

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



ZÁKLADNÍ PRINCIPY A ROVNICE MECHANIKY KONTINUA

1. část

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1978

Publikace uvádí čtenáře do problémů mechaniky kontinua. Systematicky vysvětluje základní pojmy a definice z mechaniky spojitého prostředí, jako např. definici tělesa a jeho pohybu, matematický způsob popisu pohybu kontinua a tomu odpovídající deformační veličiny, mechanickou práci v různých souřadných soustavách, bázové vektory a metrický tenzor, tenzor přetvoření tělesa, rozbor napjatosti, konstituční rovnice pro elastický materiál, elastické vlastnosti porézního materiálu, konstrukční anizotropii atd. Každá kapitola je doplněna příklady a souhrnem.

Cílem publikace je přispět k rozšíření a prohloubení znalostí, bez nichž nelze porozumět výpočetním postupům a metodám nezbytným zejména při zavádění nových materiálů do konstrukční praxe. Je určena všem technikům, kteří řeší složité praktické konstrukční případy.

PŘEDMLUVA

Zařazením cyklu seminářů o základních principech mechaniky kontinua se ČVTS - Dům techniky Praha snaží přispět k rozšíření a prohloubení znalostí, bez nichž nelze porozumět výpočetním postupům a metodám nezbytným zejména při zavádění nových materiálů do konstrukční praxe. Jde především o nekovové, popř. složené (kompozitní) materiály, dále o různé typy konstrukční anizotropie, materiály příbuzné pryži, porézní materiály aj. Při rozboru vlastností těchto materiálů a při řešení problémů s jejich aplikací je nutné znát nejen základní zákony mechaniky, bez nichž se neobejdeme ani při řešení jednodušších úloh z teorie pružnosti, plasticity, tečení apod., ale také moderní matematické prostředky, bez nichž by byla formulace složitých úloh velmi nepřehledná, ne-li nemožná. Předpokládáme, že semináře s touto tematikou zaujmou nejen pracovníky, řešící složité praktické úkoly, ale i ty, kteří si doplňují své vzdělání formou aspirantury nebo vědecké přípravy.

Semináře jsou zaměřeny podle potřeb širší technické veřejnosti, proto se snažíme, aby výklad byl co nejnázornější, doprovázen četnými příklady. Semináře mohou poskytnout pouze základy. Kdo si bude chtít osvojit hlubší aktivní znalosti, bude musit dále samostatně studovat. Každý účastník semináře by si však měl odnést alespoň tolik poznatků, kolik potřebuje ke studiu náročnější odborné literatury z uvedeného oboru a k její praktické aplikaci.

Pracovníci ČVTS - Domu techniky Praha doufají, že semináře s tímto zaměřením přispějí k většímu využití výsledků z teoretických oborů v konstrukční a technologické praxi.

Formální aparát, který v této publikaci užíváme, dovoluje probírat látku ve větší obecnosti, klade však mimořádné nároky na její technickou přípravu. Autor je proto hluboce vděčen pracovníkům ČVTS - Domu techniky Praha za mimořádné úsilí, které věnovali včasnému a pečlivému vydání publikace, a upřímně jim za ně děkuje.

Cyril Höschl

OBSAH

	Str.
Úvod	7
1. Pohyb kontinua a jeho geometrický popis	8
2. Pohyb jednorozměrného kontinua	10
3. Mechanická práce v různých souřadných soustavách	23
4. Vektorová báze, metrické tenzory	31
5. Transformace souřadnic	41
6. Tenzor přetvoření tělesa	46
7. Vektorový součin a plošné elementy	52
8. Rozbor napjatosti	58
9. Konstituční rovnice pro elastický materiál	67
10. Elastické vlastnosti porézního materiálu, konstrukční anizotropie	70
11. Konstituční rovnice pro vazkou kapalinu a viskoelastický materiál	76
12. Plasticita	80
13. Derivace vektoru v křivočarých souřadnicích	90
14. Kovariantní derivace a její aplikace	95
15. Diferenciální operátory a integrální věty	102
16. Lineární teorie pružnosti, elastické vlny	107
17. Proudění vazké kapaliny	116
18. Průtok kapaliny porézním materiálem (filtrace)	126
19. Nelineárně elastické materiály	131
Literatura	140

ÚVOD

Mechanika je nauka o pohybu a o rovnováze těles. Těmto pojům je třeba dobře rozumět, vědět, co je těleso, pohyb, rovnováha. Téměř každému, kdo má základní vzdělání, zdají se tyto pojmy jasné a bezesporné. Jen ti, kteří jsou zvyklí pozorněji a hlouběji o věcech přemýšlet, vědí, že to tak jednoduché není. Existuje moderní vědní obor - racionální mechanika, který zkoumá, jaká je axiomatická stavba mechaniky a jakým požadavkům musí vyhovovat její poučky, věty, hypotézy a principy, nemají-li obsahovat logický spor. Důležité poznatky z matematiky, zejména z geometrie, z teorie množin a z topologie našly své uplatnění i v mechanice a naopak.

Vyjadřovací prostředky soudobé mechaniky jsou velmi úsporné, laikům velmi málo erozumitelné. Technikům zpravidla chybí hlubší teoretické vzdělání, takže velké část odborné literatury z teoretické a často i z aplikované mechaniky je pro ně zcela nebo zčásti nerozumitelná. Těm právě chceme podat v našich seminářích pomocnou ruku. Náš výklad se nebude moci obejít bez některých čistě abstraktních úvah a bez různých pravidel, týkajících se formy zápisu. Budeme se však snažit, abychom neztratili souvislost s poznatky, jež tvoří základ praktické činnosti každého inženýra, konstruktéra či technologa.

Rozsah semináře neumožňuje ucelený výklad mechaniky kontinua. Výběr látky proto neuspokojí každého zájemce. Doufáme však, že i ti nespokojení najdou v některém z příštích seminářů tohoto cyklu to, co ke své práci potřebují.

V tomto semináři si vytvoříme předpoklady nezbytné k pochopení základů mechaniky kontinua v moderním pojetí. Vysvětlíme nesnáze, které vznikají, chceme-li matematicky popsat těleso, jež se pohybuje (deformuje a přemísťuje). Začneme s jednorozměrným případem, na kterém ukážeme dva odlišné způsoby popisu (Eulerův a Lagrangeův). Pak přejdeme k prostorovým útvarům. Ukážeme, jak lze zjednodušit matematický zápis operací s fyzikálními veličinami, zejména s vektory. To nás přivede cestou přirozeného vývoje k myšlenkám, jež daly vznik tenzorové algebře. Ukáže se, že lze dosáhnout úplného sjednocení formy zápisu důležitých fyzikálních zákonů pro různé druhy souřadných soustav. Tím se otevírá cesta k zobecňování poznatků získaných při zkouškách na jednorozměrných vzorcích (zkušebních tyčích). Nyní lze obecně formulovat zákony elasticity, plasticity, viskoelasticity, proudění vazké kapaliny atd. Lze je zobecňovat bez větších nesnází i pro nehomogenní a anizotropní tělesa, porézní materiály apod.

Není pochyby o tom, že takto pojatý výklad klade mimořádné nároky na pozornost a vnímavost účastníků semináře. Abychom je příliš nepřetěžovali, odsunuli jsme termodynamické zákony do příštích seminářů. V této publikaci se omezujeme na tělesa v pevné a v kapalně fázi, u nichž lze termodynamické jevy přibližně zanedbat.

Četné příklady ilustrují výklad a přibližují obsah semináře každodenní inženýrské praxi. Tím čelíme možným námitkám, že zaměření semináře je příliš teoretické a že je vzdáleno praxi. Mechanika se u nás tradičně rozděluje na "teoretickou" a "technickou". Avšak praxe, využívající moderní výpočtovou techniku, smazává tyto rozdíly. Studium odborné literatury nás o tom denně přesvědčuje. Mechanika je v podstatě jen jedna. Získají-li účastníci tohoto cyklu hlubší pohled do její úžasné, obdivuhodné stavby, neztratí nic ze svých praktických zkušeností, naopak naučí se tyto zkušenosti doplňovat a zobecňovat.

Popularizací těchto poznatků, zákonů a principů chceme též zmenšit dluh naší generace velkým myslitelům minulosti. Silou svého všestranného génia vytvořili předpoklady pro rychlý rozvoj techniky v moderní společnosti. Často čerpáme z jejich díla jen to, co potřebujeme k svému okamžitému užitku. Zapomínáme, že jde mnohdy o poznatky vytržené z širších souvislostí a že teprve tyto souvislosti vytvářejí vědu, jež má vlastní etické zákony i estetická měřítká. Taková věda je pak - ve svém celku a ve všech svých souvislostech - součástí kulturního povědomí a tradice a její historie je nesporně tou lepší stránkou historie člověka. Zaslouží si, aby byla takto vcelku chápána a vykládána.

1. POHYB KONTINUA A JEHO GEOMETRICKÝ POPIS

Nejprve vysvětlíme, co rozumíme spojitým prostředím čili kontinuem. V technické mechanice se tělesa či hmotná prostředí rozlišují podle skupenství (pevná, kapalná, plynná) a podle svých deformačních vlastností (tělesa tuhá, pružná, tekutina stlačitelná, kapalina nestlačitelná, ideální, vazká apod.). Rozdíly nejsou vždy vyhraněné. Některá tělesa, za normální teploty pružná, přecházejí při ohřevu nejprve do tvárného až těstovitého stavu, kdy se již podobají spíše vazké kapalině než pevnému tělesu, a teprve pak přecházejí do kapalného skupenství. Pro potřeby dalšího výkladu zavedeme proto obecnější, poněkud nezvyklou definici tělesa, vymezující přesněji obsah tohoto pojmu.

Tělesem nazveme nekonečnou množinu částic, které lze uvést do jednoznačné vzájemné korespondence s uspořádanými trojicemi reálných

čísel (tj. se souřadnicemi částic). Každé částici připisujeme přitom určitou hmotu, o níž předpokládáme, že je spojitá (kontinuální). Vyjme-li z tělesa určitý objem, přísluší k němu i určitá hmota. Předpoklad spojitosti hmoty znamená, že nekonečně malé změně vyňatého objemu přísluší i nekonečně malá změna množství hmoty, takže při "stažení" objemu k nule vymizí i příslušná hmota. Nepřihlížíme tedy k molekulární stavbě hmoty.

Známe-li vzájemnou polohu všech částic, známe i konfiguraci tělesa, která se může s časem měnit (těleso se může deformovat). Původní souřadnice nějaké částice $X_i = (X_1, X_2, X_3)$ v referenční konfiguraci můžeme k této částici připsat trvale (jako by si každá částice s sebou odnášela jmenovku s natištěnými souřadnicemi). Souřadnicím, spjatým s částicemi tělesa, budeme říkat materiálové (konvektivní) souřadnice; za pohybu částice se nemění. V soustavě souřadnic, která je v prostoru pevná, budou se však souřadnice částic při pohybu obecně měnit. Označme tyto prostorové souřadnice $x_i = (x_1, x_2, x_3)$. Každá z nich bude zřejmě záviset na materiálových souřadnicích (jež určují, o jakou částici jde) a na čase, takže

$$x_i = F_i(X_1, X_2, X_3, t). \quad (1)$$

Vzájemně jednoznačné přiřazení vyžaduje, aby existoval také inverzní vztah

$$X_i = f_i(x_1, x_2, x_3, t). \quad (2)$$

Souřadnice tedy tvoří jednoparametrickou soustavu popisující konfiguraci tělesa za jeho pohybu. Protože body $X_i = (X_1, X_2, X_3)$ jsou neměnné body euklidovského prostoru, představuje rovnice (2) zobrazení tělesa do euklidovského prostoru. Přetvořené těleso nemá zlomy ani trhliny (až snad na ojedinelá místa), takže zobrazení (1), (2) musí být spojitě a hladké, tj. funkce v těchto rovnicích musí být jednoznačné a musí mít potřebné derivace (až snad na určité singulární body, křivky, plochy).

Mění-li se parametr t , mění se obecně i konfigurace tělesa a jeho poloha v prostoru. Rovnice (1), popř. (2) popisují pohyb tělesa.

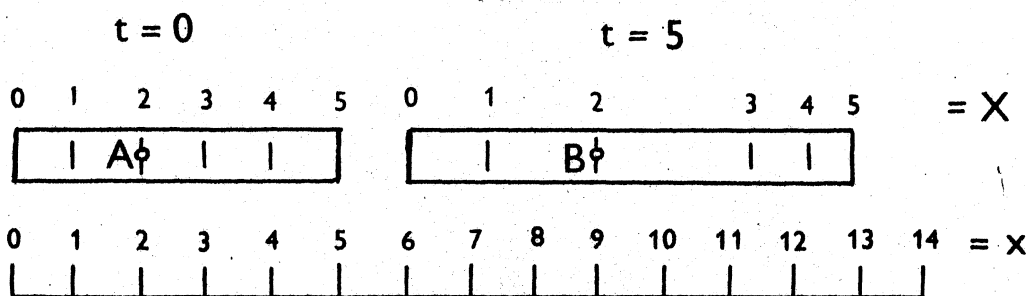
Mechanika kontinua studuje pohyb těles, pro něž existují vzájemně jednoznačné transformace (1), (2) (tj. těles, u nichž jsme schopni sledovat "osud" jednotlivých částic). Zahrnujeme sem zřejmě pohyb tuhých i poddajných těles, kapalin a plynů, pokud můžeme zanedbat jejich molekulovou stavbu. Nepatří sem jevy, které popisuje kvantová mechanika, ani jevy s neuspořádaným pohybem částic (Brownovy pohyby, kinetická teorie plynů, turbulence).

Vystupují-li v rovnicích popisujících pohyb tělesa materiálové souřadnice jako nezávisle proměnné (např. v rovnici (1), mluvíme o Lagrangeově způsobu popisu děje. Jsou-li nezávisle proměnnými prostorové souřadnice (např. v rovnici (2)), jde o Eulerův způsob popisu. Lagrangeův způsob je obvyklejší v mechanice pevné fáze, Eulerův v mechanice tekutin (kapalin a plynů). Rozdíl mezi oběma způsoby popisu pohybu těles podrobněji vysvětlíme v příští kapitole.

Souhrn. Vyslovili jsme definici tělesa v mechanice kontinua na základě jeho jednoparametrického zobrazení do euklidovského prostoru. Parametrem je zde čas. V průběhu času se mění konfigurace tělesa, vzniká jeho pohyb. Pohyb tělesa lze popisovat buď v materiálových souřadnicích spjatých s tělesem, které se tedy za pohybu nemění (Lagrangeův způsob), nebo v souřadnicích pevných v prostoru (Eulerův způsob). Mezi oběma způsoby popisu existuje jednoznačná korespondence.

2. POHYB JEDNOROZMĚRNÉHO KONTINUA

Budeme se zabývat pohybem prizmatické tyče z poddajného materiálu (materiálu velmi obecných deformačních vlastností). Omezíme se na případ, kdy neexistuje příčný pohyb částic (nebo je zanedbatelný) a rovinnost průřezů a jejich kolmost k ose tyče se zachovává, takže pohyb všech částic v témže průřezu je určen jedinou polohovou souřadnicí $X = f(x, t)$, popř. $x = F(X, t)$.



Obr. 1

Abychom co nejnázorněji vysvětlili rozdíl mezi oběma druhy souřadnic, představíme si, že tyč je dlouhá např. 5 m. V referenční konfiguraci ji opatříme stupnicí po jednom metru. Jednotlivým dílkům této stupnice přísluší materiálové souřadnice $X = 0, X = 1, X = 2, \dots, X = 5$. Za pět sekund se poloha a konfigurace tyče změní tak, jak je znázorněno na obr. 1. Je zřejmé, že stupnice pro materiálovou

souřadnici se deformovala a je nyní nerovnoměrná. Souvislost mezi materiálovou a prostorovou souřadnicí určíme např. pro částici vyznačenou body A, B. (Jde o stejnou částici, která se za pohybu přemístila z polohy A do polohy B.) Protože $X_A = X_B = 2$, $x_A = 2$, $x_B = 9$, bude

$$f(x = 2, t = 0) = f(x = 9, t = 5) = 2$$

a podobně

$$F(X = 2, t = 0) = 2,$$

$$F(X = 2, t = 5) = 9.$$

To jsou příklady závislosti souřadnic podle vzorců (1) a (2). Podle Lagrangeova způsobu sledujeme pohyb stále stejné částice, která mění místo, kdežto podle Eulerova způsobu sledujeme stále stejné místo, jímž procházejí různé částice. ^{*/}

Nyní si všimneme, co se děje s elementární částicí, kterou z tyče "uvolníme" dvěma myšlenými řezy, vzdálenými v referenční konfiguraci o malou veličinu ΔX (obr. 2). Jaký je posuv levého konce elementu? V Lagrangeově popisu je to

$$U = U(X, t) = F(x, t) - X, \quad (3)$$

a v Eulerově popisu

$$u = u(x, t) = x - f(x, t). \quad (4)$$

Je to ovšem vždy stejná vzdálenost. Pro posuv pravého konce elementu dostaneme podle obr. 2 a rovnice (3) pro $\lim \Delta X \rightarrow 0$

$$U(x + \Delta x, t) = U(x, t) + \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x. \quad (5)$$

Rozdíl délek $\Delta x - \Delta X$ se pak rovná rozdílu posuvů pravého a levého konce, což je prodloužení elementu

$$\Delta x - \Delta X = U + \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x - U = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x. \quad (6)$$

^{*/} Částicí zde rozumíme nekonečně malou část spojitého tělesa o objemu dV a o hmotnosti ρdV .

Je tedy

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta u - \Delta X}{\Delta X} = \varepsilon. \quad (7)$$

Výraz (7) představuje Cauchyho hodnotu poměrného prodloužení ε , obvykle užívanou v lineární teorii pružnosti. Je výhodná tehdy, kdy jde o malá přetvoření. Zde však zvolíme podle Lagrange za míru přetvoření hodnotu

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{(\Delta u)^2 - (\Delta X)^2}{(\Delta X)^2}. \quad (8)$$

Z rovnice (7) vypočteme podíl $\frac{\Delta u}{\Delta X} = \frac{\partial U}{\partial X} + 1$ a dosadíme do (8).

Vyjde Greenova hodnota poměrného prodloužení

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2. \quad (9)$$

Kdybychom vyšli z Eulerova popisu, tj. z rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}, \quad (10)$$

dostali bychom obdobně Almansiho hodnotu poměrného prodloužení

$$e = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta u)^2 - (\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (11)$$

Tato veličina se obecně liší od hodnoty (9), neboť stupnice se pro oba druhy souřadnic rovněž liší. Všimněme si, že Almansiho poměrné prodloužení se vztahuje ke čtverci délky Δx přetvořeného elementu, kdežto Greenova hodnota se vztahuje k čtverci původní délky ΔX . Jen tehdy, je-li přetvoření malé, splynou výrazy (9) a (11) s hodnotou Cauchyho poměrného prodloužení, takže pak

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial X} \cong \frac{\partial u}{\partial x} \cong e \cong \varepsilon. \quad (12)$$

Pro rychlost částice na obr. 2 dostaneme

$$V = V(X, t) = \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (13)$$

popřípadě

$$v = v(x, t) = V [f(x, t), t]. \quad (14)$$

Výrazy (13) a (14) dávají stejnou hodnotu, neboť jde o okamžitou rychlost téže částice, která nezávisí na volbě souřadnic.

Položme si nyní důležitou otázku: jak se mění funkce $\varphi(x, t)$, je-li spojena s hmotnou částicí? Může to být např. teplota částice nebo její posuv apod. Změna $\Delta\varphi$ připadající na časový interval Δt přejde v derivaci, zvolíme-li $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt}$. Podle pravidla o derivaci složených funkcí vypočítáme v Eulerově popisu substanciální změnu

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (15)$$

První člen na pravé straně se počítá pro $x = \text{konst}$ a vyjadřuje lokální část změny. Druhý člen vyjadřuje konvektivní část, vzniklou přenesením částice do nového místa (za pohybu mění částice svou polohu).

Abychom tyto druhy změn lépe ozřejmili, vrátíme se ještě k obr. 1. Chtěli bychom např. určit teplotu tělesa a její změnu za pohybu. Zaměříme se na částici, která se přemístí v časovém intervalu Δt z bodu A v prostoru do bodu B. Pozorovatel, který by měřil teploměrem teplotu stále ve stejném místě A, zjistil by během intervalu Δt vzrůst teploty o ΔT_1 . To je lokální změna teploty. Jiný pozorovatel by měřil pomocí dvou čidel současný (okamžitý) rozdíl teplot v bodech B a A. V okamžiku, kdy sledovaná částice je právě v bodě A, zjistil by rozdíl teplot ΔT_2 (o ten je teplota v místě B vyšší než v místě A ve stejném okamžiku). To je konvektivní změna. Jsou-li body A, B dostatečně blízko, je v nich přibližně stejná lokální změna teploty, takže výslednou změnu, kterou podstoupí částice hmoty při pohybu z bodu A do B, dostaneme jako součet $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2$. To platí tím přesněji, čím menší je Δt (a tedy čím blíže jsou si body A, B).

V Lagrangeově popisu bude mít vyšetřovaná funkce tvar $\Phi = \Phi(x, t)$. Protože materiálová souřadnice X je spjata s částicí a za pohybu se nemění, vypočítáme derivaci podle času velmi jednoduše

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (X = \text{konst}). \quad (16)$$

Hodnoty (15) a (16) jsou stejné. Jak vidíme, snadno by mohl vzniknout omyl, kdybychom označili obě funkce φ , Φ stejným symbolem (k tomu svádí okolnost, že jde o touž fyzikální veličinu, např. teplotu,

vázanou k téže částici, takže $\varphi(x, t) = \Phi(x, t)$. Omylu předejdeme tím, že zavedeme zvláštní označení pro tzv. materiálovou (substanciální) derivaci

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x=\text{konst}} + v \frac{\partial}{\partial x} \quad (17)$$

Označení jsme zvolili s přihlédnutím k tvaru rovnice (15). V Eulerově popisu pak bude mít rovnice (15) tvar

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{D\varphi}{Dt} \quad (18)$$

Představuje-li funkce $\varphi(x, t)$ posuv částice $u(x, t)$, vyjde rychlost částice v Eulerově popisu

$$v = \dot{u}(x, t) = \frac{Du}{Dt} \quad (19)$$

To je jiná forma rovnice (14). Zrychlení pak vyjde další derivací

$$a = \dot{v} = \frac{Dv}{Dt} = \frac{D^2u}{Dt^2} \quad (20)$$

V Lagrangeově popisu budeme mít zrychlení

$$A = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} \quad (21)$$

Hodnoty (20) a (21) jsou stejné.

Pokusme se nyní vyjádřit zákon zachování hmotnosti. Má-li tyč jednotkový průřez, bude její hmotnost mezi dvěma průřezy v referenční konfiguraci

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \rho_0(x) dx \quad (22)$$

a v obecné konfiguraci

$$M = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \quad (23)$$

Množství hmoty mezi těmito dvěma průřezy se nezměnilo, musí proto být

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_0(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \quad (24)$$

Použijeme-li vztahy

$$x = F(X, t), \quad dx = \frac{\partial F}{\partial X} dX, \quad (25)$$

dostaneme pro pravou stranu rovnice (24)

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \int_{X_1}^{X_2} \rho(x, t) \frac{\partial F(X, t)}{\partial X} dX. \quad (26)$$

Dosadíme-li (26) do (24), dostaneme integrály se stejnou proměnnou (X) a se stejnými, avšak libovolně zvolenými mezemi (X_1, X_2). Proto se musí rovnat integrandy, takže vztah mezi hustotou $\rho_0(X)$ v referenční konfiguraci a $\rho(x, t)$ v obecné konfiguraci (za pohybu) bude

$$\rho_0(X) = \rho(x, t) \frac{\partial F(X, t)}{\partial X}. \quad (27)$$

Zákon zachování hmotnosti vyjadřuje poznatek, že hmota uzavřená mezi dvěma průřezy má hmotnost nezávislou na čase, takže

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = 0. \quad (28)$$

Při derivaci tohoto integrálu nesmíme zapomenout, že i meze integrálu závisejí na čase, neboť $x = F(X, t)$. Podmínka (28) pak dá - podle pravidel známých z matematiky -

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \rho(x_2, t) \frac{\partial F(X_2, t)}{\partial t} - \rho(x_1, t) \frac{\partial F(X_1, t)}{\partial t}$$

čili - s odkazem na (13) a (14) -

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + [\rho(x, t) v(x, t)]_{x_1}^{x_2}. \quad (29)$$

První člen na pravé straně poslední rovnice udává přírůstek hustoty uvnitř oblasti, druhý člen změnu hustoty vzniklou bilancí přitéklého a vyteklého množství ve stejné oblasti.

Protože $[\rho v]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} dx$, plyne z rovnice (29) podmínka

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = 0. \quad (30)$$

Kdyby průřez tyče nebyl jednotkový (a tedy konstantní), ale měnil se v závislosti na souřadnici x podle vztahu $S = S(x, t)$, byla by podmínka zachování hmotnosti ^{*}/

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho S dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho S v) \right] dx = 0. \quad (31)$$

Rozepsáním derivací v integrandu (za předpokladu, že tyto derivace existují) s využitím rovnice (30)

$$\begin{aligned} S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial S}{\partial x} &= \\ &= \rho \frac{\partial S}{\partial t} + \rho v \frac{\partial S}{\partial x} = \rho \frac{DS}{Dt} \end{aligned} \quad (32)$$

přejde (31) do tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho S dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{DS}{Dt} dx = 0. \quad (33)$$

Nadále budeme předpokládat jednotkový průřez a odvodíme pohybovou rovnici. V prostorovém popisu označíme napětí v tyči symbolem $\sigma = \sigma(x, t)$. Výsledná síla působící na element mezi dvěma řezy je

$$Q_{1,2} = \sigma(x_2, t) - \sigma(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} dx. \quad (34)$$

Ta se musí rovnat časové změně hybnosti všech částic izolovaných mezi oběma průřezy, tj.

$$Q_{1,2} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) v(x, t) dx. \quad (35)$$

Předpis pro výpočet tohoto integrálu máme na levé straně (33), takže můžeme psát

$$Q_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) \frac{Dv(x, t)}{Dt} dx. \quad (36)$$

^{*}/ To znamená, že by těleso - kontinuum - protékalo kanálem, který by nemusil mít v prostoru pevný tvar.

Protože meze x_1 , x_2 volíme libovolně, dostaneme porovnáním integrandů z rovnic (34) a (36) pohybovou rovnici v prostorových souřadnicích (v Eulerově popisu)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho(x, t) \frac{Dv}{Dt}. \quad (37)$$

Nyní přejdeme k materiálovým souřadnicím, v nichž zavedeme pro napětí symbol $\Sigma = \Sigma(X, t)$. Je vztaženo ke stejnému průřezu jako napětí $\sigma(x, t)$, proto musí být

$$\Sigma(X, t) = \sigma(x, t) = \sigma(F, t). \quad (38)$$

Odtud dostaneme - s využitím pravidla o derivaci složené funkce -

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial X} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial X}. \quad (39)$$

Rovnici (37) rozšíříme činitelem $\frac{\partial F}{\partial X}$, použijeme (39), (27) a využijeme rovnosti (20) a (21); dostaneme tak pohybovou rovnici v materiálových souřadnicích (v Lagrangeově popisu)

$$\frac{\partial \Sigma(X, t)}{\partial X} = \rho_0(X) \frac{\partial V(X, t)}{\partial t}. \quad (40)$$

Nyní se ještě pokusíme vyjádřit zákon zachování energie. Protože máme jednotkový průřez, znamená napětí $\sigma(x, t)$ zároveň sílu v průřezu x v čase t . Výkon je dán součinem síly a rychlosti, takže mechanický výkon dodávaný do našeho elementu mezi řezy x_1 , x_2 bude

$$P_1 = \sigma(x_2, t) v(x_2, t) - \sigma(x_1, t) v(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\sigma v)}{\partial x} dx.$$

Zároveň budeme dodávat teplo v množství q na jednotku skutečné délky přetvořené tyče, takže tepelný příkon bude $P_2 = \int_{x_1}^{x_2} q dx$. Celkový příkon energie vyjde

$$P = P_1 + P_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial(\sigma v)}{\partial x} + q \right] dx. \quad (41)$$

Spotřebuje se jednak na zvýšení kinetické energie, jednak na vzrůst vnitřní energie (energie napjatosti a tepla) akumulované v tyči. Označíme-li vnitřní energii připadající na jednotku hmotnosti $w = w(x, t)$, bude součet kinetické a vnitřní energie

$$A = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \rho v^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \rho w(x,t) dx. \quad (42)$$

Zákon zachování energie bude mít tvar $P = dA/dt$, čili

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial(\sigma v)}{\partial x} + q \right] dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho v^2 dx + \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho w dx. \quad (43)$$

Meze lze volit libovolně, takže se musí rovnat integrandy ^{*}/

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma v) + q = \rho v \frac{Dv}{Dt} + \rho \frac{Dw}{Dt}. \quad (44)$$

Přitom jsme využili pravidlo o derivaci, známé z rovnice (33). Nyní ještě dosadíme za $\rho \frac{Dv}{Dt}$ z rovnice (37) a dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma v) + q = v \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho \frac{Dw}{Dt}$$

čili

$$\sigma \frac{\partial v}{\partial x} + q = \rho \frac{Dw}{Dt}. \quad (45)$$

To je tedy hledaný tvar zákona zachování energie.

Příklad 1

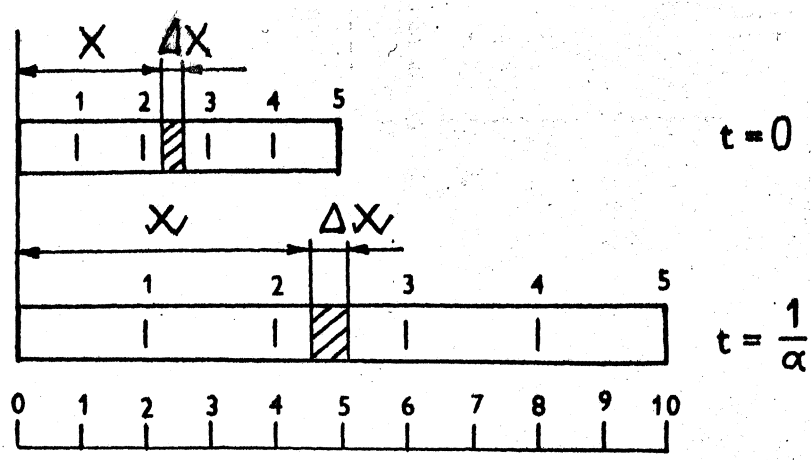
Budeme vyšetřovat pohyb tyče jednotkového (neměnného) průřezu, popsany rovnicemi

$$x = X(1 + \alpha t), \quad X = \frac{x}{1 + \alpha t}. \quad (a)$$

Jak snadno nahlédneme, jde o rovnoměrné roztahování ($\alpha > 0$) nebo stlačování ($\alpha < 0$) tyče, vetknuté na levém konci. Budeme předpokládat,

^{*}/ Ke stejnému výsledku dospějeme, zvolíme-li $x_2 = x_1 + \Delta x$ a integrály vyčíslíme s použitím věty o střední hodnotě, pak pro $x_1 = x$, $\lim \Delta x \rightarrow 0$ dostaneme (44).

že $\alpha > 0$. Zkreslíme si pro větší názornost polohu tyče v okamžiku $t = 0$ a $t = \alpha^{-1}$ (obr. 3). V tomto okamžiku bude $x = 2X$, $X = \frac{1}{2}x$.



Obr. 3

Pro posuvy dostaneme podle (3), popř. (4)

$$U = X(1 + \alpha t) - X = \alpha t X, \tag{b}$$

$$u = x - \frac{x}{1 + \alpha t} = \frac{\alpha t x}{1 + \alpha t}. \tag{c}$$

Obě hodnoty jsou stejné vzhledem k platnosti (a), takže $U = u$. Greenova hodnota poměrného prodloužení podle (9) je

$$\xi = \alpha t + \frac{1}{2} (\alpha t)^2, \tag{d}$$

kdežto Almansiho hodnota podle (11) vyjde

$$e = \frac{\alpha t}{1 + \alpha t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha t}{1 + \alpha t} \right)^2. \tag{e}$$

Cauchyho poměrné prodloužení je

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial X} = \alpha t. \tag{f}$$

Je-li αt velmi malé, dají poslední tři rovnice přibližně stejnou hodnotu poměrného prodloužení. Pro $t = \alpha^{-1}$ však vyjde

$$u = U = X = 0,5x, \quad \xi = 1,5, \quad e = 0,375, \quad \varepsilon = 1.$$

Pro rychlost dostaneme podle (13), resp. (14) vztahy

$$V = \alpha X, \quad v = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t}. \quad (g)$$

Obě hodnoty jsou ovšem stejné a např. pro $t = \alpha^{-1}$ dají $V = v = \alpha X = 0,5 \alpha x$. Z rovnice (19) vyjde

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha x (1 + \alpha t) - \alpha^2 t x}{(1 + \alpha t)^2} + \frac{\alpha x}{1 + \alpha t} \cdot \frac{\alpha t}{1 + \alpha t} = \\ &= \frac{\alpha x + \alpha^2 x t}{(1 + \alpha t)^2} = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t}. \end{aligned}$$

což je totéž. Zrychlení vyjde podle (20) i (21) opět stejné, a to nulové, neboť

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial t} (\alpha X) = 0, \\ a &= \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\alpha^2 x}{(1 + \alpha t)^2} + \frac{\alpha x}{1 + \alpha t} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha t} = 0. \end{aligned}$$

Hustota se mění podle (27) takto:

$$\rho_0(x) = \rho(x, t)(1 + \alpha t).$$

Je tedy

$$\rho(x, t) = \frac{1}{1 + \alpha t} \rho_0(x). \quad (h)$$

Je-li $\alpha t = 1$, bude hustota poloviční proti počáteční hodnotě.

Zákon zachování hmotnosti (30) je zřejmě splněn, neboť

$$\frac{-\alpha \rho_0}{(1 + \alpha t)^2} + \frac{\alpha \rho_0}{(1 + \alpha t)^2} = 0.$$

Zrychlení je nulové, takže napětí podle (37) je v daném okamžiku v celé tyči konstantní, může však záviset na čase

$$\sigma = \sum = \varphi(t). \quad (i)$$

Materiálová derivace vnitřní energie vyjde podle (45), (g) a (h)

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\alpha \sigma}{\rho_0} + g \frac{\rho_0}{1 + \alpha t} = \frac{\alpha \varphi(t)}{\rho_0(x)} + g(x) \frac{\rho_0(x)}{1 + \alpha t} \quad (j)$$

Je-li pohyb tyče způsoben lineární teplotní roztažností, bude $\sigma = \varphi(t) \cdot 0$ a $\frac{Dw}{Dt} = g(x) \rho(x, t)$. Přidávaná energie (teplo) se v tom případě mění pouze na vnitřní energii, neboť kinetická energie zůstává konstantní. Je totiž

$$\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \rho v^2 dx = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \rho_0(x) \alpha^2 X^2 dx = \text{konst.} \quad (k)$$

Použili jsme substituci $x = (1 + \alpha t) X$ a rovnici (h). Výsledný integrál je funkcí pouze mezi x_1 , x_2 a nezávisí na čase. Obecně může být pohyb tyče způsoben nenulovým napětím (silovým působením) i změnou teploty zároveň.

Příklad 2

Předpokládejme lineární konstituční zákon (Hookeův)

$$\Sigma = E \frac{\partial U}{\partial X} \quad (a)$$

$E = \text{konst.}$ Jaká bude pohybová rovnice pro jednorozměrný pohyb?

Řešení

Dosadíme (a) do rovnice (40) a dostaneme

$$E \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \rho_0(x) \frac{\partial V}{\partial t} \quad (b)$$

Protože $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ podle (13) a (3), je konečně

$$c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (c)$$

kde $c^2 = E/\rho_0(x)$. To je známá rovnice pro šíření podélných vln; je-li $\rho_0 = \text{konst.}$, je rychlost šíření podélných vln rovněž konstantní a rovná se

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (d)$$

Příklad 3

Dokažte, že pro obecný konstituční zákon

$$\Sigma = \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \varphi(\varepsilon)$$

vyjde rychlost šíření podélných vln

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\varphi}{d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\Sigma}{d\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon}}$$

Podélná vlna se může šířit jenom tehdy, splňuje-li poměrné prodloužení ε podmínku

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} > 0.$$

Příklad 4

Dokažte, že v prostorovém popisu platí pro zrychlení a jedno-rozměrného pohybu kontinua vzorec

$$a = \frac{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + 2 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^3}$$

Návod

Rozepište (19), vypočtete v a derivujte podle času.

Souhrn. Zavedli jsme dvojí způsob popisu pohybu kontinua (Lagrangeův a Eulerův) a tomu odpovídající deformační veličiny (Greenovu a Almansiho poměrnou deformaci). Zdá se, že se tím problém zbytečně komplikuje. Proti této námitce lze uvést, že komplikace vzniká nikoli formami matematického popisu, ale potřebou zabývat se teorií velkých deformací (např. v teorii plasticity, tečení, při popisu deformací materiálů podobných pryži). Definice poměrného přetvoření jsou voleny naopak tak, aby se popis těchto komplikovaných fyzikálních jevů co nejvíce matematicky zjednodušil, což ukážeme později (v kapitole 6). Každý z obou způsobů popisu má své výhody i nevýhody, takže

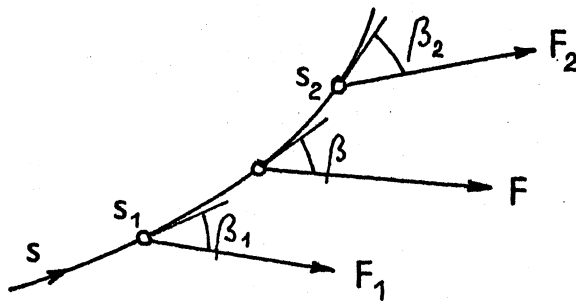
žádný z nich nelze zavrhnout. Všimněme si např., o co jednodušší je pohybová rovnice v materiálovém popisu (40) než v prostorovém popisu (37), neboť veličiny v rovnici (37) se vztahují k deformovanému tvaru elementu, jehož deformace teprve hledáme. Prostorový popis je obvykle výhodnější v teorii proudění. Čtenář zajisté poznává v rovnici (30) známou rovnici kontinuity pro neustálené proudění stlačitelné kapaliny (v prostorovém popisu). Účelem této kapitoly bylo ilustrovat typické rozdíly mezi oběma způsoby popisu pohybu tělesa.

