

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**MATICOVÉ METODY
V PEVNOSTNÍCH VÝPOČTECH**

III. ČÁST

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1974

Předmluva

Tato skripta obsahují látku závěrečné části semináře, věnovaného maticovým metodám v pevnostních výpočtech. Autorovou snahou bylo podat pomocnou ruku těm, kteří absolvovali vysokou školu v dobách, kdy se maticová algebra na technických vysokých školách vůbec neprobírala, nebo těm, kteří vysokou školu neabsolvovali, ale usilují o prohloubení vlastního teoretického vzdělání. Dnes tvoří maticová algebra důležitou součást výuky na vysokých školách - a zčásti i na středních školách - a její význam se bude s rozšířením číslicových počítačů dále zvětšovat. Dům techniky ČVTS v Praze projevil mimořádné pochopení pro tuto snahu; zabezpečil vzornou organizaci seminářů a včasné vydání skript, a to ve lhůtách stanovených původním plánem. Jen ten, kdo někdy skripta do tisku připravoval a obstarával jejich vydání, dovede tuto práci ocenit. Autor se domnívá, že je oprávněn poděkovat pracovníkům Domu techniky ČVTS v Praze nejen svým jménem, ale i jménem účastníků semináře a dalších zájemců, kteří se nemohli osobně seminářů zúčastnit, avšak skripta si vyžádali.

V této poslední části semináře jsme se pokusili nastínit i problematiku složitější, např. řešení úloh o kmitání pružných těles a o elastické stabilitě. Poslední stať je tedy úvodem do studia nelineárních problémů. Zvolili jsme však jen jednoduché příklady aplikací, většinou jednorozměrné úlohy. Domníváme se, že to stačí k pochopení základních myšlenek a principů; zobecnění na několikarozměrné úlohy je snadné (alespoň formálně) a je popsáno v dostupné odborné literatuře. Úkolem našich skript není za tuto literaturu suplovat, ale ulehčit a popř. vůbec umožnit absolventům semináře její studium a překlenout tak vzdálenost mezi moderní teorií a praxí.

Vzhledem k šíři probírané tematiky a ke krátkosti času nebylo možné se vyvarovat některých duplicit v označování veličin. V textu je však vždy uvedena poznámka, aby se předešla možná nedorozumění. Pro lepší pochopení byla látka doplněna četnými řešenými příklady.

Pracovníkům Domu techniky ČVTS v Praze děkuji za obětavou spolupráci a podporu. Všem účastníkům semináře pak přeji plný úspěch ve studiu i v aplikacích probírané látky.

C. Höschl

MATICOVÉ METODY V PEVNOSTNÍCH VÝPOČTECH

III. část

Prof. Ing. Cyril Höschl,
Ústav termomechaniky ČSAV, Praha

Obsah

	Str.
1. Důsledky Cayleyovy-Hamiltonovy věty v matematice a ve fyzice	9
2. Řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic pomocí matic	13
3. O úplnosti a řešitelnosti soustav lineárních algebraických rovnic	18
4. Rozbor chyb řešení lineární soustavy a numerická stabilita	32
5. Rozdíl mezi vektorovým a analytickým pojetím mechaniky	35
6. Stacionární hodnota určitého integrálu	38
7. O přípustných formulacích okrajových podmínek	42
8. Diskretizace pružného kontinua a omezení počtu stupňů volnosti ve statice	43
9. Lagrangeův princip v metodě konečných prvků	46
10. Okrajové podmínky v metodě konečných prvků	51
11. Zjevné a skryté zobecněné síly v metodě konečných prvků	53
12. Spojování prvků se skrytými zobecněnými silami	57
13. Zpřesnění metody konečných prvků užitím centrálních částí elementů	60
14. Matice tuhosti, matice poddajnosti a matice přenosu	61
15. Diskretizace pružného kontinua a omezení počtu stupňů volnosti v dynamice	66
16. Aplikace metody konečných prvků v úlohách z dynamiky	69
17. Frekvenční závislost matic tuhosti a hmotnosti	74
18. O vlastnostech matice hmotnosti	81
19. O kondenzaci matic hmotnosti a tuhosti	84
20. Odvození matice hmotnosti z kinetické energie	94
21. Nelineární případy - Elastická stabilita konstrukcí	96

1. DŮSLEDKY CAYLEYOVY-HAMILTONOVY VĚTY V MATEMATICE A VE FYZICE

V druhé části semináře jsme dokázali důležitou Cayleyho -Hamiltonovu větu, podle níž vyhovuje čtvercová matice své vlastní charakteristické rovnici. Tuto rovnici získáme při řešení úlohy o vlastních hodnotách

$$Ax = \lambda x, \quad (1)$$

kde A značí čtvercovou matici $n \times n$,
 x sloupcový vektor $n \times 1$.

Pomineme-li triviální řešení $x = 0$, má rovnice (1) ještě jiná řešení jen pro určité, tzv. vlastní hodnoty parametru λ . Je-li matice A reálná a souměrná, jsou vlastní hodnoty λ vždy reálné. Totéž platí obecněji pro hermiteovskou matici. Charakteristická rovnice, z níž tyto hodnoty můžeme určit, je

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (2)$$

kde I je jednotková matice $n \times n$.

Ke každé vlastní hodnotě vypočtené z rovnice (2) existuje vlastní vektor x , který splňuje soustavu rovnic (1) a je obecně určen až na multiplikační konstantu. Zvolíme-li tuto konstantu tak, aby se $x^T x = 1$, dostaneme normovaný vlastní vektor, který je již jednoznačně určen - jde-li o jednoduchou vlastní hodnotu. Je-li matice reálná a souměrná, je n vlastních hodnot, některé však mohou být několikanásobné; těm je pak možno přiřadit nekonečně mnoho normovaných vlastních vektorů. Normované vlastní vektory jsou obecně vzájemně kolmé; je-li jich - v případě několikanásobných vlastních hodnot - nekonečně mnoho, lze z nich vždy vybrat n vektorů vzájemně ortogonálních a nezávislých, na nichž ostatní vektory lineárně závisejí. Znázorníme-li si vlastnosti reálné souměrné matice kvadratickou plochou v n -rozměrném prostoru

$$x^T A x = 1, \quad (3)$$

dostaneme normované vlastní vektory, pro něž se $x^T x = 1$, jako jednotkové vektory ve směrech hlavních os této plochy. Vlastní hodnoty jsou pak reciproké hodnoty kvadrátů poloos. Je-li poloosa imaginární (takovou je vedlejší osa u hyperboly), je příslušná vlastní hodnota záporná. U pozitivně definitních matic jsou všechny poloosy reálné a vlastní hodnoty kladné. Nulové vlastní hodnotě přísluší nekonečná poloosa, tj. kvadratická plocha je degenerovaná.

Rozepíšeme-li rovnici (2), dostaneme algebraickou rovnici n -tého stupně pro λ , tj. polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (4)$$

Vlastní hodnoty jsou tedy nulové body polynomu $P(\lambda)$. Cayleyova-Hamiltonova věta říká, že rovnici (4) vyhovuje i sama matice A , takže

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0. \quad (5)$$

Tato věta má pro matematiku i pro fyziku velmi zajímavé důsledky, o nichž se nyní podrobněji zmíníme:

Především lze z rovnice (5) určit n -tou mocninu matice A , známe-li mocniny do $n-1$ stupně

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} - \dots - a_{n-1} A - a_n I. \quad (6)$$

Znásobíme-li tuto rovnici A , dostaneme

$$A^{n+1} = -a_1 A^n - a_2 A^{n-1} - \dots - a_{n-1} A^2 - a_n A. \quad (7)$$

Dosadíme-li do prvního členu na pravé straně z rovnice (6), dostaneme opět polynom stupně $n-1$. Tak můžeme pokračovat. Libovolnou mocninu matice A lze vyjádřit polynomem nejvýše $n-1$ stupně. To platí, je-li exponent přirozené číslo; větu lze však zobecnit i pro záporné celé exponenty, je-li matice A regulární. Stačí rovnici (6) postupně násobit inverzní maticí A^{-1} .

V příští kapitole uvidíme, jak lze pomocí tohoto postupu získat definici pro obecnější "funkci matice". S její pomocí bude možné naráz napsat řešení celé soustavy lineárních diferenciálních rovnic.

Nyní ještě ukážeme, jaké důležité omezení plyne z Cayleyovy-Hamiltonovy věty pro formulaci některých fyzikálních zákonů. Je známo, že Hookeův zákon pro jednoosou napjatost

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (8)$$

lze zobecnit pro tříosou napjatost, dosadíme-li do rovnice (8) vektor poměrných deformací $\{\epsilon\}$ místo poměrného prodloužení ϵ a vektor napětí $\{\sigma\}$ místo tahového napětí σ . Konstantu $1/E$ pak nahradíme maticí elastických konstant $[\Phi]$ o velikosti 6×6 . Tak dostaneme známý vztah $\{\epsilon\} = [\Phi] \{\sigma\}$, který jsme používali již v první části semináře.

Hookeův zákon však můžeme napsat také jinak, a to jako vztah mezi deviatorem přetvoření $[\epsilon_D]$ a deviatorem napětí $[\sigma_D]$.

Deviátory definujeme, jak známo, takto:

$$[\varepsilon_D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} \quad (9)$$

kde $\varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$

$$[\sigma_D] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \quad (10)$$

kde $\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$

Hookeův zákon má pak velmi jednoduchý tvar; je dán těmito dvěma rovnicemi:

$$[\varepsilon_D] = \frac{1}{2G} [\sigma_D],$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3K} \sigma. \quad (11)$$

Zde G značí modul pružnosti ve smyku a K modul objemové stlačitelnosti. Je-li materiál nestlačitelný, je $K = \infty$ a druhá z rovnic (11) dává poměrnou změnu objemu $\Delta V/V = 3\varepsilon = 0$. Tvar Hookeova zákona (11) má tu výhodu, že obsahuje matice třetího řádu.

Některé pružné materiály (např. litina, pryž apod.) se však neřídí Hookeovým zákonem, a to ani v mezích pružného namáhání. Jsou sice pružné, nikoli však lineárně pružné. Při zkoušce tahem bychom pro ně mohli místo (8) psát "mocninový zákon"

$$\varepsilon = c_1 \sigma + c_2 \sigma^2 + c_3 \sigma^3 + \dots + c_n \sigma^n. \quad (12)$$

Tento zákon přejde v lineární vztah (8) pro malé hodnoty σ , kdy bude možno zanedbat nelineární členy na pravé straně rovnice (12). V tom případě budeme mít $n = 1$.

Nyní se budeme snažit zobecnit závislost (12) i pro tříosou napjatost. Protože tato napjatost je ve vztahu (11) zastoupena čtvercovou maticí, můžeme ji umocňovat. Předpokládáme, že materiál je nestlačitelný, takže postačí zobecnit jen první z rovnic (11). Napíšeme tedy

$$[\varepsilon_D] = c_1 [\sigma_D] + c_2 [\sigma_D]^2 + \dots + c_n [\sigma_D]^n. \quad (13)$$

Konstanty c_1 až c_n chceme určovat experimentálně. Ptáme se, kolik členů na pravé straně (13) bude nutno ponechat? V rovnici (12) to záleželo na přesnosti, s jakou chceme vystihnout skutečné chování materiálu. V rovnici (13) je však odpověď překvapivě jednoduchá: jen dva členy. Vzpomeneme-li totiž na Cayleyovu-Hamiltonovu větu, ihned vidíme, že polynom na pravé straně může být nejvýš druhého stupně, neboť každou mocninu $[G_D]^k$ vyššího stupně než druhého lze vyjádřit pomocí polynomu nejvýše druhého stupně (matice $[G_D]$ je totiž třetího řádu). Musí tedy být $n \leq 2$

$$[E_D] = c_1 [G_D] + c_2 [G_D]^2. \quad (13 a)$$

Zřejmě se $c_1 = 1/(2G)$, jak plyne ze srovnání s rovnicí (11). Rovnice (13) může mít tedy na pravé straně jen dva členy. Kdybychom to nevěděli, namáhali bychom se zbytečně s určováním konstant c_3, c_4, \dots, c_n .

1. příklad. Pro matici druhého řádu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

najdeme charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda) + 3 = 0,$$

$$\text{čili} \quad P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0. \quad (a)$$

Platí tedy též, že

$$P(A) = A^2 - 4A + 3I = 0. \quad (b)$$

Snadno se přesvědčíme, že skutečně platí

$$\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ -12 & -3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pak však také platí, že $A P(A) = 0$, odkud

$$A^3 = 4A^2 - 3A.$$

Protože podle (b) zároveň platí, že

$$A^2 = 4A - 3I,$$

vyjde

$$A^3 = 4A^2 - 3A = 16A - 12I - 3A = 13A - 12I. \quad (c)$$

Z poslední rovnice dostaneme opětým násobením maticí A

$$\begin{aligned} A^4 &= 13 A^2 - 12 A = \\ &= 52 A - 39 I - 12 A = 40 A - 39 I. \end{aligned} \quad (d)$$

Podobně

$$\begin{aligned} A^5 &= 40 A^2 - 39 I = \\ &= 160 A - 120 I - 39 A = 121 A - 120 I \end{aligned} \quad (e)$$

Tak bychom mohli pokračovat. Vlastní hodnoty plynou výpočtem z rovnice (a). Vyjde $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Lze se přesvědčit, že rovnice (c), (d) a (e) jsou rovněž splněny, dosadíme-li do nich λ_1 nebo λ_2 místo matice A . To můžeme využít k výpočtu libovolné mocniny A , např. A^6 . Zřejmě bude

$$A^6 = c_0 I + c_1 A. \quad (f)$$

Dosadíme-li za A jednou $\lambda_1 = 1$, podruhé $\lambda_2 = 3$, dostaneme soustavu rovnic pro c_0 , c_1

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 &= 1 \\ c_0 + 3c_1 &= 729. \end{aligned}$$

Odtud

$$c_0 = -363, \quad c_1 = 364.$$

Bude tedy

$$A^6 = 364 A - 363 I.$$

Snadno se přesvědčíme, že totéž plyne násobením z rovnice (e)

$$\begin{aligned} A^6 &= 121 A^2 - 120 A = 484 A - 363 I - 120 A = \\ &= 364 A - 363 I. \end{aligned}$$

2. ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC POMOCÍ MATIC

Zkusme nyní - zcela analogicky k funkcím reálné proměnné - uvažovat i o funkcích reálných matic. Platí-li např. pro exponenciální funkci reálné proměnné e^x Taylorova řada ^{*/}

^{*/} V tomto speciálním tvaru bývá též označována jako Maclaurinova řada.

Odtud

$$\begin{aligned}c_0 &= -\frac{e^3}{2} + \frac{3e}{2} \\c_1 &= \frac{e^3}{2} - \frac{e}{2}\end{aligned}\quad (c)$$

Dosadíme-li okrouhle $e^3 \doteq 20$, $e \doteq 2,72$, budeme mít $c_0 \doteq -5,9$, $c_1 \doteq 8,6$, takže

$$e^A = \begin{bmatrix} -5,9 & 0 \\ 0 & -5,9 \end{bmatrix} + 8,6 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,5 & 8,6 \\ -25,8 & -5,9 \end{bmatrix}\quad (d)$$

3. příklad. Pro matici

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

určíme $\sin A$. Z příslušné Taylorovy řady

$$\sin A = A - \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{5!} A^5 - \dots\quad (a)$$

zbudou opět jen dva členy

$$\sin A = c_0 I + c_1 A.\quad (b)$$

Z charakteristické rovnice $(5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 0$ vyjde $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$. Tedy

$$\begin{aligned}\sin 1 &= c_0 + c_1 \\ \sin 6 &= c_0 + 6c_1\end{aligned}\quad (c)$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{6 \sin 1 - \sin 6}{5} = 1,0657 \\ c_1 &= \frac{\sin 6 - \sin 1}{5} = -0,2242\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}\sin A &= 1,0657 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0,2242 \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,0553 & -0,8968 \\ -0,2242 & 0,6173 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (d)$$

4. příklad. Je dána soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_2 &= 2x_3 & \dot{x}_4 &= 0 \end{aligned}$$

s počátečními hodnotami

$$\begin{aligned} x_{10} &= 0 & x_{30} &= -1 \\ x_{20} &= 1 & x_{40} &= 1. \end{aligned}$$

Pro matici A soustavy $\dot{x} = Ax$, totiž pro

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

vypočteme exponenciální funkci t -násobku této matice ^{*}/

$$e^{At} = I + (At) + \frac{1}{2}(At)^2 + \frac{1}{6}(At)^3 \quad (b)$$

a dosazením z (a) dostaneme

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3/3 \\ 0 & 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

Pak podle (19)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3/3 \\ 0 & 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - t^2 + t^3/3 \\ 1 - 2t + t^2 \\ -1 + t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Snadno se přesvědčíme, že toto řešení splňuje všechny diferenciální rovnice i počáteční podmínky.

^{*}/ Matice A má šestinásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 0$. Výpočet funkce e^{At} je proto zvlášť jednoduchý (viz poznámku 1).

3. O ÚPLNOSTI A ŘEŠITELNOSTI SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

V druhé části semináře jsme ukázali, že problém o vlastních hodnotách

$$Ax = \lambda x \quad (20)$$

lze pro každou souměrnou (obecněji hermiteovskou) matici A řešit a že všechna řešení lze shrnout do maticového zápisu

$$AU = U\Lambda, \quad (21)$$

kde U je modální matice (její sloupce tvoří normované vlastní vektory) a Λ je diagonální matice, jejíž prvky jsou vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Matice U je ortogonální, takže $U^T = U^{-1}$. Transformací

$$\Lambda = U^T A U \quad (22)$$

převědeme matici A na diagonální tvar. Vzhledem k vlastnostem kvadratické plochy ^{*}/

$$x^T A x = 1 \quad (23)$$

říkáme, že (22) transformuje matici A do hlavních os. Násobením maticí U^T zprava však z (21) plyne také vztah

$$A = U\Lambda U^T, \quad (24)$$

podle něhož lze každou souměrnou matici rozložit do tří činitelů U, Λ, U^T .

V druhé části semináře jsme se zmínili o tom, že transformace matice do hlavních os (diagonalizace), popř. rozklad matice podle (24), jsou důležitými matematickými obraty. Abychom ukázali teoretický význam těchto transformací, použijeme je ke klasifikaci lineárních soustav algebraických rovnic z hlediska jejich úplnosti a řešitelnosti. Naše úvaha bude mít i praktický význam, neboť k takovým soustavám rovnic vedou i probírané numerické metody řešení úloh lineární mechaniky.

Podle rovnice (24) lze každou souměrnou matici vypočítat, známe-li všechny její vlastní hodnoty - tedy i matici Λ - a vlastní normované vektory - modální matici U . V některých případech, jak ihned ukážeme, však stačí znát mnohem méně. Je to dáno zvláštním postavením nulových vlastních hodnot a jim příslušných vlastních vektorů. Zabývejme se případem, kdy matice A má pouze ν vlastních hodnot různých od nuly, kdežto $n - \nu$ vlastních hodnot je nulových. Ve stejném pořadí k nim připojíme i normované vlastní vektory u_1, u_2, \dots, u_n :

^{*}/ Srovnej s rovnicí (3), kap. 1

nenulové vlastní hodnoty	nulové vlastní hodnoty
$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p$	$\lambda_{p+1} \lambda_{p+2} \dots \lambda_n$
$u_1 u_2 \dots u_p$	$u_{p+1} u_{p+2} \dots u_n$

Vlastní vektory jsme označili zjednodušeně u_i , $i = 1, 2, \dots, n$.
Nezaměňujme toto označení, které používáme jen v této kapitole, s označením jednotlivých posuvů v úlohách ze statiky.

Zavedeme-li submatice

$$\Lambda_\alpha = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_{p+1} & \lambda_{p+2} & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$U_\alpha = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{bmatrix}$$

$$U_\beta = \begin{bmatrix} u_{p+1} & u_{p+2} & \dots & u_n \end{bmatrix},$$

budeme moci (24) zapsat poněkud podrobněji takto:

$$\begin{aligned} [A] &= [U_\alpha \mid U_\beta] \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_\alpha^T \\ U_\beta^T \end{bmatrix} = \\ &= [U_\alpha \mid U_\beta] \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_\alpha & U_\alpha^T \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = U_\alpha \Lambda_\alpha U_\alpha^T. \end{aligned} \quad (25)$$

Dospěli jsme k překvapujícímu závěru: matici A lze sestavit, aniž známe vlastní vektory U_β příslušné nulovým vlastním hodnotám, tedy aniž známe "nulové osy" příslušné kvadriky. Matice A existenci nulových os "ignoruje". Submatice U_α je obecně semiortogonální, neboť

$$U_\alpha^T U_\alpha = I, \quad U_\alpha U_\alpha^T \neq I.$$

Objasnění této skutečnosti poskytne názorně 5. příklad, který uvádíme na konci této kapitoly.

Obecná soustava lineárních algebraických rovnic nemusí mít stejný počet rovnic jako neznámých. Matice A tedy může být obdélníková. Ke každé takové soustavě

$$Ax = b \quad (26)$$

definujeme adjungovanou soustavu

$$A^T y = c. \quad (27)$$

Soustava bude samoadjungovaná, bude-li $A^T = A$, což platí pro souměrné matice. Ty pak samozřejmě musí být čtvercové.

Zabývejme se nejprve vlastnostmi samoadjungované soustavy, tj. soustavy se souměrnou maticí. Transformací

$$x = U\xi \quad \text{t} = U\beta$$

dostaneme z (26)

$$AU\xi = U\beta,$$

čili - po vynásobení transponovanou modální maticí U^T zleva -

$$\Lambda \xi = \beta. \quad (28)$$

Přitom jsme použili vztah (22) a podmínky ortogonality $U^T U = I$. Z rovnice (28) ihned vidíme: není-li žádná vlastní hodnota nulová, lze soustavu řešit a řešením je vektor

$$\xi = \Lambda^{-1} \beta, \quad (29)$$

kde $\Lambda^{-1} = [\lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \dots \lambda_n^{-1}]$ je diagonální maticí převrácených vlastních hodnot. Co se stane, vymizí-li některá vlastní hodnota (např. $\lambda_i = 0$)? V tom případě bude i -tý řádek soustavy (28) znít

$$\lambda_i \xi_i = \beta_i. \quad (30)$$

Tato rovnice je "řešitelná" jen tehdy, je-li také $\beta_i = 0$. Velikost neznámé ξ_i zůstává v tomto případě neurčena, může to být jakákoliv konstanta. Protože β_i je i -tou složkou vektoru t v soustavě hlavních os příslušné kvadriky, platí

$$\beta_i = u_i^T \text{t}. \quad (31)$$

Abychom to poznali, stačí rozepsat po řádcích vztah $\beta = U^T \text{t}$. Vlastní vektor u_i^T je i -tým řádkem matice U^T . Vzhledem k rovnici (31) tedy musí platit tato podmínka řešitelnosti

$$u_i^T \text{t} = 0. \quad (32)$$

To znamená, že vektor β je kolmý k i -té hlavní ose. Hlavní osy jsou definovány rovnicemi $Au_j = \lambda_j u_j$, a protože pro $j=i$ je $\lambda_j = 0$, musí být $Au_i = 0$. To musí platit pro každou nulovou hodnotu. Je to všechno, co musí platit, takže nutná a postačující podmínka řešitelnosti samoadjungované lineární soustavy algebraických rovnic je kolmost vektoru pravých stran ke každému lineárně nezávislému řešení homogenní soustavy $Ax = 0$. Rovnice (32) je tedy "rovnici kompatibility" dané soustavy.

Řekli jsme, že neznámou ξ_i nelze z rovnice (30) jednoznačně určit, je-li $\lambda_i = 0$, $\beta_i = 0$. Řešení ξ_i není tedy jediné. Co to znamená pro původní soustavu? Inverzní transformace je popsána rovnicemi

$$\xi = U^T x \quad \beta = U^T b.$$

Pro i -tý řádek

$$\xi_i = u_i^T x = K, \quad (33)$$

kde K může být libovolná konstanta. Rovnici (33) lze splnit, zvolíme-li $x = K u_i$ (neboť $u_i^T u_i = 1$ pro normované vlastní vektory). To tedy znamená, že ke každému řešení dané lineární soustavy lze přidat násobek nulové hlavní osy, tj. násobek vlastního vektoru příslušného nulové vlastní hodnotě. Existuje-li několik takových vlastních hodnot, můžeme přidat libovolnou lineární kombinaci příslušných nulových hlavních os a stále budeme mít platné řešení dané soustavy. Jsou to však všechny "stupně volnosti" dané soustavy.

Libovolná lineární kombinace hlavních os příslušných nulovým vlastním hodnotám znamená libovolné řešení homogenní soustavy $Ax = 0$. Proto platí věta: obecné řešení kompatibilní samoadjungované soustavy se získá přičtením libovolného řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ k jakémukoli partikulárnímu řešení dané soustavy $Ax = b$.

