

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**PRINCIPY A ZÁKONY MECHANIKY  
PODDAJNÝCH TĚLES  
2. část**

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1979

V publikaci se probírají především takové jevy z mechaniky pevných a poddajných těles, k jejichž vysvětlení je třeba vyjít z termodynamických zákonů. Tyto zákony se podrobně vysvětlují. Objasňují se souvislosti teplotního a deformačního pole a uvádějí se zákony termoelasticity. Termodynamické zákony jsou pak aplikovány na některé problémy lomové mechaniky. Odvozují se kritéria pro počátek šíření trhliny. Podrobně se uvádí zejména Griffithova teorie křehkého lomu a její zobecnění pro kvazikřehký lom. Vysvětluje se význam součinitele intenzity napětí a zavádí se pojem lomové houževnatosti. Zavádí se definice J-integrálu a vysvětluje se jeho matematický i fyzikální význam. Dokazuje se nezávislost J-integrálu na integrační cestě a uvádějí se jeho aplikace jakožto kritéria pro šíření trhlin i v nelineárně pružných a pružno-plastických tělesech. Výsledky se srovnávají s metodou COD (kritického otevření trhliny).

Výklad je možné sledovat i bez znalosti látky obsažené v publikaci vydané k první části semináře. Publikace je určena především konstruktérům a materiálovým odborníkům ze strojního oboru. Poskytuje jim v logickém uspořádání poznatky potřebné zejména ke studiu termoelasticity a lomové mechaniky. Příklady, které látku doplňují, umožňují snazší pochopení látky a zároveň naznačují možnosti praktického použití poznatků i jejich fyzikální dosah.

## PŘEDMLUVA

Mnoho techniků (konstruktérů i materiálových odborníků) se domnívá, že deformace pružných těles neovlivňují teplotní pole. Domnívají se, že pružné deformace jsou mechanicky vratné a že jsou proto vratné i termodynamicky. Pak ovšem nemohou plně pochopit, jak vzniká vnitřní útlum i u dokonale pružných, cyklicky namáhaných těles, ani jaký je rozdíl mezi adiabatickými a izotermickými elastickými konstantami. Obecně se uznává, že nerovnoměrné teplotní pole nebo změna teploty za současného omezení dilatačních možností tělesa způsobí vznik teplotních prutí. Tato napětí mohou mít při posuzování pevnosti tělesa velký, někdy i rozhodující význam. Méně je však známo, jak jsou vázány změny deformačního a teplotního pole, které jsou významné zvláště při velkých deformačních rychlostech nad mezí pružnosti.

Chceme-li těmto jevům porozumět, nevyhneme se nutnosti aplikovat zákony termodynamiky. Tyto zákony se na odborných školách probírají zpravidla jen v souvislosti s mechanikou plynů a par, takže mnozí absolventi těchto škol získávají mylný dojem, že pro pevná a poddajná tělesa nemají termodynamické zákony žádný praktický význam, a tento mylný dojem je často provází celý život. Skutečnost je však taková, že z termodynamických zákonů plynou důležité věty a principy, bez nichž by byla mechanika pevných a poddajných těles pouhým torsem. Tyto zákony poskytují také teoretická omezení pro elastické konstanty. Přinášejí nový pohled na známé věty (např. na věty Castiglianovy a na větu o minimu deformační práce). Překonávají paradox, že pružná tělesa s ostrou trhlinou nemají nulovou pevnost, jak by odpovídalo tzv. pevnostním podmínkám, a poskytují termodynamická kritéria pro šíření trhlin, která našla široké praktické uplatnění.

V tomto semináři se proto pokusíme vyložit termodynamické zákony a vysvětlit způsob jejich aplikace v mechanice pevných a poddajných těles. Dostaneme se až k základním zákonům obecné termoelasticity. V další části se věnujeme aplikacím termodynamických zákonů v lomové mechanice. Není naším úmyslem probírat soustavně lomovou mechaniku. Vynecháme proto teorii diskrétních i spojitě rozdělených dislokací. Nebudeme probírat ani zkušební metody uplatňované při výzkumu vlastností materiálu a vynecháme i fraktografii. Budeme si všimnout především těch jevů, k jejichž vysvětlení stačí představa tělesa vytvořeného ze spojitě hmoty. Chceme tak zachovat souvislost s první částí semináře, kterou jsme věnovali zákonům a principům v mechanice kontinua (publikace ČVTS - Domu techniky Praha č. 60-537-78 (1491) z ledna 1978). Navzdory těmto omezením poskytneme účastníkům semináře mnoho prakticky důležitých poznatků. Vysvětlíme pojmy, které byly do lomové mechaniky zavedeny

teprve nedávno (např. kritické otevření trhliny, J-integrál) a ukážeme jejich praktický význam.

Autor se snažil, aby publikace obsahovala co nejsrozumitelnější, stručný, ale logicky souvislý výklad nových poznatků, důležitých pro praxi. K vypracování rukopisu a k rozmnožení publikace je bohužel plánovacími orgány ČSVTS stanovena poměrně velmi krátká lhůta. Sestavení a vydání publikace si proto vyžádalo značné úsilí nejen od autora, ale i od mnoha pracovníků Domu techniky ČSVTS Praha. Autor upřímně děkuje svým spolupracovníkům z Domu techniky ČSVTS Praha, zvláště Ing. Vladimírovi Václavíkovi, za jejich mimořádnou námahu a za péči, kterou věnovali uspořádání semináře.

Cyril Höschl

## OBSAH

	Str.
1. Úvod	9
2. Zachování hmoty a věty o hybnosti	10
3. Termodynamické zákony	17
4. Výpočet různých druhů energie	22
5. Význam deformační energie	25
6. Duhamelův-Neumannův zákon	27
7. Povaha termodynamické rovnováhy	31
8. Nevratné změny v poddajných tělesech	35
9. Zákony termoelasticity	39
10. Termodynamické kritérium pro šíření trhliny	43
11. Griffithova teorie křehkého lomu	45
12. Poddajnost těles s trhlinou	48
13. Součinitel intenzity napětí	51
14. Plastické deformace před čelem trhliny	56
15. Šíření kvazikřehké trhliny	60
16. Vliv tloušťky stěny na lomovou houževnatost	65
17. Aplikace J-integrálu	68
18. Závěr	92
Literatura	93

## 1. ÚVOD

Mechanika zaujímá mezi přírodními vědami zvláštní místo. Kromě toho, že obohatila naše poznání přírody a přispěla k technickému pokroku, zasloužila se i o rozvoj exaktního myšlení a o společenský pokrok. Vždyť rozvoj mechaniky se prolínal s rozvojem matematiky a poznatky v nebeské mechanice způsobily konečný pád středověkého scholastického učení. Bouřlivé události za doby reformace a po ní vedly zpětně k novému rozmachu přírodních věd. Tak bylo ukončeno téměř dvoutisícileté období stagnace ve vědeckém poznání a otevřeny brány všeobecnému pokroku. Mechanika si zachovává důležité postavení i dnes. Technický pokrok by neexistoval, kdyby neexistovaly velké objevy moderní fyziky, chemie a biologie a kdyby neexistovaly vyspělé matematické metody, které tyto vědy rozvíjejí, vedou k novým objevům a umožňují jejich racionální využití. Velkou vzpruhou matematiky v této úloze byl vynález a neuvěřitelně rychlý vývoj počítačů, který vedl k radikálnímu přehodnocení významu některých matematických metod a k všeobecnému posílení úlohy teoretických vědních oborů při řešení praktických problémů.

Při uspořádání první části semináře o principech a zákonech mechaniky poddajných těles jsme se snažili vycházet z těchto změn a podat účastníkům semináře srozumitelný výklad některých partií v moderním pojetí. Chtěli jsme - alespoň zčásti - překlenout rozpor mezi tradičním technickým vzděláním našich inženýrů a soudobou vědou, využívající nových poznatků a náročných matematických prostředků k řešení různých fyzikálních úloh. Objasnili jsme úlohu tenzorového počtu v mechanice poddajných těles a formulovali jsme některé fyzikální zákony pro deformovatelná tělesa (pro malé i velké deformace), zvláště pro tělesa elastická, viskoelastická, plastická a pórzní.

V tomto semináři doplníme náš výklad o další aplikace a o další fyzikální poznatky, zejména z oboru termodynamiky a lomové mechaniky. Protože nemůžeme předpokládat, že všichni účastníci dnešního semináře sledovali i jeho první část, zvolíme - pokud to bude možné - nezávislý způsob výkladu. V některých kapitolách však budeme předpokládat, že čtenář zná tenzorovou symboliku. Abychom nemuseli předpokládat hlubší znalosti tenzorové algebry, omezíme se na kartézské souřadnice, v nichž mizí rozdíl mezi kovariantní a parciální derivací a v nichž nezáleží ani na poloze indexů. Vyžadujeme pouze znalost Einsteinova součtového pravidla a konvence, podle které rozlišujeme souřadné osy číselnými indexy ( $x^1, x^2, x^3$  místo  $x, y, z$ ). Indexy umísťujeme podle pravidel tenzorové algebry nahoře i dole, takže exponenty oddělujeme podle potřeby závorkami, aby nedošlo k omylu; např.  $(x^1)^2 = x^1 \cdot x^1$ .

## 2. ZACHOVÁNÍ HMOTY A VĚTY O HYBNOSTI

Je dáno spojité poddajné těleso, jehož body mají v referenčním přirozeném stavu pravouhlé souřadnice  $x^1, x^2, x^3$ . Předpokládáme, že jde o inerciální soustavu souřadnic, takže těleso v ní setrvává v klidu nebo ve stavu přímočarého rovnoměrného pohybu, není-li předem deformováno ani vystaveno působení žádné síly. Za obecného pohybu se souřadnice  $x^i$  změní o posuvy  $u^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), takže bude

$$z^i = z^i(x^1, x^2, x^3, t) = x^i + u^i(x^1, x^2, x^3, t). \quad (2.1)$$

Indexy píšeme nahoře, abychom naznačili, že jde o kontravariantní složky vektoru. Toto označení by mělo význam v kosouhlých nebo křivočarých souřadnicích, takže pro tuto kapitolu není podstatné. Proto také nebudeme rozlišovat parciální a kovariantní derivace. Čtenář obeznámený s tenzorovou algebrou si může uvedené vzorce a výsledky snadno transformovat do obecných souřadnic; k tomu postačí poznatky z první části semináře (1978).

Protože souřadnice  $x^i$  jsou spjaty stále se stejným hmotným bodem tělesa, jsou to materiálové (konvektivní) souřadnice. Souřadnice  $z^i(t)$  určují polohu pohybujícího se bodu v prostoru, jsou to tedy prostorové souřadnice. Zřejmě  $z^i(t=0) = x^i$ ,  $u^i(t=0) = 0$ .

Rychlost  $v^i$  dostaneme derivací podle času

$$v^i = \frac{\partial z^i}{\partial t} = \frac{\partial u^i}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Parciální derivace znamená, že  $x^i = \text{konst.}$

Je-li nějaká funkce  $f$  závislá na materiálových souřadnicích  $x^i$  a na čase  $t$  (Lagrangeův popis), bude její časová derivace jednoduše  $df/dt = \partial f / \partial t$  ( $x^i = \text{konst.}$ ). Je-li však funkcí prostorových souřadnic (Eulerův popis), bude

$$f = f(z^1, z^2, z^3, t), \quad (2.3)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z^1} \frac{\partial z^1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z^2} \frac{\partial z^2}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z^3} \frac{\partial z^3}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Prostorové souřadnice totiž nezůstávají v čase konstantní, takže musíme použít pravidla o derivaci složených funkcí.

Poslední rovnici lze zjednodušit použitím Einsteinova součtového pravidla (vyskytne-li se index latinské abecedy v některém členu dvakrát, znamená to sčítání přes tento index od 1 do 3).\*) Zároveň dosadíme z rovnice (2.2). S novým označením levé strany budeme mít

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial z^i} \quad (2.5)$$

Symbol

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial z^i} \quad (2.6)$$

značí materiálovou derivaci. Rozlišením symbolu  $D/Dt$  od  $\partial/\partial t$  se předejde možnému omylu při výpočtu výsledné derivace  $d/dt$ .

Nechť je nějaká vlastnost daného tělesa popsána funkcí  $F = F(z^i, t)$ . Chceme určit časovou změnu objemového integrálu

$$I = \int_V F(z^i, t) dV \quad (2.7)$$

Za krátký čas  $\Delta t$  se souřadnice  $z^i$  změní o  $v^i \Delta t$ . Objem  $V$  s povrchem  $S$  se změní na objem  $V'$  s povrchem  $S'$ , takže

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{V'} F(z^i + v^i \Delta t, t + \Delta t) dV' - \int_V F(z^i, t) dV \right] \quad (2.8)$$

Kdyby se integrační oblast  $V$  v čase  $\Delta t$  neměnila, změnil by se integrál (2.7) o hodnotu

$$dI_1 = \int_V \frac{\partial F}{\partial t} dt \cdot dV \quad (2.9)$$

Kdyby se naopak funkce  $F$  nezměnila, ale oblast  $V$  by se změnila na  $V'$ , pak každý povrchový element  $d\vec{S}$  by se posunul o vektor  $\vec{v} dt$  a vytvořil by tím hranolek o objemu  $d\vec{S} \cdot \vec{v} dt = \vec{n} \cdot \vec{v} dS dt$ . Přitom  $\vec{n}$  značí vnější jednotkovou normálu elementu  $d\vec{S}$ ,  $|d\vec{S}| = dS$ . Tečkou označujeme skalární součin, takže  $\vec{n} \cdot \vec{v} = n_i v^i$ . V místě elementu  $dS$  má daná funkce hodnotu  $F$ . Proto se integrand v rovnici (2.7) zvětší posunutím elementu  $dS$  o součin ( $F \times$  objem hranolku). Integrál (2.7) se pozmění celkem o hodnotu

$$dI_2 = \int_S F n_i v^i dS \cdot dt \quad (2.10)$$

\*) Nechceme-li se omezit jen na kartézské souřadnice, musí být jeden z těchto indexů horní, druhý dolní (jak jsme to ostatně vyložili v první části semináře).



Výsledná změna je součtem obou dílčích změn, takže  $dI = dI_1 + dI_2$ . Proto

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = \int_V \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_S F n_i v^i dS. \quad (2.11)$$

Poslední integrál znamená "průtok" vektoru  $(F \vec{v})$  plochou  $S$ .

Podle Gaussovy věty  $\int_S (F \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div} (F \vec{v}) dV$ .

Množství protékající povrchem  $S$  (levá strana rovnice) je stejné jako množství vyvěrající z objemu  $V$  (pravá strana rovnice). Rozpisem do složek dostaneme \*)

$$\int_S (F v^i) n_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial z^j} (F v^j) dV. \quad (2.12)$$

Tento výsledek dosadíme do (2.11). Dostaneme

$$\frac{dI}{dt} = \int_V \left( \frac{\partial F}{\partial t} + v^j \frac{\partial F}{\partial z^j} + F \frac{\partial v^j}{\partial z^j} \right) dV. \quad (2.13)$$

První dva členy na pravé straně značí  $DF/dt$ , takže

$$\frac{D}{Dt} \int_V F dV = \int_V \left( \frac{DF}{Dt} + F \frac{\partial v^j}{\partial z^j} \right) dV. \quad (2.14)$$

Všimněme si, že pořadí materiálové derivace a integrace nelze zaměnit (derivací za integračním znaménkem bychom dostali na pravé straně rovnice jen první člen).

Zákon zachování hmotnosti požaduje, aby hmotnost obsažená v objemu  $V$  nezávisela na čase, ať už se objem, v němž jsou uzavřeny stále stejné hmotné částice, změní jakkoliv. Musí tedy být

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho(z^i, t) dV = 0. \quad (2.15)$$

Použijeme-li vzorce (2.14), máme

$$\int_V \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v^j}{\partial z^j} \right) dV = 0. \quad (2.16)$$

\*) V pravouhlé soustavě souřadnic  $\frac{\partial v^j}{\partial z^j} = \text{div} \vec{v}$ .

Protože tato rovnice musí platit pro jakýkoli objem  $V$  vyňatý z tělesa, musí se integrand rovnat nule:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.17)$$

S použitím rovnice (2.6) můžeme tento vztah upravit na tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z^j} (\rho v^j) = 0. \quad (2.17 \text{ a})$$

Rovnice (2.17) tedy vyjadřuje zákon zachování hmotnosti za obecného pohybu tělesa. Hmotnost v každém objemovém elementu tělesa se za jeho pohybu nezmění. Za pohyb považujeme také deformaci tělesa. Byla-li hmotnost v přirozeném stavu tělesa rozdělena spojitě, zůstane spojitá i po deformaci. Proto se vztah (2.17) nazývá také rovnice kontinuity (spojitosti).

Jde-li o těleso staticky deformované, je  $\rho = \text{konst}$ ,  $v^j = 0$ , takže rovnice (2.17) je identicky splněna. Okamžitá změna hustoty  $D\rho/Dt$  nemá proto ve statické význam. Tam počítáme s celkovou změnou hustoty  $\rho(\vec{z})$  proti referenčnímu stavu  $\rho_0(\vec{x})$ . Zřejmě

$$\int_V \rho(\vec{z}) dz^1 dz^2 dz^3 = \int_{V_0} \rho_0(\vec{x}) dx^1 dx^2 dx^3. \quad (2.18)$$

Označíme-li jakobián <sup>\*</sup>)

$$\left| \frac{\partial z^i}{\partial x^j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial x^1} & \frac{\partial z^1}{\partial x^2} & \frac{\partial z^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial z^2}{\partial x^1} & \frac{\partial z^2}{\partial x^2} & \frac{\partial z^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial z^3}{\partial x^1} & \frac{\partial z^3}{\partial x^2} & \frac{\partial z^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

bude

$$dz^1 dz^2 dz^3 = \left| \frac{\partial z^i}{\partial x^j} \right| dx^1 dx^2 dx^3, \quad (2.20)$$

takže obě strany rovnice (2.19) budou integrovány v stejném, ale libovolném objemu  $V_0$ . Integrandy budou proto stejné. Odtud

$$\rho_0(\vec{x}) = \rho(\vec{z}) \left| \frac{\partial z^i}{\partial x^j} \right| \quad (2.21)$$

<sup>\*</sup>) Symbolem  $|a_j^i|$  značíme determinant složený z prvků  $a_j^i$  ( $i$  = číslo řádku,  $j$  = číslo sloupce).

a obdobně

$$\rho(\vec{z}) = \rho_0(\vec{x}) \cdot \left| \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right|. \quad (2.22)$$

Hybnost hmotného bodu je definována jako součin rychlosti bodu a jeho hmotnosti. Je to vektor, který má směr vektoru rychlosti. Hybnost celého tělesa je vektorovým součtem hybností všech jeho hmotných bodů. Hmotným bodem zde rozumíme elementární objem  $dV$  s hustotou  $\rho$ , tj. s hmotností  $\rho dV$ . Hybnost tělesa tedy je

$$\vec{H} = \int_V \rho \vec{v} dV. \quad (2.23)$$

Ve složkách

$$H^i = \int_V \rho v^i dV. \quad (2.24)$$

Časová derivace hybnosti  $D\vec{H}/Dt$  se musí rovnat výslednici působících sil

$$\vec{F} = \int_S \vec{p} dS + \int_V \vec{b} dV. \quad (2.25)$$

Zde  $\vec{p}$  jsou povrchové síly,  $\vec{b}$  objemové síly. Tedy

$$\frac{DH^i}{Dt} = F^i \quad \text{čili} \quad \frac{DH^i}{Dt} = F^i. \quad (2.26)$$

Rovnice (2.26) vyjadřuje Newtonův pohybový zákon.

Podle definice tenzoru napjatosti

$$p^i = G^{ji} n_j. \quad (2.27)$$

Zde  $G^{ji}$  jsou složky tenzoru napjatosti vztaženého k přetvořenému elementu a  $n_j$  jsou složky jednotkového vektoru vnější normály v místě  $dS$ . První člen na pravé straně (2.25) upravíme podle Gaussovy věty:

$$\int_S G^{ji} n_j dS = \int_V \frac{\partial G^{ji}}{\partial z^j} dV. \quad (2.28)$$

Všimněme si, že - obdobně jako v rovnici (2.12) - se derivace týká "slepého" indexu "j", kdežto index "i", označující vektorovou složku, musí zůstat na obou stranách rovnice (2.28) "volný". S použitím (2.24), (2.25) a (2.28) dá (2.26)

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v^i dV = \int_V \left( \frac{\partial G^{ji}}{\partial z^j} + b^i \right) dV. \quad (2.29)$$

Nyní použijeme vzorce (2.14), v němž funkci  $F$  ztotožníme se součinem  $\rho v^i$ ; levá strana (2.29) pak bude

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v^i dV = \int_V \left[ \frac{D}{Dt} (\rho v^i) + \rho v^i \frac{\partial v^j}{\partial z^j} \right] dV. \quad (2.30)$$

Protože materiálová derivace součinu  $\rho v^i$  dá

$$\frac{D}{Dt} (\rho v^i) = v^i \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{Dv^i}{Dt} \quad (2.31)$$

a podle (2.16) se podtržené členy zruší, zbude v rovnici (2.30) na pravé straně pouze jeden člen:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho v^i dV = \int_V \rho \frac{Dv^i}{Dt} dV. \quad (2.32)$$

Rovnice (2.29) pak dává

$$\int_V \rho \frac{Dv^i}{Dt} dV = \int_V \left( \frac{\partial G^{ji}}{\partial z^j} + b^i \right) dV. \quad (2.33)$$

Protože tato rovnice platí pro jakýkoli objem  $V$  vyňatý z tělesa, musí být

$$\rho \frac{Dv^i}{Dt} = \frac{\partial G^{ji}}{\partial z^j} + b^i. \quad (2.34)$$

To je známá Eulerova pohybová rovnice pro poddajné těleso. \*)

Obdobně bychom mohli postupovat s momentem hybnosti, jehož časová derivace se rovná vektoru výsledné silové dvojice působící na těleso. Došli bychom k závěru, že tato podmínka nepřináší žádnou novou informaci, je-li tenzor napjatosti  $G^{ji}$  souměrný, tj. je-li  $G^{ji} = G^{ij}$ .

Poznamenejme, že v teorii pružnosti se zpravidla předpokládají malé deformace, takže mizí rozdíl mezi Lagrangeovým a Eulerovým způsobem popisu pohybujícího se tělesa. Materiálová derivace přejde v obyčejnou derivaci, takže na levé straně rovnice (2.34) dostaneme součin hustoty a zrychlení  $\rho \ddot{u}^i$ . Eulerova rovnice platí i ve statice, kde  $v^i = 0$  a levá strana (2.34) vymizí.

\*) Je to vlastně soustava tří rovnic, neboť  $i = 1, 2, 3$ . Přitom  $\frac{\partial G^{ji}}{\partial z^j} =$   
 $= \frac{\partial G^{1i}}{\partial z^1} + \frac{\partial G^{2i}}{\partial z^2} + \frac{\partial G^{3i}}{\partial z^3}$  podle Einsteinova pravidla.

Výsledky, které jsme dostali, jsou pozoruhodné. Jsou-li transformační rovnice (2.1) splněny a jsou-li zobrazení  $\vec{x}(\vec{z}, t)$  a  $\vec{z}(\vec{x}, t)$  jednoznačná, spojitá a hladká, je tím zaručena geometrická souvislost a neporušenost tělesa. Je-li zároveň splněna i rovnice (2.16) popř. (2.17), je tím zaručena i souvislost fyzikální (přetvořením kterékoli části tělesa se hmotnost v ní obsažená nezmění a rozdělení hmotnosti zůstane spojitě). Splnění rovnic (2.34) pak znamená, že pohyb každé části tělesa je ovládán Newtonovým zákonem.

Celkem máme až dosud čtyři rovnice pro deset neznámých, totiž pro hustotu  $\rho(\vec{z}, t)$ , pro tři složky rychlosti  $v^i$  (nebo tři posuvy  $u^i$ ) a pro šest složek tenzoru napjatosti  $G^{ij}$ . To je zřejmě málo.

Mohli bychom použít zákona zachování energie. Má-li však pro danou úlohu význam pouze mechanická energie, ukáže se, že splnění tohoto zákona je důsledkem plynoucím z pohybových rovnic (to snadno dokážeme jejich integrací). Zákon zachování energie pak neposkytne žádnou novou informaci. Je-li však pohyb tělesa spojen s významnými změnami tepelného stavu, dává energetická bilance nezávislou rovnici, kterou je nutno splnit. K tomu se ještě vrátíme.

Zbývající rovnice dostaneme z úvahy o vzájemné vazbě přetvoření a napjatosti, která je dána mechanickými vlastnostmi tělesa. Dostáváme tzv. konstituční (konstitutivní) rovnice. Známe-li přesně strukturu tělesa a zákony, které ovládají vazby jeho elementárních částic, můžeme se pokusit odvodit konstituční rovnice tělesa z vlastností jeho mikrostruktury. Skutečné materiály nemají však pravidelnou stavbu, jejich deformační vlastnosti jsou spouřčovány nahodile rozdělenými defekty (např. u krystalů dislokacemi). K jejich popisu je nutné použít statistických zákonů. Proto se většinou spokojujeme s fenomenologickými vztahy zjišťovanými experimentálně na tělesech větších rozměrů. Příkladem konstitučních rovnic je Hookeův zákon

$$G^{ij} = E^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.35)$$

představující lineární vazbu mezi složkami tenzoru napjatosti a tenzoru přetvoření. Z matematického hlediska je to nejjednodušší možná závislost. Je to dalších šest rovnic, které doplňují dříve uvedené čtyři rovnice (2.17) a (2.34) na soustavu deseti rovnic, postačujících k řešení úloh o lineárně elastickém tělese. Skutečná pružná tělesa se budou od ideálního zákona (2.35) více nebo méně odchylovat, a to zvláště při větších deformacích.

Látky zpravidla mění při deformaci svůj tepelný stav, takže k popisu jejich deformačních vlastností je nutné vycházet z termodynamických zákonů. To je samozřejmé u plynů a par. Avšak i u látek v pevné fázi může být deformace spojena s významnými změnami tepelného stavu. Jsou to zejména látky s velkou poměrnou deformací, viskoelastické a plastické. Ke změně stavu dochází někdy i z vnitřních příčin (chemická reakce, rekrytalizace aj.). Příští kapitolu proto věnujeme výkladu termodynamických zákonů.

### 3. TERMODYNAMICKÉ ZÁKONY

Soustava spojitých těles se nazývá uzavřená, jestliže nedochází k žádné výměně hmotných částí s okolím. Hmotnost uzavřené soustavy je tedy konstantní. Odstraníme-li též jakékoli jiné vzájemné působení soustavy s okolím, dostaneme izolovanou soustavu. Máme-li o soustavě tolik informací, že ji dovedeme z hlediska daného účelu dostatečně popsat, pak známe stav soustavy. Jde-li např. o kmitající těleso, budeme jeho stav znát, bude-li znám jeho nedeformovaný tvar, materiálové složení, mechanické vlastnosti, pole posuvů, napjatost, teplotní pole. Jestliže se teplotní pole mechanicky neprojevuje (např. je-li teplota téměř přesně konstantní), můžeme teplotu v seznamu stavových veličin vynechat. Lze-li některou stavovou veličinu vyjádřit jako funkci jiných stavových veličin, dostaneme stavovou rovnici.

Nezávisí-li stavové veličiny na čase, je daná soustava v termodynamické rovnováze. K popisu termodynamické rovnováhy někdy stačí méně stavových veličin než k popisu obecného pohybu (děje, změny, procesu) dané soustavy, neboť některé stavové veličiny ztratí za rovnováhy význam (např. viskozita). Počet stavových veličin je tedy různý případ od případu.

Představme si termodynamicky rovnovážnou soustavu, kterou od okolí izoluje stěna s takovými vlastnostmi, že změna stavu soustavy může nastat pouze pohybem stěny nebo silami působícími na dálku (např. gravitačními silami). Taková soustava se nazývá tepelně izolovaná. Každá změna probíhající v tepelně izolované soustavě je adiabatická.

Jsou-li stavové veličiny nezávislé na prostorých souřadnicích, jde o homogenní soustavu. Klasická termodynamika studuje převážně homogenní soustavy, popř. heterogenní soustavy složené z homogenních částí (fází). V této kapitole se budeme zabývat jen homogenními soustavami.