3. MECHANICKÁ PRÁCE V RŮZNÝCH SOUŘADNICOVÝCH SOUSTAVÁCH

Mechanická práce je skalární veličina. Připomeňme si způsob, jak ji za různých okolností počítáme. Působí-li na některou částici tělesa síla \vec{F} , vykoná při posuvu částice $d\vec{u}$ mechanickou práci $\vec{F} \cdot d\vec{u} = A$. Přitom předpokládáme, že se síla (její velikost a směr) nemění. Pokud by tento předpoklad neplatil, rozdělili bychom posuv na diferenciální přírůstky, během nichž lze změnu síly zanedbat, takže

$$A = \int \vec{F}(\vec{u}) \cdot d\vec{u}. \quad (46)$$

Tato rovnice by sama o sobě nebyla příliš jasná, kdybychom nevysvětlili, jak chceme integrál vyčíslit. Vysvětlíme to pomocí obr. 4.



Obr. 4

Nechť se působiště síly \vec{F} pohybuje po oblouku s od bodu $s = s_1$ do bodu $s = s_2$. Pak

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cos[\beta(s)] ds. \quad (47)$$

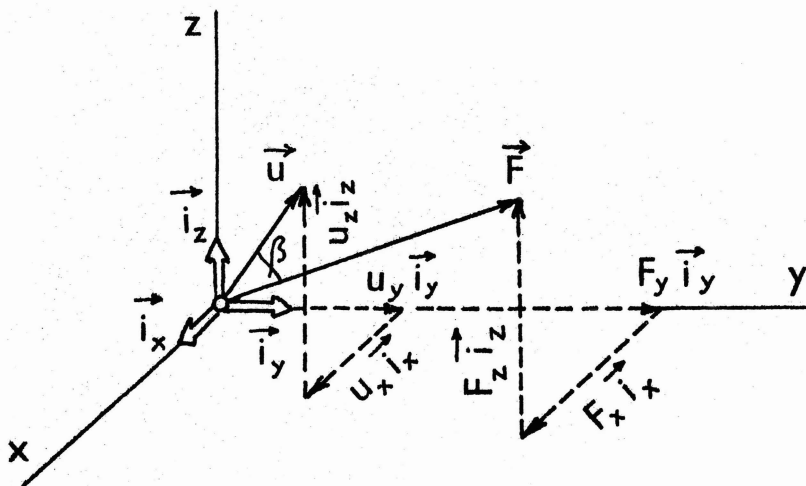
Rovnice (46) a (47) jsou významově totožné. Liší se jen v tom, že v rovnici (46) je skalární součin dvou vektorů $\vec{F} \cdot d\vec{u}$, kdežto v rovnici (47) jsou už jen skalární veličiny $F(\beta)$, $\beta(\beta)$, vstupující do křivkového integrálu. Skalární součin je významný tím, že vektorové veličiny transformuje na veličinu skalární. Toto využívají všechny tzv. energetické metody a principy v mechanice, počínaje principem virtuálních prací.

Vraťme se nyní k případu konstantní síly. Zvolíme-li pravouhlou soustavu souřadnic x, y, z , můžeme práci síly $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ při posuvu jejího působišť $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ vyjádřit také jako součet součinů složek obou vektorů, takže

$$A = \vec{F} \cdot \vec{u} = F u \cos \beta = u_x F_x + u_y F_y + u_z F_z. \quad (48)$$

K tomu dospějeme nejnázorněji pomocí jednotkových vektorů $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ (obr. 5), pro něž platí podmínky ortogonality

$$\begin{aligned} \vec{i}_x \cdot \vec{i}_x &= \vec{i}_y \cdot \vec{i}_y = \vec{i}_z \cdot \vec{i}_z = 1, \\ \vec{i}_x \cdot \vec{i}_y &= \vec{i}_y \cdot \vec{i}_z = \vec{i}_z \cdot \vec{i}_x = 0. \end{aligned} \quad (49)$$



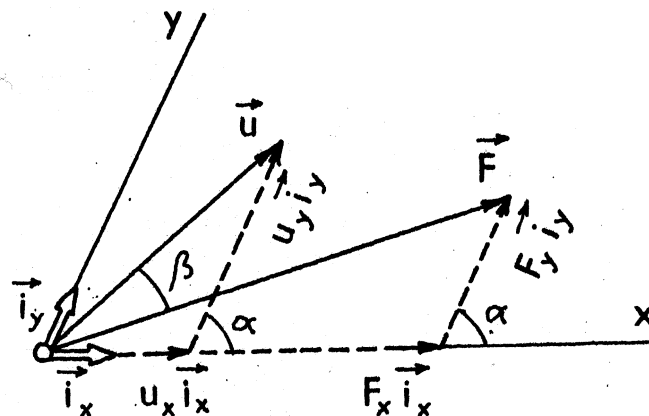
Obr. 5

Je totiž

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{i}_x + F_y \vec{i}_y + F_z \vec{i}_z, \\ \vec{u} &= u_x \vec{i}_x + u_y \vec{i}_y + u_z \vec{i}_z.\end{aligned}\quad (50)$$

Rozepsáním součinu $\vec{F} \cdot \vec{u}$ pomocí (49) a (50) dostaneme (48).

Jak se změní vzorec (48), použijeme-li kosoúhlu soustavu souřadnic? Omezíme se přitom nejprve na dvě proměnné, abychom mohli oba vektory přehledněji znázornit (obr. 6). Složka F_x vykoná práci na dráze $u_x + u_y \cos \alpha$, složka F_y na dráze $u_y + u_x \cos \alpha$, neboť takový je průmět posuvu \vec{u}



Obr. 6

do osy souřadnic x , popř. y . Práci síly \vec{F} při posuvu \vec{u} proto vypočteme ze vzorce

$$A = F_x (u_x + u_y \cos \alpha) + F_y (u_y + u_x \cos \alpha). \quad (51 a)$$

Tento vzorec lze však upravit také takto:

$$A = u_x (F_x + F_y \cos \alpha) + u_y (F_y + F_x \cos \alpha). \quad (51 b)$$

V tomto druhém tvaru vystupují v oblých závorkách průměty síly \vec{F} do os x, y . Rovnice (48), (51 a) a (51 b) můžeme formálně sjednotit, zavedeme-li ke složkám F_x, F_y jejich protějšky

$$\begin{aligned}u_1 &= u_x + u_y \cos \alpha, \\ u_2 &= u_x \cos \alpha + u_y\end{aligned}\quad (52)$$

nebo naopak k posuvům u_x, u_y jejich silové protějšky

$$\begin{aligned}F_1 &= F_x + F_y \cos \alpha, \\ F_2 &= F_x \cos \alpha + F_y.\end{aligned}\quad (53)$$

Význam těchto "protějšků" je jednoduchý; jsou to velikosti kolmých průmětů vektoru \vec{u} , popř. \vec{F} do souřadnicových os.

Z důvodů, které budou ihned zřejmé, budeme dále psát F^1, F^2 místo F_x, F_y a podobně u^1, u^2 místo u_x, u_y . Rovnice (51 a, b) budou nyní mít velmi jednoduchý tvar

$$A = F^1 u_1 + F^2 u_2, \quad (54 \text{ a})$$

$$A = u^1 F_1 + u^2 F_2. \quad (54 \text{ b})$$

Složky F^1, F^2 , popř. u^1, u^2 jsou "obyčejné" složky vektoru v kosoháhlých souřadnicích $1 \equiv x, 2 \equiv y$. Pomocí jednotkových vektorů \vec{i}_1, \vec{i}_2 můžeme proto psát

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F^1 \vec{i}_1 + F^2 \vec{i}_2, \\ \vec{u} &= u^1 \vec{i}_1 + u^2 \vec{i}_2. \end{aligned} \quad (55)$$

Složkám F^1, F^2 popř. u^1, u^2 , jejichž index je nahoře, budeme říkat kontravariantní složky. Význam tohoto pojmenování vysvětlíme později.

Chceme-li, aby také veličiny F_1, F_2 , popř. u_1, u_2 měly význam složek příslušných vektorů, aby tedy platilo, že

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_1 \vec{i}^1 + F_2 \vec{i}^2, \\ \vec{u} &= u_1 \vec{i}^1 + u_2 \vec{i}^2, \end{aligned} \quad (56)$$

musíme zavést takové vektory \vec{i}^1, \vec{i}^2 , aby vynásobením $\vec{F} \cdot \vec{u}$ z rovnic (55) a (56) vyšly rovnice (54 a, b). K tomu musíme násobit první z rovnic (55) s druhou z rovnic (56) a naopak.

Požadavku vyhovíme, bude-li platit, že

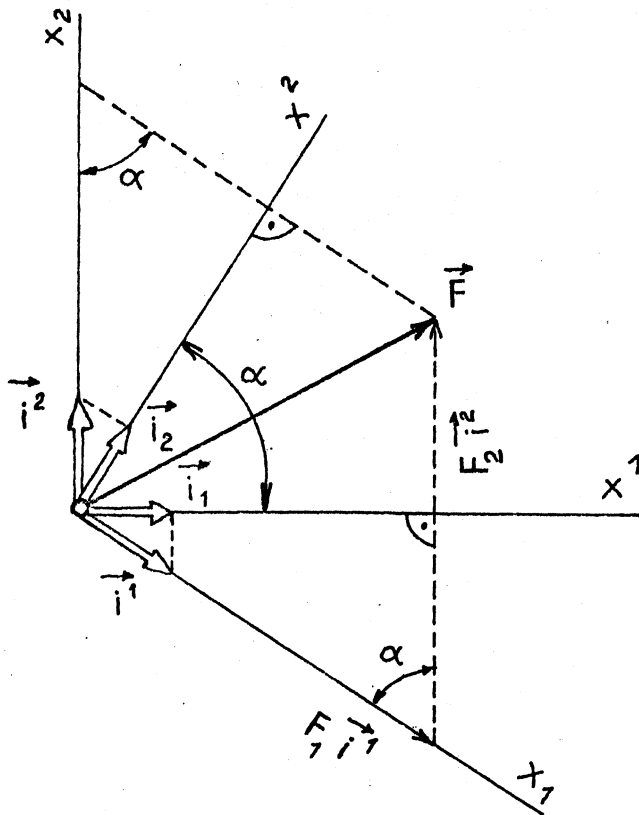
$$\vec{i}^m \cdot \vec{i}_n = \delta_n^m \quad (m, n = 1, 2), \quad (57)$$

kde δ_n^m = Kroneckerův symbol. Platí, že

$$\begin{aligned} \delta_n^m &= 1 \quad \text{pro} \quad m = n, \\ \delta_n^m &= 0 \quad \text{pro} \quad m \neq n. \end{aligned} \quad (58)$$

To jsou podmínky ortogonality, takže vektor \vec{u}^1 musí být kolmý k vektoru \vec{u}^2 a vektor \vec{u}^2 kolmý k \vec{u}^1 . Rozklad vektoru \vec{F} do těchto směrů je zřejmý z obr. 7.

Obr. 7



Na levé straně (57) je skalární součin. Např. pro vektory \vec{u}^1 , \vec{u}^1 musí platit, že

$$|\vec{u}^1 \cdot \vec{u}^1| = |\vec{u}^1| \cdot |\vec{u}^1| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \delta_1^1 = 1.$$

Protože \vec{u}_1 je jednotkový vektor, je $|\vec{u}_1| = 1$. Potom však

$$|\vec{u}^1| = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Stejná hodnota vyjde i pro $|\vec{u}^2|$. To znamená, že referenční vektory \vec{u}^1 , \vec{u}^2 už nejsou jednotkové. Jejich absolutní velikost je

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos(\vec{u}^n, \vec{u}^m)}.$$

Složky F_1 , F_2 (stejně jako u_1 , u_2) budeme nazývat kovariantní. V kosoúhlých souřadnicích má každý vektor dva druhy složek. Složky kontravariantní vznikají rozkladem vektoru do směrů souřadnicových os. Kovariantní složky vznikají rozkladem vektoru do os

kolmých k původním souřadnicovým osám a jejich velikost je dána kolmým průmětem vektoru do těchto souřadnicových os. Index kovariantních složek je dole. Je-li $\alpha = \pi/2$, tedy jsou-li souřadnice pravouhlé, splynou oba druhy složek.

Toto rozlišení obou druhů rozkladu umožňuje sjednotit způsob zápisu skalárního součinu $\vec{F} \cdot \vec{u}$ ve tvaru součtu smíšených součinů podle (54 a), popř. (54 b).

Uvedené poznatky lze snadno rozšířit i na třírozměrný prostor. Opět bude platit (57), avšak indexy m, n budou nyní nabývat hodnot 1, 2, 3, takže vektor \vec{i}^1 bude kolmý ke dvěma vektorům \vec{i}_2, \vec{i}_3 a pro skalární součin $\vec{F} \cdot \vec{u}$ bude platit kterákoli z těchto rovnic

$$\left. \begin{aligned} A &= F^1 u_1 + F^2 u_2 + F^3 u_3 = \sum_{k=1}^3 F^k u_k, \\ A &= u^1 F_1 + u^2 F_2 + u^3 F_3 = \sum_{k=1}^3 u^k F_k. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Vzhledem k mimořádné důležitosti skalárního součinu v mechanice můžeme očekávat, že se tvar (59) součtu součinů složek různých variancí bude vyskytovat velmi často. Albert Einstein navrhl zjednodušení zápisu zavedením součtového pravidla. Vyskytne-li se v nějakém součinu či u nějakého symbolu dvakrát stejný symbol latinské abecedy (jednou jako horní, po druhé jako dolní index), znamená to automaticky sečítání podle tohoto indexu, jenž nabývá postupně hodnot 1, 2, 3.

Rovnice (59) lze pak zjednodušeně psát jako

$$A = F^k u_k = F_k u^k. \quad (60)$$

Místo indexu "k" jsme mohli užít kterékoli písmeno latinské abecedy, aniž se význam zápisu takovou záměnou změní. Proto se tomuto indexu (který se vyskytuje dvakrát a znamená součet) říká slepý index.

S použitím součtového pravidla lze přepsat první z rovnic (55) a druhou z rovnic (56) do tvaru

$$\vec{F} = F^m \vec{i}_m, \quad \vec{u} = u_m \vec{i}^m. \quad (61)$$

Skalární součin dvou vektorů lze psát také takto:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{u} = F^m u_m \vec{i}_m \cdot \vec{i}^m = F^m u_m \delta_m^m. \quad (62)$$

Přitom jsme použili (57). Na pravé straně (62) je nyní dvojný součet (sečítá se podle m, n vždy od 1 do 3), který má obecně devět členů. Z nich jsou však podle (58) nenulové jen ty, v nichž $m = n$.

Dostaneme nakonec jen tři nenulové členy, takže

$$F^m u_m \delta_m^m = F^m u_m = F^1 u_1 + F^2 u_2 + F^3 u_3. \quad (63)$$

Kroneckerův symbol obstaral v tomto případě substituci indexu m za index m .

V rovnicích (61) jsme úmyslně použili různé slepé indexy m , n , abychom předešli nejjasnostem při vyčíslení součtu (62) (aby se týž index nevyskytoval v daném součtu více než dvakrát).

Omezíme-li se někdy na úlohy se dvěma nezávisle proměnnými souřadnicemi (v rovině nebo na ploše), použijeme jako indexy písmena řecké abecedy, jež budou nabývat jen hodnot 1, 2 (místo 1, 2, 3).

Příklad 5

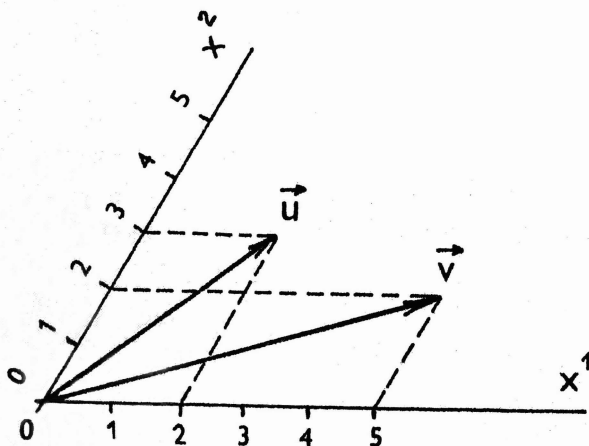
V kosouhlých rovinných souřadnicích, jejichž osy spolu svírají úhel 60° , jsou dány vektory $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (5, 2)$ (obr. 8). Vypočítáme jejich kovariantní složky a skalární součin. Zřejmě

$$u_1 = 2 + 3 \cos 60^\circ = 2 + 1,5 = 3,5,$$

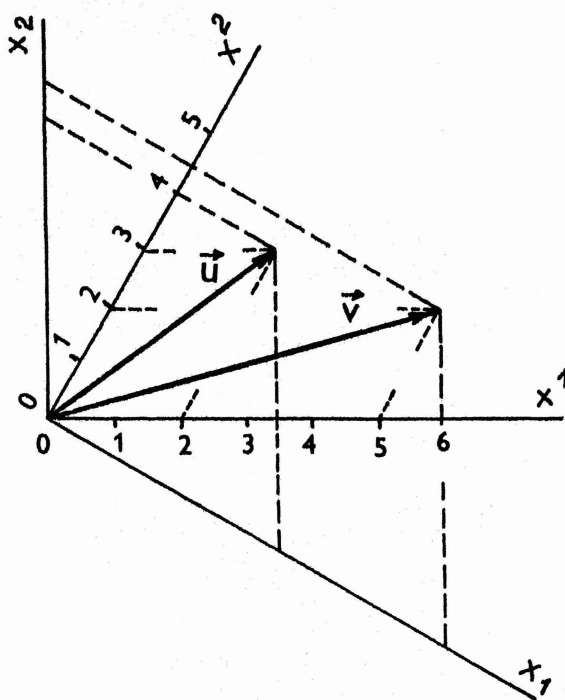
$$v_1 = 5 + 2 \cos 60^\circ = 6,$$

$$u_2 = 2 \cos 60^\circ + 3 = 4,$$

$$v_2 = 5 \cos 60^\circ + 2 = 4,5.$$



Obr. 8



Obr. 9

Skalární součin vypočteme buď jako

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u^\alpha v_\alpha = u^1 v_1 + u^2 v_2 = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4,5 = 25,5,$$

nebo jako

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_\alpha v^\alpha = u_1 v^1 + u_2 v^2 = 3,5 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 25,5.$$

Na obr. 8 je naznačen rozklad vektorů na kontravariantní složky. Rozklad na kovariantní složky je zřejmý z obr. 9.

Příklad 6

Určete délku vektorů z předchozího příkladu. "Délkou" zde rozumíme absolutní velikost

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u^\alpha u_\alpha} = \sqrt{2 \cdot 3,5 + 3 \cdot 4} = \sqrt{19} \doteq 4,36,$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v^\alpha v_\alpha} = \sqrt{5 \cdot 6 + 2 \cdot 4,5} = \sqrt{39} \doteq 6,24.$$

Kreslíme-li výkres v měřítku, můžeme se přesvědčit o správnosti těchto výpočtů změřením délky nakreslených vektorů.

Příklad 7

Vyčíslete hodnotu δ_n^m .

Odpověď

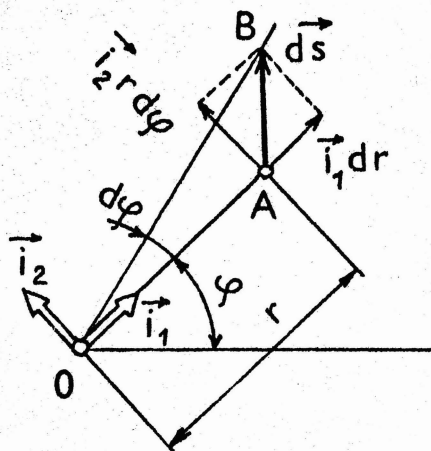
$$\delta_n^m = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Souhrn Zavedením některých pravidel pro práci s indexy jsme dosáhli pozoruhodného zjednodušení matematického zápisu pro poměrně složité výrazy. Rozlišením kovariantních a kontravariantních složek vektorů jsme získali jednotný předpis pro výpočet skalárního součinu dvou vektorů v libovolné přímočaré soustavě souřadnic. Sjednocení formy zápisu pro různé druhy soustav souřadnic nás osvobozuje od závislosti na volbě jisté soustavy souřadnic a uvolňuje naši myšlenkovou kapacitu. Můžeme se nyní mnohem úspěšněji věnovat obecné formulaci fyzikálních zákonů. Tato formulace bude stejná pro jakoukoli soustavu souřadnic. Námaha spojená s výpočtem v konkrétní soustavě je tím odložena na pozdější dobu, kdy dané vzorce budeme vyčíslovat podle pevně daných pravidel.

4. VEKTOROVÁ BÁZE, METRICKÉ TENZORY

V minulé kapitole jsme zavedli dvojí způsob rozkladu vektoru do jeho složek. Kromě jednotkových vektorů \vec{e}_m jsme zavedli ještě sdružené vektory \vec{e}^m , jejichž délka už nebyla jednotková. Nyní rozšíříme svou zkušenost o výpočet v křivočarých souřadnicích.

Nejjednodušším příkladem křivočarých souřadnic jsou polární souřadnice v rovině. Z obr. 10 je zřejmé, že jde o ortogonální soustavu. Její zvláštností je, že souřadnice r , φ nemají stejný fyzikální rozměr, první má rozměr délky, druhá je v obloukové míře, tedy bezrozměrová. V libovolném bodě $A(r, \varphi)$ můžeme zavést jednotkové vektory \vec{e}_1, \vec{e}_2 ve směrech r, φ . Pro elementární vektor $d\vec{s}$ pak platí rozklad



Obr. 10

$$d\vec{s} = \vec{e}_1 dr + \vec{e}_2 r d\varphi.$$

(64)

Podobně jako dříve rozlišíme obě souřadnice pouze číslicemi, takže budeme psát x^1, x^2 místo r, φ , a tedy dx^1, dx^2 místo $dr, d\varphi$. Tyto veličiny budou nyní značit kontravariantní složky elementárního vektoru $d\vec{s}$.

Všimněme si, že také diferenciály mají různý fyzikální rozměr, dx^1 značí délku, dx^2 úhel v obloukové míře, tedy nepojmenované číslo. Abychom dosáhli stejné jednoduchosti zápisu jako v přímočarých souřadnicích, např. jako ve vzorci (61), musíme zavést místo jednotkových vektorů tzv. bázové vektory

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{g}_2 = \vec{e}_2 \cdot r.$$

(65)

Rozklad (64) pak bude mít tvar

$$d\vec{s} = \vec{g}_1 dx^1 + \vec{g}_2 dx^2 = \vec{g}_\alpha dx^\alpha,$$

(66)

stejně jednoduchý jako dříve. V prostorových souřadnicích, jež nyní mohou být obecně křivočaré, bude obdobně

$$d\vec{s} = \vec{g}_m dx^m.$$

(67)

Souřadnice nemusí být ani ortogonální. Dříve probrané soustavy souřadnic (kartézská a kosoháňlá přímočará) jsou jen zvláštní případy křivočarých souřadnic.

Spojnice \overline{OA} na obr. 10 je rádiusvektor (průvodič) bodu A. Tento rádiusvektor budeme označovat \vec{r} . Element délky $d\vec{s}$ lze tedy považovat za diferenciální přírůstek rádiusvektoru, tj. $d\vec{s} = d\vec{r}$. Protože $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2, x^3)$, kde x^m jsou souřadnice vektoru \vec{r} (bod A), bude (v třírozměrném prostoru)

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^m} dx^m. \quad (68)$$

Srovnáním (67) a (68)

$$\vec{g}_m = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^m}. \quad (69)$$

Bázové vektory (69) použijeme k rozkladu do složek pro libovolný vektor vázaný k bodu A. Např. pro sílu

$$\vec{F} = \vec{g}_m F^m. \quad (70)$$

Zkušenosti z minulé kapitoly nás vedou k tomu, abychom hned zavedli také sdruženou vektorovou bázi \vec{g}^m , pro kterou bude platit soustava rovnic

$$\vec{g}^m \cdot \vec{g}_m = \delta_m^m. \quad (71)$$

Vektory \vec{g}_m tvoří kovariantní, \vec{g}^m kontravariantní bázi. Tyto báze se označují jako vzájemně reciproké vektorové báze. Důvod tohoto pojmenování vysvětlíme později v souvislosti s rovnicí (82). Kontravariantní vektorová báze umožňuje rozklad vektoru \vec{F} do jeho kovariantních složek F_m

$$\vec{F} = \vec{g}^m F_m. \quad (72)$$

Skalární součin dvou vektorů, např. \vec{u} , \vec{v} , je pak

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_m \vec{g}^m \cdot v^m \vec{g}_m = u_m v^m \delta_m^m = u_m v^m \quad (73)$$

nebo obdobně

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u^m \vec{g}_m \cdot v_m \vec{g}^m = u^m v_m \delta_m^m = u^m v_m. \quad (74)$$

Rozložíme-li bázeový vektor \vec{q}_1 do kontravariantních složek, dostaneme (1, 0, 0), neboť

$$\vec{q}_1 = \vec{q}_1 \cdot 1 + \vec{q}_2 \cdot 0 + \vec{q}_3 \cdot 0. \quad (75)$$

To je triviální případ. Rozklad do kovariantních složek už triviální není; obecně dostaneme

$$\vec{q}_1 = g_{11} \vec{q}^1 + g_{12} \vec{q}^2 + g_{13} \vec{q}^3 = g_{1j} \vec{q}^j. \quad (76)$$

Obdobný rozklad platí i pro ostatní bázeové vektory, takže obecně budeme mít

$$\vec{q}_i = g_{ij} \vec{q}^j, \quad \vec{q}^i = g^{ij} \vec{q}_j. \quad (77)$$

Devět hodnot g_{ij} jsou kovariantní složky metrického tenzoru, g^{ij} jsou kontravariantní složky téhož tenzoru.

Zajímavý výsledek dostaneme, znásobíme-li mezi sebou skalárně vektory stejné báze

$$\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j = g_{ik} \vec{q}^k \cdot \vec{q}_j = g_{ik} \cdot \delta_j^k = g_{ij}. \quad (78)$$

Podobně

$$\vec{q}^i \cdot \vec{q}^j = g^{ij}. \quad (79)$$

Hodnoty (78), (79) jsou souměrné v indexech, neboť skalární součin je komutativní ($\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$). Součin dvou vektorů, z nichž jeden patří do dané a druhý do reciproké báze, dá

$$\vec{q}_i \cdot \vec{q}^j = g_{im} \vec{q}^m \cdot g^{jn} \vec{q}_n = g_{im} \cdot g^{jn} \cdot \vec{q}^m \cdot \vec{q}_n \quad (80)$$

a vzhledem k (71)

$$\vec{q}_i \cdot \vec{q}^j = g_{im} \cdot g^{jn} \cdot \delta_n^m = g_{im} g^{jm}. \quad (81)$$

Porovnáme-li rovnici (81) se vztahem (71), dostaneme

$$g_{im} g^{jm} = \delta_i^j. \quad (82)$$

Uspořádáme-li složky g_{im} , popř. g^{jm} do matic 3×3 , dá jejich součin podle (82) jednotkovou matici

$$[g_{im}][g^{mj}] = [\delta_i^j] = [I]. \quad (82 \text{ a})$$

Proto se kovariantní a kontravariantní vektorové báze nazývají vzájemně reciproké.

Je-li známo g_{ik} , lze z rovnice (82) - což je vlastně soustava rovnic - vypočítat g^{ik} . Hodnoty g_{ik} dostaneme buď podle (69) a (78), nebo také tak, že vypočteme čtverec délky elementu

$$|d\vec{s}|^2 = \vec{g}_i dx^i \cdot \vec{g}_k dx^k = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (83)$$

v němž vystupují g_{ik} jako koeficienty kvadratické formy proměnných dx^i . Proto se tenzor g_{ik} nazývá "metrický", slouží totiž k výpočtu elementární délky v prostoru obecně křivočarých a třeba i fyzikálně nesořadých souřadnic. Výpočet bázevých vektorů a složek metrického tenzoru ukážeme později na příkladech.

Vraťme se ještě k rozkladu vektoru \vec{u} do složek. Zajisté platí, že

$$\vec{u} = u^i \vec{g}_i = u_j \vec{g}^j. \quad (84)$$

S použitím (77) je však také

$$\vec{u} = u^i g_{ij} \cdot \vec{g}^j = u_j \vec{g}^j, \quad (85)$$

takže

$$u^i g_{ij} = u_j. \quad (86)$$

Obdobně lze ukázat, že

$$u_i g^{ij} = u^j. \quad (87)$$

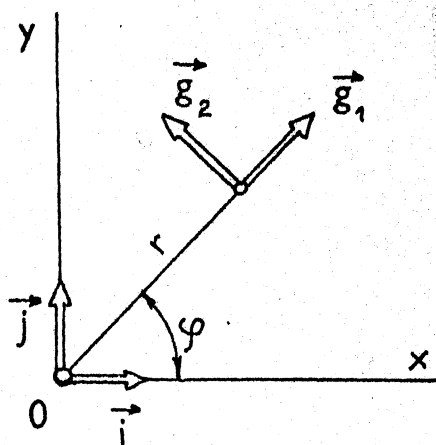
Metrický tenzor tedy slouží také k zvyšování nebo snižování indexu. Pro skalární součin tak dostaneme další alternativní vzorec

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v^i = u_i v_j g^{ij} = u^j v^i g_{ij}. \quad (88)$$

Vektor síly, vektor rychlosti, vektor zrychlení jsou příklady vektoru spojeného s bodem A, v němž určujeme vektorovou bázi (je obecně v různých bodech různá). Tyto vektory můžeme rozložit do kovariantních a kontravariantních složek v daném bodě. Rádusvektor a vektor konečného posuvu jsou příklady vektorů, které takto jednoznačně

rozložit nemůžeme, aniž předem stanovíme bod, v němž bude rozklad platit. Obvykle to bývá buď počáteční, nebo koncový bod příslušného vektoru. V tom je zásadní nesnáž, která je spjata s velkými deformacemi v teorii pružnosti.

Příklad 8



V polárních souřadnicích podle obr. 11 platí transformační vztahy

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

takže rádiusvektor \vec{r} lze vyjádřit v soustavě x, y jako

$$\vec{r} = \vec{i} r \cos \varphi + \vec{j} r \sin \varphi. \quad (a)$$

Podle (69) vyjde

Obr. 11

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi, \quad (b)$$

$$\vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \vec{i} (-r \sin \varphi) + \vec{j} r \cos \varphi. \quad (c)$$

Podle (78)

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \\ g_{12} &= g_{21} = \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = -r \sin \varphi \cos \varphi + r \cos \varphi \sin \varphi = 0, \\ g_{22} &= \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 = r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi = r^2. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Vypočteme-li pomocí Pythagorovy věty čtverec elementu délky podle obr. 10

$$|d\vec{s}|^2 = dr^2 + (r d\varphi)^2 = dx^1 dx^1 + x^1 x^1 dx^2 dx^2, \quad (e)$$

dostaneme srovnáním s rozkladem podle (83), totiž s rovnicí

$$|d\vec{s}|^2 = g_{11} dx^1 dx^1 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^2 dx^2 \quad (f)$$

ihned hodnoty (d). Můžeme tedy postupovat dvojím způsobem.

Soustava (82) dá

$$\left. \begin{aligned} g_{11} g^{11} + g_{12} g^{12} &= \delta_1^1 = 1 \\ g_{11} g^{21} + g_{12} g^{22} &= \delta_1^2 = 0 \\ g_{21} g^{11} + g_{22} g^{12} &= \delta_2^1 = 0 \\ g_{21} g^{21} + g_{22} g^{22} &= \delta_2^2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Po dosazení z rovnic (d) dá tato soustava

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2} \quad (h)$$

S použitím (77) vypočteme

$$\left. \begin{aligned} \vec{g}^1 &= g^{11} \vec{g}_1 + g^{12} \vec{g}_2 = g^{11} \vec{g}_1 = \vec{g}_1 \\ \vec{g}^2 &= g^{21} \vec{g}_1 + g^{22} \vec{g}_2 = g^{22} \vec{g}_2 = \frac{1}{r^2} \vec{g}_2 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Samozřejmě bychom mohli místo (83) také psát

$$\begin{aligned} |d\vec{s}|^2 &= \vec{g}^i dx_i \cdot \vec{g}^j dx_j = g^{ij} dx_i dx_j = \\ &= g^{11} dx_1 dx_1 + 2g^{12} dx_1 dx_2 + g^{22} dx_2 dx_2 = \\ &= dx_1 dx_1 + \frac{1}{r^2} dx_2 dx_2 \end{aligned} \quad (j)$$

a srovnáním s rovnicí (e) určit kovariantní složky

$$dx_1 = dx^1 = dr, \quad dx_2 = r^2 d\varphi \quad (k)$$

Stejný výsledek dostaneme ze vztahu (86), totiž z rovnice

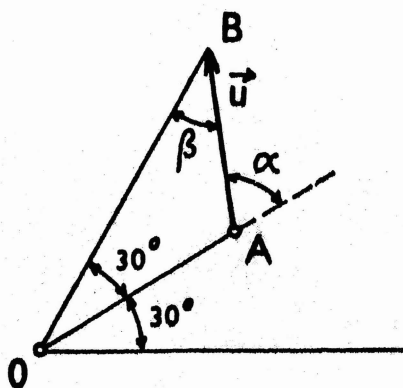
$$dx_i = g_{ij} dx^j \quad (l)$$

Je zřejmé, že přírůstek dx_2 není přírůstkem žádné "skutečné" souřadnice a že má rozměr plochy [m^2].

Příklad 9

Nechť vektor \vec{u} spojuje body A, B, jejichž polární souřadnice jsou (obr. 12) $r_A = 4 \text{ m}$, $\varphi_A = 30^\circ$, $r_B = 6 \text{ m}$, $\varphi_B = 60^\circ$. Určete složky vektoru \vec{AB} jednak v bodě A, jednak v bodě B.

Obr. 12



Řešení

Nejprve vypočteme z kosinové věty

$$AB = \sqrt{16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}} \approx 3,23 \text{ m}$$

a ze sinové věty

$$\sin \alpha = \frac{6}{3,23} \sin 30^\circ \approx 0,929, \quad \cos \alpha \approx 0,37, \quad \alpha \approx 68^\circ 16'$$

V bodě A budou kontravariantní složky

$$u^1 = AB \cos \alpha = 3,23 \cdot 0,37 = 1,196 \text{ m},$$

$$u^2 = \frac{1}{OA} \cdot AB \sin \alpha = \frac{1}{4} \cdot 3,23 \cdot 0,929 = 0,75.$$

Kovariantní složky vypočteme pomocí (87)

$$u_1 = g_{11} u^1 + g_{12} u^2 = u^1 = 1,196 \text{ m},$$

$$u_2 = g_{21} u^1 + g_{22} u^2 = r \cdot r \cdot 0,75 = 16 \cdot 0,75 = 12 \text{ m}^2.$$

Pro délku AB dostaneme buď

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{g_{ij} \cdot u^i u^j} = \\ &= \sqrt{u^1 u^1 + 16 u^2 u^2} = \sqrt{1,196^2 + 16 \cdot 0,75^2} = 3,23 \text{ m}, \end{aligned}$$

nebo alternativně

$$AB = \sqrt{g^{ij} u_i u_j} = \sqrt{1,196 + \frac{12 \cdot 12}{16}} = 3,23 \text{ m},$$

$$AB = \sqrt{u^i u_i} = \sqrt{1,196^2 + 0,75 \cdot 12} = 3,23 \text{ m}.$$

V bodě B vyjde obdobně

$$u^1 = AB \cos \beta = 3,23 \cdot 0,7852 = 2,536 \text{ m,}$$

$$u^2 = \frac{1}{OB} AB \sin \beta = \frac{1}{6} \cdot 3,23 \cdot 0,6193 = 0,333,$$

$$u_1 = 2,536 \text{ m,}$$

$$u_2 = 36 \cdot 0,333 = 12 \text{ m}^2.$$

Metrický tenzor má v bodě B složky

$$g_{11} = g^{11} = 1, \quad g_{22} = 36 \text{ m}^2, \quad g^{22} = \frac{1}{36} \text{ m}^{-2}.$$

Pro délku AB vyjde stejná hodnota jako dříve

$$\sqrt{g_{ij} u^i u^j} = \sqrt{2,536^2 + 36 \cdot 0,333^2} = 3,23 \text{ m,}$$

$$\sqrt{g^{ij} u_i u_j} = \sqrt{2,536^2 + \frac{1}{36} \cdot 12^2} = 3,23 \text{ m.}$$

Samozřejmě i zde bychom mohli použít vzorec

$$AB = \sqrt{u^i u_j} = \sqrt{2,536 \cdot 2,536 + 0,333 \cdot 12} = 3,23 \text{ m.}$$

Příklad 10

Vypočítejte skalární součin vektorů \vec{OA} , \vec{OB} (obr. 12) s využitím výsledků z příkladu 9.

Řešení

Vektory rozložíme do složek ve stejném bodě, např. A. S označením $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ dostaneme kontravariantní složky

$$a^1 = OA = 4 \text{ m,} \quad a^2 = 0, \quad b^1 = OB \cos 30^\circ = 6 \cdot 0,866 = 5,196 \text{ m,}$$

$$b^2 = \frac{1}{OA} OB \sin 30^\circ = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 0,5 = 0,75. \quad \text{S kovariantními složkami}$$

g_{ij} metrického tenzoru z příkladu 9 dostaneme

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ij} a^i b^j = 1 \cdot 4 \cdot 5,196 + 36 \cdot 0 \cdot 0,75 = 20,784 \text{ m}^2.$$

V tomto příkladu jsme oběma vektorům přisoudili stejný fyzikální rozměr jako v příkladu 9, totiž délku [m]. Výsledek má proto rozměr [m²], ale nemá fyzikální interpretaci. Kdyby jeden z vektorů představoval posuv a druhý sílu, představoval by jejich skalární součin fyzikální práci.