Vraťme se nyní k obecné soustavě n rovnic o m neznámých (26). Abychom mohli využít právě odvozené poznatky o řešitelnosti samoadjungované soustavy, použijeme zvláštní obrat. K dané soustavě (26) připojíme adjungovanou soustavu (27) předpisem

$$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \left\{ \begin{array}{c|c} \overset{n}{0} & \overset{m}{A} \\ \hline A^T & 0 \end{array} \right\} \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ c \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Tím jsme z původní obecné soustavy vytvořili samoadjungovanou, neboť čtvercová matice na levé straně (34) je souměrná. Doplácíme na tuto výhodu tím, že se zvětšil počet neznámých na $n+m$, což však pro rozbor

vlastností dané soustavy není podstatné. Čtvercové matici podle (34) přísluší problém o vlastních hodnotách

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix} \quad (35)$$

tedy

$$\begin{aligned} Au &= \lambda v \\ A^T v &= \lambda u \end{aligned} \quad (36)$$

Víme už, že tento problém lze vždy řešit, neboť jde o souměrnou matici (ačkoli matice A souměrná není). Dostaneme tak $m + m$ vzájemně kolmých vektorů pro $m + m$ vlastních hodnot, (jež nemusí nutně být všechny navzájem různé). Podmínka ortogonalitly vlastních vektorů dává pro $i \neq k$

$$[v_i^T \ u_i^T] \begin{Bmatrix} v_k \\ u_k \end{Bmatrix} = 0 = v_i^T v_k + u_i^T u_k \quad (37)$$

Protože ke každému řešení (v, u, λ) existuje i řešení $(v, -u, -\lambda)$, dostaneme pro λ_i a $-\lambda_k$

$$v_i^T v_k - u_i^T u_k = 0 \quad (38)$$

Porovnáním (37) a (38) dospějeme k závěru, že platí

$$u_i^T u_k = 0 \quad v_i^T v_k = 0 \quad (i \neq k) \quad (39)$$

Jde tedy o dvě soustavy, z nichž každá je ortogonální sama o sobě. Z rovnic (36) lze vyloučit buď u nebo v (násobením zleva první rovnice maticí A^T nebo druhé maticí A)

$$\begin{aligned} A^T A u &= \lambda^2 u \\ A A^T v &= \lambda^2 v \end{aligned} \quad (40)$$

Rovnice (40) definují dvě samostatné úlohy o vlastních hodnotách. Z první dostaneme m vlastních vektorů u_j , z druhé n vlastních vektorů v_i . Sestavíme z nich modální matice

$$\begin{aligned} U &= [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m] \quad (m \times m) \\ V &= [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \quad (n \times n) \end{aligned} \quad (41)$$

a budeme mít všechna řešení úlohy (36) shrnuta do tvaru

$$\begin{aligned} AU &= V \Lambda \\ A^T V &= U \Lambda^T \end{aligned} \quad (42)$$

Zde Λ značí obélníkovou matici $n \times m$, v níž na příčce vycházející z levého horního rohu jsou kladné vlastní hodnoty λ_i , jež dostaneme jako odmocniny vlastních hodnot z rovnic (40). Není-li i -tá vlastní hodnota nulová, jsou příslušné vlastní vektory u_i, v_i vázány vztahy (36) a vyskytují se tedy vždy ve dvojicích. Pro nulové vlastní hodnoty $\lambda_i = 0$ dávají soustavy rovnic $Au_i = 0, A^T v_i = 0$ vzájemně nezávislé vlastní vektory u_i, v_i , jež se vyskytují samostatně ve vlastních vektorech $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ u_i \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} v_i \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$ soustavy (35).

Nechť existuje p nenulových hodnot λ_i , pro něž jsou vektory u_i, v_i spárovány vztahy (36). Protože ke každému řešení (v_i, u_i, λ_i) existuje též řešení $(v_i, -u_i, -\lambda_i)$, máme celkem $2p$ párů vlastních vektorů u_i, v_i . Úloha $A^T A u = \lambda^2 u$ poskytuje m vzájemně nezávislých os (vlastních vektorů), takže počet nezávislých řešení rovnice $Au = 0$ musí být $m - p$. Podobně počet nezávislých řešení soustavy $A^T v = 0$ musí být $n - p$. Pro nulové vlastní hodnoty tedy existuje

$$(m - p) + (n - p) = m + n - 2p$$

lineárně nezávislých vlastních vektorů. Spolu s $2p$ vlastními vektory příslušnými nenulovým vlastním hodnotám tak dostaneme $m + n$ vlastních vektorů, tedy plný počet odpovídající úloze (35).

Doplněním dané úlohy úlohou adjungovanou podle (34) jsme převedli danou úlohu, jež může být i neúplná nebo přeurčená, na soustavu se souměrnou čtvercovou maticí, která má vždy plný počet vlastních vektorů. Podmínka řešitelnosti se proto formuluje stejně jako u samoadjungovaných úloh. Sestavíme vektory

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ u_i \end{smallmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} v_i \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$$

příslušné nulovým vlastním hodnotám, a napíšeme podmínky kolmosti pravých stran (34) k těmto vektorům (k nulovým osám)

$$[0 \mid u_i^T] \left\{ \begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix} \right\} = 0 \quad [v_i^T \mid 0] \left\{ \begin{smallmatrix} b \\ c \end{smallmatrix} \right\} = 0,$$

čili

$$\begin{aligned} [u_i]^T \{c\} &= 0 & [v_i]^T \{b\} &= 0 \\ i &= p+1, p+2, \dots, m & i &= p+1, p+2, \dots, n. \end{aligned} \quad (43)$$

Druhá z rovnic (43) udává podmínku, jaké musí vyhovět pravá strana $\{b\}$ dané soustavy $[A]\{x\} = \{b\}$, má-li být soustava řešitelná. Slovy lze tuto podmínku vyjádřit takto: nutná a postačující podmínka řešitelnosti libovolné soustavy m lineárních rovnic o m neznámých je kolmost pravé strany ke všem lineárně nezávislým řešením adjungované homogenní soustavy.

Úplné řešení soustavy $Ax = b$ pak získáme přičtením libovolného řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ k jakémukoli partikulárnímu řešení dané soustavy. Číslo $m - \rho$, které udává počet lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, vyjadřuje tedy "stupeň neúplnosti" soustavy (počet stupňů volnosti). Číslo ρ souhlasí s hodnotou matice. Konečně číslo $m - \rho$, které udává počet lineárně nezávislých řešení adjungované homogenní úlohy $A^T y = 0$, udává počet podmínek řešitelnosti (rovnic kompatibility), je to tedy "stupeň přeúřčenosti" dané soustavy. Podrobnosti ozřejmí příklady na konci této kapitoly.

Z rovnic (42) plyne vzhledem k ortogonalitě modální matice U

$$A = V \Lambda U^T.$$

Tuto rovnici můžeme rozepsat poněkud podrobněji, oddělíme nenulové a nulové osy v modálních maticích

$$[A] = [V_\alpha \mid V_\beta] \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} U_\alpha^T \\ \hline U_\beta^T \end{array} \right\}. \quad (44)$$

Rozepsáním pravé strany dostaneme rozklad

$$A = V_\alpha \Lambda_\alpha U_\alpha^T. \quad (45)$$

V této rovnici jsou matice U_α , V_α semiortogonální. Z poslední rovnice plyne, že k sestavení matice A nepotřebujeme znát nulové osy. U matice A z příkladu 8 se na konstrukci matice aktivně podílejí jen osy u_1 , u_2 , v_1 , v_2 . Matice A tedy přímo komunikuje jen s těmito osami, "osvětluje" jenom tyto osy, a úplně ignoruje nulové osy u_3 , u_4 , u_5 , v_3 , v_4 , které zůstávají "ve tmě".

Matice A je tedy úplně určena pouhými nenulovými vlastními hodnotami a k nim příslušnými "osvětlenými" hlavními osami. Nulové osy vůbec nepotřebujeme znát ke konstrukci matice. Avšak tyto nulové osy, které zůstávají "ve tmě", rozhodují o vlastnostech soustavy (o její řešitelnosti, popřípadě o neúplnosti).

Rovná-li se $\rho = m = n$, jsou všechny vlastní hodnoty různé od nuly. V tom případě $U_\alpha = U$, $V_\alpha = V$; tyto matice jsou ortogonální. U souměrných matic je mimoto $U = V$. V příkladech, které uvádíme dále, oddělujeme "osvětlené"

hlavní osy od "neosvětlených" dvojitou čarou; osvětlený prostor tvoří vektory vlevo od této čáry.

K rovnici (45) připojíme nyní rovnici obdobnou; sestrojíme matici

$$B = U_\alpha \Lambda_\alpha^{-1} V_\alpha^T \quad (46)$$

a budeme zkoumat její význam. Matici B lze vždy sestrojít, neboť diagonální matice Λ_α obsahuje jen nenulové vlastní hodnoty a její inverze tedy existuje. Můžeme se přesvědčit, že platí

$$AB = V_\alpha \Lambda_\alpha U_\alpha^T U_\alpha \Lambda_\alpha^{-1} V_\alpha^T = V_\alpha V_\alpha^T \quad (47)$$

$$BA = U_\alpha \Lambda_\alpha^{-1} V_\alpha^T V_\alpha \Lambda_\alpha U_\alpha^T = U_\alpha U_\alpha^T. \quad (48)$$

Nechť je nyní dán libovolný vektor y_α z prostoru V_α , čímž rozumíme lineární kombinaci vlastních vektorů v_i příslušných nenulovým vlastním hodnotám. Je-li η libovolný vektor (složený z libovolných ρ konstant), je

$$y_\alpha = V_\alpha \eta. \quad (49)$$

Násobením zleva součinem AB dostaneme

$$AB y_\alpha = V_\alpha V_\alpha^T y_\alpha = V_\alpha V_\alpha^T V_\alpha \eta = V_\alpha \eta = y_\alpha. \quad (50)$$

Součin AB tedy transformuje vektor z prostoru V_α tak, že jej ponechává beze změny. Obdobně lze dokázat, že součin BA ponechává beze změny vektor z prostoru U_α . To jsou však právě prostory osvětlené maticí A . Kdyby $m = n = \rho$, dostali bychom $AB = BA = I$. Součin AB , popř. BA by ponechával beze změny každý vektor a matice B by byla k matici A inverzní. Nyní však klademe na tyto součiny omezenější požadavek, aby totiž ponechávaly beze změny alespoň vektory z osvětlených prostorů. Matice B pak získává, jak ještě ukážeme, význam přírozené inverzní matice.

Máme-li obecnou soustavu n rovnic o m neznámých

$$Ax = \zeta, \quad (51)$$

dostaneme násobením maticí B zleva rovnicí

$$x = B\zeta \quad (52)$$

jen tehdy, platí-li $AB\zeta = \zeta$, tj. patří-li vektor ζ cele do osvětleného prostoru V_α . To znamená, že ζ nesmí mít žádnou projekci do prostoru V_β , čili že $V_\beta^T \zeta = 0$. To je však soustava podmínek kompatibility (43).

V matici B podle (46) tedy poznáváme přirozenou inverzní matici, která dává řešení libovolné soustavy (51) ve tvaru (52). Platí-li rovnice kompatibility (43), platí řešení (52) přesně. Je-li soustava přeuročená a podmínky kompatibility nejsou splněny, je řešení (52) jen přibližné; minimalizuje čtverec "vzdálenosti" $R^2 = |Ax - \xi|^2$. To jsme ukázali v druhé části semináře.

Je-li soustava neúplná, dává matice B rovněž jediné "přirozené" řešení, odvozené z "osvětleného" prostoru U_α . K němu je třeba připočíst libovolnou lineární kombinaci "neosvětlených" nulových vektorů z prostoru U_β , do jejichž "kompetence" ani matice A , ani matice B nezasahují.

Z uvedeného výkladu je zřejmé zvláštní postavení nulových hlavních os. S využitím transformace k hlavním osám matice jsme dospěli ke skvělému zobecnění dřívějších poznatků a ke klasifikaci lineárních algebraických soustav podle stupňů jejich neúplnosti a přeuročenosti. Význam této transformace vysvitne i z výkladu v příští kapitole, věnované rozboru chyb numerického řešení a otázkám numerické stability.

5. příklad. Matici $A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ přísluší vlastní hodnoty a vlastní vektory podle tohoto přehledu:

$$\begin{array}{c|c} \lambda_1 = 13 & \lambda_2 = 0 \\ \hline 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{array}$$

takže modální matice je

$$U = [u_\alpha = u_1, u_\beta = u_2] = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Podle (25)

$$[A] = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} [13] \frac{1}{\sqrt{13}} [3 \quad 2] = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} [3 \quad 2] = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

K výpočtu A tedy skutečně nepotřebujeme znát nulovou hlavní osu u_β . Vysvětlení vyplyne z geometrického znázornění. Příslušná kvadratika

$$x^T A x = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 = 1$$

se skládá ze dvou rovnoběžek, jak se přesvědčíme rozkladem

$$9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 1 = (3x_1 + 2x_2 - 1)(3x_1 + 2x_2 + 1) = 0.$$

Je znázorněna na obr. 1. Jsou tam též zakresleny jednotkové vlastní vektory

$$u_\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad u_\beta = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{Bmatrix} -2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Vzdálenost obou přímek od počátku je $1/\sqrt{13}$, což je skutečně $1/\sqrt{\lambda_1}$. Je to vedlejší poloosa zdegenerované elipsy, jejíž hlavní poloosa je nekonečně dlouhá, neboť $\lambda_2 = 0$. Je zřejmé, že tato hlavní poloosa nepřináší žádnou informaci o tvaru kvadriky, neboť obě rovnoběžky jsou zcela určeny hodnotou λ_1 a vektorem u_α .

Transformací (22) vyjde

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 39 & 26 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. příklad. Je dána "soustava rovnic", skládající se z jediné rovnice o dvou neznámých $3x_1 + 4x_2 = 4$. V tomto případě $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Danou soustavu doplníme na samoadjungovanou podle schématu (34). Matici

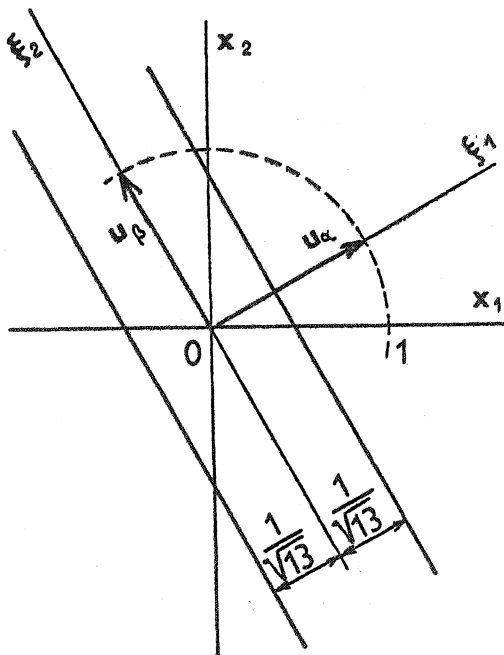
$$\left[\begin{array}{c|cc} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

přísluší charakteristická rovnice

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 3 & 4 \\ 3 & -\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 25\lambda = 0$$

a vlastní hodnoty $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = +5$, $\lambda_3 = 0$.

Ze soustavy $Ax_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2, 3$) vypočteme vlastní vektory $\{x_i\} = \left\{ \begin{matrix} v_i \\ u_i \end{matrix} \right\}$ normované podmínkami $u_i^T u_i = 1$, $v_i^T v_i = 1$. Vyjde



Obr. 1

i		1	2	3
	λ_i	-5	5	0
v_i	x_i	1	1	0
u_i	x_2	-3/5	3/5	4/5
	x_3	-4/5	4/5	-3/5

Počítáme-li z rovnic (40), tedy s maticemi

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}, \quad A A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [25],$$

dostaneme v prvním případě vlastní hodnoty $\lambda_1^2 = 25$, $\lambda_3^2 = 0$, v druhém $\lambda_2^2 = 25$; k nim jsou přiřazeny tyto vlastní vektory:

i	2	3
λ_i^2	25	0
u_i	3/5	4/5
	4/5	-3/5

i	2
λ_i^2	25
v_i	1

Obě poslední schémata lze shrnout do jednoho:

$\lambda = 5$	$\lambda = 0$
v_1	
1	
u_1	u_2
3/5	4/5
4/5	-3/5

Toto uspořádání budeme používat i v dalších příkladech. Dvojitá svíslá čára odděluje "osvětlené" hlavní osy v_1 , u_1 od "neosvětlené" osy u_2 .

Můžeme se přesvědčit, že rovnice (36) jsou splněny. Matice v rovnicích (42) jsou

$$U = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix} \quad V = [1]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

V daném případě $\nu = 1$, $m = 2$, $n = 1$. Soustava má tedy jeden stupeň volnosti a žádný stupeň přeurčenosti.

U dané matice neexistuje zřejmě žádná nulová osa U_3 , neboť pro vlastní hodnotu $\lambda_3 = 0$ dostáváme pouze triviální řešení $U_3 = 0$. Rovnice kompatibility $U_3^T U$ nemá v tomto případě smysl, neboť je splněna pro jakoukoli pravou stranu U . Neexistuje tedy žádná rovnice kompatibility, jež by omezovala volnost ve volbě pravé strany. Úplné řešení rovnice $3x_1 + 4x_2 = 4$ se skládá z partikulárního řešení, např. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, a z libovolného řešení homogenní úlohy $3x_1 + 4x_2 = 0$. Vyjde

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + K \begin{Bmatrix} 4 \\ -3 \end{Bmatrix}, \quad K \text{ libovolné.}$$

Zvolené partikulární řešení však není přirozeným řešením odvozeným z osvětlených hlavních os. Pomocí přirozené inverzní matice

$$B = U_\alpha \Lambda_\alpha^{-1} V_\alpha^T = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} [1/5] [1] = \begin{bmatrix} 3/25 \\ 4/25 \end{bmatrix}$$

vyjde jednoznačně přirozené řešení

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = B U = \begin{bmatrix} 3/25 \\ 4/25 \end{bmatrix} \{4\} = \begin{Bmatrix} 12/25 \\ 16/25 \end{Bmatrix}.$$

Úplné řešení pak získáme tak, že k přirozenému řešení přičteme libovolný násobek nulové osy u_2

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12/25 \\ 16/25 \end{Bmatrix} + K' \begin{Bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{Bmatrix}.$$

Zvolíme-li ve zvláštním případě $K' = -3/5$, dostaneme řešení, jež jsme dříve zvolili za partikulární. Oba způsoby zápisu úplného řešení jsou rovnocenné.

7. příklad. Pro matici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

dostaneme dvojnásobnou nulovou vlastní hodnotu. Příslušné hlavní osy úlohy (35) jsou

$\lambda = 2$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0$
v_1	v_2	
0	1	
1	0	
u_1	u_2	u_3
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Zde $\mu = 1$, $\nu = 2$, $m = 3$. Soustava $Ax = b$ má proto dva stupně volnosti a zároveň jeden stupeň přeuročenessi. Rovnice kompatibility zní $u_1 = 0$, tj. první rovnice musí mít na pravé straně nulu, nemá-li vzniknout spor.

"Osvětlen" je pouze prostor vlevo od dvojité svislé čáry.

8. příklad. Zvolíme nyní poněkud méně "průhlednou" soustavu

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}$$

Nejprve najdeme nulové osy, jež nebudeme normovat ani ortogonalizovat (u nulových os to není nutné). Zkusmo najdeme tři nezávislá řešení homogenní soustavy $Au = 0$ a dvě nezávislá řešení adjungované homogenní soustavy $A^T v = 0$. Dostaneme např. vektory, označené v tabulce u_3, u_4, u_5, v_3, v_4 . Soustava $AA^T v = \lambda^2 v$ má matici čtvrtého řádu; abychom ji nemuseli přímo řešit, využijeme ortogonalitu hledaných os v_1, v_2 k nalezeným nulovým osám v_3, v_4 . Tak se nám podaří eliminovat dvě proměnné. Vznikne soustava s maticí druhého řádu, dávající kvadratickou rovnici pro λ^2 . Nakonec dostaneme tato řešení (hodnoty v tabulce jsou zaokrouhleny):

$\lambda = 15,435$		$\lambda = 6,911$		$\lambda = 0$		
v_1	v_2	v_3	v_4			
0,287	-0,467	1	2			
0,157	0,525	2	1			
0,600	0,583	-1	0			
0,730	-0,408	0	-1			
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5		
0,439	-0,017	-2	6	14		
0,338	-0,776	3	-3	-1		
-0,017	0,287	8	0	0		
0,406	0,557	0	-4	0		
0,727	0,067	0	0	-8		

V tomto případě $p = 2$, $m = 5$, $n = 4$. Proto existují $m-p = 3$ stupně neúplnosti a $n-p = 2$ stupně přeúplnosti, tj. dvě rovnice kompatibility. Nulové vlastní hodnotě přísluší $m + n - 2p = 5$ vlastních vektorů, lineárně nezávislých.

Rovnice kompatibility jsou

$$v_3^T b = 0 \quad v_4^T b = 0,$$

čili

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2 - b_3 &= 0 \\ 2b_1 + b_2 - b_4 &= 0. \end{aligned}$$

Pravá strana soustavy rovnic tedy nemůže být volena libovolně, nemají-li si rovnice odporovat; poslední rovnice tuto volbu omezují. Dále existují tři stupně volnosti, neboť ke každému partikulárnímu řešení dané soustavy lze připočítat vektor

$$\{x\} = K_1 \{u_3\} + K_2 \{u_4\} + K_3 \{u_5\},$$

kde K_1 až K_3 jsou libovolné konstanty. Výsledek bude rovněž řešením dané soustavy.

Pro doplnění uvádíme ještě tvar matice Λ v rovnicích (42):

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cc|ccc} 15,435 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,911 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ostatní matice v téže rovnici jsou

$$U = [u_1, u_2 : u_3, u_4, u_5] = [U_\alpha : U_\beta]$$

$$V = [v_1, v_2 : v_3, v_4] = [V_\alpha : V_\beta]$$

Zde jsme oddělili nulové hlavní osy obdobně jako v rovnici (25).

4. ROZBOR CHYB ŘEŠENÍ LINEÁRNÍ SOUSTAVY A NUMERICKÁ STABILITA

Tuto kapitolu začneme vylíčením nepříjemné příhody. Inženýr potřebuje řešit lineární soustavu algebraických rovnic. Má m rovnic o m neznámých

$$Ax = b \quad (53)$$

a determinant soustavy $|A|$ je různý od nuly. Hodnota matice soustavy i rozšířené matice je stejná a rovná se m . Je tedy jisté, že řešení existuje a je jediné. Je-li determinant $|A|$ různý od nuly, nemohou existovat žádné nulové vlastní hodnoty, takže $\mu = \nu = m$. Soustava nemá žádný stupeň volnosti, ani není přeuročená. Inženýr proto s důvěrou svěřil řešení výpočetnímu středisku a očekává výsledek. Počítač pracuje s přesností mnohem větší, než jakou může inženýr potřebovat, výsledky přezkouší a dodá zpět inženýrovi, který úlohu zadal. Ten však není spokojen. Shledá, že některé hodnoty, jež musí být kladné, vyšly jako záporné; hodnota, která má podle odhadu mít velikost několika desítek, vyšla přes dvacet tisíc. Inženýr je velmi mrzutý, neboť není schopen nalézt chybu ani v dané soustavě, ani v jejím řešení, a přece je jisté, že výsledek je zcela falešný. Budeme nyní zkoumat, co může být příčinou takové neshody.

Předpokládejme, že známe s velkou přesností matici A , kdežto pravou stranu b známe s přesností relativně menší, avšak stále ještě z technického hlediska přijatelnou, např. s přesností 0,5%. Chyby tohoto vektoru mohou být způsobeny např. nepřesností měření, jde-li o hodnoty získané experimentálně nebo odměřením z výkresu. Pak ovšem místo soustavy (53) řešíme de facto jinou soustavu

$$A\tilde{x} = \tilde{b}, \quad (54)$$

kde

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + \xi \\ \tilde{b} &= b + \beta.\end{aligned}$$

Pomocí (53) vyjde z (54)

$$A \xi = \beta. \quad (55)$$

Příčina velké chyby je skryta v transformaci (55). Nemáme totiž nijak zaručeno, že matice A^{-1} transformuje vektor malých chyb β opět ve vektor malých chyb ξ . Naopak, snadno se stává, že malému β odpovídá velké ξ . Čím to může být způsobeno? Abychom to prozkoumali, zavedeme transformace

$$\begin{aligned}\beta &= V \beta', \\ \xi &= U \xi',\end{aligned} \quad (56)$$

jimiž naše soustava (55) přejde v diagonální tvar

$$\Lambda \xi' = \beta'. \quad (57)$$

Matice U a V jsou nyní $m \times m$, neboť stupeň neúplnosti i pře-určenosti je nulový.

Teoreticky je důležité, že se žádná vlastní hodnota λ_i nerovná nule, takže soustavu (57) lze řešit. Prakticky však každá vlastní hodnota blízká nule způsobí velký vzrůst chyby výsledku, neboť pro i -tý řádek platí, že

$$\xi'_i = \frac{1}{\lambda_i} \beta'_i \quad (58)$$

a pro $|\lambda_i| \ll 1$ je $|\xi'_i| \gg |\beta'_i|$. Protože transformace (56) jsou ortogonální, tj. ponechávají délky beze změny, je též $|\xi_i| \gg |\beta_i|$. Stačí, aby jediná vlastní hodnota byla blízká nule, a řešení může být i malou chybou vstupních dat podstatně znehodnoceno. Je také jasné, že zvětšení chyby předepisuje inverzní matice A^{-1} , byť přesně vypočtená, neboť dává na příslušné ose tak velké činitele, že i malá chyba vstupních dat zkazí celý výsledek.

Velké matice se zpravidla neinvertují, není-li to nutné. Místo toho se celá soustava řeší iterací (postupnými aproximacemi), které mají tu vlastnost, že dříve zpřesňují výsledky pomocí velkých vlastních hodnot než malých, takže řešení, které mohlo být zpočátku přijatelné, se dalším "zpřesňováním" zkazí, ztratí numerickou stabilitu.

Kritériem numerické stability se tak stává poměr

$$\nu = \frac{|\lambda|_{\max}}{|\lambda|_{\min}}. \quad (59)$$

Nemůže to být velikost determinantu $|A|$, jak by se mohl někdo domnívat, neboť tuto velikost lze změnit např. násobením matic A a U stejným číslem, aniž se změní vlastnosti soustavy.