Chceme-li definovat vztah mezi dvěma termodynamicky rovnovážnými soustavami, potřebujeme k tomu pojem teploty. Definice, kterou uvedeme, se bude zdát komická, ale je zcela výstižná a v podstatě správná a úplná: teplota je reálné číslo, které ukáže teploměr. Je to jednoznačná funkce rovnovážného stavu teploměru. Je-li každá ze dvou soustav v termodynamické rovnováze se třetí soustavou, jsou obě soustavy také ve vzájemné rovnováze. Je-li jednou z těchto soustav teploměr, pak všechny srovnávané soustavy mají stejnou teplotu, a to takovou, kterou ukazuje teploměr. Protože tato teplota závisí na konstrukci teploměru, je to empirická teplota. Uvedeme-li do společné soustavy dvě termodynamicky rovnovážné soustavy, které mají stejnou teplotu, budou tvořit opět termodynamicky rovnovážnou soustavu. \*)

---

\*) Vznikne-li spojením soustav chemická reakce, poruší se rovnováha. Pak už nejde o rovnovážné soustavy.

Představme si nyní soustavu tepelně izolovanou, v níž mohou probíhat jen adiabatické změny. Přejde-li tato soustava ze stavu I do stavu II, pak je k tomu zapotřebí dodat vždy stejné množství práce (pohybem stěny nebo silami působícími na dálku), nezávisle na tom, jakým způsobem změna probíhala. To znamená, že musí existovat nějaká jednoznačná funkce stavu  $W$  zvaná energie, jejíž přírůstek za adiabatické změny se rovná práci  $\Delta A$  dodané soustavě:

$$\Delta W = \Delta A \quad (\text{adiabatická změna}). \quad (3.1)$$

Není-li změna adiabatická, nebude rozdíl  $\Delta W - \Delta A$  nulový, ale bude se rovnat

$$\Delta Q = \Delta W - \Delta A \quad (\text{obecná změna}). \quad (3.2)$$

Veličina  $\Delta Q$  značí teplo absorbované soustavou. Teplo  $\Delta Q$  i energie  $\Delta W$  mají stejný fyzikální rozměr jako práce  $\Delta A$  (joule). Přepíšeme-li poslední rovnici na tvar

$$\Delta Q + \Delta A = \Delta W, \quad (3.3)$$

dostaneme zákon zachování energie (z vnějšku dodaná energie  $\Delta Q + \Delta A$  se v soustavě pohltí ve formě energie  $\Delta W$ ). Energie  $\Delta W$  se může skládat z různých typů, nejčastěji z kinetické energie  $K$ , z gravitační (polohové) energie  $G$  a z vnitřní energie  $U$ , takže

$$W = K + G + U. \quad (3.4)$$

Vypočítáme-li odtud  $U$ , dostaneme rovnici  $U = W - K - G$ , která definuje vnitřní energii soustavy. Je dána součtem potenciální a kinetické energie kmitového mikropohybu molekul, tj. závisí na silách působících mezi molekulami a na teplotě. Při pomalých a nevelkých změnách lze kinetickou a gravitační energii zanedbat.

Poznamenejme, že teplo  $\Delta Q$  může být za obecné změny dáno nejen teplem přivedeným z okolí, ale také energií uvolněnou z vnitřních zdrojů (chemickou, elektrickou, teplem uvolněným rekrystalizací a pod.). Dosadíme-li (3.4) do (3.3), dostaneme první termodynamický zákon ve tvaru

$$\Delta Q + \Delta A = \Delta K + \Delta G + \Delta U. \quad (3.5)$$

Říká, že energie soustavy (pravá strana rovnice) může vzrůst jen tak, že do ní přivedeme teplo nebo mechanickou práci nebo obojí (levá strana rovnice).

Tento termodynamický zákon se netýká obecné zkušenosti, že teplo spontánně přechází vždy jen z teplejšího tělesa na studenější a nikdy naopak. Chceme-li tento jev vtělit do fyzikálního zákona, musíme rozšířit seznam stavových veličin o dvě, a to o absolutní teplotu  $T$  a entropii  $S$ .

Absolutní teplota  $T$  je kladné číslo, které závisí pouze na empirické teplotě  $\mathcal{T}$ .

Entropie  $S$  má tyto vlastnosti:

1. Entropie soustavy je součtem entropií jejích částí.

2. Diferenciální změna  $dS$  entropie může být způsobena buď interakcí s okolím (změna  $dS_e$ ) nebo vnitřními změnami v soustavě (změna  $dS_i$ ). Celková změna entropie je součtem obou těchto dílčích změn:

$$dS = dS_e + dS_i \quad (3.6)$$

3. Změna působená interakcí s okolím je dána poměrem přírůstku tepla k absolutní teplotě

$$dS_e = \frac{dQ}{T} \quad (3.7)$$

4. Změna  $dS_i$  vzniká z vnitřních dějů v soustavě a nemůže být nikdy záporná. Je-li  $dS_i = 0$ , je děj vratný, je-li  $dS_i > 0$ , je děj nevratný. Příklad  $dS_i < 0$  nikdy nenastává.

Věty 1 až 3 definují entropii podle jejích vlastností. Věta 4 vyjadřuje druhý termodynamický zákon. Píšeme-li symboly  $dS_e$ ,  $dS_i$ , neznamenají indexy  $e$ ,  $i$  vektorové složky, ale prosté indexy, připomínající význam symbolu (externí, interní). Z rovnice (3.7) je ostatně zřejmé, že entropie  $S$  není vektorovou, ale skalární veličinou, která má fyzikální rozměr  $[JK^{-1}]$ .

K stanovení stupnice pro absolutní teplotu potřebujeme tepelný stroj. Máme-li ve válci s pohyblivým pístem uzavřen ideální plyn, pak ve styku s prostředím (lázní) o konstantní empirické teplotě  $T_I$  může izotermicky expandovat, přičemž odejme z okolí teplo  $Q_I$ , které se rovná vykonané vnější práci. Na pravé straně rovnice (3.5) bude totiž nula, neboť kinetická ani gravitační energie se nezmění (nejvýš se změní neznatelně) a vnitřní energie ideálního plynu je funkcí pouze teploty, která se rovněž nezmění. Pak je válec izolován, takže plyn se rozpíná dále adiabaticky, což znamená, že vykonaná práce se rovná úbytku vnitřní energie podle (3.1) a (3.4) ( $\Delta K = \Delta G = 0$ ). Teplota přitom klesne na  $T_{II}$ . Pak je válec uveden do styku s lázní o teplotě  $T_{II}$  a plyn izotermicky stlačován. Přitom se do lázně odvede teplo  $Q_{II}$ , které se rovná práci vykonané silou působící z vnějšku na píst. Konečně adiabatickou kompresí stoupne jeho teplota opět na  $T_I$  a cyklus se může opakovat. Tak by pracoval Carnotův stroj, kdyby jej bylo možné realizovat. \*) Během jednoho pracovního cyklu bychom získali mechanickou práci  $Q_I - Q_{II}$ , přičemž úbytek tepla z teplejší lázně představuje práci  $Q_I$ . Tepelná účinnost stroje vyjde

$$\eta = \frac{Q_I - Q_{II}}{Q_I} \quad (3.8)$$

\*) Nicolas Léonard Sadi CARNOT (1796 až 1832), francouzský fyzik.



Je to poměr získané mechanické práce k celkovému úbytku energie v teplejší lázni.

Protože Carnotův cyklus je periodický a vratný (izotermický i adiabatický děj probíhají v ideálním plynu vratně), musí být entropie plynu ve válci na počátku i na konci cyklu stejná. Změna  $\Delta S_i = \int dS_i$  je nulová, neboť děj je vratný, takže musí být také  $\Delta S_e = 0$ . Při adiabatických změnách se entropie nemění, neboť  $dQ = 0$ . Při izotermické expanzi vzroste entropie o  $\Delta S_{eI} = Q_I / T(T_I)$ , při izotermické kompresi klesne o  $-\Delta S_{eII} = -Q_{II} / T(T_{II})$ . Tyto změny musí dávat nulový součet  $\Delta S_e = \Delta S_{eI} + \Delta S_{eII}$ , takže  $\Delta S_{eI} = -\Delta S_{eII}$ ; odtud

$$\frac{Q_I}{T(T_I)} = \frac{Q_{II}}{T(T_{II})} \quad (3.9)$$

Čísla  $T_I = T(T_I)$ ,  $T_{II} = T(T_{II})$  se mohou použít jako základ k vytvoření stupnice pro absolutní teplotu. Stupnice pro tuto teplotu je tedy dána rozpínacími ideálního plynu. Tomu se nejvíce blíží vodík, popř. inertní plyny. Pojem absolutní teploty zavedl Lord Kelvin r. 1848. <sup>\*\*</sup>)

Entropii definoval Clausius. <sup>\*\*\*)</sup> Tento pojem lze pochopit méně snadno. Ačkoliv jde o kvantitativní veličinu, nemůžeme měřit její absolutní velikost, ale jen její rozdíly, a to ještě nepřímou pomocí jiných fyzikálních veličin. Pro větší názornost uveďme analogii mezi rovnicí (3.7), která má tvar

$$\text{přírůstek tepla} = \text{teplota} \times \text{přírůstek entropie}$$

a rovnicí pro elementární mechanickou práci

$$\text{přírůstek práce} = \text{síla} \times \text{přírůstek dráhy.}$$

Existuje také analogie mezi Carnotovým cyklem a vodopádem. Práce získaná z Carnotova stroje je úměrná rozdílu teplot a množství sdílené entropie, neboť  $Q_I - Q_{II} = T_I S_I - T_{II} S_{II} = (T_I - T_{II}) S$ . Práce ztracená pádem vody je úměrná rozdílu výšek hladin a množství padající vody.

Entropie náleží k hmotě asi jako elektrický náboj nebo hmotnost. Existuje v páře, v plynu, v kapalině i v tělese v pevné fázi, např. v oceli. Ve spojitěm tělese je spojitě rozdělena.

<sup>\*</sup>) Sir William Thomson (1824 až 1907), od r. 1892 Lord Kelvin of Largs.

<sup>\*\*\*)</sup> Rudolf CLAUSIUS (1822 až 1888).

**Příklad 1.** Dokažte, že tepelná účinnost Carnotova stroje závisí jen na poměru absolutních teplot obou lázní.

**Řešení:** Z rovnice (3.9) dosadíme do (3.8). Vyjde

$$\eta = 1 - \frac{Q_{II}}{Q_I} = 1 - \frac{T_{II}}{T_I}.$$

Tato hodnota nezávisí na druhu plynu, s nímž cyklus uskutečňujeme.

**Příklad 2.** Dokažte, že účinnost Carnotova cyklu by byla vždy menší, kdyby jednotlivé děje probíhaly nevratně.

**Řešení:** Kdyby komprese probíhala nevratně, odvedlo by se do druhé lázně teplo  $Q_{III}$  (místo  $Q_{II}$ ) a rozdíl entropií by byl

$$\Delta S = \frac{Q_I}{T_I} - \frac{Q_{III}}{T_{II}} + \Delta S_i = 0 \quad (\Delta S_i > 0),$$

takže

$$\frac{Q_{III}}{Q_I} = \frac{T_{II}}{T_I} + \frac{T_{II} \Delta S_i}{Q_I}$$

a tepelná účinnost nevratného procesu by byla

$$\eta_n = 1 - \frac{Q_{III}}{Q_I} = 1 - \frac{T_{II}}{T_I} - \frac{T_{II} \Delta S_i}{Q_I} = \eta - \frac{T_{II} \Delta S_i}{Q_I} < \eta.$$

Teplo

$$Q_{III} = Q_I \frac{T_{II}}{T_I} + T_{II} \Delta S_i = Q_{II} + T_{II} \Delta S_i$$

by bylo vždy větší než  $Q_{II}$  při vratném ději. K obdobným závěrům bychom dospěli i při nevratné expanzi.

**Příklad 3.** Dokažte, že v důsledku druhého termodynamického zákona může teplo přecházet jen z teplejšího tělesa do studenějšího a nikdy naopak.

**Řešení:** Představme si, že izolovaná soustava má dvě části, těleso o teplotě  $T_I$  a jiné těleso o teplotě  $T_{II}$ . K přestupu tepla z jednoho tělesa do druhého dochází z vnitřních příčin v soustavě, takže  $\Delta S_i > 0$ . Nechť teplo  $\Delta Q$  přejde z prvního tělesa do druhého. Výsledná změna entropie uvnitř soustavy bude

$$\Delta S_i = \frac{\Delta Q}{T_{II}} - \frac{\Delta Q}{T_I} > 0.$$

Odtud však

$$T_I > T_{II},$$

takže první těleso musí být teplejší. Zároveň shledáváme, že sdílení tepla je nevratný děj. Pro vratný děj by musilo platit, že  $\Delta S_i = 0$ , takže  $T_I = T_{II}$ . To je však případ termodynamické rovnováhy, při níž sdílení tepla ustává.

Příklad 4. Vypočtete entropii 1 kilomolu ideálního plynu.

Řešení: Pro ideální plyn platí stavová rovnice  $p v = R T$ . \*) Podle prvního termodynamického zákona (3.2) se přivedené teplo  $dQ$  změní jednak na mechanickou práci  $dA = p dv$ , jednak na přírůstek vnitřní energie  $dU = c_v dT$  ( $c_v$  je specifické teplo při stálém objemu). Bude tedy

$$dQ = p dv + c_v dT.$$

Tuto rovnici dělíme absolutní teplotou  $T$  a integrujeme:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{p dv}{T} + c_v \frac{dT}{T} = R \frac{dv}{v} + c_v \frac{dT}{T},$$

$$S = R \ln \frac{v}{v_0} + c_v \ln \frac{T}{T_0} + S_0.$$

Zde  $S_0$  je integrační konstanta. Definice (3.7) neurčuje, jak má být velká. Do výpočtů vstupují jen změny entropie, takže na integrační konstantě nezáleží. Nezáleží proto ani na konstantách  $v_0$ ,  $T_0$ . Poznamenejme, že u ideálního plynu  $dS = dS_e$ , neboť  $dS_i = 0$ .

#### 4. VÝPOČET RŮZNÝCH DRUHŮ ENERGIE

Pohybující se poddajná tělesa zpravidla netvoří homogenní soustavu, neboť stavové veličiny mohou mít v různých místech tělesa různou velikost a jsou tedy funkcí prostorových souřadnic. Chceme-li aplikovat poznatky z předchozí kapitoly, musíme se omezit na elementární objem  $dV$  tělesa, v němž lze nerovnoměrnost zanedbat, a pak získat výslednou hodnotu hledané funkce integrací přes celý objem  $V$ .

\*) Na rozdíl od ostatního textu zde  $p$  značí tlak,  $v$  měrný objem.

Pro kinetickou energii tělesa tak dostaneme

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho v^i v_i dV = \frac{1}{2} \int_V \rho (v)^2 dV, \quad (4.1)$$

kde  $v^i$  resp.  $v_i$  jsou složky vektoru rychlosti,  $\rho$  je hustota. Obě tyto veličiny se vztahují k elementu objemu  $dV$ . Poznamenejme, že v kartézských souřadnicích  $v^i = v_i$ , takže

$$v^i v_i = (v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2 = |\vec{v}|^2 = (v)^2.$$

Vnitřní energii  $U$  vypočteme ze vzorce

$$U = \int_V \rho \mathcal{E} dV, \quad (4.2)$$

kde  $\mathcal{E}$  značí měrnou vnitřní energii vztahovanou k jednotce hmotnosti.

Přivedené teplo  $Q$  je dáno součtem tepla, které pronikne povrchem tělesa  $S$ , a tepla uvolněného z vnitřních zdrojů, takže rychlost, jakou je teplo přiváděno, vyjde

$$\frac{DQ}{Dt} = - \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho r dV = - \int_S q^i n_i dS + \int_V \rho r dV. \quad (4.3)$$

V této rovnici značí  $\vec{q}$  [ $J m^{-2} s^{-1}$ ] vektor tepelného toku,  $r$  [ $J kg^{-1} s^{-1}$ ] množství tepla uvolněného z vnitřních zdrojů v jednotce hmotnosti za jednotku času. Záporné znaménko u prvního členu na pravé straně rovnice značí, že tepelný tok  $\vec{q}$  směřuje dovnitř tělesa (proti vnější normále  $\vec{n}$ ).

Nejčastěji bývá  $r = 0$ . S použitím Gaussovy věty můžeme pak rovnici (4.3) upravit takto

$$\frac{DQ}{Dt} = - \int_V \frac{\partial q^j}{\partial z^j} dV = - \int_V \text{div} \vec{q} dV \quad (r=0). \quad (4.4)$$

Výkon povrchových sil  $\vec{p}$  [ $N m^{-2}$ ] a objemových sil  $\vec{b}$  [ $N m^{-3}$ ] je

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \int_S \vec{p} \cdot \vec{v} dS + \int_V \vec{b} \cdot \vec{v} dV = \\ &= \int_S p^i v_i dS + \int_V b^i v_i dV = \int_S \sigma^{ji} n_j v_i dS + \int_V b^i v_i dV = \\ &= \int_V \left[ \frac{\partial (\sigma^{ji} v_i)}{\partial z^j} + b^i v_i \right] dV. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dělíme-li rovnici (3.5) časovým přírůstkem  $\Delta t \rightarrow 0$ , dostaneme v limitě (pro  $G = \text{konst}$ ,  $\Delta G = 0$ )

$$\frac{DQ}{Dt} + \frac{DA}{Dt} = \frac{DX}{Dt} + \frac{DU}{Dt}. \quad (4.6)$$

Tato rovnice vyjadřuje zákon zachování energie (první termodynamický zákon). Říká, že tepelný a mechanický příkon se spotřebuje na změnu kinetické a vnitřní energie (za jednotku času). Derivace vstupují do rovnice (4.6) proto, že v rovnici (3.5) počítáme se změnami energií. Je proto logické, že výslednou bilanci (4.6) píšeme pro výkony (výkon = přírůstek energie za jednotku času).

Upravíme-li derivace  $DX/Dt$ ,  $DU/Dt$  pomocí vztahu (2.14), dostaneme porovnáním integrandů

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \frac{D(v)^2}{Dt} + \frac{(v)^2}{2} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{(v)^2}{2} \rho \operatorname{div} \vec{v} + \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + \varepsilon \frac{D\rho}{Dt} + \varepsilon \rho \operatorname{div} \vec{v} = \\ = - \frac{\partial q^j}{\partial z^j} + X^i v_i + v_i \frac{\partial G^{ji}}{\partial z^j} + G^{ji} \frac{\partial v_i}{\partial z^j}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Využijeme ještě rovnice kontinuity (2.17) a pohybové rovnice (2.34); v poslední rovnici se některé členy zruší a zbude

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = - \frac{\partial q^j}{\partial z^j} + G^{ji} \frac{\partial v_i}{\partial z^j}. \quad (4.8)$$

Připomeňme, že  $\frac{D}{Dt}(v)^2 = \frac{D}{Dt}(v_i v^i) = 2 v_i \frac{Dv^i}{Dt} = 2 v^i \frac{Dv_i}{Dt}$ , neboť v kartézských souřadnicích  $v_i = v^i$ .

Označíme-li tenzor rychlosti deformace

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial z^j} + \frac{\partial v_j}{\partial z^i} \right), \quad (4.9)$$

bude

$$G^{ji} \frac{\partial v_i}{\partial z^j} = G^{ij} V_{ij}, \quad (4.10)$$

neboť tenzor napjatosti  $G^{ij}$  je souměrný. Rovnice (4.8) bude mít tvar

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = - \frac{\partial q^j}{\partial z^j} + G^{ij} V_{ij}. \quad (4.11)$$

Zaměříme-li se na malé deformace a na přírůstky energií za čas  $Dt = dt$ , bude podle (4.11)

$$\rho d\mathcal{E} = dQ + \sigma^{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (4.12)$$

Je-li  $\Sigma$  entropie připadající na jednotku hmotnosti, případně na jednotku objemu podle (3.7) teplo  $dQ = \rho T d\Sigma$ , takže

$$d\mathcal{E} = T d\Sigma + \frac{1}{\rho} \sigma^{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (4.13)$$

Rovnice (4.11) popř. (4.13) je tedy energetickou bilancí za obecného pohybu poddajného tělesa. Rozdíl mezi nimi je ten, že rovnice (4.13) platí pro malé deformace, kdežto rovnice (4.11) platí obecně.

## 5. VÝZNAM DEFORMAČNÍ ENERGIE

V teorii pružnosti se definuje energie napjatosti  $\Lambda$  vztážená k jednotce objemu vztahem

$$d\Lambda = \sigma^{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (5.1)$$

Vztah (5.1) platí i pro nelineární pružná tělesa. Platí-li však Hookeův zákon (2.35), můžeme vztah (5.1) jednoduše integrovat a dostaneme

$$\Lambda = \frac{1}{2} E^{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \epsilon_{ij}. \quad (5.2)$$

V jiném případě bude konstituční zákon složitější. Nakonec vždy vyjde energie napjatosti jako funkce deformačního tenzoru, tj.  $\Lambda = \Lambda(\epsilon_{ij})$ . Z rovnice (5.1)

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \epsilon_{ij}}. \quad (5.3)$$

Pokud tato derivace existuje a pokud integrál  $\Lambda = \int \sigma^{ij} d\epsilon_{ij}$  nezávisí na integrační cestě, ale jen na počátečním a konečném stavu, má  $\Lambda$  význam potenciální energie, a protože je funkcí deformačního tenzoru, je to potenciální deformační energie (potenciální deformační práce).

Vnucuje se otázka, zda taková funkce opravdu existuje? U pružného tělesa je tenzor napjatosti  $\sigma^{ij}$  jednoznačně závislý na deformačním tenzoru  $\epsilon_{ij}$ , takže jenom jeden z těchto tenzorů je nezávislou stavovou veličinou.

Z rovnice (4.13) je zřejmé, že měrná vnitřní energie  $\mathcal{E}$  je funkcí jednak měrné entropie  $\Sigma$ , jednak deformačního tenzoru  $\varepsilon_{ij}$ . Můžeme proto psát

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Sigma, \varepsilon_{ij}) \quad (5.4)$$

Pro totální diferenciál této veličiny platí vztah

$$d\mathcal{E} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Sigma} \right)_{\varepsilon_{ij} = \text{konst}} d\Sigma + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{\Sigma = \text{konst}} d\varepsilon_{ij}. \quad (5.5)$$

Porovnáme-li tuto rovnici s rovnicí (4.13), vidíme, že

$$T = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Sigma} \right)_{\varepsilon_{ij} = \text{konst}}, \quad \sigma^{ij} = \rho \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{\Sigma = \text{konst}}. \quad (5.6)$$

Za malých deformací se hustota  $\rho$  prakticky nemění, takže součin  $\rho \mathcal{E}$  podle druhé z rovnic (5.6) má význam potenciální energie  $\Lambda$  v rovnici (5.3):

$$\Lambda = \rho \mathcal{E} \quad (\Sigma = \text{konst}). \quad (5.7)$$

Protože je přítom měrná entropie konstantní, jde o adiabatickou změnu, tj. o změnu v tepelně izolovaném tělese. Pro tuto změnu tedy potenciální deformační energie existuje a má význam vnitřní energie obsažené v jednotce objemu. <sup>\*</sup>

Je-li teplota konstantní, můžeme rovnici (4.13) integrovat. Protože

$$\int T d\Sigma = T \int d\Sigma = T \Sigma \quad \int \frac{1}{\rho} \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\rho} \Lambda, \quad (5.8)$$

bude

$$\mathcal{E} = T \Sigma + \frac{1}{\rho} \Lambda. \quad (5.9)$$

Rozdíl  $\mathcal{E} - T \Sigma$  označíme podle Helmholtze jako měrnou volnou energii vztahovou k jednotce hmotnosti <sup>\*\*</sup>)

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} - T \Sigma. \quad (5.10)$$

<sup>\*</sup>) Obě veličiny se mohou lišit o libovolnou aditivní konstantu, která při derivování odpadne, takže na ní nezáleží.

<sup>\*\*</sup>) Proti tomu výraz  $T \Sigma = \mathcal{E} - \mathcal{F}$  představuje energii vázanou. Je to část vnitřní energie, která se při izotermické změně neuvolňuje. - Hermann Ludwig Ferdinand HELMHOLTZ (1821 až 1894), německý přírodovědec, fyzik, fyziolog a psycholog.

Pak

$$d\mathcal{F} = d\mathcal{E} - Td\Sigma - \Sigma dT \quad (5.11)$$

a rovnice (4.13) má tvar

$$d\mathcal{F} = \Sigma dT + \frac{1}{\rho} G^{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (5.12)$$

Ze srovnání s totálním diferenciálem funkce  $\mathcal{F}(T, \varepsilon_{ij})$  dostaneme

$$\Sigma = - \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij} = \text{konst}}, \quad G^{ij} = \rho \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{T = \text{konst}} \quad (5.13)$$

Při izotermické změně má potenciální deformační energie význam volné energie obsažené v jednotce objemu ( $\Lambda = \rho \mathcal{F}$ ).

Název "volná energie" pochopíme, přepíšeme-li rovnici (3.5) do tvaru

$$\Delta A = \Delta U - \Delta Q = \Delta U - T \Delta \mathcal{Y} \quad (5.14)$$

( $\Delta K = \Delta G = 0$ ) . Při izotermickém ději ( $T = \text{konst}$ )

$$A = U - T \mathcal{Y} \quad (5.15)$$

Na pravé straně je právě volná energie soustavy. Je to tedy práce, kterou lze získat při izotermické změně. Ve srovnání s tím máme při adiabatické změně  $\Delta \mathcal{Y} = 0$ , takže

$$A = U \quad (\mathcal{Y} = \text{konst}). \quad (5.16)$$

Při adiabatické změně můžeme získat práci jen na úkor vnitřní energie.

Vnitřní i volná energie jsou skalární veličiny, které se v uvedených dvou případech (při adiabatické popř. izotermické změně) rovnají deformační energii. Ze vztahů (5.6) popř. (5.13) je zřejmé, že deformační energie závisí jen na tenzoru přetvoření. Při obecných změnách to už nebude platit, deformační energie bude závislá i na teplotě a entropii.

## 6. DUHAMELŮV - NEUMANNŮV ZÁKON

Předpokládejme, že potenciální deformační energii lze vyjádřit mocninnou řadou

$$\Lambda = C_0 + C^{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} C^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots \quad (6.1)$$



Součinitele  $C_0$ ,  $C^{ij}$ ,  $C^{ijkl}$  mohou záviset na teplotě  $T$  a na entropii  $\Sigma$ .