Všimněme si, že v souladu s pravidly o slučování vektorů platí v bodě A, že

$$u^1 = b^1 - a^1,$$

$$u^2 = b^2 - a^2.$$

Příklad 11

Pro ortogonální bipolární souřadnice v rovině (obr. 13) platí vztahy

$$x^1 = \psi = \ln \frac{A}{r},$$

$$\operatorname{tgh} \psi = \frac{2x}{1+x^2+y^2},$$

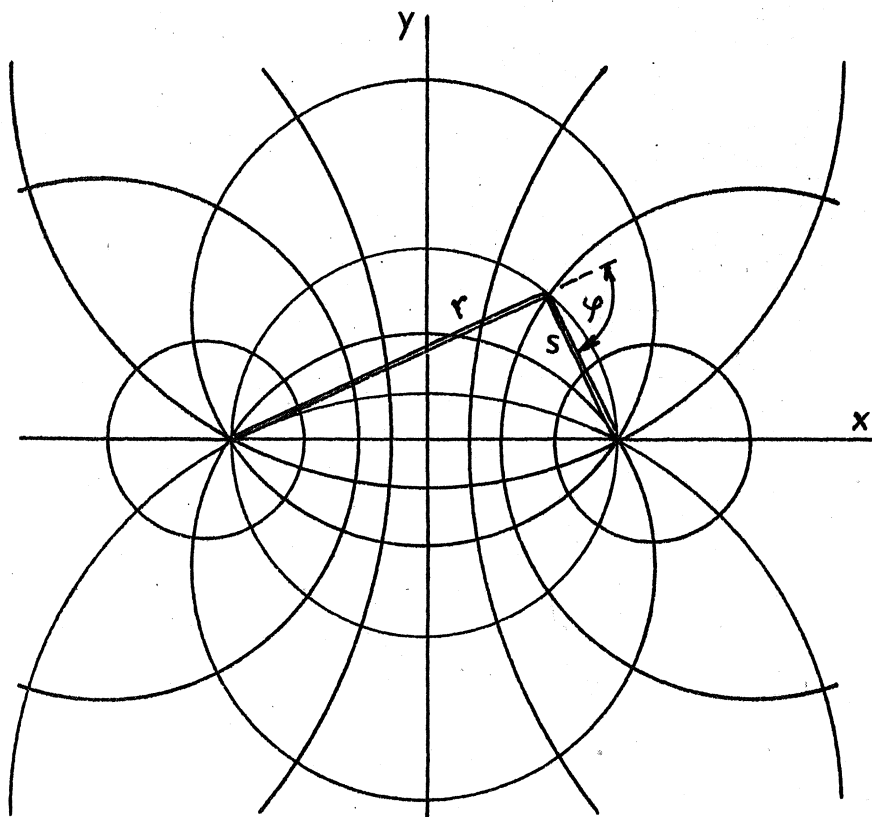
$$x = \frac{\sinh \psi}{\cosh \psi + \cos \varphi},$$

$$x^2 = \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2y}{1-x^2-y^2},$$

$$y = \frac{\sin \varphi}{\cosh \psi + \cos \varphi}.$$

Obr. 13



Určete složky metrického tenzoru v obecném bodě.

Odpověď

Nenulové složky metrického tenzoru jsou

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(\cosh \psi + \cos \varphi)^2}, \quad g^{11} = g^{22} = (\cosh \psi + \cos \varphi)^2.$$

Poznámka: v pravouhlé soustavě souřadnic platí vždy

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$

Příklad 12

Pro kulové souřadnice podle obr. 14

$$x^1 = r, \quad x^2 = \vartheta, \quad x^3 = \varphi$$

platí vztahy

$$g_{11} = 1,$$

$$g^{11} = 1,$$

$$g_{22} = (r \cos \varphi)^2,$$

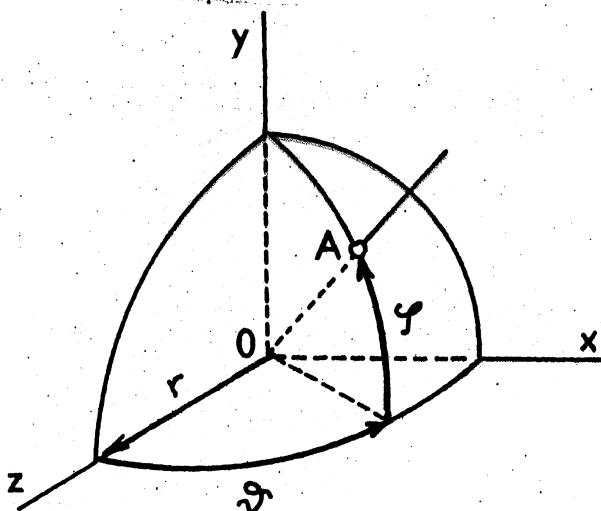
$$g^{22} = \frac{1}{(r \cos \varphi)^2},$$

$$g_{33} = r^2,$$

$$g^{33} = \frac{1}{r^2}.$$

Dokažte.

Obr. 14



Souhrn. Zavedením bázových vektorů a metrického tenzoru jsme dosáhli sjednocení formy zápisu pro skalární součin v kterékoli soustavě souřadnic, a to i pro zobecněné souřadnice, jež nemají stejný fyzikální rozměr bázových vektorů. Metrický tenzor mimoto umožňuje snadný výpočet složek vektoru jedné variance, známe-li složky druhé variance. Tímto způsobem dosáhneme, že forma zápisu základních principů a rovnic mechaniky kontinua bude rovněž jednotná pro všechny druhy souřadnic. Za tuto výhodu však platíme tím, že rozměrová kontrola vzorců je znesnadněna. Obecně mohou mít různé složky vektoru či tenzoru téže variance různé fyzikální rozměry.

5. TRANSFORMACE SOUŘADNIC

Místo souřadnic s bázovými vektory \vec{g}^i zavedeme nyní jiné souřadnice s bázovými vektory $\vec{g}^{i'}$ ($i' = 1', 2', 3'$). Pro obě báze musí platit (71), tj.

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j, \quad \vec{g}_{i'} \cdot \vec{g}^{j'} = \delta_{i'}^{j'}. \quad (89)$$

Vektory nové báze rozložíme do složek ve staré bázi stejné variance, takže dostaneme

$$\vec{g}_{i'} = \beta_{i'}^j \vec{g}_j, \quad \vec{g}^{i'} = \beta_j^{i'} \vec{g}^j. \quad (90)$$

Dosazením těchto vztahů do druhé z rovnic (89) vyjde

$$\begin{aligned} \vec{g}_{i'} \cdot \vec{g}^{j'} &= \beta_{i'}^k \vec{g}_k \cdot \beta_l^{j'} \vec{g}^l = \beta_{i'}^k \beta_l^{j'} \vec{g}_k \cdot \vec{g}^l = \\ &= \beta_{i'}^k \beta_l^{j'} \delta_k^l = \beta_{i'}^k \beta_k^{j'} = \delta_{i'}^{j'}. \end{aligned} \quad (91)$$

Protože $i', j' = 1', 2', 3'$, představuje (91) soustavu devíti rovnic. Můžeme ji zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \beta_{1'}^1 & \beta_{1'}^2 & \beta_{1'}^3 \\ \beta_{2'}^1 & \beta_{2'}^2 & \beta_{2'}^3 \\ \beta_{3'}^1 & \beta_{3'}^2 & \beta_{3'}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'} \\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'} \\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (92)$$

Analogicky rovnici (91) lze odvodit vztah

$$\beta_i^{j'} \beta_{j'}^k = \delta_i^k. \quad (93)$$

Inverzní vztah k první z rovnic (90) dostaneme jednoduše tak, že ji vynásobíme činitelem $\beta_k^{i'}$. Vyjde

$$\beta_k^{i'} \vec{g}_i = \beta_k^{i'} \beta_{i'}^j \vec{g}_j = \delta_k^j \vec{g}_j = \vec{g}_k. \quad (94)$$

Podobně

$$\vec{g}^k = \beta_i^k \vec{g}^{i'}. \quad (95)$$

Pro libovolný vektor \vec{u} musí platit rozklad

$$\vec{u} = u_i \vec{g}^i = u_i \beta_k^i \vec{g}^{k'} = u_k' \vec{g}^{k'}. \quad (96)$$

Protože jde o součty (indexy se opakuji dvakrát), nemůžeme jednoduše "krátit" činitelem $\vec{g}^{k'}$. Místo toho vynásobíme tuto rovnici skalárně vektorem \vec{g}_j , takže budeme mít

$$u_i \beta_k^i \vec{g}^{k'} \vec{g}_j = u_k' \vec{g}^{k'} \vec{g}_j$$

čili

$$u_i \beta_k^i \delta_j^{k'} = u_k' \delta_j^{k'}$$

a konečně

$$u_i \beta_j^i = u_j'. \quad (97)$$

Vynásobením $\beta_k^{j'}$ odtud dostaneme - s použitím (93) -

$$u_k = u_j' \beta_k^{j'}. \quad (98)$$

Poslední dva vztahy jasně ukazují způsob transformace kovariantních složek vektoru. Obdobně se transformují i kontravariantní složky.

Elementární přírůstek rádiusvektoru \vec{r} je

$$d\vec{r} = \vec{g}_i dx^i = \beta_i^{k'} \vec{g}_{k'} dx^i. \quad (99)$$

Na druhé straně však

$$d\vec{r} = \vec{g}_k dx^{k'} = \vec{g}_k \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} dx^i. \quad (100)$$

Protože dx^i můžeme volit libovolně, musí se rovnat činitele u těchto přírůstků na pravých stranách (99) a (100). Bude tedy

$$\beta_i^{k'} \vec{g}_k = \vec{g}_{k'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}. \quad (101)$$

Vynásobením $\vec{g}^{j'}$ a s přihlédnutím k (89) vyjde

$$\beta_i^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}. \quad (102)$$

Podobně lze odvodit vztah

$$\beta_{j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}. \quad (103)$$

Za základ srovnání transformačních vzorců bereme vztah (94) pro kovariantní bázevé vektory a vztah k němu inverzní

$$\vec{g}_k = \beta_k^{i'} \vec{g}_{i'}, \quad \vec{g}_{k'} = \beta_{k'}^i \vec{g}_i. \quad (104)$$

Vektory, které se transformují podle tohoto schématu, tedy stejně jako báze \vec{g}_i , nazýváme kovariantní. Ostatní, pro něž platí vztahy obdobné rovnicím

$$\vec{g}^k = \beta_i^k \vec{g}^{i'}, \quad \vec{g}^{k'} = \beta_i^{k'} \vec{g}^i. \quad (105)$$

jsou kontravariantní. Toto označení je vždy spjato s polohou indexu (dole či nahoře). Protože v kartézských souřadnicích oba druhy složek vektoru splynou, nemusí se rozlišovat. V rovnicích pro kartézské souřadnice se někdy nerozlišuje ani poloha indexů a všechny indexy se píšou dole. Tím se však ochudíme o obecné vlastnosti tenzorové symboliky, umožňující přepočít do všech souřadnicových soustav podle jednotných pravidel.

Nyní si ještě ukážeme, jak se transformuje metrický tenzor. Podle definice (78)

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = g_{ij} = \beta_i^k \vec{g}_k \cdot \beta_j^l \vec{g}_l = \beta_i^k \beta_j^l \vec{g}_k \cdot \vec{g}_l = \beta_i^k \beta_j^l g_{kl}$$

a tedy

$$g^{i'j'} = \beta_{i'}^k \beta_{j'}^l g^{kl} \quad (106)$$

Podobně

$$g^{i'j'} = \beta_k^{i'} \beta_l^{j'} g^{kl} \quad (107)$$

Veličiny se dvěma indexy, např. a_{ij} , b^{ij} , které se transformují analogicky jako (106) a (107), budeme nazývat tenzory (druhého řádu). Příklady fyzikálních veličin tvořících tenzory ukážeme později.

Vzpomeneme-li si na způsob, jakým můžeme zvýšit nebo snížit index, usoudíme, že mohou existovat také tenzory smíšené variance, totiž

$$\begin{aligned} a_i^{\cdot k} &= a_{ij} g^{jk} = a^{jk} g_{ji} \\ a^{\cdot k}_i &= a_{ji} g^{jk} = a^{kj} g_{ji} \end{aligned} \quad (108)$$

Tečkou vyznačujeme místo po indexu (nebo pro index), který se posouvá. Obecně totiž záleží na pořadí obou indexů. Je-li kovariantní (a tedy i kontravariantní) tenzor v indexech souměrný, pak na pořadí indexů nezáleží a tečky lze vynechat. Je-li tedy $a^{ij} = a^{ji}$, je také

$$a_i^{\cdot j} = a_i^j = a_i^j \quad (109)$$

Horní a dolní index však nelze ani tehdy přehodit, neboť obecně $a_i^j \neq a_j^i$. Pro smíšené složky metrického tenzoru vyjde

$$\vec{g}_i \vec{g}^j = g_i^j = g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \quad (110)$$

Rovnájí se tedy Kroneckerovu symbolu. Poslední rovnice ukazuje souvislost Kroneckerova symbolu s metrickým tenzorem. V kartézských souřadnicích $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g^{ij} = \delta^{ij}$, což je nula pro $i \neq j$ a jedna pro $i = j$. Kroneckerův symbol lze tedy považovat za složky metrického tenzoru v kartézských souřadnicích. Můžeme vyslovit také opačné tvrzení, že totiž metrický tenzor vznikne zobecněním (transformací) Kroneckerova symbolu z kartézských do obecných souřadnic.

Příklad 13

Pro kulové souřadnice podle obr. 14 najděte kovariantní bázevé vektory podle (104).

Řešení

V soustavě $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$ je $\vec{g}_1 = \vec{i}$, $\vec{g}_2 = \vec{j}$, $\vec{g}_3 = \vec{k}$ (jednotkové vektory).

V soustavě $r = x^1$, $\vartheta = x^2$, $\varphi = x^3$ vyjde

$$\vec{g}_i' = \beta_{ij}^j \vec{g}_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \vec{g}_j. \quad (\text{a})$$

Pro transformační vztahy

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (\text{b})$$

dostaneme derivacemi činitele β_{ij}^j a vyčíslením (a) výsledek

$$\left. \begin{aligned} \vec{g}_1' &= \vec{g}_r = \vec{i} \cos \vartheta \cos \varphi + \vec{j} \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi, \\ \vec{g}_2' &= \vec{g}_\vartheta = -\vec{i} r \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{j} r \cos \vartheta \cos \varphi, \\ \vec{g}_3' &= \vec{g}_\varphi = -\vec{i} r \cos \vartheta \sin \varphi - \vec{j} r \sin \vartheta \sin \varphi + \vec{k} r \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

Jde vlastně o jinou formu vyčíslení vzorce (69).

Příklad 14

V bodě $r = 1$, $\vartheta = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ (v kulových souřadnicích podle obr. 14) vypočítejte součinitele β_{ij}^j .

Řešení

Pomocí hodnot β_{ij}^j z příkladu 13 a z rovnice (92) vypočteme inverzí příslušné matice $[\beta_{ij}^j]$ matici

$$\begin{bmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Příklad 15

Dokažte, že kartézský součin dvou vektorů $C_i^j = a_i b^j$ je tenzorem druhého řádu.

Důkaz

$$C_{e'}^{k'} = \beta_{e'}^i \beta_j^{k'} C_i^j = \beta_{e'}^i a_i \beta_j^{k'} b^j = a_{e'} b^{k'}$$

Souhrn. Vektory, popř. tenzory lze chápat jako soubor veličin, podrobený transformačním vztahům typu (104) až (107). Vektor lze pak nazvat tenzorem prvního řádu. Existují i tenzory vyšších řádů, jejichž transformační vztahy vzniknou zobecněním rovnic (106) a (107). Tenzor nultého řádu je skalár, což je invariantní veličina (transformací se jeho hodnota nezmění).

6. TENZOR PŘETVOŘENÍ TĚLESA

Dosud probrané poznatky dovolují stejně snadno popsat deformaci tělesa v libovolné soustavě souřadnic. V původní konfiguraci tělesa jsme měli elementární úsečku

$$d\vec{s} = \vec{g}_i dx^i \quad (111)$$

Čtverec její délky byl dán skalárním součinem

$$|d\vec{s}|^2 = d\vec{s} \cdot d\vec{s} = ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (112)$$

Souřadnice x^i budeme považovat za materiálové, volíme tedy Lagrangeův způsob popisu tělesa. Přetvořením tělesa se deformují i jeho materiálové souřadnice, takže nová vektorová báze bude \hat{g}_i a vektor $d\vec{s}$ se změní na

$$d\hat{s} = \hat{g}_i dx^i \quad (113)$$

Čtverec jeho délky bude

$$|d\hat{s}|^2 = d\hat{s} \cdot d\hat{s} = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j \quad (114)$$

Rozdíl čtverců délek (114) a (112) je úměrný rozdílu metrických tenzorů přetvořeného a nepřetvořeného tělesa. Za míru přetvoření tělesa vezmeme proto tento rozdíl, tj. veličinu

$$\gamma_{ij} = \hat{g}_{ij} - g_{ij} \quad (115)$$

Nemůžeme dosud tvrdit, že tato veličina je také tenzorem, protože tenzory \hat{g}_{ij} , g_{ij} jsou psány každý v jiné souřadnicové soustavě (přetvořené a nepřetvořené). Musíme nejprve dokázat, že γ_{ij} opravdu splňuje transformační vztahy (106) a (107). Proto nejprve popíšeme vztah mezi dvěma soustavami souřadnic. Pro čárkovanou soustavu souřadnic bude platit, že

$$d\vec{s} = \vec{g}_i dx^i, \quad d\vec{s} = \hat{g}_i dx^i. \quad (116)$$

Napišeme transformační vztahy

$$\vec{g}_i = \beta_i^j \vec{g}_j, \quad \hat{g}_i = \hat{\beta}_i^j \hat{g}_j. \quad (117)$$

Protože užíváme materiálové souřadnice, je $x^i = \hat{x}^i$, takže

$$\hat{\beta}_i^j = \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial \hat{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \beta_i^j. \quad (118)$$

Stříšku nad tímto činitelem můžeme vynechat, takže oba členy na pravé straně (115) se deformují stejně. Proto i jejich rozdíl se deformuje stejně, takže

$$\gamma_{ij} = \beta_i^k \beta_j^l \gamma_{kl}. \quad (119)$$

Tím jsme dokázali, že veličina γ_{ij} je tenzor. Vzhledem k souměrnosti metrických tenzorů je tento tenzor rovněž souměrný ($\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$) a má obecně šest různých kovariantních složek.

Nyní se pokusíme vyjádřit tento tenzor pomocí posuvů $\vec{u} = u_i \vec{g}^i$. Známe-li posuv každého bodu tělesa, známe celé jeho přetvoření. Těmito posuvy musí být tenzor přetvoření jednoznačně určen. Protože k tomu nepotřebujeme další fyzikální veličiny, jde vlastně o vztah mezi dvěma pojmy souvisejícími pouze s pohybem tělesa. Vztah mezi tenzorem přetvoření a polem posuvů proto považujeme za kinematický a rovnice, které získáme, se nazývají kinematické rovnice.

Dosud neumíme derivovat bázevé vektory v křivočarých souřadnicích (ve 13. kapitole uvidíme, že to není jednoduché), proto se zatím omezíme na přímočaré (pravouhlé nebo kosouhlé) souřadnice, v nichž jsou bázevé vektory konstantní. Potom

$$d\vec{u} = \vec{g}^i \frac{\partial u_i}{\partial x^j} dx^j \quad (120)$$

Na rozdíl od první kapitoly nyní používáme malé písmeno, ačkoli jde o materiálový popis. Zavedeme nové označení

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j}, \quad (121)$$

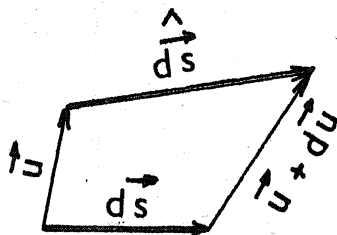
takže rovnice (120) nyní bude

$$d\vec{u} = \vec{g}^i u_{i,j} dx^j. \quad (122)$$

Přetvoření elementu $d\vec{s}$ s příslušnými posuvy je znázorněno na obr. 15. Zřejmě $\vec{u} + d\vec{s} = d\vec{s} + \vec{u} + d\vec{u}$, takže

$$d\vec{s} = d\vec{s} + d\vec{u} = d\vec{s} + \vec{g}^i u_{i,j} dx^j. \quad (123)$$

Obr. 15



Pro čtverec délky přetvořeného elementu budeme mít

$$\begin{aligned} d\hat{s} \cdot d\hat{s} &= (\vec{g}_i dx^i + \vec{g}^k u_{k,i} dx^i) (\vec{g}_j dx^j + \vec{g}^l u_{l,j} dx^j) = \\ &= (g_{ij} + \delta_j^k u_{k,i} + \delta_i^l u_{l,j} + g^{kl} u_{k,i} u_{l,j}) dx^i dx^j. \end{aligned} \quad (124)$$

První člen na pravé straně je však $d\vec{s} \cdot d\vec{s}$. S použitím (112), (114) a (115) dá poslední rovnice

$$g_{ij} dx^i dx^j = (u_{j,i} + u_{i,j} + g^{kl} u_{k,i} u_{l,j}) dx^i dx^j. \quad (125)$$

Protože přírůstky dx^i , dx^j můžeme volit libovolně, vyjde odtud

$$g_{ij} = u_{j,i} + u_{i,j} + g^{kl} u_{k,i} u_{l,j}. \quad (126)$$

Je-li $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, dostaneme odtud např.

$$\gamma_{xx} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},$$

neboť $g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$, $g^{12} = g^{23} = g^{31} = 0$.

Vidíme, že zanedbáme-li kvadratické členy, definice (126) nedává obvyklý tenzor deformací známý z lineární teorie pružnosti, ale právě jeho dvojnásobek. Proto místo tenzoru (115), resp. (126) zavedeme jeho poloviční hodnotu jako Greenův tenzor přetvoření

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{g}_{ij} - g_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji} + g^{kl} u_{k,i} u_{l,j}), \end{aligned} \quad (127)$$

který pro malé přetvoření splývá s Cauchyho tenzorem přetvoření

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}). \quad (128)$$

Pro malé přetvoření lze zanedbat kvadratický člen v rovnici (127). Všimněme si, že u Cauchyho tenzoru přetvoření jsou složky vztahené ke kartézským souřadnicím x, y, z

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad \text{atd.}$$

zkosy jsou tedy zastoupeny polovičními hodnotami. Zkos γ_{xy} je přitom definován jako změna pravého úhlu, jehož ramena měla před deformací směr x, y . Definice platí jen pro malé přetvoření.

Příklad 16

Ukažte, že definice Greenova tenzoru přetvoření (127) souhlasí s definicí (9).

Návod

Pro jednorozměrné kontinuum mohou indexy nabývat jen jedné hodnoty, totiž 1.

Řešení

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11} &= \frac{1}{2} (u_{1,1} + u_{1,1} + g^{11} u_{1,1} u_{1,1}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

Příklad 17

Určete vzorce pro složky tenzoru přetvoření v rovině pro kosoúhlé souřadnice, svírají-li souřadné osy $x = x^1$, $y = x^2$ úhel α .

Řešení

Pro takový případ máme

$$\begin{aligned} |\vec{g}_1| &= |\vec{g}_2| = 1, \\ g_{11} &= g_{22} = 1, \quad g_{12} = \cos \alpha. \end{aligned}$$

S použitím vztahů (82), které dají pro dvourozměrný případ čtyři rovnice

$$\begin{aligned} g^{11} + g^{12} \cos \alpha &= 1, & g^{11} \cos \alpha + g^{12} &= 0, \\ g^{21} + g^{22} \cos \alpha &= 0, & g^{21} \cos \alpha + g^{22} &= 1, \end{aligned}$$

vyjde

$$g^{11} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad g^{22} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad g^{12} = -\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = g^{21}.$$

Podle (127) dostaneme po úpravě

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] - \\ &\quad - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1}, \\ \mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_{21} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right] + \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right]. \end{aligned}$$

Vzorec pro ϵ_{22} je obdobný vzorci pro ϵ_{11} . Všimněme si, že v těchto rovnicích jsou derivace kovariantních složek posuvu u_i . Nejsou to tedy "obyčejné" složky u, v ve směrech souřadnicových os, neboť ty jsou kontravariantní. Vzorce musíme dále upravit pomocí (86). Zanedbáme-li kvadratické členy, dostaneme

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x^1} = g_{11} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + g_{12} \frac{\partial u^2}{\partial x^1} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha = \epsilon_{xx}\end{aligned}$$

a obdobně

$$\begin{aligned}\epsilon_{12} = \epsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \alpha \right] = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}, \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha = \epsilon_{yy}.\end{aligned}$$

Příklad 18

Je dán Cauchyho tenzor přetvoření v rovině v kartézských souřadnicích

$$\epsilon_{11} = 0, \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \gamma, \quad \epsilon_{22} = 0.$$

Najděte jeho složky v souřadnicových osách otočených o úhel α proti směru oběhu hodinových ručiček.

Řešení

Původní osy označme $x = x^1, y = x^2$, otočené $\xi = x^{1'}, \eta = x^{2'}$. Budou pro ně platit transformační vztahy

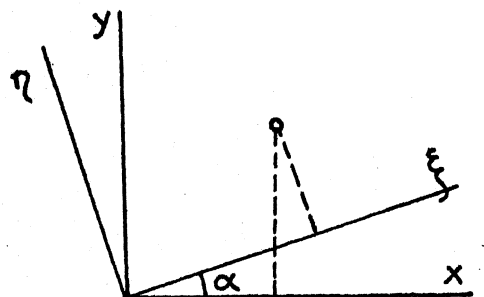
$$x^\alpha = \beta_{\gamma'}^\alpha x^{\gamma'}$$

které rozepíšeme pomocí obr. 16 takto:

$$\begin{aligned}x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha\end{aligned}$$

čili

$$\begin{aligned}x^1 &= \beta_{1'}^1 x^{1'} + \beta_{2'}^1 x^{2'}, \\ x^2 &= \beta_{1'}^2 x^{1'} + \beta_{2'}^2 x^{2'}.\end{aligned}$$



Obr. 16

Srovnáním - shodně s definicí (103) - dostaneme

$$\beta_{1'}^1 = \cos \alpha, \quad \beta_{2'}^1 = -\sin \alpha, \quad \beta_{1'}^2 = \sin \alpha, \quad \beta_{2'}^2 = \cos \alpha.$$

Nyní

$$\varepsilon_{\alpha'\beta'} = \beta_{\alpha'}^{\gamma} \beta_{\beta'}^{\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}.$$

Vztah vyčíslíme podle Einsteinova pravidla s danými hodnotami. Vyjde

$$\varepsilon_{1'1'} = \beta_{1'}^1 \beta_{1'}^2 \varepsilon_{12} + \beta_{2'}^1 \beta_{1'}^2 \varepsilon_{21} = \gamma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \gamma \sin 2\alpha,$$

$$\varepsilon_{1'2'} = \varepsilon_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \gamma \cos 2\alpha,$$

$$\varepsilon_{2'2'} = -\frac{1}{2} \gamma \sin 2\alpha.$$

Souhrn. Greenův tenzor přetvoření byl definován tak, aby co nej-jednodušším způsobem charakterizoval deformaci tělesa a aby splýval pro malá přetvoření s Cauchyho tenzorem, známým z lineární teorie pružnosti. Je definován jako poloviční rozdíl metrických tenzorů v přetvořeném a nepřetvořeném tělese. Užitím materiálových souřadnic jsme dosáhli toho, že takto definovaná veličina je rovněž tenzorem. Výhoda tenzorového zápisu je v tom, že stejný vzorec platí pro různé druhy souřadnic. Vyčíslení vzorců se děje dodatečně pro jistý případ podle pevných pravidel. Prozatím jsme se omezili na případy, kdy je metrický tenzor konstantní, tedy na přímočaré souřadnice. Později zobecníme odvozené vzorce pro jakékoli souřadnice. Uvidíme, že k tomu postačí nahradit parciální derivace tzv. kovariantními derivacemi.

7. VEKTOROVÝ SOUČIN A PLOŠNÉ ELEMENTY

Ke studiu napjatosti potřebujeme zavést do výpočtu plošný prvek. Proto se budeme nejprve zabývat vektorovým součinem. V tenzorové symbolice lze k tomu využít permutační symbol $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$ s tímto významem:

$\varepsilon_{ijk} = +1$, je-li $i, j, k = 1, 2, 3$ nebo sudá permutace této posloupnosti (tj. 2, 3, 1 nebo 3, 2, 1),

$\varepsilon_{ijk} = -1$, je-li i, j, k lichou permutací (tj. 3, 2, 1 nebo 2, 1, 3, popř. 1, 3, 2),

$e_{ijk} = 0$, opakuje-li se některá číslice (např. 2, 1, 2 nebo 3, 3, 3).

Především si všimneme, že pomocí permutačního symbolu e_{ijk} můžeme snadno vyčíslit determinant třetího řádu. Podle jeho definice je totiž

$$a = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_i^1 a_j^2 a_k^3 e^{ijk} = a_1^i a_2^j a_3^k e_{ijk} \quad (129)$$

Přehodíme-li pořadí některých dvou číslic, změní se znaménko determinantu (stejně jako u permutačního symbolu). To však znamená, že bude platit vztah

$$a e_{lmm} = a_l^i a_m^j a_n^k e_{ijk} \quad (130)$$

Determinant, jehož prvky tvoří metrický tenzor, označíme

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \quad (131)$$

Determinant složený z transformačních koeficientů bude

$$\Delta = |\beta_j^i|, \quad \frac{1}{\Delta} = |\beta_j^i| \quad (132)$$

Reciprokou hodnotu zde píšeme vzhledem k rovnici (92). Z transformačního vztahu

$$g_{i'j'} = \beta_{i'}^k \beta_{j'}^l g_{kl}$$

dostaneme

$$|g_{i'j'}| = |\beta_{i'}^k| |\beta_{j'}^l| |g_{kl}|$$

čili

$$g' = \Delta \Delta g \quad (133)$$

Označme nyní kartézské osy souřadnic $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$ a ptejme se, co se stane se symbolem $e_{i'j'k'}$, budeme-li jej považovat

za tenzor třetího řádu ϵ_{ijk} . V tom případě musí platit transformační zákon (pro transformaci do libovolné soustavy souřadnic)

$$\epsilon_{ijk} = \beta_i^{i'} \beta_j^{j'} \beta_k^{k'} \epsilon_{i'j'k'} \quad (134)$$

Zvolíme-li indexy i, j, k např. 1, 2, 3 a srovnáme (134) se vzorcí (129) a (132), vidíme, že na pravé straně (134) je $\frac{1}{\Delta}$, takže

$$\epsilon_{123} = \frac{1}{\Delta}. \text{ Protože v kartézských souřadnicích máme } g_{1'1'} = g_{2'2'} = g_{3'3'} = 1 \text{ a ostatní hodnoty složek metrického tenzoru jsou nulové, je } g' = 1. \text{ Z rovnice (133) proto vyjde } \frac{1}{\Delta} = \sqrt{g}, \text{ takže } \epsilon_{123} = \sqrt{g}.$$

Permutační tenzor ϵ_{ijk} má proto hodnoty

$$\epsilon_{ijk} = \sqrt{g}, \text{ je-li } i, j, k \text{ sudou permutací posloupnosti } 1, 2, 3,$$

$$\epsilon_{ijk} = -\sqrt{g}, \text{ je-li } i, j, k \text{ lichou permutací téže posloupnosti,}$$

$$\epsilon_{ijk} = 0, \text{ opakuje-li se některý index.}$$

V kartézských souřadnicích se permutační tenzor rovná permutačnímu symbolu, obecně však platí, že $\epsilon_{ijk} = e_{ijk} \sqrt{g}$.

Podle pravidla o zvyšování indexů

$$\epsilon^{lmn} = \epsilon_{ijk} g^{il} g^{jm} g^{kn} \quad (135)$$

lze dokázat, že $\epsilon^{lmn} = e^{lmn}/\sqrt{g}$. Vztah (130) se nezmění, vyměníme-li v něm permutační symbol za permutační tenzor. Znásobíme-li pak tuto rovnici činitelem ϵ^{lmn} , vyjde po úpravě

$$a = \det [a_j^i] = \frac{1}{6} \epsilon^{lmn} \epsilon_{ijk} a_i^l a_m^j a_n^k \quad (136)$$

Je totiž $\epsilon^{lmn} \epsilon_{lmn} = 6$, což je zřejmé z definice. Pro permutační tenzory platí tyto identické vztahy:

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_m^j \delta_n^k - \delta_n^j \delta_m^k,$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{ijn} = 2\delta_n^k, \quad (138)$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} = 6.$$

Pro permutační tenzor v rovině kolmé k ose 3 použijeme zkrácený zápis

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta 3}, \quad \text{popř.} \quad \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta 3} \quad (139)$$

který se bude hodit pro řešení rovinných úloh.

Nyní se vrátíme ke kartézské soustavě souřadnic. Pro jednotkové vektory $\vec{i}^1 \equiv \vec{i}_1, \vec{i}^2 \equiv \vec{i}_2, \vec{i}^3 \equiv \vec{i}_3$ můžeme psát vektorové součiny

$$\begin{aligned}\vec{i}^1 \times \vec{i}^2 &= \vec{i}^3, \\ \vec{i}^2 \times \vec{i}^3 &= \vec{i}^1, \\ \vec{i}^3 \times \vec{i}^1 &= \vec{i}^2.\end{aligned}\tag{140}$$

Vektorový součin značíme křížkem. Tyto rovnice lze shrnout do jediného zápisu

$$\vec{i}^l \times \vec{i}^m = \epsilon^{lmn} \vec{i}^n.\tag{141}$$

Vzpomeneme-li, že v kartézských souřadnicích je $\vec{g}^n = \vec{i}^n$, $\epsilon_{lmn} = \epsilon^{lmn}$ můžeme místo (141) psát

$$\vec{g}^l \times \vec{g}^m = \epsilon^{lmn} \vec{g}^n.\tag{142}$$

Tato rovnice však obsahuje jenom tenzory (prvního a třetího řádu). Platí proto ve všech souřadnicových soustavách.

Jak vyjádříme vektorový součin libovolných dvou vektorů, např. $\vec{a} \times \vec{b}$? Stačí, napíšeme-li

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= a^i \vec{g}_i \times b^j \vec{g}_j - a^i b^j \vec{g}_i \times \vec{g}_j = \\ &= a^i b^j \epsilon_{ijk} \vec{g}^k = g_k \vec{g}^k,\end{aligned}\tag{143}$$

takže

$$g_k = \epsilon_{ijk} a^i b^j.\tag{144}$$

Připomeňme, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{g}$ tvoří pravotočivý trojhran (je-li vektorová báze pravotočivá).

Vytvořme pro zajímavost skalární součin

$$\vec{a} \cdot \vec{g} = a^k g_k = a^k a^i b^j \epsilon_{ijk} = 0.\tag{145}$$

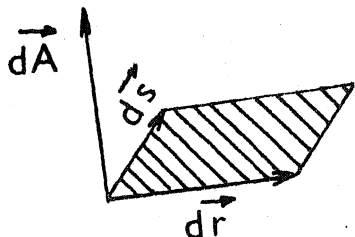
Součin se rovná nule, neboť výraz $a^i b^j a^k \epsilon_{ijk}$ znamená determinant

$$a^i b^j a^k \epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix} \sqrt{g},$$

kteřý je nulový, protože má dva řádky stejné. Rovnice (145) znamená, že vektor \vec{a} je kolmý k vektoru $\vec{q} = \vec{a} \times \vec{b}$. Představují-li vektory \vec{a} , \vec{b} délky, má vektor \vec{q} rozměr plochy a rovná se ploše rovnoběžníku, jehož strany tvoří právě vektory \vec{a} , \vec{b} . Je k této ploše kolmý. Rovnoběžnostěn s hranami \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} má proto objem

$$V = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = a^i b^j c^k \epsilon_{ijk}. \quad (146)$$

Objem je kladný, je-li trojhran \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} pravotočivý.



Obr. 17

Má-li elementární ploška tvar rovnoběžníku o stranách $d\vec{r}$, $d\vec{s}$ (obr. 17), lze ji znázornit vektorem

$$d\vec{A} = d\vec{r} \times d\vec{s} \quad (147)$$

o složkách

$$dA_k = \epsilon_{ijk} dr^i ds^j. \quad (148)$$

Působí-li na elementární plošku proti vektoru $d\vec{A}$ tlak p , což je skalár, vzniká síla $d\vec{F} = -p d\vec{A}$ o složkách

$$dF_k = -p \epsilon_{ijk} dr^i ds^j. \quad (149)$$

Má-li elementární rovnoběžnostěn hrany $d\vec{r}$, $d\vec{s}$, $d\vec{t}$ tvořící pravotočivou soustavu a má-li tíhu vztáženou na jednotku objemu

$$\vec{\gamma} = \gamma^k \vec{g}_k, \quad (150)$$

rovná se síla tíže působící na elementární objem dV

$$d\vec{W} = \vec{\gamma} dV = \gamma^k \vec{g}_k \epsilon_{lmn} dr^l ds^m dt^n. \quad (151)$$

Vzorce (146) až (151) platí ve všech souřadnicových soustavách.

Příklad 19

V kartézské soustavě souřadnic je dán bod A (2, 5, 1) a síla \vec{F} (3, 7, 10), která v tomto bodě působí. Souřadnice jsou v metrech, složky síly v newtonech. Jaký je moment síly \vec{F} k počátku souřadnic O ?

Řešení

Podle definice se hledaný moment rovná vektorovému součinu

$$\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F} \quad (\text{a})$$

čili

$$M_k = \epsilon_{ijk} a^i F^j. \quad (\text{b})$$

Vyčíslením

$$\begin{aligned} M_1 &= \epsilon_{231} a^2 F^3 + \epsilon_{321} a^3 F^2 = a^2 F^3 - a^3 F^2 = \\ &= 5 \cdot 10 - 1 \cdot 7 = 43 \text{ Nm}, \end{aligned}$$

$$M_2 = a^3 F^1 - a^1 F^3 = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 10 = -17 \text{ Nm},$$

$$M_3 = a^1 F^2 - a^2 F^1 = 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = -1 \text{ Nm}.$$

To jsou tři složky výsledného momentu \vec{M} . Jsou to sice kovariantní složky, ale v kartézské soustavě se rovnají kontravariantním složkám.