Co se děje, necháme-li některou z vlastních hodnot - např. λ_i - konvergovat k nule? V tom případě dostává neznámá ξ_i v soustavě (57) "nulovou váhu". Vzhledem k transformaci (56) poznáváme, že nulovou váhu má pak i -tý řádek v součinu $U^T \xi$, tedy

$$\xi_i = u_i^T \xi \quad (60)$$

To znamená, že v našem řešení ztrácí tento součin určitost. Lineární kombinace $u_{i_1} \xi_1 + u_{i_2} \xi_2 + \dots + u_{i_m} \xi_m$ nabývá buď nekonečně velké (a tedy neurčité) hodnoty, nebo musí být $\beta_i = 0$ (v tom případě dává (58) neurčitý výraz). Informace z řádku (60) tak ztrácí význam. Tato lineární kombinace se prostě v naší soustavě přestane vyskytovat. Soustava je čtvercová jen zdánlivě, neboť lineární kombinace (60) z ní mizí; začne se jevit jako soustava "skoro obdélníková", pokud je kombinace (60) zastoupena slabě, a jako obdélníková $n \times m$, $n < m$, ztratí-li se tato informace úplně. Vektor vlastních hodnot u_i se tak stává nulovou osou, jejíž prostor se postupně "zatemňuje". Tak vzniká velká "volnost" ve výsledcích řešení, která je příčinou ztráty numerické stability.

9. příklad. Je dána soustava

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

Matice soustavy je totožná s maticí z příkladu 5. Po transformaci

$$\xi = U^T x \quad \beta = U^T b$$

dostaneme soustavu $\Lambda \xi = \beta$

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3x_1 + 2x_2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2x_1 + 3x_2}{\sqrt{13}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3b_1 + 2b_2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2b_1 + 3b_2}{\sqrt{13}} \end{Bmatrix}$$

První řádek s nenulovou vlastní hodnotou dává řešení

$$\xi_1 = \frac{3x_1 + 2x_2}{\sqrt{13}} = \frac{3b_1 + 2b_2}{13\sqrt{13}}$$

a druhý řádek s nulovou vlastní hodnotou dává rovnici kompatibility

$$\frac{-2b_1 + 3b_2}{\sqrt{13}} = 0$$

Je to rovnice $v_2^T \zeta = u_2^T \zeta$; vzhledem k souměrnosti matice platí, že $V = U$.
Hodnota

$$\xi_2 = \frac{-2x_1 + 3x_2}{\sqrt{13}}$$

se z řešení ztratila.

Kdyby druhá vlastní hodnota ještě nebyla nulová, ale v limitě se k nule blížila, a kdyby nebyla splněna podmínka kompatibility, rostlo by ξ_2 v limitě nad všechny meze. Při výpočtu se zaokrouhlenými čísly bychom "splnili" obě nekompatibilní rovnice libovolnou volbou $\xi_2 = C$, pokud $|C| \gg |\beta_1|$.

10. příklad. Ze soustavy $Ax = \zeta$ s maticí z příkladu 8 se ztratí tyto lineární kombinace neznámých:

$$u_3^T x = -2x_1 + 3x_2 + 8x_3$$

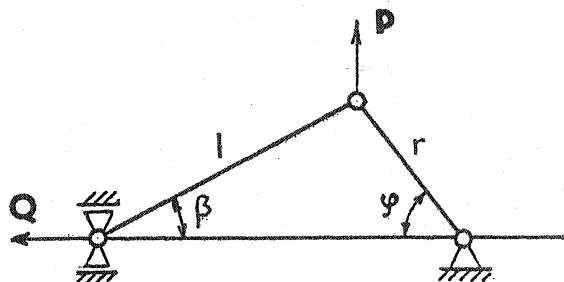
$$u_4^T x = 6x_1 - 3x_2 - 4x_4$$

$$u_5^T x = 14x_1 - x_2 - 8x_5$$

Nedostaneme je (a ani jejich vzájemné lineární kombinace) žádnou kombinací řádků dané soustavy.

5. ROZDÍL MEZI VEKTOROVÝM A ANALYTICKÝM POJETÍM MECHANIKY

Uvedeme nejprve jednoduchý příklad. Hledejme rovnovážnou polohu klikového mechanismu, zatíženého silou Q . Ptáme se, jak velká musí být síla P , při níž se mechanismus ustaví v rovnovážné poloze. Hmotnost mechanismu lze zanedbat. Klika svírá v rovnovážné poloze s osou mechanismu úhel φ (obr. 2). Jsou možné dvě metody řešení.



Obr. 2

1. Jednotlivé členy mechanismu "uvolníme" a jejich vzájemné působení nahradíme reakcemi (obr. 3). Pro jednotlivé členy napíšeme rovnice rovnováhy

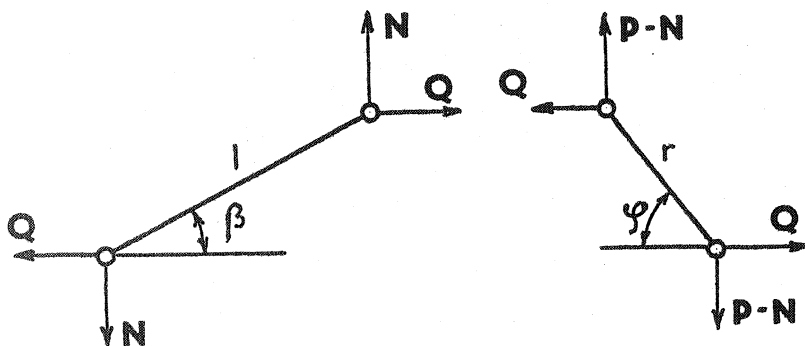
$$\begin{aligned} P - N &= Q \operatorname{tg} \varphi \\ N &= Q \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (61)$$

Z nich plyne hledaná rovnice

$$P = Q (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \beta), \quad (62)$$

příčměž

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}$$



Obr. 3

2. Využijeme Lagrangeovův princip virtuálních prací. Klíče udělíme z rovnovážné polohy "virtuální" výchylku $\delta\varphi$ a napíšeme, že celková práce δA , kterou vykonají síly P a Q během takové infinitezimální výchylky, je nulová. Protože působí síla Q se posune o $-r(\sin\varphi + \operatorname{tg}\beta \cos\varphi)\delta\varphi$, kdežto svislý posuv klikového čepu činí $r \cos\varphi d\varphi$, dostaneme rovnici

$$\delta A = Pr \cos\varphi \delta\varphi - Qr(\sin\varphi + \operatorname{tg}\beta \cos\varphi) \delta\varphi = 0, \quad (63)$$

z níž ihned plyne vztah (62).

Jaký je rozdíl mezi oběma postupy? První postup se zakládá na Newtonově mechanice. Síly, které jsme do výpočtu zavedli, vyhovují zákonu o akci a reakci a dávají na klíče i na ojnici nulovou výslednici, neboť zrychlení těchto členů je za rovnováhy nulové. Pro každé těleso tedy musí platit tři podmínky rovnováhy (z nichž dvě jsme respektovali již při kreslení sil na obr. 3). V druhém případě jsme vystačili s jedinou podmínkou $\delta A = 0$ a dostali jsme též výsledek. Jak je to možné?

Je to tím, že v prvním případě formulujeme tři rovnice rovnováhy pro vektory sil, kdežto v druhém případě formulujeme obecný princip pro virtuální práci. Variace jediné skalární veličiny A má v sobě všechny potřebné informace k řešení úlohy, k němuž bychom jinak potřebovali šest rovnic rovnováhy pro vektory sil.

Newtonův přístup má nevýhodu této větší pracnosti; poskytuje za to více veličin, než kolik potřebujeme. Dovíme se třeba, jak velká je vazební síla N na křížákové dráze. Výhodou tohoto postupu je, že inženýr je zvyklý pracovat s vektory a způsob řešení je blízký jeho myšlení. Newtonova metoda považuje

sílu za veličinu prvotní, práci za veličinu odvozenou. Jde tedy o vektorové pojetí mechaniky.

Proti tomu Lagrange považuje za prvotní veličinu práci. Jeho princip je mnohem obecnější. Výsledek získáme, aniž potřebujeme znát podmínky rovnováhy soustav sil. Princip zcela pomíjí vazební síly, po nichž se neptáme. Vede tedy kratčeji k cíli. Je však méně názorný. Vektorová "hra sil" zůstává skryta v matematickém formalismu. Lagrangeův princip je základem analytického pojetí mechaniky, které je blízké způsobu myšlení spíše teoretického fyzika než inženýra. Avšak teoretická a praktická stránka inženýrských vědních disciplín se dnes již natolik prolínají, že rozdělení mechaniky na teoretickou a technickou (aplikovanou) není zdaleka tak zřetelné ani důležité, jako bývalo dříve.

Oprostíme-li se od jednostranného uvyklého způsobu myšlení, podaří se nám dospět mnohem dále. Na levou stranu rovnice (63) lze pohlížet jako na elementární práci, kterou vykoná síla F na elementární dráze δs . Pro takovou práci platí, že $\delta A = F \delta s$. V našem případě můžeme za elementární "drahu" považovat pootočení kliky $\delta \varphi$. Pak však budeme mít

$$\delta s = \delta \varphi \quad (64)$$

$$F = Pr \cos \varphi - Qr (\sin \varphi + \operatorname{tg} \beta \cos \varphi). \quad (65)$$

Úhel φ není skutečnou drahou s a redukovaný moment sil P a Q podle (65) není skutečnou silou. Ztotožnili jsme je pouze formálně. Mluvíme proto spíše o zobecněné dráze (popř. o zobecněném posuvu) a o zobecněné síle. S nimi nabývá rovnice (63) tvaru

$$\delta A = F(s) \delta s = 0. \quad (66)$$

Užití zobecněných posuvů a zobecněných sil je pro analytickou metodu v mechanice typické. Rovnice (66) je proti rovnici (63) mnohem přehlednější; výklad všech takových rovnic je stejný: přírůstek práce = síla \times přírůstek dráhy.

Protože zobecněná síla F je jednoznačnou funkcí zobecněného posuvu s , tj. funkcí úhlu φ , můžeme zavést potenciální energii (tj. "zásobu" práce vnějších sil)

$$V = - \int_{s=\varphi_0}^{\varphi} F(s) ds. \quad (67)$$

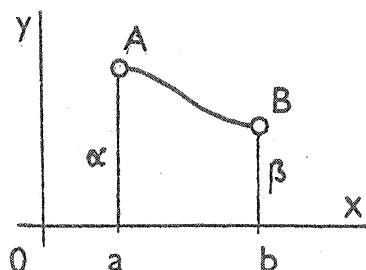
Tato "zásoba" se zmenšuje, vykonají-li síly práci δA , proto je na pravé straně (67) záporné znaménko. Rovnice (66) je pak totožná se vztahem $\delta V = 0$, což znamená, že potenciální energie V , tj. integrál (67), má za rovnováhy stacionární hodnotu. Vyšetření podmínek, za nichž integrál nabývá

stacionární hodnoty, je základní úlohou variačního počtu. Euler ukázal, že tuto úlohu lze řešit elementárními prostředky, tedy i bez znalosti příslušné teorie. Budeme se tím zabývat v příští kapitole.

6. STACIONÁRNÍ HODNOTA URČITÉHO INTEGRÁLU

Typickým problémem tohoto druhu je úloha o brachystochroně (o křivce, po níž dospěje hmotný bod v gravitačním poli z bodu A do bodu B v nejkratším čase). Formuloval ji poprvé Jan Bernoulli roku 1696. Neznámá křivka AB (obr. 4), po níž se bez tření pohybuje hmotný bod, má rovnici

$$y = f(x). \quad (68)$$



Obr. 4

Čas nutný k pohybu z bodu A do bodu B dostaneme z rovnice pro rychlost

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{dt} = \sqrt{2g(\alpha-y)}$$

ve tvaru integrálu

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\alpha-y}} dx. \quad (69)$$

Poslední rovnici bychom mohli zkráceně zapsat takto:

$$t = \int_a^b F(y, y') dx.$$

Úlohou nyní je, určit funkci $y = f(x)$ tak, aby vyhověla okrajovým podmínkám

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta \quad (70)$$

a zároveň poskytla nejmenší možnou hodnotu integrálu (69). Musí to být funkce spojitá, musí mít derivaci podle x (spojitou tečnu). Lze dokázat, že existuje jediná funkce, která splňuje tyto podmínky. Hodnota integrálu (69) nezávisí na proměnné x , ale na tvaru funkce $y(x)$; říkáme proto, že t je funkcionálem závislým na funkci $y(x)$.

Nyní budeme stejnou úlohu formulovat obecněji. Je dána funkce tří proměnných $F = F(y, y', x)$ a určitý integrál

$$I = \int_a^b F(y, y'; x) dx. \quad (71)$$

Tento integrál je tedy funkcionálem. Hledáme funkci $y = f(x)$ s okrajovými podmínkami $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, pro níž nabývá funkcionál I stacionární (nejčastěji extrémní) hodnoty.

Vyjdeme ze známého způsobu řešení stacionární hodnoty funkce několika proměnných; parciální derivace této funkce podle jednotlivých proměnných se rovnají nule. Naši úlohu převedeme na tento známý problém diskretizací funkce $y = f(x)$. Úsečku $b-a$ rozdělíme na stejné délky se souřadnicemi dělících bodů

$$x_0 = a; x_1; x_2; \dots; x_n; x_{n+1} = b$$

$$y_0 = \alpha; y_1; y_2; \dots; y_n; y_{n+1} = \beta.$$

Budeme tedy mít funkci $y_k = f(x_k)$ místo $y = f(x)$. Pro derivaci bude platit vztah

$$z_k = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}. \quad (72)$$

Integrál (71) nahradíme součtem

$$S = \sum_{k=0}^n F(y_k, z_k; x_k)(x_{k+1} - x_k). \quad (73)$$

Na pravé straně (73) máme funkci neznámých y_1, y_2, \dots, y_n , neboť z_k je dáno podílem diferencí podle (72). Mohli bychom nyní podle nich derivovat, derivace položit rovny nule a sledovat, co se bude dít, bude-li $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ v limitě přecházet k nule. V tom případě - jak očekáváme - přejde součet S v integrál I . Nejdříve však vztah (73) nepatrně obměníme. Protože y_k a y_{k+1} se liší libovolně málo, můžeme je v součtu S zaměnit, takže budeme mít

$$\tilde{S} = \sum_{j=0}^n F(y_{j+1}, z_j; x_j)(x_{j+1} - x_j). \quad (74)$$

Budeme-li nyní součet \tilde{S} derivovat např. podle y_{k+1} , musíme pamatovat, že y_{k+1} se vyskytuje ve dvou sousedních členech, totiž ve členech $j = k$ a $j = k+1$ vzhledem k definici (72). Parciální derivace podle y_{k+1} tedy dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y_{k+1}} &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{x=x_k} (x_{k+1} - x_k) + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_k} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_{k+1}} \end{aligned} \quad (75)$$

Dělíme diferencí $\Delta X = x_{k+1} - x_k$ a dostaneme

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]_{x=x_k} = 0 \quad (76)$$

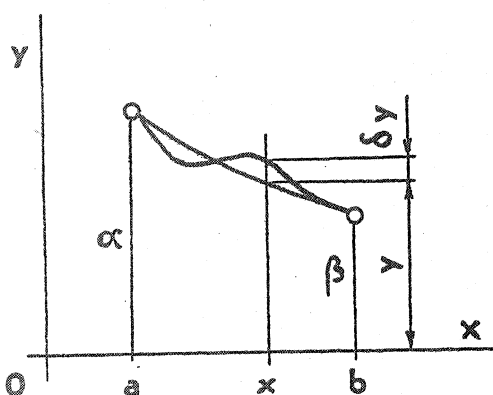
$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Přejde-li Δx v limitě k nule, plyne z rovnice (76) diferenciální Eulerova-Lagrangeova rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad (a \leq x \leq b); \quad (77)$$

kteřá je základní rovnicí variačního počtu. Při jejím odvození jsme dvakrát použili limitní přechod (od spojitých funkcí k diskrétním a naopak), což nemusí být vždy přípustné. Eulerovo odvození tedy není - na rozdíl od Lagrangeova, které uvedeme dále - zcela rigorózní.

Lagrange řešil tutéž úlohu poněkud jinak, jak nyní ukážeme. K funkci $y = y(x)$ přidáme libovolnou funkci $\delta y = \delta y(x)$. Lze si ji představit jako ξ -násobek libovolné spojitě a "rozumné" funkce $\Phi(x)$, tedy $\delta y = \xi \Phi(x)$.



Přírůstek δy označujeme jako "variaci funkce" $y(x)$. Není to obecně "skutečný" přírůstek funkce $y(x)$, tj. diferenciál $dy = \frac{dy}{dx} dx$, ačkoli jde také o infinitesimální veličinu. Součet $y + \delta y$ je proto v nekonečně blízkém okolí funkce $y(x)$ (obr. 5) a nemění stacionární hodnotu funkcionálu (71), takže

Obr. 5

$$\delta \int_a^b F dx = \int_a^b F(y + \delta y, y' + \delta y'; x) dx - \int_a^b F(y, y'; x) dx = 0. \quad (78)$$

První člen rozvedeme podle Taylorovy řady a malé členy vyšších řádů zanedbáme. Po úpravě bude

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0.$$

Druhý člen upravíme integrací per partes

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

Budeme předpokládat, že "okrajový člen"

$$\delta J = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b \quad (79)$$

se rovná nule, takže zbývá

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0.$$

Protože jsme $\delta y(x)$ zvolili libovolně (až na nepodstatná omezení, která jsme zde ani neuváděli), musí být výraz v hranaté závorce poslední rovnice nulový. To je však rovnice (77).

Okrajový člen má tvar (79) a musí se rovnat nule, má-li mít funkcionál skutečně stacionární hodnotu. Je zřejmé, že buď musí být $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, jak vyžadují podmínky (70), nebo by musilo být

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=b} = 0. \quad (80)$$

Podmínky (70) předepisují fixní hodnotu funkce $y(x)$ na okrajích intervalu, takže variace v těchto koncových bodech intervalu musí být nulová. Jsou to "podstatné" či geometrické podmínky, kdežto (80) jsou "přirozené" okrajové podmínky, vyplývají samy přirozeně z variační úlohy, nejsou-li geometrické podmínky splněny.

Obdobně bychom odvodili, že funkcionál

$$I = \int_a^b F(y, y', y''; x) dx \quad (81)$$

nabývá stacionární hodnoty, je-li splněna Eulerova-Lagrangeova rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \quad (82)$$

a vymizí-li okrajový člen

$$\delta J = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right]_a^b. \quad (83)$$

7. O PŘÍPUSTNÝCH FORMULACÍCH OKRAJOVÝCH PODMÍNEK

Je jednou z nejkrásnějších vlastností variační úlohy, že poskytuje sama úplný počet všech geometricky či fyzikálně přijatelných okrajových podmínek. Abychom to blíže objasnili, uvedeme jako příklad řešení ohybu nosníku, zatíženého spojitě rozdělenou silou $q(x)$ [N/m]. Potenciální energie napjatosti je

$$U = \frac{k}{2} \int_0^l (y'')^2 dx \quad (84)$$

a potenciál vnějšího zatížení je

$$V = - \int_0^l q y dx. \quad (85)$$

Podle Lagrangeova principu je třeba minimalizovat integrál

$$I = U + V = \int_0^l \left(\frac{k}{2} y''^2 - q y \right) dx. \quad (86)$$

To je však funkcionál typu (81). Proto musí podle (82) platit, že

$$k y''''(x) - q(x) = 0. \quad (87)$$

Je-li tato rovnice (tj. diferenciální rovnice ohybové čáry) splněna, zbývá z variace funkcionálu ještě okrajový člen (83)

$$\begin{aligned} \delta J = k [& -y'''(l) \delta y(l) + y'''(0) \delta y(0) + \\ & + y''(l) \delta y'(l) - y''(0) \delta y'(0)]. \end{aligned} \quad (88)$$

Ten se rovněž musí rovnat nule. Na každém konci ($x=0$ a $x=l$) musí být tedy splněny tyto podmínky:

$$\begin{array}{ll} \text{buď } \delta y = 0, & \text{nebo } y''' = 0, \\ \text{buď } \delta y' = 0, & \text{nebo } y'' = 0. \end{array}$$

Na levé straně jsou podmínky geometrické (předepsaný průhyb, předepsaný sklon), na pravé přirozené (předepsaná posouvající síla, předepsaný ohybový moment).

Kdybychom tedy předepsali okrajové podmínky např. tak, že by platilo

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0,$$

čistali bychom nepřipustnou kombinaci okrajových podmínek, neboť by obecně zůstalo

$$\delta J = k y''(0) \delta y(0) + 0$$

v rozporu se základním fyzikálním principem (s principem virtuálních prací). Skutečně, tyto okrajové podmínky požadují, aby nosník byl na pravém konci dokonale vetknutý a na levém měl nulový sklon a nulový ohybový moment. Těmito podmínkami je však nosník fyzikálně vázán více než podmínky skutečně předpisují. Je-li např. $q = \text{konst.}$, lze dané podmínky splnit jen tak, že na levý konec bude působit reakce $qL/3$ a průhyb bude mít zcela určitou velikost $y(0) = (qL^4)/(72EJ)$. To však znamená, že $\delta y(0) = 0$, takže také $\delta J = 0$. Dosáhli jsme tedy souladu s Lagrangeovým principem, avšak za cenu ztráty volnosti ve výběru průhybu $y(0)$ na levém konci nosníku. To je v rozporu s původním zněním okrajových podmínek, které takové omezení nepředepisují.

Viděli jsme, že Lagrangeův princip poskytuje nejen diferenciální rovnici problému, ale též všechny přípustné kombinace okrajových podmínek.

8. DISKRETIZACE PRUŽNÉHO KONTINUA A OMEZENÍ POČTU STUPŇŮ VOLNOSTI VE STATICE

Přetvoření pružného tělesa je známo, umíme-li u každého bodu (x, y, z) tělesa určit jeho polohu po deformaci $(x + u, y + v, z + w)$. K tomu potřebujeme u každého bodu znát trojici posuvů u, v, w , které jsou obecnými, avšak spojitými funkcemi souřadnic. ^{*}/ Protože v ideálním tělese je nekonečně mnoho bodů, je tvar deformovaného tělesa určen nekonečně mnoha údaji. Pružné těleso má tedy nekonečně mnoho stupňů volnosti. Proto můžeme jeho deformaci úplně popsat jen spojitými funkcemi, které však umíme nalézt jen v jednoduchých případech; jinak jsme odkázáni na přibližná řešení,

Nejčastěji však ani nepotřebujeme znát všechny podrobnosti; stačí, známe-li posuv či průhyb jen v některém místě. Ani napjatost nepotřebujeme znát ve všech místech stejně podrobně. Snažíme se tedy rozsah úlohy omezit. Používáme-li k výpočtu číslicový počítač, je rozsah možných výpočtů limitován jeho pamětí; nemůžeme pracovat s nekonečně mnoha číselnými údaji. Snažíme se proto vědomě účelně omezit počet stupňů volnosti, které pojímáme do výpočtu. Někdy za to musíme platit ztrátou dosažitelné přesnosti. Ziskem je omezení rozsahu nutných výpočtů.

Můžeme postupovat různě. Bylo by zajisté možné nahradit pružné těleso soustavou konečného počtu ideálních pružin. Taková náhrada není však u několikarozměrného kontinua nikdy dokonalá. Nepodaří se např. najít takové uspořádání pružin, aby náhradní systém dokonale modeloval elastické vlastnosti

^{*}/ V teorii pružnosti se požaduje spojitost derivací posuvů až do třetího řádu včetně.

izotropního tělesa pro namáhání tahové a smykové zároveň, ledaže má poměr modulů pružnosti v tahu a ve smyku určitou, nikoli volitelnou velikost.

Počet stupňů volnosti lze však omezit i jinými způsoby; o některých se nyní krátce zmíníme. Pro stručnost se omezíme na jednorozměrný případ nosníku, pro který platí diferenciální rovnice ohybové čáry (87), jež plyne z variační úlohy (86).

Tvar ohybové čáry bude určen, budeme-li znát průhyb y v každém bodě x . Potřebujeme tedy znát nekonečně mnoho hodnot. Dospíváme k závěru, že nosník má nekonečně mnoho stupňů volnosti.

Je-li nosník prostě podepřený a mají-li podpory vzdálenost l , můžeme jeho ohybovou čáru vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (89)$$

s nekonečně mnoha součiniteli a_k , což odpovídá rovněž nekonečně mnoha stupňům volnosti.

Přesné řešení průhybu nosníku je snadné, má-li nosník konstantní průřez. Někdy však může být řešení nesnadné, a tu se snažíme získat alespoň přibližné řešení. Získáme je vědomým omezením počtu stupňů volnosti dané úlohy. Můžeme např. vybrat z intervalu $a \leq x \leq b$ množinu "diskrétních" bodů x_k , v nichž budeme hledat funkční hodnoty y_k , jichž je omezený počet. Derivace můžeme přibližně nahradit diferencemi a dosadit buď do rovnice (87), jež přejde v soustavu lineárních rovnic pro y_k , nebo do rovnice (86), jež přejde v kvadratickou funkci hodnot y_k , kterou minimalizujeme anulováním derivací podle jednotlivých neznámých y_k . Tím dostaneme rovněž lineární soustavu pro y_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Tak jsme postupovali v kapitole 6.