Činitele  $C_0$  určíme tak, aby deformační energie vymizela spolu s deformací, tedy  $C_0 = 0$ . Pak

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_{ij}} = C^{ij} + \frac{1}{2} (C^{ijkl} \varepsilon_{kl} + C^{klij} \varepsilon_{kl}). \quad (6.2)$$

Protože  $\varepsilon_{kl}$  a  $\sigma^{ij}$  jsou souměrné tenzory, je

$$C^{ijkl} = C^{klij}, \quad C^{ijkl} = C^{ijlk}, \quad (6.3)$$

takže existuje 21 nezávislých činitelů  $C^{ijkl}$ . Potom z rovnice (6.2) vyjde

$$\sigma^{ij} = C^{ij} + C^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (6.4)$$

Jaký je význam činitelů  $C^{ij}$ ? Je to zřejmě napětí  $\sigma^{ij}$  v nedeformovaném tělese ( $\varepsilon_{kl} = 0$ ). Taková napětí mohou vzniknout odchylkou od referenční teploty, zejména nerovnoměrným rozdělením teploty. Je-li  $T = T_0 = \text{konst}$ , je nedeformované těleso bez napětí (to vyplývá z definice přirozeného stavu tělesa). Funkci  $C^{ij}(T)$  proto rozvineme v Taylorovu řadu kolem hodnoty  $T = T_0$ , neboť víme, že  $C^{ij}(T_0) = 0$ . Bude

$$C^{ij}(T) = \left( \frac{dC^{ij}}{dT} \right)_{T_0} (T - T_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 C^{ij}}{dT^2} \right)_{T_0} (T - T_0)^2 + \dots \quad (6.5)$$

Omezíme-li se jen na lineární člen, bude

$$C^{ij} = -\beta^{ij} (T - T_0), \quad (6.6)$$

$$\beta^{ij} = - \left( \frac{dC^{ij}}{dT} \right)_{T=T_0} = \beta^{ji}. \quad (6.7)$$

Jde-li o izotropické těleso, nahradíme šest součinitelů  $\beta^{ij}$  jediným součinitelem  $\beta$  podle vztahu

$$\beta^{ij} = \beta \delta^{ij} \quad (6.8)$$

( $\delta^{ij}$  je Kroneckerovo delta,  $\delta^{ij} = 1$  pro  $i = j$ , jinak 0). Dosazením do (6.4) dostaneme Duhamelův-Neumannův zákon

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} (T - T_0). \quad (6.9)$$

Pro  $T = T_0$  přejde v "obyčejný" Hookeův zákon (2.35).<sup>\*)</sup> Je-li těleso izotropické, vyjde (úpravami, které jsme probrali v první části semináře)

$$\sigma_j^i = 2G \varepsilon_j^i + \lambda \varepsilon_{mm}^m \delta_j^i - \beta (T - T_0) \delta_j^i. \quad (6.10)$$

Označení se shoduje s tím, které jsme použili u rovnice (200) v publikaci vydané k první části semináře. V kartézských souřadnicích nezáleží na poloze indexů, takže můžeme psát

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + 3\lambda e \delta_{ij} - \beta (T - T_0) \delta_{ij}, \quad (6.11)$$

$$e = \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}). \quad (6.12)$$

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (6.13)$$

$E$  je Youngův modul pružnosti (v tahu či v tlaku),  $\mu$  Poissonovo číslo,  $\lambda$  Lamého elastická konstanta,  $G$  modul pružnosti ve smyku.

Ke vztahu (6.11) existuje inverzní vztah

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} - \frac{3\mu}{E} \lambda \delta_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}, \quad (6.14)$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \sigma_{mm} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad (6.15)$$

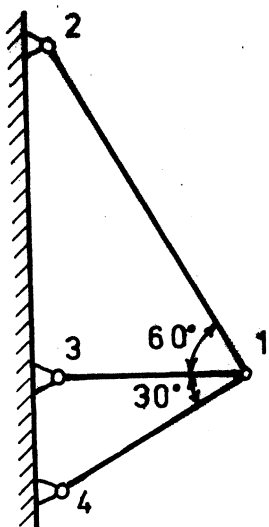
$$\alpha = \beta \frac{1-2\mu}{E} = \text{součinitel délkové roztažnosti.}$$

Duhamelův-Neumannův zákon říká, že napjatost způsobená deformací a nerovnoměrným rozdělením teploty (odchylkou od referenční teploty) dostaneme součtem napjatosti, která by vznikla při stejné deformaci za referenční teploty  $T = T_0$  a napjatosti, která přísluší nerovnoměrnému rozdělení teploty při nulové deformaci.

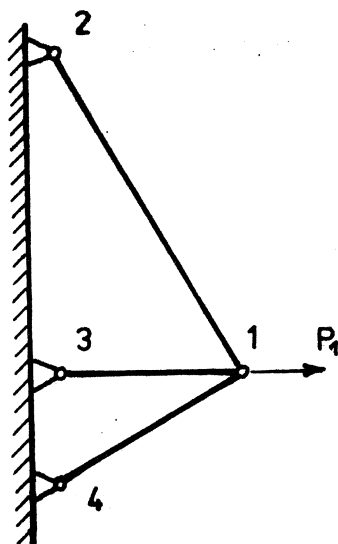
Teplotní napjatost může vzniknout i při rovnoměrné teplotě, je-li těleso nehomogenní nebo je-li nějak bráněno jeho teplotní dilataci. Dosadíme-li do rovnice (6.14)  $\sigma_{ij}^i = 0$ , vidíme, že teplotní napjatost v homogenním izotropickém tělese nevznikne, může-li v něm volně vzniknout přetvoření  $\varepsilon_{ij} = \alpha (T - T_0) \delta_{ij}$  a je-li toto přetvoření kompatibilní. To vyžaduje, aby teplota byla lineární funkcí souřadnic.

<sup>\*)</sup> Ze srovnání s rovnicí (2.35) poznáváme, že  $C_{ijkl} = E \delta_{ijkl}$ .

**Příklad 5.** V prutové soustavě podle obr. 1 složené z prutů ze stejného materiálu a se stejným průřezem vzroste teplota prutu 1-3 o  $\Delta T = T - T_0$ . Vypočtete teplotní napjatost.



Obr. 1



Obr. 2

**Řešení:** Znemožníme-li deformace, vzniknou v jednotlivých prutech síly

$$S_{12} = 0, \quad S_{13} = -\alpha ES \Delta T, \quad S_{14} = 0. \quad (1)$$

Na kloub 1 bude přitom působit vpravo síla  $P_1 = -S_{13}$  (je to záporně vzatá výslednice sil ve všech prutech). Ve skutečnosti tam síla  $P_1$  nepůsobí. Od napjatosti (1) musíme proto odečíst napjatost podle obr. 2. Výsledná napjatost pak bude splňovat podmínku, že kloub 1 není zatížen. Přesvědčte se, že výsledné síly  $F$  v prutech tvoří rovnovážnou soustavu a vyjdou takto:

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= \frac{\alpha ES \Delta T}{3 + \sqrt{3}}, \\ F_{13} &= -\frac{2\alpha ES \Delta T}{3 + \sqrt{3}}, \\ F_{14} &= \frac{\sqrt{3} \alpha ES \Delta T}{3 + \sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Postup výpočtu lze shrnout pomocí maticového zápisu do přehledné formy. Dané síly v uzlech tvoří vektor  $\{Q\}$ . Ten se skládá z počátečních hodnot  $\{P\}$  při nulové deformaci a ze sil  $[K]\{u\}$  vzniklých v uzlech tím, že uzly uvolníme, takže se posunou do nové rovnovážné polohy. Posuvy uzlů tvoří vektor  $\{u\}$ .

Je tedy

$$\{Q\} = [K]\{u\} + \{P\}. \quad (3)$$

Nejprve vypočteme síly  $\{P\}$  v uzlech konstrukce (v našem příkladu v uzlu 1), které při daných změnách teploty udržují soustavu nedeformovanou. Poté vypočteme posuvy

$$\{u\} = [K]^{-1}(\{Q\} - \{P\}), \quad (4)$$

kteřé vzniknou za referenční teploty působením daných vnějších sil  $\{Q\}$  (v našem příkladu nulových) a záporně vzatých sil  $\{P\}$ . Přitom  $[K]$  je matice tuhosti,  $[K]^{-1}$  matice poddajnosti. Rovnice (3) a (4) jsou ekvivalentní.

Napjatost, kterou vyvolají posuvy  $\{u\}$  za referenční teploty, sečteme s napjatostí, která vznikla v nedeformované soustavě působením teplotních rozdílů.

## 7. POVAHA TERMODYNAMICKÉ ROVNOVÁHY

Je-li soustava v termodynamické rovnováze, nezávisejí stavové veličiny na čase. To znamená, že se nesmějí změnit okrajové podmínky a že ani uvnitř soustavy se nic spontánního neděje. Ptáme se, za jakých podmínek taková rovnováha nastává a popřípadě trvá.

Předpokládáme, že za termodynamické rovnováhy známe soubor stavových veličin pro stav I

$$I \dots (\mathcal{E}, \Sigma, T, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}).$$

Abychom prozkoumali povahu takové rovnováhy, změníme stavové veličiny o nekonečně malé, ale jinak prakticky libovolné spojité prostorové funkce  $\delta \mathcal{E}$ ,  $\delta \Sigma$  atd., kterým budeme říkat variace. Nejsou to pouhé přírůstky, protože mohou mít v různých místech různou velikost. Jsou to první "funkcionální diferenciály". Obdobné veličiny  $\delta^2 \mathcal{E}$ ,  $\delta^2 \Sigma$  atd. budou nekonečně malé druhého řádu, budou to tedy druhé diferenciály. Měrná vnitřní energie se změní na hodnotu

$$\mathcal{E} + \Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}(x^1, x^2, x^3) + \delta \mathcal{E}(x^1, x^2, x^3) + \frac{1}{2} \delta^2 \mathcal{E}(x^1, x^2, x^3) + \dots \quad (7.1)$$

a obdobně se změní i ostatní stavové veličiny. Zanedbáme-li malé veličiny druhého a vyššího řádu, bude  $\Delta \mathcal{E} \doteq \delta \mathcal{E}$  obměnou čili variací funkce  $\mathcal{E}$ . Ze stavu I se tak dostaneme do "sousedního" stavu II, pro který budeme mít stavové veličiny

$$\text{II} \dots (\mathcal{E} + \Delta \mathcal{E}, \Sigma + \Delta \Sigma, \dots, \varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}).$$

Má-li platit termodynamický zákon (4.13), totiž rovnice

$$\Delta \mathcal{E} = T \Delta \Sigma + \frac{1}{\rho} (G^{ij} + \Delta G^{ij}) \Delta \varepsilon_{ij} \quad (7.2)$$

s chybou nejvýš nekonečně malou druhého řádu, musí být

$$\delta \mathcal{E} = T \delta \Sigma + \frac{1}{\rho} G^{ij} \delta \varepsilon_{ij}. \quad (7.3)$$

Budeme požadovat, aby se okrajové podmínky nezměnily a aby se nezměnila vnitřní energie soustavy. To znamená, že  $\delta \mathcal{E} = 0$ ,  $\delta \varepsilon_{ij} = 0$ . Z rovnice (7.3) dostaneme, že také  $\delta \Sigma = 0$ . Entropie nabývá proto stacionární hodnoty a ve stavu II se může od stavu I lišit nejvýš o nekonečně malou veličinu druhého řádu

$$\Delta \Sigma = \frac{1}{2} \delta^2 \Sigma. \quad (7.4)$$

Podle druhého termodynamického zákona nemůže stav II spontánně přejít do stavu I, jestliže by tato změna měla být provázána úbytkem entropie. Změna  $\text{II} \rightarrow \text{I}$  tedy nemůže nastat, je-li entropie ve stavu II větší než ve stavu I,  $\Sigma + \Delta \Sigma > \Sigma$ , tj. je-li  $\Delta \Sigma > 0$ .

Kdyby bylo  $\Delta \Sigma \leq 0$ , soustava II by mohla přejít do stavu I. Ze zkušenosti víme, že každá nevratná změna, kterou druhý termodynamický zákon dovoluje, skutečně nastane. Předpoklad  $\Delta \Sigma < 0$  pak znamená, že stav II přejde spontánně zpět do stavu I. Jestliže se těleso spontánně vrací zpět do stavu, z něhož bylo vychýleno, je tento stav stabilní. Za stabilní rovnováhy (I) nabývá tedy entropie  $\Sigma$  maxima (při  $\mathcal{E} = \text{konst}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \text{konst}$ ). Každý přírůstek entropie při malé změně stabilního stavu může být jen záporný.

Badatel J. W. GIBBS dokázal, že tuto podmínku stabilní termodynamické rovnováhy lze formulovat alternativně také tak, že za stabilní rovnováhy nabývá vnitřní energie  $\mathcal{E}$  minima, je-li entropie udržována konstantní. Uvedené dvě podmínky lze zapsat takto:

$$(\Delta \Sigma)_{\mathcal{E}=\text{konst}} \leq 0, \quad (\Delta \mathcal{E})_{\Sigma=\text{konst}} \geq 0. \quad (7.5)$$

Rovněž platí pro přírůstky nekonečně malé prvního řádu. \*)

\*) První zápis (7.5) má tedy tento smysl:  $\delta \Sigma = 0$ ,  $\delta^2 \Sigma < 0$  při  $\mathcal{E} = \text{konst}$ .  
Důkaz ekvivalence obou vztahů (7.5) uvádíme v 6. příkladu. -  
Josiah Williard GIBBS (1839 až 1903), americký fyzik.

Přirozený (referenční) stav pružného tělesa je termodynamicky stabilní. Je-li takové těleso vyvedeno působením vnějších sil z tohoto stavu, vrací se zpět do původního stavu, jakmile síly přestanou působit. Je-li změna adiabatická, je entropie konstantní a podle druhé z rovnic (7.5) je vnitřní energie  $\xi$  v přirozeném stavu tělesa minimální. Při každé adiabatické změně, kterou těleso vyvedeme z přirozeného stavu, musí proto být

$$\Delta \xi = \xi - \xi_0 > 0, \quad (7.6)$$

tj. změna  $\Delta \xi$  je pozitivně definitní. Protože podle (5.7)  $\Lambda = \rho \xi$ , je také  $\Delta \Lambda$  pozitivně definitní (v okolí přirozeného stavu tělesa).

Je-li změna izotermická, pak z definice volné energie  $\mathcal{F} = \xi - T \Sigma$  [srovn. (5.10)] při  $T = \text{konst}$  plyne podle první z rovnic (7.5), že v přirozeném stavu nabývá volná energie minima ( $\Sigma$  je totiž maximální a člen  $T \Sigma$  se odečítá od konstantní hodnoty  $\xi$ ). V tomto případě je  $\Lambda = \rho \mathcal{F}$  a věta o pozitivní definitnosti změny potenciální deformační energie v okolí stabilní rovnováhy proto stále platí. To má velký význam pro teorii pružnosti. Důsledkem tohoto poznatku je jednoznačnost řešení úloh ze statiky a z dynamiky pružných těles (s výjimkou případů, kdy je porušena elastická stabilita), věta o minimu potenciální energie, věta o minimu komplementární potenciální energie a v jistém smyslu i Saint-Venantův princip. Platnost těchto vět a principů je tedy zaručena jen pro adiabatické nebo izotermické změny. Jiným důsledkem jsou omezení platná pro elastické konstanty, což nyní stručně ukážeme.

V publikaci vydané k první části semináře r. 1978 jsme uvedli tvar (210) Hookeova zákona pro izotropický materiál

$$\Delta_j^i = 2G e_j^i, \quad (7.7)$$

$$\Delta = (3\lambda + 2G)e, \quad (7.8)$$

kde  $\Delta_j^i = G_j^i - \lambda \delta_j^i$ ,  $e_j^i = \varepsilon_j^i - e \delta_j^i$  jsou deviatory napjatosti resp. deformace, které odpovídají změnám při stálém objemu, a  $\lambda = \frac{1}{3} G_{kk}$ ,  $e = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}$  jsou hodnoty odpovídající objemovým změnám  $\Delta V/V = \varepsilon_{kk} = 3e$ . Tyto části se podílejí na výsledné deformační energii nezávisle, neboť deviator napjatosti nekoná práci při objemových změnách a hydrostatická složka napjatosti nekoná práci při změnách tvaru daných deviatorem deformace (za konstantního objemu). Proto lze jednoduše sečíst práce vykonané každou částí napjatosti zvlášť. Výsledná deformační práce je <sup>\*</sup>)

\* ) Veličina  $\Lambda$  podle (7.9) představuje změnu potenciální deformační energie (v přirozeném stavu je  $\Lambda = 0$ ). Je proto  $\Delta \Lambda = \Lambda$ . Symbol  $\Delta$  vynecháváme. Veličiny  $\lambda$  a  $G$  jsou dány rovnicemi (6.13).

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2} \lambda_j^i e_i^j + \frac{1}{2} \Delta (3e) = \\ &= G e_j^i e_i^j + \frac{3}{2} (3\lambda + 2G) e^2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Má-li být tato veličina pozitivně definitní (tj. vždy kladná), musí být

$$G > 0, \quad 3\lambda + 2G > 0. \quad (7.10)$$

Pomocí rovnic (6.13) lze ukázat, že tyto podmínky jsou ekvivalentní s nerovnostmi

$$E > 0, \quad -1 < \mu < 0,5, \quad (7.11)$$

platnými pro Youngův modul pružnosti  $E$  a Poissonovo číslo  $\mu$ .

Záporné Poissonovo číslo nebylo nikdy v přírodě zjištěno. Většina látek má  $\mu = 0,25$  až  $0,35$ , největší hodnotu má pryž (asi  $0,49$ ), z kovů olovo ( $0,45$ ), nejmenší hodnotu ze známých látek má beryllium ( $0,01$  až  $0,06$ ).

Nerovnosti (7.11) platí pro izotropický materiál. Ačkoli se týkají čistě mechanických vlastností materiálu, plynou z termodynamických úvah.

Příklad 6. Dokažte ekvivalenci obou tvrzení obsažených v rovnicích (7.5).

Řešení: Máme dokázat ekvivalenci vztahů

$$(\Delta \Sigma)_{\xi = \text{konst}} \leq 0, \quad (1)$$

$$(\Delta \xi)_{\Sigma = \text{konst}} \geq 0. \quad (2)$$

Vždy existuje možnost změnit stav tělesa tak, aby entropie i vnitřní energie zároveň rostly (přívodem tepla) nebo zároveň klesaly (odvodem tepla). Představme si nejprve, že vztah (1) neplatí, tzn. že  $\Delta \xi = 0$ ,  $\Delta \Sigma > 0$ . Pak musí existovat taková změna, která zmenší  $\Delta \Sigma$  k nule a zároveň zmenší  $\xi$ , takže přírůstek  $\Delta \xi$  bude záporný:

$$\Delta \Sigma = 0, \quad \Delta \xi < 0. \quad (3)$$

Proto nebude platit ani vztah (2). Nyní uvažujme jiný případ, kdy neplatí vztah (2), takže  $\Delta \Sigma = 0$ ,  $\Delta \xi < 0$ . Přívodem tepla můžeme dosáhnout stavu, že bude

$$\Delta \Sigma > 0, \quad \Delta \xi = 0. \quad (4)$$

Nebude tedy platit ani podmínka (1).

Neplatí-li podmínka jedna, neplatí ani druhá a naopak. Platí-li tedy jedna, platí i druhá, čímž je ekvivalence dokázána.

## 8. NEVRATNÉ ZMĚNY V PODDAJNÝCH TĚLESECH

Uvedeme-li do vzájemného styku dvě izolovaná tělesa, bude se teplejší těleso ochlazovat a chladnější zahřívát, a to tak dlouho, až se teplota obou těles vyrovná. Cílem nastalé změny je tedy termodynamická rovnováha. Podle druhého termodynamického zákona směřují k takové rovnováze všechny fyzikální děje v izolovaných soustavách. Popsaná změna je nevratná, neboť v izolované soustavě nikdy nenastane případ, aby se teplejší těleso dále zahřívало a studenější ještě více ochlazovalo.

Při deformacích viskoelastických a plastických těles se maří mechanická práce a přeměňuje se v teplo. Také tato změna je nevratná, protože se nestane, aby plastické těleso pouhou změnou teploty vrátilo předtím zmařenou a v teplo proměněnou mechanickou práci.

Protože se při nevratných změnách zvětšuje entropie, vstoupí tato stavová veličina do rovnic popisujících termomechanické děje. U každé změny stavu pozorujeme současné působení dvou veličin, jedné intenzivní, druhé extenzivní. Takové dvojice jsou např. síla a dráha, elektrické napětí a množství náboje, rozdíl výšek hladin a množství protékající kapaliny, teplota a entropie. Entropie je veličinou extenzivní a proto podléhá zákonu zachování entropie.

Toto tvrzení je zdánlivě v rozporu s tím, že entropie izolované soustavy při nevratných změnách roste. Abychom to objasnili, vrátíme se k případu dvou těles o různé teplotě. Tělesa uvedeme do vzájemného styku a umožníme tak vedení tepla mezi oběma tělesy za současné izolace těles od okolí. Z tělesa I přejde do tělesa II množství tepla  $\Delta Q$ . Změny entropie těchto těles jsou

$$\Delta S_{iI} = -\frac{\Delta Q}{T_I}, \quad \Delta S_{iII} = +\frac{\Delta Q}{T_{II}} \quad (8.1)$$

Tyto rovnice platí pro začátek děje (než dojde k zřetelným změnám teplot). Index  $i$  znamená, že změna nastává samovolně uvnitř soustavy. Celková změna entropie

$$\Delta S_i = \Delta S_{iI} + \Delta S_{iII} = \Delta Q \left( \frac{1}{T_{II}} - \frac{1}{T_I} \right) \geq 0 \quad (8.2)$$

čili

$$T_I \geq T_{II} \quad (8.3)$$



Teplo tedy přechází z teplejšího tělesa do studenějšího.

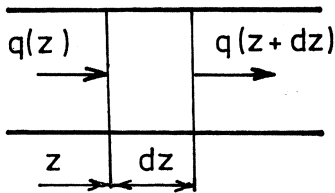
Z hlediska vnějšího pozorovatele považujeme teplo, které vydá těleso I, za teplo okolím přijaté, a teplo, které přijme těleso II, za teplo odevzdané. Proto

$$\Delta S_{eI} = + \frac{\Delta Q}{T_I}, \quad \Delta S_{eII} = - \frac{\Delta Q}{T_{II}} \quad (8.4)$$

Výsledná změna entropie vyjde nulová, neboť

$$\Delta S = \Delta S_{eI} + \Delta S_{eII} + \Delta S_{iI} + \Delta S_{iII} = 0. \quad (8.5)$$

Jinak řečeno, tělesa musila být nejprve uvedena do nerovnovážného stavu zásahem z vnějšku; tomu přísluší negativní změna entropie  $\Delta S_e$ . Poté dojde k vyrovnávání teplot z vnitřních příčin, spojené se vzrůstem entropie  $\Delta S_i$ . Úhrnné množství entropie se nezměnilo.



Obr. 3

Uvedený příklad je poněkud "nepřirozený" tím, že se předpokládá počáteční nespojitost teploty v místě styku obou těles. Uskutečňuje-li se vedení tepla uvnitř jednoho tělesa, je rozdělení teploty nerovnoměrné, ale spojitě. Představme si například dlouhou izolovanou tyč jednotkového průřezu (obr. 3), která vede teplo  $q$  [ $J m^{-2} s^{-1}$ ].

Zřejmě

$$Q(z+dz) = Q(z) + \frac{\partial Q}{\partial z} dz, \quad (8.6)$$

takže teplo odevzdané elementu délky  $dz$  za dobu  $dt$  je

$$dQ = Q dt - (Q + \frac{\partial Q}{\partial z} dz) dt = - \frac{\partial Q}{\partial z} dz dt. \quad (8.7)$$

Vnitřní energie za stejnou dobu vzroste o  $\rho (D\varepsilon/Dt) dt dz$ . Deformační práce se nekoná, neboť tyč je bez napětí. Dodané teplo se proto celé promění v přírůstek vnitřní energie. Po krácení součinem  $dt dz$  dá tato podmínka

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (8.8)$$

Tato rovnice vyjadřuje první termodynamický zákon. Entropie v části o délce  $dz$  vzroste o  $\rho (D\Sigma/Dt) dt dz$ , což je dáno přívodem tepla  $dQ$ :

$$\frac{dQ}{T} = \rho \frac{\partial \Sigma}{\partial t} dt dz \quad (8.9)$$

Dosadíme-li z rovnice (8.7) do (8.9), vyjde

$$\oint \frac{D\Sigma}{Dt} = - \frac{1}{T} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (8.10)$$

Tuto rovnici upravíme formálně použitím identity

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q}{T} \right) = \frac{1}{T} \frac{\partial q}{\partial z} - q \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (8.11)$$

na tvar

$$\oint \frac{D\Sigma}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q}{T} \right) - \frac{q}{T^2} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (8.12)$$

Veličina  $(q/T)$  představuje množství entropie prošlé jednotkovým průřezem za jednotku času, tedy tok entropie  $\Phi^*$  [ $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]. Je proto

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q}{T} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \Phi^* \quad (8.13)$$

Podle (3.7) je to změna entropie v elementu o délce  $dz$  působená interakcí s okolím, takže

$$\oint \frac{D\Sigma_e}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial z} \Phi^* \quad (8.14)$$

Pak ovšem

$$\oint \frac{D\Sigma_i}{Dt} = - \frac{q}{T^2} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (8.15)$$

neboť  $\Sigma = \Sigma_e + \Sigma_i$ . Podle druhého termodynamického zákona je poslední výraz nezáporný, takže

$$q \frac{\partial T}{\partial z} \leq 0 \quad (8.16)$$

To znamená, že teplo směřuje proti gradientu teploty. Rovnice (8.12) vyjadřuje zákon zachování entropie, jak ještě ukážeme.

Vyjmeme-li z tělesa objem  $V$  uzavřený povrchem  $S$ , má zákon zachování entropie tvar

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \Sigma dV = - \int_S \vec{\Phi} \cdot d\vec{S} + \frac{D}{Dt} \int_V \rho \Sigma_i dV \quad (8.17)$$

Na levé straně je celková změna entropie v daném objemu za jednotku času. Na pravé straně značí poslední člen přírůstek entropie z vnitřních zdrojů, předchozí člen úbytek entropie výtokem plochou  $S$ . To je část představující interakci s okolím. Podle (2.14)

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \Sigma dV = \int_V \left( \rho \frac{D\Sigma}{Dt} + \Sigma \frac{D\rho}{Dt} + \rho \Sigma \frac{\partial v^i}{\partial z^i} \right) dV. \quad (8.18)$$

Podle (2.16) vymizí poslední dva členy v závorce integrandu, takže

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \Sigma dV = \int_V \rho \frac{D\Sigma}{Dt} dV. \quad (8.19)$$

Obdobný vztah platí i pro poslední člen v rovnici (8.17). Podle Gaussovy věty

$$\int_S \vec{\Phi} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{\Phi} dV. \quad (8.20)$$

S tím nabývá rovnice (8.17) tvaru

$$\int_V \rho \frac{D\Sigma}{Dt} dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{\Phi} dV + \int_V \rho \frac{D\Sigma_i}{Dt} dV. \quad (8.21)$$

Protože tato rovnice musí platit pro jakýkoliv objem  $V$  vyňatý z daného tělesa, musí se rovnat integrandy:

$$\rho \frac{D\Sigma}{Dt} = - \operatorname{div} \vec{\Phi} + \rho \frac{D\Sigma_i}{Dt}. \quad (8.22)$$

Pro jednorozměrný případ vedení tepla má tato rovnice tvar (8.12), jak jsme ukázali.

V termodynamice nevratných změn se předpokládá, že kdekoliv v tělese platí nerovnost

$$\frac{D\Sigma_i}{Dt} \geq 0. \quad (8.23)$$

Rovnost by platila jen pro případ vratné změny nebo rovnováhy. Proti tomu člen

$$\rho \frac{D\Sigma_e}{Dt} = - \operatorname{div} \vec{\Phi}. \quad (8.24)$$

představuje vratnou část změny entropie, která může být nulová, kladná i záporná.

V prostorových souřadnicích  $z^1$ ,  $z^2$ ,  $z^3$  máme

$$\rho \frac{D\Sigma_e}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial z^i} \left( \frac{Q^i}{T} \right) = - \operatorname{div} \left( \frac{\vec{Q}}{T} \right), \quad (8.25)$$

$$\rho \frac{D\Sigma_i}{Dt} = - Q^i \frac{1}{T^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial z^i} = - \frac{1}{T^2} \vec{Q} \cdot \operatorname{grad} T. \quad (8.26)$$

Představuje-li tok entropie  $(\frac{\vec{q}}{T})$  extenzivní veličinu, musí být výraz  $(\text{grad} T / T)$  veličina intenzivní. Jejich součin vytváří změnu entropie podle (8.26).

Tepelný tok  $\vec{q}$  závisí na teplotním gradientu  $\text{grad} T$ . Tuto závislost popisuje Fourierův zákon vedení tepla

$$q^i = -k^{ji} \frac{\partial T}{\partial z^j}, \quad (8.27)$$

v němž  $k^{ji} = k^{ij}$ .

## 9. ZÁKONY TERMOELASTICITY

Nyní jsme již schopni formulovat zákony, které jsou základem výpočtu teplotních pnutí v tělese nebo v soustavách těles.