Příklad 20

Dokažte, že platí

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (\text{a})$$

Řešení

Zavedeme pomocné označení $\vec{q} = \vec{b} \times \vec{c}$, takže bude

$$q_k = \epsilon_{ijk} b^i c^j. \quad (\text{b})$$

Dosazením do součinu $\vec{a} \times \vec{q} = \vec{p}$ dostaneme

$$\epsilon^{lkm} a_l q_k = \epsilon^{lkm} a_l \epsilon_{ijk} b^i c^j = p^m. \quad (\text{c})$$

Rozepsáním podle (138) vyjde

$$\epsilon^{lkm} \epsilon_{ijk} = \epsilon^{lmk} \epsilon_{kij} = \delta_i^m \delta_j^l - \delta_j^m \delta_i^l, \quad (\text{d})$$

takže

$$v^m = (\delta_i^m \delta_j^l - \delta_j^m \delta_i^l) a_l b^i c^j \quad (e)$$

S poukazem na substituční působnost Kroneckerova symbolu dostaneme nakonec

$$v^m = b^m a_j c^j - c^m a_i b^i \quad (f)$$

čili - ve vektorovém zápisu -

$$\vec{v} = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (g)$$

což jsme měli dokázat.

Vzorec (f) má proti vzorci (g) výhodu, neboť obsahuje nejen poučku, ale současně i návod, jak ji použít (jak vzorec vyčíslit), a to v kterékoli souřadnicové soustavě.

Příklad 21

Dokažte, že platí

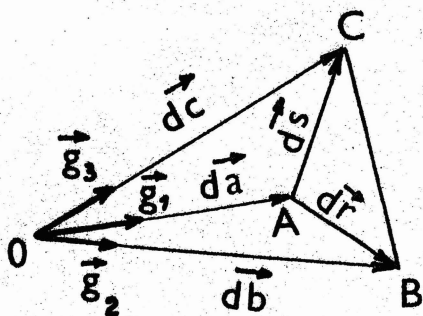
$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Důkaz ponecháváme čtenáři.

Souhrn. Permutační tenzor umožňuje snadný výpočet determinantu třetího řádu nebo vektorového součinu v kterékoli souřadnicové soustavě a stejně snadný výpočet plošného nebo objemového elementu. Rovnice psané ve složkách tenzorů obsahují implicitně i návod k jejich vyčíslení. V tom je výhoda tenzorového počtu před vektorovou (Gibbsovou) algebrou.

8. ROZBOR NAPJATOSTI

Obr. 18 a



Z tělesa uvolníme tříboky jehlan (čtyřstěn), jehož plášť má hrany $d\vec{a}$, $d\vec{b}$, $d\vec{c}$ spadající do směrů \vec{g}_1 , \vec{g}_2 , \vec{g}_3 v daném bodě O. Koncové body uvedených elementárních vektorů tvoří vrcholy základnového trojúhelníku ABC (obr. 18 a).

Jeho dvě strany jsou

$$d\vec{s} = d\vec{c} - d\vec{a}, \quad d\vec{r} = d\vec{b} - d\vec{a}. \quad (152)$$

Plocha trojúhelníku je

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} d\vec{r} \times d\vec{s} = \frac{1}{2} (d\vec{b} - d\vec{a}) \times (d\vec{c} - d\vec{a}). \quad (153)$$

Vektor $d\vec{A}$ bude vnější normálou, jak je vidět z pořadí činitelů.
Vynásobením

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} (d\vec{b} \times d\vec{c} + d\vec{c} \times d\vec{a} + d\vec{a} \times d\vec{b}). \quad (154)$$

Každý z vektorů na pravé straně má jen jednu nenulovou složku, takže

$$d\vec{a} = da^1 \vec{g}_1, \quad d\vec{b} = db^2 \vec{g}_2, \quad d\vec{c} = dc^3 \vec{g}_3.$$

Nakonec vyjde

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} (db^2 dc^3 \epsilon_{231} \vec{g}^1 + dc^3 da^1 \epsilon_{312} \vec{g}^2 + da^1 db^2 \epsilon_{123} \vec{g}^3). \quad (155)$$

Srovnáním s výrazem $d\vec{A} = dA_i \vec{g}^i$ dostaneme kovariantní složky

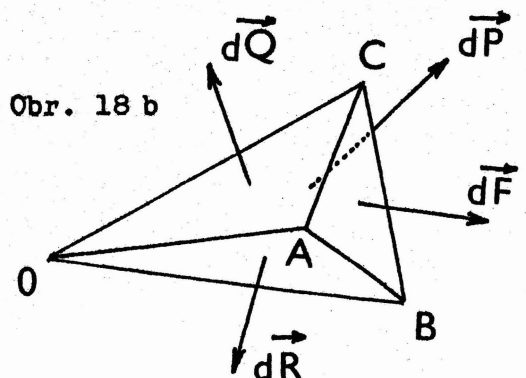
$$dA_1 = \frac{1}{2} \epsilon_{123} db^2 dc^3, \quad dA_2 = \frac{1}{2} \epsilon_{123} dc^3 da^1, \quad dA_3 = \frac{1}{2} \epsilon_{123} da^1 db^2.$$

Nyní vyjádříme velikost bočních stěn jehlanu. Např. plocha OAB je vyjádřena vektorem ve směru vnější normály o velikosti

$$\frac{1}{2} d\vec{b} \times d\vec{a} = \frac{1}{2} db^2 da^1 \epsilon_{213} \vec{g}^3 = -dA_3 \vec{g}^3. \quad (156)$$

Obdobné vzorce získáme i pro zbývající dvě stěny. Je zřejmé, že vektorový součet všech čtyř vektorů, znázorňujících velikost a orientaci stěn daného čtyřstěnu, je nulový. Z rovnice (156) dále vidíme, že kovariantní složky plochy $d\vec{A}$ (trojúhelníku ABC) mají směr vnitřních normál k bočním stěnám, neboť na pravé straně (156) máme záporné znaménko.

Vyjmeme-li jehlan na obr. 18a ze zatíženého tělesa, budeme musít nahradit silové působení tohoto tělesa na uvedený jehlan výslednicemi $d\vec{P}$, $d\vec{Q}$, $d\vec{R}$ a $d\vec{F}$ (obr. 18 b). Tyto síly rozložíme do kontravariantních složek a zavedeme předpoklad, že jsou úměrné plochám, na něž působí.



Konstanty úměrnosti označíme σ^{ij} . Napíšeme

$$\begin{aligned} d\vec{P} &= -\sigma^{1j} dA_1 \vec{q}_j, & d\vec{Q} &= -\sigma^{2j} dA_2 \vec{q}_j, \\ d\vec{R} &= -\sigma^{3j} dA_3 \vec{q}_j. \end{aligned} \quad (157)$$

Devět složek σ^{ij} představuje tedy složky sil vztažené na příslušné složky ploch. Nemusí to však být skutečná napětí, protože např. součin $\sigma^{1j} dA_1$ není obecně silou, tou se stane teprve po vynásobení vektorem \vec{q}_j (který nemusí být ani jednotkový, ani bezrozměrový). Podobně dA_1 nemusí mít rozměr plochy. Součin $dA_1 \vec{q}_1$ rozměr plochy má, avšak součin $dA_1 \vec{q}_1$ už nemusí mít. Chceme-li dostat složky napjatosti tak, aby měly skutečně rozměr napětí, tj. síly dělené plochou, musíme vypočítat tzv. fyzikální složky napjatosti. O nich nás poučí příklad 23. Fyzikální složky napjatosti netvoří tenzor, takže jejich důsledným zavedením by se výpočty neobyčejně zkomplikovaly (zejména v křivočarých souřadnicích).

Síly působící z okolního tělesa na uvolněný čtyřstěn musí být v rovnováze, je-li i těleso v rovnováze. V tom případě musí platit, že

$$d\vec{F} = -d\vec{P} - d\vec{Q} - d\vec{R}. \quad (158)$$

Rozepsáním do složek s přihlédnutím ke (157) vyjde

$$d\vec{F} = dF^j \vec{q}_j = \sigma^{ij} dA_i \vec{q}_j. \quad (159)$$

Tuto rovnici znásobíme skalárně činitelem \vec{q}^k a použijeme (71). Tak dostaneme

$$dF^j = \sigma^{ij} dA_i. \quad (160)$$

Rovnice (160) dává návod, jak v daném místě vypočítáme silové působení $d\vec{F}$ na libovolný plošný element $d\vec{A}$. Tenzor druhého řádu σ^{ij} se nazývá tenzor napjatosti.

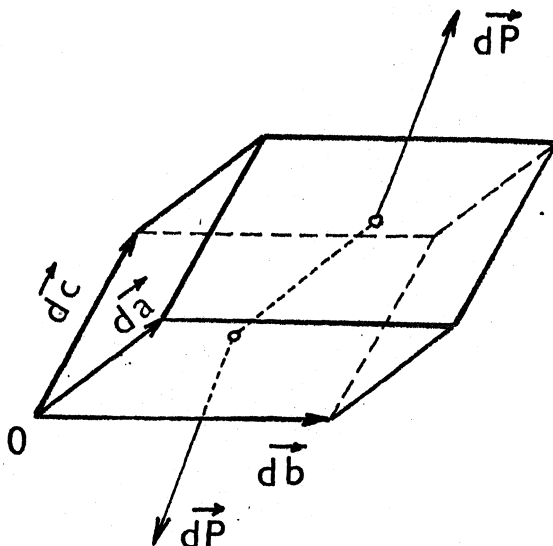
Lze dokázat, že je souměrný. Čtyřstěn z obr. 18 doplníme na rovnoběžnostěn, jehož hrany budou $d\vec{a}$, $d\vec{b}$, $d\vec{c}$. Pro síly $d\vec{P}$, $d\vec{Q}$, $d\vec{R}$ působící na jeho stěny napíšeme podmínku rovnováhy momentů (silových dvojic)

$$d\vec{a} \times d\vec{P} + d\vec{b} \times d\vec{Q} + d\vec{c} \times d\vec{R} = 0. \quad (161)$$

Vzorec pro úsporu místa rozepíšeme jen pro první dvojici $d\vec{a} \times d\vec{P}$ (obr. 19). Ostatní dvojice se rozepíší obdobně. Zřejmé

$$d\vec{P} = dP^m \vec{g}_m = \underbrace{\sigma^{lm} db^j dc^k}_{dA_l} \epsilon_{jkl} \vec{g}_m \quad (162)$$

Obr. 19



Bude

$$d\vec{a} \times d\vec{P} = da^i dP^m \epsilon_{imn} \vec{g}^n = da^i \sigma^{lm} db^j dc^k \epsilon_{jkl} \epsilon_{imn} \vec{g}^n \quad (163)$$

Tato rovnice obsahuje pět slepých indexů a má na pravé straně $3^5 = 243$ členů. Rovnice (161) v úplnosti zní

$$\sigma^{lm} da^i db^j dc^k (\epsilon_{jkl} \epsilon_{imn} + \epsilon_{kil} \epsilon_{jmn} + \epsilon_{ije} \epsilon_{kmm}) = 0. \quad (164)$$

Zvolíme-li hrany rovnoběžnostěnu rovnoběžné s vektorovou bází \vec{g}_n (stejně jako na obr. 18), je jen jedna volba pro i, j, k (totiž 1, 2, 3). Pro $n = 1$ např. dostaneme

$$\sigma^{lm} (\epsilon_{23l} \epsilon_{1m1} + \epsilon_{31l} \epsilon_{2m1} + \epsilon_{12l} \epsilon_{3m1}) = 0. \quad (165)$$

První člen v závorce odpadne a zbyvajících mají nenulové hodnoty jen pro $l = 2, m = 3$, popř. $l = 3, m = 2$. Proto

$$\sigma^{23} \epsilon_{312} \epsilon_{231} + \sigma^{32} \epsilon_{123} \epsilon_{321} = 0. \quad (166)$$

Odtud už vychází

$$\sigma^{23} - \sigma^{32} = 0. \quad (167)$$

Obdobné vztahy dostaneme i pro ostatní složky, takže jsme tím dokázali souměrnost tenzoru napjatosti

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \quad (168)$$

v kontravariantních složkách. Samozřejmě existují i kovariantní složky

$$\sigma_{ij} = g_{ik} g_{jl} \sigma^{kl}, \quad (169)$$

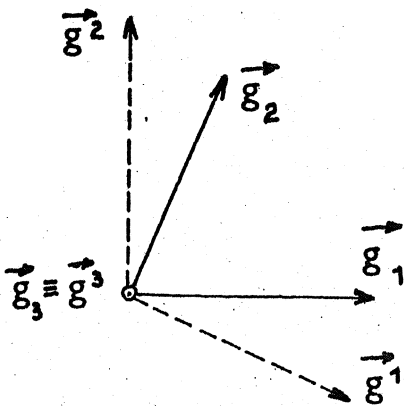
kteřé jsou rovněž v indexech souměrné. Pro smíšené složky máme

$$\sigma_i^j = g_{ik} \sigma^{kj}, \quad \sigma_{.i}^j = g_{ik} \sigma^{jk}. \quad (170)$$

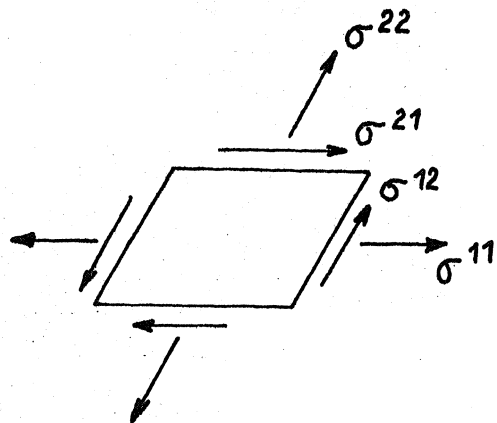
Vzhledem k souměrnosti kontravariantních složek nezáleží zde na pořadí indexů, takže $\sigma_{.i}^j = \sigma_i^j$, avšak indexy nelze zaměnit, neboť obecně $\sigma_i^j \neq \sigma_j^i$ (na to zvláště upozorňujeme). Tenzor napjatosti má obecně šest složek kontravariantních a šest složek kovariantních, avšak devět složek smíšené variance. Proto se tyto smíšené složky zřídka užívají.

Pro lepší představu se nyní zabýváme případem rovinné napjatosti, při které jsou nenulové jen složky obsahující indexy 1, 2. Třetí básový vektor je kolmý k prvním dvěma a v průmětu do roviny napjatosti se proto neobjeví (obr. 20). V kontravariantních složkách bude platit, že

$$d\vec{F} = \sigma^{\alpha\beta} dA_\alpha \vec{g}_\beta. \quad (171)$$



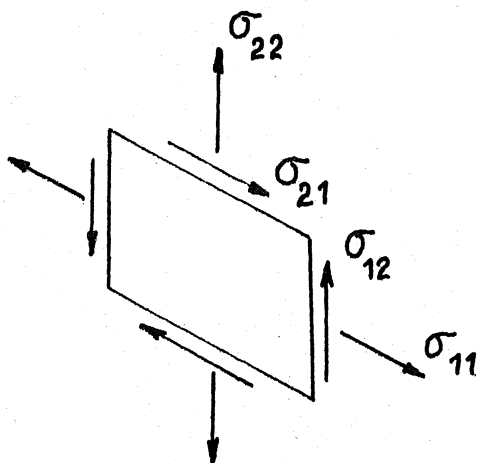
Obr. 20



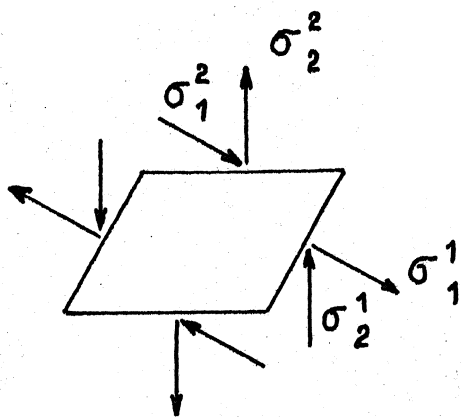
Obr. 21

Složky tohoto druhu jsou zakresleny na obr. 21. Kovariantní složky dají

$$d\vec{F} = \sigma_{\alpha\beta} dA^\alpha \vec{g}^\beta. \quad (171 a)$$



Obr. 22



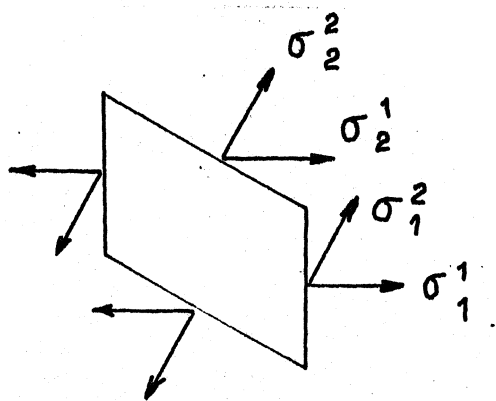
Obr. 23

Jsou znázorněny na obr. 22. Pro smíšené složky platí

$$d\vec{F} = \sigma_p^\alpha dA_\alpha \vec{g}^\beta = \sigma_p^\alpha dA^\beta \vec{g}_\alpha. \quad (171 b)$$

Tyto složky jsou zakresleny na obr. 23 a 24. Je jistě zajímavé, že např. hodnota σ_2^1 je v obou obrázcích stejná, avšak $\sigma_2^1 \neq \sigma_1^2$, jak jsme již uvedli.

Jsou-li souřadnice kartézské (přímocharé, pravouhlé), přejdou složky tenzoru napjatosti v obvyklé hodnoty $\sigma^{11} = \sigma_x$, $\sigma^{12} = \sigma^{21} = \tau_{xy} = \tau_{yx}$ a $\sigma^{22} = \sigma_y$ a mezi jejich různými variantami není žádný rozdíl.



Obr. 24

Tím, že jsme elementární čtyřstěn na obr. 18 vyňali ze zatíženého, a tedy přetvořeného tělesa, dostali jsme Eulerův tenzor napjatosti. Nebudou-li deformace malé, dostaneme jistě jiné výsledky, použijeme-li Lagrangeův popis a vztáhneme sílu přenášenou nějakým plošným elementem uvnitř tělesa k jeho velikosti v nepřetvořeném tělese. Vnucuje se otázka, máme-li v tom případě počítat s nezměněnou silou $d\vec{F}$ (a ne-li,

jak ji máme přepočítávat). Označme elementární plošku, na kterou $d\vec{F}$ působí v přetvořeném tělese, $A_0 B_0 C_0$. Tomu odpovídá v nepřetvořeném tělese síla $d\vec{F}_0$ a ploška $A_0 B_0 C_0$. Přetvoření je popsáno vektorovým polem posuvů \vec{u} , resp. \vec{U} , takže - obdobně jako v kapitole 2 - dostaneme Eulerovy souřadnice částic deformovaného tělesa jako součet Lagrangeových souřadnic a příslušných složek posuvů

$$x^i = X^i + u^i. \quad (172)$$

Vztáhneme-li nyní výpočet k nepřetvořené plošce $A_0 B_0 C_0$ a vezmeme-li přitom stejnou sílu $d\vec{F}_0 = d\vec{F}$, dostaneme Lagrangeův tenzor napjatosti. Místo toho můžeme navrhnout přepočet silových složek podle vzorce */

$$dF_0^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} dF^j \quad (173)$$

a dostaneme - v nepřetvořeném elementu - Kirchhoffův tenzor napjatosti. Tyto tenzory splývají, jsou-li deformace velmi malé. V lineární teorii pružnosti se proto nerozlišují. V nelineární teorii pružnosti se předpokládá vzájemně jednoznačná závislost Eulerova tenzoru napjatosti na Almansiho tenzoru přetvoření nebo v Lagrangeově popisu závislost Kirchhoffova tenzoru napjatosti na Greenově tenzoru přetvoření. Lagrangeův tenzor napjatosti je nevýhodný tím, že není souměrný. Proto se užívá jen zřídka.

Příklad 22

V pravouhlých souřadnicích jsou dány složky rovinné napjatosti $\sigma^{11} = \sigma_x$, $\sigma^{12} = \sigma^{21} = \tau_{xy}$, $\sigma^{22} = \sigma_y$. Určete složky tenzoru napjatosti v polárních souřadnicích.

Řešení

Z transformačních rovnic

$$x^1 = x^{1'} \cos x^{2'}, \quad x^2 = x^{1'} \sin x^{2'}$$

určíme $\beta_{ij}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$ a ze vztahů $\beta_{k'}^i \beta_j^{k'} = \delta_j^i$ také $\beta_j^{k'}$. Vyjde

$$\beta_{1'}^1 = \cos \varphi, \quad \beta_{2'}^1 = -r \sin \varphi, \quad \beta_{1'}^2 = \sin \varphi, \quad \beta_{2'}^2 = r \cos \varphi,$$

$$\beta_{1'}^1 = \cos \varphi, \quad \beta_{2'}^1 = \sin \varphi, \quad \beta_{1'}^2 = -\frac{1}{r} \sin \varphi, \quad \beta_{2'}^2 = \frac{1}{r} \cos \varphi.$$

*/ Nezapomeňme, že $X^i = f^i(x^1, x^2, x^3, t)$. Při $t = \text{konst}$ vyjde

$$dX^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Rovnice (173) má analogický tvar.

Vyčíslením vztahu

$$\sigma^{ij'} = \beta_k^i \beta_l^{j'} \sigma^{kl}$$

dostaneme pro polární souřadnice

$$\sigma^{r'r} = \sigma^{rr} \cos^2 \varphi + 2\sigma^{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma^{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi$$

čili

$$\sigma^{rr} = \sigma_x \cos^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$

a podobně

$$\sigma^{r\varphi} = \frac{1}{r} [(\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)],$$

$$\sigma^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2} [\sigma_x \sin^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi].$$

Všimněme si rozdílných fyzikálních rozměrů těchto složek. Kovariantní složky vypočteme s využitím výsledků z příkladu 8. Ze vztahu $\sigma_{ij} = g_{ik} g_{jl} \sigma^{kl}$ vyjde (rozepsáním součtů a dosazením)

$$\sigma_{rr} = \sigma^{rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = r^2 \sigma^{r\varphi}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = r^4 \sigma^{\varphi\varphi}.$$

Pro zajímavost vypočtete ještě složky smíšeného tenzoru. Přesvědčte se, že např. platí vztah

$$\sigma_{\varphi}^r = r^2 \sigma_r^{\varphi}.$$

Příklad 23

-Vypočtete fyzikální složky napjatosti z kontravariantních složek tenzoru napjatosti.

Řešení

Síla $d\vec{F}$ přenášená plošným elementem $d\vec{A}$ se vypočte pomocí kontravariantních složek σ^{ij} tenzoru napjatosti podle (159)

$$d\vec{F} = \sigma^{ij} dA_i \vec{g}_j, \quad (a)$$

kde

$$d\vec{A} = dA_i \vec{g}^i. \quad (b)$$

Vektory \vec{g}_j , \vec{g}^i nemusí být jednotkové a nemusí mít obecně ani stejný fyzikální rozměr. Učiníme z nich bezrozměrové jednotkové vektory tím, že je dělíme jejich absolutní hodnotou, takže budeme mít

$$\vec{e}_j = \frac{\vec{g}_j}{\sqrt{\vec{g}_j \cdot \vec{g}_j}} = \frac{\vec{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}} \quad (c)$$

a obdobně

$$\vec{i}^i = \frac{\vec{g}^i}{\sqrt{g^{(ii)}}} \quad (d)$$

V těchto vztazích se přes indexy nesčítá, neboť se nevyskytují ve dvojici ani ve správné vzájemné poloze (jeden horní, druhý dolní index). Abychom to zvláště vyznačili, dali jsme je do závorčky. Bude se tedy např. $g^{(ii)}$ rovnat buď g^{11} nebo g^{22} nebo g^{33} podle toho, čemu se právě rovná i .

Nemá-li dA_i rozměr plochy, převedeme je na "skutečnou" plochu $d\mathcal{A}_i$ touto úpravou:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= dA_i \vec{g}^i = dA_i \frac{\sqrt{g^{(ii)}}}{\sqrt{g^{(ii)}}} \vec{g}^i = \\ &= dA_i \sqrt{g^{(ii)}} \vec{i}^i = d\mathcal{A}_i \vec{i}^i, \end{aligned} \quad (e)$$

takže

$$d\mathcal{A}_i = dA_i \sqrt{g^{(ii)}}. \quad (f)$$

Z rovnice (a)

$$d\vec{F} = \sigma^{ij} dA_i \frac{\sqrt{g^{(jj)}}}{\sqrt{g^{(jj)}}} \vec{g}^j = \sigma^{ij} dA_i \sqrt{g^{(jj)}} \vec{i}^j \quad (g)$$

dostaneme dosazením podle (f)

$$d\vec{F} = \underbrace{\sigma^{ij}}_{[N]} \underbrace{\frac{\sqrt{g^{(jj)}}}{\sqrt{g^{(jj)}}}}_{[N m^{-2}]} \underbrace{d\mathcal{A}_i}_{[m^2]} \underbrace{\vec{i}^j}_{[1]} = \tau^{ij} d\mathcal{A}_i \vec{i}^j. \quad (h)$$

Fyzikální složka napjatosti je

$$\tau^{ij} = \sigma^{ij} \frac{\sqrt{g^{(jj)}}}{\sqrt{g^{(ii)}}}. \quad (i)$$

Přes indexy v závorkách se nesčítá. Fyzikální složka má sice rozměr $[N m^{-2}]$, ale není to tenzor, nemá tedy jednoduché transformační vlastnosti, které by bylo možno popsat stejným vzorcem pro všechny soustavy souřadnic.

|| Souhrn. Tenzor napjatosti byl volen tak, aby ve všech souřadnicích platil stejný vzorec pro výpočet síly přenášené libovolným

plošným elementem uvnitř tělesa. Tato vnitřní síla působí podle zákona o akci a reakci z jedné části tělesa na druhou a naopak. Zprostředkuje tak přenos silových účinků tělesem. Protože zobecněné souřadnice nemusí být rozměrově homogenní, nemusí mít ani složky tenzoru napjatosti stejný fyzikální rozměr. Nejsou to tedy obecně fyzikální složky napjatosti. V kartézských souřadnicích však dostaneme složky napjatosti, které se shodují s fyzikálními.

9. KONSTITUČNÍ ROVNICE PRO ELASTICKÝ MATERIÁL

Zatím jsme se zabývali rozborem deformace a napjatosti. Nyní se budeme zabývat jejich vzájemným vztahem. Začneme s nejjednodušším případem elastického materiálu, u něhož budeme předpokládat, že se napjatost mění jen velmi zvolna, takže lze zanedbat setrvačné i termodynamické účinky deformace. Hookeův zákon pak vyjadřuje lineární vztah mezi tenzorem napjatosti a tenzorem přetvoření (pro malé deformace)

$$G^{ij} = E^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (174)$$

U obecně anizotropického tělesa existuje $3^4 = 81$ hodnot modulů pružnosti E^{ijkl} , které však nejsou všechny nezávislé. Protože tenzory napjatosti a deformace jsou souměrné, musí platit, že

$$E^{ijkl} = E^{jilk} = E^{ijlk} = E^{jilk} \quad (175)$$

Tím se počet nezávislých složek zmenší na 36. Další omezení plyne z úvahy o energii napjatosti. V kartézských souřadnicích je energie napjatosti v jednotce objemu

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}), \quad (176)$$

což lze přepsat do tvaru tenzorové rovnice

$$W = \frac{1}{2} G^{ij} \varepsilon_{ij} \quad (177)$$

která pak platí ve všech souřadnicových soustavách. Pro elementární práci (při nekonečně malé změně deformace) dostaneme ^{*}/

$$dW = G^{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (178)$$

^{*}/ Jedna polovina v rovnici (177) vyjde proto, že napjatost není během deformace konstantní, ale mění se úměrně k deformaci podle (174).

Formální derivací (177) však vyjde

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$$

a s přihlédnutím ke vztahu (174)

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E^{ijkl} d\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{kl} E^{kl ij} + \sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (179)$$

Diferenciál $d\varepsilon_{ij}$ můžeme volit libovolně. Zvolíme jej tedy tak, aby byly nenulové jenom složky $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ji}$ pro určitý zvolený pár i, j (např. $i = 1, j = 3$). Srovnáním (178) a (179) dostaneme, že

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{kl} E^{kl ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon_{kl} E^{kl ji} d\varepsilon_{ji} + \\ &+ \frac{1}{2} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ji} d\varepsilon_{ji}. \end{aligned} \quad (180)$$

Po zkrácení a sloučení - vzhledem k souměrnosti $\sigma_{ij}, d\varepsilon_{ij}$ - vyjde

$$\sigma_{ij} = E^{kl ij} \varepsilon_{kl}. \quad (181)$$

Srovnáním s rovnicí (174)

$$E^{kl ij} = E^{ijkl} \quad (182)$$

Zbývá tedy jen 21 nezávislých modulů pružnosti. Je-li materiál izotropický, zbudou z těchto modulů jen dva nezávislé. Je možno ukázat, že je lze vyjádřit tenzorovou rovnicí

$$E^{ijkl} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{2\mu}{1-2\mu} g^{ij} g^{kl} + g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} \right), \quad (183)$$

kde g^{ij} - složky metrického tenzoru,
 E - Youngův modul pružnosti,
 μ - Poissonovo číslo.

Alternativní tvary Hookeova zákona probereme v úvodu kapitoly 11.

Poznámka : zkrácení rovnice (180) umožnila zmíněná libovolnost diferenciálu $d\varepsilon_{ij}$.

Příklad 24

Přesvědčíme se o platnosti vztahu (183) pro izotropická pružná tělesa. V kartézských souřadnicích má Hookeův zákon obvykle tvar

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \quad \text{atd.}$$

V tenzorové symbolice jsou tyto rovnice

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma^{11} - \mu \sigma^{22} - \mu \sigma^{33}), \quad \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma^{12}.$$

Je jich celkem šest. Dvě jsou napsány, zbývající čtyři dostaneme cyklickou záměnou indexů. Vypočteme-li z nich napětí, dostaneme rovnice typu

$$\sigma^{11} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{33}],$$

$$\sigma^{12} = \frac{E}{2(1+\mu)} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}).$$

Srovnáním se (174) máme

$$E^{1111} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

$$E^{1122} = E^{1133} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

$$E^{1212} = \frac{E}{2(1+\mu)} = E^{1221}.$$

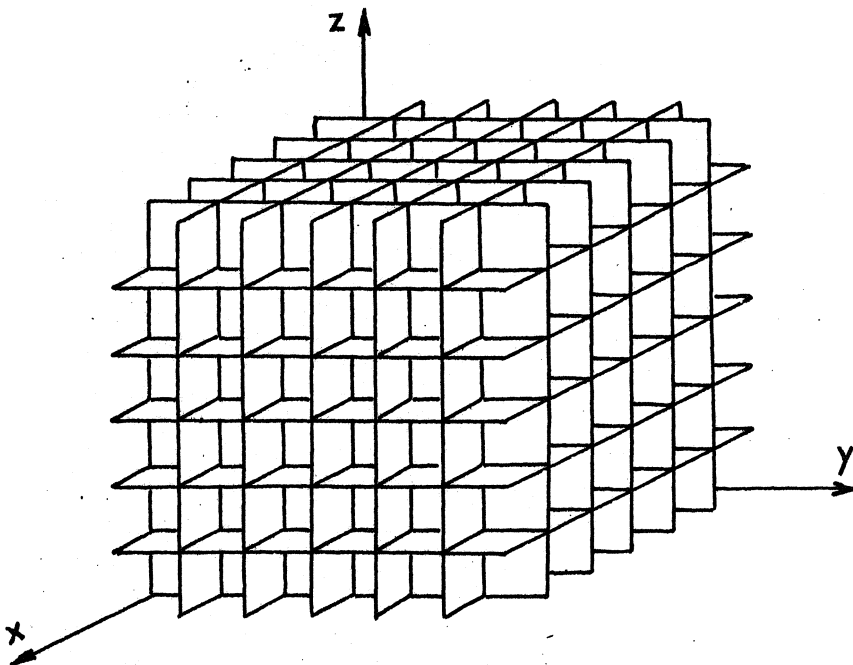
Obdobně bychom dostali i další hodnoty. Tytéž hodnoty dostaneme i ze (183), vzpomeneme-li, že v kartézských souřadnicích $g^{ij} = \delta^{ij} =$ = Kroneckerův symbol.

Souhrn. Základem lineární teorie pružnosti je lineární závislost kontravariantních složek tenzoru napjatosti na kovariantních složkách Cauchyho tenzoru deformací. Součinitele u složek Cauchyho tenzoru deformací (moduly pružnosti) tvoří tenzor čtvrtého řádu. Vzhledem k omezením plynoucím ze souměrnosti má tento tenzor nejvýš 21 nezávislých složek. Je-li materiál izotropický, jsou nezávislé složky jen dvě. Platí-li nějaká rovnice nebo soustava rovnic

v kartézských souřadnicích a lze-li ji napsat v tenzorovém tvaru, platí pak v jakékoli souřadnicové soustavě. To jsme využili např. při zobecnění vzorce pro výpočet měrné energie napjatosti.

10. ELASTICKÉ VLASTNOSTI PORÉZNIHO MATERIÁLU, KONSTRUKČNÍ ANIZOTROPIE

Představme si konstrukci pravidelně složenou z tenkostěnných krychlových buněk stejných rozměrů $a \times a \times a$, s tloušťkou stěn $t \ll a$ (obr. 25). Stěny tedy tvoří "skříňovou" porézní strukturu orientovanou k osám souřadnic x, y, z . Budeme zkoumat elastické vlastnosti takto zidealizovaného porézního materiálu.



Obr. 25

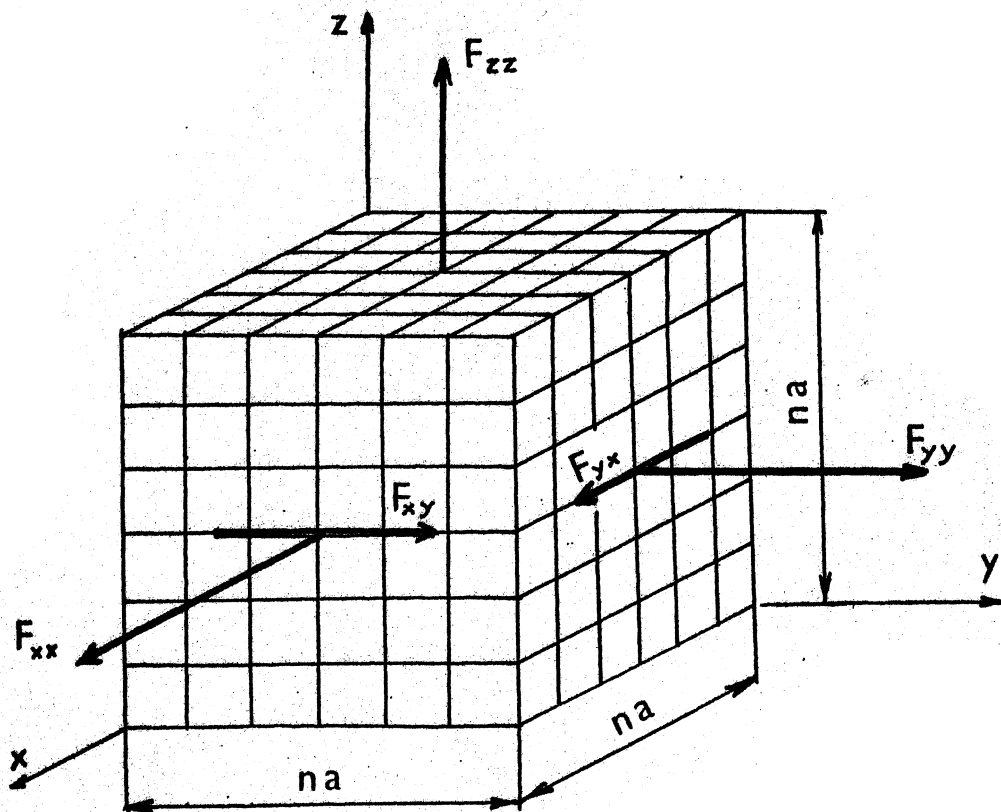
Protože stěny jsou tenké, bude v nich dvojosá napjatost. Předpokládejme, že rozměry jednotlivých buněk (pórů) jsou velmi malé v porovnání s makrorozměry tělesa, takže porézní materiál bude možno bez větší chyby nahradit elasticky ekvivalentním homogenním materiálem.

Na krychli tohoto náhradního materiálu o rozměrech $m_a \times m_a \times m_a$ nechť působí síly podle obr. 26. Prozkoumáme, jaké musí mít tyto síly velikosti, aby se vytvořil např. stav jednorozměrné deformace $\epsilon_x = \epsilon_{11} = \text{konst}$, ostatní složky deformace nulové. Zřejmě musí být

$$F_{xx} = 2n^2 a t G_x, \quad (184)$$

neboť čelní stěna na obr. 25 má průřez $2n^2at$. K zamezení příčné kontrakce musí působit ještě tahové síly ve směrech os y, z , ty však odpovídají jen napětí v deskách rovnoběžných s rovinou (x, z) , resp. (y, z) . Desky kolmé k ose x jsou totiž bez napětí. Proto

$$F_{yy} = F_{zz} = n^2at \mu \sigma_x. \quad (185)$$



Obr. 26

Z Hookeova zákona pro dvojosou napjatost vyjde

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \epsilon_x. \quad (186)$$

Přejdeme-li nyní na napětí v náhradním materiálu a na tenzorovou symboliku, bude $F_{xx} = \sigma^{11} n^2 a^2$ a z rovnice (184)

$$\sigma^{11} n^2 a^2 = 2n^2at \frac{E}{1-\mu^2} \epsilon_{11}. \quad (187)$$

Odtud

$$\sigma^{11} = \frac{t}{a} \frac{2E}{1-\mu^2} \epsilon_{11} \quad (188)$$

a z rovnice (186)

$$\sigma^{22} = \sigma^{33} = \frac{t}{a} \frac{\mu E}{1-\mu^2} \epsilon_{11} \quad (189)$$

Superponujeme-li tato přetvoření v jednotlivých směrech x , y , z , dostaneme

$$\sigma^{11} = \frac{t}{a} \frac{E}{1-\mu^2} (2\epsilon_{11} + \mu\epsilon_{22} + \mu\epsilon_{33}). \quad (190)$$

Nyní zvolíme za nenulové složky $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$. S použitím Hookeova zákona

$$\sigma^{12} = \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{1+\mu} \epsilon_{12} \quad (191)$$

dostaneme

$$F_{xy} = F_{yx} = n^2 a t \frac{E}{1+\mu} \epsilon_{12} \quad (192)$$

a odtud - dělením součinem $n^2 a^2$

$$\sigma^{12} = \sigma^{21} = \frac{t}{a} \frac{E}{1+\mu} \epsilon_{12} = \frac{t}{a} \frac{E}{2(1+\mu)} (\epsilon_{12} + \epsilon_{21}). \quad (193)$$

Srovnáním se (174) odtud získáme moduly pružnosti

$$\begin{aligned} E^{1111} &= E^{2222} = E^{3333} = \frac{2E}{1-\mu^2} \frac{t}{a}, \\ E^{1122} &= E^{1133} = E^{2233} = \frac{\mu E}{1-\mu^2} \frac{t}{a}, \\ E^{1212} &= E^{2323} = E^{3131} = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{t}{a}. \end{aligned} \quad (194)$$

S hodnotou $\mu = 0,3$ vyjde poměr těchto hodnot $E^{1111} : E^{1122} : E^{1212} = 1 : 0,15 : 0,175$, kdežto z rovnice (183) vyjde s využitím výsledků příkladu 24 pro plný materiál poměr $1 : 0,428 : 0,286$. Ze srovnání je zřejmé, že porézní materiál má menší příčnou kontrakci a že je ve smyku poddajnější než plný materiál.