Místo toho můžeme průhyb přibližně vyjádřit jako součet řady zvolených "bázových" funkcí, vyhovujících alespoň podstatným (geometrickým) okrajovým podmínkám

$$y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x). \quad (90)$$

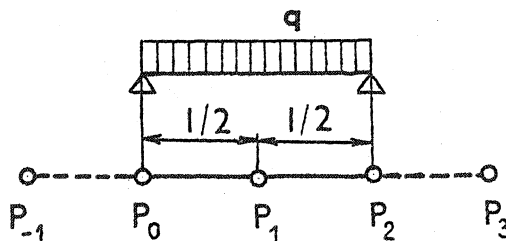
Příkladem takové řady je Fourierova řada (89), pokud bychom v ní ponechali jen omezený počet členů. Volbou n součinitelů a_k je funkce y určena, takže nosník má nyní n stupňů volnosti. Omezením počtu stupňů volnosti ovšem omezujeme i dosažitelnou přesnost řešení. Funkci (90) nyní dosadíme do (86) a konstanty a_k volíme tak, aby funkcionál nabýval stacionární hodnoty, tedy z rovnic

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (91)$$

Dostáváme tak lineární soustavu rovnic pro a_k . Minimalizací funkcionálu I dosáhneme nejvýhodnějšího výběru konstant a_1 až a_n , tak aby funkce y byla nejbližší správnému (přesnému) řešení. Úplné shody bychom

dosáhli jen tehdy, kdyby řada bázových funkcí (90) byla schopna popsat přesný průběh ohybové čáry. Obecně však tomu tak není. To je podstata Ritzovy metody.

11. příklad. Nosník rozdělíme na dvě poloviny; je to nejhrubší možné dělení, takže nemůžeme očekávat příliš přesné výsledky, získáme je však s nejmenší námahou. Jako ukázka aplikace metody to postačí. Budeme tedy hledat funkční hodnoty v bodech $x_0 = 0$, $x_1 = l/2$, $x_2 = l$. Abychom mohli vyjádřit čtvrtou derivaci $y^{(4)}$ pomocí diferencí, potřebujeme ještě fiktivní pomocné body $x_{-1} = -l/2$, $x_3 = 3l/2$ (obr. 6).



Obr. 6

Místo rovnice (87) bude platit

$$\frac{k}{(l/2)^4} (y_3 - 4y_2 + 6y_1 - 4y_0 + y_{-1}) = q.$$

Přitom $y_0 = y_2 = 0$ a vzhledem k souměrnosti též $y_{-1} = y_3$, takže

$$6y_1 + 2y_{-1} = \frac{ql^4}{16k}.$$

Mimoto musí platit, že ohybový moment, a tedy i derivace $y'' = \frac{1}{h^2} (y_1 - 2y_0 + y_{-1})$, je v bodě P_0 nulová

$$y_1 - 2y_0 + y_{-1} = y_1 + y_{-1} = 0.$$

Vyloučením hodnoty y_{-1} dostaneme

$$y_1 = \frac{ql^4}{64k}$$

místo přesné hodnoty

$$y_1 = \frac{5ql^4}{384k} = \frac{ql^4}{76,8k}.$$

Řešení bychom mohli zpřesnit volbou jemnějšího dělení intervalu, ovšem za cenu větší pracnosti. Místo toho můžeme vyjít z rovnice (90). Zvolme např.

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Je to řada (89), v níž jsme ponechali jediný člen. Pak podle (86) je

$$I = a_1^2 \frac{k}{2} \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx - a_1 q \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx =$$

$$= a_1^2 \frac{\pi^4 k}{4 l^3} - a_1 \frac{2ql}{\pi}$$

z podmínky $\partial I / \partial a_1 = 0$ plyne, že

$$a_1 = y_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 k} = \frac{ql^4}{76,5 k}$$

Chyba výsledku je tedy jen 0,4 %. Tak vynikající přesnosti jsme dosáhli proto, že zvolená báze funkce - sinusovka - splňuje nejen geometrické, ale i přirozené okrajové podmínky (na okraji intervalu vymizí nejen průhyb, ale i jeho druhá derivace, tj. ohybový moment). Kdybychom zvolili báze funkci např.,

$$y = a_1 x(l-x),$$

tedy kvadratickou parabolou, splnili bychom jen geometrické okrajové podmínky a přesnost řešení by byla poněkud horší. Ponecháváme čtenáři, aby se o tom přesvědčil.

Uvedenými příklady jsme problematiku zdaleka nevyčerpali. Nebylo to ani naším úmyslem. Stupně volnosti omezuje též metoda konečných prvků; je možno ji považovat za zvláštní spojení obou způsobů zde uvedených. Deformační variantě této metody, která je nejrozšířenější, věnujeme celou další kapitolu.

9. LAGRANGEŮV PRINCIP V METODĚ KONEČNÝCH PRVKŮ

Začneme opět s příkladem nosníku, pro který platí variační úloha (86). K jejímu řešení použijeme Ritzovu metodu, tj. vyjdeme ze vztahu (90). Upravíme jej však tak, aby konstanty a_1, a_2, \dots, a_n byly nahrazeny průhyby y_1, y_2, \dots, y_n a sklony y'_1, y'_2, \dots, y'_n na vybrané množině uzlových bodů x_1, x_2, \dots, x_n . Tyto průhyby a sklony budou nyní volnými parametry úlohy místo konstant a_k . Tento výběr funkčních hodnot v diskrétních bodech připomíná diferenční metodu. To je však všechno, co má metoda konečných prvků s diferenční metodou společného. Báze funkce $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) zvolíme ve tvaru polynomu tak, aby zabezpečovaly spojitost a hladkost ohybové čáry. Protože na okrajích každého úseku bude podle toho nutno volit průhyb a sklon ohybové čáry jako parametry, což jsou celkem čtyři proměnné, musí být ohybová čára na každém úseku vyjádřena polynomem alespoň třetího stupně, tedy

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ y'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2. \end{aligned} \quad (92)$$

Tyto rovnice lze zkráceně zapsat v maticovém tvaru

$$\{f\} = [A]\{a\}, \quad (93)$$

definujeme-li

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix}$$

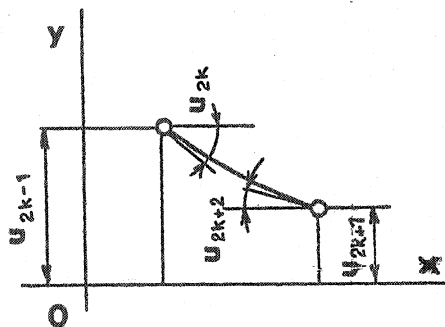
$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Nyní označíme podle obr. 7

$$y(x_k) = u_{2k-1} \quad y'(x_k) = -u_{2k}$$

a zavedeme vektor "posuvů" pro interval $x_k \leq x \leq x_{k+1}$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \\ u_{2k+1} \\ u_{2k+2} \end{Bmatrix}$$



Obr. 7

Koncové body A, B musí rovněž vyhovovat rovnici (93), proto bude

$$\{\delta\} = [S]\{a\}, \quad (94)$$

kde

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & x_k & x_k^2 & x_k^3 \\ 0 & -1 & -2x_k & -3x_k^2 \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & x_{k+1}^3 \\ 0 & -1 & -2x_{k+1} & -3x_{k+1}^2 \end{bmatrix}$$

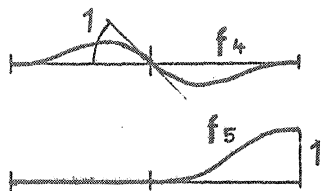
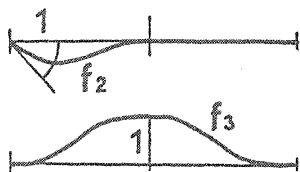
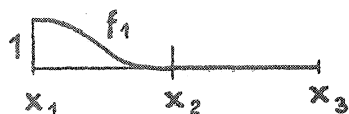
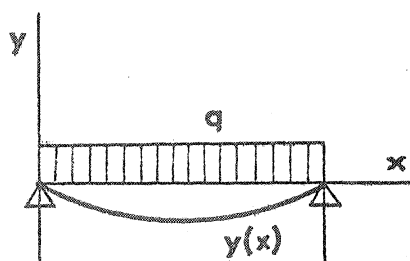
Odtud formálně

$$\{a\} = [S]^{-1}\{\delta\}. \quad (95)$$

Konstanty a_k jsou tedy lineární kombinací posuvů u_i . S je regulární matice, proto jsou konstanty a_k jednoznačně určeny vztahem (95). Seřadíme-li pak členy v rovnici pro $y(x)$ podle posuvů, budeme pro interval $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ mít

$$y_k(x) = u_{2k-1} f_{2k-1}(x) + u_{2k} f_{2k}(x) + u_{2k+1} f_{2k+1}(x) + u_{2k+2} f_{2k+2}(x). \quad (96)$$

Funkce $f_i(x)$ jsou polynomy třetího stupně, vyhovují proto homogenní rovnici (87), v níž položíme $Q(x) = 0$ (jejich čtvrtá derivace totiž vymizí). Proto představují ohybovou čáru nosníku bez vnějšího spojitého zatížení, která vznikne při jednotkovém posuvu $u_i = 1$; ostatní posuvy přitom zůstanou nulové. Pro nosník rozdělený na dvě pole ($n=3$) jsou tyto funkce



Obr. 8

Na rozdíl od dříve uvedeného příkladu aplikace Ritzovy metody jsou nyní nenulové bázové funkce obecně jen v určité části řešené oblasti. Součet (96) obsahuje v uvedeném případě v každém úseku nejvýše čtyři členy.

Je třeba poznamenat, že (96) představuje pouze přibližné řešení problému, neboť pro $Q \neq 0$ je $y(x)$ ve skutečnosti polynomem vyššího než třetího stupně.

Dosadíme-li nyní (96) do (86) a napíšeme-li podmínky pro existenci minima, tj. rovnice

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2n), \quad (97)$$

dostaneme spolu s okrajovými podmínkami právě tolik rovnic, kolik budeme mít neznámých zobecněných posuvů. Výsledky se budou přesně shodovat s těmi, jež jsme získali přímou deformační metodou v první a v druhé části semináře. Tehdy jsme rozdělovali zatížení Q do uzlů "ad hoc", nahradili jsme je staticky nebo kinematicky ekvivalentním zatížením v uzlech. Z Lagrangeova principu však dostaneme bezprostředně i předpis pro toto rozdělení.

Shoduje se s kinematicky ekvivalentním zatížením.

Vzpomeneme-li na výklad z druhé části semináře, který se týkal metody konečných prvků pro rovinnou úlohu, vidíme, že i tehdy jde o zvláštní případ Ritzovy metody řešení, u níž za volné parametry byly voleny posuvy uzlů. Bázové funkce jsou nenulové pouze v těch prvcích, jež se stýkají v daném uzlu, jehož zobecněný posuv má jednotkovou hodnotu. Také tam se v rozsahu každého prvku počítá jen omezený počet bázových funkcí. Proto má matice tuhosti výhodný pásový tvar (jen výjimečně je plná). Souvislost s Ritzovou metodou postavila metodu konečných prvků na pevný teoretický základ.

12. příklad. Pro rotující prizmatické rameno podle obr. 9 dostaneme z elementární teorie pružnosti radiální posuv

$$u = \frac{\mu \omega^2}{6E} x (3l^2 - x^2), \quad (a)$$

kde μ značí hmotnost jednotkové délky ramena. Pokusme se odvodit rozdělení posuvů metodou konečných prvků podle obr. 10. Zvolíme lineární náhradu kubické funkce

$$u = a_0 + a_1 x. \quad (b)$$

Potom však musí platit, že

$$\begin{Bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{k+1} \\ 1 & x_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

$$k = 1, 2.$$

Odtud

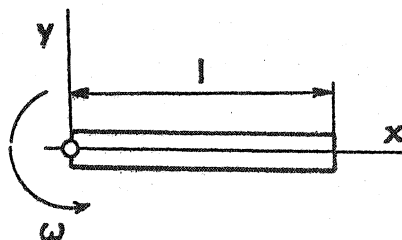
$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_k - x_{k+1}} \begin{bmatrix} x_k & -x_{k+1} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{Bmatrix}.$$

Speciálně dostaneme pro úsek 12

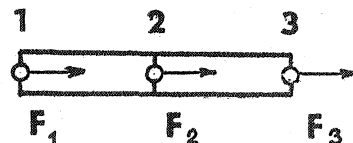
$$u = u_1 + \frac{2}{l} (u_2 - u_1) x \quad (d)$$

a pro úsek 23

$$u = u_2 + \frac{2}{l} (u_3 - u_2) \left(x - \frac{l}{2}\right). \quad (e)$$



Obr. 9



Obr. 10

Energie napjatosti je tedy

$$U = \frac{ES}{2} \int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \frac{ES}{2} [(u_2 - u_1)^2 + (u_3 - u_2)^2] \quad (f)$$

a potenciální energie vnějších sil

$$V = -F_1 u_1 - F_2 u_2 - F_3 u_3 - \mu \omega^2 \int_0^l x u dx \quad (g)$$

Poslední člen značí potenciál setrvačných sil $dF = \omega^2 x \mu dx$. */

Po integraci

$$V = -F_1 u_1 - F_2 u_2 - F_3 u_3 - \frac{\mu \omega^2 l^2}{24} (u_1 + 6u_2 + 5u_3) \quad (h)$$

Z rovnice

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (i)$$

plyne

$$\frac{2ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 = 0 \\ F_3 = 0 \end{Bmatrix} + \frac{\mu \omega^2 l^2}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad (j)$$

Odtud

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{\mu \omega^2 l^2}{48 ES} \begin{Bmatrix} 11 \\ 16 \end{Bmatrix} \quad (k)$$

Posuvy v uzlech tedy vyšly přesně, přestože jsme volili v rovnici (b) polynom pouze prvního stupně. První řádek rozepsané rovnice (j) dává

$$-\frac{2ES}{l} u_1 = F_1 + \frac{\mu \omega^2 l^2}{24} ,$$

odkud - po dosazení z rovnice (k) -

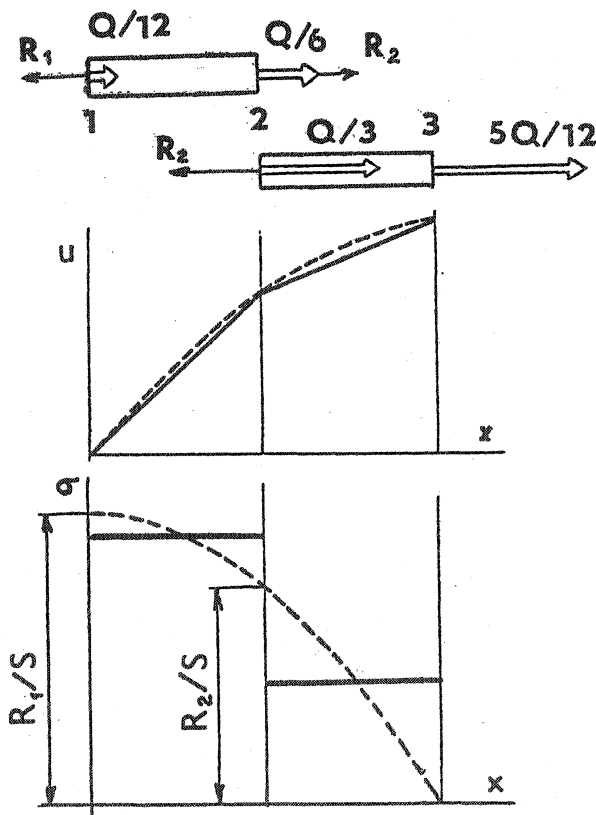
$$F_1 = -\mu \omega^2 l \left(\frac{1}{24} + \frac{11}{24} \right) = -\frac{1}{2} \mu \omega^2 l^2 \quad (l)$$

To je však reakce v ose otáčení a vyšla rovněž přesně. V čem je tedy přibližnost řešení? Především v tom, že posuvy uvnitř intervalů (mezi uzlovými body) nejsou vyjádřeny přesně. Metodou konečných prvků dostáváme posuvy (d) a (e) pro vnitřní body intervalů mezi uzly poněkud menší než z přesného

*/ Tedy součet elementárních potenciálů u a F .

řešení (a). Napětí uvnitř prvků je dáno součinem $E \partial u / \partial x$ a je podle metody konečných prvků v rozsahu jednoho prvku konstantní; ve skutečnosti má však parabolický průběh. Srovnání je zřejmé z obr. 11, kde jsou přesné průběhy čárkovány.

Lagrangeův princip virtuálních prací můžeme uplatnit buď pro každý prvek zvlášť - pak dostaneme elementární matici tuhosti spolu s rozdělením vnějších sil působících na jeden prvek, nebo pro celé těleso - pak dostaneme, jako v tomto příkladu, celkovou matici tuhosti. Matice tuhosti je stejná, jako byla odvozena v první části semináře pro prutové soustavy přímou deformační metodou. Odvození vzorců z Lagrangeova principu má však tu přednost, že zároveň dává nejsprávnější způsob rozdělení spojitě rozděleného zatížení do jednotlivých uzlů. Proto jsme dosáhli s pouhými dvěma prvky tak velké přesnosti řešení. Kdybychom zvolili jiný náhradní polynom - např. druhého stupně - vyšlo by ovšem i jiné rozdělení spojitě rozděleného zatížení. K tomu se později ještě vrátíme.



Obr. 11

Na obr. 11 je naznačeno rozdělení celkové vnější odstředivé síly $Q = \mu \omega^2 \ell^2 / 2$ na jednotlivé uzly, jak jsme je ve výpočtu použili. Vnější reakce $R_1 = Q$, vnitřní reakce $R_2 = 3Q/4$. Reakce R_2 představují vzájemné působení obou prvků v uzlu 2; podíl R_2/S , kde S značí průřez, dává přesnou hodnotu napětí v místě $x = \ell/2$. Podobně R_1/S dává přesnou hodnotu maximálního napětí.

10. OKRAJOVÉ PODMÍNKY V METODĚ KONEČNÝCH PRVKŮ

Příklad 12 z minulé kapitoly je velmi poučný. Lze na něm názorně ukázat, jak jsou do výpočtu zahrnuty okrajové podmínky. Ujasníme-li si to, předejdeme mnohá nedorozumění.

Především si všimněme, že vypočtená napětí se vztahují na vnitřek prvků, tedy na otevřenou oblast (bez hranice). Bývá zvykem přisuzovat vypočtená

napětí těžištěm prvků. To však nemá žádný teoretický důvod. Naopak, na obr. 11 vidíme, že shoda vypočtené a přesné hodnoty napětí nastává mimo těžiště prvků. Je-li náhrada skutečných průběhů posuvů přibližná, nemůže poskytnout přesný průběh napětí. V příkladu 12 jsme volili lineární polynom (b) a napětí vyšla po částech konstantní, na hranicích prvků nespojitá. Kdybychom řešili úlohu přesněji a zvolili polynom druhého stupně, mohli bychom získat napětí nespojitá, avšak s nespojitou první derivací, a teprve polynom třetího stupně by dal přesné řešení (a).

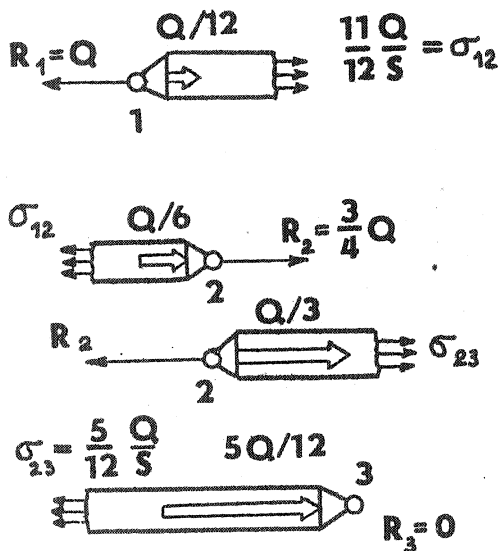
Zdůrazňujeme tedy, že napětí nevstupují do "hry sil" v uzlech soustavy a nemohou proto obecně vyjadřovat okrajové podmínky úlohy. Jsou to pouze "sprůměrované" hodnoty napětí uvnitř prvků a obecně nesouhlasí s napětím na jejich hranici.

Vnější síly a reakce jsou připojeny v uzlech soustavy. K vnějším silám v uzlech se připočítávají i soustředěné síly plynoucí ze spojitých zatížení. Jejich podíl v jistém uzlu se stanoví v souladu s Lagrangeovým principem virtuálních prací.

Na obr. 11 jsou tyto síly, vzniklé rozdělením spojitého zatížení objemovými silami do uzlů soustavy, znázorněny dvojitými šipkami. Kromě toho působí v uzlech vnitřní reakce udržující souvislost celé soustavy. Okrajové podmínky jsou představovány výhradně posuvy uzlů a vnějšími osamělými silami a reakcemi přenášenými v uzlech. K nim jsou připočteny i soustředěné síly vzniklé přepočtem povrchových vnějších sil působících na hranicích prvků.

Náhradní osamělé síly rezultující z objemových sil však zahrnujeme k silám působícím uvnitř prvku, přestože jsme je připojili v uzlech. Přesněji si představme, že jsou připojeny uvnitř prvků v těsné blízkosti uzlů, nikoli v uzlech. To je na obr. 12 zřetelně vyznačeno dvojitými šipkami.

Pak můžeme prohlásit, že na obr. 11 jsou okrajové podmínky vskutku splněny. V bodě 1 je předepsán nulový posuv, v bodě 3 nulová vnější síla. "Vnější sílu" $5Q/12$ počítáme tedy - ve smyslu naší úmluvy - k vnitřní části prvku; do okrajové podmínky nevstupuje. Působení sil v uzlech 1 až 3 znázorňuje schematicky obr. 12.



Obr. 12

Obdobně je nutno posuzovat okrajové podmínky i u několikarozměrných úloh. K některým složitějším případům se ještě vrátíme v další kapitole.

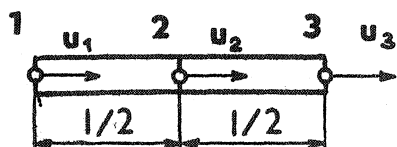
11. ZJEVNÉ A SKRYTÉ ZOBECNĚNÉ SÍLY V METODĚ KONEČNÝCH PRVKŮ

Kdybychom místo lineárního polynomu (a) v příkladu 12 zvolili kvadratický polynom

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad (98)$$

potřebovali bychom k určení jeho součinitelů tři podmínky, tj. musili bychom zavést pro jeden prvek tři deformační parametry - zobecněné posuvy.

Stačilo by zvolit prvek se třemi uzly podle obr. 13. Zřejmě by musilo platit, že



Obr. 13

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 \\ u_2 &= a_0 + a_1 \frac{l}{2} + a_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ u_3 &= a_0 + a_1 l + a_2 l^2. \end{aligned} \quad (99)$$

Odtud

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} l^2 & 0 & 0 \\ -3l & 4l & -l \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \quad (100)$$

Polynom (98) platí v celém intervalu $x_1 \leq x \leq x_3$. Napětí má tedy v rozsahu celého prvku přímkový průběh a elementární matice tuhosti je třetího řádu.

Dostali bychom ji tak, že bychom vypočetli energii napjatosti

$$U = \frac{ES}{2} \int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \frac{ES}{2} (a_1^2 l + 2a_1 a_2 l^2 + \frac{4}{3} a_2^2 l^3). \quad (101)$$

Vzhledem k rovnici (100) je U kvadratickou funkcí posuvů u_1 , u_2 , u_3 . Pro prvky elementární matice tuhosti platí podle Lagrangeova principu, že

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (102)$$

Derivace $\partial U / \partial u_i$ totiž dává sílu F_i působící ve směru u_i v příslušném uzlu. Změna této síly, způsobená jednotkovým posuvem $u_j = 1$, je $\partial F_i / \partial u_j = \partial^2 U / \partial u_i \partial u_j$ a definuje prvek k_{ij} v matici tuhosti. To plyne ze základní rovnice $K \delta = F$.

Rozdělení odstředivé síly na jednotlivé uzly bychom dostali opět pomocí jejich potenciálu

$$V = -\mu \omega^2 \int_{x_1}^{x_3} x u dx. \quad (103)$$

Celková odstředivá síla by se rozdělila na uzly 1, 2, 3 v poměru

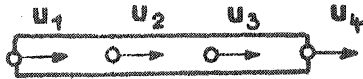
$$\frac{\partial V}{\partial u_1} : \frac{\partial V}{\partial u_2} : \frac{\partial V}{\partial u_3}$$

Podrobnosti výpočtu nebudeme uvádět.

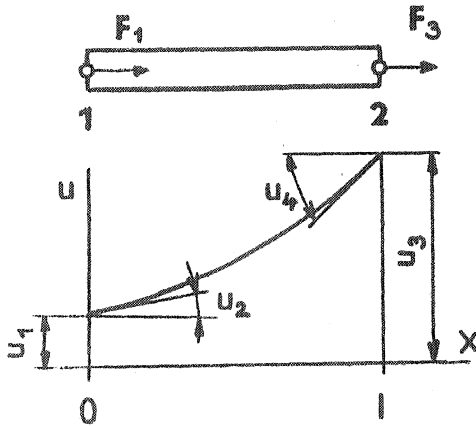
Kdybychom zvolili polynom třetího stupně

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad (104)$$

potřebovali bychom pro jeden prvek čtyři zobecněné posuvy. Mohly by to být posuvy ve čtyřech uzlech (obr. 14).



Obr. 14



Obr. 15

Mohly by to však také být posuvy a první derivace posuvů ve dvou uzlech 1, 2 (obr. 15). Matice tuhosti by měla nyní rozměr 4 x 4 a vypočtená napětí by měla parabolický průběh.