Předpokládáme, že v nezatíženém tělese není za referenční teploty  $T_0$  žádné napětí. Tento přirozený stav tělesa se může porušit buď změnou teploty nebo deformací vyvolanou vnějším zatížením nebo obojím. Jsou-li posuvy  $u^i$  malé, platí pro deformační tenzor známá rovnice, podrobně odvozená v publikaci vydané k první části semináře:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial z^j} + \frac{\partial u_j}{\partial z^i} \right). \quad (9.1)$$

Mezi tenzorem napjatosti a tenzorem deformace platí vztah (6.9), totiž Duhamelův-Neumannův zákon

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta^{ij} (T - T_0). \quad (9.2)$$

Zákon zachování hmotnosti vyjadřuje rovnice (2.17 a), totiž

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z^j} (\rho v^j) = 0. \quad (9.3)$$

Dále platí Eulerova pohybová rovnice (2.34)

$$\rho \frac{D v^i}{D t} = \frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial z^j} + b^i. \quad (9.4)$$

Zákon zachování energie je vyjádřen rovnicemi (4.11) popř. (4.13). Napíšeme jej ve tvaru

$$\frac{D \Sigma}{D t} = T \frac{D \Sigma}{D t} + \frac{1}{\rho} \sigma^{ij} V_{ij}, \quad (9.5)$$

kde

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial z^j} + \frac{\partial v_j}{\partial z^i} \right). \quad (9.6)$$

Zákon zachování entropie (8.22) zní

$$\rho \frac{D\Sigma}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial z^j} \left( \frac{q^j}{T} \right) - \frac{q^j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial z^j}. \quad (9.7)$$

Dále připojíme Fourierův zákon vedení tepla (8.27)

$$q^i = -k^{ij} \frac{\partial T}{\partial z^j} \quad (9.8)$$

a konečně definici měrného tepla  $C_v$  při nezměněné deformaci

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = - \frac{\partial q^i}{\partial z^i} \quad (\dot{\epsilon}_{ij} = 0). \quad (9.9)$$

Poslední rovnice představuje vazbu mezi teplem dodaným do nějakého objemového elementu a jeho teplotou.

Rovnici (9.7) můžeme upravit do jednoduššího tvaru, obdobného k rovnici (8.10):

$$\rho \frac{D\Sigma}{Dt} = - \frac{1}{T} \frac{\partial q^i}{\partial z^i}. \quad (9.10)$$

Označíme-li materiálovou derivací tečkou, bude

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial \Sigma}{\partial T} \dot{T}, \quad (9.11)$$

neboť entropie je funkcí přetvoření a teploty. Porovnáme-li (9.11) a (5.13), dostaneme

$$\dot{\Sigma} = - \frac{\partial^2 F}{\partial \epsilon_{ij} \partial T} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T}. \quad (9.12)$$

Při nezměněné deformaci ( $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$ ) je tedy  $\dot{\Sigma} = - \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T}$ . Z rovnic (9.9) a (9.10) vyloučíme  $\partial q^i / \partial z^i$ . Vyjde

$$\rho C_v \dot{T} = \rho T \dot{\Sigma} = - \rho T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \dot{T} \quad (9.13)$$

a odtud

$$C_v = - T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}. \quad (9.14)$$

Podle (5.13) a (9.2) je dále

$$\varrho \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = \frac{\partial G^i_j}{\partial T} = -\beta^i_j \quad (9.15)$$

Výrazy (9.14) a (9.15) dosadíme do (9.12) a odtud do (9.10). Dostaneme

$$-\frac{\partial \varrho^i}{\partial z^i} = \varrho C_v \dot{T} + T \beta^i_j \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (9.16)$$

S použitím (9.8) vyjde

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \left( k^{ji} \frac{\partial T}{\partial z^j} \right) = \varrho C_v \dot{T} + T \beta^i_j \dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (9.17)$$

Touto rovnicí můžeme nahradit vztah (9.7).

**Příklad 7.** Jak se mění teplota izolovaného elastického tělesa při jeho přetvoření?

**Řešení:** Probíhá-li deformace rychle, je vedení tepla (alespoň zpočátku) zanedbatelné. Levá strana (9.17) je proto rovna nule. Pro změnu teploty  $\Delta T$  za čas  $\Delta t \rightarrow 0$  pak dostaneme vztah

$$\Delta T = -\frac{T}{\varrho C_v} \beta^i_j \Delta \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Je-li materiál izotropický, je  $\beta^i_j = \beta \delta^i_j$ , takže

$$\Delta T = -\frac{T}{\varrho C_v} \beta \Delta \varepsilon_{ii} = -\frac{T}{\varrho C_v} \beta \frac{\Delta V}{V}. \quad (2)$$

Poměrná změna objemu  $\Delta V/V$  se totiž rovná  $\Delta \varepsilon_{11} + \Delta \varepsilon_{22} + \Delta \varepsilon_{33} = \Delta \varepsilon_{ii}$ . Vzorce (1) resp. (2) odvodil Lord Kelvin.

Podle rovnice (2) nevzniká smykovou pružnou deformací žádná změna teploty. Kdybychom např. chtěli měřit na povrchu nějakého tělesa bezdotykovým způsobem změnu jeho teploty a odtud usuzovat na míru jeho dynamického namáhání, mohli bychom se dopustit vážné chyby. Naše metoda by indikovala pouze tu část deformací, která je spojena se změnou objemu.

**Příklad 8.** Vypočtete změnu teploty při adiabatickém protažení ocelové tyče k mezi pružnosti. Dáno: hustota  $\varrho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ , mez pružnosti  $\sigma = 300 \text{ MN m}^{-2}$ , součinitel délkové roztlačnosti  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , měrné teplo  $C_v = 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , modul pružnosti v tahu  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MN m}^{-2}$ , Poissonovo číslo  $\mu = 0,3$ .

Řešení: Podle šesté kapitoly

$$\beta = \frac{E\alpha}{1-2\mu} \quad (1)$$

Pro změnu objemu při zkoušce tahem máme

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E} (1-2\mu), \quad (2)$$

takže Kelvinův vzorec (2) ze 7.příkladu dá

$$\Delta T = -\frac{T}{\rho C_V} \cdot \frac{E\alpha}{1-2\mu} \cdot \frac{1-2\mu}{E} \sigma = -\frac{T\alpha\sigma}{\rho C_V} \quad (3)$$

Za normální teploty 20 °C je  $T \approx 293$  K, takže

$$\Delta T = -\frac{(293) \cdot (1,2 \cdot 10^{-5}) \cdot (300 \cdot 10^6)}{(7800) \cdot (461)} \approx 0,29 \text{ K.}$$

Teplota tedy poklesne asi o tři desetiny stupně.

Příklad 9. Odvoďte vztah mezi adiabatickým a izotermickým modulem pružnosti v tahu pro izotropický materiál.

Řešení: Izotermické protažení zkušební tyče nahradíme adiabatickým, při němž teplota poklesne o hodnotu

$$\Delta T = -\frac{T\alpha\sigma}{\rho C_V} \quad (1)$$

Dodatečným vyrovnáním teplot vznikne při nezměněném tahovém namáhání poměrné prodloužení  $\propto |\Delta T|$ . Označíme-li adiabatický modul pružnosti  $E^*$ , bude

$$\frac{\sigma}{E^*} = \frac{T\alpha\sigma}{\rho C_V} \cdot \alpha = \frac{\sigma}{E} \quad (2)$$

takže

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E} - \frac{T\alpha^2}{\rho C_V} \quad (3)$$

Adiabatický modul pružnosti  $E^*$  je proto vždy větší než izotermický  $E$ . Pro ocel za normální teploty máme s hodnotami z předchozího příkladu

$$\frac{E^*}{E} = 1 + \frac{T\alpha^2 E^*}{\rho C_V} =$$

$$\approx 1 + \frac{(293) \cdot (1,2 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (2,1 \cdot 10^{11})}{(7800) \cdot (461)} = 1,0025.$$

Z posledních dvou příkladů je zřejmé, že u oceli lze v praktických úlohách většinou zanedbat vazbu mezi deformační rychlostí a změnou teplotního pole. Tato vazba však má rozhodující význam při výzkumu vnitřního tlumení, neboť vedení tepla mezi různými částmi tělesa představuje nevratný děj a způsobuje disipaci mechanické energie. Uplatní se také při plastických deformacích, kdy se nevratná část deformační práce mění v teplo.

## 10. TERMODYNAMICKÉ KRITÉRIUM PRO ŠÍŘENÍ TRHLINY

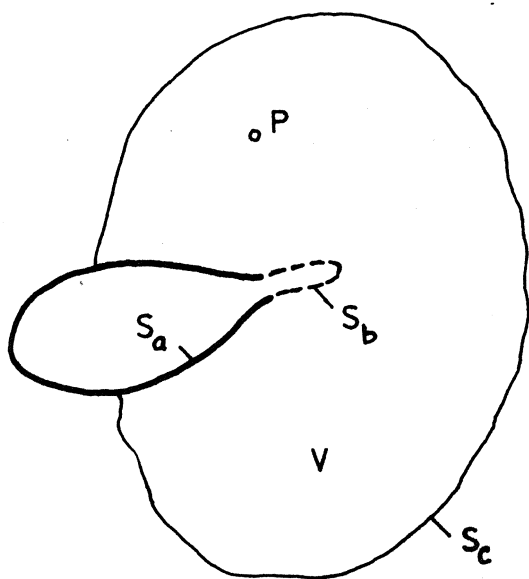
Existuje-li v dokonale pružném, obecně zatíženém tělese "ostrá" trhlinka, vzniká na jejím konci teoreticky nekonečné napětí, takže teorie pružnosti neumožňuje formulovat obvyklou podmínku pevnosti, že totiž největší napětí nepřesáhne dovolenou hodnotu. Protože pevnost tělesa s trhlinou není nulová, je zřejmé, že tuto "lokální" pevnostní podmínku musíme nahradit nějakým jiným, "globálním" kritériem, zahrnujícím do úvahy nejen kořen trhliny, ale i napjatost a deformaci v jeho okolí. První teorie tohoto druhu pochází od Griffithe (1920) a vychází z prvního termodynamického zákona.\*)

Kritérium pro šíření trhliny se zakládá na pozorování, že šíření trhliny je vždy spojeno s disipací (rozptylem) energie, a to i u dokonale pružného tělesa. Ztráta mechanické energie při šíření trhliny vzniká tím, že vnitřní síly udržující celistvost tělesa klesají při rozšiřování trhliny k nule, přičemž působí proti posuvům obou "břehů" trhliny, takže konají zápornou práci. Mechanická práce se tedy při šíření trhliny z tělesa odnímá. Griffith předpokládal, že se tato energie změní v povrchovou energii potřebnou k vytvoření nového povrchu. Dokázal, že povrchová energie se rovná povrchovému napětí, které je běžně známé u kapalin, avšak existuje i u pevných látek. Griffithova domněnka se skutečně potvrzuje u křehkých látek. U běžných konstrukčních kovových materiálů se však tato energie spotřebuje převážně na plastické deformace v malém objemu v okolí čela trhliny a jen ve zcela malé míře i na vznik povrchového napětí. Trhlinka se tedy může šířit jen tehdy, když energie odnímaná trhlinou z tělesa může být nahrazena z nějakého zdroje. Přitom je třeba uvážit všechny druhy energie, které se mohou při deformaci a porušení poddajného tělesa uplatnit.

---

\*) A. A. GRIFFITH (1893 až 1963), všestranný anglický badatel, činný zvláště v letectví.





Obr. 4

V této kapitole se omezíme na případ křehkého lomu homogenního, izotropického a lineárně pružného tělesa. Vyjmeme z něho oblast  $V$ , obklopující ostrý konec trhliny (obr. 4). Hranici této oblasti tvoří plocha  $S_c$ . Trhlina má povrch  $S_a$  a rozšíří se o nový povrch  $S_b$ . Na rozdíl od ostatních ploch závisí  $S_b$  na čase.

Předpokládáme, že oblast  $V$  je tak veliká, že jí trhlina neprotrhne, alespoň ne v čase, v kterém trhlinu sledujeme. Nechť  $P$  je obecný bod tělesa v objemu  $V$ . Jeho posuv má složky  $u^i = u^i(P, t)$ , jeho rychlost je  $v^i = \dot{u}^i(P, t)$ . Objemový element v bodě  $P$  označíme  $dV$ . Kinetická energie ve sledované oblasti  $V$  je podle (4.1)

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2} \int_V \rho v^i v_i dV, \quad (10.1)$$

kde  $\rho$  značí hustotu a  $v^i v_i = \vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$  skalární součin (druhou mocninu rychlosti). Vnitřní energie vyjde podle (4.2) a (4.12)

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_V G^{ij} \epsilon_{ij} dV, \quad (10.2)$$

neboť teplo nepřivádíme ( $dQ = 0$ ). Pro výkon povrchových a objemových sil platí (4.5), takže

$$\frac{DA}{Dt} = \int_V \left( \frac{\partial (G^{ij} v_i)}{\partial z^j} + X^i v_i \right) dV. \quad (10.3)$$

Odnímá-li trhlina během šíření výkon  $N$ , je celková bilance zúčastněných energií dána rovnicí

$$N = \frac{DA}{Dt} - \frac{D\mathcal{K}}{Dt} - \frac{DU}{Dt}. \quad (10.4)$$

Přitom

$$N = \frac{D}{Dt} \int_{S_b} \gamma dS, \quad (10.5)$$

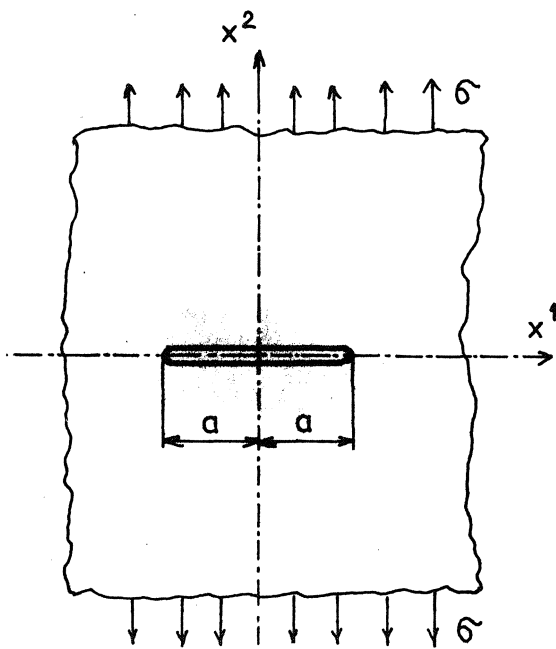
kde  $\gamma$  je energie spotřebovaná trhlinou při vzniku nové lomové plochy o jednotkové velikosti.

Je-li rovnice (10.4) splněna, může se trhlina šířit, jinak nikoliv. Výpočet jednotlivých členů v rovnici (10.4) je obecně obtížný. Zjednoduší se, považujeme-li celý děj za kvazistatický ( $\mathcal{K} = 0$ ). Někdy můžeme zanedbat i práci přiváděnou do oblasti vnějšími silami během šíření trhliny ( $A = \text{konst}$ ). Energie spotřebovaná šířící se trhlinou je pak kryta pouze úbytkem vnitřní energie. Ve skutečnosti je šíření trhliny dynamickým dějem, při němž vznikají napěťové vlny provázené zvukovými efekty. Avšak i zjednodušená teorie dala v mnoha případech uspokojující výsledky a vysvětlila zdánlivě paradoxní vznik náhlých lomů velkých konstrukcí (lodí, mostů, komínů) za poměrně malé úrovně jmenovitého namáhání.

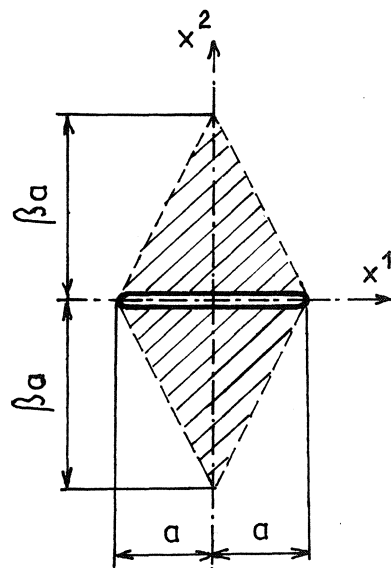
## 11. GRIFFITHOVA TEORIE KŘEHKÉHO LOMU

Představme si značně velkou, ale tenkou desku namáhanou na vzdálených okrajích tahovým napětím  $\sigma^{22} = \sigma$  (obr. 5). Uprostřed desky je ve směru kolmém k tomuto napětí trhlina o délce  $2a$ . Deska je dokonale pružná a ve stavu rovinné napjatosti. Kdyby v desce neexistovala trhlina, byla by v ní vnitřní energie

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon dV = \frac{1}{2} E \epsilon^2 V = \frac{1}{2E} \sigma^2 V \quad (11.1)$$



Obr. 5



Obr. 6

Trhlina způsobí odlehčení oblasti, kterou si můžeme přibližně představit jako rovnoběžník vyznačený šrafováním na obr. 6, jehož plocha je  $2\beta a^2$ . Budeme předpokládat, že deska je tepelně izolována a že na počátku šíření trhliny bude možné vedení tepla zanedbat. Půjde tedy o adiabatický děj, takže vnitřní energie (11.1) má význam deformační energie a modul pružnosti  $E$  přísluší adiabatické změně. Existence trhliny pak způsobí úbytek této deformační energie

$$U_1 = \frac{1}{2E} \sigma^2 2\beta a^2 h, \quad (11.2)$$

kde  $h$  je tloušťka desky. Zvětší-li se nyní délka trhliny  $2a$  o hodnotu  $2\delta a$ , zvětší se úbytek energie o

$$\delta U_1 = \frac{\partial U_1}{\partial a} \delta a = \frac{1}{E} \cdot 2\beta \sigma^2 h a \delta a. \quad (11.3)$$

Uvolněná energie  $\delta U_1$  se spotřebuje na vytvoření nového povrchu o velikosti  $4h\delta a$  (neboť část trhliny o délce  $\delta a$  má dva povrchy, každý z nich o velikosti  $h\delta a$ ). Příklad-li na jednotku plochy nového povrchu měrná povrchová energie  $\gamma$  [ $\text{J m}^{-2}$ ], případně na celý nový povrch  $\delta U_2 = 4\gamma h\delta a$ . Z podmínky  $\delta U_2 = \delta U_1$  dostaneme

$$4h\delta a\gamma = \frac{1}{E} 2\beta \sigma^2 h a \delta a. \quad (11.4)$$

Odtud najdeme napětí  $\sigma = \sigma_p$ , při němž se může začít trhlina šířit; vyjde

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\beta a}}. \quad (11.5)$$

Toto napětí charakterizuje pevnost desky s trhlinou a může být podstatně menší než mez pevnosti zjišťovaná na bezvadných zkušebních tyčích při zkoušce tahem.

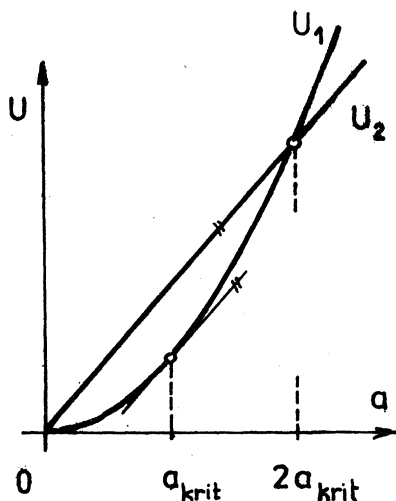
Součinitel  $\beta$  jsme dosud neurčili. Vyšrafovaná plocha idealizovaného tvaru na obr. 6 značí jakýsi "stín" v poli napjatosti. Napjatost bude ve skutečnosti nerovnoměrná, avšak spojitá. Z přesných výpočtů změny deformační energie vyjde  $\delta U_1 = 2\pi \sigma^2 h a \delta a / E$ , takže  $\beta = \pi$ . Pro rovinnou napjatost ( $\epsilon_{33} = 0$ ) tedy máme

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a}}. \quad (11.6)$$

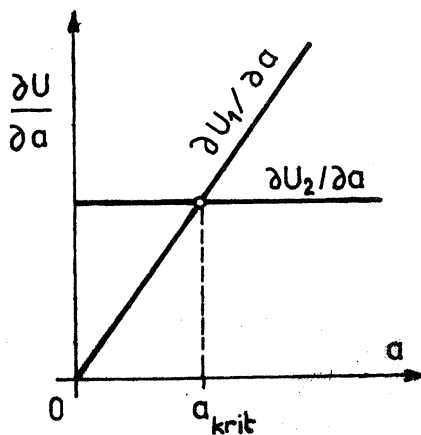
Obdobně by vyšlo pro rovinné přetvoření ( $\epsilon_{33} = 0$ )

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi(1-\mu^2)a}}. \quad (11.7)$$

Na obr. 7 je znázorněn průběh povrchové energie  $U_2 = 4h\gamma a$  a úbytku deformační energie vlivem trhliny  $U_1 = \pi\sigma^2 h a^2 / E$  v závislosti na poloviční délce trhliny  $a$  (při konstantním  $\sigma$ ). Má-li trhlina kritickou délku, platí rovnost  $\delta U_1 = \delta U_2$ . Pak je také  $\partial U_1 / \partial a = \partial U_2 / \partial a$  (obr. 8). Tyto derivace představují v přeneseném slova smyslu "rychlost", s jakou je uvolňována (resp. spotřebovávána) deformační (resp. povrchová) energie.



Obr. 7



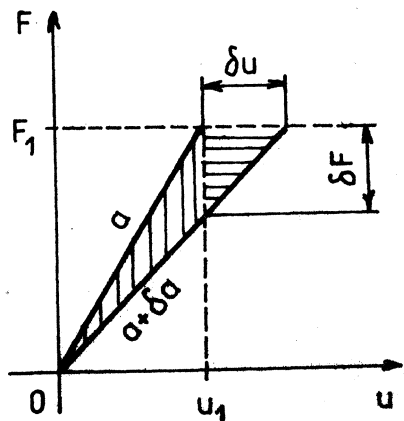
Obr. 8

Rozebereme ještě vliv způsobu upnutí desky do zkušebního stroje. Protože jde o pružné těleso, je oddálení čelistí stroje  $u$  úměrné působící síle  $F$ , takže

$$u = CF. \quad (11.8)$$

Konstanta  $C$ , která charakterizuje poddajnost desky, závisí na délce trhliny  $2a$ , takže  $C = C(a)$ . Změní-li se tato délka, změní se i poddajnost. Bude

$$C(a + \delta a) = C + \frac{\partial C}{\partial a} \delta a. \quad (11.9)$$



Obr. 9

Z pouhého názoru je zřejmé, že derivace  $\partial C / \partial a$  musí být kladná (tuhost tělesa s rostoucí trhlinou klesá k nule, poddajnost tedy roste k nekonečnu). Závislost  $F(u) = u / C(a)$  bude proto různá pro různě dlouhou trhlinu, jak je vyznačeno na obr. 9. Nastane-li šíření trhliny při nehybných čelistech ( $u = u_1 = \text{konst}$ ), bude rozdíl deformační práce  $\delta U_1$  způsobený zvětšením trhliny dán visle vyšrafovanou plochou

$$\delta U_1 = \frac{1}{2} u_1 \delta F. \quad (11.10)$$

Kdyby byla naopak udržována konstantní síla  $F_1$  (např. velkou "pruživostí" zkušebního stroje), byla by práce  $\delta U_1$  větší o vodorovně šrafovaný trojúhelník

$$\Delta = \frac{1}{2} \delta u \cdot \delta F. \quad (11.11)$$

Je-li  $\delta a$  nekonečně malá veličina prvního řádu, je také práce  $\delta U_1$  nekonečně malou veličinou prvního řádu, jak je zřejmé z rovnice (11.3). Avšak  $\Delta$  podle (11.11) je malá veličina druhého řádu, takže rozdíl v obou případech lze v limitě zanedbat. Vzorce (11.6) i (11.7) tedy platí jak pro velmi tuhé, tak pro velmi pružné uchycení okrajů desky.

Z obr. 9 je zřejmé, že úbytek deformační energie při  $u = u_1 = \text{konst}$

$$\delta U_1 = \frac{1}{2} u_1 \cdot \delta F \quad (11.12)$$

je v limitě pro  $\delta F \rightarrow 0$  stejně velký jako úbytek celkové potenciální energie při  $F = F_1 = \text{konst}$ , totiž

$$\delta U_1^* = F_1 \delta u - \frac{1}{2} F_1 \delta u = \frac{1}{2} F_1 \delta u = \delta U_1 + \Delta. \quad (11.13)$$

Rovnost

$$\delta U_1 = \delta U_1^* \quad (11.14)$$

platí jen pro začátek šíření trhliny, kdy  $\delta u \rightarrow 0$ ,  $\delta F \rightarrow 0$ ,  $\Delta / \delta U_1 \rightarrow 0$

## 12. PODDAJNOST TĚLES S TRHLINOU

Griffithova teorie se omezuje na křehká tělesa, u nichž se při šíření trhliny spotřebuje každou jednotkou nově vzniklé lomové plochy měrná povrchová energie  $\gamma$ . U tohoto předpokladu zatím zůstaneme. Později však své úvahy zobecníme i na kvazikřehká tělesa, u nichž má spotřebovaná energie jiný význam.

Ze srovnání povrchové energie  $\delta U_2 = 4\gamma h \cdot \delta a$  s uvolněnou potenciální energií  $\delta U_1^*$  podle (11.13) dostaneme

$$4\gamma h \delta a = \frac{1}{2} F_1 \delta u \quad (12.1)$$

Podle (10.8)

$$\delta u = F_1 \delta C = F_1 \frac{\partial C}{\partial a} \delta a, \quad (12.2)$$

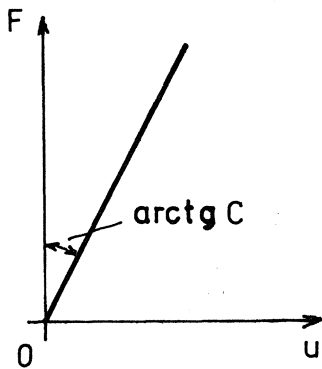
takže

$$4 \gamma h = \frac{1}{2} F_1^2 \frac{\partial C}{\partial a} \quad (12.3)$$

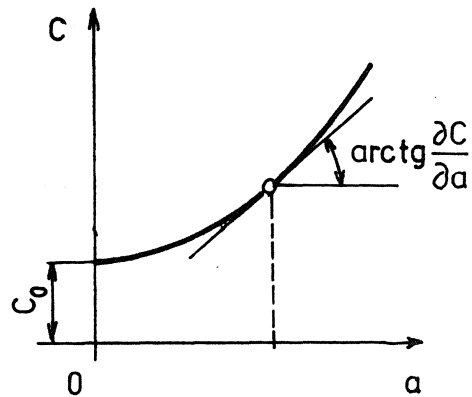
Odtud můžeme vypočítat měrnou povrchovou energii  $\gamma$ , změříme-li poddajnost tělesa při různé délce trhliny a stanovíme derivaci  $\partial C / \partial a$ . Vyjde

$$\gamma = \frac{F_1^2}{8h} \cdot \frac{\partial C}{\partial a} \quad (12.4)$$

Význam poddajnosti  $C$  je zřejmý z rovnice (11.8) a obr. 10. Závislost  $C(a)$  je schematicky zakreslena na obr. 11. Síla  $F_1$  je kritická síla, při níž se počne šířit trhlina o délce  $2a$ .



Obr. 10



Obr. 11

Tato metoda určení povrchové energie je velmi náročná na přesnost měření a na pečlivou přípravu experimentů. Je třeba měřit skutečně jen relativní posuvy bodů tělesa v místech blízkých působistům sil, avšak tak, aby se vyloučil vliv poddajnosti podpor i vliv případných plastických deformací v působistích osamělých sil.

Kdyby platily ideální podmínky, za jakých jsme úlohu řešili, byla by kritická síla pro desku podle obr. 5

$$F_1 = G_p \cdot B h, \quad (12.5)$$

kde  $B$  je šířka desky (předpokládáme, že velká),  $h$  její tloušťka. Pak podle (12.4) a (11.6)

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{4\pi}{B^2 h E} \cdot a. \quad (12.6)$$

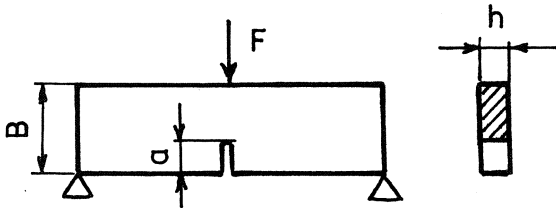
Integrací dostaneme

$$C = \frac{2\pi}{B^2 h E} a^2 + C_0 \quad (12.7)$$

To znamená, že křivka na obr. 11 by byla parabola. Hodnota  $C_0$  je poddajnost desky bez trhliny.