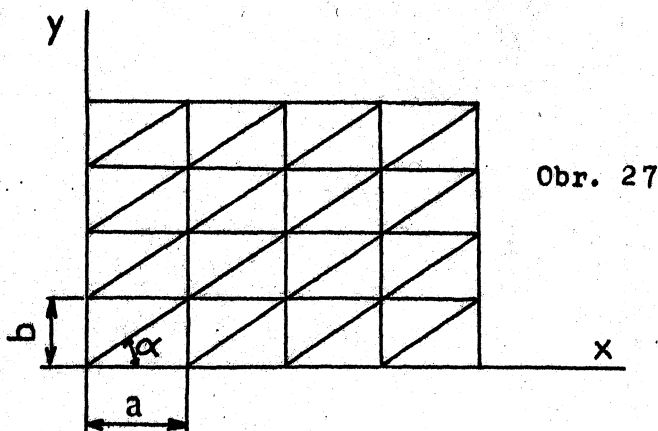
Porézni materiál podle obr. 25 má stejné vlastnosti ve směrech souřadnicových os x, y, z , ale není izotropický, jak se lze přesvědčit transformací do obecně pootočené soustavy souřadnic podle vzorce

$$E_{ij'k'l'} = \beta_{1i}^{i'} \beta_{2j}^{j'} \beta_{r}^{r'} \beta_{s}^{s'} E_{rars} \quad (195)$$

Anizotropie elasticky ekvivalentního náhradního materiálu způsobená konstrukčním uspořádáním struktury se nazývá konstrukční anizotropie.

Příklad 25

Pravidelná prutová konstrukce se skládá z trojúhelníkových "buněk" podle obr. 27. Pruty mají všechny též průřez I a modul pružnosti. Najděte elastické moduly náhradního kontinua.

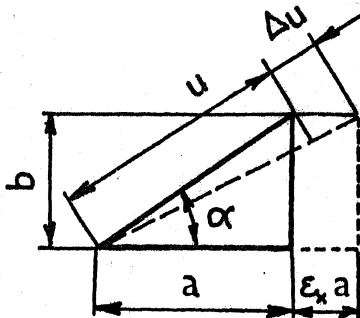


Obr. 27

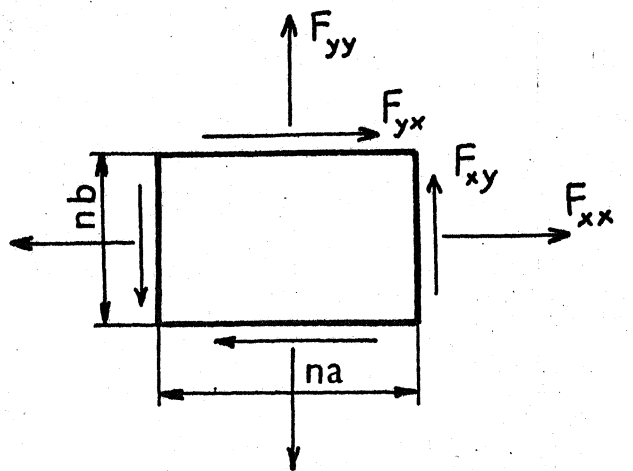
Řešení

Je-li nenulovou složkou přetvoření pouze $\epsilon_x = \epsilon_{11}$, bude poměrné prodloužení prutů rovnoběžných s osou x stejné, s osou y nulové. V úhlopříčných prutech bude poměrné prodloužení podle obr. 28

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\epsilon_x a \cos \alpha}{\frac{a}{\cos \alpha}} = \epsilon_x \cos^2 \alpha \quad (a)$$



Obr. 28



Obr. 29

Přitom

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Mají-li pruty modul pružnosti E a průřez S , budou na pole o velikosti $na \times mb$ podle obr. 29 působit síly

$$F_{xx} = nES\varepsilon_{11} + nES\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha = nES\varepsilon_{11} (1 + \cos^3 \alpha), \quad (b)$$

$$F_{xy} = nES\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \quad (c)$$

$$F_{yx} = nES\varepsilon_{11} \cos^3 \alpha, \quad (d)$$

$$F_{yy} = nES\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha \sin \alpha. \quad (e)$$

Odtud dostaneme napětí v náhradním kontinuu

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{11} &= \frac{F_{xx}}{mb} = \frac{ES\varepsilon_{11}}{a} \cotg \alpha (1 + \cos^3 \alpha), \\ \sigma^{12} &= \frac{F_{xy}}{mb} = \frac{ES\varepsilon_{11}}{a} \cotg \alpha \cos^2 \alpha \sin \alpha = \frac{ES\varepsilon_{11}}{a} \cos^3 \alpha, \\ \sigma^{21} &= \frac{F_{yx}}{ma} = \frac{ES\varepsilon_{11}}{a} \cos^3 \alpha = \sigma^{12}, \\ \sigma^{22} &= \frac{F_{yy}}{ma} = \frac{ES\varepsilon_{11}}{a} \cos^2 \alpha \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

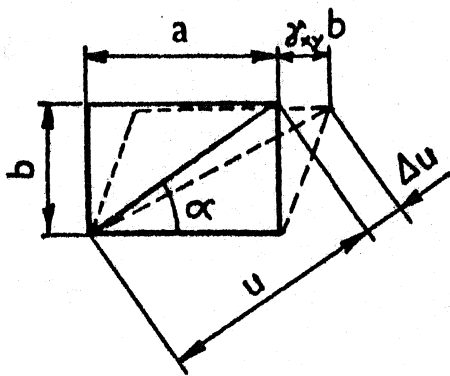
Pro stručnost označíme $\frac{ES}{a} = k$. Bude

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{11} &= k\varepsilon_{11} \cotg \alpha (1 + \cos^3 \alpha), \\ \sigma^{12} &= \sigma^{21} = k\varepsilon_{11} \cos^3 \alpha, \\ \sigma^{22} &= k\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Obdobně dostaneme napětí odpovídající prodloužení ε_{22}

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{11} &= k\varepsilon_{22} \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ \sigma^{12} &= \sigma^{21} = k\varepsilon_{22} \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ \sigma^{22} &= k\varepsilon_{22} (1 + \sin^3 \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Dále budeme předpokládat přetvoření $\gamma_{xy} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} \neq 0$.



Obr. 30

Podle obr. 30 vyjde poměrné prodloužení úhlopříčných prutů

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\gamma_{xy} b \cos \alpha}{\frac{a}{\cos \alpha}} = \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (i)$$

Prodloužení ostatních prutů je nulové (až na malou veličinu druhého řádu, která se v linearizované teorii pružnosti neuplatní). Proto

$$F_{xx} = F_{yx} = n E S \gamma_{xy} \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (j)$$

$$F_{xy} = F_{yy} = n E S \gamma_{xy} \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Ekvivalentní napětí odtud vyjdou

$$\sigma^{11} = \frac{F_{xx}}{nb} = k (\epsilon_{12} + \epsilon_{21}) \cos^3 \alpha,$$

$$\sigma^{12} = \sigma^{21} = \frac{F_{xy}}{nb} = \frac{F_{yx}}{ma} = k (\epsilon_{12} + \epsilon_{21}) \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (k)$$

$$\sigma^{22} = \frac{F_{yy}}{ma} = k (\epsilon_{12} + \epsilon_{21}) \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Superpozicí případů (g), (h) a (k) a srovnáním se vztahem

$$\sigma^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \quad (l)$$

dostaneme hledané moduly pružnosti

$$\left. \begin{aligned} E^{1111} &= k \cot^2 \alpha (1 + \cos^3 \alpha), \\ E^{1112} &= E^{1211} = k \cos^3 \alpha, \\ E^{1122} &= E^{2211} = k \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ E^{1212} &= k \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ E^{1222} &= E^{2212} = k \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ E^{2222} &= k (1 + \sin^3 \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Kdybychom nyní chtěli přejít k jiné soustavě souřadnic, dostali bychom moduly

$$E^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \beta_{\lambda}^{\alpha'} \beta_{\mu}^{\beta'} \beta_{\nu}^{\gamma'} \beta_{\pi}^{\delta'} E^{\lambda\mu\nu\pi} \quad (n)$$

Na pravé straně této rovnice je obecně 16 sčítanců. Vyčíslení vztahu (n) je tedy pracné, ale formálně jednoduché.

Souhrn. Má-li pružný materiál nehomogenní, ale pravidelnou strukturu, lze jej nahradit elasticky ekvivalentním homogenním materiálem. Jeho moduly pružnosti počítáme nejprve k souřadným osám výhodně orientovaným ke struktuře materiálu. Pak je můžeme přepočítat pro libovolnou soustavu souřadnic podle transformačních vztahů platných pro tenzory čtvrtého řádu. Náhradní materiál je obecně anizotropický, jen výjimečně izotropický. Elastická ekvivalence znamená, že oba materiály se v makrorozměrech deformují stejně. Tím není ještě nic řečeno o napjatosti, která je v nehomogenním materiálu složitá, v náhradním jednoduchá. Pevnostní otázku tím neřešíme; při ní se uplatní i koncentrace napětí způsobená složitostí tvaru nehomogenního materiálu.

11. KONSTITUČNÍ ROVNICE PRO VAZKOU KAPALINU A VISKOELASTICKÝ MATERIÁL

Modul pružnosti (183) můžeme dosadit do Hookeova zákona (174)

$$\sigma^{ij} = \frac{E}{2(1+\mu)} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} + \frac{2\mu}{1-2\mu} g^{ij} g^{kl}) \epsilon_{kl} \quad (196)$$

Snížíme index j a změním polohu indexu k . K tomuto účelu znásobíme celou rovnici g_{mj} a využijeme vztah (82), podle kterého např.

$$g^{kl} \epsilon_{kl} = g^k \epsilon_l = \delta_k \epsilon_l = \epsilon_k \quad (197)$$

Dostaneme tak

$$\begin{aligned} \sigma_m^i &= \frac{E}{2(1+\mu)} (\delta_m^l \delta_k^i + g^{il} g_{mk} + \frac{2\mu}{1-2\mu} \delta_m^i \delta_k^l) \epsilon_l = \\ &= \frac{E}{2(1+\mu)} (\epsilon_m^i + g^{il} \epsilon_{ml} + \frac{2\mu}{1-2\mu} \delta_m^i \epsilon_l^l). \end{aligned} \quad (198)$$

První dva členy v závorce sloučíme a krátíme dvěma. Zbude

$$\sigma_m^i = \frac{E}{1+\mu} (\epsilon_m^i + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon_l^l \delta_m^i). \quad (199)$$

Zavedeme-li Lamého moduly pružnosti

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

dostaneme po úpravě

$$\sigma_j^i = 2G \varepsilon_j^i + \lambda \varepsilon_m^m \delta_j^i. \quad (200)$$

Přitom jsme změnilí označení některých indexů. Vztah (199) se snadno invertuje. Stačí nejprve zúžit smíšené tenzory volbou $m = i$ a příslušnou sumací. Nezapomeňme, že $\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3$. Zúžení se může týkat jen indexů, přes které lze sečítat (jeden musí být horní, druhý dolní). Vyjde

$$\sigma_i^i = \frac{E}{1+\mu} \left(\varepsilon_i^i + \frac{3\mu}{1-2\mu} \varepsilon_\ell^\ell \right) = \frac{E}{1-2\mu} \varepsilon_\ell^\ell. \quad (201)$$

Odtud vypočteme ε_ℓ^ℓ a dosadíme do (199). * / Po snadné úpravě pak dostaneme

$$\varepsilon_j^i = \frac{1}{E} \left[(1+\mu) \sigma_j^i - \mu \sigma_m^m \delta_j^i \right]. \quad (202)$$

V rovnicích (199), resp. (200) a (202) značí ε_m^m objemovou dilataci a $\frac{1}{3} \sigma_m^m$ hydrostatické napětí. Z rovnice (201), kterou přepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{3} \sigma_m^m = \frac{E}{3(1-2\mu)} \varepsilon_m^m = K \varepsilon_m^m, \quad (203)$$

můžeme vypočítat modul objemové stlačitelnosti $K = E / [3(1-2\mu)]$.

Další výpočty se poněkud zjednoduší, zavedeme-li označení

$$s = \frac{1}{3} \sigma_m^m, \quad e = \frac{1}{3} \varepsilon_m^m. \quad (204)$$

Rovnice (203) pak zní

$$Ee = (1-2\mu)s. \quad (205)$$

Pomocí těchto veličin lze jednoduše definovat deviátor napětí

$$s_j^i = \sigma_j^i - s \delta_j^i \quad (206)$$

* / Samozřejmě, že $\varepsilon_\ell^\ell = \varepsilon_m^m = \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3$.

a deviátor přetvoření

$$e_j^i = \varepsilon_j^i - e \delta_j^i. \quad (207)$$

Tento deviátor popisuje "část" deformace, při níž se objem nezmění, neboť

$$e_i^i = \varepsilon_i^i - e \delta_i^i = 3e - e \cdot 3 = 0. \quad (208)$$

Dosazením (206) a (207) do (202) dostaneme po úpravě (s využitím (205))

$$e_j^i = \frac{1+\mu}{E} \Delta_j^i = \frac{1}{2G} \Delta_j^i. \quad (209)$$

Alternativně

$$\begin{aligned} \Delta_j^i &= 2G e_j^i, \\ \Delta &= (3\lambda + 2G) e. \end{aligned} \quad (210)$$

Po těchto úpravách přistoupíme k popisu napětí ve vazké kapalině. Zavedeme rychlosti poměrných deformací

$$\dot{e}_j^i = \frac{\partial \varepsilon_j^i}{\partial t}, \quad \dot{e} = \frac{\partial e}{\partial t}, \quad \dot{e}_j^i = \frac{\partial e_j^i}{\partial t}.$$

V rovnicích (210) nyní stačí zaměnit poměrné deformace jejich rychlostmi

$$\Delta_j^i = 2G \dot{e}_j^i, \quad \Delta = (3\lambda + 2G) \dot{e}. \quad (211)$$

Nyní λ , G už nejsou moduly pružnosti, ale nějaké jiné koeficienty, charakterizující vazkost (viskozitu) kapaliny. Zpravidla je objemová změna zanedbatelná, takže $\lambda \rightarrow \infty$, $\dot{e} \rightarrow 0$. Hydrostatický tlak Δ pak nezávisí na deformaci a naopak. Taková kapalina je nestlačitelná. Skutečné kapaliny jsou stlačitelné, při změně objemu se však řídí elastickým zákonem. Změna objemu je tedy elastická a změna tvaru (distorze) vazká. To vyjadřují rovnice

$$\Delta = 3Ke, \quad \Delta_j^i = 2G \dot{e}_j^i. \quad (212)$$

Vlastnosti viskoelastických materiálů jsou popsány obecnou kombinací vazkosti a pružnosti. Konstituční rovnice těchto materiálů obsahují nejen veličiny Δ , Δ_j^i , e , e_j^i (jako např. (210)), ale i jejich časové derivace (jako např. (211)). Obecný tvar konstitučních rovnic těchto materiálů je

$$\sum_k \nu_k'' \frac{\partial^k \delta}{\partial t^k} = \sum_k q_k'' \frac{\partial^k e}{\partial t^k},$$

$$\sum_k \nu_k' \frac{\partial^k \delta_j^i}{\partial t^k} = \sum_k q_k' \frac{\partial^k e_j^i}{\partial t^k}.$$
(213)

V těchto rovnicích jsou i, j indexy značící tenzory, kdežto $k = 0, 1, 2, \dots$ značí řád časové derivace. Z rovnic (213) plynou (210) a (211) jako zvláštní případy.

Příklad 26

Odvoďte Hookeův zákon pro rovinnou napjatost, při níž

$$\sigma_3^3 = \sigma_1^3 = \sigma_2^3 = \sigma_3^1 = \sigma_3^2 = 0.$$

Řešení

Z podmínky $\sigma_2^3 = 0$ vyjde podle (199), že

$$\epsilon_3^3 = \frac{\mu}{1-\mu} \epsilon_\alpha^\alpha \quad (a)$$

a tedy

$$\epsilon_m^m = \epsilon_\alpha^\alpha + \epsilon_3^3 = \frac{1-2\mu}{1-\mu} \epsilon_\alpha^\alpha. \quad (b)$$

Z rovnice (202) dostaneme jednoduše

$$\epsilon_\beta^\alpha = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_\beta^\alpha - \mu\sigma_\gamma^\gamma \delta_\beta^\alpha]. \quad (c)$$

Při úženi této rovnice pro $\alpha = \beta$ však nesmíme zapomenout, že na levé straně má být ϵ_m^m (neboť $\epsilon_3^3 \neq 0$), takže

$$\frac{1-2\mu}{1-\mu} \epsilon_\alpha^\alpha = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_\alpha^\alpha - \mu\sigma_\gamma^\gamma \delta_\alpha^\alpha] = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_\gamma^\gamma. \quad (d)$$

Odtud dosadíme za σ_γ^γ do (c) a upravíme. Vyjde

$$\sigma_\beta^\alpha = \frac{E}{1+\mu} \left[\epsilon_\beta^\alpha + \frac{\mu}{1-\mu} \epsilon_\gamma^\gamma \delta_\beta^\alpha \right]. \quad (e)$$

Rovnice (c) a (e) vyjadřují Hookeův zákon pro dvojosou napjatost.

Příklad 27

Zobecněte vlastnosti Maxwellova reologického modelu (obr. 31) na případ prostorové napjatosti.

Obr. 31



Řešení

Prodloužení modelu působením konstantní síly se skládá z elastického prodloužení pružiny a z vazkého posunutí pístu v kataraktu. Tomu odpovídají analogické vztahy

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2, \\ \epsilon_1 &= k_1 \sigma, & \dot{\epsilon}_2 &= k_2 \dot{\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Tedy

$$\dot{\epsilon} = k_1 \dot{\sigma} + k_2 \sigma. \quad (b)$$

Zobecněním tohoto vztahu pro prostorovou napjatost dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \nu_0'' \sigma + \nu_1'' \dot{\sigma}, \\ \epsilon_j^i &= \nu_0' \sigma_j^i + \nu_1' \dot{\sigma}_j^i. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Je to zvláštní případ soustavy (213). Jsou-li ν_0' , ν_1' , ν_0'' a ν_1'' konstantní nebo závisejí-li nanejvýš na čase, je soustava těchto diferenciálních rovnic lineární.

Souhrn. Vazké materiály mají tu vlastnost, že napjatost v nich závisí na rychlosti poměrné deformace. Viskoelastické materiály v sobě spojují vlastnosti elastických a vazkých těles, takže do jejich konstitučních rovnic vstupují nejen tenzory napjatosti a přetvoření, ale i jejich časové derivace. Mohou to být i derivace vyšších řádů.

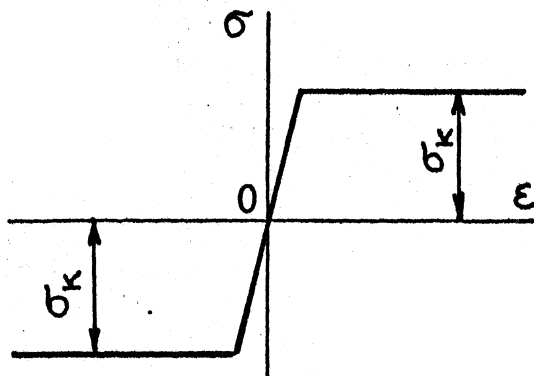
12. PLASTICITA

Začneme opět s nejjednodušším případem. Při tahové zkoušce vzorků z měkké oceli vzniká v pracovním diagramu na mezi kluzu prodleva. K usnadnění výpočtů (např. mezních stavů prutových soustav a stavebních konstrukcí) se tento pracovní diagram idealizuje a nahrazuje

dvěma přímkami. Pro materiál bez zpevnění mají tyto přímky rovnice */

$$\begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon && \text{pro } \varepsilon < \frac{\sigma_k}{E} \\ \sigma &= \sigma_k && \text{pro } \varepsilon \geq \frac{\sigma_k}{E} \end{aligned} \quad (214)$$

Předpokládáme-li stejné deformační vlastnosti i při zkoušce tlakem (což může platit jen pro malá přetvoření, neboť jinak se oba druhy zkoušek nemohou srovnávat), dostaneme pracovní diagram podle obr. 32. Materiál, který vyhovuje tomuto předpokladu, je ideálně plastický (přesněji elasticko-plastický).



Obr. 32

Nyní se pokusíme zobecnit tyto poznatky pro obecně prostorovou napjatost. Plastické (tj.

nevratné) deformace vzniknou tehdy, dosáhnou-li složky napjatosti určité hodnoty splňující podmínku plasticity. Bylo navrženo a vyzkoušeno mnoho předpokládaných tvarů této podmínky. Zdá se, že ve skutečnosti je tolik podmínek plasticity, kolik je různých materiálů. Některé z nich jsou však natolik univerzální, že se hodí pro většinu konstrukčních materiálů, které mají plastické vlastnosti. Budeme požadovat, aby se tvar podmínky plasticity hodil i pro matematické operace. Z těchto hledisek je nejvhodnější, jak ještě vysvětlíme, Misesova podmínka.

Obecně lze předpokládat, že materiál mění při plastické deformaci své vlastnosti, tedy i podmínku plasticity, která pak má tvar **/

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{(p)}^{ij}, k) = 0. \quad (215)$$

Zde $\varepsilon_{(p)}^{ij}$ je plastická část tenzoru deformace, k je parametr vyjadřující zpevnění (závisí na deformační historii). Derivací (215) podle času dostaneme

*/ U materiálu se zpevněním roste napětí i po dosažení meze kluzu.

**/ Podmínka (215) musí platit nezávisle na soustavě souřadnic, musí tedy mít invariantní tvar.

Rozdíl prací dA je dán obdélníkem pod úsečkou $\bar{13}$. Bod 3 by splynul s bodem 1 jen při elastických deformacích. Pak by v rovnici (220) platilo znaménko rovnosti. Z obr. 33 však můžeme usoudit, že podmínka (220) je ekvivalentní podmínce $\Delta^{123} \geq 0$, tedy

$$\frac{1}{2} d\sigma \cdot d\varepsilon^{(p)} \geq 0. \quad (221)$$

Polovina je zde nepodstatná a lze ji krátit. Pro třírozměrný případ to znamená, že

$$d\sigma^{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^{(p)} \geq 0. \quad (222)$$

Je-li materiál ideálně plastický, nezávisí funkce f na plastickém přetvoření, ale jen na napjatosti, takže $f = f(\sigma^{ij})$. Plastická deformace vzniká, jen když $f = 0$. Derivací

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} = 0. \quad (223)$$

Porovnáním podmínek (222) a (223) dojdeme k závěru, že přírůstek plastické deformace je úměrný parciální derivaci v rovnici (223), tj.

$d\varepsilon_{ij}^{(p)} \sim \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}}$. Tento přírůstek je úměrný deformační rychlosti $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}$, takže

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} = c \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}}, \quad (224)$$

kde c je libovolný skalární činitel. Je-li totiž podmínka plasticity $f = 0$, je jí také rovnice $kf = 0$ ($k = \text{konst}$). Konstanta úměrnosti c může být proto jakákoli.

Rychlost plastické deformace získáme parciální derivací zatěžovací funkce $f(\sigma^{ij})$. Tato funkce má zřejmě význam plastického potenciálu, který do výpočtů zavedl roku 1928 von Mises. Rovnice (224) vyjadřuje zákon plastického přetváření (zákon tečení).

Vzniká nyní otázka, jak volit podmínku plasticity, tj. jaký konkrétní tvar má mít zatěžovací funkce. Začneme s rozdělením tenzorů napjatosti a deformace na deviátor a na příslušný zbytek podle (206) a (207). Tyto rovnice dají v obecných souřadnicích

$$\sigma^{ij} = s q^{ij} + s_{ij}, \quad (225)$$

$$\varepsilon_{ij} = e q_{ij} + e_{ij}.$$

Energie elastické napjatosti pak vyjde

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} (\Delta g^{ij} + \Delta^{ij}) (e g_{ij} + e_{ij}) = \\
 &= \frac{1}{2} (\Delta e \delta_i^i + \Delta e_i^i + \Delta_i^i e + \Delta^{ij} e_{ij}).
 \end{aligned}
 \tag{226}$$

Podle (208) a (209) odpadne druhý a třetí člen v závorce na pravé straně (226), takže

$$A = \frac{1}{2} (3 \Delta e + \Delta^{ij} e_{ij}).
 \tag{227}$$

První člen vyjadřuje dilatační energii, druhý člen distorzní energii. Podle Misesovy hypotézy vzniká plastický stav tehdy, dosáhne-li distorzní energie napjatosti

$$\frac{1}{2} \Delta^{ij} e_{ij} = \frac{1}{4G} \Delta^{ij} \Delta_{ij} = \frac{1}{4G} \Delta_j^i \Delta_i^j$$

určité hodnoty závislé na vlastnostech materiálu. Podmínku plasticity pak můžeme psát v jednoduchém tvaru $\Delta_j^i \Delta_i^j = 2 k^2$ čili - s použitím (206) -

$$f(\sigma_j^i) = 3 \sigma_j^i \sigma_i^j - \sigma_i^i \sigma_j^j - 6 k^2 = 0.
 \tag{228}$$

V kontravariantních složkách

$$f(\sigma^{ij}) = \sigma^{ik} \sigma^{jl} (3 g_{jk} g_{il} - g_{ik} g_{jl}) - 6 k^2 = 0.
 \tag{229}$$

To je tvar Misesovy podmínky plasticity, která je pro tenzorové výpočty nejvhodnější. */

Zákon plastického přetváření (224) nedává ani velikost plastické deformace, ani její rychlost. Pokud se tenzor napětí nezmění, mohou plastické deformace růst, ale nemusí. Vše, co z rovnice (224) získáme, je jen vzájemný poměr přírůstků $\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}$ dt plastické deformace v závislosti na tenzoru napjatosti.

Protože jsme při formulaci Misesovy hypotézy vynechali dilatační energii jako nepodstatnou, jeví se také dilatační část (objemová změna) plastické deformace jako zanedbatelná. Rychlost deformace $\dot{\epsilon}_{ij}$ se pak rovná rychlosti deviatoru této deformace $\dot{\epsilon}_{ij}$. To skutečně odpovídá experimentálním výsledkům.

*/ Funkce f je invariantní, neboť obsahuje jen slepé indexy.

Nyní známe zatěžovací funkci a můžeme ji derivovat

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma^{mn}} = \sigma^{jl} (3g_{jn} g_{ml} - g_{mn} g_{jl}) + \sigma^{ik} (3g_{mk} g_{in} - g_{ik} g_{mn}). \quad (230)$$

Po úpravě

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma^{mn}} &= 3\sigma^{mn} - \sigma_j^j g_{mn} + 3\sigma_{nm} - \sigma_i^i g_{mn} = \\ &= 6\sigma^{mn} - 6\delta g_{mn} = 6\delta^{mn}. \end{aligned} \quad (231)$$

Rovnice (224) pak dá

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} = \lambda \delta_{ij} \quad (232)$$

když $\lambda = 6C$. Poslední rovnice vyjadřuje Prandtlův-Reussův zákon plastického přetváření.

Existuje zajímavý způsob, jak znázornit podmínku plasticity $f(\sigma^{ij})$ a zákon plastického přetváření (224). Zavedeme nové, jednoindexové označení složek tenzoru napjatosti

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma^{11}, & \sigma_2 &= \sigma^{12} = \sigma^{21}, & \sigma_3 &= \sigma^{13} = \sigma^{31}, \\ \sigma_4 &= \sigma^{22}, & \sigma_5 &= \sigma^{23} = \sigma^{32}, & \sigma_6 &= \sigma^{33}. \end{aligned} \quad (233)$$

Tak jsme dostali šest složek, které vyneseme na pomyslné osy souřadnic v šestirozměrném prostoru. V tomto prostoru je každý stav napjatosti dán jedním bodem. Zvolíme-li "vzájemně kolmé" osy souřadnic s jednotkovými vektory \vec{u}_N , $N = 1, 2, \dots, 6$, tj. budou-li vektory \vec{u}_N splňovat podmínku $\vec{u}_N \cdot \vec{u}_M = \delta_{NM}$ (Kroneckerův symbol), dostaneme kartézskou soustavu souřadnic v šestirozměrném prostoru, která je úplnou obdobou kartézské soustavy v třírozměrném prostoru x, y, z . Rádusvektor bodu znázorňujícího napjatost je pak

$$\vec{\sigma} = \sum_{N=1}^6 \sigma_N \vec{u}_N. \quad (234)$$

V tomto prostoru znamená podmínka plasticity

$$f(\sigma_N) = 0 \quad (235)$$

pětirozměrnou plochu ("nadplochu"). Body $f < 0$ leží uvnitř této plochy a tvoří tak spolu s plochou $f = 0$ "těleso" (oblast) možných

stavů napjatosti. Plastická deformace nastává, dostane-li se bod σ_N na povrch tohoto tělesa. Nemůže být vně tohoto tělesa.

Při derivaci zatěžovací funkce nesmíme zapomenout, že v rovnici (224) se počítá s devíti složkami tenzoru napjatosti, neboť σ^{12} a σ^{21} vystupují samostatně. Proto nyní musíme brát

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{12}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma^{21}} = 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma^{12}}. \quad (236)$$

Analogické vztahy platí i pro $\frac{\partial f}{\partial \sigma_3}$ a $\frac{\partial f}{\partial \sigma_5}$. To nás vede k tomu, abychom zavedli složky rychlosti deformace

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \dot{\epsilon}_{11}, & \dot{\epsilon}_2 &= \dot{\epsilon}_{12} + \dot{\epsilon}_{21}, & \dot{\epsilon}_3 &= \dot{\epsilon}_{13} + \dot{\epsilon}_{31}, \\ \dot{\epsilon}_4 &= \dot{\epsilon}_{22}, & \dot{\epsilon}_5 &= \dot{\epsilon}_{23} + \dot{\epsilon}_{32}, & \dot{\epsilon}_6 &= \dot{\epsilon}_{33}. \end{aligned} \quad (237)$$

Rovnice (224) bude mít potom tvar

$$\dot{\epsilon}_N^{(n)} = C \frac{\partial f}{\partial \sigma_N}. \quad (238)$$

Na levé straně jsou složky vektoru

$$\vec{\epsilon} = \sum_{N=1}^6 \dot{\epsilon}_N^{(n)} \vec{i}_N \quad (239)$$

a na pravé straně

$$\text{grad } f = \sum_{N=1}^6 \frac{\partial f}{\partial \sigma_N} \vec{i}_N. \quad (240)$$

Tento vektor je kolmý k povrchu $f = 0$. Zákon plastického přetváření (224), resp. (238) lze tedy napsat jako vektorovou rovnici

$$\vec{\epsilon} = C \text{grad } f. \quad (241)$$

Tato rovnice říká, že šestirozměrný vektor $\vec{\epsilon}$ rychlosti plastického přetvoření je kolmý k mezní ploše $f = 0$. Šest složek ϵ_N jsou přitom obvyklé složky poměrného přetvoření ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} . Plastická práce při malé změně plastické deformace je dána skalárním součinem

$$dA = \sigma_N \cdot \dot{\epsilon}_N \cdot dt = \vec{\sigma} \cdot \vec{\epsilon} \cdot dt. \quad (242)$$

Koiter zobecnil roku 1953 uvedenou teorii pro případ, že mezní plocha (235) není jediná, ale že je takových ploch několik $[f_1(\sigma_N) = 0, f_2(\sigma_N) = 0 \text{ atd.}]$. Průsečnice těchto ploch jsou hranami šestirozměrného tělesa přípustných napjatostí. Plastický stav vzniká, rovná-li se alespoň jedna z hodnot f_1, f_2, \dots, f_m nule. Oblast přípustných deformací je dána soustavou nerovností

$$f_1(\sigma_N) \leq 0, f_2(\sigma_N) \leq 0, \dots, f_m(\sigma_N) \leq 0. \quad (243)$$

Tímto způsobem lze znázornit známou Trescovu podmínku plasticity. Mezní plocha má v tom případě tvar šestibokého hranolu. Podrobnostmi se zde nebudeme zabývat.

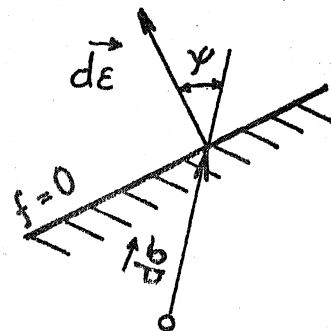
Pro obecný případ materiálu se zpevněním platí tyto Druckerovy věty:

1. Mezní plocha se může při zatěžování měnit, ale musí být vždy konvexní.
2. Vektor přírůstku plastické deformace $d\vec{\epsilon}$ je kolmý k mezní ploše v regulárním bodě a je mezi sousedními normálami mezní plochy, jde-li o bod na její hraně.
3. Rychlost plastické deformace je lineární funkcí časových derivací složek tenzoru napjatosti.

Pro vektory přírůstků $d\vec{\sigma}$, $d\vec{\epsilon}$ platí podle rovnice (222) nerovnost

$$d\vec{\sigma} \cdot d\vec{\epsilon} = |d\vec{\sigma}| |d\vec{\epsilon}| \cos \psi \geq 0. \quad (244)$$

Vzniká-li přetvoření v regulárním bodě mezní plochy, musí oba vektory, z nichž $d\vec{\epsilon}$ je vektor kolmý k mezní ploše (obr. 34), svírat ostrý (nebo nejvýš pravý) úhel, má-li (244) skutečně platit. Požadavek kolmosti vektoru $d\vec{\epsilon}$ k mezní ploše $f = 0$ vede k rovnici (238), kde však C již není konstanta, ale funkce Λ závislá na napjatosti, na časových derivacích napjatosti, na přetvoření a na jeho historii (časovém průběhu). Bude proto



Obr. 34

$$\dot{\epsilon}_N^{(p)} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_N}. \quad (245)$$

Podmínka plasticity má nyní tvar (215), tj.

$$f(\sigma_N, \epsilon_N^{(n)}, K) = 0. \quad (246)$$

Musí být během zatěžování stále splněna, neboť zatěžování tělesa v plastickém stavu musí vést opět k plastickému stavu (ovšem jinému).

Předpokládejme, že parametr zpevnění K závisí jen na konečném stavu plastických deformací, takže $K = K(\epsilon_N^{(n)})$. Derivací (246) podle času vyjde

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_N} \dot{\sigma}_N + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_N^{(n)}} \dot{\epsilon}_N^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \epsilon_N^{(n)}} \dot{\epsilon}_N^{(n)} = 0. \quad (247)$$

Tuto rovnici můžeme upravit do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_N} \dot{\sigma}_N = - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_M^{(n)}} + \frac{\partial f}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \epsilon_M^{(n)}} \right) \dot{\epsilon}_M^{(n)}. \quad (248)$$

Dosadíme-li sem z rovnice (245), v níž zaměníme index N za M , dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_N} \dot{\sigma}_N = - \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_M^{(n)}} + \frac{\partial f}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \epsilon_M^{(n)}} \right) \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_M}. \quad (249)$$

Odtud už můžeme vypočítat

$$\Lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_N} \dot{\sigma}_N}{\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_M^{(n)}} + \frac{\partial f}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \epsilon_M^{(n)}} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_M}}. \quad (250)$$

Tuto hodnotu dosadíme do (245) a upravíme. Vyjde

$$\dot{\epsilon}_N^{(n)} = \hat{G} \frac{\partial f}{\partial \sigma_N} \frac{\partial f}{\partial \sigma_M} \dot{\sigma}_M, \quad (251)$$

kde

$$\hat{G} = - \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_L^{(n)}} + \frac{\partial f}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \epsilon_L^{(n)}} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_L}}, \quad (252)$$

$M, N, L = 1, 2, \dots, 6$. Rovnice (251) vyjadřuje matematickou formou znení třetí Druckerovy věty.

Příklad 28

Co dává Misesova podmínka plasticity (229) pro kombinovaný tah a krut hřídele kruhového průřezu?

Řešení

Ve válcových souřadnicích $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ máme nenulové složky kontravariantního tenzoru napjatosti pouze

$$\sigma^{33} = \sigma, \quad \sigma^{23} = \sigma^{32} = \frac{1}{r} \tau.$$

Tahové napětí σ a krutové napětí τ jsou fyzikální složky napjatosti, dostaneme je výpočtem podle známých vzorců ($\sigma = F/S$, $\tau = M_k/W_k$). Kontravariantní složky pak vypočteme podle vzorce odvozeného v příkladu 23. Složky metrického tenzoru vezmeme z příkladu 8, doplníme pouze hodnoty

$$g_{33} = g^{33} = 1, \quad g_{13} = g_{23} = 0, \quad g^{13} = g^{23} = 0.$$

V rovnici (229) zbudou pouze členy

$$\begin{aligned} \sigma^{33} \sigma^{33} (3 g_{33} g_{33} - g_{33} g_{33}) + 2 \sigma^{23} \sigma^{32} \cdot 3 g_{33} g_{22} - 2 k^2 = \\ = 2\sigma^2 + 6\tau^2 - 2k^2 = 0. \end{aligned}$$

Odtud

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = k^2.$$

Působí-li jen tah, je $\sigma = k = \sigma_k$ (mez kluzu). Působí-li jen krut, vyjde

$$\tau = \tau_k = \frac{1}{\sqrt{3}} k \doteq 0,866 \sigma_k.$$

Příklad 29

Prager navrhl počítat s "kinematickým" zpevněním materiálu, při němž má mezní plocha tvar

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0, \quad (a)$$

kde

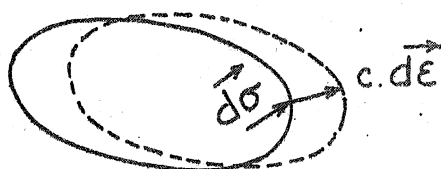
$$\alpha_{ij} = c \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}. \quad (b)$$

Vrátíme-li se k jednodimenzionální symbolice, budeme si moci mezní plochu představit v šestirozměrném prostoru. Rovnice (a) pak znamená, že celá plocha $f = 0$ se rovnoběžně posouvá, aniž se deformuje. Vektor této translace (posuvu) je

$$\vec{\alpha} = [\alpha_{ij}] = \{\alpha_N\}.$$

Platí-li, že plastická deformace nezávisí na hydrostatickém napětí, musí mít mezní plocha tvar válce kolmého k nadrovině

$$G_1 + G_4 + G_6 = 0. \quad (c)$$



Obr. 35

Kdyby šlo o obyčejnou rovinu, mohli bychom v ní snadno graficky znázornit řez s mezní plochou (obr. 35), který by pak byl pravouhlým průřezem celé mezní plochy do roviny (c). Rovnice (b) vyjadřuje, že vektor posuvu $d\vec{\epsilon}$ má směr přírůstku plastické deformace $d\vec{\epsilon}$ (obr. 35). Tímto způsobem lze postihnout známý Bauschingerův efekt.