Způsob výpočtu podle obr. 15 má výhodu, že respektuje eventuální spojitost napětí na hranicích prvků, neboť volba první derivace posuvu za zobecněný posuv je zároveň volbou okrajové hodnoty napětí, jež je úměrná této první derivaci. Mají-li dva prvky ve společném uzlu společnou první derivaci posuvu, mají též společnou hodnotu napětí v tomto uzlu. Je zde však jedna nesnáze: posuvům $u_2 = u'(x_1)$ a $u_4 = u'(x_2)$ zjevně nepřísluší v uzlech 1 a 2 žádné zobecněné síly. Jak si pak máme vysvětlit fyzikální význam vektoru sil v základní rovnici (105)? Jak takové prvky spojovat? Jak u nich vyjadřovat

okrajové podmínky? Základní rovnice pro prvek podle obr. 15 je

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (105)$$

Obdobně s rovnicí (95) dostaneme součinitele v polynomu (104) pro prvek podle obr. 15

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^3 & 0 & 0 \\ -3l & -2l^2 & 3l & -l^2 \\ 2 & l & -2 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (106)$$

čili ve zkratce $\{a\} = [S]^{-1} \{\delta\}$. Polynom (104) lze pak napsat ve tvaru

$$\{u(x)\} = [A(x)] \{\delta\}, \quad (107)$$

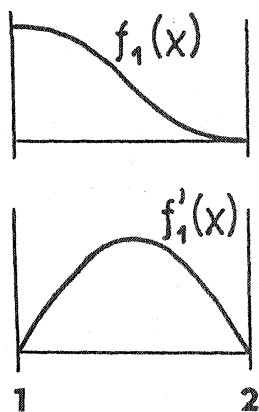
kde

$$[A] = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] [S]^{-1}. \quad (108)$$

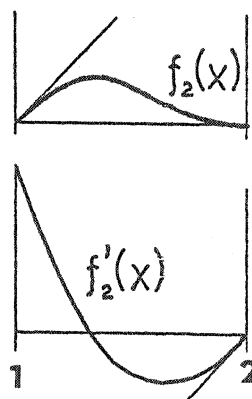
Rovnice (107) dá po rozepsání a snadné úpravě lineární kombinaci bázových funkcí $f_i(x)$ */

$$u(x) = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + u_3 f_3(x) + u_4 f_4(x). \quad (109)$$

První dvě z těchto funkcí (a jejich první derivace) jsou schematicky znázorněny na obr. 16 a obr. 17. Druhé dvě probíhají souměrně, takže je nekreslíme. Představují v určitém měřítku posuvy, příslušné jedinému nenulovému zobecněnému posuvu (na obr. 16 u_1 , a na obr. 17 u_2). Derivace jsou pak úměrné napětím, jejich průběhy jsou parabolické. Je zřejmé, že při změně zobecněného posuvu u_1 (nebo u_4) se uzly 1 ani 2 nepohnou, neboť $f_1(0) = f_1(1) = 0$, takže síly v uzlech nekonají žádnou virtuální práci při změně δu_1 (ani δu_4).



Obr. 16



Obr. 17

Jakým zobecněným silám tedy odpovídá toto přetvoření, představované funkcí $f_2(x)$ (popř. $f_4(x)$)? Odpovídá objemovým silám, posuvy u_2 a u_4 patří tedy "k vnitřní straně" uzlů, nikoli přímo do uzlů, a síly F_2 a F_4 nelze použít k formulaci okrajových podmínek. Tomu ostatně brání i skutečnost, že mají rozměr $[Nm]$, nejsou to tedy fyzikální síly. Musíme se smířit s tím, že tyto zobecněné síly patří k vnitřním parametrům soustavy a nejsou na okrajích prvků dostupné.

*/ Poznáváme v nich Lagrangeovy polynomy, pro něž platí, že $f_i(x_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad f_i(x_i) = 1.$

13. příklad. Řešte případ rotujícího ramene, představovaného jediným prvkem podle obr. 15 s kubickým polynomem (104). Z rovnice (102) vyjde

$$k_{ij} = ES \int_0^l \frac{\partial u'(x)}{\partial u_i} \frac{\partial u'(x)}{\partial u_j} dx \quad (a)$$

Tak dostaneme matici tuhosti K . Je použita dále v rovnici (c). Potenciální energie vyjde

$$V = -\mu \omega^2 \int_0^l x u(x) dx = -F_1 u_1, \quad (b)$$

neboť $F_2 = F_3 = F_4 = 0$.

Odtud

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u_1} &= -\frac{3}{20} \mu \omega^2 l^2 - F_1 & \frac{\partial V}{\partial u_3} &= -\frac{7}{20} \mu \omega^2 l^2 \\ \frac{\partial V}{\partial u_2} &= -\frac{1}{30} \mu \omega^2 l^3 & \frac{\partial V}{\partial u_4} &= \frac{1}{20} \mu \omega^2 l^3. \end{aligned}$$

Základní rovnice

$$\frac{ES}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_1 + \frac{3}{20} \mu \omega^2 l^2}{\frac{1}{30} \mu \omega^2 l^3} \\ \frac{7}{20} \mu \omega^2 l^2 \\ -\frac{1}{20} \mu \omega^2 l^3 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

Odtud dostaneme inverzí zmenšené matice tuhosti 3 x 3 řešení

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{\mu \omega^2 l}{60ES} \begin{bmatrix} 9 & l & 3 \\ l & l^2 & l \\ 3 & l & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2l \\ 2l \\ -3l \end{Bmatrix} = \frac{\mu \omega^2 l^2}{6ES} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2l \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

Vypočtené hodnoty souhlasí přesně s výpočtem podle rovnice (a) příkladu 12. I napětí, jež jsou dána součinem $E\varepsilon = E u'(x)$, vyjdou tentokrát v celém oboru $0 \leq x \leq l$ přesně.

Z prvního řádku rozepsané rovnice (c) vyjde

$$F_1 = -\frac{1}{2} \mu \omega^2 l^2, \quad (e)$$

což je rovněž přesná hodnota záporně vzaté reakce v uzlu 1 (v ose otáčení).

14. příklad. Pomocí matice tuhosti, odvozené v předchozím příkladu, řešte případ prostého tahu tyče stálého průřezu, uchycené v uzlu 1.

Okrajové podmínky zřejmě budou

$$u_1 = 0, \quad F_3 = F.$$

Síly F_2 , F_4 budou nulové, neboť je nelze změnit silami působícími v uzlech. Bude tedy - s využitím inverzní matice z minulého příkladu -

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{ESl} \begin{bmatrix} 9 & l & 3 \\ l & l^2 & l \\ 3 & l & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{F}{ES} \begin{Bmatrix} 1 \\ l \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Je tedy, jak se dalo očekávat,

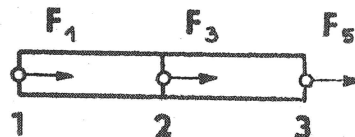
$$u_2 = u_4 = \frac{F}{ES} = \frac{G}{E} = \varepsilon,$$

$$u_3 = \frac{Fl}{ES} = \text{prodloužení tyče.}$$

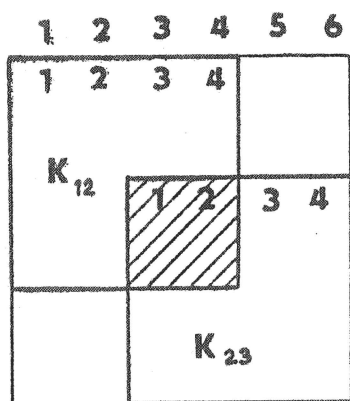
12. SPOJOVÁNÍ PRVKŮ SE SKRYTÝMI ZOBECNĚNÝMI SILAMI

Příklad jednorozměrného prvku podle obr. 15 s kubickým polynomem (104) nám poslouží ještě k tomu, abychom vyložili nesnáze při spojování prvků, u nichž máme sice všechny uzly na hranici prvku, ale některé zobecněné síly zůstávají nedostupné. Jak máme postupovat při skládání matic tuhosti u takových prvků? Poznamenejme hned, že u jednorozměrných prvků zpravidla vystačíme s lineárním polynomem. Je-li třeba, zvolíme větší počet těchto prvků (jemnější dělení). Svůj výklad omezíme však přesto na tento prvek, abychom šetřili místem a získali lepší přehled. Poznátka lze pak snadno zobecnit i na případy složitější, např. desky, kde takovým zobecněným posuvem se skrytou zobecněnou silou bývá druhá derivace průhybu (tedy křivost) plochy. ^{x/}

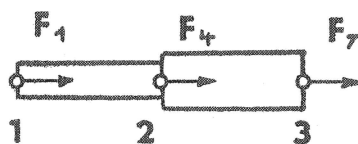
Jak bychom tedy spojili za sebou dva prvky podle obr. 15? Spojené prvky jsou zakresleny na obr. 18. Síly se sudými indexy zůstávají skryté. Posuv u_3 v uzlu 2 je oběma elementům společný. Skrytá síla F_4 je nulová. Víme-li předem, že v uzlu 2 je spojitě napětí, je společný i příslušný zobecněný posuv u_4 .



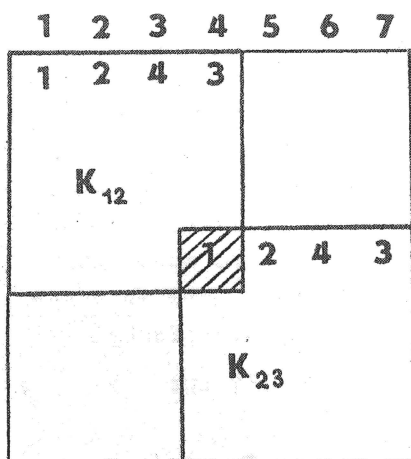
Obr. 18



Obr. 19



Obr. 20



Obr. 21

Síla F_3 musí být ovšem v tom případě nulová. Je-li matice jednoho prvku 4×4 , můžeme dvě matice adicí složit na matici pouze 6×6 podle schématu na obr. 19.

Jiný případ však nastane, nebude-li napětí spojité, např. budeme-li spojovat dva prvky různých průřezů podle obr. 20. Zde už obecně nebudou stejná napětí, posuvy u_4 se tedy v uzlu 2 neztotožní a výsledná matice bude mít velikost 7×7 . Předepsat můžeme pouze společný posuv v uzlu 2, jemuž přísluší přístupná vnější síla, kdežto derivace již společná nebude. Abychom mohli elementární matice náležitě složit, přeskupíme je tak, aby prvky příslušné přístupným zobecněným silám byly první a poslední v řádku (pořadí 1-2-4-3).

Po složení dostaneme matici na obr. 21.

Matice K_{23} není ovšem stejná s maticí K_{12} , neboť průřez prutu je jiný (K_{23} má prvky úměrně větší). Skryté jsou nyní síly F_2 , F_3 , F_5 a F_6 . Indexy odpovídají číslování prvků v celkové matici tuhosti. Řešení pak poskytne tři hodnoty zobecněných posuvů v uzlu 2, a to osový posuv u_4 a derivace posuvu zleva u_3 a zprava u_5 , jež se obecně navzájem liší. Samozřejmě, že bychom tuto větší matici mohli použít i pro případ stejných průřezů (obr. 18). Kdyby nebyla žádnou vnější silou porušena spojitost napětí, vyšlo by pak automaticky $u_3 = u_5$.

S obdobným problémem se setkáváme, jak jsme se již zmínili, při spojování desek, u nichž jsou zobecněnými posuvy také druhé derivace průhybů; ty se v místě náhlé změny tloušťky desky nespojitě mění. Příslušné skryté zobecněné síly mají pak rozměr $[N \cdot m^2]$ a nelze je rovněž zahrnout do okrajových podmínek, nejsou totiž v uzlech přístupné. */

16. příklad. Abychom blíže prozkoumali "záhadnou" povahu skryté zobecněné síly F_2 u tyče podle obr. 15, upneme tyč v uzlu 1 a zatížíme silou $F_2 = P\ell$ (zde P má rozměr $[N]$, je to tedy "fyzikální" síla).

*/ Deska je ovšem představována dvourozměrným kontinuem, takže druhé derivace jsou obecně tři (w_{xx} , w_{xy} , w_{yy}). Podrobnostmi se nebudeme zabývat.

Síly F_3 a F_4 jsou nulové. Použijeme-li matice z příkladu 13, dostaneme ihned výsledek

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{P}{ES} \begin{Bmatrix} 9 \\ l \\ 3 \end{Bmatrix}$$

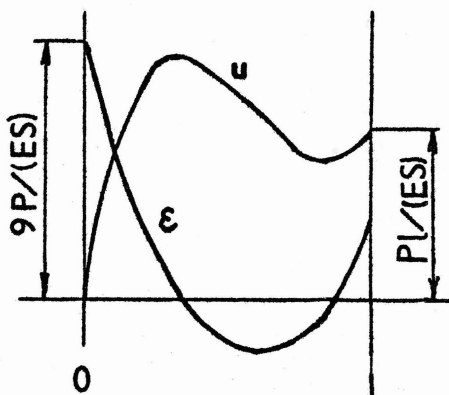
Je tedy

$$\begin{aligned} u_1 = u(0) &= 0 & u_3 = u(l) &= \frac{Pl}{ES} \\ u_2 = u'(0) &= \frac{9P}{ES} & u_4 = u'(l) &= \frac{3P}{ES} \end{aligned}$$

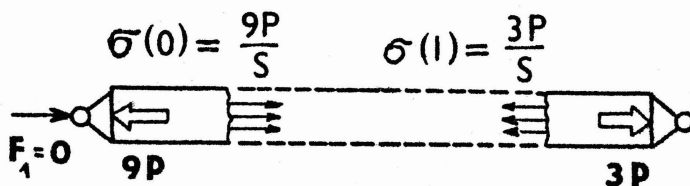
Reakce v místě vetknutí vyjde nulová

$$R_1 = -F_1 = -\frac{ES}{30l} \left(0 + 3l \frac{9P}{ES} - 36 \frac{Pl}{ES} + 3l \frac{3P}{ES} \right) = 0.$$

V závěsu tedy nepůsobí žádná síla; zobecněná síla F_2 nevyvolá žádnou reakci. Tyč, na pravém konci volná, se však prodlouží o $u_3 = Pl/(ES)$. Průběh posuvů $u(x)$ a poměrných prodloužení $\varepsilon = u'(x)$ je zakreslen na obr. 22. Protože nulová reakce $R_1 = 0$ nevyvolá nenulové napětí $\sigma(0) = E u'(0)$, musí na vnitřní straně uzlu působit osamělá síla $9P$, vzniklá působením F_2 (obr. 23). Není to však síla F_2 (a ani její část), neboť síla F_2 má jiný fyzikální rozměr, F_2 je toliko parametrem bez fyzikálního významu. Na vnitřní straně druhého uzlu působí obdobně síla $3P$. Rozdíl $6P$ je objemová síla, lineárně rozdělená po délce tyče (na jednotku délky připadá $ES u''(x)$).



Obr. 22



Obr. 23

Za zmínku ještě stojí, že předpis $u_1 = 0$, popř. $u_4 = 0$ (a ani předpis těchto podmínek zároveň) nevyklučuje možnost pohybu tyče jako tuhého celku,

takže dostaneme vždy jen singulární matici, vynecháme-li z celkové matice tuhosti (z čtvercové matice v rovnici (c), příklad 13) druhý nebo čtvrtý, popř. druhý i čtvrtý řádek a sloupec.

13. ZPŘESNĚNÍ METODY KONEČNÝCH PRVKŮ UŽITÍM CENTRÁLNÍCH ČÁSTÍ ELEMENTŮ

Vrátíme se ještě k náhradě pružného prutu elementem se čtyřmi uzly podle obr. 14. Odpovídá mu polynom třetího stupně (104). V úpravě (109) máme

$$u(x) = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + u_3 f_3(x) + u_4 f_4(x), \quad (109)$$

přičemž $f_i(x_j) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(x_i) = 1$.

Posuvy u_1 až u_4 nedostaneme v obecném případě přesně, budou zatíženy nějakou chybou, takže by rovnice (109) měla správně znít

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^4 (u_i + \varrho_i) f_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (110)$$

kde ϱ_i je chyba hodnoty u_i . Zpřesněnou hodnotu jsme označili vlnovkou.

Ptáme se nyní, jak se chyby ϱ_i projeví ve funkci (109) v intervalu $0 \leq x \leq l$. Vzdálenost uzlů označíme h , takže $l = 3h$. Podle Taylorovy řady

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \frac{1}{2} u''(0)x^2 + \frac{1}{6} u'''(0)x^3 + R_4, \quad (111)$$

kde Lagrangeův zbytek

$$R_4 = \frac{1}{24} u^{IV}(\xi) x^4, \quad 0 \leq \xi \leq l. \quad (112)$$

Podle (111) může polynom třetího stupně poskytnout funkční hodnoty $u_i = u(x_i)$ s chybou $\varrho_i = R_4(x_i)$; podle (112) vypočteme */

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 0 & \varrho_3 &= \frac{2}{3} u^{IV}(\xi) h^4 \\ \varrho_2 &= \frac{1}{24} u^{IV}(\xi) h^4 & \varrho_4 &= \frac{27}{8} u^{IV}(\xi) h^4. \end{aligned} \quad (113)$$

Hledanou chybu funkce $u(x)$ vypočteme z rovnice (110)

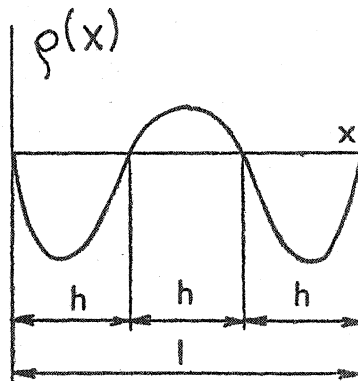
$$\begin{aligned} \varrho &= \tilde{u}(x) - u(x) = \sum_{i=1}^4 (u_i + \varrho_i) f_i(x) - \sum_{i=1}^4 u_i f_i(x) = \\ &= \sum_{i=1}^4 \varrho_i f_i(x) = \varrho(x). \end{aligned} \quad (114)$$

*/ Je totiž $x_1 = 0$; $x_2 = h$; $x_3 = 2h$; $x_4 = 3h = l$.

Funkce $q(x)$ je schematicky znázorněna na obr. 24. Je zřejmé, že chyba $q(x)$ je relativně malá v intervalu $h \leq x \leq 2h$, tj. mezi uzly 2, 3. Řešení metodou konečných prvků tedy můžeme zpřesnit, použijeme-li funkce $u(x)$ podle (109) jenom pro tuto centrální část prvku.

To ovšem znamená, že prvky musí na sebe navazovat vždy třemi uzly (a že na okrajích musíme přidat buď elementy s lineárním polynomelem, nebo elementy speciálního typu). Tedy za element 1 2 3 4 bychom připojili elementy 2 3 4 5, 3 4 5 6 atd. Podtržením vyznačujeme uzly omezující centrální interval, v němž je polynom příslušného prvku "aktivní". Komplikace výpočtu spočívá v tom, že nyní skládáme více elementárních matic. Celková matice tuhosti však zůstává při stejném dělení (při stejné síti uzlů) stejně velká; nezmění se ani šířka pásu této matice, vzroste však "zaplněnost" pásu nenulovými prvky.

Úvahu lze zobecnit i pro několikarozměrné prvky.



Obr. 24

14. MATICE TUHOSTI, MATICE PODDAJNOSTI A MATICE PŘENOSU

Základní rovnice pro řešení úloh z teorie pružnosti deformační metodou je

$$K \delta = F. \quad (115)$$

Zde K je matice tuhosti, δ vektor zobecněných posuvů a F vektor zobecněných sil. Např. pro element nosníku při rovinném ohybu jsme dostali v první části semináře tuto rovnici:

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ \hline -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}. \quad (116)$$

Má-li ohybová čára rovnici $y = y(x)$, mají zobecněné posuvy a síly tento význam (viz též obr. 7):

$$u_1 = y(0) \quad F_1 = V(0) = EJ y''(0)$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= -y'(0) & F_2 &= M(0) = EJ y''(0) \\
 u_3 &= y(l) & F_3 &= -V(l) = -EJ y'''(l) \\
 u_4 &= -y'(l) & F_4 &= -M(l) = -EJ y''(l).
 \end{aligned}$$

Čárkovanými čarami jsme rozdělili matice v rovnici (116) podle toho, vztahují-li se prvky matic k levému či k pravému konci nosníku; zkráceně

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ \hline K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{\alpha} \\ u_{\beta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{\alpha} \\ F_{\beta} \end{array} \right\} \quad (117)$$

Základní rovnice pro silovou metodu je

$$\delta = CF, \quad (118)$$

kde C je maticí poddajnosti (maticí příčinkových činitelů). Je-li konstrukce uložena na rámu, jsou některé posuvy nulové. Vynecháme-li v rovnici (115) řádky a sloupce příslušné těmto posuvům, dostaneme zmenšenou matici tuhosti, jejíž inverzí vzniká matice poddajnosti. Úplná matice tuhosti je, jak známo, singulární; teprve zmenšenou matici tuhosti lze invertovat.

V rovnici (116) jsme oddělili prvky podle toho, ke kterému konci nosníku se vztahují. Zvolíme-li toto kritérium jako základní, mohli bychom sloučit do jednoho vektoru všechny veličiny, vztahující se k těmto konci. Dostaneme tak "stavové vektory"

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{\alpha} \\ F_{\alpha} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{c} u_{\beta} \\ F_{\beta} \end{array} \right\},$$

mezi nimiž platí vztah

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{\beta} \\ F_{\beta} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} H_{\alpha\alpha} & H_{\alpha\beta} \\ \hline H_{\beta\alpha} & H_{\beta\beta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{\alpha} \\ F_{\alpha} \end{array} \right\}. \quad (119)$$

Tato rovnice udává, jak vypočteme "stav nosníku" na pravém konci, známe-li jeho stav, tj. průhyb, sklon, posouvající sílu a ohybový moment na levém konci. Matice H se nazývá maticí přenosu, udává totiž "přenos" informace o stavu nosníku z jednoho konce na druhý.

Rozepsáním (117) a (119) se snadno přesvědčíme, že platí

$$\begin{aligned}
 H_{\alpha\alpha} &= -K_{\alpha\beta}^{-1} K_{\alpha\alpha} & H_{\beta\alpha} &= K_{\beta\alpha} - K_{\beta\beta} K_{\alpha\beta}^{-1} K_{\alpha\alpha} \\
 H_{\alpha\beta} &= K_{\alpha\beta}^{-1} & H_{\beta\beta} &= K_{\beta\beta} K_{\alpha\beta}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{120}$$

Bývá zvykem uspořádat prvky ve stavových vektorech v pořadí u_1, u_2, F_2, F_1 , popř. u_3, u_4, F_4, F_3 . Přeskupíme-li matici přenosu ve shodě s tímto pořadím, dostaneme základní vztah pro nosníkový prvek ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ F_4 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EJ} & -\frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & -1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ F_2 \\ F_1 \end{Bmatrix}
 \tag{121}$$

Použijeme-li označení obvyklé v elementární teorii pružnosti podle obr. 25, změní se v matici přenosu H některá znaménka. Nakonec dostaneme */

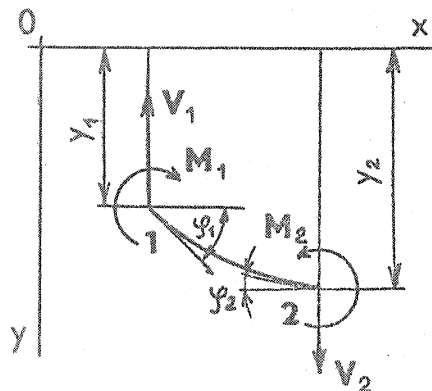
$$\begin{Bmatrix} y_2 \\ \varphi_2 \\ M_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2EJ} & -\frac{l^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EJ} & -\frac{l^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \varphi_1 \\ M_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}
 \tag{122}$$

čili

$$z_2 = H_{21} z_1,
 \tag{123}$$

kde z_1 , popř. z_2 značí stavový vektor v uzlu 1, popř. 2, H_{21} vyjadřuje přenos z uzlu 1 do uzlu 2.

Způsob řešení problémů z teorie pružných soustav pomocí matic přenosu se podobá známé metodě počátečních parametrů; je vlastně jejím zobecněním. Známe-li "počáteční" vektor a všechny matice přenosu, vypočteme kterýkoli stavový vektor postupným násobením těmito maticemi. Jsou-li v počátečním vektoru některé prvky neznámé, počítáme s nimi, jako bychom

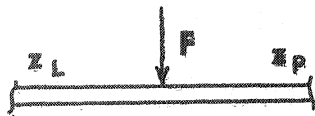


*/ Zde V značí posouvající sílu.

Obr. 25

je známi, a z podmínek platných pro prvky jiného (např. koncového) vektoru je dodatečně určíme. Každou nespojitou změnu stavových veličin lze vyjádřit pomocí nějaké matice přenosu. Z formálních důvodů přidáváme k vektorům jednotkový prvek a také matice přenosu rozšiřujeme o jeden řádek a sloupec, což nám umožní pohodlné vyjádření těchto skokových změn stavových hodnot.

Ukážeme to na příkladu. Působí-li např. na nosník osamělá síla podle obr. 26, dostaneme vektor pravé strany z_P pomocí vektoru levé strany z_L a matice přenosu P ve tvaru



Obr. 26

$$z_P = P z_L \quad (124)$$

přidáme-li k těmto vektorům jako pátý řádek jednotku a matici přenosu rozšíříme o jeden řádek a sloupec takto:

$$\begin{Bmatrix} y_P \\ \varphi_P \\ M_P \\ V_P \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_L \\ \varphi_L \\ M_L \\ V_L \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (125)$$

Poslední řádek vyjadřuje identitu $1 = 1$, přidaný sloupec v matici přenosu však dává v předposledním řádku vztah

$$V_P = V_L - F$$

a umožňuje tak zahrnout vnější sílu F do výpočtu.

Připojíme-li jako "vnější síly" tímto způsobem i setrvačné síly, popř. momenty podle d'Alembertova principu, můžeme matice přenosu užít i pro řešení úloh z dynamiky. Počítáme-li tak vlastní kmity, vstupuje do matic přenosu i neznámá vlastní kruhová frekvence. Zpravidla za ni dosazujeme odhadnutou přibližnou hodnotu, kterou pak zpřesňujeme tak, aby byly splněny všechny okrajové podmínky. Je to v podstatě známá Holzerova metoda.