Stejného postupu lze užít i pro tělesa jiných tvarů a jinak zatížená, než jaká jsme dosud uvažovali. Rovnici (12.1) je pak ovšem nutné podle okolností upravit (viz následující příklad).

U velmi křehkých těles je energie potřebná k šíření trhliny - tedy k vytvoření nové lomové plochy - dána převážně povrchovým napětím. O tomto napětí se původně předpokládalo, že existuje jenom u kapalin. Griffith však dokázal jeho existenci u pevných látek a dokonce stanovil jeho hodnotu u skla. \*) U běžných kovových materiálů se mnohem více než povrchové napětí uplatňuje plastická deformace, která vzniká ve větším nebo menším okolí kořene trhliny. Způsobuje nápadný vzrůst energie potřebné k vytvoření nového povrchu ve srovnání s povrchovou energií (s povrchovým napětím), a to i u zdánlivě křehkých lomů. Takové lomy označujeme jako kvazikřehké. O vlivu plastických deformací pojednáme později. Pak budeme moci zobecnit i poznatky z této kapitoly, a to velmi jednoduchým obratem. Místo měrné povrchové energie dosadíme měrnou energii spotřebovanou plastickými deformacemi u kořene trhliny. Tato energie se už nemění v povrchové napětí, ale v teplo.



Obr. 12

Příklad 10. Navrhněte způsob zjišťování měrné povrchové energie při zkoušce ohybem tyče obdélníkového průřezu podle obr. 12.

Řešení: Bude-li  $u$  posuv působící síly  $F$ , můžeme napsat vztah

$$u = C(a) \cdot F. \quad (1)$$

Pro změnu tohoto posuvu při změně délky trhliny  $a$  o  $\delta a$  dostaneme

$$\delta u = \frac{\partial C}{\partial a} \delta a \cdot F. \quad (2)$$

Deformační práce vykonaná silou  $F$  při změně délky trhliny  $a$  o  $\delta a$  se bude rovnat přírůstku povrchové energie, tj.

\*)  $0,55 \text{ N m}^{-1} = 0,55 \text{ J m}^{-2}$ .

$$F_1 \delta u = 2\gamma h \delta a. \quad (3)$$

S použitím (2) vyjde z poslední rovnice

$$\gamma = \frac{1}{2h} F_1^2 \frac{\partial C}{\partial a}. \quad (4)$$

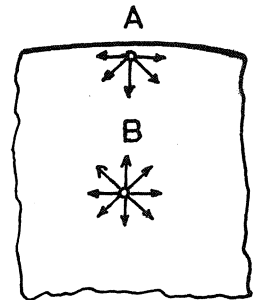
Je to úplná obdoba vzorce (12.4).

**Příklad 11.** Ukažte, že měrná povrchová energie se rovná povrchovému napětí.

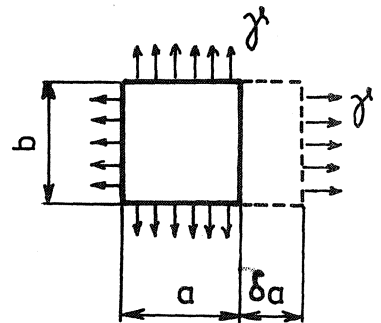
**Odpověď:** Povrchové napětí souvisí s tím, že molekuly blízko povrchu jsou vystaveny jednostrannému působení intermolekulárních sil (srovnej bod A na obr. 13 s vnitřním bodem B). Proto má povrchová vrstva odlišné vlastnosti a jeví se tak, jako by byla předepjata určitým napětím. Lze si představit, že na povrchu existuje fiktivní, velmi tenká blána, tak předepjatá, že na délkovou jednotku myšleného řezu připadá tahová síla  $\gamma$  [ $\text{N m}^{-1}$ ] (obr. 14). Tato veličina se nazývá "povrchové napětí". Předpokládáme, že je konstantní (obdobně jako u kapalin, kde to lze snadno experimentálně prokázat). Z povrchové blány nyní vyjmeme obdélník  $a \times b$  podle obr. 14. Zvětší-li se povrch tím, že se obdélník roztáhne tak, že strana  $a$  se změní o přírůstek  $\delta a$ , vykoná síla  $\gamma b$  na dráze  $\delta a$  práci  $\gamma b \delta a$ . To je však práce spotřebovaná na vytvoření nového povrchu  $b \delta a$ . Měrná povrchová energie tedy je

$$(\gamma b \delta a) / (b \delta a) = \gamma.$$

Rovná se povrchovému napětí, což jsme měli ukázat.



Obr. 13

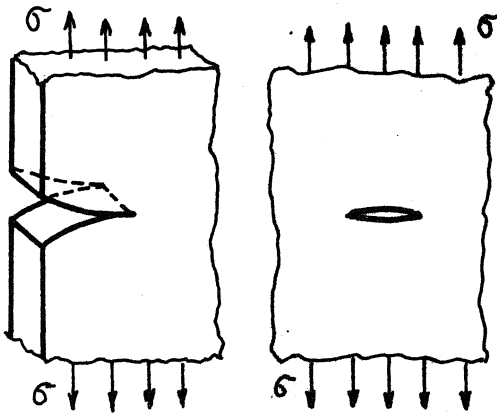


Obr. 14

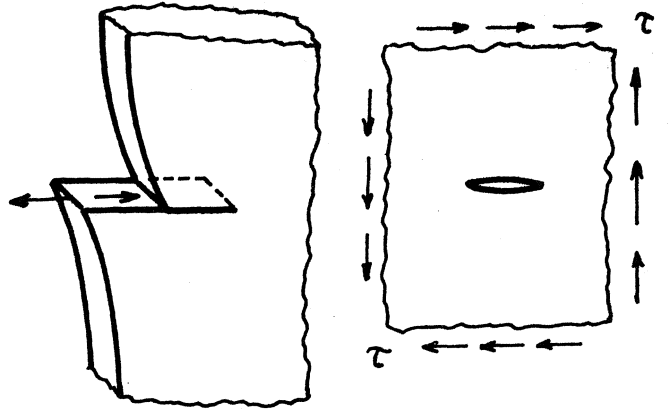
### 13. SOUČINITELE INTENZITY NAPĚTÍ

Existují tři základní typy šíření trhlin v pružných i obecně poddajných tělesech, a to trhlina vzniklá štěpením (obr. 15), trhlina vzniklá skluzem (smykem, viz obr. 16) a trhlina vzniklá stříhem (obr. 17). Na levé straně těchto obrázků je zachycen stav šíření trhliny z okraje tělesa (desky), na pravé straně je trhlina uvnitř tělesa.

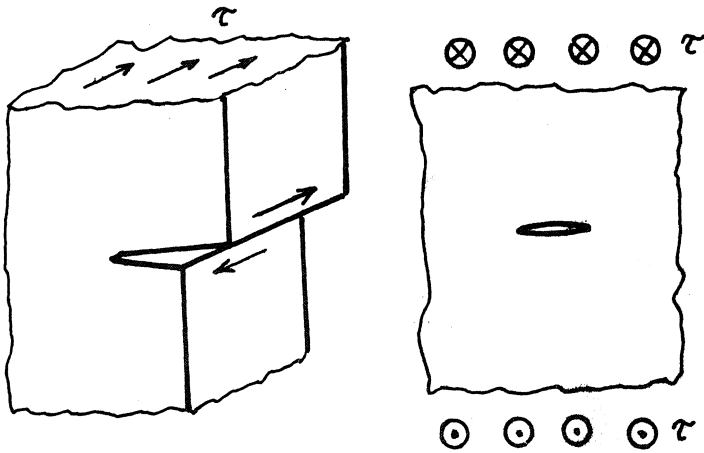




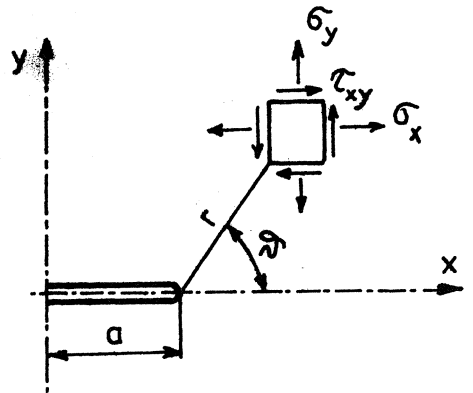
Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17



Obr. 18

Z teoretických rozborů elastické napjatosti vyplývá, že v homogenním izotropickém tělese vzniká v kořenu trhliny daného typu vždy stejný druh singularity. Zvolíme-li např. na konci trhliny podle obr. 5 (což je typ shodný s obr. 15 vpravo) polární souřadnice  $r$ ,  $\varphi$  podle obr. 18, můžeme napjatost v blízkém okolí kořene trhliny ( $r \ll a$ ) vyjádřit řadami, v nichž je dominantní vždy jediný člen, a to

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) + \dots \\ \sigma_y &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) + \dots \\ \tau_{xy} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Označíme-li

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (13.2)$$

je napětí  $\sigma_y$  v řezu  $v = 0$  dáno vzorcem

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + \dots \quad (v = 0). \quad (13.3)$$

Zřejmě  $\sigma_y \rightarrow \infty$  pro  $r \rightarrow 0$ .

Pro druhý typ trhliny podle obr. 16 vyjde, že smykové napětí  $\tau_{xy}$  v lomové rovině před trhlinou je

$$\tau_{xy} = \tau \sqrt{\frac{a}{2r}} + \dots \quad (v = 0). \quad (13.4)$$

S označením

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (13.5)$$

vyjde

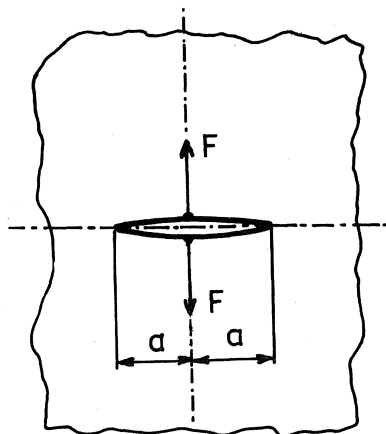
$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} + \dots \quad (v = 0). \quad (13.6)$$

Pro třetí typ trhliny podle obr. 17 dostaneme obdobně vzorec

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} + \dots \quad (v = 0), \quad (13.7)$$

je-li

$$K_{IV} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (13.8)$$



Obr. 19

Je velmi zajímavé, že typ singularity se nemění, i když změníme způsob zatížení. Kdybychom například u prvního typu trhliny podle obr. 15 vpravo rozvírali trhlinu dvěma osamělými silami  $F$  [ $N \cdot m^{-1}$ ] působícími na břehy trhliny v počátku soustavy souřadnic podle obr. 19, dostali bychom teoretickým rozбором pro napětí  $\sigma_y$  v okolí trhliny vzorec

$$\sigma_y = \frac{K_F}{\sqrt{2\pi r}} + \dots \quad (v = 0), \quad (13.9)$$

kde však

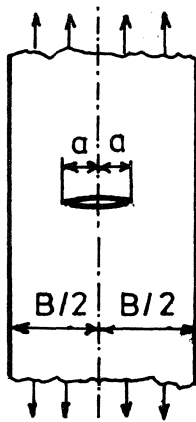
$$K_F = \frac{F}{\sqrt{\pi a}} \quad (13.10)$$

Singularita je tedy opět typu  $K/\sqrt{2\pi r}$  ( $r \rightarrow 0$ ). Veličina  $K$  [ $N m^{-\frac{3}{2}}$ ] se nazývá součinitel intenzity napětí. Ze vzorců (13.2), (13.5), (13.8) a (13.10) je zřejmé, že stejné hodnoty součinitele intenzity napětí - a tedy i stejné napjatosti v nejbližším okolí kořene ostré trhliny - lze dosáhnout při různých kombinacích působícího zatížení a délky trhliny (můžeme např. zvětšit délku trhliny a zároveň změnit zatížení tak, aby se součinitel intenzity napětí nezměnil). Součinitel intenzity napětí závisí obecně na délce trhliny, na tvaru tělesa a na způsobu jeho zatížení a konečně na velikosti působících sil. Uvedeme několik vzorců pro výpočet součinitele intenzity napětí, odvozených z teorie pružnosti.

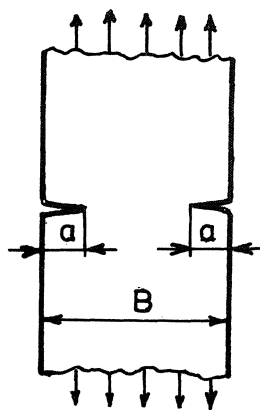
Máme-li trhlinu prvního typu uprostřed pásu konečné šířky (obr. 20), vyjde

$$K_I = \sigma \sqrt{B \operatorname{tg} \left( \frac{\pi a}{B} \right)} \quad (13.11)$$

Napětí  $\sigma$  se zde vztahuje na zmenšený průřez  $(B - 2a)$ .



Obr. 20



Obr. 21

Jde-li o dvě souměrné vnější trhliny (obr. 21), bude

$$K_I = \sigma \sqrt{B \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi a}{B} \right) + 0,1 \sin \left( \frac{2\pi a}{B} \right) \right]} \quad (13.12)$$

Také zde počítáme napětí  $\sigma$  jako podíl tahové síly a zeslabeného průřezu.

Pro trhlinu délky  $a$  na hraně polonekonečné desky platí vztah

$$K_I = 1,12 \sigma \sqrt{\pi a} \quad (13.13)$$

popř. pro třetí typ

$$K_{III} = \tau \sqrt{\pi a} . \quad (13.14)$$

Pro penízkovitou trhlinu o poloměru  $a$  v nekonečném tělese orientovanou kolmo k tahovému napětí  $\sigma$  vyjde

$$K_I = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} . \quad (13.15)$$

Ve všech těchto případech má napětí v lomové rovině bezprostředně před kořenem trhliny teoretickou hodnotu  $K/\sqrt{2\pi r}$ . To znamená, že pro  $\lim_{r \rightarrow 0}$  nabývá napětí nekonečné hodnoty, ale jeho součin s činitelem  $\sqrt{2\pi r}$  zůstává konečný. Např. pro první typ trhliny platí, že v řezu  $\nu = 0$

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y \sqrt{2\pi r} < \infty . \quad (13.16)$$

Poznamenejme, že definice součinitele intenzity napětí není v literatuře jednotná. Na to je třeba při aplikacích dávat pozor. Název pochází od G. R. IRWINA, který tak původně označil výraz  $K^* = K/\sqrt{\pi}$ . Pak by ovšem měla singulární část napjatosti tvar  $K^*/\sqrt{2r}$ .

Příklad 12. Vypočtěte součinitel intenzity napětí pro trhlinu podle obr. 20, je-li  $\sigma = 100 \text{ MN m}^{-2}$ ,  $B = 5 \text{ cm}$ ,  $a = 0,5 \text{ mm}$ .

Řešení: Podle vzorce (13.11)

$$K_I = = 10^8 \sqrt{0,05 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi \cdot 0,0005}{0,05} \right)} \doteq 3,97 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-\frac{3}{2}} .$$

Příklad 13. Dokažte, že vzorec (13.11) přejde do tvaru (13.2), jestliže  $B \rightarrow \infty$ .

Řešení: Protože

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3 \cdot 5} x^5 + \dots \quad \text{pro } |x| < \frac{\pi}{2} ,$$

máme podle (13.11) pro  $a < B/2$

$$K_I = \sigma \sqrt{B} \sqrt{\left( \frac{\pi a}{B} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\pi a}{B} \right)^3 + \dots} .$$

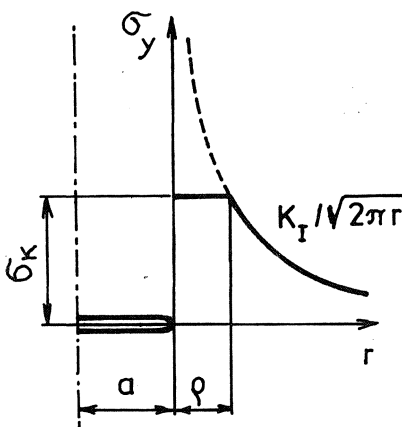
v limitě  $B \rightarrow \infty$  je  $(\pi a/B) \rightarrow 0$ , takže

$$K_I \doteq G \sqrt{B} \sqrt{\frac{\pi a}{B} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi a}{B}\right)^2 + \dots}} \doteq G \sqrt{\pi a}$$

#### 14. PLASTICKÉ DEFORMACE PŘED ČELEM TRHLINY

Je-li oblast plastických deformací velmi malá, lze její velikost odhadnout přibližnou úvahou. V takovém případě můžeme totiž předpokládat, že "porucha" elastické napjatosti se omezuje jen na velmi malou oblast v okolí kořene trhliny, takže např. u prvního typu trhliny je stále ještě možno psát, že mimo plastickou oblast přibližně platí vztah

$$\sigma_y \approx \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (\vartheta = 0) \quad (14.1)$$



Obr. 22

Hodnota  $K_I$  však může být vlivem plastických deformací poněkud pozměněná. V bezprostředním okolí kořene trhliny dochází k plastickým deformacím, při nichž napětí nedosahuje hodnot, jaké předvídá vztah (14.1), neboť je omezeno podmínkou plasticity. Předpokládejme nejprve, že hodnota součinitele intenzity napětí se změnila jen neznatelně a že plastická oblast zasahuje v rovině lomové plochy  $y = 0$  až do vzdálenosti  $\rho$  od kořene trhliny (obr. 22). Bude-li vztah (14.1) platit pro  $r \geq \rho$ , kdežto v intervalu  $0 \leq r \leq \rho$  bude  $\sigma = \sigma_k$ , musí být  $\sigma_y(r=\rho) = \sigma_k$  (na hranici plastické oblasti nepředpokládáme nespojitost tohoto napětí).

Podle (14.1) tedy bude

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}} = \sigma_k \quad (14.2)$$

a odtud

$$\rho = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_k^2} \quad (14.3)$$

Předpoklad konstantního napětí  $\sigma_y$  v plastické oblasti bude splněn spíše pro rovinnou napjatost než pro rovinné přetvoření. V tomto druhém případě bude rozsah plastické oblasti v rovině lomové plochy poněkud menší než jak

vychází podle vztahu (14.3). K tomu se vrátíme později. Zatím budeme předpokládat, že jde o rovinnou napjatost.

Kdyby těleso bylo dokonale pružné, přenesla by se domněle plastickou oblastí  $0 \leq r \leq \rho$  síla

$$F = h \int_0^{\rho} \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_I h \sqrt{\rho}, \quad (14.4)$$

kde  $h$  je tloušťka desky. Dosadíme-li (14.3) do (14.4), dostaneme

$$F = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_I h \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{k_I}{G_k} = \frac{k_I^2}{\pi G_k} h. \quad (14.5)$$

S použitím vztahu (14.3) odtud vyjde

$$F = 2G_k \rho h, \quad (14.6)$$

Je-li však těleso pružno-plastické a v intervalu  $0 \leq r \leq \rho$  je napětí rovno mezi kluzu  $G_k$ , přenesse se v plastické oblasti síla

$$P = G_k \rho h = \frac{1}{2} F, \quad (14.7)$$

tedy poloviční. Je proto zřejmé, že podmínka rovnováhy vnitřních a vnějších sil nebude silou  $P$  splněna, takže plastická oblast bude zasahovat patrně do větší vzdálenosti než  $\rho$  podle (14.3). Zhruba můžeme předpokládat, že zasáhne do dvojnásobné vzdálenosti

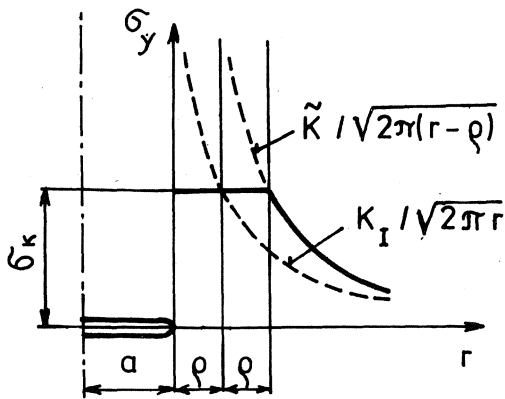
$$\rho_k = 2\rho = \frac{k_I^2}{\pi G_k^2}. \quad (14.8)$$

Průběh napětí  $\sigma_y$  se tím rovněž poněkud změní, avšak změna postihne především nejbližší okolí plastické oblasti. V pružné oblasti bude i nadále přibližně platit rovnice (14.1), jestliže tam dosadíme opravený součinitel intenzity napětí  $\tilde{k}$  odpovídající jmenovité délce trhliny ( $a + \rho$ ), tedy

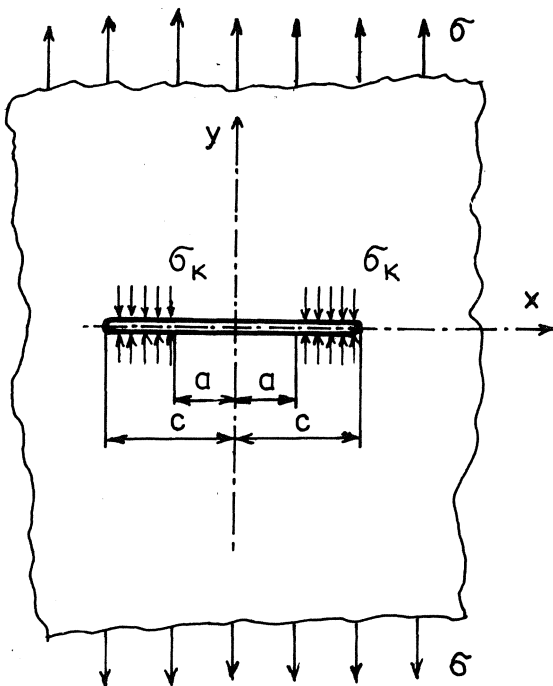
$$\sigma_y = \frac{\tilde{k}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \tilde{k} = G \sqrt{\pi(a+\rho)}. \quad (14.9)$$

Opravený, ovšem také idealizovaný průběh napětí  $\sigma_y$  v rovině  $y = 0$  je zakreslen na obr. 23. Ve skutečnosti nebude rovnice (14.9) přesně platit a ani napětí v plastické oblasti nebude konstantní. Vlivem toho, že napjatost v desce konečné tloušťky není ideálně rovinná, se bude napětí  $\sigma_y$  v závislosti na  $r$  poněkud měnit i v intervalu  $0 \leq r \leq 2\rho$ , a to zvláště u tlustých deskách a u materiálů, které se plastickým tvářením zpevňují.

Jde-li o rovinnou napjatost ( $\sigma_z = 0$ ), má řez plastickou oblastí v okolí kořene trhliny ledvinovitý tvar a v rovině  $y = 0$  má rozsah



Obr. 23



Obr. 24

přibližně daný rovnicí (14.8). U rovinného přetvoření ( $\epsilon_z = 0$ ) je plastická oblast protáhlá ve směrech  $\varphi = 70^\circ$  resp.  $\varphi = -70^\circ$  a v rovině  $y = 0$  má rozsah asi třikrát menší než podle (14.8).

Podrobnější teorii o vlivu plastických deformací vypracovali M. Ja. LEONOV a V. V. PANASJUK (1959) a nezávisle na nich D. S. DUGDALE (1960). Tito autoři předpokládali, že v oblastech  $a < |x| < c$  působí konstantní napětí  $\sigma_k$ , přičemž  $a$  je poloviční délka trhliny. Napjatost však počítali tak, jako by celé těleso bylo dokonale pružné a mělo trhlínu o délce  $2c$ , svíranou však v intervalech  $a < |x| < c$  napětím  $\sigma_k$  připojeným k oběma břehům trhliny (obr. 24).

Je-li pružná deska s trhlínou o délce  $2c$  zatížena pouze napětím  $\sigma_k$  na březích trhliny podle obr. 24 (a tedy nikoliv tahovým napětím  $\sigma$ ), vychází pro oblast  $c \gg r > 0$ ,  $r = x - c$  výpočtem z teorie pružnosti napětí v řezu  $y = 0$

$$\sigma_y = - \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \quad (14.10)$$

kde

$$K = \frac{2\sigma_k}{\sqrt{\pi}} \sqrt{c} \arccos\left(\frac{a}{c}\right) \quad (14.11)$$

Skutečná trhlina je však dlouhá  $2a$ , a proto není důvodu, proč by měla existovat v bodě  $x = c$  singularita v průběhu napětí. Singulární část (14.10) se proto musí zrušit se singulární částí

$$\sigma_y = \frac{K_I^*}{\sqrt{2\pi r}} \quad K_I^* = \sigma \sqrt{\pi c} \quad (14.12)$$

vypočtenou pro fiktivní trhlínu o délce  $2c$ . Ze srovnání  $K$  podle (14.11) se součinitelem  $K_I^*$  podle (14.12) vyjde

$$\sigma \sqrt{\pi c} = \frac{2\sigma_k}{\sqrt{\pi}} \sqrt{c} \arccos\left(\frac{a}{c}\right) \quad (14.13)$$

a odtud

$$\frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_k}\right), \quad (14.14)$$

Tento poměr určuje rozsah plastické oblasti  $\rho_k = c - a$ . Pro malý poměr  $\sigma/\sigma_k$  můžeme použít Taylorovy řady a odvodit přibližný vztah

$$\cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_k}\right) \doteq 1 - \frac{\pi^2\sigma^2}{8\sigma_k^2}. \quad (14.15)$$

Pro malý poměr  $\rho_k/a$  platí vztah

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{a + \rho_k} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_k}{a}} \doteq 1 - \frac{\rho_k}{a}. \quad (14.16)$$

Dosadíme-li přibližné výrazy na pravých stranách (14.15) a (14.16) do (14.14), vyjde pro malé napětí  $\sigma$

$$\rho_k \approx \frac{\pi^2\sigma^2}{8\sigma_k^2} \cdot a = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K_I^2}{\sigma_k^2}, \quad (14.17)$$

kde  $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ . Tento výraz můžeme porovnat se vztahem (14.8). Rozdíl není příliš velký, neboť  $8/\pi \doteq 2,54$ ,  $\pi \doteq 3,14$  a obě použité metody jsou jenom přibližné.

Pro daný model podle obr. 24 lze z teorie pružnosti získat také posuvy. Vypočteme-li relativní posuv  $\delta$  obou břehů na čele  $x = a$  skutečné trhliny, vyjde

$$\delta = \frac{8}{\pi} \frac{\sigma_k}{E} a \ln\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_k}\right)}\right]. \quad (14.18)$$

Pro malý poměr  $\sigma/\sigma_k$  se tento výraz zjednoduší na tvar

$$\delta \approx \frac{\pi a \sigma^2}{8\sigma_k E} = \frac{K_I^2}{8\sigma_k E}, \quad (14.19)$$

Tato hodnota bývá v literatuře označována také zkratkou COD (crack opening displacement = otvírací posuv trhliny, kratěji otevření trhliny).

V nejbližším okolí  $a < x < a + da$  čela skutečné trhliny vykonala konstantní síla  $\sigma_k h da$  na posuvu  $\delta$  práci  $\sigma_k h da \delta$ . Je to práce spotřebovaná v tomto místě plastickou deformací a přeměněná v teplo. Vypočteme "hustotu" této práce na plošce  $h da$ , tj. určíme měrnou energii  $g$  spotřebovanou u kořene trhliny, vztaženou na jednotkovou vzdálenost od kořene trhliny a na jednotkovou tloušťku desky



$$g = \frac{\sigma_k h da \delta}{h da} = \sigma_k \delta. \quad (14.20)$$

Předpokládáme, že trhлина se šíří, dosáhne-li hodnota  $\delta$  kritické velikosti  $\delta_{krit}$ . Při rozšíření trhliny o délku  $da$  se plastickými deformacemi spotřebuje práce  $\sigma_k h da \delta_{krit}$ . Přepočteme ji na jednotkový přírůstek délky trhliny a na jednotkovou tloušťku desky a dostaneme v souladu s rovnicí (14.20)

$$g_{krit} = \sigma_k \delta_{krit}. \quad (14.21)$$

Na jednotku nově vytvořené plochy připadá  $g_{krit}/2$ , neboť nově vytvořená plocha má velikost  $2hda$  (má dva břehy, každý o velikosti  $hda$ ). Tuto hodnotu můžeme porovnat s povrchovou energií  $\gamma$ . Protože měrná energie  $g_{krit}$  je u kvazikřehkých materiálů mnohem větší než povrchová energie (povrchové napětí)  $\gamma$ , můžeme povrchovou energii zanedbat. Do dříve odvozených vztahů platných pro křehká tělesa vstoupí pak veličina  $\frac{1}{2} g_{krit}$  místo  $\gamma$ . Tak např. místo vztahu (12.4) můžeme napsat

$$g_{krit} = \frac{F_1^2}{4h} \frac{\partial C}{\partial a} \quad \text{resp.} \quad g = \frac{F^2}{4h} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (12.4 \text{ a})$$

(pro trhlinu o délce  $2a$ ) a pod.