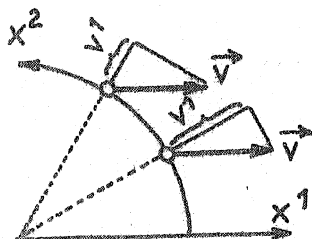
Souhrn. Charakter zatěžování lze posoudit podle zatěžovací funkce, jež závisí na napjatosti, na plastické deformaci a popř. na historii této deformace. Plastický stav tělesa vzniká, rovná-li se zatěžovací funkce nule (podmínka plasticity). Podle Misese je tato podmínka splněna, dosáhne-li distorzní energie napjatosti určité hodnoty, závislé na materiálu. Hydrostatická část napjatosti se přitom neuplatňuje. Podmínka plasticity určuje mezní plochu (nadplochu) omezující oblast možných stavů napjatosti. Tato plocha je konvexní, u materiálů bez zpevnění stálá, obecně se však může s plastickou deformací měnit. Přírůstek vektoru deformace je k mezní ploše v regulárních bodech kolmý, na hranách spadá mezi normály v sousedních bodech (není-li mezní plocha všude hladká). Jím je určen vzájemný poměr přírůstků jednotlivých složek tenzoru plastické deformace, tj. zákon plastického přetváření (zákon tečení).

13. DERIVACE VEKTORU V KŘIVOČARÝCH SOUŘADNICÍCH

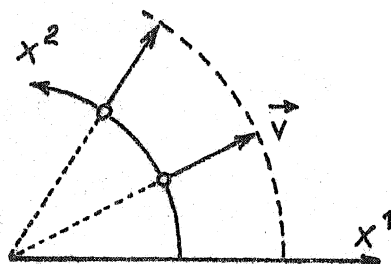
Vektory, jejichž složky jsou funkcemi souřadnic, tvoří vektorové pole. Příkladem vektorového pole je pole rychlostí proudící kapaliny. Změnu vektoru v závislosti na některé souřadnici posuzujeme podle

parciální derivace vektoru podle této souřadnice. Až dosud jsme se omezili na derivování vektorů v kartézské soustavě souřadnic, v níž jsou báze vektory konstantní (složky metrického tenzoru se rovnají Kroneckerovu symbolu). V křivočarých souřadnicích je derivování zkomplikováno tím, že báze vektory se obecně mění. Pokusíme se dosáhnout zjednodušení a sjednocení formy zápisu i v tomto případě, uvidíme však, že to nebude snadné.

Na obr. 36 jsou zakresleny v polárních souřadnicích radiální složky v^1 konstantního vektoru \vec{v} v různých bodech. Je zřejmé, že se tyto složky navzájem liší, ačkoli jde o týž vektor. Na obr. 37 jsou tyto složky naopak stejné, ačkoli jde o různé vektory. Srovnání těchto dvou obrázků nám dá představu o potížích, kterým musíme čelit.



Obr. 36



Obr. 37

Libovolný vektor \vec{v} můžeme vyjádřit ve složkách podle vztahu

$$\vec{v} = v^i \vec{g}_i. \quad (248)$$

Tuto rovnici budeme derivovat podle proměnné x^j . Vyjde

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \vec{g}_i + v^i \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial x^j}. \quad (249)$$

Ve zkráceném zápisu

$$\vec{v}_{,j} = v_{,j}^i \vec{g}_i + v^i \vec{g}_{i,j}. \quad (250)$$

V kovariantních složkách bude obdobně

$$\vec{v}_{,j} = v_{i,j} \vec{g}^i + v_i \vec{g}^i_{,j}. \quad (251)$$

Tyto vzorce obsahují derivace báze vektorů podle souřadnic x^j . Takové derivace jsou opět vektory, takže je můžeme rozložit do složek ve směrech báze vektorů

$$\vec{g}_{i,j} = \Gamma_{ijk} \vec{g}^k = \Gamma_{ij}^k \vec{g}_k. \quad (252)$$

Příslušné složky Γ_{ijk} , resp. Γ_{ij}^k vypočteme, znásobíme-li poslední rovnici skalárně bázovým vektorem \vec{g}_e , resp. \vec{g}^e . Vyjde

$$\vec{g}_{i,j} \cdot \vec{g}_e = \Gamma_{ijk} \vec{g}^k \cdot \vec{g}_e = \Gamma_{ijk} \delta_e^k = \Gamma_{ije}, \quad (253)$$

$$\vec{g}_{i,j} \cdot \vec{g}^e = \Gamma_{ij}^k \vec{g}_k \cdot \vec{g}^e = \Gamma_{ij}^k \delta_k^e = \Gamma_{ij}^e. \quad (254)$$

Platí tedy definice těchto tzv. Christoffelových symbolů

$$\Gamma_{ijk} = \vec{g}_{i,j} \cdot \vec{g}_k, \quad \Gamma_{ij}^k = \vec{g}_{i,j} \cdot \vec{g}^k. \quad (255)$$

Znásobíme-li výrazy na pravé straně (252) vektorem \vec{g}_m , dostaneme

$$\Gamma_{ijk} \vec{g}^k \cdot \vec{g}_m = \Gamma_{ij}^k \vec{g}_k \cdot \vec{g}_m \quad (256)$$

čili

$$\Gamma_{ijk} \delta_m^k = \Gamma_{ijn} = g_{kn} \Gamma_{ij}^k. \quad (257)$$

Obdobně

$$\Gamma_{ijk} g^{kl} = \Gamma_{ij}^l \quad (258)$$

To znamená, že poslední index (k) u Christoffelova symbolu můžeme snižovat nebo zvyšovat pomocí metrického tenzoru. O prvních dvou indexech to však neplatí, takže Christoffelův symbol není tenzorem třetího řádu.

Derivací rovnice (69) dostaneme

$$\vec{g}_{i,j} = \vec{r}_{,ij} = \vec{r}_{,ji} = \vec{g}_{j,i}. \quad (259)$$

To znamená podle (252), že

$$\Gamma_{ije} \vec{g}^e = \Gamma_{jic} \vec{g}^e, \quad \Gamma_{ij}^e \vec{g}_e = \Gamma_{ji}^e \vec{g}_e. \quad (260)$$

Tyto rovnice znásobíme vektorem reciproké báze \vec{g}_k , popř. \vec{g}^k a dostaneme

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (261)$$

Christoffelovy symboly jsou v prvních indexech souměrné. Derivací rovnice $g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$ dostaneme

$$g_{ij,k} = \vec{g}_{i,k} \cdot \vec{g}_j + \vec{g}_i \cdot \vec{g}_{j,k} \quad (262)$$

a vzhledem k (253)

$$g_{ij,k} = \Gamma_{ikh} + \Gamma_{jki}. \quad (263)$$

Tuto rovnici napíšeme třikrát v různých permutacích

$$g_{ijk} = \Gamma_{ihj} + \Gamma_{jki}$$

$$g_{jki} = g_{kji} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{jki} \quad (264)$$

$$g_{kij} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk}$$

Připomeneme-li si souměrnost Christoffelových symbolů v prvních dvou indexech, shledáme, že členy psané pod sebou na pravých stranách soustavy rovnic (264) jsou stejné. Jde tedy o lineární soustavu rovnic pro tři neznámé, kterou můžeme řešit. Od součtu druhé a třetí rovnice odečteme první a dostaneme

$$2\Gamma_{ijk} = g_{jki} + g_{kij} - g_{ijk}. \quad (265)$$

Tento vzorec se hodí k výpočtu Christoffelových symbolů, známe-li složky metrického tenzoru.

Příklad 30

Vypočtete hodnoty Christoffelových symbolů v kartézských souřadnicích.

Odpověď

Jsou všechny nulové, neboť $g_{ij} = \delta_{ij} = \text{konst.}$

Příklad 31

Vypočtete hodnoty Christoffelových symbolů pro válcové souřadnice $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$.

Odpověď

Nenulové jsou pouze hodnoty

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{122} = r, \quad \Gamma_{221} = -r, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.$$

Příklad 32

Vypočtete derivaci vektoru \vec{v} na obr. 37, který má složky $v^1 = c$, $v^2 = 0$.

Řešení

Podle (250) máme

$$\vec{v}_{,j} = v_{,j}^1 \vec{g}_1 + v_{,j}^2 \vec{g}_2 + v^1 \vec{g}_{1,j} + v^2 \vec{g}_{2,j}.$$

Až na třetí člen jsou na pravé straně všechny členy nulové. Třetí člen vypočteme pomocí (252) a příkladu 31:

$$v^1 \vec{g}_{1,j} = c (\Gamma_{1j1} \vec{g}^1 + \Gamma_{1j2} \vec{g}^2).$$

Nenulový člen dostaneme jen pro $j = 2$, a to $c \Gamma_{122} \vec{g}^2 = cr \vec{g}^2$, takže

$$\vec{v}_{,1} = 0, \quad \vec{v}_{,2} = cr \vec{g}^2 = \frac{c}{r} \vec{g}_2.$$

Příklad 33

Vypočtete derivaci vektoru \vec{v} podle obr. 36, jehož složky jsou $v^1 = c \cos \varphi$, $v^2 = -\frac{c}{r} \sin \varphi$.

Řešení

Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu, nyní však vyjde (opět pro $r = x^1$, $\varphi = x^2$)

$$\vec{v}_{,1} = v_{,1}^1 \vec{g}_1 + (v_{,1}^2 + \frac{1}{r} v^2) \vec{g}_2 = 0,$$

$$\vec{v}_{,2} = (v_{,2}^1 - r v^2) \vec{g}_1 + (v_{,2}^2 + \frac{1}{r} v^1) \vec{g}_2 = 0.$$

Nezapomeňme, že horní indexy nejsou exponenty.

Příklad 34

Odvoďte vzorce

$$\Gamma_{ik}^j = -\vec{g}_i \cdot \vec{g}_{,k}^j, \quad \vec{g}_{,j}^i = -\Gamma_{jk}^i \vec{g}^k.$$

Návod

Derivujte nejprve rovnici $\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j$.

Souhrn. Vektory, jejichž složky jsou funkcemi souřadnic, tvoří vektorové pole. Jde-li o kartézské souřadnice, vypočteme derivaci vektoru podle některé proměnné tím, že parciálně derivujeme složky vektoru. V křivočarých souřadnicích tomu tak není, neboť vektory rozkládáme k vektorové bázi, jež je sama proměnná. Musíme proto - podle pravidla o derivaci součinu - derivovat nejen složky vektoru, ale i jeho bázi. Derivací bázevého vektoru dostáváme opět vektor, jehož složky označujeme Christoffelovými symboly. Můžeme je vypočítat s použitím derivací složek metrického tenzoru.

14. KOVARIANTNÍ DERIVACE A JEJÍ APLIKACE

Viděli jsme, že výpočet derivace vektoru daného pole v křivočarých souřadnicích nedává jednoduché výsledky. Dosazením (252) do (250) dostaneme

$$\vec{v}_{,j} = v_{,j}^i \vec{g}_i + v^i \Gamma_{ij}^k \vec{g}_k. \quad (266)$$

Změníme-li slepé indexy v druhém členu, budeme moci bázevý vektor vytknout. Budeme pak mít

$$\vec{v}_{,j} = (v_{,j}^i + v^k \Gamma_{jk}^i) \vec{g}_i. \quad (267)$$

Vztah (267) se radikálně zjednoduší zavedením kovariantní derivace

$$v^{i|j} = v^i_{,j} + v^k \Gamma_{jk}^i \quad (268)$$

Vyjde totiž

$$\vec{v}_{,j} = v^{i|j} \vec{g}_i \quad (269)$$

Ze vzorce (268) je zřejmé, že kovariantní derivace se rovnají parciálním derivacím jen tehdy, jsou-li Christoffelovy symboly nulové.

Podobně dostaneme z rovnice (251)

$$v_{i|j} = v_{i,j} - v_k \Gamma_{ij}^k \quad (270)$$

$$\vec{v}_{,j} = v_{i|j} \vec{g}^i \quad (271)$$

S tímto označením je výpočet derivací a vektorových diferenciálů velmi jednoduchý. Máme-li např. vektorové pole $\vec{v} = \vec{v}(x^j)$, dostaneme diferenciální přírůstek

$$d\vec{v} = \vec{v}(x^j + dx^j) - \vec{v}(x^j) \quad (272)$$

z rovnice

$$d\vec{v} = \vec{v}_{,j} dx^j = dv^i \vec{g}_i - v^{i|j} dx^j \vec{g}_i \quad (273 a)$$

Obdobně můžeme mít

$$d\vec{v} = dv_i \vec{g}^i = v_{i|j} dx^j \vec{g}^i \quad (273 b)$$

Jestliže jsme výraz $v^{i|j}$ podle (268) nebo $v_{i|j}$ podle (270) označili jako kovariantní derivaci, měli bychom volbu názvu odůvodnit. Lze dokázat, že tyto derivace tvoří tenzory druhého řádu. V jiné soustavě souřadnic bude

$$\vec{v}_{,j'} = v_{i|j'} \vec{g}^i \quad (274)$$

Podle pravidla o derivaci složené funkce můžeme však také psát, že

$$\vec{v}_{,j'} = \vec{v}_{,k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \vec{v}_{i|k} \vec{g}^i \beta_{j'}^k \quad (275)$$

Srovnáním obou posledních rovnic

$$v_{i|j} \vec{g}^i - v_{i|k} \vec{g}^i \beta_{j^k}^k. \quad (276)$$

Tuto rovnici skalárně znásobíme rovnicí

$$\vec{g}_e = \beta_{e'}^n \vec{g}_n \quad (277)$$

a dostaneme

$$v_{i|j} \delta_{e'}^i = v_{i|k} \delta_n^i \beta_{e'}^n \beta_{j^k}^k \quad (278)$$

čili

$$v_{e|j} = \beta_{e'}^i \beta_{j^k}^k v_{i|k}. \quad (279)$$

To je však právě transformační rovnice pro tenzor druhého řádu. Je-li tomu tak, můžeme s kovariantní derivací zacházet jako s tenzorem.

Platí tedy, že

$$v_{i|j} g^{ik} = v^k|_j, \quad v_{i|k} = v_{i|j} g^{jk}. \quad (280)$$

Derivujeme-li skalár $\Phi(x^j)$, dostaneme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \Phi_{|j}. \quad (281)$$

To jsou složky vektoru. Protože skalár nesouvisí s bázovými vektory, ale jen se souřadnicemi, je derivace (281) zároveň i kovariantní derivací, takže

$$\Phi_{|j} = \Phi|_j. \quad (282)$$

Snadno dokážeme, že parciální derivace (281) tvoří tenzor prvního řádu (a že to tedy je kovariantní derivace). Zřejmě

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \beta_{i^j}^j. \quad (283)$$

To je transformační vztah (97), čímž je tvrzení dokázáno. Složky (281) dávají vektor

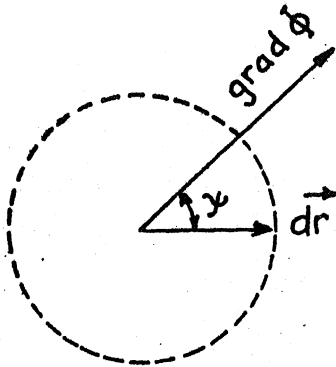
$$\vec{u} = \Phi|_i \vec{g}^i = \text{grad } \Phi, \quad (284)$$

tedy gradient skalárního pole $\Phi(x^j)$. Diferenciál tohoto pole je

$$\Phi(x^j + dx^j) - \Phi(x^j) = d\Phi = \Phi|_i dx^i = \text{grad } \Phi \cdot d\vec{r}. \quad (285)$$

Svírá-li $\text{grad } \Phi$ s vektorem $d\vec{r}$ úhel ψ (obr. 38), je

$$d\Phi = |\text{grad } \Phi| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \psi. \quad (286)$$



Obr. 38

Zvolíme-li $|d\vec{r}| = dr = \text{konst}$, bude změna $d\Phi$ největší pro $\psi = 0$. To znamená, že $\text{grad } \Phi$ je vektor udávající směr největšího spádu v daném bodě skalárního pole. Protože gradient můžeme vypočítat v kterémkoli bodu skalárního pole (má-li skalární funkce všude derivaci), tvoří $\text{grad } \Phi$ vektorové pole.

Nyní se budeme zabývat tenzory druhého řádu. Znásobíme-li tenzor A_{ij} skalárně vektory u^i , popř. v^j , dostaneme skalár ^{*}/

$$\Phi = A_{ij} u^i v^j. \quad (287)$$

Derivací podle x^k je

$$\Phi_{,k} = A_{ij,k} u^i v^j + A_{ij} u^i_{,k} v^j + A_{ij} u^i v^j_{,k}. \quad (288)$$

Za derivace složek vektorů sem dosadíme z rovnice (268), takže budeme mít

$$\begin{aligned} \Phi_{,k} = & A_{ij,k} u^i v^j + A_{ij} u^i_{,k} v^j + A_{ij} u^i v^j_{,k} - \\ & - A_{ij} u^l \Gamma_{kl}^i v^j - A_{lj} u^i v^l \Gamma_{kl}^j. \end{aligned} \quad (289)$$

^{*}/ Složky tenzoru tvoří tenzor, složky vektoru tvoří vektor. Proto se tyto názvy často zaměňují a místo o složkách vektoru se hovoří přímo o vektoru (a naopak).

Chtěli bychom, aby pro kovariantní derivaci součinu platilo stejné pravidlo jako pro obyčejnou derivaci, abychom tedy mohli psát

$$\bar{\Phi}|_k = (A_{ij} u^i v^j)|_k = A_{ij|k} u^i v^j + A_{ij} u^i|_k v^j + A_{ij} u^i v^j|_k. \quad (290)$$

To bude možné, jestliže

$$A_{ij|k} u^i v^j = A_{ij|k} u^i v^j - A_{ij} u^i v^j \Gamma_{kl}^i - A_{ij} u^i v^l \Gamma_{kl}^j. \quad (291)$$

Změnou označení některých slepých indexů dosáhneme toho, že součin $u^i v^j$ budeme moci vpravo vytknout. Vyjde

$$A_{ij|k} u^i v^j = (A_{ij|k} - A_{lj} \Gamma_{ik}^l - A_{il} \Gamma_{kj}^l) u^i v^j, \quad (292)$$

Tato rovnice musí platit pro libovolné u^i, v^j , takže můžeme porovnat součinitele na obou stranách. Dostaneme vzorec pro výpočet kovariantní derivace tenzoru druhého řádu

$$A_{ij|k} = A_{ij|k} - A_{lj} \Gamma_{ik}^l - A_{il} \Gamma_{kj}^l. \quad (293)$$

Obdobně lze odvodit vzorce

$$A^i{}_{j|k} = A^i{}_{j|k} + A^l{}_{j} \Gamma_{kl}^i - A^i{}_{l} \Gamma_{jk}^l, \quad (294)$$

$$A_i{}^{j|k} = A_i{}^{j|k} - A_i{}^j \Gamma_{ik}^l + A_i{}^l \Gamma_{kl}^j, \quad (295)$$

$$A^{ij|k} = A^{ij|k} + A^{lj} \Gamma_{kl}^i + A^{il} \Gamma_{kl}^j. \quad (296)$$

Pokud čtenář není teoretikem, bude možná unaven tímto formálním "pohráváním s indexy" a bude se ptát, k čemu jsou podobné poznatky užitečné. Abychom jej uspokojili, vrátíme se k běžným pojmům, s nimiž technik pracuje.

Představme si plošný element $d\vec{A} = dA_i \vec{g}^i$ umístěný v bodě o souřadnici x^k . V něm se přenáší elementární (vnitřní) síla

$$d\vec{F} = G^{ij} dA_i \vec{g}_j, \quad (297)$$

značí-li G^{ij} kontravariantní složky tenzoru napjatosti. Ptáme se, jaká síla se přenáší v sousedním bodě $x^k + dx^k$. Zřejmě se bude od předchozí síly lišit o diferenciální přírůstek $d\vec{F}_k dx^k$, kde

$$d\vec{F}_{,k} = (\sigma^{ij} dA_i)|_k \vec{g}_j = (\sigma^{ij}|_k dA_i + \sigma^{ij} dA_{i|k}) \vec{g}_j. \quad (298)$$

Zvolíme-li v obou bodech (x^k a $x^k + dx^k$) stejně velkou a stejně orientovanou (rovnoběžnou) plošku $d\vec{A}$, bude $d\vec{A}_{,k} = 0$, a tedy i $dA_{i|k} = 0$. Potom

$$d\vec{F}_{,k} = \sigma^{ij}|_k dA_i \vec{g}_j. \quad (299)$$

Tento přírůstek vymizí jen tehdy, bude-li $\sigma^{ij}|_k = 0$. Tato veličina má 27 složek ($i, j, k = 1, 2, 3$). Vymizí-li všechny, je napjatost homogenní. Podobně můžeme tvrdit, že elastický materiál je homogenní, jestliže

$$E^{ijkl}|_m = 0. \quad (300)$$

Může být obecně anizotropní, avšak ve všech bodech stejně a se stejnou orientací os anizotropie.

K zajímavým výsledkům dospějeme, aplikujeme-li kovariantní derivaci na metrický a permutační tenzor. Protože v kartézských souřadnicích jsou tyto tenzory konstantní ($g_{ij} = \delta_{ij}$, $\epsilon_{ijk} = e_{ijk}$), vymizí jejich "obyčejné" - parciální - derivace. V obecných souřadnicích vymizí proto kovariantní derivace, takže

$$g_{ij|k} = 0, \quad (301)$$

$$\epsilon_{ijk|l} = 0. \quad (302)$$

To znamená, že tenzory g_{ij} , popř. ϵ_{ijk} jsou konstantní, ačkoli jejich složky obecně konstantní nejsou. Totéž platí i o kontravariantních složkách g^{ij} a ϵ^{ijk} , takže při kovariantní derivaci lze metrický i permutační tenzor považovat za konstantu.

Protože kovariantní derivace $v_{i|j}$ je tenzorem druhého řádu, můžeme ji označit symbolem

$$A_{ij} = v_{i|j} = v_{ij} - v_m \Gamma_{ij}^m \quad (303)$$

a opět derivovat. Dostaneme

$$v_{i|j|k} = v_{i|jk} = A_{ij|k}. \quad (304)$$

Můžeme se ptát, zda lze zaměnit pořadí kovariantních derivací, tj. platí-li $v_i|_{jk} = v_i|_{kj}$? Rozepsáním těchto výrazů lze dokázat, že to obecně nemusí platit. Vytvoříme-li rozdíl těchto druhých (smíšených) kovariantních derivací, dostaneme po delším výpočtu vzorec

$$v_i|_{jk} - v_i|_{kj} = v_m R^m_{ijk}, \quad (305)$$

v němž R^m_{ijk} značí Riemannův-Christoffelův tenzor čtvrtého řádu

$$R^m_{ijk} = \Gamma^m_{ik,j} - \Gamma^m_{ij,k} + \Gamma^m_{lj} \Gamma^l_{ik} - \Gamma^m_{lk} \Gamma^l_{ij}. \quad (306)$$

Odpověď tedy zní: pořadí kovariantních derivací lze zaměnit, je-li Riemannův-Christoffelův tenzor nulový. Tento tenzor vyjadřuje v geometrii "zakřivení" prostoru. Je-li nulový, platí euklidovská geometrie, jinak nikoli.

Zdálo by se, že tyto úvahy nemohou mít pro inženýrské aplikace žádný význam, protože naše konstrukce uskutečňujeme v třírozměrném euklidovském prostoru. To by však byl mylný závěr. V teorii tenkých skořepin se setkáváme s dvourozměrným zakřiveným prostorem, v němž je Riemannův-Christoffelův tenzor různý od nuly a euklidovská geometrie neplatí. Je zabudován do třírozměrného euklidovského prostoru, přesto je jeho metrika jiná a jeho geometrie je obecně neeuklidovská. Teorii skořepin potřebuje znát - alespoň v základech - každý strojní i stavební inženýr. V některém z příštích seminářů se k úlohám z teorie skořepin vrátíme; pak se ukáže, jak významnou pomůckou je pro ni tenzorový počet.

Příklad 35

Pro válcové souřadnice $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ ověřte platnost vztahu (301).

Řešení

Využijeme výsledky z příkladu 31. Podle (293) vypočteme např.

$$\begin{aligned} g_{22,1} &= g_{22,1} - g_{12} \Gamma^1_{21} - g_{22} \Gamma^2_{21} - g_{21} \Gamma^1_{12} - g_{22} \Gamma^2_{12} = \\ &= 2r - 0 - r^2 \frac{1}{r} - 0 - r^2 \frac{1}{r} = 0. \end{aligned}$$

Příklad 36

Vypočtete druhou derivaci vektoru $\vec{v}_{,jk}$.

Návod

Rovnici (271) rozepište pomocí (270); vyjde

$$\vec{v}_{,j} = (v_{i,j} - v_m \Gamma_{ij}^m) \vec{g}^i.$$

Nyní derivujte podle x^k . S použitím vztahu $\vec{g}_{,j}^i = -\Gamma_{jk}^i \vec{g}^k$ (viz příklad 34) upravte tak, abyste mohli vytknout vektor \vec{g}^i . Přitom je nutno změnit označení některých slepých indexů. Výsledek porovnáme s rozepsaným vztahem (304)

$$v_{i,jk} = (v_{i,j} - v_m \Gamma_{ij}^m)_{,k} - (v_{l,j} - v_m \Gamma_{lj}^m) \Gamma_{ik}^l - (v_{i,l} - v_m \Gamma_{il}^m) \Gamma_{kj}^l.$$

S použitím (270) odtud vyjde (alternativně)

$$\vec{v}_{,jk} = (v_{i,jk} + v_{i,l} \Gamma_{jk}^l) \vec{g}^i = (v^i{}_{,jk} + v^i{}_{,l} \Gamma_{jk}^l) \vec{g}^i.$$

Souhrn. Derivujeme-li kovariantně tenzor (libovolného řádu), vzniká tenzor o jeden řád vyšší. Derivaci lze tedy opakovat a získat kovariantní derivace vyšších řádů. Pořadí derivací je zaměnitelné jen tehdy, je-li Riemannův-Christoffelův tenzor nulový. Obecně vzniká kovariantní derivací skaláru vektor, který je gradientem skalárního pole. Tento vektor vyznačuje směr největšího spádu skalárního pole. Je-li kovariantní derivace tenzoru nulová, je tenzor konstantní, ačkoli se jeho složky mohou měnit (mění se v křivočarých souřadnicích). V takovém případě pak mluvíme o homogenním tenzorovém poli.

15. DIFERENCIÁLNÍ OPERÁTORY A INTEGRÁLNÍ VĚTY

Uvedli jsme již vzorec (284) pro gradient skalárního pole. Použijeme-li stejný postup, totiž kovariantní derivaci, pro vektorové pole, vznikne tenzor druhého řádu $v^i{}_{,j}$. Tento tenzor můžeme zúžit; dostaneme tak divergenci vektoru \vec{v}

$$\operatorname{div} \vec{v} = v^i{}_{,i} = v^i{}_{;i}. \quad (307)$$

Tento vzorec platí ve všech soustavách souřadnic. V kartézské soustavě x, y, z můžeme zaměnit kovariantní a parciální derivaci, takže

$$\operatorname{div} \vec{v} = v^i{}_{,i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (308)$$

Je to skalár, neboť indexy v rovnici (307) jsou slepé. Kdyby v_x, v_y, v_z znamenaly složky rychlosti tekutiny v bodě x, y, z , vyjadřoval by výraz $\operatorname{div} \vec{v} dx dy dz$ rozdíl vyteklého a přitekklého množství z objemu $dx dy dz$.

Jiným takovým operátorem je rotace vektoru; v kartézských souřadnicích pro ni platí definice

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \epsilon^{ijk} v_{j,i} \vec{i}_k. \quad (309)$$

V obecných souřadnicích proto bude

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \epsilon^{ijk} v_{j|i} \vec{g}_k = \epsilon_{ijk} v^{j|i} \vec{g}^k. \quad (310)$$

Rotace vektoru je opět vektor.

Velmi často se setkáváme s Laplaceovým operátorem ∇^2 . Z vektorové analýzy známe vztah

$$\nabla^2 \Phi = \operatorname{div} (\operatorname{grad} \Phi). \quad (311)$$

Přepíšeme jej do tenzorové symboliky. Označíme-li

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \Phi = \Phi_{,i} \vec{g}^i = \Phi |^i \vec{g}^i = u_i \vec{g}^i,$$

bude podle (311)

$$\nabla^2 \Phi = \operatorname{div} \vec{u} = u_i |^i = \Phi |^i{}_i. \quad (312)$$

Aplikujeme-li operátor rotace na gradient skalární funkce, dostaneme

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = \epsilon^{ijk} \Phi |^j{}_i \vec{g}^k = \epsilon^{ijk} \Phi |_{ij} \vec{g}^k. \quad (313)$$

Protože druhá derivace skaláru je souměrná v indexech (pořadí derivací lze zaměnit), vymizí součet (313) vzhledem k vlastnostem permutačního tenzoru, takže

$$\text{rot grad } \Phi = 0. \quad (314)$$

Podobně lze dokázat, že v euklidovském prostoru

$$\text{div rot } \vec{v} = (\epsilon^{ijk} v_{j|i})_{|k} = \epsilon^{ijk} v_{j|ik} = 0. \quad (315)$$

V prostoru protékaném tekutinou rychlostí $\vec{v}(x^i)$ pozorujme průtok pevným objemem V uzavřeným plochou S . Protože množství vytékající tekutiny z objemu V musí být dáno množstvím protékajícím z povrchu S , je

$$\int_V \text{div } \vec{v} dV = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A}. \quad (316)$$

To je Gaussova integrální věta o divergenci. V tenzorové symbolice má tvar

$$\int_V v^m |_{m} \epsilon_{ijk} dr^i ds^j dt^k = \int_S v^i dA_i. \quad (317)$$

zde dr^i, ds^j, dt^k jsou složky tří nekomplanárních vektorů $d\vec{r}, d\vec{s}, d\vec{t}$, tvořících elementární hranolek o objemu dV .

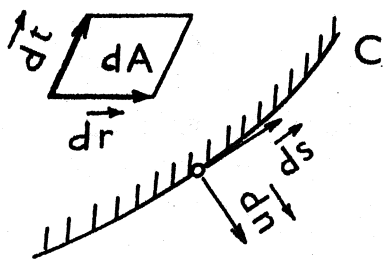
Je-li dáno vektorové pole na nějaké obecně křivé ploše S , ohraničené uzavřenou křivkou C , zní Gaussova věta obdobně

$$\int_S \text{div } \vec{v} dA = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{n}. \quad (318)$$

čili

$$\int_S v^{\alpha} |_{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta} dr^{\alpha} dt^{\beta} = \oint_C v^{\gamma} dn_{\gamma}. \quad (319)$$

Obr. 39



Pro element normály dostaneme podle obr. 39 $d\vec{n} = \epsilon_{\alpha\beta} ds^{\alpha} dt^{\beta}$.

Z vektorové analýzy známe ještě Stokesovu větu, podle níž je cirkulace vektoru \vec{v} po uzavřené křivce C dána

integrálem rotace téhož vektoru v poli (na ploše) S uzavřeném křivkou C

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A}. \quad (320)$$

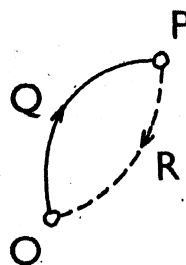
V tenzorové symbolice

$$\oint_C v_i ds^i = \frac{1}{2} \epsilon^{jik} \epsilon_{mnk} \int_S v_{i|j} dr^m dt^n. \quad (321)$$

V kapitole 14 jsme ukázali, že gradient skalárního pole dává vektorové pole. Říkáme, že skalár Φ tvoří gradientové pole $\Phi_{|i}$. Skalární funkce Φ je potenciál tohoto pole. Vnucuje se otázka, má-li také obrácená úloha řešení, zda lze k danému vektorovému poli vždy přiřadit skalární pole (jehož gradient by dal dané vektorové pole). Předpokládejme, že je dáno vektorové pole $\vec{v}(x^i) = v^j \vec{g}_j$, a vytvořme integrál po cestě OP (obr. 40)

$$\int_0^P \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^P v_i dx^i = \int_0^P \Phi_{|i} dx^i = \Phi(P) - \Phi(0). \quad (322)$$

Bod O jsme volili pevný, bod P proměnný. Má-li být hodnota $\Phi(P)$ jednoznačně určena rovnicí (322), nesmí integrál na levé straně záviset na integrační cestě. Zvolíme-li tedy integraci po uzavřené dráze $OQPRO$ (obr. 40), musíme dostat $\Phi(0) - \Phi(0) = 0$. To však vyžaduje, aby



Obr. 40

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (323)$$

Protože dráha C i plocha S jsou libovolné, musí být $\text{rot } \vec{v} = 0$. Gradientové pole je tedy bezvírové.

Je-li dáno obecné vektorové pole $\vec{v} = v^i \vec{g}_i$, můžeme vypočítat jeho divergenci a rotaci

$$\text{div } \vec{v} = v^i |i = \delta_i, \quad \text{rot } \vec{v} = \epsilon_{ijk} v^j |i \vec{g}^k = \gamma_k \vec{g}^k. \quad (324)$$

Ptáme se, existuje-li nějaké jiné pole \vec{u} , které by mělo stejnou divergenci, ale bylo bezvírové (s nulovou rotací). Pro takové pole by platilo

$$u^i{}_{;i} = \delta, \quad \epsilon_{ijk} u^j{}_{;i} = 0. \quad (325)$$

Musí to být zřejmě gradientové pole, takže $u_i = \Phi|_i$, a proto

$$u^i{}_{;i} = u_i|{}^i = \Phi|{}^i{}_i = \delta. \quad (326)$$

To je Poissonova diferenciální rovnice, kterou lze řešit. Jsou-li dány "rozumné" okrajové podmínky, je řešení jednoznačné. Rozdíl vektorů

$$w^i = v^i - u^i \quad (327)$$

nemá žádnou divergenci, ale zato má rotaci stejnou jako první pole, takže

$$w^i{}_{;i} = 0, \quad \epsilon_{ijk} w^j{}_{;i} = \gamma_k. \quad (328)$$

Přítom $\vec{\gamma} = \gamma_k \vec{g}^k$ je čistě vírové (solenoidální) pole. Vzhledem k rovnici (315) nemá vírové pole divergenci. Každé vektorové pole lze rozdělit na gradientové a čistě vírové, takže

$$v_i = \Phi|_i + \epsilon_{ijk} w^k|{}^j, \quad (329)$$

Zde Φ je skalární potenciál gradientového pole $\Phi|_i$, vektor \vec{w} je vektorový potenciál solenoidálního pole $\vec{\gamma} = \text{rot } \vec{w}$.

Příklad 37

Pro kulové souřadnice podle obr. 14 a příkladu 12 vypočtete hodnoty Christoffelových tenzorů Γ_{ijk} a Γ_{ij}^k .

Výsledek

$$\Gamma_{133} = -\Gamma_{331} = r,$$

$$\Gamma_{122} = -\Gamma_{221} = r \cos^2 \varphi,$$

$$\Gamma_{223} = -\Gamma_{232} = r^2 \cos \varphi \sin \varphi,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \cos^2 \varphi,$$

$$\Gamma_{22}^3 = \cos \varphi \sin \varphi,$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{23}^2 = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Souhrn. Každé vektorové pole lze rozložit na gradientové pole, které nemá rotaci, a na vírové pole, které nemá divergenci. Gradientové pole je odvozeno kovariantní derivací ze skalárního potenciálu. Vektor, jehož rotací vzniká vírové pole, se nazývá vektorový potenciál.

16. LINEÁRNÍ TEORIE PRUŽNOSTI, ELASTICKÉ VLNY

Kinematické vztahy, které jsme odvodili v kapitole 6 v kartézských souřadnicích, velmi snadno zobecníme pro jakékoli souřadnice. Stačí, nahradíme-li parciální derivace kovariantními. Pro Greenův tenzor přetvoření dostaneme místo (127) vztah

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i} + u^k{}_{|i} u_{k|j}) \quad (330)$$

a pro jeho lineární část (Cauchyho tenzor)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}). \quad (331)$$

Šest složek tohoto tenzoru jsou funkcemi pouze tří složek vektoru posunutí u_i , takže složky tenzoru přetvoření nemohou být nezávislé. Vztah mezi nimi určíme tak, že (331) dvakrát derivujeme

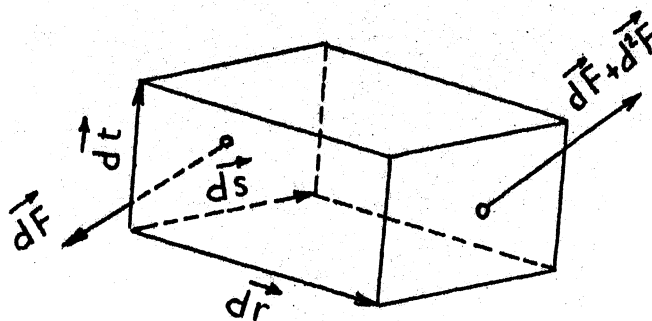
$$\varepsilon_{ij|k\ell} = \frac{1}{2} (u_{i|j\ell k} + u_{j|i\ell k}). \quad (332)$$

Protože jde o těleso v euklidovském prostoru, je pořadí derivací záměnné, takže vynásobením (332) činitelem $\varepsilon^{j\ell m}$ odpadne na pravé straně první člen. * / Stejným "trikem" odstraníme i druhý člen (násobením ε^{ikm}) a dostaneme podmínku kompatibility

* / Je-li $v_{j\ell} = v_{\ell j}$, vyjde $\varepsilon^{j\ell m} v_{j\ell} = 0$.

$$\epsilon_{ij|kl} \epsilon^{ikm} \epsilon^{jlm} = 0. \quad (333)$$

Jak vidíme, jde o souměrný tenzor druhého řádu (čtyři ze šesti indexů jsou slepé), který má šest nezávislých složek. Vztah (333) tedy představuje šest rovnic (pro různé dvojice m, n).



