

**ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS**

**DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA**



**ÚNAVA MATERIÁLU  
PŘI PERIODICKÉM ZATĚŽOVÁNÍ**

**CYRIL HÖSCHL**

**ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV**

**PRAHA 1981**

V této práci se podává stručný výklad soudobých poznatků o vzniku a šíření únavových lomů při deterministickém namáhání. Jde o změny mechanických vlastností při cyklickém namáhání, o iniciaci únavových trhlin, jejich šíření a konečný lom. Vysvětlují se některé poznatky lomové mechaniky, nezbytné k pochopení zákonů šíření únavových lomů.

Předpokládá se, že průběh namáhání v závislosti na čase známe a že je obecně periodický. Uvádějí se souvislosti mezi různými poznatky a podává se stručný výklad některých metod výpočtu trvalé i časované pevnosti strojních částí. Zvláštní pozornost je věnována vlivu koncentrace napětí u těles nepravidelných tvarů a různé velikosti na mez únavy. Uvádějí se též způsoby, jak lze dosáhnout zvýšení této meze. Jde o souhrn nejdůležitějších poznatků tvořících základ kvalifikovaného pevnostního výpočtu deterministicky namáhaných strojních částí.

## O B S A H

	Strana
Úvod .....	3
1. Koncentrace napětí v pružných tělesech .....	5
2. Koncentrace napětí a přetvoření v pružnoplastických tě- lesech .....	17
3. Cyklická křivka napětí - přetvoření .....	25
4. Iniclace únavové trhliny .....	31
5. Šíření únavových trhlin při konstantní amplitudě napětí..	34
6. Příklad výpočtu zbytkové životnosti výrobku s trhlinou ..	37
7. Křivky životnosti a časovaná pevnost .....	40
8. Teorie poškození .....	43
9. Vliv koroze, teploty a tloušťky stěny na životnost části.	49
10. Vliv občasných přetížení na průběh šíření trhlin .....	53
11. Vliv vnějších a vnitřních vad na mez únavy .....	56
12. Účinek vrubu na mez únavy .....	58
13. Empirické vzorce pro výpočet časované a trvalé pevnosti hladkých vzorků .....	61
14. Výpočet vrubového činitele .....	63
15. Vliv velikosti součásti na mez únavy .....	67
16. Výpočet meze únavy při střídavém namáhání .....	69
17. Mez únavy při nesouměrném cyklu zatěžování .....	71
18. Mez únavy při složeném namáhání .....	74
19. Výpočet bezpečnosti vzhledem k únavě .....	76
20. Hřídel s příčnou dírou při složeném namáhání .....	78
21. Čepy a táhla, lisované spoje .....	80
22. Úpravy zvyšující mez únavy .....	82
23. Povrchové úpravy .....	87
24. Fraktografie únavového lomu .....	91
25. Statistické hodnocení pevnosti a únavy materiálu .....	93
26. Příklady .....	97
Přílohy .....	107
Literatura .....	121

"Je zcela jasné, že ten, kdo by si přál udržet krok s literaturou<sup>x)</sup> a četl by jeden článek denně, zaostával by každým rokem studia o jeden celý rok".

S. J. Manson (1965)

## Úvod

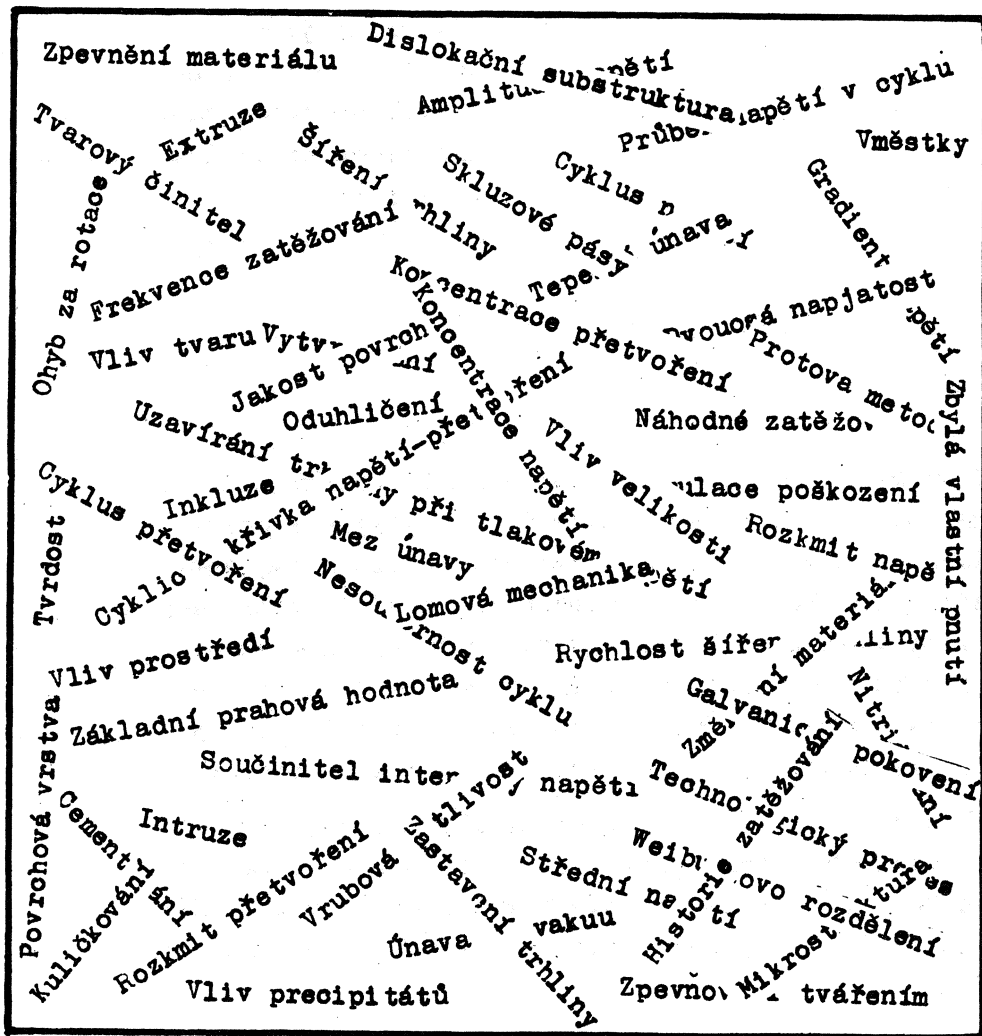
S výzkumem únavy materiálu započal německý inženýr A. Wöhler v druhé polovině minulého století. Výsledky své práce publikoval v letech 1858 až 1870. Protože únava materiálu je nejčastější příčinou poruch strojních částí, bylo vynaloženo značné úsilí, aby se z poznatků rozsáhlého výzkumu vytvořil systém umožňující racionální návrh konstrukcí odolných proti únavovému lomu. Tento úkol však není dodnes beze zbytku vyřešen. Únava materiálu je totiž velmi složitým jevem, při němž se uplatňuje neobyčejně mnoho vlivů (obr. 1).

V pevnostních výpočtech se začalo přesněji přihlížet k možnému vzniku únavového lomu teprve asi od roku 1940. Základem se stala proslavená Neuberova kniha o napjatosti v okolí vrubů (1937) a na ni navazující výsledky výzkumu tvarové pevnosti vedeného spolkem německých inženýrů VDI.

Průkopníkem nových názorů na výpočet pevnosti strojních částí namáhaných v únavě se u nás stal profesor ČVUT F. Budinský. O něco později formuloval akademik J. Němec (1955) vlastní návrh výpočetního postupu, vycházející z detailního rozboru únavových jevů; spolu s členem korespondentem ČSAV O. Puchnerem pak napsal speciální učebnici tvarové pevnosti (1971). Zároveň se únava materiálu stala předmětem intenzivního bádání mnoha našich státních i rezortních výzkumných ústavů a pracovišť vysokých škol i průmyslových závodů.

---

<sup>x)</sup> O únavě materiálu. - Pozn. překl.



Obr. 1

Experimentální výzkum se až do nedávné doby týkal poněkud vzor-  
ků nebo celých částí namáhaných silami s konstantní amplitudou nebo  
s naprogramovaným časovým průběhem až do lomu. Jen zřídka se vzorky  
zkoušely za podmínek řízeného přetvoření. Teorie, jejichž cílem bylo  
podat jednotný výklad jevů, byly spíše fenomenologické než kauzální  
a neměly proto obecnou platnost. Teprve v posledním desetiletí se uká-  
zalo, že únavě strojních částí lze porozumět mnohem lépe, oddělili-  
se od sebe tři vývojová stádia: první, při němž vznikají nevratné pro-  
cesy v objemech materiálu zasažených špičkovým napětím, takže se mění  
mechanické vlastnosti materiálu a může vzniknout zárodek trhliny (zpra-  
vidla na povrchu); druhé, při němž se zárodečná trhlina počne šířit,  
aniž vznikají makroskopické trvalé deformace (navenek si součást

zachovává vcelku původní tvar a trhlina je sotva okem patrná) a konečně třetí, při němž se trhlina kritické délky náhle rozšíří do úplného lomu. Ten může být podle okolností provázen i většími plastickými deformacemi. Pro první stádium je důležité to, že se přihlíží ke změnám mechanických vlastností, jež mohou nastat i tehdy, když napětí nedosahuje konvenční meze kluzu ( $\sigma_{kt}$  nebo  $\sigma_{0,2}$ ). Základem výpočtů se stává cyklická křivka napětí - přetvoření spíše než pracovní diagram získaný při zkoušce tahem. Při výkladu šíření trhliny a lomu (druhé a třetí stádium) se nyní uplatňují poznatky lomové mechaniky. S jejich využitím lze počítat životnost strojních částí mnohem přesněji než to umožňovaly dřívější jednoduché teorie poškození. K přesnějším výpočtům však potřebujeme také přesnější znalosti materiálových vlastností, jež lze získat jen podrobným výzkumem. Nejde-li o důležité části nebo části vyráběné ve velkých sériích, nemusí se takový výzkum vyplatit; pak nezbyvá než tyto vlastnosti odhadnout nebo použít některých jednodušších metod založených na znalosti pouze těch mechanických vlastností, které lze zjistit při běžné zkoušce tahem popř. které se zaručují v normách. Neexistuje tedy ani dnes žádná univerzální metoda, která by za všech okolností vyhovovala.

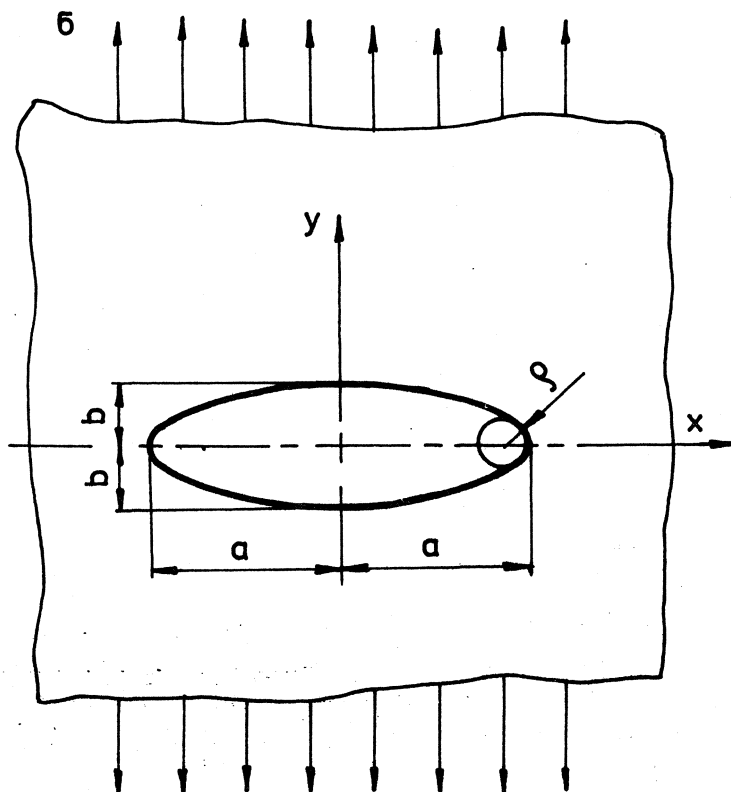
Je proto velmi obtížným a odpovědným úkolem, o jehož splnění se chceme tímto spisem pokusit, vybrat z velkého množství poznatků jen to, co by mělo tvořit pevný základ znalostí každého konstruktéra. Předpokládáme, že není specializován na otázky únavy materiálu, ale chce se vyvarovat hrubých chyb a počítat pevnost navrhovaných konstrukcí v nejučelnější (což neznamená vždy zároveň nejlepší) shodě se soudobými poznatky vědy.

Protože tato skripta mohou mít jen omezený rozsah, budeme výklad často zjednodušovat, aby vynikly hlavní myšlenky a zásady. V podrobnostech odkazujeme mimo již citovaných publikací na knihu M. Klesnila a F. Lukáše (1975), M. Bílého a kol. (1976), na četné sborníky věnované únavě materiálu v dřívějším cyklu "Stavba strojů" (DT ČSVTS Praha) a na další literaturu uvedenou v soupisu na konci těchto skript.

## 1. Koncentrace napětí v pružných tělesech

Je dán široký pás s eliptickým otvorem umístěným napříč střední části (obr. 2). Je-li namáhán tahovým napětím  $\sigma$ , vzniká na konci velké poloosy ( $a > b$ ) maximální napětí

$$\sigma_{max} = \sigma_y (x=a, y=0) = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b}\right) = \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{c}}\right). \quad (1.1)$$



Obr. 2

Zde  $Q = b^2/a$  značí poloměr křivosti ve vrcholu elipsy (v bodě  $x = a$ ,  $y = 0$ ). Vzorec (1.1) vyplývá z teorie pružnosti.

Poměr

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \alpha = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{Q}} \quad (1.2)$$

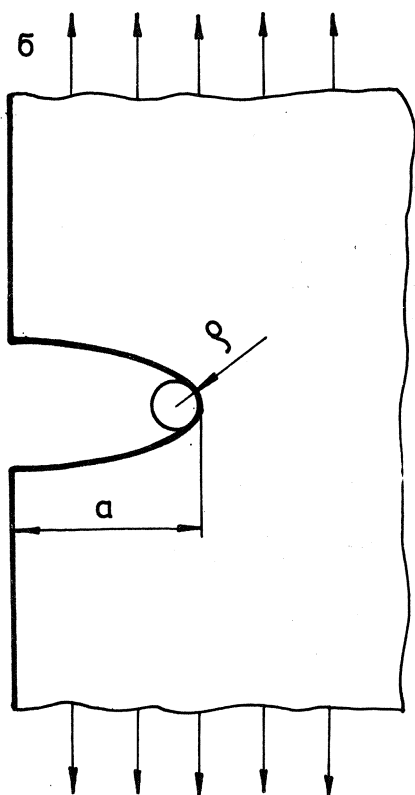
Je tvárový činitel. Je to číslo, které udává, kolikrát je maximální napětí větší než jmenovité. Jmenovité napětí se zpravidla počítá v zeslabeném průřezu podle běžných pravidel technické nauky o pružnosti. To znamená, že se předpokládá při tahu napětí rovnoměrné, při ohybu či krutu lineárně rozdělené, i když ve skutečnosti takové není, neboť vrub způsobuje "poruchu" napjatosti spojenou s místním zvýšením (koncentrací) napětí. U kořene vrubu je pak napětí větší a uvnitř průřezu menší než kolik vychází za předpokladu rovnoměrného rozdělení (tah) nebo za předpokladu lineárního průběhu (ohyb, krut). U nekonečně široké desky (obr. 2 popř. obr. 3) se jmenovité napětí  $\sigma_n$  rovná zatěžujícímu napětí  $\sigma$  ve vzdálených řezech. Proto jsme mohli vynechat index  $n$  (nominální, jmenovité napětí). Jindy budeme psát

$$\sigma_{max} = \alpha \sigma_n \quad \text{resp.} \quad \tau_{max} = \alpha \tau_n. \quad (1.3)$$

Tvarový činitel  $\alpha$  závisí na tvaru tělesa a na způsobu jeho zatížení; je proto jiný pro tah resp. ohyb či krut (u téhož tělesa). V rovnici (1.3) jsme to nijak nevyznačili; bude-li třeba, rozlišíme tyto hodnoty užitím vhodného indexu.

Je-li elipsa na obr. 1 protáhlá ( $a \gg b$ ), je i poloměr křivosti  $\varrho$  ve vrcholu elipsy velmi malý a napjatost se blíží takové, jakou lze předpokládat pro ideální trhlinu ( $b = 0$  resp.  $\varrho = 0$ ). V takovém případě lze jednotku ve vztahu (1.2) zanedbat, takže

$$\sigma_{max} \approx 2 \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \sigma. \quad (1.4)$$



Obr. 3

Protože napětí  $\sigma_x$  v řezu  $x = 0$  je v tom případě málo významné, lze předpokládat, že vztah (1.4) bude přibližně platit i pro případ pásu s vnějším vrubem podle obr. 3.