Vyloučíme-li z rovnic (14.19) a (14.20) rozevření trhliny  $\delta$ , dostaneme vztah

$$g = \frac{K_I^2}{E}. \quad (14.22)$$

Tento vzorec platí pro rovinnou napjatost. Jde-li o rovinné přetvoření, je

$$g = \frac{K_I^2}{E} (1 - \mu^2). \quad (14.23)$$

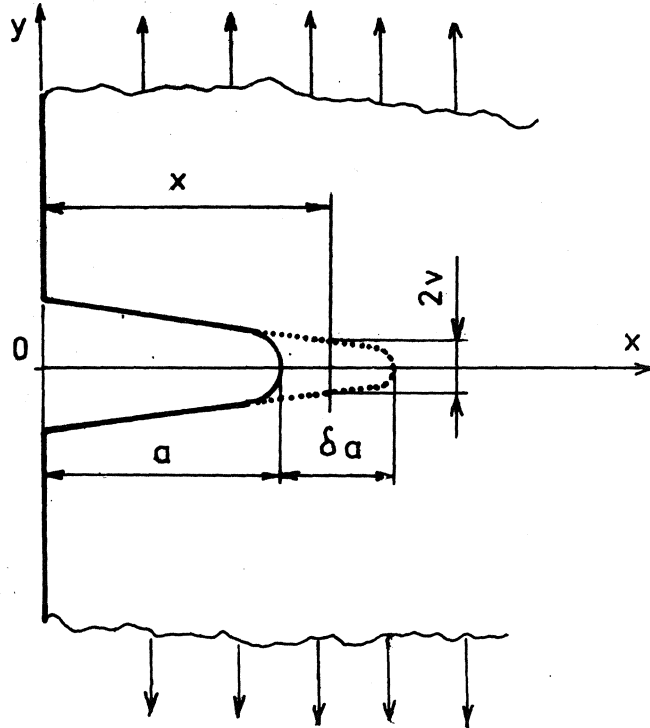
## 15. ŠÍŘENÍ KVAZIKŘEHKÉ TRHLINY

Veličinu  $g$ , představující mechanickou práci přeměněnou plastickými deformacemi v teplo, můžeme považovat obecně za velikost energie, kterou musíme dodat, chceme-li trhlinu rozšířit o délkovou jednotku v desce jednotkové tloušťky. O tuto práci se tedy - zcela stejně jako v Griffithově teorii křehkého lomu - zmenší potenciální energie. Změna potenciální energie způsobená vzrůstem trhliny se však dá vypočítat také jako energie potřebná k opětovnému obnovení původního stavu, tj. k opětovnému uzavření nově vzniklé části

trhliny. Tak pro trhlinu o délce  $a$ , která se rozšířila o  $\delta a$  (obr. 25), platí vztah

$$q \delta a = \frac{1}{2} \int_a^{a+\delta a} \sigma_y \cdot 2v \cdot dx = \int_a^{a+\delta a} \sigma_y v dx, \quad (15.1)$$

je-li  $2v$  relativní otevření trhliny v místě  $x$ ,  $y = 0$ ;  $a \leq x \leq a + \delta a$ .



Obr. 25

Z teorie pružnosti, kterou zde nebudeme uvádět, lze odvodit vztahy platné pro  $r = x - a \ll a$ ,  $y = 0$ :

$$\sigma_y = \frac{k\tau}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}}, \quad (15.2)$$

$$v = 2(1-\mu^2) \frac{\sigma}{E} \sqrt{2a(\delta a - r)}. \quad (15.3)$$

Platí pro rovinné přetvoření. Dosazením těchto výrazů do rovnice (15.1) vyjde

$$q \delta a = 2(1-\mu^2) \frac{\sigma^2 a}{E} \int_0^{\delta a} \sqrt{\frac{\delta a - r}{r}} dr. \quad (15.4)$$

K výpočtu integrálu použijeme substituce  $r = \delta a \sin^2 \varphi$ ,  $dr = 2\delta a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$  a dostaneme

$$q \delta a = (1 - \mu^2) \frac{\sigma^2 \pi a}{E} \delta a. \quad (15.5)$$

Protože  $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$ , vyjde odtud

$$q = \frac{K_I^2}{E} (1 - \mu^2) \quad (15.6)$$

shodně s rovnicí (14.23). Jde-li o rovinnou napjatost, nahradíme ve vzorcích (15.3) až (15.6) činitel  $(1 - \mu^2)$  jedničkou.

Kdyby součást s trhlinou nebyla namáhána pouze napětím  $\sigma$  podle obr. 15, ale také ostatními typy zatížení podle obr. 16 a obr. 17, bylo by zřejmé

$$q = \frac{1}{\delta a} \int_0^{\delta a} (\sigma_y v + \tau_{xy} u + \tau_{xz} w) dr \quad (15.7)$$

a místo rovnice (15.6) bychom odvodili vztah

$$Eq = (1 - \mu^2) K_I^2 + (1 - \mu^2) K_{II}^2 + (1 + \mu) K_{III}^2. \quad (15.8)$$

Jde-li o případ rovinné napjatosti, nahradí se součinitelé  $(1 - \mu^2)$  u prvních dvou členů na pravé straně rovnice (15.8) jedničkami. Třetí člen se nezmění.

Lze předpokládat, že trhlina se počne šířit, dosáhne-li měrná energie  $q$  kritické hodnoty  $q_{krit}$ . Pro typ zatížení podle obr. 15 a obr. 23 dostaneme s použitím rovnic (14.9) a (15.6) podmínku

$$q_{krit} = \frac{\sigma_p^2}{E} \pi (a + \rho) (1 - \mu^2). \quad (15.9)$$

Odtud vypočteme napětí na mezi šíření trhliny

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{Eq_{krit}}{1 - \mu^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{a + \rho}}. \quad (15.10)$$

Dosadíme-li sem místo  $q_{krit}$  lomovou houževnatost  $K_{I,krit}$  ze vztahu (14.23), vyjde

$$\sigma_p = \frac{K_{I,krit}}{\sqrt{\pi a (1 + \frac{\rho}{a})}}. \quad (15.11)$$

K výpočtu poměru  $\rho/a$  můžeme použít vztahu (14.8):

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\sigma_p^2 \pi a}{2\pi \sigma_k^2} = \frac{\sigma_p^2}{2\sigma_k^2}. \quad (15.12)$$

Pak

$$\sigma_p = \frac{K_{Ikrit}}{\sqrt{\pi a \left(1 + \frac{\sigma_p^2}{2G_k^2}\right)}} \quad (15.13)$$

Použijeme-li místo toho vztahu (14.17) a vzpomeneme-li, že  $\rho = \frac{1}{2} \rho_k$ ,  
vyjde

$$\sigma_p = \frac{K_{Ikrit}}{\sqrt{\pi a \left(1 + \frac{\sigma_p^2 \pi^2}{16G_k^2}\right)}} \quad (15.14)$$

Je zřejmé, že pro malé poměry  $\sigma_p / G_k$  (menší než asi 0,4) lze druhé členy  
v závorkách pod odmocninami v rovnicích (15.13) popř. (15.14) vynechat. Pak

$$\sigma_p \approx \frac{K_{Ikrit}}{\sqrt{\pi a}} \quad (15.16)$$

Korekce vztahu (15.16) se zřetelem k plastickým deformacím před čelem trhliny je tedy dána druhým členem v oblé závorce ve jmenovateli rovnice (15.13) popř. (15.14). Je třeba připomenout, že byla vypočtena za předpokladu, že plastická oblast je relativně malá.

Výpočet napětí, při němž se začne šířit kvazikřehká trhlina, se tedy zakládá na předpokladu, že existuje kritická hodnota měrné mechanické energie  $G_{krit}$ , která se spotřebuje převážně na plastické deformace v malé oblasti před čelem trhliny a přemění se v teplo. Malá část se však přemění i v jiné formy energie, např. v povrchovou energii nově vzniklé lomové plochy a v kinetickou (akustickou) energii. Nejde-li o extrémní podmínky, lze tuto malou část u kovů téměř vždy zanedbat (je relativně o několik řádů menší). Velikost  $G_{krit}$  je vázána vztahem (14.22) resp. (14.23) s lomovou houževnatostí  $K_{Ikrit}$ . Jednu z těchto hodnot lze tedy brát za materiálovou konstantu, kterou potřebují konstruktéři a materiáloví odborníci, aby stanovili bezpečnost dané konstrukce s existujícími nebo předpokládanými defekty. Vmucuje se však otázka, zda jde opravdu o materiálovou konstantu.

Je třeba říci, že žádná mechanická hodnota (např. mez kluzu, mez pevnosti, tažnost) není "opravdovou" materiálovou konstantou, neboť se mění s teplotou, s deformační rychlostí apod. Právě tak není konstantní ani lomová houževnatost. To však neznamená, že je pro praxi bez užitku.

Lomová houževnatost závisí především na teplotě (je malá za nízkých teplot). Z počátku roste s teplotou jen velmi málo. Jakmile se však blížíme k přechodové teplotě, počne lomová houževnatost rychle vzrůstat. Konstrukce, které jsou bezpečné za normálních teplot, mohou proto selhat za nízkých teplot. Přechodová teplota závisí především na druhu materiálu, tj. na jeho chemickém složení a struktuře. Nedostatečná čistota materiálu (inkluze a vměstky) snižuje podstatně lomovou houževnatost, ale přechodovou teplotu ovlivňuje jen málo.

Vliv teploty na mechanické hodnoty je zpravidla opačný než vliv deformační rychlosti, existují však výjimky. Roste-li deformační rychlost, pak lomová houževnatost mírně klesá. Při velkých deformačních rychlostech se uvolněné teplo nestačí od kořene trhliny odvádět a děj, který probíhal při malých deformačních rychlostech přibližně jako izotermický, se bude nyní jevit jako adiabatický. Místní stoupaní teploty způsobí pak vzrůst lomové houževnatosti. U oceli dochází k tomuto adiabatickému jevu až při deformačních rychlostech větších než asi  $\dot{\epsilon} = 10^9 \text{ s}^{-1}$ , což odpovídá rychlosti, s kterou postupuje čelo trhliny, asi  $100 \text{ m s}^{-1}$ .

Vliv velikosti součásti souvisí s tím, že u různě velikých součástí se relativně různě uplatňuje stejně velká plastická oblast před čelem trhliny. Dosáhne-li plastická oblast volného povrchu tělesa dříve než se začne trhlina šířit, vznikne převážně houževnatý (smykový) lom, k jehož vzniku se spotřebuje mnohem více energie než odpovídá hodnotě  $g_{\text{krit}}$  platné pro kvazikřehký lom. Tloušťka stěny se uplatňuje různě. Je-li extrémně malá, je energie potřebná ke vzniku nové lomové plochy zhruba úměrná tloušťce stěny. Potom se však začne tato energie s rostoucí tloušťkou stěny naopak zmenšovat (o tom pojednáme podrobněji v následující kapitole). Vliv velikosti je dále ovlivněn i tím, že materiál je jinak technologicky zpracován a u velkých součástí je zpravidla méně kvalitní než u malých.

Snaha posoudit chování velkých konstrukcí podle materiálových zkoušek na malých vzorcích tedy naráží na obtíže spojené s eliminací vlivu velikosti. Proto byla navržena metoda COD, podle které se za směrodatnou veličinu bere kritická hodnota otevření trhliny. Pro měření této veličiny byly vypracovány různé laboratorní metody. Připomeňme, že vztah (14.20) mezi veličinami  $\delta$  a  $g$  platí pro idealizovaný případ, takže experimentálně stanovené hodnoty  $\delta_{\text{krit}}$ ,  $g_{\text{krit}}$  nemusí tomuto vztahu zcela odpovídat.

Jiným omezením v použití součinitele intenzity napětí pro praktické výpočty je okolnost, že vzorce typu  $G = K/\sqrt{2\pi r}$  popisují napjatost jen v blízkém okolí čela trhliny. Zasahuje-li lomový mechanismus do větší vzdálenosti, může být výpočet zkreslen tím, že vynecháváme regulární členy ze vzorců pro napjatost. Tato úvaha vede k požadavku, aby poměr  $Q_k/a$  nepřesáhl určitou hodnotu. S použitím rovnice (14.8) dostaneme pak omezení pro poměr  $K_I^2/G_k^2$ . Zpravidla se požaduje, aby

$$\frac{K_{I \text{ krit}}^2}{G_k^2} \leq 0,4a. \quad (15.17)$$

Není-li tento požadavek splněn, je nutné výpočet korigovat. Většinou se spokojujeme s přibližnými korekcemi, které jsme probrali v minulé kapitole, aniž dále zkoumáme vliv regulárních členů ve vzorcích pro napjatost. To může být v některých případech zdrojem chyb.

Za kvazikřehký lom lze do určité míry považovat i únavovou trhlinu. Růst této trhliny lze popsat empirickým vztahem

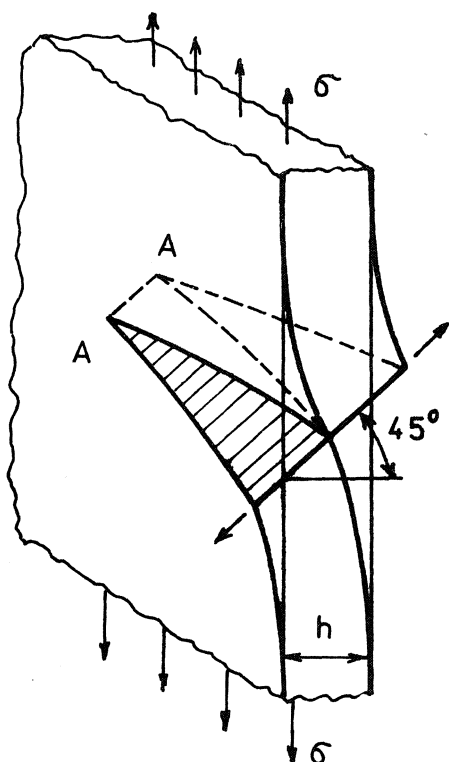
$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (15.18)$$

kde  $a$  je délka trhliny,  
 $N$  - počet únavových cyklů,  
 $\Delta K$  - amplituda součinitele intenzity napětí,  
 $C, m$  - konstanty.

Únavová trhlina však vzniká za jiných okolností než kvazikřehký lom. Rozdíl tkví především v tom, že rozšíření únavové trhliny předchází fáze postupného skrytého poškozování materiálu vlivem cyklického namáhání, spojená se změnami vlastností materiálu v mikroobjemu u kořene trhliny.

Ke změnám vlastností materiálu, tedy i ke změnám lomové houževnatosti, dochází z různých příčin. Mohou to být hrubé technologické závady (nesprávné tepelné zpracování výrobku, nesprávné svařování, záměna materiálu), ale také méně nápadné příčiny (stárnutí materiálu, koroze). Proto se může stát, že původně neškodný materiálový defekt způsobí katastrofální lom až po delší době nezávadného provozu, ačkoli je součást namáhána výhradně (nebo alespoň převážně) staticky.

#### 16. VLIV TLOUŠŤKY STĚNY NA LOMOVOU HOUŽEVNATOST



Obr. 26

Jde-li o velmi tenký plech (tenčí než asi 2 mm), šíří se v něm trhlina zpravidla střihovou deformací, která vzniká působením smykového napětí  $\tau = \sigma/2$  v rovině svírající s čelní plochou plechu úhel  $45^\circ$  (obr. 26). Na čele trhliny A - A se hromadí šroubové dislokace, až se začne šířit trhlina třetího typu (obr. 17). Obdobně k vztahu (14.19) dostaneme pro tento případ kritické posunutí v kořeni trhliny

$$\delta \approx \frac{\pi a \tau^2}{2G\tau_k}, \quad (16.1)$$

kde  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  je modul pružnosti ve smyku.

Dosadíme sem  $\delta = h/\cos 45^\circ = h\sqrt{2}$ ,  
 $\tau = \sigma/2$  a  $\tau_k = \sigma_k/2$  podle Trescovy hypotézy. Vyjde

$$\sigma = \sigma_p = \sqrt{\frac{2\sqrt{2} h \sigma_k E}{\pi a (1+\mu)}} \quad (16.2)$$

Počítáme-li však toto napětí ze vzorce (15.16) platného pro první typ trhliny (obr. 15), k čemuž nás opravňuje skutečnost, že jde o taženou desku s trhlinou orientovanou kolmo k tahovému napětí, dostaneme

$$\sigma_p = \frac{K_{Ikrit}}{\sqrt{\pi a}} \quad (16.3)$$

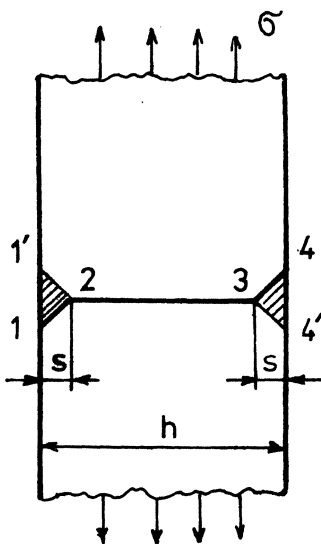
Srovnáním obou výsledků získáme efektivní hodnotu lomové houževnatosti

$$K_{Ikrit} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2} h \sigma_k E}{1+\mu}} \quad (16.4)$$

S použitím (14.22) odtud vypočteme

$$q_{krit} = \frac{2\sqrt{2} h \sigma_k}{1+\mu} \approx 2\sigma_k h \quad (16.5)$$

Chybou této úvahy je, že nepočítá se změnou průřezu zúžením (seškracením) před jeho porušením. Jiná chyba vznikne tím, že s rostoucí tloušťkou plechu se budou zhoršovat podmínky pro vytvoření stříhového lomu podle idealizovaného schématu na obr. 26. Proto bude skutečná efektivní hodnota  $q_{krit}$  menší než podle vztahu (16.5). Pro malé tloušťky plechů však bude platit přímá úměrnost mezi kritickou měrnou energií  $q_{krit}$  a tloušťkou plechu  $h$



Obr. 27

Je-li tloušťka plechu větší než asi 2 mm, vzniká lom za složitějších podmínek. Plastická oblast je větší na koncích čela trhliny u obou čelních povrchů, kde jde o rovinnou napjatost, a menší uprostřed čela, kde existuje napjatost blízká spíše rovinnému přetvoření. Příklad lze idealizovat tak, jak ukazuje obr. 27. Části 11'2 a 344' jsou plastické a vytvoří smykové části lomové plochy 12 popř. 34. Část 23 je kvazikřehký lom. Rozšíří-li se trhlina o délku  $da$  (kolmo k nákresně na obr. 27), zvětší se plocha kvazikřehkého lomu o  $(h-2s)da$  a objem plastických oblastí o  $2s^2da$ . Přitom se spotřebuje práce  $dA$ .

Označíme-li  $A_k$  práci připadající na povrch  $S$  kvazikřehkého lomu a  $A_p$  práci připadající na objem  $V$  plastických oblastí, bude (pro  $s < h/2$ )

$$dA = \left( \frac{dA_k}{ds} \right) (h - 2s) da + \left( \frac{dA_p}{dv} \right) 2s^2 da \quad (16.6)$$

Průměrná hodnota měrné energie  $g_{krit}$  potřebné ke vzrůstu trhliny o jednotkovou délku vyjde (pro  $s < h/2$ )

$$g_{krit} = \frac{dA}{h da} = \left( \frac{dA_k}{ds} \right) \left( 1 - \frac{2s}{h} \right) + \left( \frac{dA_p}{dv} \right) \frac{2s^2}{h} \quad (16.7)$$

Počítáme ji - jako obvykle - pro jednotkovou tloušťku desky. Protože šířka  $s$  plastických oblastí nezávisí na celkové šířce desky  $h$  (alespoň ne podstatně), bude  $s = konst$ , takže vztah (16.7) představuje hyperbolu  $g_{krit} = f(h)$ . Je-li  $s = h/2$ , vyjde

$$g_{krit} = \frac{dA_p}{dv} s \quad (h = 2s) \quad (16.8)$$

Tato hodnota by měla přibližně odpovídat hodnotě  $2\sigma_k h$  podle vztahu (16.5), jestliže  $h = 2s = 2 \text{ mm}$  (plastická oblast prostupuje celou stěnu). Pak

$$\frac{dA_p}{dv} \cong 4\sigma_k s \quad (16.9)$$

Vlivem seškrvení průřezu a vlivem zhoršených podmínek pro vznik stříhového lomu bude skutečná hodnota  $dA_p/dv$  podstatně menší než odpovídá rovnici (16.9). Nelze totiž předpokládat, že vztah (16.5) odvozený pro malé tloušťky  $h$  platí beze změny i pro  $h = 2s$ . Pro  $h \rightarrow \infty$  vyjde z rovnice (16.7)

$$g_{krit} = \frac{dA_k}{ds} \quad (h \rightarrow \infty) \quad (16.10)$$

K tomu, aby u kořene trhliny převládal stav rovinného přetvoření ( $\varepsilon_2 = 0$ ) stačí, aby

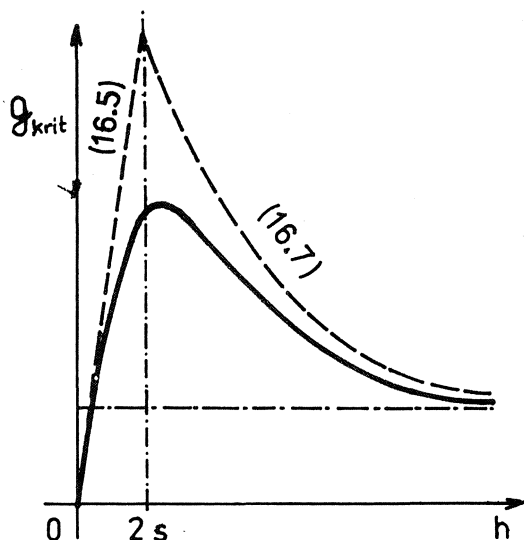
$$h \geq 2,5 \frac{K_{I,krit}^2}{\sigma_k^2} \quad (16.11)$$

U tloušťek, které vyhovují nerovnosti (16.11), převládá kvazikřehký lom s poměrně malým rozsahem plastických deformací u kořene trhliny a plastické oblasti vedoucí ke stříhové deformaci u obou čelních povrchů plechu se prakticky neuplatňují. Hodnota  $g_{krit}$  je pak přibližně konstantní a blíží se hranici (16.10).

Závislosti (16.5) a (16.7) se doplňují a tvoří průběh zakreslený na obr. 28. Teoretické hodnoty jsou kresleny čárkovaně, experimentální plně. Měrnou energii  $g_{krit}$  můžeme přepočítat na lomovou houževnatost  $K_{I,krit}$  podle vztahu (14.22) resp. (14.23).



Obr. 28



Uvedená úvaha je jenom přibližná. Její smysl je především v tom, že názorně vysvětluje podstatný vliv tloušťky stěny na velikost efektivní lomové houževnatosti. Tento vliv se projevuje zejména u stěn malých tloušťek.

### 17. APLIKACE J-INTEGRÁLU

Zanedbáme-li ve vztahu (10.4) kinetickou energii  $\mathcal{K}$ , bude

$$N = \frac{DA}{Dt} - \frac{DV}{Dt} \quad (17.1)$$

Označíme-li celkovou potenciální energii

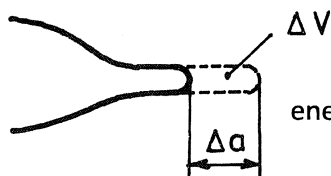
$$W = U - A, \quad (17.2)$$

bude  $N = -\frac{DW}{Dt}$ , čili pro malé deformace

$$N dt = -dW = g da. \quad (17.3)$$

V tomto vztahu značí  $da$  přírůstek délky trhliny za čas  $dt$  v desce jednotkové tloušťky.

V 15. kapitole jsme použili vtípného obratu. Vypočítali jsme změnu potenciální energie způsobenou rozšířením trhliny nikoli integrací přes celou oblast nekonečné desky, ale jako práci povrchových sil, které musíme připojit, abychom trhlínu opět uzavřeli, a tak obnovili původní stav napjatosti a deformace. Nyní použijeme také tohoto obratu, avšak postup poněkud pozměníme.



Obr. 29

Na obr. 29 je zakreslen plnou čarou kořen trhliny před jejím rozšířením, čárkovanou čarou tvar rozšířené trhliny. Nová část trhliny zaujme objem  $\Delta V$ , v němž byla původně hustota deformační energie napjatosti

$$\Lambda = \int G^{ij} d\epsilon_{ij} \quad (17.4)$$

Rozšíření trhliny rozdělíme na dvě etapy. V první se trhlina nejprve rozšíří o objem  $\Delta V$ , aniž se změní stav napjatosti a deformace v ostatní části tělesa. To znamená, že na povrchu trhliny budou povrchové síly

$$p^i = \sigma^{ij} n_j \quad (17.5)$$

udržující tento stav. V druhé etapě tyto síly uvolníme, takže stav napjatosti se změní na  $\sigma^{ij} + \Delta \sigma^{ij}$  a stav deformace na  $\epsilon_{ij} + \Delta \epsilon_{ij}$ . Výsledný stav odpovídá zvětšené trhlince s nezatiženými břehy. Celková změna potenciální energie se pak skládá ze dvou částí. První odpovídá úbytku deformační energie z objemu  $\Delta V$ , druhá relaxaci povrchových napětí:

$$\Delta W = - \int_{\Delta V} \Lambda dV + \int_{\Delta S} ds \int_{u_i}^{u_i + \Delta u_i} p^i du_i. \quad (17.6)$$

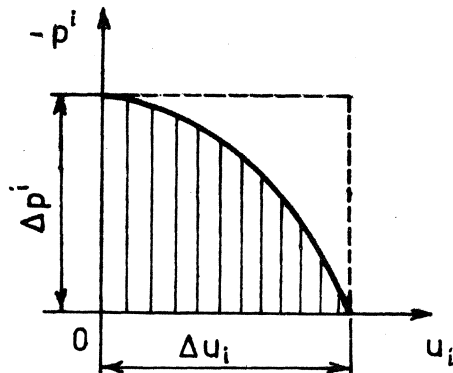
Jde-li o "ostrou" trhlinu, je  $\Delta V = 0$ , takže objemový integrál v rovnici (17.6) zmizí. Další postup by pak byl shodný s tím, který jsme použili v 15. kapitole. Zde však budeme předpokládat, že  $\Delta V > 0$ , a teprve později přejdeme k limitě  $\Delta V \rightarrow 0$ .

Jednoduchou úpravou rovnice (17.6) dostaneme

$$-\Delta W - \int_{\Delta V} \Lambda dV = - \int_{\Delta S} ds \int_{u_i}^{u_i + \Delta u_i} p^i du_i > 0. \quad (17.7)$$

Nerovnost zde vyplývá z názoru, že relaxací povrchových sil se vykoná záporná práce (síly směřují proti posuvům), takže dvojný integrál ve vztahu (17.7) je záporný (jeho záporná hodnota je proto kladná).