Obr. 41

Nyní odvodíme pohybovou rovnici. Vytkneme z tělesa elementární hranolek podle obr. 41. Jeho hrany jsou

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= dr^i \vec{g}_i, \\ d\vec{s} &= ds^j \vec{g}_j, \\ d\vec{t} &= dt^k \vec{g}_k. \end{aligned} \quad (334)$$

Elementární obdélník o stranách ds^j , dt^k má velikost $d\vec{A}$, přičemž

$$dA_\ell = \epsilon_{jke} ds^j dt^k. \quad (335)$$

Na tuto plošku působí síla

$$d\vec{F} = \sigma^{lm} dA_\ell \vec{g}_m. \quad (336)$$

Vzdálíme-li se s touto ploškou o $d\vec{r}^i$, dostaneme v ní sílu o $d^2\vec{F}$ větší (obr. 41). Celkový "přebytek síly" bude podle (269)

$$\begin{aligned} d^2\vec{F} &= d\vec{F}_{,i} dr^i = (\sigma^{lm} dA_\ell)_{,i} dr^i \vec{g}_m = \\ &= dA_\ell \sigma^{lm}_{,i} dr^i \vec{g}_m = \epsilon_{jke} ds^j dt^k \sigma^{lm}_{,i} dr^i \vec{g}_m. \end{aligned} \quad (337)$$

Přírůstky vzniknou i na dalších stěnách hranolku. Celková výslednice sil přenášených povrchem hranolku je

$$dr^i ds^j dt^k (\sigma^{lm}_{,i} \epsilon_{jke} + \sigma^{lm}_{,j} \epsilon_{kil} + \sigma^{lm}_{,k} \epsilon_{ijl}) \vec{g}_m.$$

Vzhledem k vlastnostem permutačního tenzoru se musí index ℓ v prvním členu v závorce lišit od indexů j, k (a podobné tvrzení platí i o dalších členech). Jinak by se příslušná složka permutačního tenzoru rovnala nule. Rozepsáním se pak můžeme přesvědčit, že uvedený výraz je totožný s výrazem

$$dr^i ds^j dt^k \sigma^{lm}|_e \epsilon_{ijk} \vec{g}_m \equiv \sigma^{lm}|_e dV \vec{g}_m. \quad (338)$$

Tato síla se přičte k objemové síle^{*)} (existuje-li) $b^m dV \vec{g}_m$. Jejich výslednice udělí hmotě ρdV při posuvu \vec{u} zrychlení $\vec{u} = \ddot{u}^i \vec{g}_i$, takže (po krácení dV)

$$(\sigma^{lm}|_e + b^m) \vec{g}_m = \rho \ddot{u}^i \vec{g}_i. \quad (339)$$

Znásobíme-li obě strany skalárně vektorem \vec{g}^k , pak použitím (71) dostaneme

$$\sigma^{lk}|_e + b^k = \rho \ddot{u}^k. \quad (340)$$

Změníme-li z formálních důvodů označení indexů a dosadíme z rovnice (174), vyjde

$$(E^{ijlm} \epsilon_{lm})|_j = -b^i + \rho \ddot{u}^i. \quad (341)$$

S použitím (331) máme

$$[E^{ijlm} (u_{l|m} + u_{m|l})]|_j = -2b^i + 2\rho \ddot{u}^i. \quad (342)$$

To je základní rovnice lineární teorie pružnosti, připisovaná L. M. H. Navierovi (1785 až 1836). Rozepíšeme-li ji pro $i = 1, 2, 3$, dostaneme soustavu tří rovnic pro tři neznámé funkce u_1, u_2, u_3 . Rovnice (342) platí ve všech soustavách souřadnic.

Nebudeme zde vykládat jednotlivé metody řešení, jež se používají v teorii pružnosti. Připojíme jen několik poznámek a ukážeme některé úpravy rovnice (342), abychom ukázali účinnost tenzorové algebry jako důmyslného matematického prostředku.

Pro izotropické těleso lze modul pružnosti E^{ijkl} napsat pomocí Lamého elastických konstant λ, G ve tvaru

$$E^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + G (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}). \quad (343)$$

Potom však

$$\begin{aligned} E^{ijkl} (u_{k|l} + u_{l|k}) &= \lambda g^{ij} g^{kl} (u_{k|l} + u_{l|k}) + \\ &+ G g^{ik} g^{jl} (u_{k|l} + u_{l|k}) + G g^{il} g^{jk} (u_{k|l} + u_{l|k}) = \end{aligned}$$

*) Podle anglického „body force“.

$$\begin{aligned}
&= \lambda (u^e|_e + u^e|_e) + G(u^i|_j + u^j|_i) + \\
&\quad + G(u^j|_i + u^i|_j) = \\
&= 2\lambda u^j|_j + 2G(u^i|_j + u^j|_i).
\end{aligned} \tag{344}$$

Dosazením tohoto výrazu do rovnice (342) a krácením dvěma dostaneme

$$G u^i|_j + (\lambda + G) u^j|_i = -b^i + \rho \ddot{u}^i. \tag{345}$$

To je jen jiný tvar rovnice (342), platný pro izotropický materiál. Je to vektorová rovnice, neboť má jediný volný index (i). Můžeme na ni aplikovat operátor divergence, čímž se z ní stane skalární rovnice. Objemové síly b^i zanedbáme. Dostaneme

$$G u^i|_{ji} + (\lambda + G) u^j|_{ji} = \rho \ddot{u}^i|_i. \tag{346}$$

Po výměně indexů v druhém členu získá tato rovnice tvar

$$G u^i|_{ji} + (\lambda + G) u^i|_{ij} = \rho \ddot{u}^i|_i. \tag{347}$$

Protože podle (312) $\nabla^2 \Phi = \Phi|_i^i$, můžeme rovnici (347) napsat také takto:

$$\nabla^2 u^i|_i - \frac{1}{c^2} \ddot{u}^i|_i = 0, \tag{348}$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}. \tag{349}$$

Konstanta c má fyzikální rozměr rychlosti $[m s^{-1}]$.

Vektorovou rovnici (345) můžeme upravit také tak, že na ni aplikujeme operátor rotace; v tom případě zůstane vektorovou rovnicí. S použitím (310) vyjde (bez objemových sil)

$$G \epsilon_{kil} u^i|_j^k + (\lambda + G) \epsilon_{kil} u^j|_i^k = \rho \epsilon_{kil} \ddot{u}^i|_j^k. \tag{350}$$

Protože $u^j|_i^k = u^j|_i^k$, odpadne druhý člen. Zbývá

$$G \epsilon_{kil} u^{ij|k} - \rho \epsilon_{kil} \ddot{u}^{ij} = 0 \quad (351)$$

čili

$$\epsilon_{kil} \left(\nabla^2 u^{ij|k} - \frac{1}{c^2} \ddot{u}^{ij|k} \right) = 0, \quad (352)$$

kde

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (353)$$

Také tato konstanta má fyzikální rozměr rychlosti.

Rovnice (352) má triviální řešení \vec{u} , které vyhovuje rovnici

$$\epsilon_{kil} u^{ij|k} = 0 \quad (354)$$

čili

$$\text{rot } \vec{u} = 0. \quad (355)$$

To znamená, že každé bezvírové pole \vec{u} je řešením rovnice (352).

Je to tedy gradientové pole a může být odvozeno ze skalárního pole $\Phi(x^j)$ podle rovnice $\vec{u} = \text{grad } \Phi$ čili

$$u^i = \Phi|{}^i. \quad (356)$$

Funkce Φ je potenciál posuvů. Vzhledem k tomu, že pořadí derivací skalární funkce lze zaměnit (u skaláru se nerozlišuje parciální a kovariantní derivace, viz (282)), je

$$u^{ij} = \Phi|{}^{ij} = g^{ik} g^{jl} \Phi_{,kl} = g^{jl} g^{ik} \Phi_{,kl} = \Phi|{}^{ji} = u^{ji}. \quad (357)$$

Symetrie (357) platí jen pro gradientové pole (356), jež je triviálním řešením rovnice (352). Využijeme-li tuto souměrnost už v rovnici (345), můžeme členy na levé straně rovnice sloučit, takže vznikne

$$(\lambda + 2G) u^{ij} - \rho \ddot{u}^i = 0 \quad (358)$$

čili

$$\nabla^2 u^i = \frac{1}{c^2} \ddot{u}^i. \quad (359)$$

Tato rovnice nahradí (348).

Vrátíme se nyní k rovnici (348); má triviální řešení, jež vyhovuje rovnici $\text{div } \vec{u} = 0$, čili

$$u_{,i} = 0. \quad (360)$$

To znamená, že každé řešení rovnice (360) zároveň splňuje i rovnici (348), jak se lze přesvědčit dosazením. Původní rovnice (345) se upraví substitucí z rovnice (360) na tvar

$$\nabla^2 u^i = \frac{1}{c^2} \ddot{u}^i. \quad (361)$$

Existují dvě triviální řešení pohybové rovnice (345); jedno představuje bezvírové (gradientní) pole a je popsáno rovnicí (359), druhé tvoří vírové (solenoidální) pole a je popsáno rovnicí (361).

Abychom získali fyzikální názor na tato řešení, rozepíšeme rovnice (359) a (361) v kartézských souřadnicích x, y, z . Pro $i = 1$ dostaneme z rovnice (359), označíme-li $x = x^1, y = x^2, z = x^3, u = u^1, v = u^2, w = u^3$, tuto diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (362)$$

Obdobné rovnice dostaneme cyklickou záměnou pro posuvy v, w .
Rovnice (362) má d'Alembertovo řešení

$$u = A_1 f_1(x - ct). \quad (363)$$

O tom se lze přesvědčit dosazením (363) do (362). Uvážíme-li, že argument funkce f_1 se nezmění, bude-li přírůstek času Δt odpovídat přírůstek dráhy $\Delta x = c\Delta t$, dojdeme k závěru, že řešení (363) představuje elastickou vlnu, která se pohybuje ve směru x rychlostí c . Je to dilatační vlna, které přísluší gradientové pole posuvů. ^{*}/

Rovnice (361) dá pro $i = 1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (364)$$

^{*}/ Podrobnosti uvedl autor v publikaci Rázová pevnost těles, ČVTS - Dům techniky Praha, 1976.

Řešení musí vyhovovat podmínce (360). Zvolíme

$$u = A_2 f_2(y - ct) + A_3 f_3(z - ct). \quad (365)$$

Posuv u podle (365) se děje ve směru osy x , ale vlna jím vytvořená postupuje zřejmě nějakým směrem v rovině y, z (tento směr závisí na poměru konstant A_2/A_3). Řešení (365) představuje smykovou (příčnou) vlnu. Protože nevede k žádné změně objemu ($\epsilon_{mm}^m = u^m|_m = 0$), nazývá se vlna popsaná rovnicí (365) bezdilatační vlna. Přísluší jí solenoidální pole posuvů.

Příklad 38

Rozepište pohybovou rovnici (340) pro fyzikální složky napjatosti v polárních souřadnicích.

Řešení

Fyzikální složky napjatosti označíme $\tau^{11} = G_r$, $\tau^{12} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = \tau^{21}$, $\tau^{22} = G_\varphi$. Použijeme výsledky z příkladů 8, 23 a 31. Pro kovariantní derivaci tenzoru napjatosti máme rovnici (296).

Dostaneme

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta}|_\alpha &= G^{\alpha\beta}_{,\alpha} + G^{\gamma\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha + G^{\alpha\gamma} \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta = \\ &= G^1{}_{,1} + G^2{}_{,2} + G^{1\beta} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) + G^{2\beta} (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2) + \\ &+ G^{11} \Gamma_{11}^\beta + G^{21} \Gamma_{21}^\beta + G^{12} \Gamma_{12}^\beta + G^{22} \Gamma_{22}^\beta. \end{aligned} \quad (a)$$

Pohybová rovnice (340) dá pro rovinný případ

$$G^{\alpha\beta}|_\alpha + F^\beta = \rho \ddot{u}^\beta. \quad (b)$$

Pro $\beta = 1$ vyjde odtud dosazením

$$G^1{}_{,1} + G^2{}_{,2} + G^{11} \frac{1}{r} - G^{22} r + F^1 = \rho \ddot{u}^1 \quad (c)$$

čili

$$\frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} G_r - \frac{1}{r} G_\varphi + F_r = \rho \ddot{u}. \quad (d)$$

Pro $\beta = 2$ vyjde

$$G_{11}^{12} + G_{12}^{22} + G^{12} \frac{1}{r} + G^{21} \frac{1}{r} + F^2 = \rho \ddot{u}^2 \quad (e)$$

čili (po vynásobení r a po přepočtu na fyzikální složky)

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} + F_{\varphi} = \rho \ddot{v}. \quad (f)$$

Příklad 39

Předpokládejte, že ve válcových souřadnicích $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ existuje jediná nenulová složka posuvu, a to v obvodovém směru. Označíme ji v . Pro tuto složku nyní rozepište rovnici (342). Jde o rotačně souměrný případ a izotropický materiál. Objemové síly a zrychlení zanedbejte.

Řešení

Protože nejde o kartézské souřadnice, musíme být velmi opatrní při zavádění fyzikálních vektorů a tenzorů. Jsou-li kontravariantní složky posuvů $u^1 = 0$, $u^2 \neq 0$, $u^3 = 0$, není ještě u^2 rovno v ! Přesvědčíme se o tom tak, že napíšeme rovnici pro vektor posunutí \vec{u}

$$\vec{u} = u^i \vec{g}_i = u^2 \vec{g}_2. \quad (a)$$

Avšak $\vec{g}_2 = r \vec{e}_2$, jak jsme vyložili v kapitole 4 a v příkladu 8. Proto

$$\vec{u} = u^2 r \vec{e}_2 = v \vec{e}_2, \quad (b)$$

takže

$$u^2 = \frac{v}{r}. \quad (c)$$

Složka u^2 je tedy bezrozměrová. Nyní rozepíšeme rovnici (342). Použijeme vzorec (183) pro modul pružnosti a dostaneme

$$\left(\frac{2\mu}{1-2\mu} g^{ij} g^{kl} + g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} \right) (u_{k|l_j} + u_{l|k_j}) = 0. \quad (d)$$

Pro druhé kovariantní derivace máme vzorce (304) a (293). Vyjde

$$u_{i|j_k} = (u_{i,j} - u_{m,m} \Gamma_{ij}^m)_{,k} - (u_{l,j} - u_{m,m} \Gamma_{lj}^m) \Gamma_{ik}^l - (u_{i,l} - u_{m,m} \Gamma_{il}^m) \Gamma_{kj}^l. \quad (e)$$

Pamatujme, že parciální derivace podle x^2 jsou nulové (vzhledem k rotační souměrnosti). Také složky u^1 , u^3 jsou nulové. Z metrického tenzoru jsou nenulové pouze složky

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = 1 \quad (f)$$

a z Christoffelových symbolů

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}. \quad (g)$$

Zvolíme-li index $i = 1$ nebo $i = 3$, je rovnice (d) identicky splněna. Pro $i = 2$ zbývá nakonec

$$u_{2|11} + u_{1|21} + 2g^{22}u_{2|22} + u_{2|33} = 0. \quad (h)$$

Ostatní výrazy jsou nulové. S použitím (c) a (e) dostaneme

$$\begin{aligned} u_{2|11} &= r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, & u_{2|22} &= -rv + r^2 \frac{\partial v}{\partial r}, \\ u_{1|21} &= -\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}, & u_{2|33} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (i)$$

Dosazením těchto výrazů do (h) a krácením činitelem r vyjde hledaná rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \quad (j)$$

Platí pro krut neprizmatických hřídelů. Zajímavé je, že člen se součinitelem $\frac{2\mu}{1-2\mu}$ v rovnici (d) identicky vymizí, takže (j) neobsahuje žádnou elastickou konstantu.

Souhrn. Pohyb pružného tělesa je popsán soustavou parciálních diferenciálních rovnic. Pohybová dynamická rovnice vyjadřuje Newtonův pohybový zákon pro elementární část tělesa. Dosadíme-li za zrychlení nulu, dostaneme rovnice rovnováhy. Těleso je v rovnováze, je-li v inerciální soustavě souřadnic zrychlení všech jeho částic nulové. Kinematické vztahy udávají souvislost tenzoru přetvoření s vektorovým polem posuvů. Protože existuje více složek tenzoru přetvoření než složek posuvů, nemohou být složky tenzoru přetvoření nezávislé. Musí splňovat rovnice kompatibility. Tyto rovnice vyjadřují podmínku zachování spojitosti tělesa při jeho deformaci. Matematicky znamenají podmínku řešitelnosti

úlohy, při které hledáme vektorové pole posuvů, je-li znám tenzor přetvoření. Souvislost přetvoření a napětí udává konstituční rovnice. Tenzor napjatosti vstupuje také do pohybové rovnice.

Vyloučíme-li ze všech těchto rovnic všechny neznámé funkce až na vektor posuvů, dostaneme Navierovu rovnici, která je základní vektorovou rovnicí lineární teorie pružnosti. Výhodou tenzorového tvaru zápisu těchto rovnic je jejich univerzálnost; platí pro jakoukoli soustavu souřadnic.

17. PROUDĚNÍ VAZKÉ KAPALINY

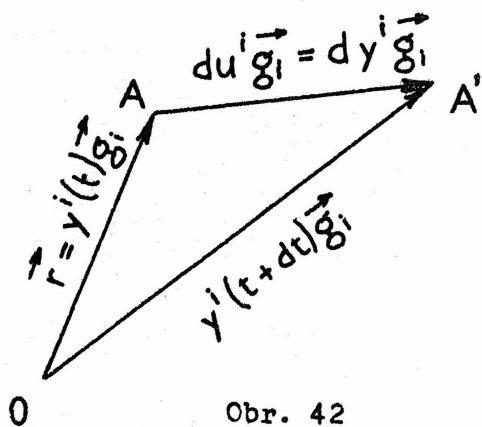
V druhé kapitole jsme se zabývali pohybem jednorozměrného kontinua. Ukázali jsme tam rozdíl Eulerova a Lagrangeova pojetí pohybu. K jeho popisu sloužila buď prostorová souřadnice \mathcal{X} nebo materiálová souřadnice X . Pak jsme přešli k nřkolikarozměrným tělesům a došli k závěru, že u těles v pevné fázi, zvláště při malých deformacích, je Lagrangeův způsob popisu výhodnější. Při něm vystupují jako nezávisle proměnné materiálové souřadnice, které se za pohybu nemění. Značili jsme je pak - jak je v literatuře obvyklé - písmeny malé abecedy. Záměna s prostorovými souřadnicemi byla nepravděpodobná, a to tím spíše, že jsme se v aplikacích prozatím omezili na malé deformace.

Nyní se budeme zabývat prouděním vazké kapaliny; zde by byl Lagrangeův způsob popisu těžkopádný, použijeme proto Eulerův způsob. Vracíme se tím k problematice druhé kapitoly, ale budeme ji nyní rozvádět v třřirozměrném prostoru. Zůstaneme při označení souřadnic písmeny malé abecedy, rozlišíme je však od označení v předešlých kapitolách. Místo materiálových souřadnic $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3$ budeme nyní mít prostorové souřadnice y^1, y^2, y^3 .

Připomeňme ještě, jaký je rozdíl mezi časovými derivacemi nějaké funkce Φ v obou případech. Použijeme označení

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \dot{\Phi}, \text{ je-li } y^i = \text{konst.},$$

$$\frac{D\Phi}{Dt}, \text{ je-li } \mathcal{X}^i = \text{konst.}$$



Obr. 42

V prvním případě měříme změnu v pevném bodu v prostoru. V druhém případě sledujeme určitou částici za jejího pohybu. Částice A se posune za dobu dt do bodu A' (obr. 42). Změna prostorové souřadnice

dy^i je identická se změnou posuvu částice du^i (za čas dt), takže rychlost částice $x^i = \text{konst}$

$$v^i = \frac{Du^i}{Dt} = \frac{Dy^i}{Dt} \quad (366)$$

Jak jsme již dříve vyložili, derivace zde musí být materiálová, což označujeme symbolem (rovn. 17). Pro libovolnou veličinu Φ spjatou s částicí platí vztah

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y^i} \frac{Dy^i}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + v^i \frac{\partial\Phi}{\partial y^i} \quad (367)$$

Protože chceme výsledky výpočtů vyjádřit pomocí prostorových souřadnic y^i , použijeme báze vektory

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^i} \quad (368)$$

Z nich odvodíme složky metrického tenzoru a Christoffelovy symboly. Žádná z těchto veličin nebude záviset na čase, jak by tomu bylo, kdybychom vycházeli z materiálových souřadnic x^i , které se za pohybu deformují.

Zrychlení je časovou derivací rychlosti (pro $x^i = \text{konst}$), takže

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v^j \vec{v}_{,j} = \\ &= \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v^j v^i{}_{,j} \vec{g}_i = a^i \vec{g}_i \end{aligned} \quad (369)$$

Složky zrychlení jsou

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^i{}_{,j} \quad (370)$$

První člen na pravé straně (370) označuje lokální změnu rychlosti, tj. změnu v místě $y^i = \text{konst}$. Druhý člen značí konvektivní změnu, neboť částice se posune za čas dt do míst s jinou rychlostí proudu. Tato změna závisí jednak na proměnlivosti rychlostního pole, tedy na derivaci $v^i{}_{,j}$, jednak na rychlosti, s jakou se sledovaná částice v tomto poli pohybuje, tj. na v^j .

Pohybová rovnice je stejná jako u pružných těles, tj. (340). Za zrychlení \ddot{u}^i nyní dosadíme a^i , takže

$$G^{ji}|_j = -b^i + \rho a^i. \quad (371)$$

Kinematický vztah (331) budeme derivovat podle času (neboť tenzor napjatosti bude nakonec záviset na rychlosti deformace). Pro $\chi^i = \text{konst}$ dostaneme

$$\frac{D\epsilon_{ij}}{Dt} = \frac{1}{2} (v_{i|j} + v_{j|i}). \quad (372)$$

Konstituční rovnice vyjadřují dvě vlastnosti vazké kapaliny, a to stlačitelnost a odpor, který kapalina klade při změně tvaru. Proto rozdělíme tenzor rychlosti deformace na dilatační část (na rychlost změny objemu)

$$\frac{De}{Dt} = \frac{D}{Dt} \cdot \frac{1}{3} \epsilon^m_m = \frac{1}{3} v^m|_m \quad (373)$$

a na zbytek

$$\begin{aligned} \frac{De^i_j}{Dt} &= g^{ik} \frac{D\epsilon_{jk}}{Dt} - \delta^i_j \frac{De}{Dt} = \\ &= \frac{1}{2} (v_{j|k} + v_{k|j}) g^{ik} - \frac{1}{3} v^m|_m \delta^i_j. \end{aligned} \quad (374)$$

Po úpravě s použitím rovnice (87)

$$\frac{De^i_j}{Dt} = \frac{1}{2} (v_{j|i} + v^i|_j) - \frac{1}{3} v^m|_m \delta^i_j. \quad (375)$$

Zpravidla lze stlačitelnost kapaliny zanedbat, takže

$$v^m|_m = 0. \quad (376)$$

Druhá z konstitučních rovnic (211) zdegenerovala na pouhou kinematickou závislost (376) vyjadřující nezřídlovost vektorového rychlostního pole ($\text{div } \vec{v} = 0$). Platí-li (376), není rozdíl mezi e^i_j a ϵ^i_j , takže

$$\frac{De^i_j}{Dt} = \frac{D\epsilon^i_j}{Dt} = \frac{1}{2} (v_{j|i} + v^i|_j). \quad (377)$$

Je-li kapalina v klidu, je rychlost deformace nulová. Tím vymizí i tečná napětí v ní, takže tlak působí v daném bodě na všechny strany stejně. Pohybuje-li se však kapalina, mění se i napjatost a tlakové napětí už není ve všech směrech stejné. Chceme-li i nyní hovořit

o "tlaku" v kapalině, musíme jej nějak nově definovat, např. jako střední hodnotu normálových složek napětí se záporným znaménkem

$$p = -\rho = -\frac{1}{3} \sigma_m^m \quad (378)$$

Tenzor napjatosti opět rozdělíme na jeho hydrostatickou složku (378) a na deviator

$$s_j^i = \sigma_j^i + p \delta_j^i \quad (379)$$

První z konstitučních rovnic (211) bude

$$\sigma_j^i + p \delta_j^i = 2\mu \frac{De_j^i}{Dt} \quad (380)$$

Změnili jsme označení G za μ , což je v hydrodynamice obvyklejší, a za derivaci bereme materiálovou derivaci, abychom zdůraznili, že při ní $x^i = \text{konst.}$ Dosadíme-li ze vztahu (377) do (380), dostaneme

$$\sigma_j^i = -p \delta_j^i + \mu (v_j^i + v^i_j) \quad (381)$$

Abychom získali tuto rovnici v obvyklejších kontravariantních složkách, zaměníme j za k a vynásobíme g^{jk} . Se zřetelem k rovnici (87) budeme mít

$$\sigma^{ij} = -p g^{ij} + \mu (v^{ij} + v^i_j) \quad (382)$$

Tato rovnice vznikla kombinací kinematického vztahu (377) a konstituční rovnice (380). Nyní vyloučíme tenzor napjatosti σ^{ij} , který nás v tomto okamžiku nezajímá. Z rovnic (370) a (382) dosadíme do pohybové rovnice (371) a dostaneme

$$\begin{aligned} -p |_{,j} g^{ij} + \mu (v^{ij} + v^i_j) &= \\ &= -b^i + \rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^i_j \right). \end{aligned} \quad (383)$$

Protože v^{ij} je kovariantní derivací v^i_j podle i -té souřadnice (se zvýšeným indexem) a divergence v^i_j podle (376) vymizí, zjednoduší se (383) na tvar

$$\rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho v^j v^i_j - \mu v^i_j = b^i - p |^i \quad (384)$$

To je známá Navierova-Stokesova rovnice. Představuje soustavu tří rovnic ($i = 1, 2, 3$) pro čtyři neznámé v^i, ν . Čtvrtou rovnicí je podmínka nestlačitelnosti (376), která se též nazývá rovnice kontinuity.

V rychlostním poli proudící tekutiny můžeme vést čáry, jejichž tečny udávají směr rychlostí (v dotykových bodech). Jsou to proudnice. Totéž znázornění vektorového pole používáme i pro pole jiného druhu, např. magnetické nebo elektrické (silokřivky). Zvolíme-li uvnitř proudící tekutiny uzavřenou křivku C , pak proudnice vedené z bodů této křivky vytvoří proudovou trubici.

Další úvahy se zjednoduší, zvolíme-li prostorové souřadnice y^i tak, aby báze vektor \vec{g}_1 splýval s vektorem rychlosti \vec{v} (v každém bodě). Oba vektory musí mít stejný směr, ale nikoli už velikost. Budeme pak mít $\vec{v} = v^1 \vec{g}_1, v^2 = v^3 = 0$.

Nechť křivka C je rovnoběžník se stranami $d\vec{r} = dr^2 \vec{g}_2, d\vec{s} = ds^3 \vec{g}_3$. Jeho ploška je

$$d\vec{A} = d\vec{r} \times d\vec{s} = \epsilon_{231} dr^2 ds^3 \vec{g}^1. \quad (385)$$

Touto ploškou proteče za jednotku času objem

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = v^1 \epsilon_{231} dr^2 ds^3. \quad (386)$$

Protne-li proudovou trubici na nějakém jiném místě plochou $y^1 = \text{konst}$, bude mít průřez opět tvar rovnoběžníka se stranami $dr^2 \vec{g}_2, ds^3 \vec{g}_3$. Protože se podél proudnice mění jen souřadnice y^1 , budou dr^2, ds^3 stejné jako pro křivku C . Báze vektory budou obecně jiné, neboť souřadný systém je nyní obecně křivočarý. Rozdíl vyteklého a přitekého objemového množství kapaliny mezi dvěma blízkými průřezy proudové trubice bude úměrný derivaci

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot d\vec{A})_{,1} &= dr^2 ds^3 (v^1 \epsilon_{231})_{,1} = dr^2 ds^3 (v^1 \epsilon_{231})|_1 = \\ &= dr^2 ds^3 \epsilon_{231} v^1|_1. \end{aligned} \quad (387)$$

Je-li kapalina nestlačitelná, platí (376). Pak je také $v^1|_1 = 0$, neboť $v^2 = v^3 = 0$. Derivace (387) je nulová, takže proudovou trubici protéká všemi průřezy stejné množství kapaliny. To platí pro všechna vektorová pole, jejichž divergence je nulová.

Je-li průtok stacionární, je rychlost v každém bodě pevném v prostoru ($y^i = \text{konst}$) stálá. Pak je $\frac{\partial v^i}{\partial t} = 0$. Pohybující se částice vykreslí proudnice. Není-li průtok stacionární, mění proudnice s časem

svůj tvar (různě se deformují) a určitá částice setrvává na povrchu "své" proudnice v okamžiku t jen nekonečně krátký okamžik dt . Pak přejde na "sousední" proudnici, jejíž tvar se mezitím (nepatrně) změnil. Křivky $\alpha^j = \text{konst}$ tedy už nejsou proudnice.

Je-li kapalina v klidu, zbuďte z Navierovy-Stokesovy rovnice jen

$$\rho |^i = b^i \quad \text{čili} \quad \rho |_{,i} = b_i. \quad (388)$$

Hydrostatický tlak je skalár, takže objemové síly b_i musí tvořit gradientové pole, pro které $\text{rot } \vec{b} = 0$, čili

$$\epsilon^{ijk} b_{j|i} = 0. \quad (389)$$

Jinak by nebyla kapalina v rovnováze.

Je-li viskozita μ kapaliny malá, vymizí třetí člen na levé straně rovnice (384). První a druhý člen dají $\rho (Dv^i/Dt)$, takže pro ideální kapalinu (s nulovou viskozitou, nestlačitelnou) je

$$\rho \frac{Dv^i}{Dt} = b^i - \rho |^i \quad (390)$$

nebo též

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = b_i - \rho |_{,i}. \quad (390 \text{ a})$$

To jsou Eulerovy pohybové rovnice.

Nyní si představme v rychlostním poli proudící kapaliny uzavřenou křivku C , spjatou s částicemi kapaliny, a vypočtíme křivkový integrál $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$ a jeho časovou derivaci

$$\frac{D}{Dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \frac{D}{Dt} \oint_C v_i dy^i = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dy^i + \oint_C v_i \frac{Ddy^i}{Dt}. \quad (391)$$

Elementární vektor $d\vec{r}$ je rozdílem průvodičů dvou sousedních bodů na křivce C . Záměnou pořadí derivací

$$\frac{Ddy^i}{Dt} = d \frac{Dy^i}{Dt} = dv^i \quad (392)$$

přejde hledaný integrál (391) ve tvar

$$\frac{D}{Dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dy^i + \oint_C v_i dv^i. \quad (393)$$

Poslední výraz znamená

$$\oint_C v_i dv^i = \oint \frac{1}{2} (v_i dv^i + v^i dv_i) = \frac{1}{2} [v_i v^i]_A^\wedge. \quad (394)$$

Protože hranatá závorka nabývá v bodě A křivky C na počátku integrační cesty stejné hodnoty jako na konci, neboť jde o týž bod, rovná se (394) nule. Rovnice (393) pak dá

$$\frac{D}{Dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dy^i. \quad (395)$$

Tento výraz dosadíme do (390 a). Vyjde

$$\frac{D}{Dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{Dv_i}{Dt} dy^i = \frac{1}{\rho} \oint_C (b_i - \mu_i) dy^i. \quad (396)$$

Tvoří-li objemové síly gradientové pole, je $b_i = \Phi_{,i}$ a integrál na pravé straně (396) vymizí. Dá totiž

$$\begin{aligned} \oint_C (b_i - \mu_i) dy^i &= \oint_C (\Phi_{,i} - \mu_{,i}) dy^i = \\ &= [\Phi - \mu]_A^\wedge = 0. \end{aligned} \quad (397)$$

Mají-li objemové síly b_i potenciál Φ , jsou konzervativní. Působí-li takové síly na nějakou částici, která se pohybuje po uzavřené dráze, je výsledná práce těchto sil za jeden oběh nulová. V tom případě je podle (396) a (397)

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \text{konst.} \quad (398)$$

Podle Stokesovy věty (320) je pak také $\text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = \text{konst.}$ To však ještě neznámá, že rotace

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} \quad (399)$$

je konstantní (vektor $d\vec{A}$ se totiž mění). Také vektor $\vec{\omega}$ tvoří pole, jehož "proudnicí" nazýváme vírová vlákna. Součin $\vec{\omega} \cdot d\vec{A}$ je pak pro každou vírovou trubici konstantní (ze stejných důvodů, z jakých bylo podle (387) v proudové trubici konstantní protoklé množství $\vec{v} \cdot d\vec{A}$)

Nestacionární proudění často probíhá tak, že se kapalina uvede z klidu do pohybu. Stacionární proudění bývá popisováno pro případ, že homogenní proud přichází (teoreticky) z nekonečna a jeho částice mají zprvu konstantní rychlost, až se přiblíží k nějaké překážce, kterou míjejí. V obou případech je počáteční pole bezvírové ($\text{rot } \vec{v} = 0$).

Rychlostní pole je pak gradientové, takže

$$v_i = \Phi|_i = \Phi_{,i} . \quad (400)$$

Protože rotace připadající na průřez vírového vlákna je podle předešlého výkladu po celé délce vlákna konstantní, musí být bezvírové proudění nejen na počátku, ale v průběhu celého děje, takže (400) platí pro celou oblast. Z podmínky nestlačitelnosti $v^i|_i = 0$ pak dostaneme, že

$$\Phi|_i^i = 0 . \quad (401)$$

To je Laplaceova rovnice, platná pro potenciální proudění, které je bezvírové. Zavedeme-li potenciál Φ do rovnice (390), dostaneme po úpravě

$$\begin{aligned} \mu|_i &= b_i - \varrho (\Phi|_i + \Phi|_j^j \Phi|_i) = \\ &= b_i - \varrho (\Phi + \frac{1}{2} \Phi|_j^j \Phi|_i) |_i . \end{aligned} \quad (402)$$

Jaká bude okrajová podmínka pro tuto rovnici? Složka rychlosti kolmá ke stěně potrubí (kanálu) zřejmě musí mít na této stěně předepsanou hodnotu. Je-li \vec{n} jednotkový vektor normály k povrchové plošce dA stěny potrubí, musí mít normálová složka rychlosti

$$v_i n^i = \Phi|_i n^i \quad (403)$$

předepsanou hodnotu, např. nulovou, je-li stěna nepropustná. Normálovou složku rychlosti však nelze předepsat libovolně, neboť musí splňovat podmínku nestlačitelnosti kapaliny (376). Z Gaussovy věty (317) pak dostaneme pro uzavřenou plochu S podmínku

$$\int_S v^i dA_i = \int_S v_i n^i ds = 0 . \quad (404)$$

Tato podmínka musí být vždy splněna, a to i tehdy, volíme-li za S povrch potrubí (kanálu, nádoby), doplněný - je-li třeba - průřezy potrubí tak, aby vznikla uzavřená plocha S . Okrajové podmínky (403) musí vyhovovat rovnici (404).

Příklad 40

Napište podmínku nestlačitelnosti kapaliny a Navierovy-Stokesovy rovnice pro polární souřadnice.

Řešení

Podmínka nestlačitelnosti (375) dá

$$v^{\alpha}{}_{|\alpha} = v^{\alpha}{}_{,\alpha} + v^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + v^1 \Gamma_{21}^2 = 0 \quad (\text{a})$$

(ostatní členy jsou nulové). Fyzikální složky rychlosti jsou

radiální rychlost: $u = v^1$

obvodová rychlost: $v = r v^2$.

Po dosazení do (a)

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} = 0. \quad (\text{b})$$

Nyní rozepíšeme rovnici (384). Pro $i = 1$ dostaneme

$$\rho \frac{\partial v^1}{\partial t} + \rho v^1 v^1{}_{|1} + \rho v^2 v^1{}_{|2} - \mu v^1{}_{|1} - \mu v^1{}_{|2} = b^1 - \mu^1. \quad (\text{c})$$

Avšak

$$v^{\alpha}{}_{|\beta} = v^{\alpha}{}_{,\beta} + v^{\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad (\text{d})$$

takže

$$v^1{}_{|1} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + v^1 \Gamma_{11}^1 + v^2 \Gamma_{12}^1 = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

a podobně (s přihlédnutím k tomu, že $\Gamma_{21}^1 = 0$)

$$v^1{}_{|2} = \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + v^2 \Gamma_{22}^1 = \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} (-r) = \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v.$$

K výpočtu druhých kovariantních derivací nejprve použijeme vzorec pro první derivaci se zvýšeným indexem

$$v^{\alpha}{}_{|\beta} = g^{\beta\gamma} v^{\alpha}{}_{|\gamma} = g^{\beta 1} v^{\alpha}{}_{|1} + g^{\beta 2} v^{\alpha}{}_{|2} = A^{\alpha\beta} \quad (\text{e})$$

a potom vzorec pro derivaci tenzoru druhého řádu

$$A^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} = A^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + A^{\delta\beta} \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha} + A^{\alpha\delta} \Gamma_{\gamma\delta}^{\beta} = v^{\alpha}{}_{|\gamma}. \quad (\text{f})$$

Mnoho sčítanců přitom odpadne, protože $g^{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha + \beta$ a z Christoffelových symbolů jsou nenulové jen Γ_{22}^1 , Γ_{12}^2 a Γ_{21}^2 .