Je zřejmé, že pro  $\varrho \rightarrow 0$  bude  $\sigma_{max} \rightarrow \infty$ . Na konci trhliny (v bodě  $x = a$ ,  $y = 0$ ) vzniká tedy singularita. Součin  $\sigma_{max} \sqrt{\varrho}$  však zůstane konečný, neboť podle (1.4)

$$\sigma_{max} \sqrt{\varrho} = 2\sigma \sqrt{a}. \quad (1.5)$$

Tento součin charakterizuje napjatost v okolí kořene ostré trhliny ( $\varrho \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow 0$ ). Nekonečné napětí nemůže ve skutečném materiálu vzniknout; je důsledkem přijatých předpokladů (homogenita, pružnost, nulová křivost kořene trhliny).

Ve skutečnosti vznikne odchylka od uvedené teorie, která se však nemusí projevit jinde než právě jen v singulárním bodu a jeho blízkém okolí. V takovém případě dá teorie pružnosti cenné výsledky, neboť bude platit prakticky všude (až na malý objem materiálu u kořene trhliny). V lomové mechanice se k popisu napjatosti v okolí kořene trhliny používá součinitel intenzity napětí

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (1.6)$$



takže

$$\sigma_{max} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{K_I}{\sqrt{\varrho}} \quad (1.7)$$

Rovnicí (1.7) jsme dostali srovnáním (1.5) a (1.6). Platí pro malý poměr  $\varrho/a$ . Je-li např.  $\varrho = 0,1 a$ , vzniká zanedbáním jedničky ve vztahu (1.2) chyba asi 13,6%. Teprve pro  $\varrho < 0,05 a$  je chyba menší než 10%. Součinitel intenzity napětí  $K_I$  bychom mohli podle (1.7) definovat jako limitu

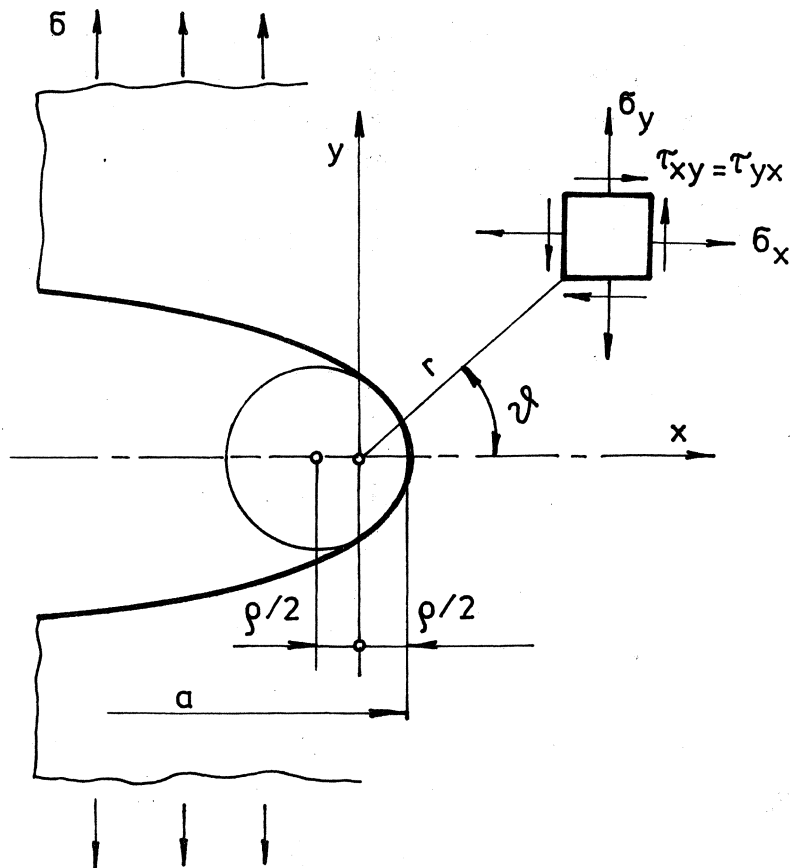
$$K_I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \sigma_{max} \sqrt{\varrho} \quad (1.8)$$

Při výpočtu této limity vycházíme z představy dokonale pružného a homogenního materiálu. Index I znamená, že jde o první typ namáhání trhliny (štěpením; jiné typy jsou namáhání smykem resp. stříhem).

Chceme-li podrobněji poznat napjatost v okolí kořene relativně ostrého vrubu ( $\varrho \ll a$ ), můžeme upravit vztahy, které dává teorie pružnosti, do tvaru, v nichž napětí vyjádříme řadami platnými pro okolí kořene vrubu a ponecháme v nich jen dominantní členy. S označením podle obr. 4 dostaneme pro napjatost v okolí kořene příčného vrubu v taženém širokém pásu <sup>x)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\varrho}{2r} \cos \frac{3\vartheta}{2}, \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\varrho}{2r} \cos \frac{3\vartheta}{2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\varrho}{2r} \sin \frac{3\vartheta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

<sup>x)</sup> Podle M. Craegera (1966).



Obr. 4

Všimněme si, že počátek souřadnic je na obr. 4 uprostřed mezi středem oskulační kružnice a kořenem vrubu. Maximální napětí odtud dostaneme, když do druhé z rovnic (1.9) dosadíme  $r = \rho/2$ ,  $\varphi = 0$ ; vyjde (1.7). Dosadíme-li do rovnic (1.9)  $\varphi = 0$ , dostaneme napjatost v blízkém okolí ostré trhliny. V kořeni takové trhliny vzniká singularita typu

$$\sigma_{max} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi = 0}} K_I / \sqrt{2\pi r} \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

To znamená, že napětí v okolí kořene trhliny se mění úměrně k výrazu  $1/\sqrt{r}$ , vzdalujeme-li se po přímce od kořene trhliny ( $r$  je přitom vzdálenost od kořene trhliny, neboť  $\varphi = 0$ ).

Je známo, že zárodečná trhlina vzniká teprve poté, co v určitém objemu materiálu nastaly některé nevratné změny. Proto musíme zkoumat

napjatost nejenom v kořeni vrubu (tedy v bodě nebo na určité linii), ale také v jeho blízkém okolí (v objemu). Jinými slovy, nezáleží jen na maximální hodnotě napětí, ale také na jeho průběhu v nejbližším okolí nejvíce namáhaného místa. Proměnlivost napjatosti charakterizují parciální derivace složek napjatosti podle souřadnic. Omezíme-li se jen na derivaci dominantní složky napjatosti  $\sigma_y$  podle  $x$  (obr. 4), budeme moci psát, že

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial r} \Big|_{\varphi=0} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{2r} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\varrho}{r}\right). \quad (1.11)$$

Pro největší absolutní hodnotu tohoto "gradientu" napětí vychází

$$\left| \frac{\partial \sigma_y}{\partial r} \right|_{\max} = \left| \frac{\partial \sigma_y}{\partial r} \right|_{\varphi=0, r=\varrho/2} = \frac{4 K_I}{\varrho \sqrt{\pi \varrho}}. \quad (1.12)$$

Užitím (1.7) můžeme tento vztah napsat také ve tvaru poměrného gradientu napětí

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{\max}} \left| \frac{\partial \sigma_y}{\partial r} \right|_{\max} = \frac{2}{\varrho}. \quad (1.13)$$

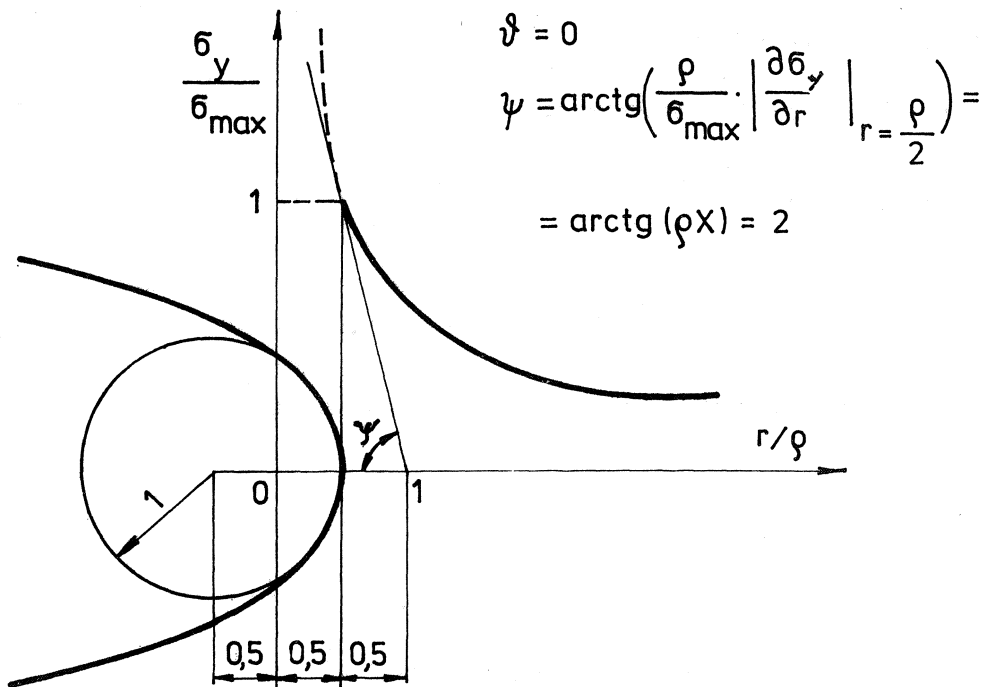
Poměrný gradient napětí počítáme tedy pro dominantní (převládající) složku napjatosti a derivaci přitom bereme v absolutní hodnotě; vyhodnocujeme ji v kořeni vrubu. Vidíme, že poměrný gradient  $\chi$  je tím větší, čím je poloměr křivosti  $\varrho$  v kořeni vrubu menší. Význam gradientu  $\chi$  je zřejmý z obr. 5.

Výraz

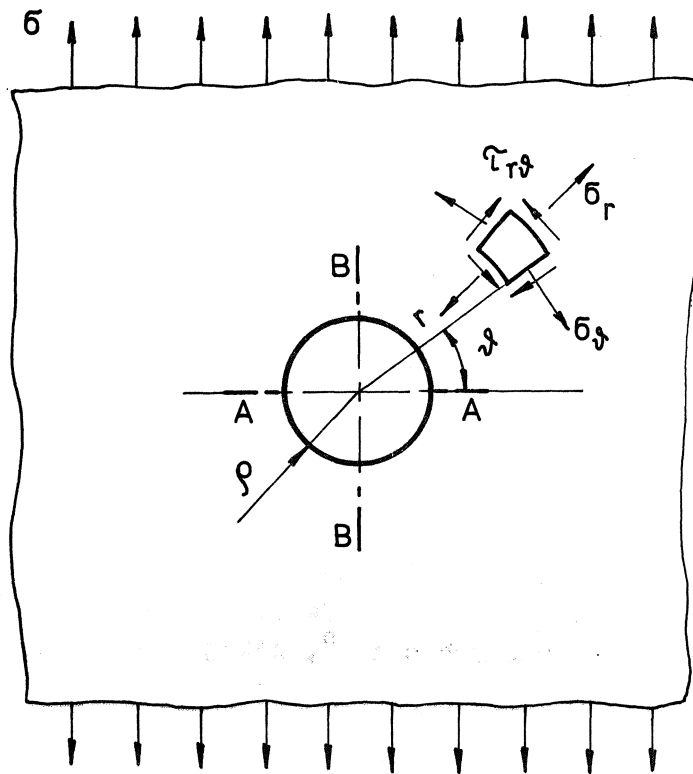
$$\varrho \chi = \operatorname{tg} \psi = \frac{\varrho}{\sigma_{\max}} \left| \frac{\partial \sigma_y}{\partial r} \right|_{\max} \quad (1.14)$$

je bezrozměrový, ale nehodí se k praktickým výpočtům. Nezáleží totiž na tom, jak se mění napětí vzhledem k rozměrům součásti, ale vzhledem ke struktuře materiálu (tedy např. k rozměrům zrn). Pro fyzikální interpretaci je proto vhodnější tvar (1.13).

Dosavadní výklad se týkal relativně ostrých (hlubokých) eliptických nebo hyperbolických vrubů. Obdobné závěry však dostaneme pro jakékoli vruby (tvarové nepravidelnosti). Např. pro napjatost v nekonečně širokém taženém pásu s kruhovým otvorem ( $a = b = \varrho$ ) s označením



Obr. 5



Obr. 6

podle obr. 6 platí vztahy <sup>x)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 - 4 \frac{\rho^2}{r^2} + 3 \frac{\rho^4}{r^4}\right) \cos 2\vartheta, \\ \sigma_{\vartheta} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + 3 \frac{\rho^4}{r^4}\right) \cos 2\vartheta, \\ \tau_{r\vartheta} &= \tau_{\vartheta r} = \frac{\sigma}{2} \left(1 + 2 \frac{\rho^2}{r^2} - 3 \frac{\rho^4}{r^4}\right) \sin 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Je zřejmé, že na okraji otvoru  $r = \rho$  vyjde  $\sigma_r = 0$ ,  $\tau_{r\vartheta} = 0$ , avšak

$$\sigma_{\vartheta} \Big|_{r=\rho} = \sigma (1 + 2 \cos 2\vartheta). \quad (1.16)$$

V bodech A na obr. 6 je tedy napětí největší

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\vartheta} \Big|_{\substack{r=\rho \\ \vartheta=0}} = 3\sigma \quad (1.17)$$

a v bodech B nejmenší

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\vartheta} \Big|_{\substack{r=\rho \\ \vartheta=\pi/2}} = -\sigma. \quad (1.18)$$

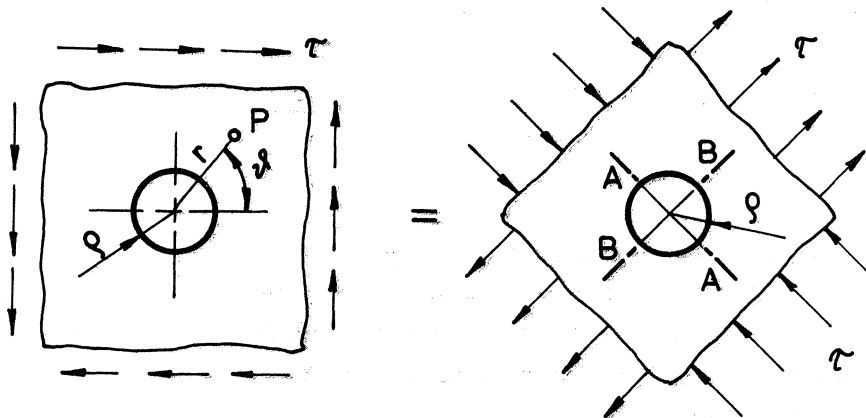
Poměrný gradient napětí je

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{\max}} \left| \frac{\partial \sigma_{\vartheta}}{\partial r} \right|_{\substack{\vartheta=0 \\ r=\rho}} = \frac{7}{3\rho}. \quad (1.19)$$

Využijeme-li principu superpozice, odvodíme snadno užitím vzorců (1.15) a obr. 7 napjatost v okolí otvoru v nekonečné desce namáhané čistým smykem. Je totiž známo, že smyk lze nahradit superpozicí tahu a tlaku ve směrech odkloněných o  $45^\circ$ , jak je naznačeno na obr. 7.

---

<sup>x)</sup> Odvodil G. Kirsch roku 1898.



Obr. 7

Vyjde

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \tau \left( 1 - 4 \frac{\rho^2}{r^2} + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \sin 2\vartheta, \\ \sigma_\vartheta &= -\tau \left( 1 + 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \sin 2\vartheta, \\ \tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta r} &= \tau \left( 1 + 2 \frac{\rho^2}{r^2} - 3 \frac{\rho^4}{r^4} \right) \cos 2\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Na okraji otvoru bude opět  $\sigma_r = 0$ ,  $\tau_{r\vartheta} = 0$ , avšak

$$\sigma_\vartheta \Big|_{r=\rho} = -4\tau \sin 2\vartheta. \quad (1.21)$$

To znamená, že v bodech A ( $r = \rho$ ,  $\vartheta = -\pi/4$  resp.  $+3\pi/4$ ) je napětí největší

$$\sigma_{\max} = 4\tau \quad (1.22)$$

a v bodech B ( $r = \rho$ ,  $\vartheta = \pi/4$  resp.  $-3\pi/4$ ) nejmenší

$$\sigma_{\min} = -4\tau. \quad (1.23)$$

Poměrný gradient napětí je

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{\max}} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right|_A = \frac{3}{Q} \quad (1.24)$$

Lze předpokládat, že napjatost (1.20) přibližně existuje i v okolí příčné díry u hřídele namáhaného krutem, pokud poloměr díry je značně menší než poloměr hřídele. V povrchové vrstvě takového hřídele vzniká v místech vzdálených od příčného vrtání smyková napjatost  $\tau = 16 M_k / \pi d^3$ , je-li  $d$  průměr hřídele.