17. příklad. Užitím matic přenosu určete namáhání a deformace nosníku podle obr. 27. Předpokládáme $l = 1$ m,

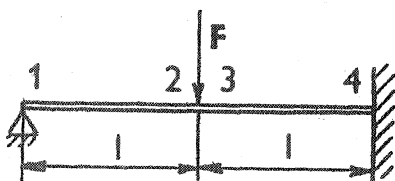
$$EJ = 1 \text{ Nm}^2.$$

Zřejmě bude platit

$$z_2 = H_{21} z_1; \quad z_3 = P_{32} z_2; \quad z_4 = H_{43} z_3, \quad (a)$$

a tedy

$$z_4 = H_{43} P_{32} H_{21} z_1 = A z_1. \quad (b)$$



Obr. 27

Přitom podle (122)

$$H_{21} = H_{43} = \frac{1}{6} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right] \quad (c)$$

Matice P_{32} je čtvercovou maticí ve vztahu (125). Vynásobením

$$A = H_{43} P_{32} H_{21} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} F \\ 0 & 1 & -2 & -2 & \frac{1}{2} F \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -F \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (d)$$

Vztah (b) má tedy tvar

$$\left\{ \begin{array}{l} y_4 = 0 \\ \varphi_4 = 0 \\ M_4 \\ V_4 \\ \hline 1 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} F \\ 0 & 1 & -2 & -2 & \frac{1}{2} F \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -F \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ \varphi_1 \\ M_1 = 0 \\ V_1 \\ \hline 1 \end{array} \right\} \quad (e)$$

Je zřejmé, že první a třetí sloupec v matici A můžeme vynechat, neboť se násobí nulou. Vzhledem k nulám v levém sloupci rozdělíme vektory a matici přenosu poněkud jinak

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_4 \\ V_4 \\ \hline 1 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} F \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} F \\ \hline 0 & 2 & -F \\ 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \\ V_1 \\ \hline 1 \end{array} \right\} \quad (f)$$

Z prvního řádku této složené matice plyne, že

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 2 & -\frac{4}{3} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{1}{6} F \\ \frac{1}{2} F \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \frac{F}{2} = \\ &= \frac{F}{48} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F}{8} \\ \frac{5F}{16} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (g)$$

Z druhého řádku - s vynecháním identity $1 = 1$ -

$$\begin{Bmatrix} M_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} F = \left(\begin{Bmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) F = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{8} F \\ -\frac{11}{16} F \end{Bmatrix} \quad (h)$$

Toto řešení souhlasí se známými vzorci

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{Fl^2}{8EJ} & V_1 &= \frac{5}{16} F \\ M_4 &= -\frac{3Fl}{8} & V_4 &= -\frac{11}{16} F \end{aligned}$$

Známe-li stavové vektory \bar{z}_1 a \bar{z}_4 , můžeme vypočítat i vektory \bar{z}_2 a \bar{z}_3 podle (a). To ponecháváme laskavému čtenáři.

15. DISKRETIZACE PRUŽNÉHO KONTINUA A OMEZENÍ POČTU STUPŇŮ VOLNOSTI V DYNAMICE

V dalším výkladu se omezíme jen na případ jednorozměrného kontinua, tj. na případ pružné tyče, jejíž namáhání je časově proměnné. Ve strojní praxi se nejčastěji vyskytují části zatížené periodickými silami, jež budí periodický pohyb (ve zvláštním případě harmonický pohyb). Pokud platí lineární teorie, lze periodický pohyb získat složením harmonických pohybů; tomu matematicky odpovídá rozvoj periodické funkce ve Fourierovu řadu. Aperiodický pohyb lze považovat za periodický s nekonečnou periodou; Fourierova řada přitom přejde ve Fourierův integrál.

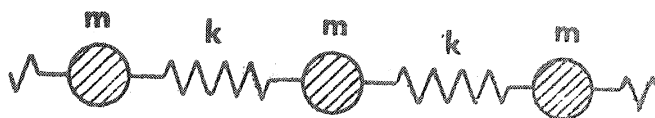
Mění-li se zvolna perioda budící síly, mění se i velikost jednotlivých harmonických složek vynuceného pohybu podle jejich "naladění" vzhledem k vlastním frekvencím, které zjišťujeme při volném kmitání. Výpočet těchto vlastních frekvencí je tedy jednou z nejdůležitějších úloh dynamiky strojů. Pružné těleso má však nekonečně mnoho vlastních frekvencí, neboť má nekonečně mnoho stupňů volnosti. Zpravidla má praktický význam jen několik málo nejnižších vlastních frekvencí (to záleží na "spektru" budících sil). Ty získáme dostatečně přesně i pro náhradní soustavu s omezeným počtem stupňů volnosti.

Inženýrskému myšlení patrně nejlépe vyhovuje omezení stupňů volnosti myšleným soustředěním hmoty do několika bodů spojených nehmotnými ideálními pružinami. Např. pružnou prizmatickou tyč můžeme nahradit soustavou hmot podle obr. 28. Soustava stej-

ných hmot m [kg] je spojena nehmotnými pružinami o tuhosti k [N m⁻¹]. Stačí, abychom tyč rozdělili na n stejných dílů o délce $h = l/n$.

Díly by ovšem nemusily být stejné. Zvolili jsme je tak

jen proto, aby se výpočet formálně zjednodušil. Hmotu soustředíme doprostřed každého dílu.



Obr. 28

Pak

$$m = \rho S h = \frac{\rho V}{n} ; \quad k = \frac{ES}{h} = \frac{nES}{l} \quad (126)$$

Místo diferenciální rovnice pro podélné kmity

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (127)$$

dostaneme soustavu pohybových rovnic

$$m \ddot{u}_i = k (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad (128)$$

kterou řešíme substitucí $u_i = \xi_i \sin(\Omega t - \psi)$. Pro vektor $\xi = \{\xi_i\}$ dostaneme z rovnice (128) problém vlastních hodnot

$$\Omega^2 \xi = A \xi \quad (129)$$

s pozitivně definitní maticí A . Např. pro tříhmotovou náhradu ($n = 3$) dostaneme

$$\Omega^2 \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (130)$$

Matice A má v tomto případě vlastní hodnoty

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \Omega_0^2 = 0, \\ \lambda_2 &= \Omega_1^2 = k/m, \\ \lambda_3 &= \Omega_2^2 = 3k/m. \end{aligned} \quad (131)$$

Tomu odpovídají tyto kruhové frekvence vlastních kmitů:

$$\Omega_0 = 0 \quad (\text{rovnoměrný pohyb tyče jako tuhého celku}),$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{první tvar kmitu}),$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \frac{3\sqrt{3}}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{druhý tvar kmitu}).$$

Přesné hodnoty nejnižších dvou vlastních frekvencí jsou ^{*}/

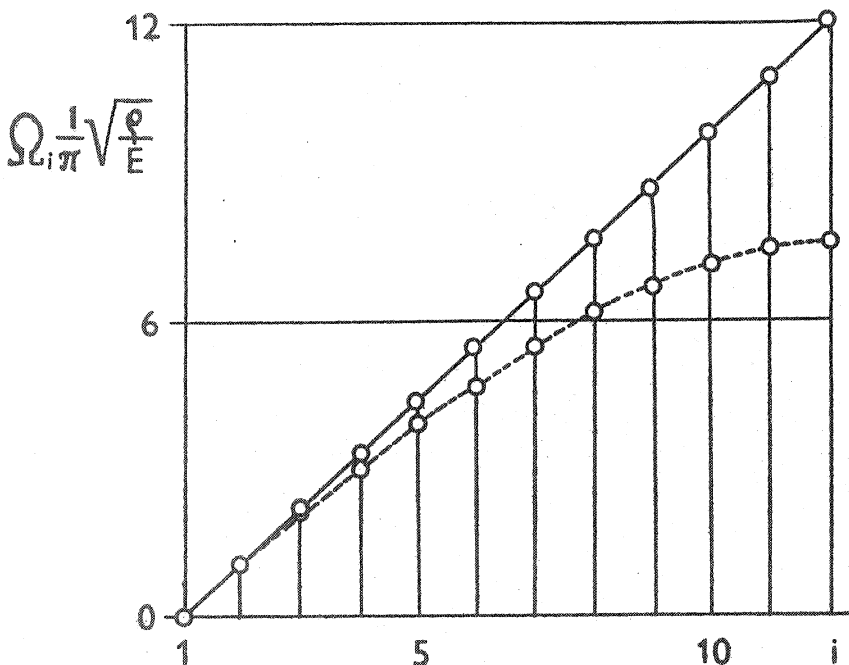
$$\Omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ; \quad \Omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Chyba je tedy jen 4,5 % v prvním případě a 21 % ve druhém případě. Zdá se tedy, že je vše v pořádku. Chyby se budou zmenšovat, volíme-li větší n , a diferenciální rovnice (128) přejde v diferenciální rovnici (127) (pro $n \rightarrow \infty$).

A přece zde existuje nepřekonatelný kvalitativní rozdíl mezi pružným kontinuem a soustavou hmotných bodů. Vlastní kruhové frekvence u pružné tyče jsou dány vzorcem

$$\Omega_i = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (132)$$

a jsou tedy úměrné pořadovému číslu i , kdežto u náhradního systému hmot-



Obr. 29

^{*}/ $2\pi = 6,283$;

$3\sqrt{3} = 5,19615$.

ných bodů tuto přímou úměru nikdy nedostaneme. Vždy bude $i \leq n$, tedy bude konečný počet vlastních frekvencí, a hodnoty $\Omega_i(i)$ budou při rostoucím n vytvářet sinusovku. Přímka (132) je k této sinusovce tečnou. Tyto dvě čáry nikdy nesplynou. Toto překvapující tvrzení nebudeme obecně dokazovat, ale doložíme je výpočtem pro dvanácti-hmotovou soustavu. Výsledky jsou zřejmými na obr. 29.

Popsanou metodu diskretizace tedy nelze bez větší chyby použít u rázově namáhaných těles, kde k věrnému popisu děje potřebujeme i harmonické složky vysokých řádů; ty vyjdou vždy zkreslené, jak je zřejmé z obr. 29.

V dalším textu se budeme zabývat možnostmi, které pro dynamiku poskytuje metoda konečných prvků.

16. APLIKACE METODY KONEČNÝCH PRVKŮ V ÚLOHÁCH Z DYNAMIKY

Podstatou metody konečných prvků (přesněji její deformační varianty) je náhrada skutečných průběhů posuvů $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ přibližnými funkcemi (polynomy), jež tvoří s posuvy vybraných uzlů lineární kombinaci. Posuvy konečného počtu uzlů tak jednoznačně určují posuvy v celé vyšetřované oblasti. Oblast přitom rozdělujeme (celkem libovolně) na konečný počet podoblastí (elementů); náhradní polynomy jsou obecně v různých elementech různé. Pro jeden takový element s posuvy uzlů u_1 , u_2, \dots, u_n bychom mohli symbolicky psát

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (133)$$

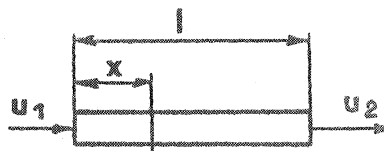
Prvky matice A jsou polynomy proměnných x, y, z .^{*/} V této úpravě jsme dostali - pro jednorozměrný případ - např. rovnici (107).

V některých případech platí vztah (133) přesně, v jiných přibližně. Je-li např. jednorozměrný prvek (tyč) zatížen pouze rovnoměrným tahem či tlakem, platí pro posuv $u = u(x)$ přesně tato rovnice (obr. 30):

$$\{u(x)\} = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (134)$$

Vyjadřuje lineární průběh posuvů. Rovnice (134) platí přesně ve staticce kde posuvy u_1, u_2 jsou konstantní. V úlohách z dynamiky to obecně neplatí, neboť tam závisejí posuvy uzlů na čase. Posuvy pak nemají ani u prizmatické tyče lineární průběh. Jsou dány funkcí $u(x, t)$ místa a času a platí pro ně diferenciální rovnice (127) s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u_1(t) \\ u(l, t) &= u_2(t) \end{aligned} \quad (135)$$



Obr. 30

^{*/} Bývá nazývána "maticí tvarových funkcí".

a s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ \dot{u}(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (136)$$

Tečkou označujeme derivaci podle času. Řešení můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2c}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \left[\frac{n\pi}{l} (\ell - x) \right] \int_0^t u_1(\tau) \sin \frac{n\pi c}{l} (t - \tau) d\tau + \\ &+ \frac{2c}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^t u_2(\tau) \sin \frac{n\pi c}{l} (t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (137)$$

kde $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ značí rychlost šíření podélných vln (zvuku) v elementu. Tvar (137) lze převést na (133), totiž na tvar

$$\{ u(x, t) \} = [a_1(x) \ a_2(x)] \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \quad (138)$$

jen ve dvou případech, a to v případě harmonického pohybu, kdy - pro $\frac{\omega l}{c} \neq n\pi$ - platí, že

$$u_1 = \xi_1 \sin(\omega t - \psi) ; \quad u_2 = \xi_2 \sin(\omega t - \psi)$$

$$a_1(x) = \cos \frac{\omega x}{c} - \cotg \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega x}{c}$$

$$a_2(x) = \operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega x}{c},$$

a pro případ velmi pozvolné změny $u_1(t)$, $u_2(t)$, např. pro

$$u_i(t) = \xi_i (1 - e^{-\beta t} - \beta t e^{-\beta t}), \quad (i = 1, 2),$$

$0 < \beta \ll 1$. Pro $\lim t \rightarrow \infty$ bude $u_1 = \xi_1$, $u_2 = \xi_2$. Pro $\lim \beta \rightarrow 0$ bude $a_1 = 1 - \frac{x}{l}$, $a_2 = \frac{x}{l}$. V tom případě dostaneme tedy v limitě rovnici (134).

Kromě dvou uvedených zvláštních případů nemůže rovnice (133) přesně platit. Může však představovat dobrou aproximaci řešení úloh z dynamiky, je-li počet uzlů dostatečně velký a odvozují-li se posuvy těchto uzlů z Lagrangeova principu i se zřetelem k setrvačným silám. Toto odvození nyní stručně vysvětlíme.

Rovnici (133) zapíšeme zkráceně ve tvaru ^{**/}

$$\{u\} = [A]\{q\} . \quad (139)$$

Známe-li průběh posuvů $\{u\}$ v souřadnicích x, y, z , můžeme z nich derivacemi odvodit složky přetvoření uspořádané do vektoru $\{\varepsilon\}$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} . \quad (140)$$

Matrice $[B]$ vznikne derivacemi prvků z matice $[A]$. Z Hookeova zákona plynou napětí

$$\{\sigma\} = [\alpha]\{\varepsilon\} = [\alpha][B]\{q\} . \quad (141)$$

Energie napjatosti \bar{U} v objemu V je pak ^{**/}

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon]^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V [q]^T [B]^T [\alpha] [B] \{q\} dV = \frac{1}{2} [q]^T [K] \{q\}, \quad (142)$$

kde $[K] = \int_V [B]^T [\alpha] [B] dV$ značí matici tuhosti.

Potenciál vnějších povrchových sil je

$$- \int_S [u]^T \{p\} dS = - \int_S [q]^T [A]^T \{p\} dS,$$

potenciál osamělých sil $\{F\}$ působících v uzlech je

$$- [q]^T \{F\}$$

a potenciál objemových sil $\{X\}$, zmenšených o setrvačné síly $\rho \{\ddot{u}\}$ podle d'Alembertova principu, je

$$- \int_V [u]^T (\{X\} - \rho \{\ddot{u}\}) dV = - \int_V [q]^T [A]^T (\{X\} - \rho [A] \{\ddot{q}\}) dV.$$

Čalková potenciální energie tedy je

$$\begin{aligned} \bar{U} + \bar{V} &= \frac{1}{2} [q]^T [K] \{q\} - [q]^T \int_S [A] \{p\} dS - [q]^T \{F\} - \\ &\quad - [q]^T \int_V [A]^T \{X\} dV + [q]^T \int_V \rho [A]^T [A] dV \{\ddot{q}\} . \end{aligned} \quad (143)$$

^{*}/ Vektor zobecněných posuvů uzlů označujeme nyní $\{q\}$, abychom předešli možnou záměnu s operačním znakem pro variaci δ .

^{**}/ Potenciální energii napjatosti a potenciál vnějších sil označujeme v této kapitole pruhem, abychom předešli možnou záměnu s jinými veličinami.

Variace této energie se musí rovnat nule, tj. má být

$$[\delta q]^T \frac{\partial (\bar{U} + \bar{V})}{\partial \{q\}} = \{0\} \quad (144)$$

Derivací podle vektoru, kterou jsme vysvětlili v druhé části semináře, pak dostaneme

$$[\delta q]^T \left([K] \{q\} - \int_S [A]^T \{p\} dS - \{F\} - \int_V [A]^T \{x\} dV - \int_V \rho [A]^T [A] dV \cdot \{\ddot{q}\} \right) = \{0\} \quad (145)$$

Protože $\{\delta q\}$ je libovolná variace, musí se výraz v oblé závorce rovnat nule. Zavedeme-li matici hmotnosti

$$[M] = \int_V \rho [A]^T [A] dV, \quad (146)$$

dostaneme anulováním oblé závorky v rovnici (145) a úpravou tento základní vztah:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} + \int_S [A]^T \{p\} dS + \int_V [A]^T \{x\} dV. \quad (147)$$

Týž vztah platí ovšem i pro úlohy ze statiky, dosadíme-li $\{\ddot{q}\} = \{0\}$; první člen pak odpadá. Poslední dva členy udávají, jak se povrchové síly a objemové síly nahrazují osamělými silami připojenými v uzlech.

Novým je tedy pro nás pouze první člen, který obsahuje matici hmotnosti podle definice (146).

18. příklad. Vypočtete matici hmotnosti pro prizmatický prut podle obr. 30, mění-li se posuv po délce tyče přibližně lineárně.

V tom případě platí, že

$$[A] = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l} \right], \quad (a)$$

takže

$$[M] = \rho \int [A]^T [A] dV = \rho S \int_0^l \left\{ \begin{matrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{matrix} \right\} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l} \right] dx. \quad (b)$$

Vypočteme

$$\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = l/3$$

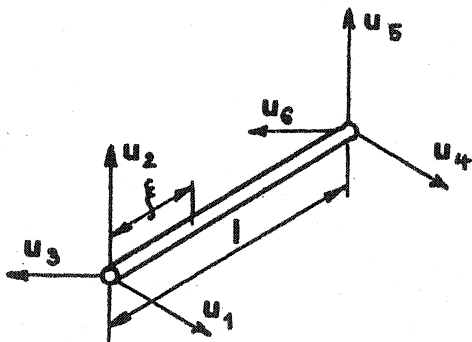
$$\int_0^l \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = l/6$$

$$\int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = l/3$$

Proto

$$[M] = \rho S l \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (c)$$

19. příklad. Vypočtete matici hmotnosti pro prizmatický prut, pohybující se malým zrychlením v prostoru.



Také v tomto případě budeme předpokládat lineární průběhy, takže podle obr. 31

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_1 + (u_4 - u_1) \nu \\ v(x, y, z) &= u_2 + (u_5 - u_2) \nu \\ w(x, y, z) &= u_3 + (u_6 - u_3) \nu \end{aligned} \quad (a)$$

kde $\nu = \xi/l$ značí bezrozměrný parametr. Soustava rovnic (a) má tvar

$$\{u\} = [A]\{q\}, \text{ kde}$$

Obr. 31

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 - \nu & 0 & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \nu & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu & 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

Vzorec (146) dává

$$[M] = \rho S l \int_0^l \begin{bmatrix} (1-\nu)^2 & 0 & 0 & (1-\nu)\nu & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu)^2 & 0 & 0 & (1-\nu)\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)^2 & 0 & 0 & (1-\nu)\nu \\ (1-\nu)\nu & 0 & 0 & \nu^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu)\nu & 0 & 0 & \nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)\nu & 0 & 0 & \nu^2 \end{bmatrix} d\nu$$

a tedy - s označením hmotnosti tyče $m = \rho S l$ -

$$M = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

17. FREKVENČNÍ ZÁVISLOST MATIC TUHOSTI A HMOTNOSTI

Pro případ podélných harmonických kmitů v prizmatické tyči platí, jak jsme již uvedli, rovnice (138) v tomto tvaru:

$$u(x, t) = \left[\left(\cos \frac{\omega x}{c} - \cotg \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega x}{c} \right) \left(\operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c} \sin \frac{\omega x}{c} \right) \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} . \quad (148)$$

Přitom

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t - \psi) ; \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} .$$

Protože $\varepsilon = \partial u / \partial x$, plyne derivací (148) podle x rovnice

$$\{\varepsilon\} = \left[-\frac{\omega}{c} \left(\sin \frac{\omega x}{c} + \cotg \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \right) \frac{\omega}{c} \left(\operatorname{cosec} \frac{\omega l}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \right) \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} , \quad (149)$$

což je rovnice (140). Řádková matice na pravé straně (149) je tedy totožná s maticí $[B]$. Podobně řádková matice ze vztahu (148) je totožná s maticí $[A]$ ze vztahu (133). Prvky těchto matic obsahují kruhovou frekvenci kmitání ω , což vadí při numerických výpočtech vlastních frekvencí. V tom případě totiž dostaneme z rovnic

$$\begin{aligned} [M] &= \int_V \rho [A]^T [A] dV \\ [K] &= \int_V [B]^T [\varkappa] [B] dV , \end{aligned} \quad (150)$$

kde $[\varkappa] = [E]$ (jednoprvková matice), maticí hmotnosti a maticí tuhosti závislou na vlastní kruhové frekvenci, kterou předem neznáme a teprve ji chceme počítat. Potíž vznikla hned na začátku tím, že prvky matice $[A]$ v rovnici (148) jsou závislé nejen na x , ale i na ω . Označíme-li některý

z těchto prvků $f(\omega, x)$, budeme moci tuto funkci rozvinout v Maclauri-
novu řadu podle mocnin ω

$$f(\omega, x) = f(0, x) + \frac{\partial f(0, x)}{\partial \omega} \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, x)}{\partial \omega^2} \omega^2 + \dots \quad (151)$$

Protože takovou řadu můžeme napsat pro všechny prvky matice $[A]$, dostane-
me tuto řadu:

$$[A] = [A_0] + [A_1] \omega + [A_2] \omega^2 + \dots \quad (152)$$

V ní matice $[A_i]$ obsahují pouze funkce x (a nikoli ω). Kratčeji odvo-
díme tyto matice rovnou z diferenciální rovnice (127), kam dosadíme

$$u(x, t) = ([A_0] + [A_1] \omega + [A_2] \omega^2 + \dots) \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t - \psi) \quad (153)$$

Dostaneme

$$c^2 ([A_0]'' + [A_1]'' \omega + \dots) \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t - \psi) + \\ + \omega^2 ([A_0] + [A_1] \omega + \dots) \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t - \psi) = 0. \quad (154)$$

Čárkou značíme derivaci podle x .

Porovnáme-li členy se stejnými mocninami ω , dostaneme

$$\begin{aligned} [A_0]'' &= [0] & c^2 [A_2]'' &= -[A_0] \\ [A_1]'' &= [0] & c^2 [A_3]'' &= -[A_1] \end{aligned} \quad (155)$$

atd. Tyto rovnice lze ihned integrovat. Okrajové podmínky přitom jsou
 $u(0, t) = u_1$, $u(l, t) = u_2$, přičemž $u(x, t)$ je dáno rovnicí (153).
Protože tyto podmínky musí platit pro jakékoli ω , musí je splňovat matice
 $[A_0]$, kdežto $[A_1]$, $[A_2]$ atd. pro $x=0$ i $x=l$ vymizí.

Budeme tedy mít - s označením $\nu = x/l$ -

$$\begin{aligned} [A_0] &= [(1-\nu) \quad \nu] \\ [A_1] &= [0 \quad 0] \\ [A_2] &= \frac{\rho l^2}{6E} [(2\nu - 3\nu^2 + \nu^3) \quad (\nu - \nu^3)] \\ [A_3] &= [0 \quad 0] \end{aligned} \quad (156)$$

atd. Matice $[A_0]$ přitom udává statické rozdělení posuvů, při kterém $\omega = 0$. Toto rozdělení je lineární. Další matice korigují toto rozdělení pro případ harmonického kmitání s kruhovou frekvencí $\omega > 0$.