Úvahu chceme uskutečnit za předpokladu, že materiál je nelineárně elastický. Práce jedné složky povrchových sil je pak dána vyšrafovanou plochou pod pracovní křivkou na obr. 30. Budeme předpokládat, že tato plocha bude vždy menší než opsaný obdélník, takže



Obr. 30

$$\int |p^i du_i| \leq \Delta p^i \Delta u_i. \quad (17.8)$$

S použitím odhadu (17.8) dostaneme ze vztahu (17.7)

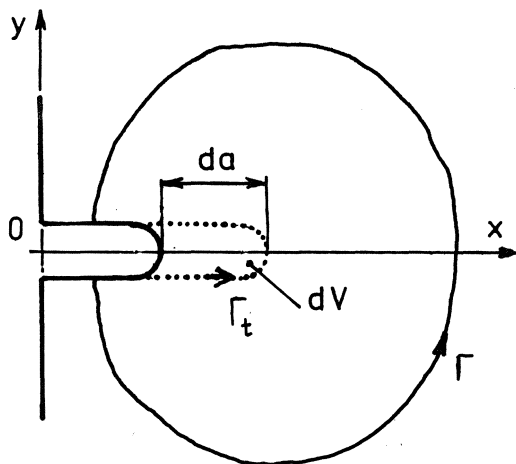
$$0 < -\Delta W - \int_{\Delta V} \Lambda dV < \int_{\Delta S} \Delta p^i \Delta u_i ds. \quad (17.9)$$

Jsou-li veličiny  $\Delta W$ ,  $\Delta V$ ,  $\Delta p^i$ ,  $\Delta u_i$  malé prvního řádu, je integrál na pravé straně nerovnosti (17.9) malá veličina druhého řádu. V limitě bude proto na obou stranách (17.9) nula, takže

$$0 = -\Delta W - \int_{\Delta V} \Lambda dV. \quad (17.10)$$

Odtud

$$-\Delta W = \int_{\Delta V} \Lambda dV \quad (\Delta V \rightarrow 0). \quad (17.11)$$



Obr. 31

V dalším výkladu se omezíme na dvou-rozměrný případ podle obr. 31. Bude pak (pro  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ )

$$dV = da dy \cdot 1, \quad (17.12)$$

takže (pro  $\lim \Delta V \rightarrow 0$ )

$$-dW = \int_{AS} \Lambda dy \cdot da \quad (17.13)$$

a odtud

$$-\frac{dW}{da} = \int_{\Gamma_t} \Lambda dy. \quad (17.14)$$

Tím jsme převedli původně objemový integrál na křivkový. Integrujeme po křivce  $\Gamma_t$  ohraničující přírůstek trhliny  $da$  v průmětu na obr. 31. Použijeme-li ještě vztahu (17.4), máme

$$-\frac{dW}{da} = \int_{\Gamma_t} dy \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma^{ij} d\epsilon_{ij}. \quad (17.15)$$

Lze ukázat, že integrál na pravé straně (17.14) se stane nezávislým na integrační cestě  $\Gamma$ , přidáme-li k němu ještě jeden člen. Dostaneme

$$J = \int_{\Gamma_t} \Lambda dy = \int_{\Gamma} \left[ \Lambda dy - p^i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right], \quad (17.16)$$

kde  $ds$  je délkový element čáry (integrační cesty)  $\Gamma$ ;  $i = 1, 2$  ( $p^3 = 0$ ).

Nezávislost integrálu na pravé straně (17.16) na integrační cestě souvisí s existencí měrné potenciální deformační energie (17.4) a platí i pro

nelineárně elastické materiály (viz příklad 18). Platí dokonce i pro deformační teorii plasticity a pro pružno-plastické materiály deformačního typu. <sup>\*)</sup>

Je-li  $\Gamma \equiv \Gamma_t$ , odpadne přidáný druhý člen v závorce v rovnici (17.16), neboť na povrchu trhliny je vektor napětí  $p^i = 0$ . Poslední vztah nám poskytuje možnost vypočítat J-integrál po vhodně volené čáře  $\Gamma$ , nezávislé na tvaru trhliny. To je důležité zvláště tehdy, řešíme-li napjatost např. metodou konečných prvků nebo jinou přibližnou metodou. Integrační cestu  $\Gamma$  volíme tak, aby procházela oblastmi, kde je řešení, a tedy i integrace přesnější. Její tvar můžeme přizpůsobit tvaru plastické oblasti apod. Čára musí počínat na spodním a končit na horním břehu trhliny na obr. 31. To je jediný požadavek.

Srovnáme-li (17.3), (17.14) a (17.16), dostaneme

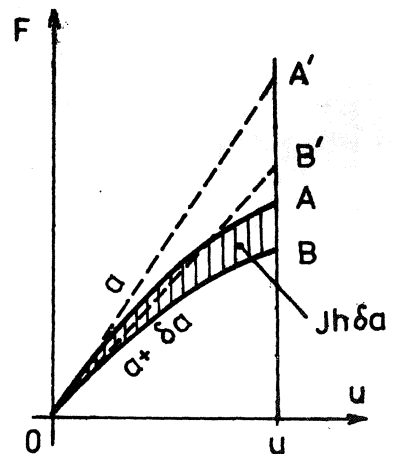
$$J = q. \quad (17.17)$$

J-integrál má tedy význam měrné energie  $q$  uvolňované z tělesa při šíření trhliny. S použitím (14.23) vyjde pro rovinné přetvoření a lineárně elastický materiál

$$J = \frac{k_{\Gamma}^2}{E} (1 - \mu^2). \quad (17.18)$$

J-integrál je tedy v tomto případě úměrný čtverci intenzity napětí.

Rovnice (17.17) dává J-integrálu fyzikální smysl. Je to potenciální energie, která se uvolní, zvětšíme-li trhlínu z délky  $a$  na délku  $a + \delta a$ . Zakreslíme-li průběh zobecněné síly  $F$  v závislosti na zobecněném posuvu  $u$  (takže elementární práce vnějších sil je  $F du$ ), dostaneme pro trhlínu o délce  $a$  křivku  $OA$  na obr. 32. Pro lineárně elastické těleso by to byla přímka  $OA'$  (čárkovaná na obr. 32). Zvětšíme-li trhlínu o  $\delta a$  dostaneme závislost  $OB$ . Vyšrafovaná plocha je úměrná hodnotě  $J(u)h\delta a$ , kde  $h$  je tloušťka desky. J-integrál tedy můžeme stanovit také experimentálně. Mění se v závislosti na posuvu  $u$  a na délce trhliny  $a$ .



Obr. 32

<sup>\*)</sup> Jsou to teorie, které předpokládají existenci vztahu  $\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(\epsilon_{kl})$  [nebo  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\sigma^{kl})$ ]. Inverzní vztah nemusí být jednoznačný. Deformační teorie jsou matematicky výhodné, avšak ve srovnání s inkrementální teorií plasticity, kterou jsme vyložili v první části semináře, mají omezenou použitelnost.

Pro lineárně elastické těleso máme

$$u = CF \quad (17.19)$$

a plocha pod čarou  $OA'$  má velikost

$$A = \frac{1}{2} uF = \frac{1}{2} CF^2. \quad (17.20)$$

Potom

$$Jh \delta a = \frac{\partial A}{\partial a} \delta a = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial a} \delta a F^2 \quad (17.21)$$

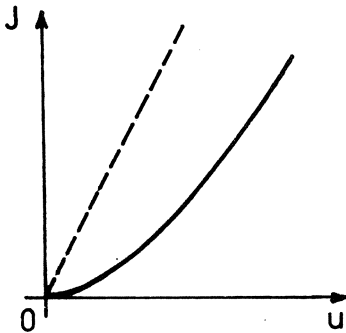
a odtud

$$J = \frac{1}{2h} \frac{\partial C}{\partial a} F^2. \quad (17.22)$$

Dosadíme-li sem  $2a$  místo  $a$  a konečně  $2\gamma$  místo  $J$ , dostaneme rovnici (12.4) platnou pro trhlinu o délce  $2a$ , jak bylo možno očekávat.

S použitím (17.19) můžeme také psát, že

$$J = \frac{1}{2h} \frac{\partial C}{\partial a} \left(\frac{u}{C}\right)^2. \quad (17.23)$$



Obr. 33

Závislost  $J(u)$  je tedy u lineárně pružných těles parabolická (plná čára na obr. 33). Jde-li o těleso tuho-plastické, je posuv nulový, až teprve v mezním stavu  $F = F_k = \text{konst}$  roste posuv při nezměněné síle bez omezení. Práce síly  $F_k$  je přitom

$$A = F_k \cdot u. \quad (17.24)$$

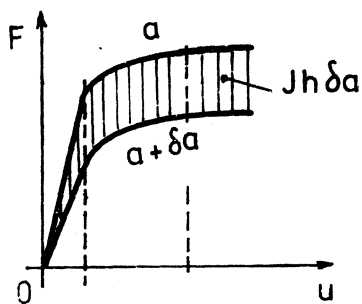
Protože  $Jh \delta a = \frac{\partial A}{\partial a} \delta a$ , vyjde

$$J = \frac{u}{h} \frac{\partial F_k}{\partial a}. \quad (17.25)$$

Při  $a = \text{konst}$  je závislost  $J(u)$  v tomto případě lineární (čárkovaná čára na obr. 33).

Je-li těleso pružno-plastické, je při malých deformacích  $J$ -integrál úměrný  $u^2$ , později po dosažení mezního stavu je lineární funkcí  $u$  (obr. 34). Parabolická a lineární větve jsou spojeny v přechodové oblasti hladkou čarou.

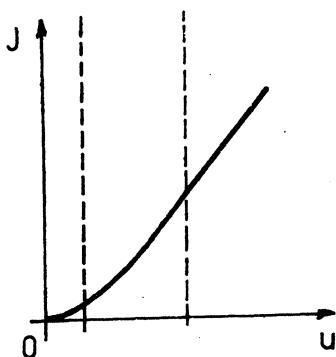
Pro pružno-plastické těleso je třeba vycházet z korigovaných hodnot pro délku trhliny



$$a^* = a + \frac{k_I^2}{2\pi G_L^2} \quad (17.26)$$

pro rovinnou napjatost a

$$a^* = a + \frac{k^2}{6\pi G_L^2} \quad (17.27)$$



Obr. 34

pro rovinné přetvoření. O tom, zda jde o případ rovinného přetvoření, můžeme rozhodnout podle kritéria (16.11). Výraz (17.26) se shoduje s korekcí  $a^* = a + \varrho$  podle rovnice (14.3) a (14.9) pro rovinnou napjatost.

Veličiny  $J$  podobně jako  $\delta$  (COD) lze tedy užít jako kritéria pro počátek šíření trhliny v tělesech vyrobených z elastických i pružno-plastických materiálů. Trhlina se začne šířit, dosáhne-li  $J$ -integrál kritické hodnoty  $J_{krit}$ . Rozdíl mezi oběma metodami spočívá v tom, že metoda COD (kritického

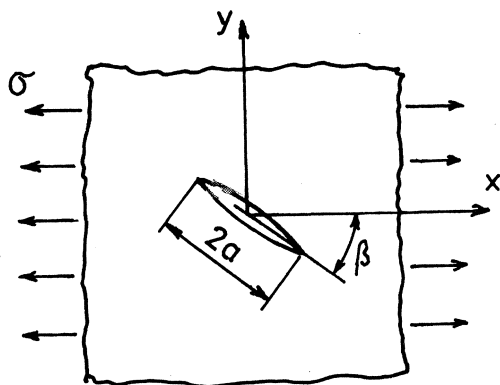
otevření trhliny) studuje jevy v mikroobjemu v okolí kořene trhliny, kdežto  $J$ -integrál můžeme vyhodnotit po libovolné integrační cestě v makroobjemu. Hodnota  $J$ -integrálu se může stanovit výpočtem i pokusně. Jeho kritická hodnota  $J_{krit}$  má obdobný význam jako kritická hodnota měrné energie  $g_{krit}$ .

**Příklad 14.** Potrubí velkého průměru je svařeno z plechového pásu vinutého do šroubovice, takže svár probíhá po šroubovici. Vypočtete, při jakém přetlaku  $p_{krit}$  uvnitř potrubí může vzniknout náhlý lom, je-li ve švu ponechána trhlina s počáteční délkou  $2a$ . Potrubí nepřenáší jinou osovou sílu než tu, která vzniká účinkem vnitřního přetlaku, a napjatost je čistě membránová.

Dáno: poloměr potrubí  $r = 250$  mm, tloušťka stěny  $h = 5$  mm, délka trhliny  $2a = 10$  mm, mez kluzu  $G_L = 500$  MN m<sup>-2</sup>, měrná energie  $g_{krit} = 60$  kJ m<sup>-2</sup> (pro daný materiál, teplotu a tloušťku stěny) a úhel, který svírá trhlina s povrchovou přímkou, je  $\beta = 45^\circ$ .

**Řešení:** Je-li trhlina délky  $2a$  umístěna v poli tahového napětí podle obr. 35, platí pro součinitele intenzity napětí vzorce

$$\left. \begin{aligned} k_I &= \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sin^2 \beta, \\ k_{II} &= \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Obr. 35

Pro dvojosou napjatost  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  tedy dostaneme superpozicí tyto vzorce:

$$K_I = \sigma_x \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta + \sigma_y \sqrt{\pi a} \cos^2 \beta,$$

$$K_{II} = (\sigma_x - \sigma_y) \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta. \quad (2)$$

Protože obecně  $K^2 = E q$ , vyjde korekce délky trhliny podle (14.3)

$$q = \frac{E q_{krit}}{2 \pi \sigma^2} = \frac{(2,1 \cdot 10^{11}) \cdot (60 \cdot 10^3)}{2 \pi \cdot (500 \cdot 10^6)^2} = 0,008 \text{ m.}$$

To znamená, že poloviční efektivní délka trhliny je

$$a^* = a + q = 5 + 8 = 13 \text{ mm.} \quad (3)$$

Podle vzorce (15.8) upraveného pro rovinnou napjatost vyjde

$$E q = K_I^2 + K_{II}^2 =$$

$$= [(\sigma_x \sin^2 \beta + \sigma_y \cos^2 \beta) + (\sigma_x - \sigma_y)^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta] \pi a^*. \quad (4)$$

Protože  $\sin^2 \beta = \cos^2 \beta = \frac{1}{2}$ ,

$$\sigma_x = p \frac{r}{h} = \frac{250}{5} = 50 p,$$

$$\sigma_y = p \frac{r}{2h} = \frac{250}{2 \cdot 5} = 25 p,$$

vyjde dosazením do (4)

$$Eg = \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pi a^* = \frac{5 \cdot (25)^2}{2} p^2 \pi a^* \quad (5)$$

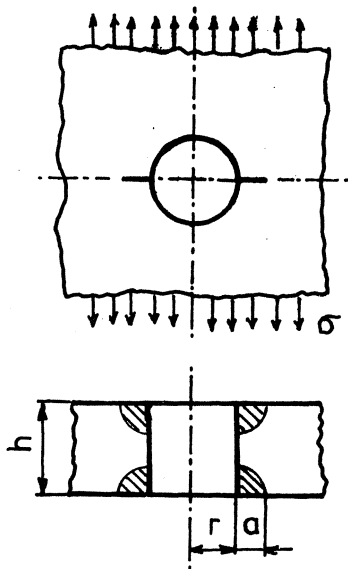
S použitím daných hodnot vyjde odtud pro kritický stav

$$(2,1 \cdot 10^{11}) \cdot (60\,000) = \left( \frac{3125}{2} \right) \cdot p^2 \cdot \pi \cdot (0,013),$$

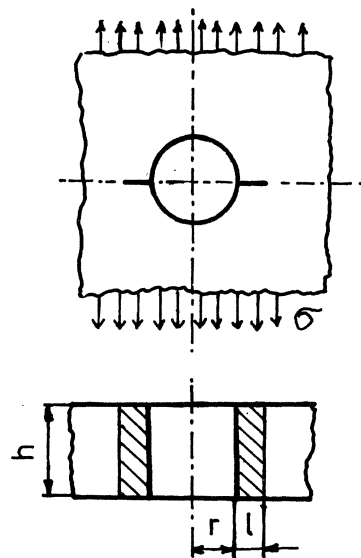
$$p \approx 1,4 \cdot 10^7 \text{ N m}^{-2} = 14 \text{ MN m}^{-2} = p_{krit}.$$

Při tlaku  $p = 10 \text{ MN m}^{-2}$  však obvodové napětí  $\sigma_x$  dosáhne právě meze kluzu v celé tloušťce stěny, takže nebezpečí vzniku náhlého kvazikřehkého lomu je za daných okolností menší než nebezpečí, že se potrubí poruší plastickými deformacemi v celé stěně. Kdyby však nastalo zkřehnutí (např. vlivem nízké teploty nebo vlivem nekvalitního svaru), stal by se uvažovaný defekt zdrojem nebezpečí vzniku náhlého lomu. Podobný účinek mohou mít superponovaná ohybová napětí a koncentrace napětí u nezabroušených svarů. V naší úvaze jsme nepočítali ani s tím, že by tlakové médium vniklo do trhliny a způsobovalo by přidavné zatížení jejích břehů. Protože tlak  $p$  je relativně malý vzhledem k působícím napětím, nemá tato okolnost valný vliv. Může se však uplatnit koroze trhliny, která sníží lomovou houževnatost.

**Příklad 15.** Z otvoru postranice lokomotivního rámu o průměru  $2r = 30 \text{ mm}$  vycházejí čtvrtkruhové radiální trhliny zakreslené na obr. 36. Jejich poloměr je  $a = 7 \text{ mm}$ . Vypočtete, při jakém jmenovitém tahovém napětí  $\sigma$  (stanoveném bez zřetele ke koncentraci napětí v okolí otvoru) se trhlina rozšíří. Materiál má při  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  mez kluzu  $\sigma_K = 290 \text{ MN m}^{-2}$  a kritický součinitel intenzity napětí  $K_{I_{krit}} = 70 \text{ MN m}^{-3/2}$ .



Obr. 36



Obr. 37

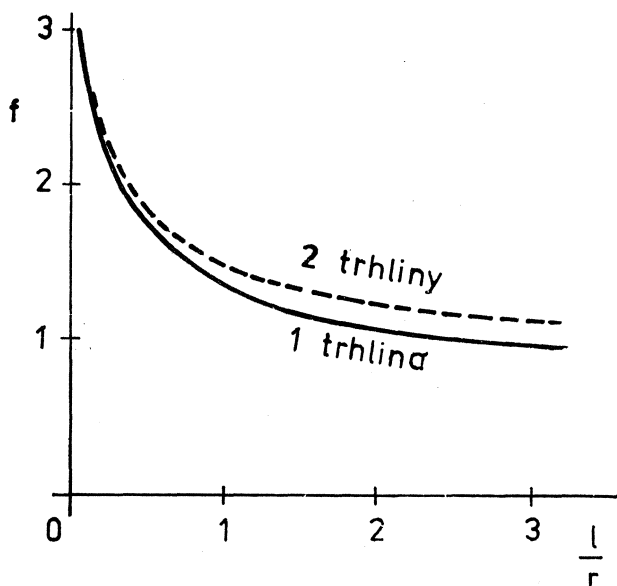


Řešení: Podle článku v časopise "Journal of Mathematics and Physics", vol. 35 (1956), s. 60, jehož autorem je O. L. BOWIE, platí pro výpočet součinitele intenzity napětí u průběžných radiálních trhlin vycházejících ze stěny otvoru podle obr. 37 vzorec

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \ell} \cdot f\left(\frac{\ell}{r}\right), \quad (1)$$

kde  $f$  je dáno závislostí znázorněnou na obr. 38. Za  $\ell$  zvolíme průměrnou hloubku trhlin na obr. 36, totiž hodnotu

$$\ell = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{a} = \frac{\pi}{4} a = \frac{7 \pi}{4} = 5,5 \text{ mm} . \quad (2)$$



Obr. 38

Korekce délky trhliny se zřetelem k plastickým deformacím vyjde podle (14.9) a (14.3) popř. podle (17.26)

$$\varrho = \frac{(70)^2}{2 \pi \cdot (290)^2} \doteq 0,0093 \text{ m} = 9,3 \text{ mm}, \quad (3)$$

takže

$$\ell_{ef} = \ell + \varrho = 5,5 + 9,3 = 14,8 \text{ mm}.$$

Pro poměr

$$\frac{\ell_{ef}}{r} = 14,8/15 = 0,985$$

odečteme z obr. 38  $f \approx 1,48$ , takže podle (1)

$$(70 \cdot 10^6) = G \sqrt{\pi \cdot (0,0148)} \cdot (1,48)$$

a odtud

$$G \approx 2,2 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2} = 220 \text{ MN m}^{-2}.$$

Toto napětí je tedy menší než mez kluzu.

Výpočet je přibližný. Korekci na velikost plastické oblasti volíme raději podle vzorce (17.26) než podle (17.27), aby výpočet byl na straně větší bezpečnosti. Pouze u tlustých plechů bychom použili vzorce (17.27), avšak zároveň bychom uvažili, že u tlustších plechů je lomová houževnatost menší (srovnej s obr. 28). Zdrojem nepřesnosti je také způsob, jakým jsme redukovali délku trhliny [ podle vzorce (2) ]. Výpočet průměrné délky trhliny se opírá o práci uveřejněnou v časopise "Engineering Fracture Mechanics", vol. 4 (1972), jejímž autorem je A. F. LIU.

Připomeňme, že jsme v této úvaze zanedbali vliv konečných rozměrů postranice a vliv příčného ohybu. Také tyto vlivy bychom mohli zahrnout do výpočtu jenom přibližně, neboť pro takový problém není známo obecné teoretické řešení.

**Příklad 17.** V plechu taženém z hliníkové slitiny byly zjištěny tyto hodnoty: mez kluzu  $G_k = 500 \text{ MN m}^{-2}$ , modul pružnosti v tahu  $E = 70\,000 \text{ MN m}^{-2}$ , měrná energie potřebná k vytvoření trhliny jednotkové délky  $G_{krit} = 20 \text{ kJ m}^{-2}$ . Tato hodnota platí pro rovinné přetvoření. Stanovte při jaké tloušťce plechu bude mít  $G_{krit}$  největší efektivní hodnotu.

**Řešení:** Hodnota  $G_{krit} = 20 \text{ kJ m}^{-2}$  odpovídá velké tloušťce plechu  $h$  podle nerovnosti (16.11)

$$h \geq 2,5 \frac{K_{I,krit}^2}{G_k^2} = 2,5 \frac{E G_{krit}}{(1-\mu^2) G_k^2}.$$

Dosažením

$$h \geq 2,5 \cdot \frac{(7 \cdot 10^{10}) \cdot (20\,000)}{(0,91) \cdot (5 \cdot 10^8)^2} \approx 0,015 \text{ m} = 15 \text{ mm}.$$

Rozsah plastické oblasti zasahuje v povrchové vrstvě do vzdálenosti  $\rho_k$  podle (14.8)

$$\rho_k = \frac{E G_{krit}}{\pi G_k^2} = \frac{(7 \cdot 10^{10}) \cdot (20\,000)}{\pi \cdot (25 \cdot 10^{16})} \approx 0,00178 \text{ m} \approx 1,8 \text{ mm}.$$

Jestliže plastická oblast právě zasáhne celou tloušťku plechu, bude mít plech největší efektivní lomovou houževnatost. Lze předpokládat, že se tak stane přibližně tehdy, když  $h = Q_k = 2\varrho = 1,8 \text{ mm}$ . U daného plechu byla experimentálně zjištěna hodnota  $g_{krit\ max} = 200 \text{ kJ m}^{-2}$  při tloušťce stěny 2 mm.

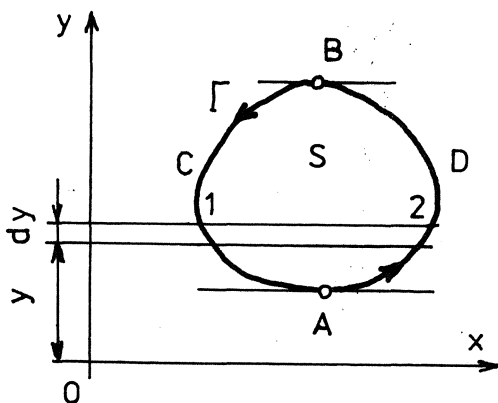
**Příklad 18.** Dokažte, že v oblasti, v níž existuje měrná potenciální deformační energie  $\Lambda(\epsilon_{ij})$ , nezávisí J-integrál na integrační cestě  $\Gamma$  (obr. 31).

**Řešení:** Měrná potenciální deformační energie je definována vztahem (17.4), totiž

$$\Lambda = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (1)$$

J-integrál je definován podle (17.16) takto

$$J = \int_{\Gamma} \left[ \Lambda dy - p^i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right] \quad (2)$$



Obr. 39

Než přistoupíme k požadovanému důkazu, odvodíme větu Greenovu, kterou k tomu budeme potřebovat. Nechť je nad uzavřenou oblastí  $S$  s hranicí  $\Gamma$  podle obr. 39 dána spojitá funkce  $Q(x,y)$  se spojitou partiální derivací  $\partial Q/\partial x$ . Určíme integrál

$$I_1 = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad (3)$$

Budeme nejprve integrovat podle  $x$  při konstantním  $y$ . Dostaneme

$$I_1 = \int_{y_A}^{y_B} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_{y_A}^{y_B} [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)] dy \quad (4)$$

Integrály na pravé straně rovnice (4) můžeme považovat za křivkové integrály druhého typu. Výraz

$$\int_{y_A}^{y_B} Q(x_2, y) dy$$

představuje křivkový integrál po oblouku ADB , kdežto

$$\int_{y_A}^{y_B} Q(x_1, y) dy$$

je záporně vzatý křivkový integrál po oblouku BCA . Záporné znaménko vyplývá ze skutečnosti, že kladnému oběhu na křivce  $\Gamma(BCA)$  odpovídá zmenšování souřadnice  $y$  (tedy záporný diferenciál  $dy$  ). Protože oba integrály na sebe navazují, můžeme je spojit v jediný integrál a napsat, že

$$I_1 = \oint_{\Gamma} Q(x, y) dy . \quad (5)$$

Zcela obdobně dokážeme, že pro spojitou funkci  $P(x, y)$  se spojitou parciální derivací  $\partial P / \partial y$  platí vztah

$$I_2 = \iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\Gamma} P(x, y) dx . \quad (6)$$

Shrnutím vztahů (3), (5) a (6) do jedné rovnice dostaneme větu Greenovu:

$$\oint_{\Gamma} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy . \quad (7)$$

Greenovu větu budeme nyní aplikovat na první člen v integrálu (2), který však pozměníme tak, aby integrace probíhala po libovolné uzavřené hranici  $\Gamma^*$  mimo trhlinu. Dostaneme

$$\int_{\Gamma^*} \Lambda dy = \iint_{S^*} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} dx dy . \quad (8)$$

Oblast  $S^*$  je uzavřena křivkou  $\Gamma^*$  . Pro druhý člen v integrálu (2), avšak pro integrační cestu  $\Gamma^*$  , najdeme podle Gaussovy věty, že

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} p^i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds &= \int_{\Gamma^*} G^{ji} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \int_{\Gamma^*} \left( G^{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) n_j ds = \\ &= \iint_{S^*} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( G^{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx dy . \end{aligned} \quad (9)$$

Celkem tedy bude J-integrál přepsaný pro uzavřenou oblast  $S^*$  s hranicí  $\Gamma^*$

$$J^* = \iint_{S^*} \left[ \frac{\partial \Lambda}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x^j} \left( G^{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right] dx dy . \quad (10)$$

Protože  $\Lambda = \Lambda(\epsilon_{ij})$ , budeme mít s použitím (1)

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma^{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x} \quad (11)$$

a odtud - vzhledem k souměrnosti deformačního tenzoru  $\epsilon_{ij}$  -

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right] = \sigma^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (12)$$

Protože za nepřítomnosti objemových sil zní podmínka statické rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma^{ji}}{\partial x^j} = 0 \quad (13)$$

(srovnej s Eulerovou rovnicí (2.34) pro  $X^i = 0$ ,  $v^i = 0$ ), můžeme místo (12) psát

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sigma^{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (14)$$

To však znamená, že integrand v rovnici (10) identicky vymizí nezávisle na integrační cestě  $\Gamma^*$  (za předpokladu, že uvnitř oblasti  $S^*$  není žádná singularita). Proto

$$\int_{\Gamma^*} \left( \Lambda dy - \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right) = 0 \quad (15)$$

pro jakoukoli uzavřenou křivku  $\Gamma^*$ . Skládá-li se křivka  $\Gamma^*$  ze dvou oblouků, a to z čáry ( $\Gamma$ ) a z čáry ( $-\Gamma_t$ ) podle obr. 31, musí se rovnat integrály po cestě ( $\Gamma$ ) a po cestě ( $\Gamma_t$ ). Právě to však vyjadřuje rovnice (17.16). Protože čára  $\Gamma^*$  může být vedena libovolně, může být libovolná také integrační cesta  $\Gamma$  s tím jediným omezením, že začíná na spodním břehu trhliny a končí na horním břehu, jak naznačuje obr. 31.