Zvláštností vztahu (1.22) je, že smykové jmenovité napětí  $\tau_n = \tau$  vyvolává tahové maximální napětí  $\sigma_{\max}$ , takže tvarový činitel  $\alpha = \sigma_{\max} / \tau_n$ . Místo rovnice (1.3) tedy máme

$$\sigma_{\max} = \alpha \tau_n \quad (1.25)$$

Pro případ podle obr. 7 je  $\alpha = 4$ .

Uvedeme ještě jeden příklad teoretického řešení úlohy o koncentraci napětí. Je-li kroucen hřídel s půlkruhovou podélnou drážkou (obr. 8), platí pro napětí  $\tau_{xy}$  podél osy  $y = 0$  vzorec <sup>x)</sup>

$$\tau_{xy} = G \vartheta (x - a - b^2 a / x^2) \quad (1.26)$$

Zde  $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $\vartheta$  zkrut. Největší napětí (v absolutní hodnotě) vzniká v bodě A ( $x = b$ ,  $y = 0$ )

$$\tau_{\max} = |\tau_{xy}|_{\max} = G \vartheta (2a - b) \quad (1.27)$$

Nyní je sporné, jak definovat jmenovité napětí. Můžeme jej definovat jako napětí vyvolané stejným krouticím momentem v hřídeli bez drážky o průměru buď  $d = 2a$  nebo  $d = 2a - b$  (zeslabený průřez). Pokaždé vyjde  $\tau_n$  (a tedy i  $\alpha = \tau_{\max} / \tau_n$ ), jinak. Obě definice však dají stejnou hodnotu tvarového činitele  $\alpha$  pro mezní případ  $\lim_{b \rightarrow 0} \alpha = 2$ , kdy  $\tau_n = G \vartheta a$ ,  $\tau_{\max} = G \vartheta 2a$ . Vyjde

$$\lim_{b \rightarrow 0} \alpha = 2 \quad (1.28)$$

x) Odvodil C. Weber roku 1921.

Vypočteme ještě poměrný gradient napětí

$$X = \frac{1}{\tau_{\max}} \left| \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right|_{x=b} = \frac{G \mathcal{D} (1 + 2a/b)}{G \mathcal{D} (2a - b)} = \frac{1}{b} \left( 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} + \dots \right). \quad (1.29)$$

Je-li  $b$  malé proti  $a$ , vyjde jednoduše

$$X \doteq \frac{1}{b}. \quad (1.30)$$

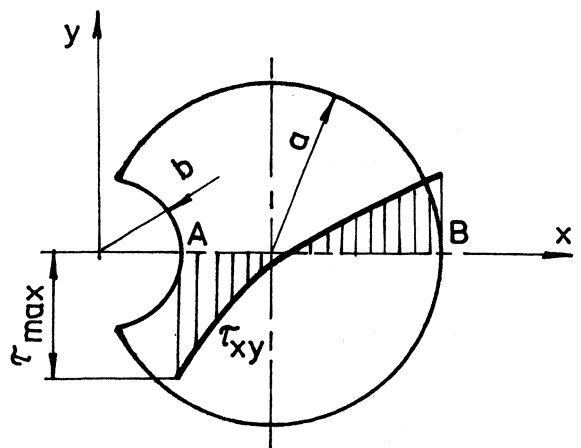
Zde  $b$  má stejnou úlohu jako  $\rho$  v předchozích příkladech (poloměr křivosti v kořeni vrubu).

Na několika příkladech jsme ukázali, že tvarový činitel  $\alpha$  závisí na geometrii tělesa a na způsobu jeho zatížení. Nezávisí však na vlastnostech materiálu, neboť ten se považuje za ideálně pružný. Vztahuje se k jmenovitému napětí, jehož výpočet musí být jednoznačně předepsán (zejména v případech připouštějících různý výklad, jak jsme ukázali na hřídeli s podélnou drážkou). Tvarový činitel se zjišťuje teoreticky nebo experimentálně. Tabulky tvarových činitelů nalezneme např.

v Petersonově atlasu (1953), ve výzkumné zprávě SVÚSS J. Valenty a V. Běťáka (1969 resp. 1970), popř. v příloze časopisu Strojírenství z roku 1968 (č. 1 až 12). V běžných případech vystačíme s podklady, které jsou v každé modernější příručce. Výběr těchto závislostí uvádíme v dodatku C.

Poznamenejme ještě, že na povrchu kořene vrubu bývá někdy dvousosá napjatost ( $\sigma_{\max} = \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = 0$ ). Pak je možné definovat tvarový činitel také pomocí výpočtového (redukovaného) napětí. Např. podle Misesovy hypotézy

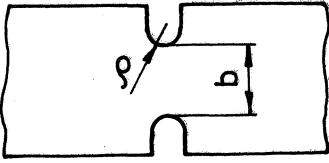
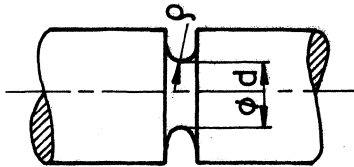
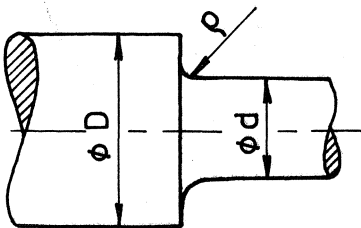
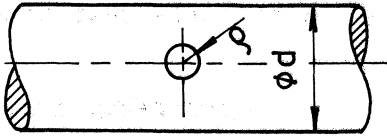
$$\alpha_M = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} / \sigma_n. \quad (1.31)$$



Obr. 8



TABULKA 1 Poměrný gradient napětí  $\chi$  pro různé vruby a různé druhy namáhání ( $\rho$  relativně malé)

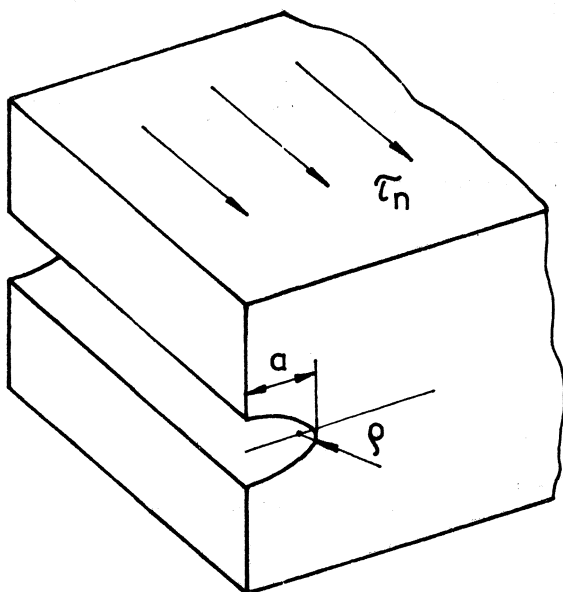
Tvar vrubu	Namáhání	$\chi$
	<p>tah-tlak</p> <p>ohyb</p>	$\frac{2}{\rho}$ $\frac{2}{\rho} + \frac{2}{b}$
	<p>tah-tlak</p> <p>ohyb</p> <p>krut</p>	$\frac{2}{\rho}$ $\frac{2}{\rho} + \frac{2}{d}$ $\frac{1}{\rho} + \frac{2}{d}$
	<p>tah-tlak</p> <p>ohyb</p> <p>krut</p>	$\frac{2}{\rho}$ $\frac{2}{\rho} + \frac{4}{D+d}$ $\frac{1}{\rho} + \frac{4}{D+d}$
	<p>tah-tlak</p> <p>ohyb</p> <p>krut</p>	$\frac{7}{3\rho}$ $\frac{7}{3\rho}$ $\frac{3}{\rho}$

Hodnota  $\alpha_M$  se však jen málo liší od hodnoty  $\alpha = \sigma_1 / \sigma_n$  podle (1.3).  
Může se lišit nejvýš asi o 13 %.

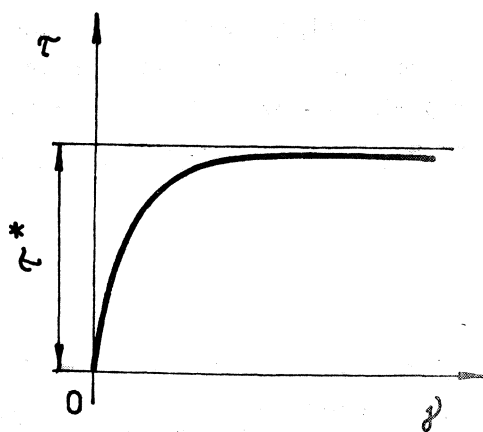
Výrazy pro poměrný gradient napětí jsou přehledně sestaveny pro různé případy v tab. 1 (Viz též práci W. Steinchena (1976)).

## 2. Koncentrace napětí a přetvoření v pružnoplastických tělesech

Překročí-li namáhání u kořene vrubu mez kluzu, stane se rozdělení napětí v průřezu rovnoměrnější, tj. poměr maximálního a jmenovitého napětí se zmenší (v porovnání s elastickým stavem napjatosti).



Obr. 9

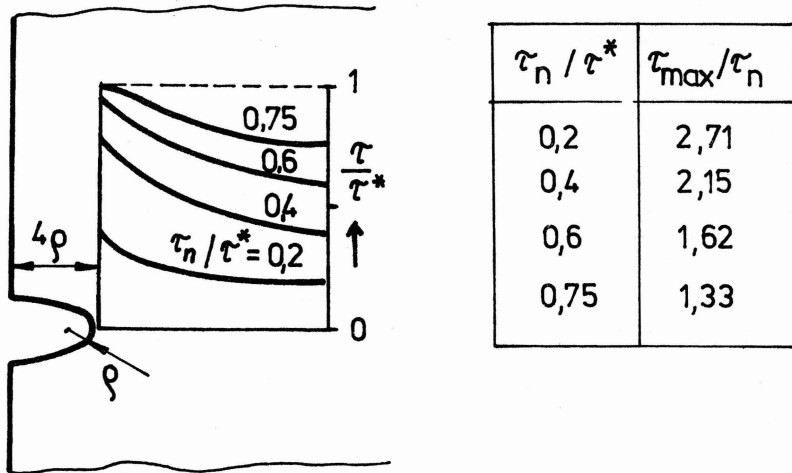


Obr. 10

Představme si polonekonečné těleso s podélným vrubem podle obr. 9, namáhané smykem. Jmenovité napětí  $\tau_n$  působí rovnoběžně s rovinou souměrnosti tělesa i s kořenem vrubu, kde vzniká koncentrace napětí. Tvarový činitel je  $\alpha = \tau_{maxe} / \tau_n$ . Indexem "e" vyznačujeme, že jde o elastickou napjatost. Neuber předpokládal, že materiál má charakteristiku

$$\alpha = \frac{\tau}{\tau_n} \left[ 1 - \left( \frac{\tau}{\tau^*} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

vyznačenou na obr. 10, tj. že zkos  $\gamma \rightarrow \infty$  pro  $\tau \rightarrow \tau^*$ .



Obr. 11

Pro půleliptický vrub o hloubce  $a = 4\rho$  pak dostal průběhy napětí vyznačené na obr. 11. Je zřejmé, že poměr  $\tau_{max} / \tau_n$  se zmenšuje, zvětšuje-li se jmenovité napětí. Místo tvarového činitele  $\alpha$  nyní zavedeme součinitel koncentrace napětí

$$K_\tau = \frac{\tau_{max}}{\tau_n} \quad (2.2)$$

Platí, že  $1 < K_\tau \leq \alpha$ . Tento součinitel je závislý na zatížení (vlivem nelineární charakteristiky materiálu).

Podobně zavedeme součinitel koncentrace přetvoření

$$K_\gamma = \frac{\gamma_{max}}{\gamma_n} \quad (2.3)$$

přičemž jmenovité přetvoření  $\gamma_n$  vzniká v místech vzdálených od kořene vrubu. Pro malá jmenovitá napětí lze druhý člen v hranaté závorce (2.1) zanedbat, takže zkos  $\gamma_n = \tau_n / G$ . Neuber zjistil, že pro malá plastická přetvoření je velmi přibližně

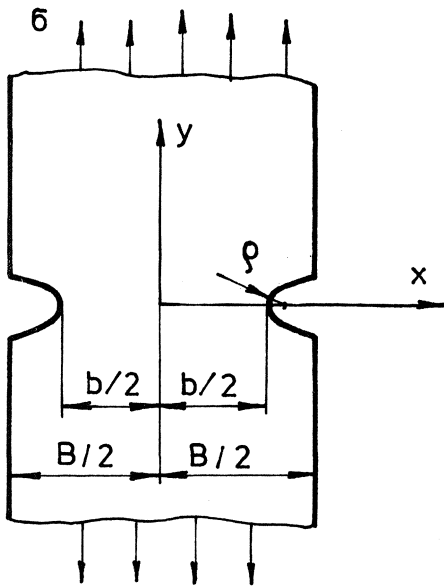
$$K_\tau K_\gamma = \alpha^2 \quad (2.4)$$

Tento zákon se empiricky zobecňuje i pro jiné případy, než pro jaké byl odvozen. Máme-li např. pás s oboustranným vrubem podle obr. 12 předpokládáme, že přibližně platí

$$K_{\sigma} K_{\epsilon} = \alpha^2, \quad (2.5)$$

kde  $\alpha$  je tvarový činitel a

$$K_{\sigma} = \sigma_{\max} / \sigma_n, \quad K_{\epsilon} = \epsilon_{\max} / \epsilon_n. \quad (2.6)$$



Obr. 12

Platí-li Hookeův zákon, je  $K_{\sigma} = K_{\epsilon} = \alpha$ . Protože jde o tyč konečné šířky, je  $\sigma_n = \sigma \cdot B/b = F/bh$ , kde  $F$  je celková působící síla,  $h$  tloušťka tyče. Má-li materiál obecnou deformační charakteristiku  $\sigma = f(\epsilon)$  bude  $\sigma_{\max} = f(\epsilon_{\max})$ . Obdobně můžeme k jmenovitému napětí  $\sigma_n$  přiřadit jmenovité poměrné prodloužení  $\epsilon_n$  tak, aby platilo

$$\sigma_n = f(\epsilon_n). \quad (2.7)$$

Je-li  $\sigma_n$  v mezích pružnosti, je  $\sigma_n = E \epsilon_n$ . Definice (2.7) však není jediná možná. Vždy bude platit, že jmenovité napětí představuje průměrnou hodnotu napětí v řezu  $y = 0$  (tj. v nejužším místě tyče)

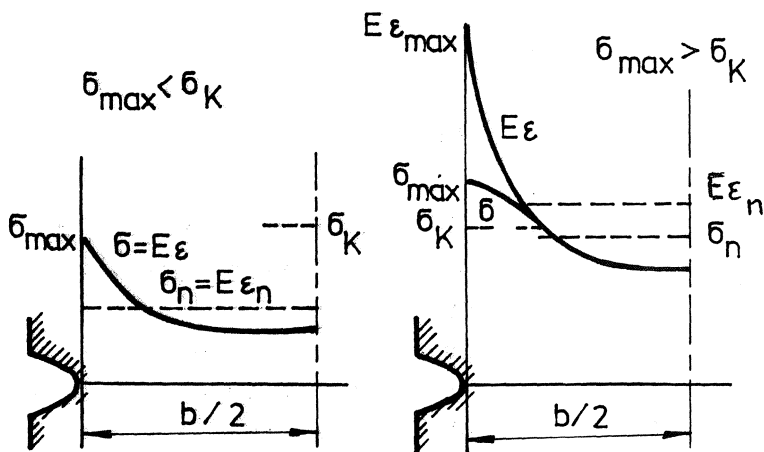
$$\sigma_n = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_y(x; y=0) dx. \quad (2.8)$$

Obdobně můžeme definovat jmenovité poměrné prodloužení <sup>x)</sup>

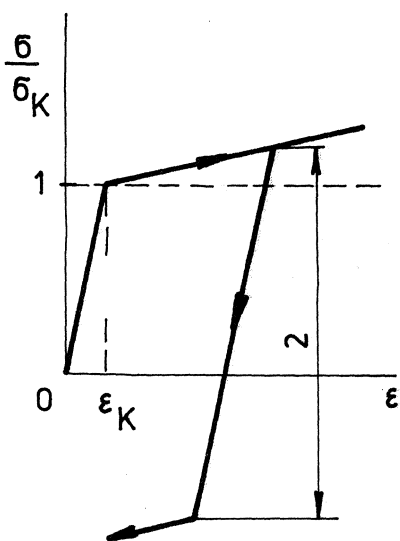
$$\epsilon_n = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \epsilon_y(x; y=0) dx. \quad (2.9)$$

<sup>x)</sup> Obvykle se však vychází z definice založené na vztahu (2.7).