Protože $\{\varepsilon\} = \frac{\partial}{\partial x} \{u\}$, zároveň však podle (140)

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t - \psi), \text{ dostaneme pro poměrné prodloužení řadu}$$

$$\{\varepsilon\} = ([B_0] + [B_1]\omega + [B_2]\omega^2 + \dots) \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t - \psi), \quad (157)$$

v níž

$$[B_i] = \frac{d}{dx} [A_i] \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Vyjde

$$\begin{aligned} [B_0] &= \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ [B_1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [B_2] &= \frac{\rho l}{6E} \begin{bmatrix} (2 - 6\nu + 3\nu^2) & (1 - 3\nu^2) \end{bmatrix} \\ [B_3] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (158)$$

atd. Dosazením řady (152) pro $[A]$ a obdobné řady pro $[B]$ do vztahů (150) vyjdou řady pro $[M]$ a $[K]$

$$\begin{aligned} [M] &= \rho \int_V ([A_0]^T + [A_2]^T \omega^2 + \dots)([A_0] + [A_2]\omega^2 + \dots) dV = \\ &= \rho \int_V [A_0]^T [A_0] dV + \rho \omega^2 \int_V ([A_0]^T [A_2] + [A_2]^T [A_0]) dV + \\ &+ \rho \omega^4 \int_V [A_2]^T [A_2] dV + \dots = \\ &= [M_0] + [M_2] \omega^2 + [M_4] \omega^4 + \dots, \end{aligned} \quad (159)$$

kde

$$[M_0] = \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[M_2] = \frac{2\rho^2 S l^3}{45 E} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

atd. Pro matici tuhosti vyjde

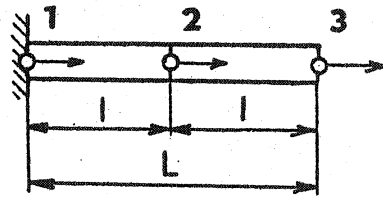
$$[K] = [K_0] + [K_4] \omega^4 + \dots, \quad (160)$$

kde

$$[K_0] = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_4] = \frac{\rho^2 S l^3}{45 E} \begin{bmatrix} 1 & 7/8 \\ 7/8 & 1 \end{bmatrix}$$

20. příklad. Určete vlastní kmity tyče na jednom konci vetknuté, na druhém volné (obr. 32). Použijeme nejprve dva prvky s lineárním průběhem posuvů, tj. vezmeme z řad (159) a (160) jen první člen. Adicí elementárních matic hmotnosti $[M_0]$ a tuhosti $[K_0]$ pro prvky 12 a 23 dostaneme celkovou matici



Obr. 32

$$[M] = \frac{\rho S l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\rho S L}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$[K] = \frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (b)$$

S nimi dostává rovnice (147) tvar

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{ \xi \} = \{ 0 \}, \quad (c)$$

čili

$$\left(-\frac{\omega^2 \rho S L}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (d)$$

Nyní použijeme okrajovou podmínku $u(0, t) = u_1(t) = \xi_1 \sin(\omega t - \psi) = 0$ (pro jakékoli t), takže $\xi_1 = 0$. Soustava (d) se tím zredukuje na rovnici

$$\left(-\frac{\omega^2 \rho S L}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (e)$$

kteřá má netriviální řešení jen tehdy, je-li determinant různý od nuly. S označením

$$\mu = \frac{\omega^2 \rho L^2}{24 E} \quad (f)$$

tak dostaneme

$$\begin{vmatrix} 2 - 4\mu & -1 - \mu \\ -1 - \mu & 1 - 2\mu \end{vmatrix} = 0, \quad (g)$$

odkud $7\mu^2 - 10\mu + 1 = 0$. Tato rovnice má kořeny

$$\mu_1 = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{7}; \quad \mu_2 = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{7}.$$

Tomu odpovídají vlastní kruhové frekvence

$$\omega_1 \doteq \frac{1,611}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \omega_2 = \frac{5,629}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Správné hodnoty jsou, jak známo,

$$\tilde{\omega}_1 \doteq \frac{1,571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \tilde{\omega}_2 \doteq \frac{4,7124}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Chyba je tedy u první frekvence 2,6 %, u druhé 19,5 %.

Výpočet metodou konečných prvků (deformační variantou) poskytl hodnoty vlastních frekvencí poněkud větší, než jaké dostaneme přesným řešením diferenciální rovnice (127) s příslušnými okrajovými podmínkami. Je to způsobeno tím, že jsme předpisem lineárního průběhu posuvů tyč "vyztužili" (omezili volnost posuvů). Každé zvýšení tuhosti při stejné hmotě způsobí zvýšení vlastních frekvencí.

K výpočtu připojíme ještě tuto poznámku: u soustav s velkým počtem stupňů volnosti se vyplatí převést rovnici (e) na standardní tvar

$$[A]\{u\} = \lambda\{u\} \quad (h)$$

Tuto úlohu lze lépe řešit na počítači, a to tím spíše, je-li matice $[A]$ souměrná. Kdybychom rovnici (e) násobili zleva inverzní maticí tuhosti, popř. inverzní maticí hmotnosti, nedostali bychom souměrnou matici.

Dvě matice jsou totiž komutativní jen tehdy, mají-li společné hlavní osy, což matice $[M]$ a $[K]^{-1}$ obecně nemají. Proto použijeme rozklad matice $[K]$ na dvě matice trojúhelníkové: */

$$[K] = [L][L]^T \quad (i)$$

Matice $[L]$ obsahuje nad hlavní diagonálou jen nulové prvky. K výpočtu prvků matice $[L]$ slouží Choleského metoda, uváděná běžně v učebnicích numerické matematiky.

Do rovnice

$$[M]\{\xi\} = \lambda [K]\{\xi\} \quad (j)$$

dosadíme (i) a dostaneme

$$[M]\{\xi\} = \lambda [L][L]^T\{\xi\} \quad (k)$$

Substitucí

$$[L]^T\{\xi\} = \{u\} \quad (l)$$

získáme tvar (h), v němž

$$[A] = [L]^{-1}[M][L]^{-T} \quad (m)$$

je již souměrnou maticí.

Zkusíme nyní použít zpřesněnou metodu konečných prvků. Přibráním matice $[A_2]$ podle (156) získáváme pro popis průběhu posuvů i polynomy třetího stupně, takže je vystihneme přesněji. Očekáváme tedy i podstatné zpřesnění ve výpočtu vlastních frekvencí.

Dosazením řad (159) a (160) do rovnice (c) vyjde

$$([K_0] - \omega^2 [M_0] + \omega^4 [K_4] - \omega^4 [M_2] + \dots)\{\xi\} = \{0\} \quad (n)$$

Vzhledem k okrajové podmínce $\xi_1 = 0$ stačí použít zmenšené matice 2×2

$$[K_0] = \frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [M_0] = \frac{\rho S l}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*/ Alternativně bychom tak mohli rozložit matici hmotnosti. To by bylo nutné, kdyby matice $[K]$ byla singulární.

$$[K_4] = \frac{\rho^2 S L^3}{2880 E} \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad [M_2] = \frac{\rho^2 S L^3}{1440 E} \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (o)$$

Dosadíme-li tyto matice do rovnice (n) a položíme determinant výsledné čtvercové matice rovným nule, dostaneme frekvenční rovnici pro μ podle (f)

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\mu^2}{10} \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right| = 0, \quad (p)$$

čili

$$\begin{vmatrix} 2 - 4\mu - 1,6\mu^2 & -1 - \mu - 0,7\mu^2 \\ -1 - \mu - 0,7\mu^2 & 1 - 2\mu - 0,8\mu^2 \end{vmatrix} = 0.$$

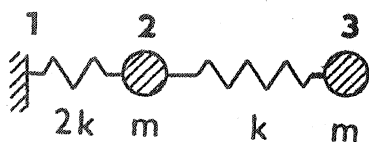
To je rovnice čtvrtého stupně

$$0,79\mu^4 + 5\mu^3 + 2,4\mu^2 - 10\mu + 1 = 0.$$

Vzhledem k definici (f) mají fyzikální význam jen kladné kořeny. Numerickým výpočtem získáme hodnoty

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0,1031 & \mu_2 &= 1,0569 \\ \omega_1 &= \frac{1,5730}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} & \omega_2 &= \frac{5,0363}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{aligned}$$

Chyba je tedy pouze 0,25 %, resp. 6,9 %.



Obr. 33

Pro srovnání uvedeme ještě výpočet diferenční metodou; tyč nahradíme dvěma hmotnými body na nehmotných pružinách podle obr. 33. Dostaneme

$$m = \frac{\rho S L}{2} \quad k = \frac{2ES}{L} \quad (q)$$

Z pohybové rovnice

$$k \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -m \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix}$$

vyjde pro $u_i = \xi_i \sin(\omega t - \psi)$, $i = 2, 3$, rovnice

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \omega^2 \frac{m}{k} \begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}.$$

To je však úloha o vlastních hodnotách $\lambda = \omega^2 \frac{m}{k}$, jejímž řešením dostaneme

$$\omega_1 \approx \frac{1,531}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \omega_2 \approx \frac{3,696}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Chyba těchto hodnot je 2,6 %, popř. 21,5 %. Není příliš velká, uvážíme-li, jak hrubým zjednodušením je náhrada tyče dvěma hmotami, jejichž umístění a uložení jsme volili se zřetelem k souměrnosti a nikoli podle úvah vycházejících z teorie kmitání pružných těles. Velkou nevýhodou této diferenční metody je, že nevíme předem, jsou-li vypočtené výsledky pod nebo nad správnými hodnotami; nelze je tedy použít k ohraničení správných výsledků. U deformační varianty metody konečných prvků jsme takové ohraničení získali, neboť tato metoda je založena na principu minima celkové potenciální energie.

18. O VLASTNOSTECH MATICE HMOTNOSTI

Nepůsobí-li na dané těleso (nebo soustavu těles) žádné povrchové ani objemové síly, zjednoduší se rovnice (147) na tvar

$$M\ddot{q} + Kq = F. \quad (161)$$

Zde M značí matici hmotnosti ($n \times n$),

K matici tuhosti ($n \times n$),

q vektor zobecněných posuvů uzlů ($n \times 1$),

F vektor zobecněných vnějších sil připojených v uzlech ($n \times 1$).

Rovnici (161) můžeme přisoudit jednoduchý fyzikální význam. Zavedeme vektor setrvačných sil $S = -M\ddot{q}$ a vektor elastických vratných sil v uzlech $P = Kq$ a budeme mít

$$P = F + S. \quad (162)$$

To znamená, že elastické síly udržují v rovnováze součet vnějších a setrvačných sil, jež jsou všechny redukovány do uzlů. Rozepíšeme-li i -tý řádek

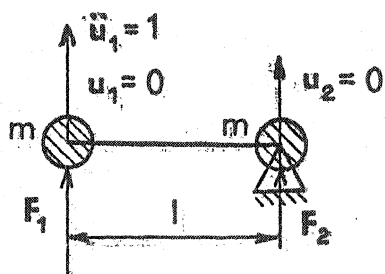
$P_i = F_i + S_i$ v soustavě rovnic (162), dostaneme

$$\begin{aligned} & k_{i1} u_1 + k_{i2} u_2 + \dots + k_{ij} u_j + \dots + k_{in} u_n = \\ & = F_i - m_{i1} \ddot{u}_1 - m_{i2} \ddot{u}_2 - \dots - m_{ij} \ddot{u}_j - \dots - m_{in} \ddot{u}_n. \end{aligned} \quad (163)$$

Tato rovnice umožní, abychom pochopili význam jednotlivých prvků v matici hmotnosti (popř. v matici tuhosti, ten však již známe). V rovnovážné poloze jsou všechny posuvy u_k nulové ($k = 1, 2, \dots, n$). Levá strana (163) tedy vymizí. Udělíme-li v této poloze jedinému j -tému uzlu takový impuls, aby získal zrychlení $\ddot{u}_j = 1 \text{ m s}^{-2}$, vznikne v i -tém uzlu setrvačná síla $S_i = -F_i = -m_{ij}$. Protože posuvy jsou nulové, můžeme si představit, že

uzly jsou na rámu zakotveny. Pak síla F_i představuje reakci v i -tém uzlu. Platí tedy: uložíme-li všechny uzly tělesa na rámu až na j -tý uzel, jemuž udělíme jednotkové zrychlení, vznikne v i -tém uzlu (okamžitá) reakce m_{ij} . Tato reakce je vzbuzena výhradně setrvačnými, nikoli elastickými silami, neboť posuvy jsou v tomto okamžiku nulové. Rovnice $F_i = m_{ij}$ platí číselně, nikoli rozměrově, neboť jsme dosadili $\ddot{u}_j = 1$.

K tomu připojíme ještě poznámku. Kdyby všechna hmota byla rozdělena tak,



Obr. 34

že by byla po částech soustředěna do uzlů, bylo by $m_{ij} = 0$ pro všechna $i \neq j$, tj. matice hmotnosti by byla diagonální. V tom případě by totiž silový impuls v j -tém uzlu vzbudil setrvačnou sílu jenom v tomto uzlu, v němž by bylo i těžiště soustředěné hmoty. Např. pro dvě hmoty podle obr. 34 při posuvech u_1, u_2 kolmých k ose tyče by platilo, že

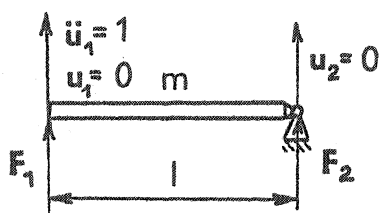
$$F_i = -S_i = m \ddot{u}_i \quad (164)$$

a reakce v uzlu 2 by byla nulová. Pro $\ddot{u}_1 = 1$ by bylo

$$F_1 = m = m_{11} ; \quad F_2 = m_{21} = 0 .$$

Obdobně by to platilo pro uvolněný uzel 2, kdybychom na rámu zakotvili uzel 1. Matice hmotnosti by tedy byla

$$M = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (165)$$



Obr. 35

Zato pro tuhou tyč s hmotou m rovnoměrně rozdělenou by platilo podle obr. 35, že

$$F_1 l = J \varepsilon = \frac{1}{3} m l^2 \frac{\ddot{u}_1}{l} ,$$

a odtud - pro $\ddot{u}_1 = 1$ -

$$F_1 = \frac{1}{3} m = m_{11} . \quad (166)$$

Protože zrychlení těžiště je $\ddot{u}_1 / 2$, je $F_1 + F_2 = m \ddot{u}_1 / 2 = m / 2$. Proto

$$F_2 = \frac{1}{6} m = m_{21} . \quad (167)$$

Vzhledem k souměrnosti máme ihned

$$M = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (168)$$

Jde-li o pružné těleso, přijímáme v metodě konečných prvků předpoklad (139) o rozdělení posuvů uvnitř každého prvku v závislosti na posuvech uzlů. Reakce v uzlech, a tedy i prvky m_{ij} matice hmotnosti, závisejí ovšem na tomto předpokladu. Explicitně je tato závislost vyjádřena rovnicí (146). Protože součin $A^T A$ dává souměrnou matici, je matice hmotnosti rovněž souměrná. Zpravidla je regulární, za určitých podmínek však může být i singulární. To závisí na idealizaci případu. Kdybychom např. u dvoumotové soustavy na obr. 34 zanedbali hmotu v uzlu 2, dostali bychom singulární matici hmotnosti

$$M = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (169)$$

Nyní se ještě zmíníme o tom, jak se mění matice hmotnosti při transformaci souřadnic. Přejít od lokální ke globální soustavě souřadnic je, jak známo, popsán rovnicemi

$$\bar{q} = Tq, \quad \text{popř.} \quad \bar{F} = TF, \quad (170)$$

v nichž T značí transformační matici, s kterou jsme se seznámili již v první části semináře. */ Pruhem je označena lokální soustava souřadnic a veličiny k ní vztahené. Ze základní rovnice v lokálních souřadnicích

$$\bar{M} \ddot{\bar{q}} + \bar{K} \bar{q} = \bar{F} \quad (171)$$

a z rovnic (170) plyne, že

$$\bar{M} T \ddot{q} + \bar{K} T q = TF. \quad (172)$$

Násobením maticí T^T zleva dostaneme

$$T^T \bar{M} T \ddot{q} + T^T \bar{K} T q = F. \quad (173)$$

Připomeňme, že transformační matice T je ortogonální. Proto $T^T = T^{-1}$. Z rovnice (173) získáme

$$M = T^T \bar{M} T \quad K = T^T \bar{K} T. \quad (174)$$

*/ V naší literatuře bývá též méně vhodně označována jako "matice přechodu".

Druhou z těchto rovnic jsme odvodili již v první části semináře. Je zřejmé, že matice hmotnosti a matice tuhosti se transformují stejně.

19. O KONDENZACI MATIC HMOTNOSTI A TUHOSTI

Kondenzace matice je poněkud nezvyklý pojem. Dosud jsme jej nepoužili, ačkoli s kondenzací matice tuhosti jsme se setkali už dříve, v druhé části semináře. Tehdy jsme hovořili o "eliminaci volných uzlů". Avšak touto eliminací jsme získali právě "kondenzovanou" matici tuhosti. Z úlohy */

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2=0 \end{array} \right\} \quad (175)$$

jame vyloučili posuvy $\{q_2\}$ a dostali tak rovnici

$$[K^*]\{q_1\} = \{p_1\}, \quad (176)$$

v níž se vyskytuje zmenšená, tj. kondenzovaná matice tuhosti

$$[K^*] = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}]. \quad (177)$$

Tento postup užíváme u velkých soustav, abychom zmenšili řád matice tuhosti, za což platíme rozšířením pásu matice a popř. i úplnou ztrátou její pásovosti.

Zmenšení řádu matic tuhosti a hmotnosti je zvlášť důležité u úloh z dynamiky, neboť výpočet vlastních hodnot a vlastních vektorů u velkých matic je značně náročná operace. Z praktického hlediska bývá jen několik nejnižších vlastních hodnot a jim příslušných vlastních vektorů důležitých, takže je i zbytečné, počítat je všechny. Existují matematické metody, kterými počítáme vlastní hodnoty postupně, počínaje od nejvyšší nebo od nejnižší vlastní hodnoty. Kondenzace matic však má tu výhodu, že je založena též na fyzikálních základech a že pronikavě snižuje pracnost výpočtů (ovšem za cenu menší dosažitelné přesnosti).

Základní myšlenkou je tedy eliminace některých málo důležitých uzlů z výpočtu. Ve statice to byly "volné" uzly, u nichž nebyl předepsán ani posuv, ani vnější síla. Eliminací těchto uzlů jsme v úlohách ze statiky nijak nezměnili přesnost řešení. Byli jsme dokonce schopni doplnit výpočty a získat dodatečně posuvy i eliminovaných uzlů. V dynamice je tomu jinak.

*/ V souladu s rovnicí (162) jsme nyní zavedli označení

$$[K]\{q\} = [K]\left\{ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} \right\} = \{P\} = \left\{ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right\}$$

Kondenzací matic hmotnosti a tuhosti snižujeme stupeň volnosti úlohy, a tím i dosažitelnou přesnost řešení.

Výběr uzlů, které chceme eliminovat, musíme tedy vážit i se zřetelem k předpokládaným tvarům vlastních kmitů a k počtu vlastních frekvencí, které chceme získat. ^{*}/ Lze postupovat dvěma způsoby.

1. způsob. Předpokládejme, že vektor posuvů $\{q\}$ rozdělíme na dvě submatice $\{q_1\}$ a $\{q_2\}$, přičemž posuvy $\{q_2\}$, které jsme použili ve statické úloze, chceme při výpočtu vlastních frekvencí eliminovat. Z rovnice (161) dostaneme pro případ volného kmitání ($F = 0$) základní rovnici

$$Kq = \omega^2 Mq \quad (178)$$

a po rozepsání a s označením $\lambda = \omega^2$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (179)$$

Levá strana značí vektor elastických vratných sil, pravá strana síly setrvačné.

Označíme-li vektor elastických vratných sil $\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$, budeme mít ^{**}/

$$\begin{aligned} K_{11} q_1 + K_{12} q_2 &= P_1 \\ K_{21} q_1 + K_{22} q_2 &= P_2 \end{aligned} \quad (180)$$

Eliminace uzlů znamená, že v nich zanedbáváme setrvačné (a tedy i elastické vratné) síly. Proto položíme $P_2 = 0$ a z druhé z rovnic (180) dostaneme

$$q_2 = \alpha q_1, \quad (181)$$

kde

$$\alpha = -K_{22}^{-1} K_{21}$$

Z první rovnice pak plyne

$$K^* q_1 = P_1,$$

^{*}/ Spíše než o eliminaci uzlů bychom měli hovořit o eliminaci posuvů a sil, neboť nemusíme nutně eliminovat všechny posuvy a síly v daném uzlu.

^{**}/ Submatice P_1, P_2 je třeba rozlišit od jednotlivých sil $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$.

přičemž K^* se shoduje se (177). Výsledný vektor posuvů je tedy

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K^{*-1} \\ \alpha K_1^{*-1} \end{bmatrix} \{p_1\} = \begin{bmatrix} I \\ \alpha \end{bmatrix} [K^*]^{-1} \{p_1\}. \quad (182)$$

Nyní je třeba rozhodnout, jaký důsledek bude mít předpoklad $p_2 = 0$ pro matici hmotnosti. Budeme požadovat, aby virtuální práce úplné soustavy

$$\delta A = [\delta q_1^T; \delta q_2^T] \left([M] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \right) \quad (183)$$

byla stejná jako u soustavy s kondenzovanými maticemi

$$\delta A^* = [\delta q_1^T] \left([M^*] \{\ddot{q}_1\} + [K^*] \{q_1\} \right). \quad (184)$$

Jedině tak dosáhneme toho, že i nadále bude splněn Lagrangeův variační princip. Avšak podle (181) platí, že $\delta q_2 = \alpha \delta q_1$, takže

$$\delta A = [\delta q_1^T] \begin{bmatrix} I \\ \alpha \end{bmatrix} \left([M] \begin{bmatrix} I \\ \alpha \end{bmatrix} \{\ddot{q}_1\} + [K] \begin{bmatrix} I \\ \alpha \end{bmatrix} \{q_1\} \right). \quad (185)$$

Ze srovnání (185) se (184), totiž z rovnice $\delta A = \delta A^*$, plyne

$$[M^*] = \begin{bmatrix} I \\ \alpha \end{bmatrix} [M] \begin{bmatrix} I \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (186)$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} I \\ \alpha \end{bmatrix} [K] \begin{bmatrix} I \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (187)$$

Tyto rovnice zapišeme zkráceně takto:

$$M^* = L^T M L \quad (188)$$

$$K^* = L^T K L, \quad (189)$$

kde

$$[L] = \begin{bmatrix} I \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{21}^{-1} K_{22} \end{bmatrix}. \quad (190)$$

Rozepíšeme-li rovnici (189) s použitím (190), dostaneme - s přihlédnutím k souměrnosti matice tuhosti - též výraz pro kondenzovanou matici tuhosti

jako ve staticce, totiž (167). Problém vlastních hodnot soustavy (168) nyní přejde na problém redukovaný

$$K^* q_1 = \omega^2 M^* q_1 \quad (191)$$

s kondenzovanými maticemi podle (188) a (189).

2. způsob. K témuž výsledku dospějeme též oklikou formulací problému vlastních hodnot nikoli pro vektor posuvů $\{q_1\}$, ale pro vektor sil $\{P_1\}$. Dokonce se nám podaří dospět k cíli rychleji a bez přeskupování vektoru posuvů $\{q\}$ (s libovolným pořadím prvků) do uspořádaného vektoru $\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$. Toto přeskupení nahradíme transformací pomocí incidenční matice.*/ Z n sil P_1, P_2, \dots, P_n vybereme m sil, které ponecháme i v úloze z dynamiky a které tvoří vektor $\{P_1\}$. Výběr uskutečníme předpisem

$$\{\tilde{P}\} = [N]\{P_1\} \quad (192)$$

Vektor $\{\tilde{P}\}$ se liší od vektoru $\{P\}$ jen tím, že obsahuje nuly na $n-m$ místech příslušných vektoru $\{P_2\}$. Incidenční matice $[N]$ je obdélníková o velikosti $n \times m$. Kdybychom např. chtěli ze tří sil $[P_1, P_2, P_3]^T$ eliminovat sílu P_2 , byla by rovnice (192) tato:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{Bmatrix}.$$

Jak jsme již uvedli, incidenční matice dává vektor $\{\tilde{P}\} = [N]\{P_1\}$, aniž musíme prvky vektoru $\{P_1\}$ řadit zvlášť. Zařadíme-li je však zvlášť, bude mít matice $[N]$ speciální tvar

$$[N] = \begin{bmatrix} I \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \quad (193)$$

V tom případě bude rovnice (192)

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2=0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \{P_1\} \quad (194)$$

*/ S touto maticí jsme se setkali již v druhé části semináře. Název je převzat z teorie grafů.

V uvedeném příkladu by bylo

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \\ \hline P_2=0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{Bmatrix} .$$

Zanedbáme-li nyní v rovnici $Kq = P$ prvky příslušné eliminovaným silám, dostaneme rovnici $Kq = \tilde{P}$. Ve statické tato rovnice platila přesně, neboť na eliminované uzly nepůsobila žádná vnější síla. V dynamice to vlastně znamená, že jsme v těchto uzlech vyloučili také podíl setrvačných sil, které se obecně nule nerovnají.

Budeme tedy mít

$$Kq = N P_1 \quad (195)$$

a odtud

$$q = K^{-1} N P_1 = C P_1, \quad (196)$$

kde

$$C = K^{-1} N. \quad (197)$$

Matice poddajnosti C je definována jen pro konstrukci uloženou tak, aby byl vyloučen pohyb konstrukce jako tuhého celku (jinak by byla matice tuhosti singulární).

