, Nuovo Cim. B **110**, 973
- [164] Semerák O., 1996, *Collimation (and other) effects of the Kerr field: an interpretation*, Astrophys. Lett. Commun. **33**, 275
- [165] Semerák O., 1996, *Extremally accelerated observers in stationary axisymmetric spacetimes*, Gen. Rel. Grav. **28**, 1151
- [166] Semerák O., 1996, *What forces act in relativistic gyroscope precession?*, Class. Quantum Grav. **13**, 2987
- [167] Semerák O., 1997, *Gyroscope on polar orbit in the Kerr field*, Gen. Rel. Grav. **29**, 153
- [168] Semerák O., 1997, *Forces at the Kerr singularity*, Astrophys. Space Sci. **250** 235
- [169] Semerák O., 1998, *Rotospheres in stationary axisymmetric spacetimes*, Annals Phys. **263**, 133

- [170] Semerák O., 1998, *Circular orbits in stationary axisymmetric space-times*, Gen. Rel. Grav. **30**, 1203
- [171] Semerák O., 1999, *Gravitomagnetic clock effect and extremely accelerated observers*, Class. Quantum Grav. **16** 3769
- [172] Semerák O., 1999, *Spinning test particles in a Kerr field — I*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **308**, 863
- [173] Semerák O., 2001, *Curvature singularity around first Morgan-Morgan disc*, Class. Quantum Grav. **18**, 3589
- [174] Semerák O., 2002, *Towards gravitating discs around rotating black holes*, in O. Semerák, J. Podolský and M. Žofka (eds.), *Gravitation: Following the Prague Inspiration*, A Volume in Celebration of the 60th Birthday of Jiří Bičák (World Scientific, Singapore), p. 111
- [175] Semerák O., 2002, *Expulsion of external fields from extreme horizons: example of an external gravitational field*, Czech. J. Phys. **52**, 11
- [176] Semerák O., 2002, *Thin disc around a rotating black hole, but with support in-between*, Class. Quantum Grav. **19**, 3829
- [177] Semerák O., 2003, *Spinning particles in the Kerr field*, in Ruffini R., Sigismondi C. (eds.), *Nonlinear Gravitodynamics / The Lense-Thirring Effect*, Proc. 3rd W. Fairbank Meeting (World Scientific, Singapore), p. 74
- [178] Semerák O., 2003, *Gravitating discs around a Schwarzschild black hole: III*, Class. Quantum Grav. **20**, 1613
- [179] Semerák O., 2004, *Exact power-law discs around static black holes*, Class. Quantum Grav. **21**, 2203
- [180] Semerák O., Bičák J., 1997, *The interplay between forces in the Kerr-Newman field*, Class. Quantum Grav. **14**, 3135
- [181] Semerák O., de Felice F., 1997, *Quasi-local measurements and orientation in black-hole fields*, Class. Quantum Grav. **14**, 2381
- [182] Semerák O., Karas V., 1999, *Pseudo-Newtonian models of a rotating black hole field*, Astron. Astrophys. **343**, 325
- [183] Semerák O., Žáček M., 2000, *Static discs around a Schwarzschild black hole: I*, Class. Quantum Grav. **17**, 1613

- [184] Semerák O., Žáček M., 2000, *Oscillations of static disks around Schwarzschild black holes: Effect of self-gravitation*, Publ. Astron. Soc. Jpn. **52**, 1067
- [185] Semerák O., Karas V., de Felice F., 1999, *Parameters of black holes in sources with periodic variability*, Publ. Astron. Soc. Jpn. **51**, 571
- [186] Semerák O., Zellerin T., Žáček M., 1999, *The structure of superposed Weyl fields*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **308**, 691 (Erratum: 2001, **322**, 207)
- [187] Semerák O., Žáček M., Zellerin T., 1999, *Test-particle motion in superposed Weyl fields*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **308**, 705
- [188] Shadmehri M., Khajenabi F., 2006, *A class of self-gravitating, magnetized accretion disks*, Astrophys. J. **637**, 439
- [189] Shakura N. I., Sunyaev R. A., 1973, *Black holes in binary systems. Observational appearance*, Astron. Astrophys. **24**, 337
- [190] Shirokov M. F., 1973, *On one new effect of the Einsteinian theory of gravitation*, Gen. Rel. Grav. **4**, 131
- [191] Shlosman I., Begelman M. C., 1989, *Evolution of self-gravitating accretion disks in active galactic nuclei*, Astrophys. J. **341**, 685
- [192] Shore S. N., White R. L., 1982, *Self-gravitating accretion disk models for active galactic nuclei: self-consistent  $\alpha$ -models for the broad emission-line region*, Astrophys. J. **256**, 390
- [193] Sonogo S., Massar M., 1996, *Covariant definition of inertial forces: Newtonian limit and time-dependent gravitational fields*, Class. Quantum Grav. **13**, 139
- [194] Stephani H., 2004, *Relativity. An Introduction to Special and General Relativity* (3rd ed.) (Cambridge Univ. Press, Cambridge)
- [195] Stephani H., Kramer D., MacCallum M. A. H., Hoenselaers C., 2003, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (2nd ed.) (Cambridge Univ. Press, Cambridge)
- [196] Störzer H., 1993, *Structure and spectra of accretion disks in the innermost parts of active galaxies*, Astron. Astrophys. **271**, 25
- [197] Stuchlík Z., Kovář J., 2006, *Equilibrium conditions of spinning test particles in Kerr-de Sitter spacetimes*, Class. Quantum Grav. **23**, 3935



- 
- [198] Stuchlík Z., Hledík S., Juráň J., 2000, *Optical reference geometry of Kerr-Newman spacetimes*, Class. Quantum Grav. **17**, 2691
- [199] Šácha J., Semerák O., 2005, *Toroidal source around a static black hole*, Czech. J. Phys. **55**, 139
- [200] Teukolsky S. A., 1973, *Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations*, Astrophys. J. **185**, 635
- [201] Tomimatsu A., 1984, *Distorted rotating black holes*, Phys. Lett. A **103**, 374
- [202] Torres del Castillo G. F., 1990, *Generation of perturbations by means of decoupled equations and their adjoints*, Gen. Rel. Grav. **22**, 1085
- [203] Torres del Castillo G. F., Solís-Rodríguez H. G., 1999, *Self-duality and gravitational perturbations*, J. Math. Phys. **40**, 4099
- [204] Usui F., Nishida S., Eriguchi Y., 1998, *Emission-line profiles from self-gravitating toroids around black holes*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **301**, 721
- [205] Vogt D., Letelier P. S., 2005, *General relativistic model for the gravitational field of active galactic nuclei surrounded by a disk*, Phys. Rev. D **71**, 044009
- [206] Wald R. M., 1984, *General Relativity* (Univ. of Chicago Press, Chicago)
- [207] Wiita P. J., 1982, *Physical properties of thick supercritical accretion disks*, Astrophys. J. **256**, 666
- [208] Will C. M., 1974, *Perturbation of a slowly rotating black hole by a stationary axisymmetric ring of matter. I. Equilibrium configurations*, Astrophys. J. **191**, 521
- [209] Will C. M., 1975, *Perturbation of a slowly rotating black hole by a stationary axisymmetric ring of matter. II. Penrose processes, circular orbits, and differential mass formulae*, Astrophys. J. **196**, 41
- [210] Zellerin T., Semerák O., 2000, *Two-soliton stationary axisymmetric sprouts from Weyl seeds*, Class. Quantum Grav. **17**, 5103
- [211] Žáček M., Semerák O., 2002, *Static discs around a Schwarzschild black hole: II*, Czech. J. Phys. **52**, 19