Vydeme-li z definic (2.8) a (2.9), nebude už pro nelineární materiál platit, že  $\sigma_n = f(\epsilon_n)$  (obr. 13), leda pro velkou šířku tyče ( $b/\rho \rightarrow \infty$ ). Vztah  $\sigma = f(\epsilon)$  platí pro jednoosou napjatost. Odchylka od tohoto vztahu vzniká také u kulatých tyčí s vrubem vlivem prostoro-  
rové napjatosti, takže  $\sigma_y \neq f(\epsilon_y)$ . Tato odchylka však není podstatná.



Obr. 13



Obr. 14

Uvedeme nyní příklad - zatěžování zkušební tyče s idealizovanými vlastnostmi materiálu. Budeme předpokládat, že má bilineární charakteristiku (obr. 14) s modulem kinematického zpevnění  $E' = 0,02 E$ . Bude-li tyč hladká a zatížíme-li ji napětím např.

$\sigma_n = 1,2 \sigma_K$ , vznikne poměrné prodloužení

$$\epsilon = \frac{\sigma_K}{E} + \frac{0,2\sigma_K}{E'} = 11 \frac{\sigma_K}{E} = 11 \epsilon_K. \quad (2.10)$$

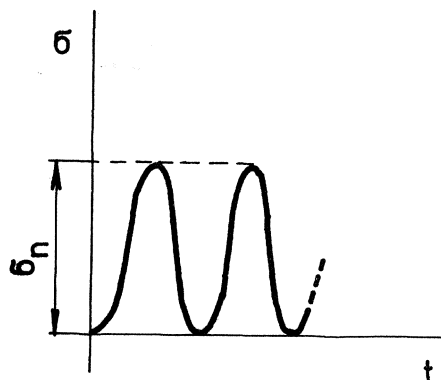
Po odlehčení zůstane v tyči trvalé prodloužení

$$\epsilon_p = \epsilon - \frac{\sigma_n}{E} = 11 \epsilon_K - \frac{1,2\sigma_K}{E} = 9,8 \epsilon_K. \quad (2.11)$$

Bude-li zatížení míjivé (obr. 15), budou další deformace pouze elastické, neboť vlivem zpevnění bude nyní nová mez kluzu  $\sigma_K^* = 1,2 \sigma_K$ . Nenastane-li tedy změkčení vlivem cyklického zatěžování, bude další zatěžování čistě elastické.

Kdyby byl modul zpevnění nulový ( $E' = 0$ ), vznikla by neomezená plastická deformace v prvním cyklu zatížení (při  $\sigma = \sigma_k$  by nastal mezní stav). V odlehčené hladké tyči není žádné napětí, neboť elastické i plastické deformace probíhají v průřezu rovnoměrně a napětí je vždy úměrné vnější síle <sup>x)</sup>.

Zcela jiná situace nastane, budeme-li zkoušet tyč s vrubem. Budeme předpokládat, že tyč je značně široká a že pro jmenovité hodnoty platí Hookeův zákon ( $\sigma_n = E \varepsilon_n$ ). Zvolíme třeba  $\sigma_n = 0,8 \sigma_k$  (míjivé napětí podle obr. 15) a tvarový činitel  $\alpha = 3$ .



Obr. 15

Kdyby byl materiál dokonale elastický, odpovídal by stav napjatosti a přetvoření v kořeni vrubu bodu A na obr. 16. Ve skutečnosti vznikne napětí  $\sigma_{max} < \alpha \sigma_n$  a přetvoření  $\varepsilon_{max} > \alpha \varepsilon_n$  (bod B). Bude-li opět  $E' = 0,02 E$ , dostaneme rovnici přímký KB

$$\sigma_{max} - \sigma_k = 0,02 E (\varepsilon_{max} - \varepsilon_k). \quad (2.12)$$

Dosadíme sem  $\sigma_{max} = K_G \sigma_n = 0,8 K_G \sigma_k$ ,  $\varepsilon_{max} = K_E \varepsilon_n = 0,8 K_E \varepsilon_k$ .  
Vyjde

$$0,8 K_G - 1 = 0,016 K_E - 0,02. \quad (2.13)$$

Vzhledem k (2.5) bude  $K_E = 9 / K_G$ , takže

$$0,8 K_G^2 - 0,98 K_G - 0,144 = 0. \quad (2.14)$$

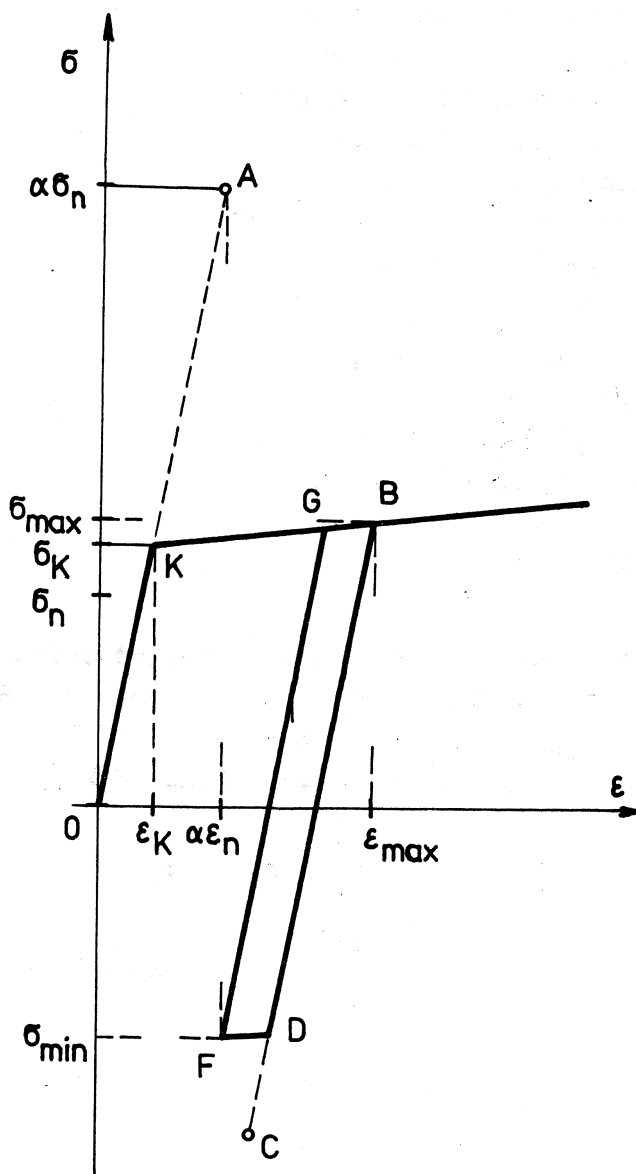
Bude tedy

$$K_G = 1,357, \quad K_E = 6,629. \quad (2.15)$$

Proto

$$\sigma_{max} = 1,086 \sigma_k \quad \varepsilon_{max} = 5,303 \varepsilon_k. \quad (2.16)$$

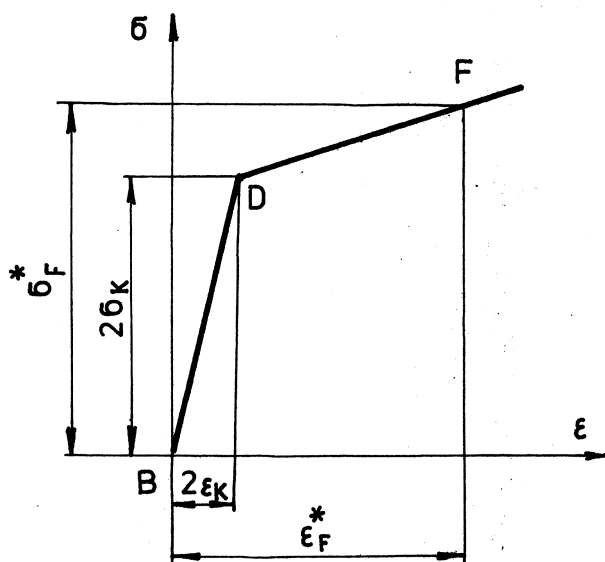
<sup>x)</sup> Nerovnoměrnost způsobenou nehomogenní strukturou materiálu zanedbáváme.



Obr. 16

Pro odlehčení platí Hookův zákon, pokud napětí opačného smyslu nepřestoupí znovu mez kluzu. V jádru průřezu zůstane zhruba zanedbatelné napětí (neboť tyč je široká), ale stav u kořene vrubu je složitější. Kdyby odlehčení proběhlo elasticky, dostali bychom se s napjatostí a přetvořením v kořeni vrubu z bodu B na obr. 16 až do bodu C. Úsečka BC by odpovídala poklesu napětí  $\Delta\sigma = \alpha\sigma_n = 3\sigma_n = 2,4\sigma_K$ . Protože tento pokles je větší než  $2\sigma_K$  (srov. s obr. 14), vznikne v bodě D nová plastická deformace opačného smyslu. Abychom našli bod F, který bude odpovídat ukončenému odlehčování, posuneme počátek do bodu B a zopakujeme řešení, které jsme již uvedli,

pro situaci podle obr. 17



Obr. 17

$$\sigma_F^* - 2 \sigma_k = 0,02 E (\epsilon_F^* - 2 \epsilon_k), \quad (2.17)$$

$$0,8 K_G^F - 2 = 0,016 K_E^F - 0,04 \quad (2.18)$$

čili

$$0,8 (K_G^F)^2 - 1,96 K_G^F - 0,144 = 0. \quad (2.19)$$

Odtud a podle (2.5) dostaneme

$$K_G^F = 2,521 \quad , \quad K_E^F = 3,569. \quad (2.20)$$

Na obr. 16 tedy bude

$$\sigma_F = \sigma_B - 2,521 \sigma_n = (1,086 - 2,017) \sigma_k = -0,931 \sigma_k, \quad (2.21)$$

$$\epsilon_F = \epsilon_B - 3,569 \epsilon_n = (5,303 - 2,855) \epsilon_k = 2,448 \epsilon_k. \quad (2.22)$$



To znamená, že se při míjivém namáhání tyče s vrubem vytvoří hysterezní smyčka BDFG s vynucenou opakovanou plastickou deformací. Celkový rozkmit poměrného přetvoření v kořeni vrubu bude

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_B - \varepsilon_F = 2,855 \varepsilon_K. \quad (2.23)$$

Ačkoli přiložené zatížení podle obr. 15 je míjivé, vzniká v kořeni vrubu napětí o střední hodnotě resp. amplitudě

$$\sigma_m = 0,078 \sigma_K, \quad \sigma_a = 1,009 \sigma_K. \quad (2.24)$$

Střední složka je zřejmě velmi malá, takže jde přibližně o střídavé napětí.

Z celkového rozkmitu (2.23) připadne na plastické deformace

$$\Delta \varepsilon_p = \Delta \varepsilon - \alpha \sigma_n / E = 0,455 \varepsilon_K. \quad (2.25)$$

Tyto deformace se budou opakovat a pravděpodobně povedou k poruše, pokud nenastane cyklické zpevnění materiálu. V tom případě se napětí zvýší a hysterezní smyčka zúží. Smyčka by úplně vymizela, kdyby  $\sigma_K^* = 1,2 \sigma_K$ . V tom případě by bylo  $\sigma_a = \alpha \sigma_n / 2 = \sigma_K^*$ ;  $\Delta \varepsilon_p = 0$ . Kdyby nastalo naopak změkčení, zmenšilo by se napětí a hysterezní smyčka by se rozšířila. Plastické deformace by se opakovaly až do poruchy.

Oba tyto případy byly značně zidealizovány. Ukazují však, že vlivem zbylých pnutí se v kořeni vrubu posouvá střední napětí cyklu závisle na historii zatěžování. Je-li vzorek s vrubem zatěžován s konstantní amplitudou síly, je materiál v kořeni vrubu zatěžován spíše za podmínek konstantní amplitudy deformace (přetvoření), neboť ta je určována do značné míry elastickými deformacemi v jádru průřezu. Usuzujeme tak podle toho, že v hladké tyči o stejných mechanických vlastnostech by příslušel rozkmitu napětí  $\Delta \sigma = \alpha \sigma_n = 2,4 \sigma_K$  rozkmit poměrného prodloužení  $2 \varepsilon_K + (0,4/0,02) \varepsilon_K = 22 \varepsilon_K$ , tedy hodnota skoro osmkrát větší než u tyče s vrubem. U té jsou plastické deformace omezovány souvislostí s pružným jádrem, takže hysterezní smyčka na obr. 16 je velmi úzká. Přerušíme-li zatěžování, zůstane v kořeni vrubu odlehčené tyče zbylé vlastní pnutí  $\sigma_{min} = \sigma_F = -0,931 \sigma_K$ . Je tlakové, což má příznivý vliv na velikost amplitudy napětí na mezi únavy.

Vidíme, že výsledky zkoušek hladkých tyčí lze přenášet na části s konstrukčními vruby jen velmi obtížně. Používáme-li k tomu jednoduchých vzorců odvozených ze zkušenosti, vždy tím složitou skutečnost zjednodušujeme.

Všude v této publikaci budeme předpokládat, že namáhání je periodické, a to harmonické (sinusové s libovolným fázovým posunutím) nebo polyharmonické s převládající první harmonickou složkou (tj. takové, které se jen málo liší od harmonického průběhu). Tyto cykly zatížení se mohou po blocích měnit, jak bude vysvětleno v textu k rovnici (8.3). V každém cyklu (tj. v průběhu každé periody) existuje horní napětí  $\sigma_h = \sigma_{max}$  a dolní napětí  $\sigma_d = \sigma_{min}$ . Střední napětí cyklu  $\sigma_m$  a amplituda cyklu  $\sigma_a$  se vypočtou ze vzorců

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_h + \sigma_d), \quad (2.27)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_h - \sigma_d). \quad (2.28)$$

Jestliže není splněna podmínka převládající první harmonické složky (je-li např. na základní průběh namáhání v cyklu superponováno kmitání s převládající vyšší harmonickou složkou), můžeme zanedbáním změn uvnitř jedné periody dospět k chybným odhadům životnosti. Chyba vzniká tím, že hodnoty (2.27) a (2.28) bereme jako jediné charakteristiky cyklu pro celou periodu, ačkoli bychom měli správněji rozložit průběh napětí v této periodě na větší počet dílčích cyklů. O metodách takového rozkladu pojednáme v pozdějším semináři, věnovaném únavě součástí s náhodným zatěžováním.

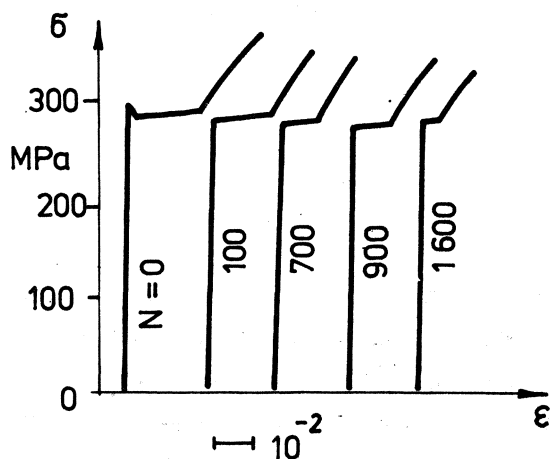
Poznamenejme, že při výpočtu trvalé pevnosti (pro neomezenou životnost) není takový rozklad nutný. Nedopustíme se totiž významné chyby, uijeme-li k výpočtu trvalé pevnosti při složeném cyklickém namáhání výrazů (2.27) a (2.28) určených z celkových extrémních hodnot za jednu periodu bez zřetele k lokálním extrémům uvnitř intervalu  $(\sigma_d, \sigma_h)$ , tj. nahradíme-li složený průběh namáhání harmonickým průběhem se stejnými největšími a nejmenšími hodnotami napětí v průběhu celé periody.

### 3. Cyklická křivka napětí - přetvoření

Vznik únavového lomu je od počátku až do konce nevratným dějem. Dokonce v období latentního poškozování materiálu, kdy navenek není patrna žádná porucha, probíhají v mikrostruktuře materiálu trvalé změny. Deformace materiálu provázené nevratnými změnami označujeme

jako plastické, a to i tehdy, nelze-li v makroskopickém měřítku žádné trvalé deformace pozorovat. O elastických deformacích naopak předpokládáme, že jsou vratné. Záleží ovšem na tom, jak velké musí být trvalé deformace, abychom je dovedli prakticky rozpoznat. Mez elastických deformací je proto smluvní. To však na uvedené zásadě mnoho nemění.