Ve zvláštním případě uspořádaných vektorů podle (184) by platilo

$$[C] = [K]^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} \\ \hline -K_{22}^{-1} K_{21} (K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}) \end{bmatrix} \quad (198)$$

což lze pomocí definic (181) a (177) zapsat jako

$$[C] = \begin{bmatrix} I \\ \hline \chi \end{bmatrix} [K^*]^{-1}. \quad (199)$$

Matici v rovnici (198) odvodíme tak, že napíšeme

$$K^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right].$$

Submatice C_{ij} vypočteme tak, že rozepíšeme identitu

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

a po výpočtu dosadíme do (198)

$$[C] = \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} C_{11} \\ C_{21} \end{array} \right]$$

Nyní - s použitím obdélníkové matice $[C]$, která má stejnou velikost jako $[M]$, totiž $n \times m$ - budeme transformovat problém z n -rozměrného prostoru do m -rozměrného prostoru. Nejprve dosadíme (196) do (178) a dostaneme

$$KC \rho_1 = \lambda MC \rho_1 \quad (200)$$

Tuto rovnici znásobíme zleva maticí C^T

$$(C^T K C) \rho_1 = \lambda (C^T M C) \rho_1 \quad (201)$$

Matice v oblých závorkách mají velikost $(m \times n)$ $(n \times m)$ $(n \times m)$ a dávají tedy výslednou matici $m \times m$. S označením

$$\begin{aligned} K^{**} &= C^T K C \\ M^{**} &= C^T M C \end{aligned} \quad (202)$$

tak dostaneme standardní problém vlastních hodnot v prostoru $m \times m$

$$[K^{**}] \{\rho_1\} = \lambda [M^{**}] \{\rho_1\} \quad (203)$$

Diskuse. Nyní dokážeme, že oba popsané způsoby dají stejné výsledky. Jde-li o uspořádaný vektor sil podle (194), platí pro C rovnice (199), takže

$$\begin{aligned} [K^{**}] &= [K^*]^{-1} [I; \lambda^T] [K] \left[\begin{array}{c} I \\ \lambda \end{array} \right] [K^*]^{-1} = \\ &= [K^*]^{-1} [K^*] [K^*]^{-1} = [K^*]^{-1} \end{aligned} \quad (204)$$

a podobně

$$[M^{**}] = [K^*]^{-1} [M^*] [K^*]^{-1} \quad (205)$$

Dosazením do (193) dostaneme

$$K^{*-1} P_1 = \lambda K^{*-1} M^* K^{*-1} P_1. \quad (206)$$

S přihlédnutím ke (176) to znamená, že

$$q_1 = \lambda K^{*-1} M^* q_1, \quad (207)$$

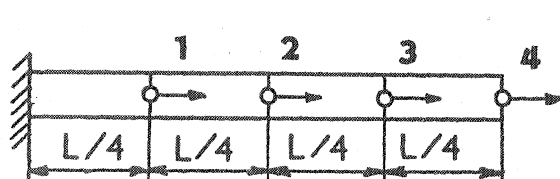
což - po vynásobení maticí K^* zleva - dá právě rovnici (191)

$$K^* q_1 = \lambda M^* q_1 = \omega^2 M^* q_1. \quad (208)$$

Rovnice (203) dá tedy stejné vlastní hodnoty jako (191).

Nakonec ještě poznamenejme, že z fyzikálního hlediska je matice K^{**} vlastně maticí poddajnosti; rovnice (203) vyjadřuje rovnost dvou vektorů zobecněných posuvů. Podle (204) a (176) poznáváme, že jde o vlastní vektor $\{q_1\}$.

21. příklad. U tyče podle obr. 36 máme matici tuhosti (v pořadí prvků 1 - 2 - 3 - 4)



Obr. 36

$$K = \frac{4ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a matici hmotnosti

$$M = \frac{\rho SL}{24} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Přejeme si eliminovat posuvy u_1 , u_3 , tzn., že anulujeme síly P_1 a P_3 . Přeskupená matice tuhosti bude mít pořadí 2 - 4 - 1 - 3

$$K = \frac{4ES}{L} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right]$$

a přeskupená matice hmotnosti

$$M = \frac{\rho S L}{24} \begin{bmatrix} 4 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 2 & | & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & | & 4 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Nyní bude

$$-K_{22}^{-1} K_{21} = - \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

a matice L podle (190) vyjde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Kondenzované matice pak jsou - podle (189) -

$$K^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \frac{4ES}{L} =$$

$$= \frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^* = \frac{\rho S L}{12} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a vlastní hodnoty vyjdou z rovnice (191)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

kde

$$\lambda = \frac{\omega^2 L^2}{24} \frac{\rho}{E}$$

Odtud dostaneme

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \mp 3\sqrt{2}}{7}$$

a vlastní kruhové frekvence

$$\omega_1 = \frac{1,611}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} ; \quad \omega_2 = \frac{5,629}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

stejně jako v první alternativě řešení příkladu 20.

Nyní ukážeme ještě druhý způsob kondenzace. Incidenční matice bude

$$[N] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

a inverzní matice tuhosti (s původním uspořádáním prvků 1 - 2 - 3 - 4)

$$K^{-1} = \frac{L}{4ES} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Matice

$$C = K^{-1}N = \frac{L}{4ES} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a kondenzované matice (202)

$$K^{**} = \frac{L}{4ES} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{L}{2ES} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^{**} = \frac{\rho L^3}{384 E^2 S} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\rho L^3}{48 E^2 S} \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}.$$

Tak dostaneme podle (203)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 L^2 \rho}{24 E} \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 11 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_4 \end{Bmatrix}.$$

Vlastní hodnota tohoto problému je

$$\frac{\omega^2 L^2 \rho}{24 E} = \frac{5 \mp 3\sqrt{2}}{7}$$

stejná jako dříve.

Zkusíme nyní eliminovat z výpočtu uzly 3 a 4, což je jistě méně vhodné. V tom případě dostaneme první metodou

$$K^* = \frac{4ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^* = \frac{\rho LS}{24} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$$

a druhou metodou

$$K^{**} = \frac{L}{4ES} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^{**} = \frac{\omega^2 L^2 \rho}{96 E} \begin{bmatrix} 20 & 35 \\ 35 & 64 \end{bmatrix}$$

a z obou metod pak tyto stejné výsledky

$$\omega_1 = \frac{1,724}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} ; \quad \omega_2 = \frac{7,508}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} .$$

Chyba je v tomto případě 10 %, popř. 59 %, tedy podstatně větší, jak jsme také očekávali. Všimněme si, že v souladu s (204) vskutku platí, že $K^{**} = K^{*-1}$.

20. ODVOZENÍ MATICE HMOTNOSTI Z KINETICKÉ ENERGIE

Utvoříme-li kvadratickou formu matice tuhosti K s vektorem posuvů q , dostaneme

$$q^T K q = q^T F = 2U, \quad (209)$$

tedy dvojnásobek potenciální energie napjatosti při daných statických posuvech q .

Dokážeme, že kvadratická forma matice hmotnosti s vektorem rychlosti \dot{q} má význam dvojnásobku kinetické energie W , že tedy platí

$$\dot{q}^T M \dot{q} = 2W. \quad (210)$$

Tato kinetická energie je totiž dána objemovým integrálem

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \rho \, dV. \quad (211)$$

Podle (133) však

$$\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 = [\dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w}] \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} = \dot{q}^T A^T A q, \quad (212)$$

takže podle (211) a (146)

$$W = \frac{1}{2} \dot{q}^T \int_V \rho A^T A \, dV \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q}, \quad (213)$$

což jsme chtěli dokázat.

Pohybovou rovnici pak můžeme snadno odvodit také ze známých Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial U}{\partial q} = F \quad (214)$$

Podle pravidel o derivování skaláru podle vektoru, jež jsme objasnili v druhé části semináře, dostaneme z rovnice (214) - po dosazení z (209) a (213) - pohybovou rovnici

$$M\ddot{q} + Kq = F \quad (215)$$

Jak známo, můžeme počítat jednotlivé prvky matice tuhosti ze vztahů

$$k_{ij} = \frac{\partial U}{\partial u_i \partial u_j} \quad (216)$$

Pak musí analogicky platit i pro prvky matice hmotnosti, že

$$m_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \dot{u}_i \partial \dot{u}_j} \quad (217)$$

22. příklad. Určíme matici hmotnosti pro element nosníku podle obr. 37.



Obr. 37

Posuvy jsou při statickém zatížení dány polynomem třetího stupně

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \quad (218)$$

Jeho první derivace je

$$y'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2$$

Protože $u_1 = y(0)$, $u_2 = -y'(0)$, $u_3 = y(l)$ a $u_4 = -y'(l)$, dostaneme po úpravě

$$y(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x) \ f_4(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix},$$

čili

$$y(x) = [A(x)] \{q\}, \quad (219)$$

kde

$$f_1(x) = (1-\nu)^2(1+2\nu)$$

$$f_2(x) = -\nu(1-\nu)^2 l$$

$$f_3(x) = \nu^2(3-2\nu)$$

$$f_v(x) = (1-\nu) \nu^2 l$$

$$\nu = \frac{x}{l}$$

Rozepsáním (213) dostaneme

$$W = \frac{1}{2} \rho S \int_0^l (\dot{q}^T A^T)(A \dot{q}) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \rho S \int_0^l (\dot{u}_1 f_1 + \dot{u}_2 f_2 + \dot{u}_3 f_3 + \dot{u}_4 f_4)^2 dx \quad (220)$$

a konečně podle (217)

$$m_{ij} = \rho S l \int_{\nu=0}^1 f_i(\nu) f_j(\nu) d\nu. \quad (221)$$

Integrací vyjde - pro $i, j = 1, 2, \dots, 4$ - celkem

$$[M] - [m_{ij}] = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22 l & 54 & 13 l \\ -22 l & 4 l^2 & -13 l & -3 l^2 \\ 54 & -13 l & 156 & 22 l \\ 13 l & -3 l^2 & 22 l & 4 l^2 \end{bmatrix}. \quad (222)$$

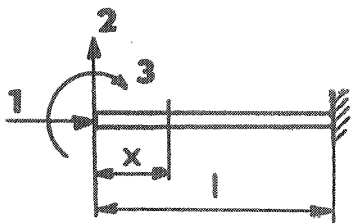
Při odvození této matice jsme vycházeli pouze z průhybů platných pro statické namáhání. Neuvažujeme tedy korekci (159) pro $\omega > 0$, a ovšem ani setrvačné síly vzniklé rotací průřezů. Naše matice je tedy maticí $[M_0]$ v rovnici (159).

21. NELINEÁRNÍ PŘÍPADY - ELASTICKÁ STABILITA KONSTRUKCÍ

V poslední kapitole věnujeme pozornost otázkám elastické stability kovových konstrukcí. Na jednoduchých příkladech ukážeme, jak lze v těchto případech využít deformační metodu konečných prvků (popř. přímou deformační metodu).

Mez elastické stability se vyznačuje tím, že řešení pozbývá jednoznačnosti; kromě rovnovážné polohy tělesa (nebo soustavy těles) v původním geometrickém tvaru je možná i rovnováha v tvaru infinitezimálně pozměněném. Chceme-li tento druhý případ vyšetřit, musíme sledovat změnu vnitřních statických účinků při předpokládané změně geometrického tvaru, musíme tedy použít tzv. teorii druhého řádu. V tom případě závisí tuhost konstrukce také na deformaci, takže závislost deformace na zatížení se stává nelineární,

a to i tehdy, je-li namáhání v mezích úměrnosti, tj. platí-li lineární závislost složek přetvoření na složkách napjatosti, což budeme i nadále předpokládat.



Obr. 38

Abychom si objasnili možnosti, které pro tento případ poskytuje metoda konečných prvků, začneme s jednoduchým případem vetknuté vzpěry podle obr. 38. Průřez vzpěry je konstantní. Ohybový moment ve vzdálenosti x od levého konce je

$$M_0(x) = F_1(\delta - y) + F_2 x + F_3, \quad (223)$$

značí-li $\delta = y(0)$ průhyb konce vzpěry. Z diferenciální rovnice ohybové čáry

$$EJ y''(x) = M_0(x), \quad (224)$$

čili - s označením $\beta = l \sqrt{F_1/(EJ)}$ - z rovnice

$$y'' + \left(\frac{\beta}{l}\right)^2 y = \left(\frac{\beta}{l}\right)^2 \left(\delta + \frac{F_2}{F_1} x + \frac{F_3}{F_1}\right) \quad (225)$$

vyjde

$$y = C_1 \sin \frac{\beta x}{l} + C_2 \cos \frac{\beta x}{l} + \delta + \frac{F_2}{F_1} x + \frac{F_3}{F_1}. \quad (226)$$

Konstanty C_1 , C_2 a průhyb δ určíme z okrajových podmínek

$$y(l) = 0; \quad y'(l) = 0; \quad y(0) = \delta. \quad (227)$$

Zkrácení tyče silou F vypočteme přímo z Hookeova zákona. Po úpravě vyjde

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \quad (228)$$

V této rovnici značí

$$u_1 = -\Delta l = \text{zkrácení tyče} = \frac{F_1 l}{ES},$$

$$u_2 = y(0) = \delta,$$

$$u_3 = -y'(0).$$

Prvky c_{ij} matice poddajnosti závisejí na parametru β , tj. na síle F_1 . Proto nelze z rovnice (228) vypočítat vektor sil $\{F\}$ pouhou inverzí

matice poddajnosti, neboť i tato inverzní matice bude záviset na síle F_1 .
 Jednotlivé prvky matice poddajnosti vyjdou takto:

$$c_{11} = \frac{l}{ES} \quad c_{12} = c_{21} = 0 \quad c_{13} = c_{31} = 0$$

$$c_{22} = \frac{l^3}{3EJ} \frac{\operatorname{tg} \beta - \beta}{\frac{1}{3} \beta^3}$$

$$c_{23} = c_{32} = \frac{l^2}{EJ} \frac{1 - \cos \beta}{\beta^2 \cos \beta}$$

$$c_{33} = \frac{l}{EJ} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta}$$

Naštěstí vstupuje do matice poddajnosti jediný prvek z vektoru sil, totiž osová síla F_1 . Na té bude záviset i matice tuhosti

$$K = C^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (229)$$

Inverzí matice poddajnosti vypočteme

$$k_{11} = \frac{1}{c_{11}} = \frac{ES}{l}$$

$$k_{12} = k_{21} = k_{13} = k_{31} = 0$$

$$k_{22} = \frac{c_{33}}{c_{22} c_{33} - c_{23}^2} = \frac{EJ}{l^3} \frac{\beta^3 \sin \beta}{2 - \beta \sin \beta - 2 \cos \beta}$$

$$k_{23} = k_{32} = -\frac{c_{23}}{c_{22} c_{33} - c_{23}^2} = -\frac{EJ}{l^2} \frac{\beta^2 (1 - \cos \beta)}{2 - \beta \sin \beta - 2 \cos \beta}$$

$$k_{33} = \frac{c_{22}}{c_{22} c_{33} - c_{23}^2} = \frac{EJ}{l} \frac{\beta (\sin \beta - \beta \cos \beta)}{2 - \beta \sin \beta - 2 \cos \beta}$$

Abychom mohli u složitých konstrukcí plně využít výhody maticové algebry, rozvineme prvky matice tuhosti v řadu mocnin β , v níž nakonec ponecháme jen členy nejvýše druhého stupně. Tak dostaneme

$$k_{22} = \frac{EJ}{l^3} \frac{\beta^4 - \frac{\beta^6}{6}}{2 - \beta^2 + \frac{\beta^4}{6} - \frac{\beta^6}{120} - 2 + \beta^2 - \frac{\beta^4}{12} + \frac{\beta^6}{360}} =$$

$$= \frac{EJ}{l^3} \frac{\beta^4 - \frac{\beta^6}{6}}{\frac{\beta^4}{12} - \frac{\beta^6}{180}} = \left(12 - \frac{6}{5}\beta^2\right) \frac{EJ}{l^3}$$

a obdobně

$$k_{23} = k_{32} = (-6 - 22\beta^2) \frac{EJ}{l^2}$$

$$k_{33} = \left(4 - \frac{2}{15}\beta^2\right) \frac{EJ}{l}$$

Dosadíme-li za $\beta^2 = \frac{F_1 l^2}{EJ} = -\frac{Pl^2}{EJ}$, kde P značí tahovou sílu v nosníku, budeme mít

$$k_{22} = \frac{12EJ}{l^3} + \frac{6}{5} \frac{P}{l}$$

$$k_{23} = k_{32} = -\frac{6EJ}{l^2} - \frac{P}{10}$$

$$k_{33} = \frac{4EJ}{l} + \frac{2}{15} Pl$$

Tyto vztahy platí ovšem jen přibližně, ale jsou velmi výhodné tím, že obsahují sílu $P = -F_1$ jen v první mocnině. Matici tuhosti budeme moci nyní rozepsat jako součet dvou matic

$$K = \begin{bmatrix} ES/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/15l & -1/10 \\ 0 & -1/10 & 2l/15 \end{bmatrix} P, \quad (230)$$

čili

$$K = K_E + K_G \quad (231)$$

Matice K_E závisí jen na elastických vlastnostech nosníku. Je to obvyklá matice tuhosti, kterou známe z lineárních úloh, a odpovídá teorii prvního řádu. Matice K_G závisí na geometrii nosníku (na jeho délce, nikoli však na jeho modulech pružnosti) a je úměrná vnitřní síle P . Vyjadřuje korekci odvozenou z teorie druhého řádu.

Tak dostaneme základní rovnici nelineární úlohy ve tvaru

$$([K_E] + [K_G])\{\delta\} = \{F\} \quad (232)$$

Sílu P můžeme považovat za parametr úlohy a dosadit

$$P = \lambda ; \quad K_G = \lambda K_G^* \quad (233)$$

takže

$$(K_E + \lambda K_G^*)\delta = F \quad (234)$$

Meze stability bude dosaženo, když matici tuhosti nebude možno invertovat, tj. když se tato matice stane singulární. V tom případě se bude determinant matice tuhosti rovnat nule

$$|K_E + \lambda K_G^*| = 0 \quad (235)$$

V našem případě dává tato podmínka

$$k_{11} (k_{22} k_{33} - k_{23}^2) = 0 \quad (236)$$

tedy kvadratickou rovnicí pro P . Z obou kořenů má fyzikální význam ten, jehož absolutní hodnota je menší. Vyjde přibližně

$$P_{krit} = -2,39 \frac{EJ}{l^2} \quad (237)$$

místo přesné hodnoty Eulerovy kritické síly

$$P_{krit} = -\frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2} \approx -2,467 \frac{EJ}{l^2}$$

Chyba předchozího výpočtu je tedy 3,1 %. Bylo by ji možno zmenšit rozdělením nosníku na několik prvků. Výpočet by pak byl pracnější. Připomeňme ještě, že úplná matice tuhosti pro nosníkový prvek při rovinném ohybu je šestého řádu.

Uvedené odvození geometrické matice tuhosti je příliš zdlouhavé. Lze ji odvodit kratčeji z energie napjatosti, v níž ponecháme při výpočtu i malé veličiny vyšších řádů. Podrobnosti zde nebudeme uvádět, vypočteme však tímto způsobem geometrickou matici tuhosti prutu v dalším příkladu.

Rovnici (235) lze pojímat jako úlohu o vlastních hodnotách. Působí-li totiž pouze vzpěrná síla $F_1 = -P$, kdežto $F_2 = F_3 = 0$, můžeme matici K_E a K_G rozdělit na submatice, takže (232) bude mít tvar

$$\left(\begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & \tilde{K}_E \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{K}_G \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (238)$$

První řádek dává stlačení prutu účinkem síly $-P$, druhý dává problém

$$[\tilde{K}_E] \{\tilde{q}\} = -\lambda [\tilde{K}_G] \{\tilde{q}\} \quad (239)$$

Vlastní vektor

$$\{\tilde{q}\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

popisuje tvar konstrukce při ztrátě stability.

S geometrickými maticemi tuhosti zacházíme stejně jako s elastickými; můžeme je adicí skládat do výsledné matice, platné pro celou konstrukci. Ukážeme to v příkladu 24.

23. příklad. Určíme geometrickou matici tuhosti u prutu podle obr. 39.

Prut přenáší pouze osovou sílu.

Pro posuvy u , v v libovolném bodě

$$\nu = \frac{x}{l} \quad (a)$$

bude zřejmě platit

$$u = (1-\nu)u_1 + \nu u_3 \quad (b)$$

$$v = (1-\nu)u_2 + \nu u_4$$

Z Pythagorovy věty plyne délka přetvořeného prutu

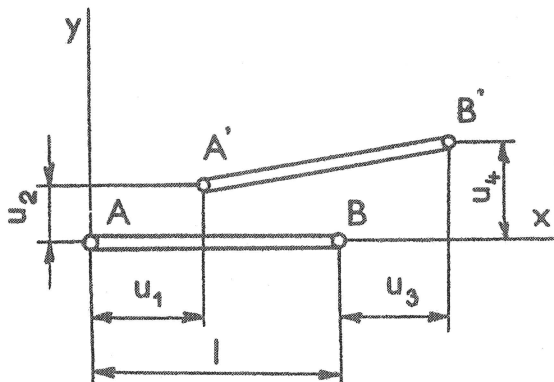
$$l' = \sqrt{(l + u_3 - u_1)^2 + (u_4 - u_2)^2} \quad (c)$$

a poměrné prodloužení

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l} = \sqrt{\left(1 + \frac{u_3 - u_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{u_4 - u_2}{l}\right)^2} - 1 \quad (d)$$

Pomocí (b) můžeme také psát

$$\varepsilon = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{1}{l} \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2} - 1 \quad (e)$$



Obr. 39

Jsou-li derivace v absolutní hodnotě malé ve srovnání s délkou l , můžeme použít pravidla o počítání s malými čísly (tj. můžeme užít vzorec $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + 0,5 \varepsilon$) a dostaneme

$$\varepsilon = \frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2. \quad (f)$$

Druhý člen na pravé straně můžeme proti prvnímu zanedbat, neboť $\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \ll l$. Pak

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2l^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 = \\ &= \frac{u_3 - u_1}{l} + \frac{(u_4 - u_2)^2}{2l^2}. \end{aligned} \quad (g)$$

Dosažením do výrazu pro energii napjatosti dostaneme

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} ES \int_0^l \varepsilon^2 dx = \\ &= \frac{ES}{2l} (u_1^2 - 2u_1u_3 + u_3^2) + \frac{ES}{2l^2} (u_3 - u_1)(u_2^2 - 2u_2u_4 + u_4^2). \end{aligned} \quad (h)$$

Budeme předpokládat, že osová síla, tj. ani rozdíl posuvů $u_3 - u_1$, se na počátku vybočování prutu nezmění. Do druhého členu v rovnici (h) proto dosadíme

$$\frac{ES}{l} (u_3 - u_1) = P = \text{konst} \quad (i)$$

a dostaneme

$$U = U_E + U_G, \quad (j)$$

kde

$$U_E = \frac{ES}{2l} (u_1^2 - 2u_1u_3 + u_3^2) \quad (k)$$

$$U_G = \frac{P}{2l} (u_2^2 - 2u_2u_4 + u_4^2). \quad (l)$$

Prvky elastické matice tuhosti jsou

$$k_{ijE} = \frac{\partial U_E}{\partial u_i \partial u_j} \quad (m)$$

a prvky geometrické matice tuhosti jsou

$$k_{ij} = \frac{\partial U_G}{\partial u_i \partial u_j} \quad (n)$$

Tak dostaneme

$$K_E = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (p)$$

$$K_G = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (q)$$

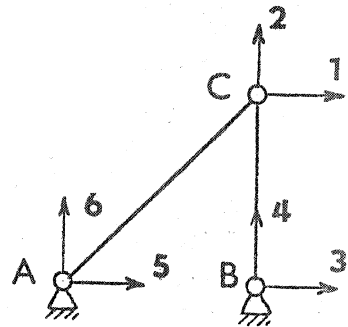
24. příklad. U tříkloubové konstrukce podle obr. 40 najděte kritickou velikost síly $F_2 = +P$. Pruty mají též průřez i modul pružnosti. Délka prutu BC je l , sklon prutu AC je 45° .

Složením elementárních matic tuhosti

$$K_E^{BC} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_E^{AC} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_G^{BC} = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Obr. 40

$$K_G^{AC} = 0$$

dostaneme známým způsobem, popsáným podrobně ve skriptech k první části semináře, matici tuhosti o velikosti 6 x 6. Vynecháním sloupců a řádků 3 až 6 (vzhledem k předepsaným nulovým posuvům v těchto uzlech) dostaneme matice 2 x 2

$$K_E = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$K_G = \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Základní rovnice naší úlohy tedy je

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Inverzí součtu matic v oblé závorce lze odtud určit posuvy u_1 , u_2 , které jsou nelineární funkcí síly P . Meze stability se dosáhne, když se součet matic v oblé závorce stane singulárním. V tom případě vymizí determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{ES}{l} + \frac{P}{l} & \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{ES}{l} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{ES}{l} & \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{ES}{l} (1 + 2\sqrt{2}) \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud vypočteme kritickou sílu

$$F_{2krit} = P_{krit} = - \frac{2\sqrt{2} - 1}{7} ES.$$

Tehdy ztratí konstrukce tvarovou určitost, ačkoli jsme nepřipustili žádný ohyb prutů, ani jejich plastickou deformaci.

Ohyb bychom mohli do výpočtu zahrnout jen tak, že bychom počítali s maticemi tuhosti odvozenými pro nosníkové prvky.

Doslov

Obsah semináře, který právě končí, byl sestaven tak, aby poskytl srozumitelnou formou základní poznatky o maticích a jejich aplikacích v mechanice, zvláště při pevnostním výpočtu kovových konstrukcí, v teorii pružnosti a částečně i v dynamice. Autor se zároveň snažil poskytnout podněty i těm, kteří maticový počet znají a prakticky používají. Zvláštní pozornost byla věnována metodě konečných prvků.

Objasněním některých principů a matematických vět se autor snažil vytvořit předpoklady k tomu, aby absolventi semináře mohli s větším porozuměním číst i náročnou odbornou literaturu, zejména příspěvky v odborných časopisech.

Plné využití maticových metod v praxi je možné jen ve spojení s velkým počítačem. Tuto možnost může dnes přímo využívat jen poměrně mále pracovišť. Těm ostatním poskytlo studium v semináři alespoň názor na způsob řešení a na různé aplikace. Avšak k tomu, abychom se sami naučili těmito metodami pracovat, je jen jedna cesta: začít jimi pracovat.

Název publikace: MATICOVÉ METODY V PEVNOSTNÍCH VÝPOČTECH
 III. část
 STAVBA STROJŮ XXXI

Autor: Prof. Ing. Cyril Höschl

Počet stran: 106

Formát: A 4

Náklad: 220 výtisků

Číslo publikace: 60/802f/74 (842)

Vydal a rozmnožil: Dům techniky ČVTS Praha,
 Gorkého nám. 23, Praha 1

Datum vydání: Květen 1974