Je-li viskozita zanedbatelná ($\mu = 0$), dostaneme jednoduše

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \varphi} - \frac{v^2}{r} \right) = b_r - \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (g)$$

Pro $i = 2$ vyjde obdobně

$$\rho \frac{\partial v^2}{\partial t} + \rho v^1 v^2|_1 + \rho v^2 v^2|_2 - \mu v^2|_1 - \mu v^2|_2 = b^2 - p|_2. \quad (h)$$

Podle (d)

$$\begin{aligned} v^2|_1 &= \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + v^1 \Gamma_{11}^2 + v^2 \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + v^2 \Gamma_{12}^2 = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{v}{r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{v}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}, \\ v^2|_2 &= v^2_{,2} + v^1 \Gamma_{21}^2 + v^2 \Gamma_{22}^2 = v^2_{,2} + v^1 \Gamma_{21}^2 = \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r}. \end{aligned}$$

Dále máme

$$p|_i = g^{ik} p|_k = g^{ik} p_{,k} \quad (i)$$

a odtud

$$p|_2 = g^{22} p_{,2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

Celkem tedy (po vynásobení rovnice (h) poloměrem)

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + v \frac{u}{r} \right) = b_\varphi - \frac{\partial p}{r \partial \varphi}. \quad (j)$$

Rovnice (g) a (j) platí pro $\mu = 0$. Rozepsání členů obsahujících součinitel viskozity ponecháváme čtenáři.

Souhrn. Zanedbáme-li stlačitelnost kapaliny, dostaneme pro popis jejího pohybu soustavu tří Navierových-Stokesových rovnic a jednu rovnici kontinuity. Máme přitom čtyři neznámé (tři složky rychlosti a hydrostatický tlak). Okrajové podmínky musí být voleny tak, aby nebyla porušena platnost rovnice kontinuity. Proudnice udávají svými tečnami směr rychlosti. Při stacionárním proudění jsou proudnice totožné s drahami jednotlivých částic.

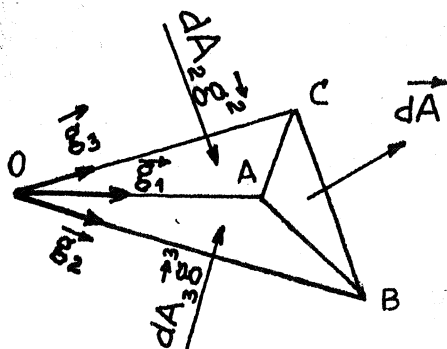
Proudnice, které procházejí uzavřenou křivkou, tvoří proudovou trubici. Každým průřezem takové trubice protéká stejné množství nestlačitelné kapaliny. Není-li rotace rychlostního pole nulová, existují obdobně i vírová vlákna a vírové trubice. Je-li pole objemových sil konzervativní (tehdy je lze odvodit jako gradientové pole ze skalárního pole), platí zákon konstantní rotace rychlostního pole podél každé vírové trubice. Při potenciálním proudění je rotace v rychlostním poli nulová, tj. potenciální proudění je bezvírové. Potenciál takového proudění vyhovuje Laplaceově rovnici.

18. PRŮTK KAPALINY PORÉZNÍM MATERIÁLEM (FILTRACE)

Obsahuje-li materiál drobné oddělené dutiny, nemůže jím kapalina protékat. Jsou-li však tyto dutiny spojeny (alespoň některé z nich) různými kanálky, stane se materiál pro kapalinu propustným. Protože dutiny a kanálky jsou v materiálu rozděleny nahodile (mají náhodnou velikost i tvar), můžeme jeho vlastnosti charakterizovat jenom v průměru.

Ačkoli tento problém průtoku nebo filtrace kapaliny porézním materiálem může zajímat jen úzký okruh odborníků, uvedeme zde jeho zákonitosti, neboť jsou názornou a krásnou aplikací vyložené teorie.

Budeme předpokládat, že dutiny a kanálky jsou tak malé, že se při průtoku uplatní vazkost kapaliny, a tak náhodně rozdělené, že skutečné nehomogenní těleso lze nahradit ekvivalentním homogenním tělesem se stejnou propustností kapaliny, jak ji dále přesněji popíšeme.



Obr. 43

První nesnází, se kterou se setkáme, je selhání definice pro rychlost protékající kapaliny. Její rychlost v jednotlivých kanálkách neznáme, nemůžeme tedy stanovit ani její průměrnou velikost. Musíme ji nově definovat na základě makrorozměrů protékaného tělesa, které známe. Z tělesa vyjmeme čtyřstěn znázorněný na obr. 43. Stejně jako u čtyřstěnu na obr. 17 můžeme napsat, že

$$d\vec{A} = dA_i \vec{g}_i. \quad (405)$$

Vektor znázorňující boční stěnu OAB je $dA_3 \vec{q}^3$, přičemž \vec{q}^3 je kolmé ke \vec{q}_1 i ke \vec{q}_2 . Podobné tvrzení platí i pro ostatní boční stěny. Tyto vektory jsou vnitřními normálami bočních stěn, kdežto výslednice $d\vec{A}$ je vnější normálou k trojúhelníku ABC. Je-li čtyřstěn dostatečně malý, nemění se v jeho rozsahu rychlostní pole, takže zmenšíme-li jeho rozměry např. na polovinu, zmenší se množství protékající každou stěnou čtyřikrát. Protékající množství je v tom případě úměrné velikosti plochy, takže trojúhelníkem ABC proteče $\vec{v} \cdot d\vec{A}$. Podobně boční stěnou, např. OAB, proteče $v^3 dA_3$. Podmínka kontinuity je

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = v^i dA_i. \quad (406)$$

Připomeňme, že $\vec{v} = v^j \vec{q}_j$, $d\vec{A} = dA_i \vec{q}^i$, takže

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = v^j dA_i \vec{q}_j \cdot \vec{q}^i = v^j dA_i \delta_j^i = v^i dA_i. \quad (407)$$

Tím jsme si ověřili platnost rovnice (406). Rychlost \vec{v} je přitom vztažena na celkový průřez $d\vec{A}$, nikoli tedy jen na skutečný světlý průřez jednotlivých kanálků. Je to filtrační rychlost kapaliny.

Protože jde o vazkou kapalinu, nebude se pohybovat, nebude-li na ni působit nějaká síla (silové pole). Naplníme-li porézní materiál kapalinou a zároveň zabráníme jejímu průtoku, vytvoří se v ní působením silového pole hydrostatický tlak p , pro který bude platit rovnice (388), totiž $b_i - p|_i = 0$. V této rovnici bude b_i značit objemovou sílu vztaženou na skutečný objem kapaliny (tedy nikoli na objem celého čtyřstěnu na obr. 43). Může jít např. o sílu tíže, o odstředivou sílu nebo o elektrostatickou sílu.

Má-li se kapalina pohybovat, musí být rozdíl $b_i - p|_i$ různý od nuly. Vzhledem k náhodnosti tvaru i rozdělení kanálků nemá materiál žádný význačný směr, v němž by byl průtok snadnější než v jiném směru. Proto je přirozené předpokládat, že filtrační rychlost bude mít stejný směr jako $b_i - p|_i$ a že mezi těmito veličinami bude přímá úměrnost

$$v_i = k (b_i - p|_i) = k (\Phi - p)|_i. \quad (408)$$

Tato lineární rovnice představuje Darcyho zákon (Henri Darcy, 1856).

Není-li materiál izotropický, nahradí se konstanta úměrnosti tenzorem permeability k^{ij} , takže bude

$$v^i = k^{ij} (b_j - p|_j) = k^{ij} (\Phi - p)|_j. \quad (409)$$

Kromě toho platí podmínka kontinuity, takže

$$v^i|_i = 0. \quad (410)$$

Dosažením z rovnice (409) odtud vyjde diferenciální rovnice pro výpočet tlaku

$$(k^{ij} p|_j)|_i = (k^{ij} b_j)|_i. \quad (411)$$

Má-li materiál ve všech místech stejné vlastnosti, je tenzor permeability konstantní. Jeho jednotlivé složky se mohou měnit (to záleží na druhu soustavy souřadnic), ale kovariantní derivace $k^{ij}|_m$ je nulová. To je podmínka homogenity materiálu. Je-li $k^{ij}|_m = 0$, je též $k^{ij}|_i = 0$ a z rovnice (411) vyjde pro homogenní filtr

$$k^{ij} p|_j = k^{ij} b_j|_i. \quad (412)$$

Je-li materiál izotropický, je jeho tenzor permeability v kartézských souřadnicích kulový, tj. $k^{11} = k^{22} = k^{33} = k$ (ostatní složky nulové). To můžeme zapsat pomocí Kroneckerova symbolu $k^{ij} = k \delta^{ij}$. V obecných souřadnicích tomu odpovídá vztah $k^{ij} = k g^{ij}$, takže

$$k g^{ij} p|_j = k g^{ij} b_j|_i, \quad (413)$$

odkud

$$p|_i = b_i|_i. \quad (414)$$

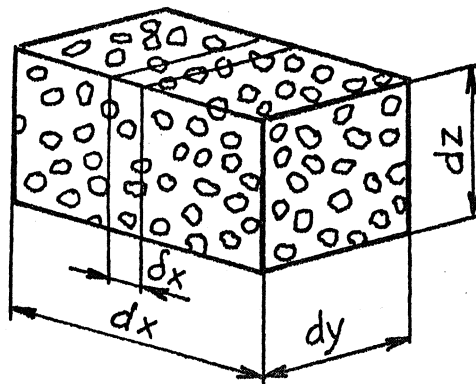
To je Poissonova diferenciální rovnice.

Ačkoli k tomu není jasný důvod, je tenzor permeability souměrný, takže $k^{ij} = k^{ji}$.

Až dosud jsme pomíjeli jevy, vznikající uvnitř porézního materiálu. Tlak, který působí v jeho kanálcích, způsobuje v něm nějakou napjatost, kterou bychom chtěli znát alespoň v průměru, abychom mohli formulovat pevnostní podmínku.

Na obr. 44 je zakreslen rovnoběžnostěn vyňatý z porézního materiálu. Na jeho stěnách jsou znázorněny řezy s průchozími kanálky. Zdánlivý průřez pravé stěny je $dy dz$, ale skutečný průřez bude menší. Je-li $\varphi dy dz$ průřez kanálků ($0 < \varphi < 1$), je $(1 - \varphi) dy dz$ skutečný průřez pravé stěny. Rozměry dx , dy , dz jsou sice mnohem menší než makro rozměry tělesa filtru, ale mnohem větší než rozměry jednotlivých pórů.

Vyjmeme-li z hranolku na obr. 44 velmi tenkou vrstvu, jejíž tloušťka δx je srovnatelná s velikostí pórů nebo dokonce ještě menší, je objem pevného materiálu v této vrstvě $(1-\varphi)dydz\delta x$. Složíme-li z těchto vrstev celý hranol, dostaneme pro objem pevného materiálu $(1-\varphi)dxdydz$, takže $\varphi dxdydz$ je objem pórů. To znamená, že stejná veličina - pórovitost φ - charakterizuje efektivní zmenšení plochy průřezu i celého objemu. Odtud plyne, že pórovitost musí být pro průřezy v různých směrech stejná, a to i u anizotropického materiálu.



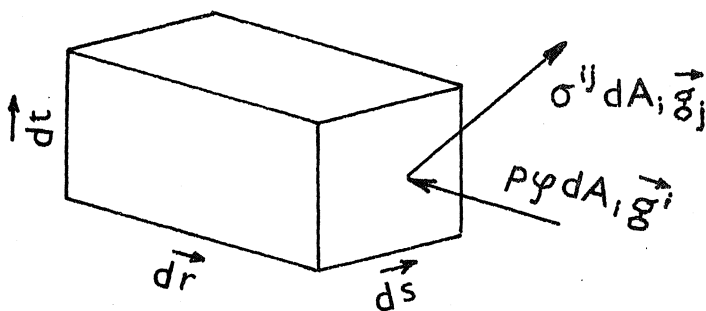
Obr. 44

Při této úvaze jsme měli na mysli jenom průchozí kanálky, kterými může protékat kapalina. Uzavřené dutiny, jimiž kapalina nemůže protékat, bereme jako součást pevného materiálu (jejich řezy nejsou na obr. 44 znázorněny). Zákonnosti, které jsme získali, můžeme uplatnit i tam, kde pevný materiál tvoří "ostrůvky" nakupené v prostoru, jako je tomu u sypkých hmot. Definice pórovitosti se nezmění.

Přejdeme nyní od kartézských souřadnic na obr. 44 k obecným souřadnicím na obr. 45. Je tam znázorněn element, jehož pravá stěna bude mít velikost

$$d\vec{s} \times d\vec{t} = \epsilon_{ijk} ds^i dt^j \vec{g}^k = dA_k \vec{g}^k. \quad (415)$$

Obr. 45



Budou na ni působit dvě síly, a to (1) napětí představované tenzorem napjatosti σ^{ij} a přenášené pevným materiálem a (2) tlak p kapaliny v pórech. Vztáhneme-li tenzor napjatosti k celkové ploše $dA_i \vec{g}^i$, bude síla vyvozená napětím na pravé stěně $\sigma^{ij} dA_i \vec{g}_j$. Síla vyvozená tlakem působí na průřez $-\varphi dA_i \vec{g}^i$ (ve směru vnitřní normály,

proto znaménko minus). Celková síla působící na pravou stěnu elementu je

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \sigma^{ij} dA_i \vec{g}_j - p\varphi dA_i \vec{g}^i = \\ &= (\sigma^{ij} - p\varphi g^{ij}) dA_i \vec{g}_j. \end{aligned} \quad (416)$$

Tato síla nastoupí místo síly $\sigma^{ij} dA_i \vec{g}_j$ podle (336), kterou jsme použili při odvození pohybové rovnice (340). Nyní předpokládáme nulové zrychlení a místo (336) máme (416). Rovnice rovnováhy bude

$$(\sigma^{ij} - p\varphi g^{ij})|_j + b^i = 0 \quad (417)$$

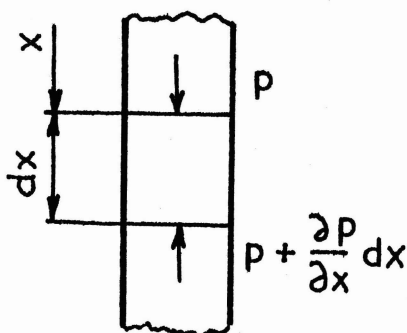
čili

$$\sigma^{ij}|_j = -b^i + (p\varphi)|^i. \quad (418)$$

Síly b^i jsou objemové síly (gravitační, odstředivé apod.). Vidíme, že tlakové pole p má na napjatost porézního materiálu vliv analogický objemovým silám. Tento vliv nevymizí ani tehdy, je-li tlak p konstantní, pokud není zároveň konstantní i pórovitost φ .

Zdálo by se, že nyní postačí stanovit "suchou" pevnost porézního materiálu, např. při tahové zkoušce, a vymezit, že ekvivalentní napětí, přepočtené z napjatosti σ^{ij} , nesmí překročit dovolenou hodnotu (pevnost dělenou součinitelem bezpečnosti). Tento postup je však nesprávný. Nastane-li porucha, nevytvoří se ideálně rovný průřez. Lomová plocha spojuje nejslabší místa a má vždy větší pórovitost než φ . Kromě toho vzniká vlivem tlaku p složitá napjatost kolem jednotlivých pórů, o níž náš výpočet nic neříká, neboť počítáme jen s průměrnými hodnotami a vlastnostmi materiálu. Pevnost filtru je proto třeba zkoušet jen za skutečného průtoku kapaliny (pod tlakem).

Příklad 41



Obr. 46

Abychom názorněji ilustrovali Darcyho zákon, budeme uvažovat o průtoku filtrem vloženým do svislého potrubí stálého průřezu S (obr. 46). Tíha kapaliny o hustotě ρ v části filtru o délce dx je $\varphi\gamma S dx$, kde $\gamma = \rho g$ a φ je pórovitost filtru. Tlak p bude působit v průřezu φS , takže

podmínka rovnováhy dá (při nulovém průtoku)

$$\varphi \gamma S dx + p \varphi S - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \varphi S = 0,$$

odkud

$$\gamma - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Má-li nastat účinkem sil tíže pohyb, musí být tento výraz pozitivní. Rovnice (408) dá rychlost průtoku

$$v = k \left(\gamma - \frac{\partial p}{\partial x} \right),$$

kde k je konstantou permeability.

Poslední výraz bude pozitivní, bude-li $\frac{\partial p}{\partial x}$ menší než při zastaveném průtoku. To znamená, že za průtoku filtrem je tlak rozdělen rovnoměrněji než když se průtok zastaví (při stejných objemových silách).

Souhrn. Vlastnosti porézního filtrů jsou charakterizovány jeho tenzorem permeability a pórovitostí. První z těchto veličin charakterizuje propustnost filtru v daném silovém a tlakovém poli v různých směrech. Je-li filtr izotropický, má ve všech směrech stejnou propustnost. Druhá z těchto veličin udává poměrnou velikost propustných pórů v daném objemu nebo průřezu materiálu. Filtrační rychlost je vztažena na celý průřez. Závisí na tenzoru permeability a na rozdílu objemové síly a tlakového gradientu. Napětí ve filtru je vztaženo (podobně jako filtrační rychlost kapaliny) k celému průřezu (bez zřetele k pórům). Je určováno nejen objemovými silami, ale i gradientem součinu tlaku a pórovitosti. Tento gradient působí na materiál filtru obdobně jako objemová síla.

19. NELINEÁRNĚ ELASTICKÉ MATERIÁLY

V této kapitole se stručně zmíníme o konstitučních rovnicích pro nelineárně elastické materiály. Jsou to různé umělé hmoty, pryž apod., tedy látky, které se poměrně snadno a značně deformují. K popisu jejich deformace, která není velmi malá, je třeba použít Greenův nebo Almansiho tenzor přetvoření.

Materiál je elastický, existuje-li v něm referenční (přirozený) stav, v němž je těleso bez napětí, a existuje-li v okolí tohoto stavu vzájemně jednoznačné přiřazení tenzorů napjatosti a deformace. Tato definice má tedy dvě části. První z nich vylučuje možný zkreslující vliv vlastních pnutí (pro nelineární materiál neplatí zákon superpozice, takže vlastní pnutí mění deformační charakteristiku), druhá pak předpokládá existenci konstitučního zákona

$$\sigma^{ij} = f(e_{ij}). \quad (419)$$

Zde σ^{ij} značí Eulerův tenzor napjatosti a e_{ij} Almansiho tenzor deformace (nezaměňovat s deviatorem deformace). Alternativně bychom místo toho mohli napsat funkční závislost mezi Kirchhoffovým tenzorem napjatosti a Greenovým tenzorem deformace.

Při velkých deformacích již nelze zanedbat termodynamický děj, který deformaci doprovází. Předpokládáme, že referenční stav tělesa je stavem termodynamické rovnováhy (teplota v tělese je konstantní) a že se těleso vždy vrací k referenčnímu stavu, kdykoli je odlehčeno. Proto funkce f splňuje podmínku $f(0) = 0$.

Deformuje-li se těleso za konstantní teploty, jde o děj izotermický, který je vratný. Jiným vratným dějem je děj adiabatický, při němž je těleso od okolí dokonale tepelně izolováno. Za těchto okolností existuje potenciální energie W_0 , která je analytickou funkcí tenzoru přetvoření a má význam deformační práce vztažené k jednotce nepřetvořeného objemu (index nula). Vztáhneme-li ji k přetvořenému objemu (bez indexu), dostaneme v celém tělese energii

$$\int_V W dV = \int_{V_0} W_0 dV_0. \quad (420)$$

V dalším výkladu se omezíme na případ, kdy materiálové souřadnice v nepřetvořeném tělese x^i tvoří kartézskou soustavu, takže kovariantní báze $\vec{g}_i = g_{ij} \vec{g}^j$ je jednotková. Rovnoběžnostěn určený vektory \vec{g}_i je jednotková krychle, takže determinant $\det[g_{ij}] = g = 1$. Tato krychle se přetvoří v rovnoběžnostěn určený bází \vec{g}_i . Jeho objem bude podle (146) a (136)

$$\epsilon^{ijk} \hat{g}^1_i \hat{g}^2_j \hat{g}^3_k = \epsilon^{ijk} \hat{g}_{1i} \hat{g}_{2j} \hat{g}_{3k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \hat{g}_{1i} \hat{g}_{2j} \hat{g}_{3k} = \sqrt{\hat{g}}. \quad (421)$$

Ve stejném poměru se změni i elementární objemy, takže

$$\frac{dV}{dV_0} = \sqrt{\hat{g}}. \quad (422)$$

Při virtuálním přetvoření objemu dV vykonají v něm napětí σ_{ij} práci $\sigma_{ij} \delta e_{ij}$, která se bude rovnat změně energie napjatosti $\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij}$. Protože přírůstek δe_{ij} volíme libovolně, vyjde srovnáním obou výrazů vztah

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}. \quad (423)$$

To znamená, že derivováním potenciální deformační energie podle složek tenzoru přetvoření dostaneme tenzor napjatosti. Přejdeme-li k materiálovým souřadnicím, nahradíme e_{ij} Greenovým tenzorem E_{ij} a energii W hodnotou W_0 . Protože $W = W_0 \frac{dV_0}{dV}$, dostaneme

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W_0}{\partial E_{ij}} \frac{dV_0}{dV} = \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial W_0}{\partial E_{ij}}. \quad (424)$$

Napětí je přitom stále vztaheno k jednotce plochy přetvořeného průřezu, takže má zřejmý fyzikální význam. Protože složky E_{ij} a E_{ji} vystupují samostatně, napíšeme místo (424) souměrný vztah

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{J}} \left(\frac{\partial W_0}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial W_0}{\partial E_{ji}} \right). \quad (425)$$

Materiály, u nichž existuje potenciální energie W_0 (a je nulová v přirozeném stavu tělesa), se nazývají hyperelastické.

Elastický materiál je zároveň hyperelastický, ale opak nemusí platit.

Protože se v této publikaci nezabýváme teplotním pnutím (pomíjíme problémy vyžadující termodynamické úvahy), nepředpokládáme závislost W_0 na teplotě, obecně však může W_0 na teplotě záviset.

Potenciální deformační energie W_0 je invariantní funkcí Greenova tenzoru přetvoření E_{ij} . Jde tedy o to, stanovit takové algebraické výrazy odvozené ze složek tenzoru deformace E_{ji} , které by se transformací souřadnic nezměnily a byly lineárně nezávislé. Budeme jim říkat invarianty tenzoru (druhého řádu). Potenciální energie W_0 bude funkcí těchto invariantů.

Další úvaha se bude týkat jakéhokoli tenzoru druhého řádu.

Rovnice

$$y^i = a^i_j x^j \quad (426)$$

představuje transformaci vektoru \vec{x} do vektoru \vec{y} . Devět součinitelů a^i_j této transformace tvoří tenzor druhého řádu. Tento tenzor považujeme za konstantní. Pak vektorové pole \vec{y} odpovídá vektorovému

poli \vec{x} . Ptáme se, existují-li v těchto polích sobě přiřazené vektory, které by byly navzájem rovnoběžné. V takovém případě by nějakému vektoru \vec{x} příslušel vektor $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ (λ = reálné nebo komplexní číslo). Zřejmě by musila platit rovnice

$$\lambda x^i = a^i_j x^j \quad (427)$$

cili

$$(a^i_j - \lambda \delta^i_j) x^j = 0. \quad (428)$$

Směr $\lambda \vec{x}$, který tomuto požadavku vyhovuje, je hlavní směr, vektor \vec{x} je vlastní vektor tenzoru a^i_j a hodnota λ je vlastní hodnotou téhož tenzoru. Existují-li vlastní vektory a hodnoty, nezávisejí na volbě soustavy souřadnic. Vztah (428) představuje homogenní lineární soustavu rovnic pro neznámé x^j . Triviální řešení této soustavy $\vec{x} = 0$ nás nezajímá. Podmínkou existence netriviálního řešení je rovnice

$$\det(a^i_j - \lambda \delta^i_j) = 0. \quad (429)$$

Představuje polynom třetího stupně .

$$A - A' \lambda + A'' \lambda^2 - \lambda^3 = 0 \quad (430)$$

se součiniteli

$$\begin{aligned} A &= \det [a^i_j], \\ A' &= \frac{1}{2} (a^i_i a^j_j - a^i_j a^j_i), \\ A'' &= a^i_i. \end{aligned} \quad (431)$$

Protože vlastní hodnoty λ nezávisejí na transformaci souřadnic (asi jako hlavní poloosy elipsoidu nezávisejí na tom, v jaké soustavě souřadnic elipsoid popisujeme), musí být tvar (430) i hodnoty (431) invariantní. Skutečně, (431) jsou hledané invarianty tenzoru a^i_j .

V teorii konečných deformací se zpravidla neužívají invarianty Greenova tenzoru přetvoření (127), ale spíše tenzoru \hat{g}_{ij} . V kartézských souřadnicích $g_{ij} = \delta_{ij}$, takže

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + 2 \mathcal{E}_{ij} = \delta_{ij} + 2 \mathcal{E}_{ij}. \quad (432)$$

Tento tenzor má přímý fyzikální význam, je to metrický tenzor přetvořené sítě materiálových souřadnic, která byla před přetvořením kartézská

Vytvoříme-li z tohoto tenzoru invarianty podle vzorců (431), vyjde */

$$\begin{aligned} I_2 &= \det [\hat{g}_j^i] = \det [\delta_j^i + 2 \xi_j^i], \\ I_2 &= 3 + 4 \xi_i^i + 2 (\xi_i^i \xi_j^j - \xi_j^i \xi_i^j), \\ I_1 &= 3 + 2 \xi_i^i. \end{aligned} \quad (433)$$

V okolí přirozeného stavu tělesa můžeme funkci W_0 aproximovat polynomem

$$W_0 = \sum_{ijkl} A_{ijkl} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 1)^k. \quad (434)$$

Zde $i, j, k = 0, 1, 2, \dots$, přičemž $A_{000} = 0$. Vztah (434) je ekvivalentní Taylorovu rozvoji

$$W_0 = \frac{1}{2} [E^{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} + \frac{1}{3} E^{ijklmnn} \xi_{ij} \xi_{kl} \xi_{mn} + \dots] \quad (435)$$

Zde E^{ijkl} , $E^{ijklmnn}$ jsou elastické moduly tvořící tenzory čtvrtého, resp. šestého řádu. Z řady (434) nebo (435) lze do výpočtu zahrnout z praktických důvodů jen jeden nebo několik málo členů.

Ponecháme-li v rovnici (435) jen první člen, dostaneme hookeovský materiál, pro který

$$W_0 = \frac{1}{2} E^{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl}. \quad (436)$$

Pro některé vysoce elastické, nestlačitelné materiály lze brát z řady (434) jen jeden člen, a to

$$W_0 = C (I_1 - 3). \quad (437)$$

Takové materiály se v literatuře označují jako neohookeovské. Obecnější skupinu tvoří materiály, pro něž

$$W_0 = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3). \quad (438)$$

Nestlačitelný materiál, pro který platí tato rovnice, se nazývá Mooneyův (nebo Mooneyův-Rivlinův) materiál. Tímto materiálem je např. přírodní pryž.

*/ Přitom $\xi_j^i = g^{ik} \xi_{kj} = \delta^{ik} \xi_{kj}$.

Podmínka nestlačitelnosti (která je splněna jen přibližně), vede k rovnici $\mathbb{I}_3 - 1 = 0$, takže třetí invariant se v rovnicích (436) a (437) nevyskytuje. Rovnice $\mathbb{I}_3 - 1 = 0$ je vedlejší podmínkou, která musí platit zároveň s citovanými rovnicemi.

Vztahy, které jsme až dosud v této kapitole probírali, vyjadřují závislost tenzoru napjatosti na tenzoru přetvoření. Obecnější skupinu tvoří hypoelastické materiály, u nichž je definována pouze závislost časové derivace tenzoru napjatosti na tenzoru rychlosti deformace. Tato závislost se předpokládá lineární, homogenní a v invariantním tvaru. Jde však o příliš speciální problematiku, kterou se nebudeme zabývat.

Uvedené definice nelineárně elastických materiálů byly zvoleny tak, aby se co nejvíce zjednodušil výpočet deformace a napjatosti tělesa. Přesto je výpočet velmi náročný. Analytickými metodami lze řešit jen málo případů (především ty, u nichž lze tvar tělesa před deformací i po deformaci snadno popsat). Z numerických metod se uplatňuje metoda konečných prvků, avšak i zde dostáváme řešení mnohem obtížněji než v lineárních případech.

Příklad 42

Dokažte, že podmínka $\mathbb{I}_3 = 1$ znamená nestlačitelnost materiálu.

Řešení

Jednotková krychle, jejíž hrany tvoří jednotkové vektory

$$\vec{g}_1 = \vec{i}_1, \quad \vec{g}_2 = \vec{i}_2, \quad \vec{g}_3 = \vec{i}_3$$

v kartézských souřadnicích, se přetvoří na krychli o hranách \hat{g}_1 , \hat{g}_2 , \hat{g}_3 . Pro ně platí rozklad

$$\hat{g}_i = \hat{g}_{ij} \vec{g}^j.$$

Objem přetvořené krychle vypočteme podle (146)

$$\begin{aligned} V &= \epsilon^{ijk} \hat{g}_{1i} \hat{g}_{2j} \hat{g}_{3k} = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \epsilon^{ijk} \hat{g}_{1i} \hat{g}_{2j} \hat{g}_{3k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \det [\hat{g}_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \hat{g} = \sqrt{\hat{g}} = \sqrt{\mathbb{I}_3}. \end{aligned}$$

Je-li materiál nestlačitelný, nemůže se jeho objem změnit, takže $\sqrt{\mathbb{I}_3} = 1$. Pak je také $\mathbb{I}_3 = 1$, což jsme měli dokázat.

Příklad 43

Předpokládejte jednoosou napjatost v prizmatické tyči vyrobené z neohookovského materiálu a stanovte výpočtem jeho deformační charakteristiku.

Řešení

V nepřetvořeném tělese volíme jednotkovou ortogonální vektorovou bázi. Předpokládejme, že tahové napětí působí ve směru $\vec{g}_1 \equiv \vec{g}^1$ osy tyče a že se tyč prodlouží v poměru $\xi : 1$, takže bazový vektor v přetvořeném tělese $\hat{g}_1 = \xi \vec{g}_1$ ($\xi > 1$). Ve směrech druhé a třetí osy musí nastat zkrácení v poměru $1 : \sqrt{\xi}$, neboť materiál je nestlačitelný. Zřejmě je $\hat{g}_{11} = \xi^2$, $\hat{g}_{22} = \hat{g}_{33} = \frac{1}{\xi}$, neboť $\hat{g}_2 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \vec{g}_2$, $\hat{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \vec{g}_3$. V souhlasu s podmínkou nestlačitelnosti vyjde $\hat{g}_{11} \hat{g}_{22} \hat{g}_{33} = 1$ (srovnej s příkladem 42).

Složky Greenova tenzoru přetvoření vyjdou podle (127)

$$\mathcal{E}_{11} = \frac{1}{2} (\hat{g}_{11} - 1) = \frac{1}{2} (\xi^2 - 1), \quad (\text{a})$$

$$\mathcal{E}_{22} = \frac{1}{2} (\hat{g}_{22} - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) = \mathcal{E}_{33}. \quad (\text{b})$$

Vyloučíme-li ξ z těchto rovnic, dostaneme

$$\mathcal{E}_{22} = \mathcal{E}_{33} = \frac{1 - \sqrt{1 + 2\mathcal{E}_{11}}}{2\sqrt{1 + 2\mathcal{E}_{11}}}. \quad (\text{c})$$

Greenův tenzor se vztahuje k nepřetvořenému tělesu, v němž je vektorová báze jednotková a pravouhlá. Nemusíme proto rozlišovat smíšené a kovariantní složky, neboť jsou si rovny. Potenciální deformační energie vyjde pak podle (437)

$$\begin{aligned} W_0 &= 2C \mathcal{E}_i^i = 2C \mathcal{E}_{ii} = 2C (\mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22} + \mathcal{E}_{33}) = \\ &= 2C \left(\mathcal{E}_{11} + \frac{1 - \sqrt{1 + 2\mathcal{E}_{11}}}{\sqrt{1 + 2\mathcal{E}_{11}}} \right). \end{aligned} \quad (\text{d})$$

Podle (425) vyjde složka tenzoru napjatosti (jediná nenulová, vztažená k přetvořenému tělesu)

$$G_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \mathcal{E}_{11}} = 2C \left(1 - \frac{1}{(1 + 2\mathcal{E}_{11})\sqrt{1 + 2\mathcal{E}_{11}}} \right). \quad (\text{e})$$

Do tohoto vztahu nyní dosadíme Cauchyho poměrnou deformaci $\varepsilon = \Delta l / l$, a níž jsme zvyklí počítat v lineární teorii pružnosti. Zřejmě platí, že

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l + \Delta l}{l} - 1 = \xi - 1. \quad (f)$$

Za ξ dosadíme z rovnice (a) a dostaneme

$$\varepsilon = -1 + \sqrt{1 + 2\xi_{11}}. \quad (g)$$

S použitím (g) dá rovnice (e) po snadné úpravě

$$\sigma_{11} = 2C \frac{(1 + \varepsilon)^3 - 1}{(1 + \varepsilon)^3}. \quad (h)$$

Tato složka tenzoru napjatosti nemá fyzikální význam. Přepočteme ji proto na fyzikální složku s využitím příkladu 23; dostaneme "skutečné" napětí

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \sigma_{11} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{11}^0}} = \xi^2 \sigma_{11} = (1 + \varepsilon)^2 \sigma_{11} = \\ &= 2C \frac{(1 + \varepsilon)^3 - 1}{(1 + \varepsilon)}. \quad (i) \end{aligned}$$

Toto napětí se vztahuje k přetvořenému průřezu A . Chceme-li je přepočítat na konvenční napětí σ_0 , které vztahujeme k původnímu průřezu A_0 , musíme je dělit poměrem $A_0/A = \xi = 1 + \varepsilon$, takže

$$\sigma_0 = 2C \frac{(1 + \varepsilon)^3 - 1}{(1 + \varepsilon)^2}. \quad (j)$$

Skutečné napětí τ_{11} i konvenční napětí σ_0 znázorňuje obr. 47 v závislosti na Cauchyho hodnotě poměrného prodloužení ε .

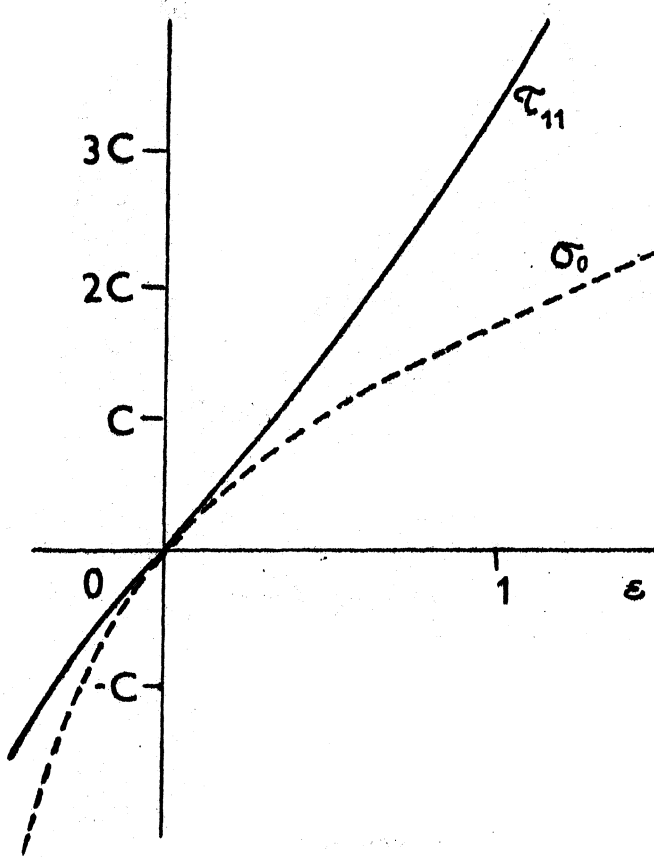
Příklad 44

Dokažte, že pro první invariant I podle (432) platí vztah

$$I_1 = g^{jk} \hat{g}_{jk}.$$

Návod

V rovnici (127) povyšte index. Po úžení smíšených složek tenzoru dosadte vzniklý skalár do (432).



Obr. 47

Souhrn. U nelineárně elastických materiálů neplatí zákon superpozice, takže je nutno předpokládat, že vlastní pnutí v tělese ovlivní jeho deformační charakteristiku. Deformační vlastnosti tělesa proto definujeme ve vztahu k přirozenému stavu tělesa, v němž je teplota konstantní a napjatost nulová. Existuje-li pro daný materiál potenciální deformační energie, je funkcí invariantů tenzoru konečného přetvoření. Podle typu takové funkce se rozlišují jednotlivé typy nelineárně pružných materiálů (hookeovský, neohookeovský, Mooneyův). Derivací potenciální deformační energie se získá tenzor napjatosti, který se zpravidla vztahuje k deformovanému tvaru tělesa.

LITERATURA

- /1/ BECKER, E., BURGER, W.: Kontinuumsmechanik. Teubner, Stuttgart 1975.
- /2/ BRDIČKA, M.: Mechanika kontinua. NČSAV, Praha 1955.
- /3/ ERINGEN, C.: Mechanics of continua. Wiley, New York 1967.
- /4/ FLÜGGE, W.: Tensor analysis and continuum mechanics. Springer, Berlin 1972.
- /5/ GERMAIN, P.: Mécanique des milieux continus. Masson, Paris 1962.
- /6/ JAUNZEMIS, W.: Continuum mechanics. Macmillan, New York 1967.
- /7/ LANDAU, L. D., LIFŠIC, E. M.: Mechanika splošnych sred. Fizmatgiz, Moskva 1954.
- /8/ PRAGER, W.: Introduction to mechanics of continua. Ginn, Boston 1961.
- /9/ ROY, M.: Mécanique des milieux continus et déformables. Gauthier-Villars, Paris 1950.
- /10/ SCIPIO, L. A.: Principles of continua with applications. Wiley, New York 1967.
- /11/ SĚDOV, L. I.: Vvedeniye v mehaniku splošnoj sredy. Fizmatgiz, Moskva 1962.

Druh publikace:	Sborník
Název:	ZÁKLADNÍ PRINCIPY A ROVNICE MECHANIKY KONTINUA - 1. část
Autor:	Prof. Ing. Cyril Höschl
Počet stran:	142
Náklad:	180 výtisků
Formát:	A4
Číslo publikace:	60 - 537 - 78 (1491)
Vydal a rozmnožil:	ČVTS - Dům techniky Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23
Odpovědný redaktor:	Ing. Vladimír Václavík
Datum vydání:	Leden 1978