Při cyklickém (tj. obecně periodickém) zatěžování, jehož velikost přesáhne určitou mez, se mění i mechanické vlastnosti materiálu. Pozorujeme např., že se mění pracovní diagram při zkoušce tahem. Na obr. 18



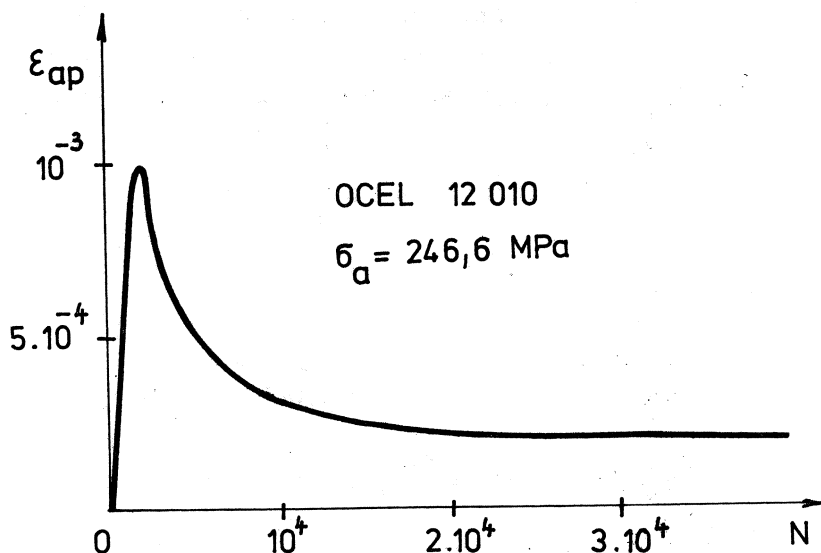
Obr. 18

je naznačeno zkracování prodlevy na mezi kluzu po různém počtu cyklů střídavého namáhání s amplitudou  $\sigma_a = 246,6$  MPa; vzorky byly vyrobeny z oceli podle ČSN 12 010.<sup>x)</sup> Vzájemné působení dislokací a intersticiálních atomů, jakož i generování, pohyb, shlukování nebo naopak uvolňování dislokací způsobují, že v mikrostruktuře vzniká zároveň zpevnění (pozorovatelné obecně jako růst odporu materiálu proti plastické deformaci) i změkčování (pokles tohoto odporu). Výsledná odezva materiálu závisí na tom, který proces v ma-

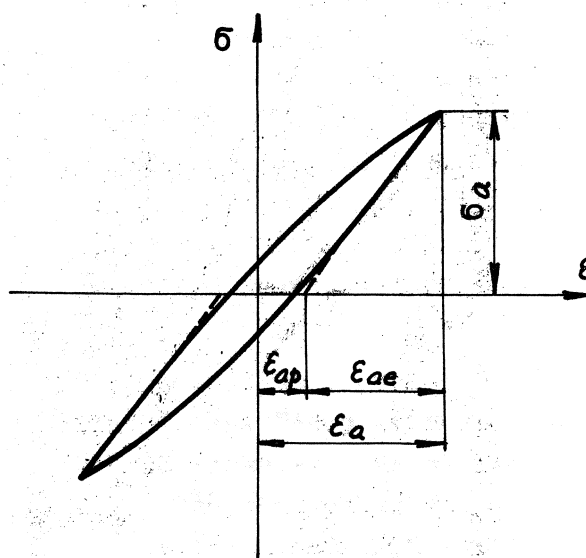
teriálu převládne. Např. u vzorků popisovaných v souvislosti s obr. 18 se měnila amplituda plastické deformace  $\epsilon_{ap}$  při zatěžování konstantní amplitudou napětí  $\sigma_a = 246,6$  MPa v závislosti na počtu cyklů tak, jak je naznačeno na obr. 19. Tento průběh má zřejmě dvě části. Na počátku (až do určitého počtu cyklů) převládá změkčení. Přibývá počet zrn s uvolněnými dislokacemi a jejich plastické deformace vznikají téměř bez prodlevy v diagramu  $\sigma-\epsilon$ . Plastická deformace  $\epsilon_{ap}$  roste a s ní roste i šířka hysterezní smyčky (obr. 20). Prodleva v pracovním diagramu postupně vymizí<sup>xx)</sup>. Pak se počne projevovat zpevnění vzniklé postupným blokováním pohybu uvolněných dislokací, což vede k poklesu amplitudy plastické deformace  $\epsilon_{ap}$  a k zužování hysterezní smyčky. Po určitém počtu cyklů se vytvoří stacionární stav, tj. mechanické hodnoty se ustálí a dále se nemění.

<sup>x)</sup> Podle Klesnila a Lukáše.

<sup>xx)</sup> Zkoušky se uskutečňují na mnoha vzorcích. Vzorek podrobený zkoušce tahem se už dále cyklicky nezatěžuje.



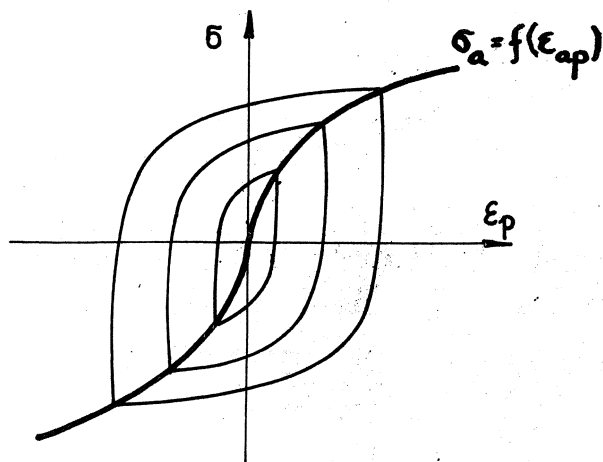
Obr. 19



Obr. 20

U kovů s prodlevou na mezi kluzu dochází k výrazné superpozici procesů změkčování a zpevnování, což jsme ukázali na obr. 19. V jiných případech převládá od počátku buď jenom zpevnění (typické pro vyžíhané materiály) nebo jenom změkčení (převážně u materiálů předem zpevněných např. tvářených, kalených ap.). Po skončení cyklického zpevnění popř. změkčení se mechanické vlastnosti během dalšího cyklického zatěžování už nemění. Hysterezní smyčka se ustálí s takovou amplitudou plastických

deformací  $\epsilon_{ap}$ , která bude záviset už jen na amplitudě zatěžování  $\sigma_a$  a nikoli na počtu  $N$  cyklů zatížení (obr. 20). Funkci  $\sigma_a = f(\epsilon_{ap})$  vyznačenou na obr. 21 považujeme za cyklickou křivku napětí - deformace. Na témže obrázku jsou zakresleny i některé ustálené hysterezní smyčky (po odečtení elastické části deformace).



Obr. 21

Cyklickou křivku lze popsat rovnicí

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} = \left( \frac{\epsilon_{ap}}{\epsilon_f} \right)^n, \quad (3.1)$$

kde  $\sigma_f$  je součinitel únavové pevnosti,  
 $\epsilon_f$  - součinitel únavové tažnosti a  
 $n$  - součinitel únavového zpevnění.

Exponent  $n$  bývá zpravidla v mezích 0,1 až 0,2.

Rovnici (3.1) lze upravit do tvaru

$$\sigma_a = A \epsilon_{ap}^n, \quad (3.2)$$

kde

$$A = \sigma_f / \epsilon_f^n \quad (3.3)$$

značí součinitel cyklické pevnosti. Názvosloví není dosud ustáleno.

### Příklad

Speciální titanová slitina má za provozní teploty 310 °C součinitel cyklické pevnosti  $A = 1214$  MPa, součinitel únavového zpevnění  $n = 0,112$ , modul pružnosti  $E = 1,01 \cdot 10^5$  MPa, mez pevnosti  $\sigma_{Pt} = 690$  MPa. Součást s vrubem o tvarovém činiteli  $\alpha = 3$  je cyklicky zatěžována jmenovitým střídavým napětím  $\sigma_n = 400$  MPa. Jak se bude měnit přetvoření v kořeni vrubu ?

Zanedbáme-li případné vlastní pnutí, bude namáhání v kořeni vrubu rovněž střídavé. Pak

$$\sigma_{max} = K_G \sigma_n, \quad \epsilon_{max} = K_E \epsilon_n \quad (3.4)$$

a podle (2.5)

$$K_G K_T = \alpha^2. \quad (3.5)$$

Bude tedy

$$\alpha^2 = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \cdot \frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_n}. \quad (3.6)$$

Rozdělíme-li přetvoření  $\epsilon_{max}$  na elastickou a plastickou část, dostaneme užitím (3.2)

$$\epsilon_{max} = \epsilon_{e_{max}} + \epsilon_{p_{max}} = \frac{\sigma_{max}}{E} + \left( \frac{\sigma_{max}}{A} \right)^{1/n}. \quad (3.7)$$

Podobná rovnice bude platit i pro jádro průřezu, v němž se napětí jen málo liší od napětí jmenovitého (tím méně, čím je zkušební tyč širší). Budeme předpokládat, že platí definiční rovnice (2.7). Pak i pro jmenovité hodnoty napětí a poměrného prodloužení bude platit vztah analogický k rovnici (3.7)

$$\epsilon_n = \epsilon_{ne} + \epsilon_{np} = \frac{\sigma_n}{E} + \left( \frac{\sigma_n}{A} \right)^{1/n}. \quad (3.8)$$

Z rovnic (3.7) a (3.8) dosadíme do rovnice (3.6). Po úpravě dostaneme

$$(\alpha \sigma_n^2) \left[ 1 + \frac{E}{\sigma_n} \left( \frac{\sigma_n}{A} \right)^{1/n} \right] = \sigma_{max}^2 \left[ 1 + \frac{E}{\sigma_{max}} \left( \frac{\sigma_{max}}{A} \right)^{1/n} \right]. \quad (3.9)$$

Veličiny na levé straně známe, takže budeme moci psát

$$\sigma_{max}^2 \left[ 1 + \frac{E}{\sigma_{max}} \left( \frac{\sigma_{max}}{A} \right)^{1/n} \right] = K, \quad (3.10)$$

$$K = (3.400)^2 \left[ 1 + \frac{1,01 \cdot 10^5}{400} \left( \frac{400}{1214} \right)^{1/0,112} \right] \doteq 1458015 \text{ (MPa)}^2.$$

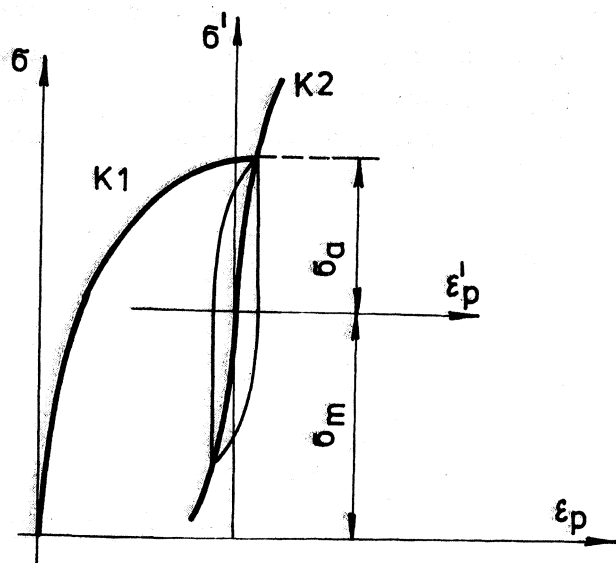
Numerickým řešením rovnice (3.10) dostaneme  $\sigma_{max} \doteq 740,8$  MPa. Tomuto napětí bude odpovídat podle (3.7) ustálená celková amplituda deformace  $\epsilon_{max} = 0,0195$ , z níž připadá na elastickou složku  $\epsilon_{e,max} = 0,0073$  a na plastickou složku  $\epsilon_{p,max} = 0,0122$ .

To znamená, že podmínky pro vznik počáteční únavové trhliny (pro její nukleaci) jsou v kořeni vrubu dané tyče přibližně stejné jako v hladké tyči podrobené střídavé deformaci s konstantní amplitudou poměrného přetvoření  $\epsilon_a = 0,0195$ .

#### Poznámka

Antolovič, Anderson a Zagray<sup>x)</sup> zobecnili tuto úvahu i pro nesouměrné cykly zatížení. Předpokládali, že rovnice (3.2) platí jednak pro maximální hodnoty napětí a poměrného prodloužení, jednak pro jejich amplitudy. To znamená, že při ustáleném stavu leží horní vrchol hysterzní smyčky na průsečíku cyklických křivek K1, K2 (obr. 22). Obě tyto křivky jsou popsány stejnou rovnicí (3.2), křivka K1 se však vztahuje k souřadnicím  $\sigma$ ,  $\epsilon_p$ , kdežto křivka K2 k souřadnicím  $\sigma'$ ,  $\epsilon_p'$ . Součinitel cyklické pevnosti  $A$  i součinitel únavového zpevnění  $n$  jsou stejné. Prakticky to znamená, že kromě rovnice (3.9) psané pro maximální hodnoty  $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$ ,  $\epsilon_{max} = \epsilon_m + \epsilon_a$  máme ještě obdobnou rovnici pro amplitudy  $\sigma_a$ ,  $\epsilon_a$ . Na levé straně rovnic jsou jmenovité hodnoty, které známe, na pravé jsou hodnoty platné pro kořen vrubu, které hledáme. V našem příkladu jsme měli  $\sigma_m = 0$ , takže obě tyto rovnice splynuly v jednu. Vystačili jsme proto s jedinou rovnicí (3.9).

<sup>x)</sup> Viz sborník "Advances in research on the strength and fracture of materials", sv. 2B, redigovaný D. M. R. Taplinem (1978).



Obr. 22

#### 4. Iniciace únavové trhliny

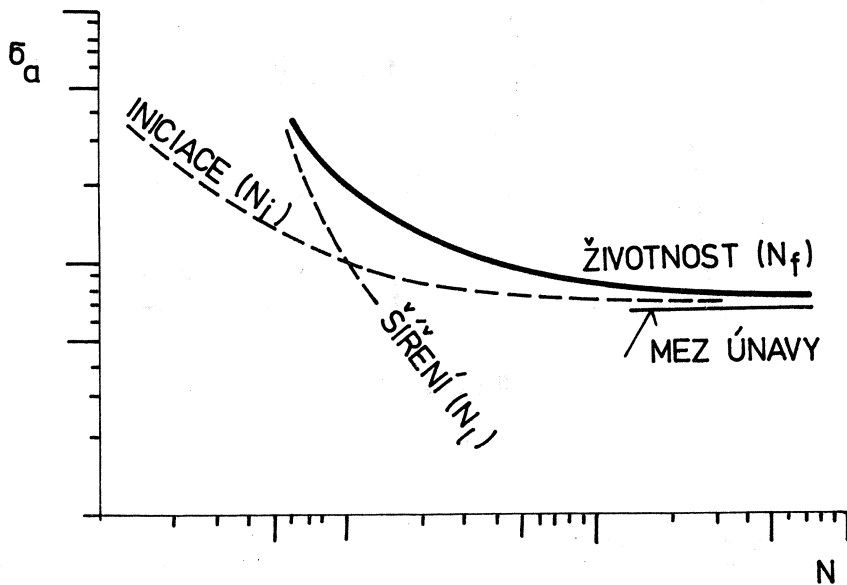
Počet  $N_f$  cyklů zatížení do lomu označujeme jako životnost. Dělí se na tři stadia. V prvním dochází ke změnám mechanických vlastností, jež probíhají ve větším objemu materiálu. V druhém se změny v mikrostruktuře lokalizují v malých objemech, zpravidla v povrchové vrstvě materiálu, kde se postupně vytvoří zárodečná trhlina. Toto druhé stadium se nazývá nukleace trhliny. Ve třetím stadiu se zárodečná trhlina postupně rozšíří až do lomu. První dvě stadia lze shrnout do jednoho, které označujeme jako iniciaci trhliny; příslušný počet cyklů je  $N_i$ . Pro  $0 < N < N_i$  tedy nepozorujeme na zkoušené součásti žádné vnější změny. Když  $N = N_i$ , jsme schopni inženýrskými metodami rozpoznat zárodečnou trhlinu. Je jasné, že hodnota  $N_i$  není jednoznačně definována a že záleží na naší rozpoznávací schopnosti. Během dalších  $N_L$  cyklů se zárodečná trhlina rozšíří až do lomu, takže

$$N_f = N_i + N_L \quad (4.1)$$

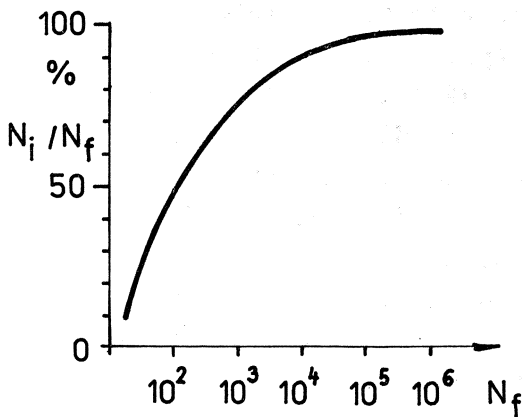
Na obr. 23 je zakreslena v logaritmických souřadnicích ( $\log N_f$ ,  $\log \sigma_a$ ) mezní čára  $N_f = f(\sigma_a)$  vyznačující životnost při dané amplitudě napětí  $\sigma_a$ . Čárkovaně jsou zakresleny i počty cyklů potřebné pro iniciaci a šíření trhliny. Poměrná délka iniciačního stadia  $N_i/N_f$



je blízká jedné, převyšuje-li namáhání jen nepatrně mez únavy. Blíží se nule, když se namáhání přibližuje mezi pevnosti. Protože na velikosti namáhání závisí i celkový počet cyklů do lomu  $N_f$ , můžeme poměrnou délku iniciačního stadia vyjádřit v závislosti na tomto počtu.