**Příklad 19.** Vypočtete teplotní pnutí v turbinovém kotouči konstantní tloušťky, je-li znám průběh teploty  $T = T(r)$ .

**Řešení:** Napjatost budeme považovat za rovinnou a použijeme polárních souřadnic  $r$ ,  $\varphi$ . Radiální resp. obvodové poměrné prodloužení pak vyjde

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_t = \frac{u}{r} \quad (1)$$

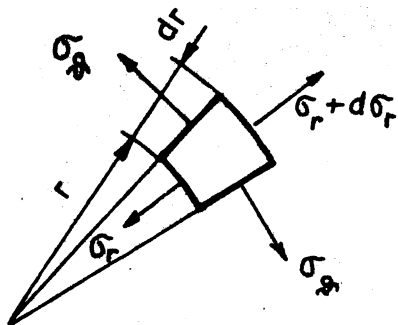
jestliže  $u$  značí radiální posuv. Ostatní složky deformačního tenzoru jsou nulové. Duhamelův-Neumannův zákon (6.14) v tomto případě dává

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1+\mu}{E} \sigma_r - \frac{3\mu}{E} \cdot \frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_\varphi) + \alpha (T - T_0) = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu \sigma_\varphi] + \alpha (T - T_0), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_\varphi &= \frac{1+\mu}{E} \sigma_\varphi - \frac{3\mu}{E} \cdot \frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_\varphi) + \alpha (T - T_0) = \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_\varphi - \mu \sigma_r] + \alpha (T - T_0), \end{aligned} \quad (3)$$

neboť  $\sigma_z = 0$ . Eulerova rovnice dá pro rovnoměrnou rotaci

$$-\rho \omega^2 r = \sigma^{ji}|_j, \quad (4)$$



Obr. 40

kde  $(-\omega^2 r)$  je radiální zrychlení. Přitom  $\sigma^{ji}|_j$  značí kovariantní derivaci. V polárních souřadnicích můžeme vztah (4) rozepsat tak, jak jsme to ukázali v příkladu 38 v publikaci vydané k první části semináře. Stejný vztah však dostaneme také přímým odvozením z obr. 40. Radiální síla působící na element o plošce  $r d\varphi \cdot dr$  totiž vyjde

$$\begin{aligned} &(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\varphi - \sigma_r r d\varphi + \\ &+ \sigma_\varphi dr d\varphi + \omega^2 r \rho r d\varphi dr = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Po roznásobení se členy  $\sigma_r r d\varphi - \sigma_r r d\varphi$  zruší. Nekonečně malé veličiny druhého řádu zanedbáme. Po úpravě zůstane

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \omega^2 \rho r = 0. \quad (6)$$

Z rovnic (1) vyloučíme posuv  $u$  a dostaneme rovnici kompatibility

$$\frac{d\epsilon_\varphi}{dr} + \frac{\epsilon_\varphi - \epsilon_r}{r} = 0. \quad (7)$$

Dosadíme sem z rovnic (2) a (3). Vyjde

$$\frac{1}{1+\mu} \left( \frac{d\sigma_r}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} \right) = \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} - \frac{\alpha E}{1+\mu} \frac{dT}{dr}. \quad (8)$$

Tuto rovnici můžeme zjednodušit, dosadíme-li sem podle (6)

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = - \frac{d\sigma_r}{dr} - \omega^2 \rho r. \quad (9)$$

Vyjde

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_\vartheta}{dr} + \alpha E \frac{dT}{dr} + (1-\mu)\omega^2 \rho r = 0. \quad (10)$$

S použitím (6) můžeme  $\sigma_\vartheta$  vyloučit:

$$\sigma_\vartheta = \frac{d}{dr} (r\sigma_r) + \omega^2 \rho r^2. \quad (11)$$

Pak z rovnice (10) vyjde po snadné úpravě

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^3 \frac{d\sigma_r}{dr}) + \alpha E \frac{dT}{dr} + (3+\mu)\omega^2 \rho r = 0. \quad (12)$$

Postupnou integrací poslední rovnice dostaneme

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} \frac{C_1}{r^2} + C_2 - \alpha E \int_0^r \frac{1}{\eta^3} d\eta \int_0^\eta \xi^2 \frac{dT(\xi)}{d\xi} d\xi - \frac{3+\mu}{8} \omega^2 \rho r^2. \quad (13)$$

Integrál lze zjednodušit záměnou pořadí integrace a užitím integrace per partes. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^r \xi^2 \frac{dT(\xi)}{d\xi} d\xi \int_\xi^r \frac{1}{\eta^3} d\eta &= \int_0^r \xi^2 \frac{dT(\xi)}{d\xi} \left( \frac{1}{2\xi^2} - \frac{1}{2r^2} \right) d\xi = \\ &= -\frac{T(0)}{2} + \frac{1}{r^2} \int_0^r \xi T(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

Poznámka: V rovnicích (13) a (14) jsme předpokládali, že jde o plný kotouč  $0 \leq r \leq r_2$ . Okrajové podmínky pak jsou

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\vartheta && \text{pro } r = 0, \\ \sigma_r &= \sigma_{r_2} && \text{pro } r = r_2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

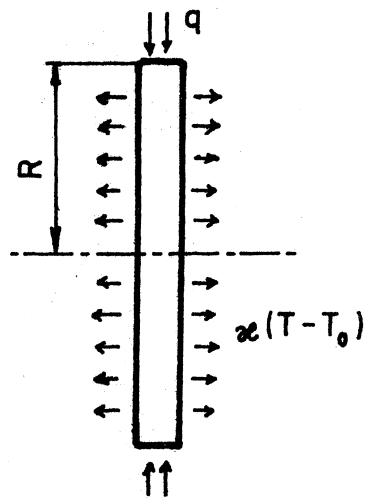
Z první z těchto podmínek vyjde  $C_1 = 0$ . Jde-li o mezikruhový kotouč,  $r_1 \leq r \leq r_2$ , zahrneme konstantu  $-T(0)/2$  z rovnice (14) do integrační konstanty  $C_2$  v rovnici (13), takže bude celkem beze změny platit, že

$$\sigma_r = -\frac{1}{2} \frac{C_1}{r^2} + C_2 - \alpha E \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \xi T(\xi) d\xi - \frac{3+\mu}{8} \omega^2 \rho r. \quad (16)$$

Okrajové podmínky jsou v tomto případě

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r_1} && \text{pro } r = r_1, \\ \sigma_r &= \sigma_{r_2} && \text{pro } r = r_2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

**Příklad 20.** Odvoďte rovnici popisující ustálené rozdělení teploty v plném tenkém turbinovém kotouči konstantní tloušťky  $h$ , je-li kotouč na obvodu zahříván přívodem tepelného toku  $q$  a zároveň ochlazován na obou lícních plochách s konstantním součinitelem přestupu tepla  $\alpha$  (obr. 41).



Obr. 41

**Řešení:** V rovnici (9.17) je pro ustálený stav  $\tau = 0$ ,  $\epsilon_{ij} = 0$ . Pak pro izotropický materiál, pro který  $k_{ij} = k \delta_{ij}$ , vyjde

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \left( k \frac{\partial T}{\partial z^i} \right) = 0. \quad (1)$$

V operátorové symbolice

$$\text{div} [k \text{grad} T] = 0. \quad (2)$$

Je-li  $k = \text{konst}$ , máme

$$\text{div grad} T = \nabla^2 T = 0. \quad (3)$$

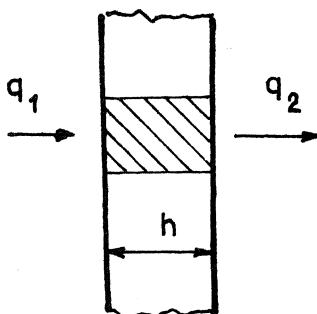
To znamená, že ve válcových souřadnicích bude

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Vzhledem k rotační souměrnosti odpadne na levé straně rovnice předposlední člen. Výraz

$$\Delta q = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} h \quad (5)$$

má význam tepla odváděného jednotkou povrchové plochy, neboť podle obr. 42



Obr. 42



$$\Delta q = q_2 - q_1 = k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_2 - k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_1 = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} h. \quad (6)$$

Výraz (6) platí pro  $\lim h \rightarrow 0$ , tedy pro tenkostěnný kotouč.

Podle obr. 41 je však

$$\Delta q = 2 \alpha (T - T_0), \quad (7)$$

kde  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla. Proto

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{2 \alpha}{k h} (T - T_0) \quad (8)$$

a diferenciální rovnice popisující rozdělení teploty vyjde

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2 \alpha}{k h} (T - T_0) = 0. \quad (9)$$

Rozepsáním dostaneme Besselovu diferenciální rovnici prvního druhu a nultého řádu

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2 \alpha}{k h} T = - \frac{2 \alpha}{k h} T_0. \quad (10)$$

Její řešení je

$$T = C I_0 \left( \sqrt{\frac{2 \alpha}{k h}} \cdot r \right) + T_0. \quad (11)$$

Integrační konstantu  $C$  určíme tak, aby na poloměru  $r = R$  bylo

$$k \frac{dT}{dr} = q \quad (r = R). \quad (12)$$

Vyjde nakonec

$$T = \frac{q}{\sqrt{\frac{2 \alpha k}{h}}} \cdot \frac{I_0 \left( \sqrt{\frac{2 \alpha}{k h}} \cdot r \right)}{I_1 \left( \sqrt{\frac{2 \alpha}{k h}} \cdot R \right)}. \quad (13)$$

Poznámka: Zjednodušující předpoklad, že  $T$  nezávisí na souřadnici  $z$ , nás přinutil použít umělého obratu (6). Jednodušeji bychom dospěli k rovnici (9) také následující úvahou. Válcovým řezem o poloměru  $r$ , který má povrch  $2 \pi r h$ , prochází teplo  $h (dT/dr) \cdot 2 \pi r h$ . Mezikruhovým prstencem o poloměrech  $r$  resp.  $r + dr$  se tedy válcovými částmi povrchu přivede teplo

$$dQ = \frac{d}{dr} \left[ k \left( \frac{dT}{dr} \right) 2\pi r h \right] dr. \quad (14)$$

V ustáleném stavu se toto teplo rovná teplu odvedenému rovnými čelními povrchy, které má velikost  $2 \cdot 2\pi r dr \cdot \alpha \cdot (T - T_0)$ . Odtud (po krácení činitelem  $2\pi dr$  a pro  $k = \text{konst}$ )

$$k h \frac{d}{dr} \left[ r \left( \frac{dT}{dr} \right) \right] = 2\alpha r (T - T_0). \quad (15)$$

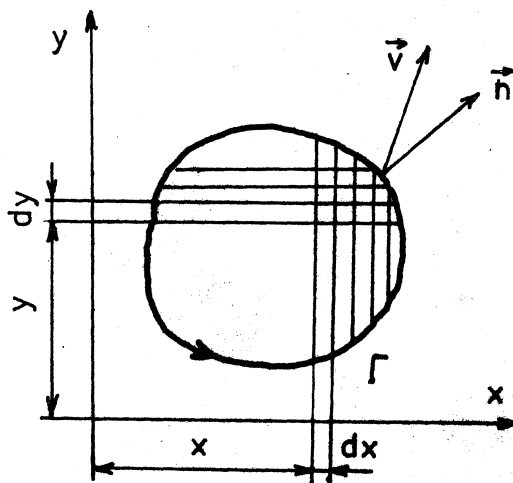
To je však rovnice (9).

Příklad 21. Odvoďte Gaussovu větu pro rovinný případ

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{div } \vec{v} \cdot dS.$$

Řešení: Oblast  $S$  podle obr. 43 rozdělíme na elementární obdélníky  $dx dy$ . Pak

$$\iint_S \text{div } \vec{v} \cdot dS = \iint_S \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1)$$



Obr. 43

Vezměme na pravé straně této rovnice první člen a aplikujme na něj větu Greenovu (viz příklad 18):

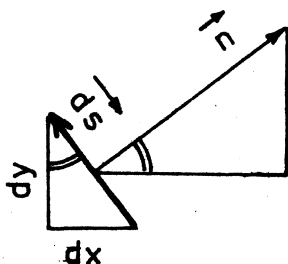
$$\iint_S \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} v_x dx. \quad (2)$$

Podobně

$$\iint_S \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy = - \oint_{\Gamma} v_y dx. \quad (3)$$

Celkem dostaneme

$$\iint_S \operatorname{div} \vec{v} \cdot dx dy = \oint_{\Gamma} (v_x dy - v_y dx). \quad (4)$$



Jednotková normála  $\vec{n}$  má směrové kosiny podle obr. 44  $dy/ds$  resp.  $(-dx)/ds$ , takže skalární součin  $\vec{v} \cdot \vec{n}$  dá

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v^i n_i = v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds}. \quad (5)$$

Dosaďme-li z rovnice (5) do rovnice (4), dostaneme

Obr. 44

$$\iint_S \operatorname{div} \vec{v} dx dy = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot ds. \quad (6)$$

To je však věta, kterou jsme měli odvodit.

**Příklad 22.** Ukažte, jak souvisí komplementární deformační energie

$$\Lambda^* = \int \varepsilon_{ij} d\sigma^{ij}$$

s Gibbsovým termodynamickým potenciálem

$$U_f = \frac{1}{\rho} p v + \mathcal{E} - T \Sigma.$$

**Řešení:** V termomechanice byl termodynamický potenciál  $U_f$  zaveden proto, že se nemění při změnách skupenství. Tehdy je totiž  $p = \text{konst}$ ,  $T = \text{konst}$ , takže

$$\begin{aligned} dU_f &= \frac{1}{\rho} v dp + \frac{1}{\rho} p dv + d\mathcal{E} - \Sigma dT - T d\Sigma = \\ &= \frac{1}{\rho} p dv + d\mathcal{E} - T d\Sigma. \end{aligned} \quad (1)$$

Tato změna je podle prvního termodynamického zákona nulová. V mechanice pevné fáze odpovídá pravá strana rovnice (1) výrazu

$$-\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + d\mathcal{E} - T d\Sigma = 0, \quad (2)$$

což je rovnice (4.13). Výraz  $p dv$  nahrazujeme výrazem  $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ , neboť - jde-li o hydrostatický tlak - je

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij}, & d\varepsilon_{ij} &= +\frac{1}{3} dv \delta_{ij}, \\ \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} &= -\frac{1}{3} p dv \delta_{ij} \delta_{ij} = -\frac{1}{3} p dv \delta_{jj} = \\ &= -\frac{1}{3} p dv \cdot 3 = -p dv. \end{aligned} \quad (3)$$

Obdobně napíšeme  $-\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  místo  $p v$  a dostaneme

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \mathcal{E} - T \Sigma. \quad (4)$$

Diferenciací

$$d\mathcal{U} = -\frac{1}{\rho} (\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) + d\mathcal{E} - \Sigma dT - T d\Sigma. \quad (5)$$

Za  $d\mathcal{E}$  dosadíme podle (4.13). Bude

$$d\mathcal{U} = -\frac{1}{\rho} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - \Sigma dT. \quad (6)$$

Je-li děj izotermický, jde  $dT = 0$ , takže

$$\left( -\rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{T = \text{konst}} = \varepsilon_{ij}. \quad (7)$$

Pro komplementární (doplňkovou) deformační energii  $\Lambda^*$  platí, že

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Lambda^*}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (8)$$

Porovnáním obou posledních rovnic vidíme, že Gibbsův termodynamický potenciál má význam potenciální komplementární deformační energie, jde-li o izotermickou změnu:

$$\Lambda^* = -\rho \mathcal{U} \quad (T = \text{konst}). \quad (9)$$

Protože tato energie je funkcí složek tenzoru napjatosti, mohli bychom ji vhodněji nazývat komplementární energie napjatosti.

Je-li změna adiabatická, bude měrná entropie  $\Sigma$  konstantní, takže podle (6)

$$\varepsilon_{ij} = \rho \frac{\partial (\psi - T\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\Sigma = \text{konst}). \quad (10)$$

V tom případě

$$\Lambda^* = -\rho (\psi + T\Sigma) \quad (\Sigma = \text{konst}). \quad (11)$$

Vztah (8) platí i pro nelineárně elastický materiál.

**Příklad 23.** Uveďte, jak souvisí první a druhá Castiglianova věta s prvním termodynamickým zákonem.

**Řešení:** Pro adiabatickou změnu ( $dQ = 0$ ) a pro statický případ ( $dK = 0$ ) dá rovnice (4.6) pro malé deformace

$$dA = dU. \quad (1)$$

Zde  $A$  značí práci vnějších sil,  $U$  vnitřní energii. Elementární práci vnějších sil  $dA$  můžeme vypočítat jako práci zobecněných sil  $P^i$  na zobecněných elementárních posuvech  $du_i$ , tj. jako součet

$$dA = \sum_{i=1}^n P^i du_i. \quad (2)$$

Dosadíme-li (2) do (1), dostaneme

$$\sum_{i=1}^n P^i du_i = dU \quad \text{či} \quad P^i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \quad (\Sigma = \text{konst}). \quad (3)$$

To je první Castiglianova věta.

Zavedeme-li komplementární energii

$$U^* = \sum_{i=1}^n P^i u_i - U, \quad (4)$$

vyjde diferenciací

$$dU^* = \sum_{i=1}^n (u_i dP^i + P^i du_i) - dU. \quad (5)$$

Za  $dU$  dosadíme podle (3). Po úpravě

$$dU^* = \sum_{i=1}^n u_i dP^i \quad \text{či-li} \quad u_i = \frac{\partial U^*}{\partial P^i} \quad (Y = \text{konst}). \quad (6)$$

To je druhá Castiglianova věta. Obě tedy plynou z prvního termodynamického zákona.

Není-li změna adiabatická, ale izotermická, bude  $dQ = TdY = 0$ , takže podle (4.6)

$$TdY + \sum_{i=1}^n P^i du_i = dU. \quad (7)$$

Zavedeme volnou energii  $F = U - TY$  a pro  $T = \text{konst}$  dostaneme

$$dF = dU - TdY = \sum_{i=1}^n P^i du_i. \quad (8)$$

Odtud

$$P^i = \frac{\partial F}{\partial u_i} \quad (T = \text{konst}). \quad (9)$$

Značí-li  $F^* = \sum_{i=1}^n P^i u_i - F$  komplementární volnou energii, dostaneme

$$dF^* = \sum_{i=1}^n (u_i dP^i + P^i du_i) - dF \quad (10)$$

a s použitím (8)

$$dF^* = \sum_{i=1}^n u_i dP^i. \quad (11)$$

To je však rovnice, ze které přímo vyjde

$$u_i = \frac{\partial F^*}{\partial P^i} \quad (T = \text{konst}). \quad (12)$$

Rovnice (9) resp. (12) je první resp. druhá Castiglianova věta pro izotermickou změnu.

Poznámka:  $F$  značí v tomto příkladu celkovou volnou energii, tedy nikoli sílu, pro kterou jsme užili symbolu  $P$ . Měrnou volnou energii jsme označovali  $\mathcal{F}$ .

**Příklad 24.** Svislá prizmatická tyč je na horním konci vetknuta. Z přirozeného stavu se deformuje jednak účinkem vlastní tíhy, jednak vlivem ohřevu. Rozdíl teplot  $T - T_0 = \text{konst.}$  Stanovte měrnou potenciální deformační energii  $\Lambda(\varepsilon)$  a měrnou komplementární energii napjatosti  $\Lambda^*(\sigma)$ .

**Řešení:** Je-li  $x$  vzdálenost průřezu od spodního konce tyče, je napětí v tyči

$$\sigma = \rho g x, \quad (1)$$

kde  $\rho$  je hustota,  $g$  gravitační zrychlení. Poměrné prodloužení v témže místě je

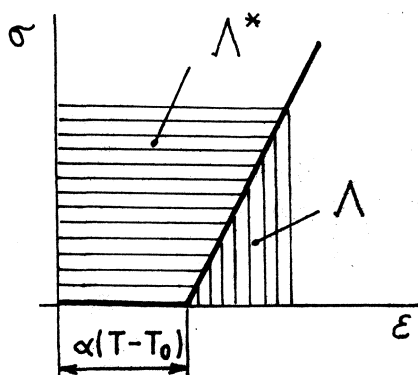
$$\varepsilon = \frac{\rho g}{E} x + \alpha (T - T_0). \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) vypočteme

$$\sigma = E\varepsilon - E\alpha(T - T_0), \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha(T - T_0). \quad (4)$$

Tyto závislosti platí v rozsahu zřejmém z obr. 45. Je proto



Obr. 45

$$\Lambda = \int_{\alpha(T-T_0)}^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} E [\varepsilon - \alpha(T - T_0)]^2, \quad (5)$$

$$\Lambda^* = \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \alpha(T - T_0)\sigma. \quad (6)$$

Z odvození je zřejmé, že vztahy (3) až (6) platí pro jakoukoli "rozumnou" závislost  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , tedy nejen pro tyč zatíženou vlastní tíhou, ale i jinak. Abychom to poznali, stačí za  $\rho g x$  dosadit obecně  $\sigma(x)$ .

**Příklad 25.** Dokažte platnost Colonettiho principu, podle kterého je výsledná práce vlastních pnutí v pružném tělese při deformacích způsobených vnějšími povrchovými silami nulová.

Řešení: Máme dokázat, že

$$\iiint_V \bar{\sigma}^{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0, \quad (1)$$

když tenzor  $\bar{\sigma}^{ij}$  představuje vlastní pnutí (existuje v tělese bez vnějšího zatížení) a  $\varepsilon_{ij}$  tenzor deformací způsobených vnějším povrchovým zatížením.

Abychom větu (1) dokázali, vyjdeme z Eulerovy rovnice (2.34) psané pro statický případ bez objemových sil ( $v^i = 0$ ,  $X^i = 0$ ):

$$\frac{\partial \bar{\sigma}^{ji}}{\partial x^j} = 0. \quad (2)$$

Tuto rovnici znásobíme posuvy  $u_i$  a zintegrujeme:

$$\iiint_V \frac{\partial \bar{\sigma}^{ji}}{\partial x^j} u_i dV = 0. \quad (3)$$

Platí identita (pravidlo o derivaci součinu)

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (\bar{\sigma}^{ji} u_i) = \frac{\partial \bar{\sigma}^{ji}}{\partial x^j} u_i + \bar{\sigma}^{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x^j}. \quad (4)$$

S použitím (4) dá rovnice (3)

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x^j} (\bar{\sigma}^{ji} u_i) dV - \iiint_V \bar{\sigma}^{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dV = 0. \quad (5)$$

Na první člen můžeme aplikovat Gaussovu větu o divergenci. Dostaneme

$$\iint_S \bar{\sigma}^{ji} u_i dS_j - \iiint_V \bar{\sigma}^{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dV = 0. \quad (6)$$

Na povrchu  $S$  jsou však vlastní pnutí nulová, takže první člen v rovnici (6) odpadne. V druhém je  $\partial u_i / \partial x^j + \partial u_j / \partial x^i = 2\varepsilon_{ij}$ , takže

$$\iiint_V \bar{\sigma}^{ji} \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (7)$$

To jsme měli dokázat (připomeňme, že  $\bar{\sigma}^{ji} = \bar{\sigma}^{ij}$ ).

Ponecháváme čtenáři, aby usoudil, jak se tento princip změní, působí-li na těleso zároveň vnější objemové síly.



**Příklad 26.** Vypočtete kritické otevření trhliny  $\delta_{krit}$  a měrnou energii  $g_{krit}$  u materiálu, jehož kritický součinitel intenzity napětí při rovinné napjatosti je  $K_{I,krit} = 70 \text{ MN m}^{-3/2}$ , mez kluzu  $\sigma_k = 490 \text{ MN m}^{-2}$ , modul pružnosti v tahu  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ .

**Řešení:** Podle (14.22)

$$g_{krit} = \frac{70^2 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^{11}} = 24\,500 \text{ N m}^{-1} = 24,5 \text{ kJ m}^{-2}.$$

Z rovnice (14.20)

$$\delta_{krit} = \frac{g_{krit}}{\sigma_k} = \frac{24\,500}{490} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,05 \text{ mm}.$$

Všimněme si, že otevření trhliny  $\delta_{krit}$  má rozměr délky. Není to tedy žádné relativní prodloužení, ale relativní posuv.

## 18. ZÁVĚR

Bylo naší snahou neopakovat poznatky, které lze získat studiem dostupné literatury, ale spíše vytvořit předpoklady pro její úspěšné studium a pro praktické aplikace při řešení speciálních problémů. V této publikaci jsme probrali především ty jevy, které jsou spjaty s termodynamikou pevných a poddajných těles. Ukázali jsme, že i v mechanice pevné fáze je nutné vycházet z termodynamických zákonů, chceme-li být důslední a chceme-li porozumět hlubším souvislostem mezi fyzikálními jevy v mechanice. Výběr látky byl uskutečněn tak, aby doplňoval poznatky, jež si do praxe odnášejí absolventi odborných škol. Byl ovšem určován i omezeným rozsahem této publikace.

Autor doufá, že alespoň zčásti uspokojil čtenáře teoreticky zaměřené, kteří nejsou spokojeni, dokud neproniknou logickou stavbou svého oboru a nepoznají všechny souvislosti, jež při povrchním studiu unikají nebo se zdají nedůležité. Snad se mu podařilo uspokojit do určité míry i ty, kteří se zajímají o každý vědní obor jen potud, pokud bezprostředně souvisí s jejich současnou praktickou činností. Bude vděčen každému čtenáři ze případné připomínky a poznámky k obsahu i k formě výkladu.

## LITERATURA

- /1/ ČEREPANOV, G. P.: *Mechanika chrupkogo razrušeniya.*  
Nauka, Moskva 1974.
- /2/ KASSIR, M. K. - SIH, G. C. (red.): *Mechanics of fracture, vol. 1, 2.*  
Nordhoff, Leyden 1975.
- /3/ KNOTT, J. F.: *Fundamentals of fracture mechanics.* John Wiley,  
New York 1973.
- /4/ KOUTSKÝ, J. - JANDOŠ, F. - KAREL, V.: *Lomy ocelových částí.*  
SNTL, Praha 1976.
- /5/ KOVALENKO, A. D.: *Termouprugosť. Višča škola, Kijev 1975.*
- /6/ LIBOWITZ, H. (red.): *Fracture. An advanced treatise, vol. 1 - 7.*  
Academic Press, New York 1968 - 1972.
- /7/ LAZAN, B. J.: *Damping of materials and members in structural  
mechanics.* Pergamon Press, Oxford 1968.
- /8/ NĚMEC, J.: *Tuhost a pevnost ocelových částí. 2. vyd.,*  
Nakl. ČSAV, Praha 1963.
- /9/ PANASJUK, V. V.: *Predělnoje ravnovesije chrupkich těl s tresčinami.*  
Naukovaja dumka, Kijev 1968.
- /10/ PARKUS, H.: *Thermoelasticity. 2. vyd. Springer-Verlag,*  
Wien 1976.
- /11/ SIH, G. C.: *Mechanics of fracture, vol. I - IV.*  
Nordhoff, Leyden 1973 - 1977.
- /12/ TETELMAN, A. S. - McEVILY, A. J. Jr.: *Fracture of structural materials.*  
John Wiley, New York 1967.

Druh publikace: Sborník  
Název: Stavba strojů 61  
PRINCIPY A ZÁKONY MECHANIKY  
PODDAJNÝCH TĚLES - 2. část  
Autor: Prof. Ing. Cyril Höschl  
Počet stran: 94  
Náklad: 200 výtisků  
Formát: A4  
Číslo publikace: 60-505-79 (1627)  
Vydal a rozmnožil: Dům techniky ČSVTS Praha  
Gorkého náměstí 23, Praha 1  
Datum vydání: Leden 1979

Publikace nebyla jazykově upravena.

Tato publikace je prodejná pouze socialistickým organizacím.