Obr. 23

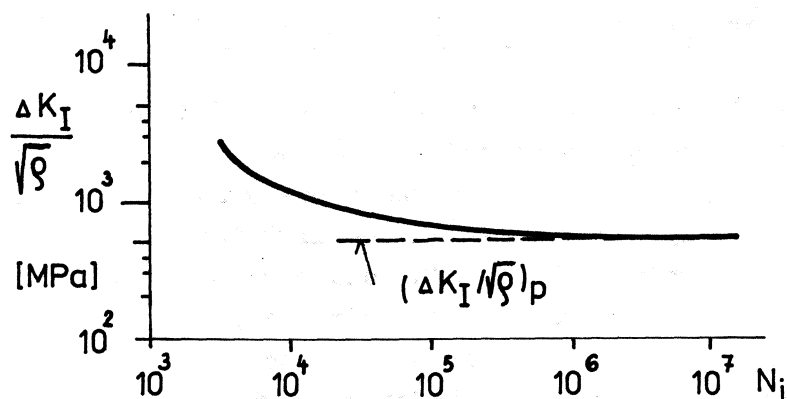


Obr. 24

Příklad takové závislosti je na obr. 24. Nemá obecnou platnost, neboť poměrná délka iniciačního stadia závisí ještě na mnoha dalších vlivech (na tvaru a velikosti části, na materiálu, na jakosti povrchu, na vlivu prostředí ap.). Nukleační stadium se obvykle zkracuje účinkem povrchových nerovností, tahovým reziduálním pnutím v povrchové vrstvě, oduhličením a vlivem kapalného korozivního prostředí. Prodlužuje se účinkem tlakových reziduálních pnutí v po-

vrchové vrstvě a zpevněním povrchové vrstvy (např. povrchovým kalením, cementováním a kalením, nitridací).

U poměrně ostrých vrubů je maximální napětí podle (1.7) determinováno poměrem  $K_I / \sqrt{r}$ . Lze proto očekávat, že délka iniciačního stadia bude záviset pro daný materiál už jen na tomto poměru. To se skutečně v hrubých rysech potvrzuje. Příklad takové závislosti pro austenitickou ocel ukazuje obr. 25.



Obr. 25

Zde je vynesena podíl rozkmitu součinitele intenzity napětí

$$\Delta K_I = K_{I\max} - K_{I\min} = 2Ka$$

a odmocniny z poloměru  $Q$  křivosti ve vrubu v závislosti na počtu  $N_i$  cyklů do počáteční trhliny (v logaritmických stupnicích) při součiniteli asymetrie cyklu  $R = 0,1$ . Tento součinitel je definován poměrem

$$R = K_{I\min} / K_{I\max} = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}. \quad (4.2)$$

Je-li namáhání míjivé, je  $R = 0$ ; pro střídavé namáhání máme  $R = -1$ .

Součinitel intenzity napětí se pro vyčíslení poměru  $\Delta K_I / \sqrt{Q}$  počítá tak, jako by šlo o ostrou trhlínu, jejíž délka se rovná celkové hloubce vrubu.

Z obr. 25 je zřejmé, že k iniciaci trhliny nedojde, nepřestoupí-li poměr  $\Delta K_I / \sqrt{Q}$  určitou prahovou hodnotu (označenou na obr. 25 indexem "p"). Rolfe a Barsom (1977) uvádějí pro tuto prahovou hodnotu empirický vzorec

$$\left( \frac{\Delta K_I}{\sqrt{Q}} \right)_p = 0,9 \sigma_{pt} \quad (\text{pro } R = 0,1). \quad (4.3)$$

Vzorec platí pro oceli, jejichž pevnost je z intervalu  $480 \text{ MPa} < \sigma_{pt} < 1030 \text{ MPa}$ . Protože  $\sigma_{\max} = (2/\sqrt{\pi})(K_I/\sqrt{Q})$ , je amplituda napětí na mezi únavy při této asymetrii cyklu  $\sigma_a = (0,9/\sqrt{\pi}) \sigma_{pt} = 0,51 \sigma_{pt}$ . Tato hodnota však není totožná s mezí únavy, neboť nejde o jmenovité napětí, ale o napětí v relativně ostrém vrubu.

## 5. Šíření únavových trhlin při konstantní amplitudě napětí

Bylo zjištěno, že trhlina v tělese se nešíří, nepřestoupí-li amplituda součinitele intenzity napětí  $K_a = (K_{I\max} - K_{I\min})/2$  určitou základní prahovou hodnotu  $K_{ap2}$ . Tato hodnota představuje odpor materiálu proti šíření trhliny. Vytvoříme-li v okolí kořene trhliny vlastní tlakové pnutí (odlehčením z plastického stavu po předchozím zatížení), můžeme zjistit, že se trhlina nebude šířit ani při hodnotách větších než  $K_{ap2}$  a zároveň menších než prahová hodnota  $K_{ap}$  závislá na úrovni zbytkových pnutí. Hodnota  $K_{ap2}$  představuje však nejmenší prahovou hodnotu, kterou lze u daného materiálu zjistit a ta je na vlastním pnutí nezávislá. Hodnoty  $K_{ap2}$  zjištěné za střídavého namáhání jsou pro různé materiály uvedeny v tab. 2 (podle Klesnila a Lukáše).

TABULKA 2                      Hodnoty  $K_{ap2}$  pro různé materiály

Materiál	$K_{ap2}$ [MPa $\sqrt{m}$ ]
Ocel 12 013	4,02
ocel 12 010	4,02
ocel 12 060	4,02
ocel 12 060 zušlechtná	4,02
ocel T60	3,68
ocel AK1	3,68
austenitická ocel 18/8	2,94
hliník	0,49
měď	1,32
mosaz 60/40	1,52
titan	1,08
nikl	2,89

Rolfe a Barsom uvádějí prahové hodnoty rozkmitu součinitele intenzity napětí pro asymetrický cyklus  $R = 0,1$  (přibližně míjivé namáhání).

Podle nich je u mnoha materiálů prahová hodnota ohraničena takto:

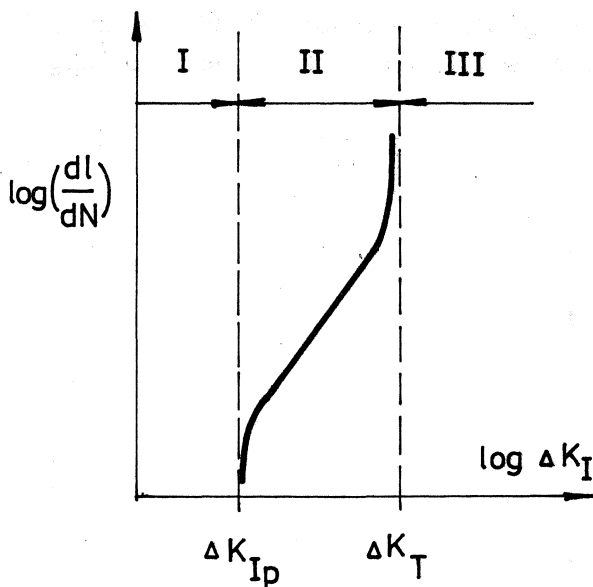
$$2,4 \cdot 10^{-5} \leq \frac{\Delta K_{Ip}}{E} \leq 2,9 \cdot 10^{-5} \quad [\sqrt{m}] \quad (5.1)$$

Pro ocel udávají tito autoři vztah (pro různá  $R$ )

$$\begin{aligned} \Delta K_{Ip} &\approx 7 (1 - 0,85 R) && \text{pro } R > 0,1, \\ \Delta K_{Ip} &\approx 6 \text{ [MPa } \sqrt{m}] && \text{pro } R < 0,1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Je-li  $K_a < K_{apz}$  resp.  $\Delta K_I < \Delta K_{Ip}$ , trhlina se nešíří.<sup>x)</sup> Není-li tato podmínka splněna, nastane postupné šíření trhliny. Na obr. 26 je na-

značena závislost "rychlosti" šíření trhliny na rozkmitu součinitele intenzity napětí při mívivém namáhání. Šíření trhliny je zde charakterizováno přírůstkem délky trhliny za jeden cyklus zatížení, tedy poměrem  $dL/dN$ . Rozeznáváme zde tři různé oblasti. V první se trhlinka nešíří. V druhé se trhlinka šíří zhruba podle mocninového zákona



$$\frac{dL}{dN} = A (\Delta K_I)^n, \quad (5.3)$$

kde  $A$ ,  $n$  jsou materiálové konstanty. Tento zákon platí uvnitř intervalu

$$\Delta K_{Ip} < \Delta K_I < \Delta K_T.$$

Na přechodu do třetí oblasti

(tj. pro  $\Delta K_I \rightarrow \Delta K_T$ ) se rychlost šíření trhliny počne nápadně zvyšovat, až nastane konečný lom. Přitom  $\Delta K_T$  je menší z hodnot uvedených v závorce<sup>xx)</sup>

$$\Delta K_T = \min (k_c, \sqrt{E G_f \delta_T}), \quad (5.4)$$

x) Samozřejmě  $\Delta K_I = 2 K_a$ ,  $\Delta K_{Ip} \leq 2 K_{apz}$ .

xx) Index "T" zde znamená tranzitní (přechodovou) hodnotu.

kde  $E$  je modul pružnosti v tahu-tlaku,

$$G_f = \frac{1}{2} (G_{kt} + G_{pt}),$$

$$\delta_T \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ m},$$

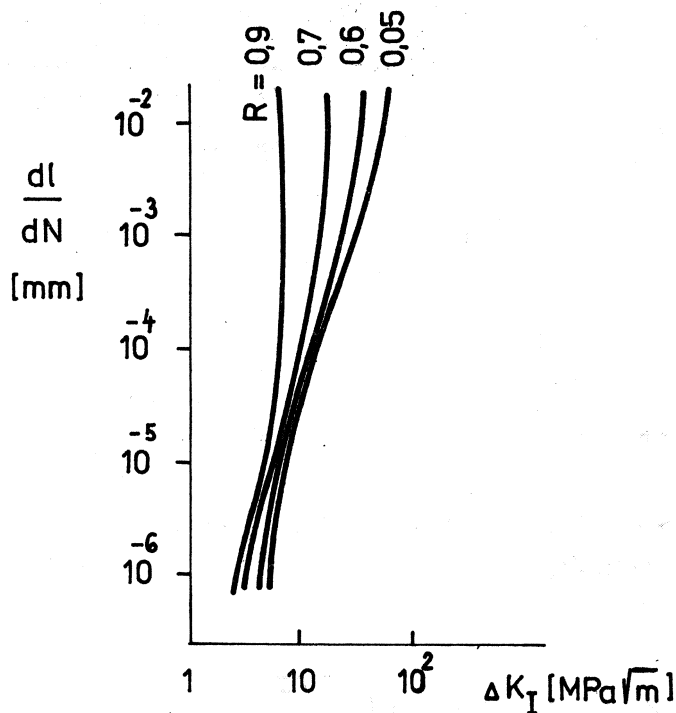
$K_C$  je kritická hodnota součinitele intenzity napětí.

Hodnota  $K_C$  odpovídá počátku nestabilního šíření trhliny. Jsou-li plastické deformace omezeny na velmi malou oblast v okolí kořene trhliny a převládá-li u tohoto kořene rovinné přetvoření, je hodnota  $K_C$  totožná s lomovou houževnatostí  $K_{IC}$ .

Pro druhou oblast na obr. 26 přibližně platí tento konzervativní odhad (pro různé druhy ocelí a různou asymetrii cyklu  $R \neq 0$ ):

$$\frac{dL}{dN} = 1,356 \cdot 10^{-7} \frac{(\Delta K_I)^{2,25}}{\sqrt{1-R}} \quad [ \text{mm}; \text{MPa} \sqrt{\text{m}} ] \quad (5.5)$$

U houževnatých ocelí, jakých se většinou užívá k výrobě tlakových nádob, je vliv součinitele  $R$  asymetrie cyklu druhořadý. Jinak je nutné pamatovat, že s rostoucím  $R$  se zmenšuje hodnota  $\Delta K_T$ , jak ukazuje příklad na obr. 27.



Obr. 27

## 6. Příklad výpočtu zbytkové životnosti výrobku s trhlinou

Předpokládejme, že plochá tyč namáhaná míjivým tahem má na jedné straně počáteční trhlinu délky  $l = l_0 = 7$  mm (obr. 28). Tyč o šířce  $2b = 150$  mm je vyrobena z materiálu s kritickou hodnotou součinitele intenzity napětí  $K_C = 170 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$ , s mezí kluzu  $\sigma_{kt} = 700$  MPa, s mezí pevnosti  $\sigma_{Pt} = 1000$  MPa, a namáhána cyklicky napětím o střední hodnotě  $\sigma_m = 240$  MPa a o amplitudě  $\sigma_a = 70$  MPa. Jakou lze předvídat životnost ?

Pro tyč podle obr. 28 známe vzorec pro výpočet součinitele intenzity napětí

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \psi \left( \frac{l}{b} \right), \quad (6.1)$$

kde funkci  $\psi \left( \frac{l}{b} \right)$  odečteme z tabulky

$l/b =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\psi =$	1,15	1,20	1,29	1,37	1,51	1,68	1,89	2,14	2,46	2,86

Je-li  $\sigma = \sigma_m + \sigma_a = 310$  MPa,  $K_I = K_C = 170 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$ ,  $b = 0,075$  m, vyjde z rovnice (6.1) kritická délka trhliny  $l_{krit} \doteq 39,75$  mm. Trhlina se tedy bude šířit v intervalu od 7 asi do 40 mm. Tento interval rozdělíme na stejné dílky po 3 mm. Pro střední hodnotu délky trhliny v každém intervalu určíme pomocí (6.1) rozkmit  $\Delta K_I$  a ze vzorce (5.5) pro  $R = 170/310 = 0,5484$  vypočteme  $dL/dN \doteq \Delta L/\Delta N$ . Odtud určíme  $\Delta N$  pro  $\Delta L = 3$  mm. Součtem všech  $\Delta N$  dostaneme životnost  $N_f$ . Výpočet lze sledovat v tab. 3. Vyjde  $N_f = 36\ 087$  cyklů. Tento počet cyklů představuje zbytkovou životnost tyče s počáteční trhlinou o délce 7 mm. Postupný růst trhliny je zřejmý z obr. 29. Lze ukázat, že životnost podstatně závisí na počáteční délce trhliny.

### 1. poznámka

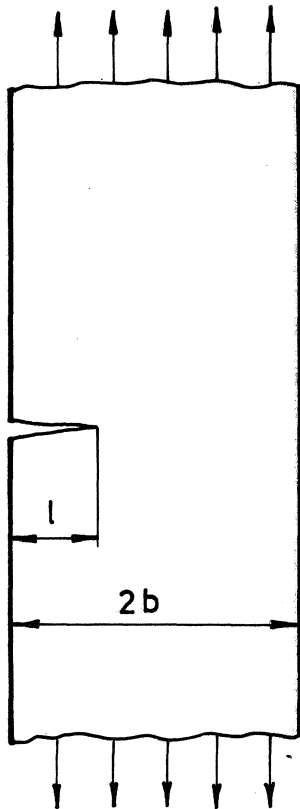
Protože  $\sqrt{E G_f \delta_f} \doteq 84,5 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$  je větší než maximální rozkmit  $\Delta K_I = 74,4 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$  předpokládáme, že stadium šíření trhliny bude ukončeno tehdy, když maximální hodnota součinitele intenzity napětí po prvé dosáhne kritické hodnoty  $K_C = 170 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$ . Výpočet je jen informativní.

TABULKA 3

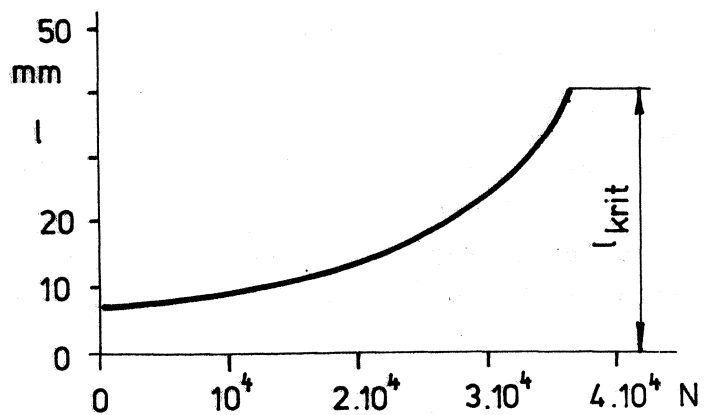
K výpočtu zbytkové životnosti

$l_i$	$L_{stř}$	$\Delta K_I$ [MPa m]	$\frac{dl}{dN} \times 10^4$	$\Delta N$	$N$
7	8,5	26,458	3,20	9365	9365
10	11,5	31,307	4,68	6413	15778
13	14,5	35,752	6,31	4757	20535
16	17,5	40,366	8,29	3620	24155
19	20,5	44,978	10,57	2838	26993
22	23,5	49,467	13,09	2291	29284
25	26,5	53,822	15,83	1895	31179
28	29,5	58,151	18,84	1592	32771
31	32,5	63,353	22,85	1313	34084
34	35,5	68,831	27,54	1089	35173
37	38,5	74,407	32,81	914	36087
40					

6



Obr. 28



Obr. 29

## 2. poznámka

Vzorec (5.5) nebere zřetel na prahovou hodnotu; předpokládá se, že  $\Delta K_I > \Delta K_{I_p}$ . V literatuře lze najít mnoho jiných, různě modifikovaných vzorců. Klesnil a Lukáš (1975) uvádějí např. rovnici <sup>x)</sup>

$$\frac{dL}{dN} = A [ (K_a P^\gamma)^\beta - (K_a P_p^\gamma)^\beta ], \quad (6.2)$$

kde

$$P = \frac{2}{1-R} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_a},$$

$A$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  jsou materiálové konstanty,

index  $p$  značí prahovou hodnotu.

Uvedené vzorce platí pro konstantní nebo jen pomalu se měnící zatěžovací podmínky.

## 3. poznámka

Většinou se únavový lom šíří z kořene nějakého vrubu. Koncentrace napětí působená vrubem má vliv na hodnotu součinitele intenzity napětí, pokud je trhлина krátká ve srovnání s hloubkou vrubu. S prodlužováním se tento vliv zmenšuje. To lze do výpočtu zahrnout tak, že za rozkmit součinitele intenzity napětí dosadíme jeho efektivní hodnotu

$$\Delta K_{ef} = 1,12 f(l; \alpha, \varrho) \Delta \sigma \sqrt{\pi l}. \quad (6.3)$$

Funkce  $f(l; \alpha, \varrho)$  je volena tak, aby pro velmi krátkou trhlinu bylo  $f(0; \alpha, \varrho) = \alpha$ . Pro velmi dlouhou trhlinu přejde  $f(l; \alpha, \varrho)$  v korekční člen respektující konečnou šířku součásti <sup>xx)</sup>; pak  $\Delta K_{ef}$  přejde ve správný výraz  $\Delta K_I$  počítaný tak, že se vrub bere jako součást trhliny (takže celková hloubka předpokládané trhliny se rovná součtu hloubky vrubu  $h$  a skutečné délky trhliny  $l$ ). Užitím těchto dvou krajních hodnot můžeme průběh funkce  $f(l; \alpha, \varrho)$  v závislosti na proměnné délce trhliny  $l$  alespoň přibližně odhadnout.

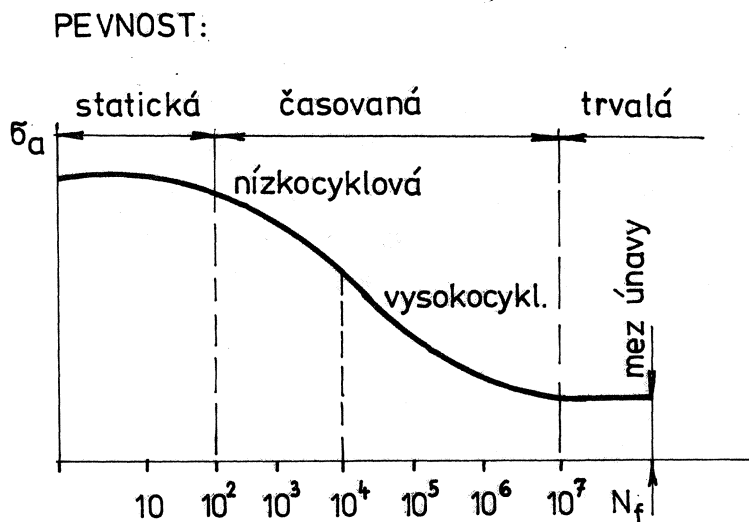
<sup>x)</sup> Předpokládá se, že  $dL/dN \geq 0$ . Kdyby výraz na pravé straně (6.2) vyšel záporný, bylo by  $dL/dN = 0$ .

<sup>xx)</sup> Srovnej s funkcí  $\varphi(l/b)$  v rovnici (6.1); pro tento případ by pro velké  $L$  bylo  $f(l; \alpha, \varrho) = \varphi\left(\frac{L+h}{b}\right) \sqrt{1+(h/l)} / 1,12$ , takže  $\Delta K_I = \Delta \sigma \sqrt{\pi(L+h)} \varphi\left(\frac{L+h}{b}\right)$ . Za "velké" lze považovat  $L > 0,5 \sqrt{\varrho h}$ .



## 7. Křivky životnosti a časovaná pevnost

Na Wöhlerově křivce  $\sigma_a = f(N_f)$  (obr. 30) představující závislost konstantní amplitudy napětí na počtu  $N_f$  cyklů zatížení do lomu se obvykle vyznačují čtyři oblasti: pro  $0 < N_f < 10^2$  jde o kvazistatický lom (při  $R < 0$ ) resp. o dynamické tečení ( $R \geq 0$ ); oblast  $10^2 < N_f < 10^4$  odpovídá nízkocyklové únavě a oblast  $10^4 < N_f < 10^7$  vysokocyklové únavě. Je-li  $N_f > 10^7$ , hovoříme o trvalé pevnosti. Nízkocyklová a vysokocyklová únava se zahrnuje pod pojem časované pevnosti. Hranice mezi jednotlivými oblastmi nejsou přesné a jsou určovány spíše fraktografickými rozdíly vznikajících lomů než nějakou konvencí. Různé "lomové mechanismy" vedou k tomu, že Wöhlerova křivka je v logaritmických nebo semilogaritmických stupnicích lomená a na šikmé větvi dokonce nespojitá; tato nespojitost se zpravidla zanedbává, protože se jen obtížně zjišťuje. Při interpretaci Wöhlerových křivek je třeba pamatovat, že jsou zatíženy rozptylem.



Obr. 30

Je-li materiál namáhán v oblasti nízkocyklové únavy konstantním rozkmitem deformace  $\Delta \varepsilon$ , lze toto přetvoření rozdělit na elastickou a plastickou část

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p. \quad (7.1)$$

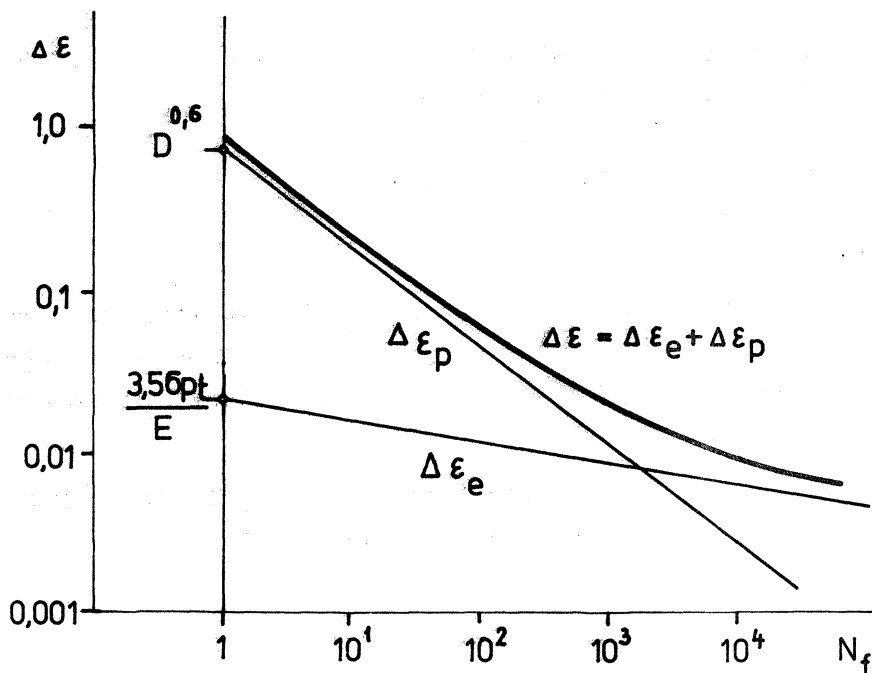
Životnost  $N_f$  takové části je funkcí obou deformačních složek, takže

lze psát empirické vztahy

$$\Delta \varepsilon_e = 3,5 \frac{\sigma_{Pl}}{E} N_f^{-0,12}, \quad (7.2)$$

$$\Delta \varepsilon_p = D^{0,6} N_f^{-0,6}. \quad (7.3)$$

Dosažením (7.2) a (7.3) do (7.1) dostaneme tzv. universální Mansonovu křivku znázorněnou na obr. 31.



Obr. 31

V příkladě na obr. 31 bylo  $3,5 \sigma_{Pl}/E \doteq 0,02$ ;  $D^{0,6} = 0,7$ . V rovnici (7.3) je

$$D = \ln \frac{S_0}{S_f} = \ln \frac{1}{1-\psi}, \quad (7.4)$$

kde  $S_0$  je počáteční průřez zkušební tyče při zkoušce tahem,  
 $S_f$  lomová plocha této tyče,  
 $\psi$  je poměrné zúžení průřezu (kontrakce).

R. M. Gamble předpokládá, že obdobná rovnice platí i pro počet cyklů  $N_i$  potřebných k iniciaci trhliny <sup>x)</sup>

$$\Delta \varepsilon = C_1 N_i^{-\alpha} + C_2 N_i^{-\beta} \quad (7.5)$$

Neuberův vztah (2.5) dává pro míjivé namáhání s rozkmitem jmenovitého napětí  $\Delta \sigma_n = E \Delta \varepsilon_n$  rovnici

$$\alpha^2 \Delta \sigma_n^2 = E \Delta \sigma \Delta \varepsilon \quad (7.6)$$

Je-li  $C_1 N_i^{-\alpha}$  elastická část deformace, pak  $\Delta \sigma = E C_1 N_i^{-\alpha}$ , takže z rovnic (7.5) a (7.6) po úpravě dostaneme

$$\left( \frac{\alpha \Delta \sigma_n}{E C_1} \right)^2 = N_i^{-2\alpha} + \frac{C_2}{C_1} N_i^{-(\alpha+\beta)} \quad (7.7)$$

Odtud lze určit počet cyklů  $N_i$ . Iniclace je zde stanovena vytvořením zárodečné trhliny o délce  $l_0$  rovné (podle Gambleho) dvěma průměrům zrna použitého materiálu. Počet cyklů do lomu se pak počítá způsobem, který jsme vysvětlili v odst. 6.

Šikmá větev Wöhlerovy křivky (obr. 30) se v oblasti vysokocyklové únavy popisuje nejčastěji mocninnými závislostmi

$$\sigma_a = a N_f^b, \quad (7.8)$$

popř.

$$\sigma_a = c N_L^d, \quad (7.9)$$

kde  $a$  až  $d$  jsou konstanty,  $N_f$  je počet cyklů do lomu,  $N_L$  je počet cyklů, po který se trhlina šíří. Pro iniciaci zbývá

$$N_i = N_f - N_L \quad (7.10)$$

<sup>x)</sup> Advances in research on the strength and fracture of materials (red. D. M. R. Taplin, 1978).

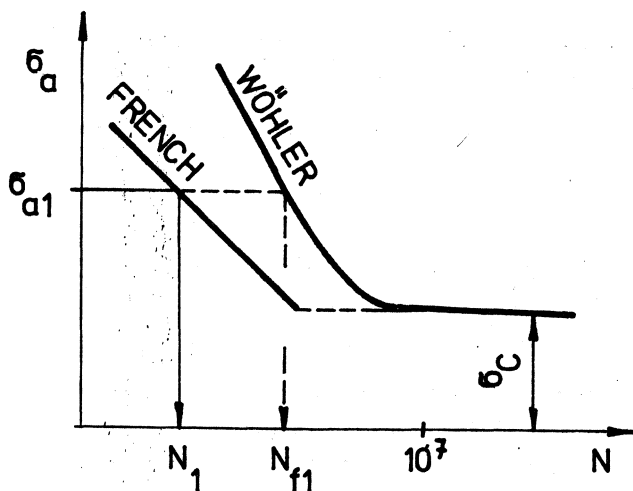
Týchž vztahů, avšak s jinými konstantami, lze použít i pro nízkocyklovou oblast. To, že šikmou větev Wöhlerovy křivky nelze popsat v celém rozsahu jedinou rovnicí typu (7.8) resp. (7.9) je hlavním důvodem, proč se rozlišují nízkocyklová a vysokocyklová oblast.

Mnoho konstruktérů se domnívá, že strojní součásti je nutno navrhovat tak, aby vykazovaly trvalou pevnost. Životnost takto navržených částí je neomezená. Tento názor není zcela správný. Wöhlerova křivka totiž klesá i po  $N = 10^7$  cyklech, ovšem u ocelí neznatelně, u lehkých kovů znatelněji. Pokles může být podstatný, projeví-li se koroze. Ale ani v neutrálním prostředí nelze tvrdit, že nějaká součást má "nekonečnou" životnost. Může mít ovšem životnost tak velkou, že je dříve vyřazen celý stroj (pro morální nebo věcné opotřebení), než se součást poruší. Často se stává, že se o nějaké součásti domníváme, že její pevnost je trvalá, protože neznáme jednorázová, řídkce se opakující přetížení, jejichž vlivem je součást ve skutečnosti namáhána v oblasti časované pevnosti. Jde např. o přechodové stavy za rozběhu nebo zastavování stroje, o různé mechanické rázy nebo teplotní namáhání ap. Existují však součásti, u nichž počítáme s jejich omezenou životností zcela vědomě. Jde zejména o některé části letadel a raket, které jsou za celkovou provozní dobu stroje namáhány jen malým počtem cyklů (podvozky, některé členy mechanismů pohybových ústrojí, tlakové nádrže ap.). Výpočet časované pevnosti může být velmi užitečný také při vyšetřování možných příčin poruch způsobených únavou.

## 8. Teorie poškození

Je-li součást namáhána s amplitudou napětí  $\sigma_{a1}$  vyšší než mez únavy, probíhá nejprve změna mechanických vlastností a pak nukleace trhliny, jež končí vytvořením makroskopických trhlinek o délkách kolem 0,1 mm. Tomuto okamžiku přísluší počet cyklů  $N_1$ . Je-li  $N < N_1$ , pak stupeň trvalých změn v materiálu nedosahuje takové velikosti, jež by změnila mez únavy materiálu. Jinými slovy, přerušíme-li zatěžování na hladině napětí  $\sigma_{a1}$  při počtu cyklů  $N < N_1$ , pak další namáhání s amplitudou  $\sigma_{a2} < \sigma_c$  nepovede k lomu ani při  $N = 10^7$  cyklů ( $\sigma_c$  je mez únavy, srov. s obr. 30). Počet cyklů  $N_1$ , jímž končí nukleace popsaných trhlinek, závisí na amplitudě  $\sigma_{a1}$  (větší amplitudě přísluší menší počet cyklů). Křivka  $\sigma_{a1} = f(N_1)$  se nazývá Frenchova čára poškození (Obr. 32)<sup>x)</sup>.

<sup>x)</sup> Trans. ASTM 21 /1933/, s. 889.



Obr. 32

Prakticky to znamená, že součást namáhaná v oblasti trvalé pevnosti snese přetížení amplitudou  $\sigma_{a1}$  s počtem cyklů  $N < N_1$ , aniž se změní její trvalá pevnost. To tedy znamená, že délka případných trhlinek vytvořených při  $N < N_1$  cyklech zatížení amplitudou  $\sigma_{a1}$  nedosahuje kritické délky  $l_c$ , při níž se součinitel intenzity napětí právě rovná základní prahové hodnotě

$$K_{ap2} = 1,12 \sigma_c \sqrt{\pi l_c} \quad (8.1)$$

Odtud

$$l_c = 0,254 \left( \frac{K_{ap2}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (8.2)$$

Rovnice (8.1) resp. (8.2) vyjadřuje vztah mezi délkou zárodečné trhliny na konci nukleačního stadia a mezi únavy  $\sigma_c$ . Trhliny o délce kratší než  $l_c$  nemají na mez únavy vliv.

Okolnost, že amplituda  $\sigma_{a1}$  aplikovaná do počtu cyklů  $N_1$  nezmění mez únavy ještě neznámá, že se vlastnosti materiálu vůbec nezměnily. Především se zkrátila životnost součásti na hladině napětí  $\sigma_{a1}$ , a to na  $(N_{f1} - N_1)$  cyklů z původních  $N_{f1}$  cyklů (viz obr. 32). Za míru poškození počtem cyklů  $N$  napětí s amplitudou  $\sigma_{a1}$  můžeme vzít poměr  $D = N/N_{f1}$ . Konci nukleačního stadia - vezmeme-li za kritérium Frenchovu čáru - přísluší hodnota  $D_1 = N_1/N_{f1}$ . Za konstantní amplitudy je zřejmě vždy  $0 \leq D \leq 1$ . Hodnota  $D = 1$  přísluší lomu, hodnota  $D = 0$  nepoškozenému ("panenskému") materiálu.

Položme si otázku, po kolika cyklech vznikne únavový lom, jestliže se za jednu periodu opakuje  $N_1$  cyklů s amplitudou  $\sigma_{a1}$ ,  $N_2$  cyklů s amplitudou  $\sigma_{a2}$  atd., až  $N_m$  cyklů s amplitudou  $\sigma_{am}$ ? Miner navrhl jednoduchý lineární zákon pro výpočet míry poškození <sup>x)</sup>

$$D = \frac{N_1}{N_{f1}} + \frac{N_2}{N_{f2}} + \dots + \frac{N_m}{N_{fm}} \quad (8.3)$$

Lom podle Minera nastane, jestliže  $D = 1$  a to nezávisle na pořadí zatěžovacích cyklů. V rovnici (8.3) značí  $N_{fk}$  počet cyklů do lomu při konstantní amplitudě  $\sigma_{ak}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Snadno nahlédneme, že tento zákon nemůže obecně platit, protože nelze rozumně předpokládat, že procesy nukleace a šíření trhliny lze posuzovat z hlediska závažnosti poškození stejně. Minerova hypotéza tato stadia nerozlišuje.

Budeme-li posuzovat samostatně proces šíření trhliny, můžeme za jinou míru poškození brát poměrnou délku trhliny  $\lambda = l/l_{krit}$ , kde  $l_{krit}$  znamená kritickou délku trhliny, při níž nastává buď náhlý lom nebo velmi zrychlený průběh trhliny do lomu. Součinitel intenzity napětí přitom dosahuje hodnoty  $K_C$  resp.  $\sqrt{E\sigma_f \delta_T}$  podle (5.4). Mezi oběma hodnotami musí být nějaká souvislost  $\lambda = \lambda(D)$ , neboť obě jsou mírou téhož poškození. <sup>xx)</sup> Pro obě platí, že lom nastává, když ukazatel poškození ( $\lambda$  resp.  $D$ ) se rovná jedné. Kdyby platila Minerova teorie, nesměla by tato rovnice záviset na velikosti amplitudy napětí. Ve skutečnosti tomu tak není, jak je zřejmé ze schematického obr. 33. Křivka 1 přísluší větší amplitudě napětí než křivka 2, tj.  $\sigma_{a1} > \sigma_{a2}$ . Dosáhne-li délka trhliny  $l$  při zatěžování amplitudou  $\sigma_{a1}$  hodnoty  $l_0$ , znamená to větší poškození než když se stejně dlouhá trhlina vytvoří účinkem amplitudy napětí  $\sigma_{a2}$ . Je to tím, že

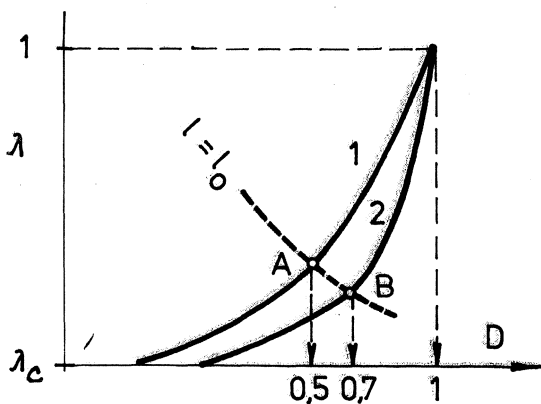
$$\lambda_A = \frac{l_0}{l_{krit1}}, \quad \lambda_B = \frac{l_0}{l_{krit2}} \quad (8.4)$$

a  $l_{krit1} < l_{krit2}$ . Proto  $\lambda_A > \lambda_B$  (obr. 33).

Představme si nyní, že bychom zatěžovali daný vzorek nejprve amplitudou  $\sigma_{a1}$  až do vytvoření trhliny o délce  $l_0$  a pak amplitudou

<sup>x)</sup> Journal of Applied Mechanics 12 (1945), s. 159. Hodnota  $N_1$  v rovnici (8.3) nesouvisí s dřívějším výkladem o Frenchově čáře.

<sup>xx)</sup> Pro  $l < l_c$  je  $0 < \lambda < \lambda_c$ . Nukleační stadium není na obr. 33 kresleno.



Obr. 33

$\sigma_{a2}$  až do lomu. Jaká bude podle (8.3) míra poškození? Zřejmě - pro příklad zakreslený na obr. 33 -

$$D_{12} = 0,5 + (1 - 0,7) = 0,8, \quad (8.5)$$

neboť při přechodu z amplitudy  $\sigma_{a1}$  na  $\sigma_{a2}$  se nespojitě změní míra poškození  $D$  z hodnoty 0,5 na 0,7. Bude-li však působit nejprve napětí o amplitudě  $\sigma_{a2}$  a pak teprve  $\sigma_{a1}$ , vyjde

$$D_{21} = 0,7 + (1 - 0,5) = 1,2. \quad (8.6)$$

Kdyby platila Minerova hypotéza, musilo by být  $D_{12} = D_{21} = 1$ , což by nastalo, kdyby  $A \equiv B$ , tj. kdyby křivky 1 a 2 splynuly. To však není možné, jak jsme ukázali porovnáním vztahů (8.4). Proto nemá Minerova teorie obecnou platnost a byla různě modifikována; přehled upravených teorií obsahuje mj. kniha Madayagova (1969).

Přesnější a logičtější teorii dostaneme, když uvažíme zvlášť poškození během nukleačního stadia a během šíření trhliny. <sup>x)</sup> Při konstantní amplitudě napětí platí pro  $N < N_f$  míra poškození během nukleace (index I)

$$D^I = \frac{1}{2} \frac{N^I}{N_f} \quad (8.7)$$

a během šíření trhliny (index II)

$$D^{II} = \frac{1}{2} \frac{N^{II}}{N_f - N_i} \quad (8.8)$$

Je-li  $N = N_f =$  počet cyklů do lomu, je  $N^I = N_i$ ,  $N^{II} = N_f - N_i$ , takže  $D^I = D^{II} = 0,5$ . Celkové poškození je pak (stejně jako dříve)

$$D = D^I + D^{II} = 1. \quad (8.9)$$

Poškození  $D$  roste s počtem cyklů  $N$  tak, jak je naznačeno na obr. 34.

<sup>x)</sup> Klesnil a Lukáš (1968).

Představme si nyní, že strojní část (nebo zkušební tyč) bude zatěžována  $N_1$  cykly s amplitudou  $\sigma_{a1}$  a pak  $N_2$  cykly s amplitudou  $\sigma_{a2}$  až do lomu. Je třeba rozlišit dva případy.

V prvním případě je  $N_1 < N_{i1}$  ( $N_{i1}$  je hranice nukleačního stadia při amplitudě  $\sigma_{a1}$ ). Pak poškození způsobené počtem cyklů  $N_1$  bude podle (8.7)  $D_1/2D_{i1}$ . Poškození amplitudou  $\sigma_{a2}$  se rozdělí do nukleačního stadia [ $D_2^I = N_2^I/N_{f2}$ ]

a do stadia šíření lomu [ $D_2^{II} = N_2^{II}/N_{f2}$ ]. Celkem bude podle (8.7) a (8.8)

$$D = \frac{1}{2} \left( \frac{D_1}{D_{i1}} + \frac{D_2^I}{D_{i2}} + \frac{D_2^{II}}{1-D_{i2}} \right) \quad (8.10)$$

Protože jde o zatěžování až do lomu, bude  $D = 1$ . Zároveň musí platit, že

$$D_{i2} + D_2^{II} = 1, \quad D_2^I + D_2^{II} = D_2 \quad (8.11)$$

První z těchto rovnic vyjadřuje v podstatě identitu

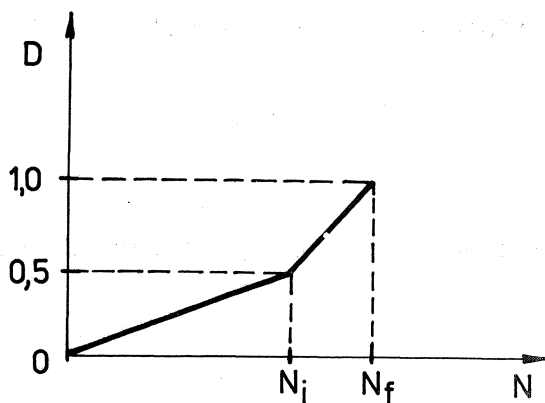
$$\frac{N_{i2}}{N_{f2}} + \frac{N_{f2} - N_{i2}}{N_{f2}} = 1, \quad (8.12)$$

význam druhé rovnice je evidentní. Z rovnic (8.10) a (8.11) vyloučíme  $D_2^I$ ,  $D_2^{II}$  a po snadné úpravě dostaneme

$$\frac{D_1}{D_{i1}} + \frac{D_2}{D_{i2}} = \frac{1}{D_{i2}} \quad (8.13)$$

V druhém případě bude  $N_1 > N_{i1}$ . Místo rovnice (8.10) bude platit vztah

$$D = \frac{1}{2} \left( \frac{D_1^I}{D_{i1}} + \frac{D_1^{II}}{1-D_{i1}} + \frac{D_2}{1-D_{i2}} \right) = 1 \quad (8.14)$$



Obr. 34

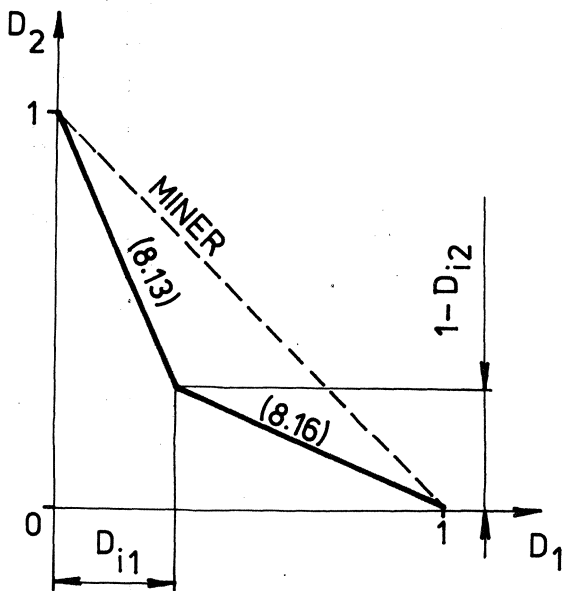


a místo (8.11) budeme mít

$$D_{i1} + D_i^{\text{II}} = D_i, \quad D_i^{\text{I}} = D_{i1}. \quad (8.15)$$

Eliminací  $D_i^{\text{I}}$ ,  $D_i^{\text{II}}$  z rovnic (8.14) a (8.15) vyjde

$$\frac{D_1}{1 - D_{i1}} + \frac{D_2}{1 - D_{i2}} = \frac{1}{1 - D_{i1}}. \quad (8.16)$$



Obr. 35

Vztahy (8.13) resp. (8.16) představují v souřadnicích  $D_1$ ,  $D_2$ , dvě přímky (obr. 35). Jsou zakresleny pro případ, že  $\sigma_{a1} > \sigma_{a2}$ , takže  $D_{i1} < D_{i2}$ . V tom případě  $D_1 + D_2 \leq 1$ , což se shoduje s výkladem, který jsme uvedli v souvislosti s obr. 33<sup>x)</sup> Podle Minerovy teorie by vždy platilo, že  $D_1 + D_2 = 1$  (čárkovaně vyznačená přímka).

Výklad lze snadno zobecnit i pro větší počet zatěžujících bloků (počet cyklů  $N_k$  zatížení s amplitudou  $\sigma_{ak}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Vždy se předpokládá, že na poškození mají vliv jen takové amplitudy, které nepřevyšují mez únavy.<sup>xx)</sup>

Ve skutečnosti je průběh poškození složitější. Při přechodu z jedné hladiny zatížení na jinou vznikají dočasné změny související s postupným přizpůsobením materiálu. V některých případech (materiály Fe-Si, austenitické ocele,  $\alpha$  - mosaz) má historie zatěžování vliv i na ustálené hodnoty amplitudy napětí v závislosti na amplitudě plastického

- x) Pro  $\sigma_{a1} < \sigma_{a2}$  vyjde  $D_1 + D_2 \geq 1$ , jak se čtenář snadno přesvědčí, když si zakreslí přímky pro  $D_{i1} > D_{i2}$ .
- xx) Tento předpoklad je oprávněný jen pro nukleační stadium. Jestliže se trhлина šíří, pokračuje proces poškození pro jakoukoli amplitudu převyšující prahovou hodnotu [ srov. s rovnicí (6.2)].

přetvoření. Ustálený stav pak neodpovídá jediné cyklické křivce napětí -  
- přetvoření.

Z praktického hlediska se k výpočtu kumulace poškození nejlépe hodí lineární teorie, ať jakkoli korigované.

#### Poznámka

Uvedená teorie by se dala ještě zobecnit, kdybychom přisoudili jinou váhu poškození během nukleace než během šíření trhliny. Stačilo by definovat

$$D^I = w \frac{N^I}{N_i}, \quad D^{II} = (1-w) \frac{N^{II}}{N_f - N_i},$$

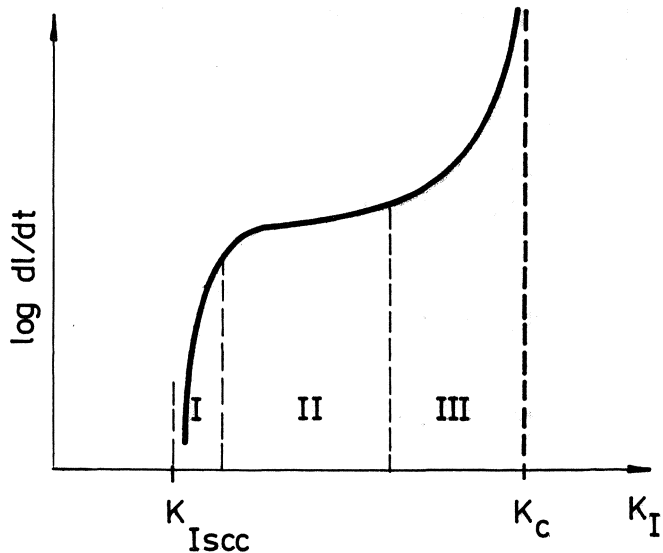
$0 \leq w \leq 1$ . Pro  $N = N_f$  by vyšlo  $D^I + D^{II} = w + (1-w) = 1$ , stejně jako dříve.

### 9. Vliv koroze, teploty a tloušťky stěny na životnost části

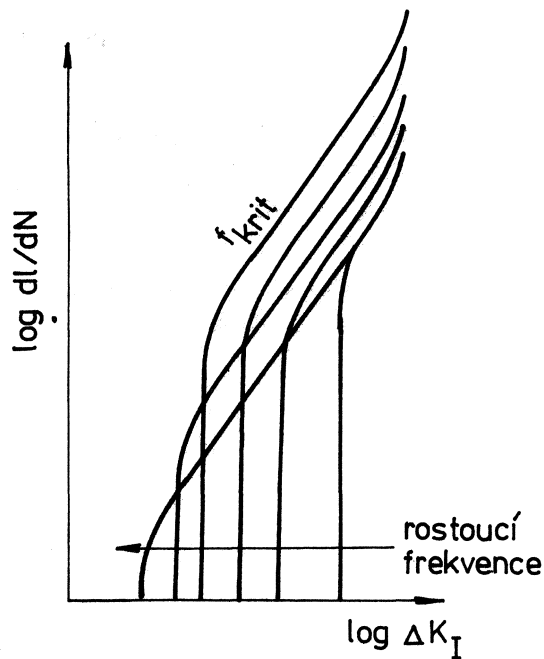
Je známo, že staticky zatížené konstrukce se mohou po dlouhé době porušit vlivem korozivního prostředí, jemuž jsou vystaveny. Vznik poruchy lze opět rozdělit na dvě oblasti, a to iniciaci a šíření trhliny. Některé materiály (např. titanové slitiny) jsou velmi odolné proti iniciaci trhliny, takže vznik trhliny trvá velmi dlouhou dobu. Zato po vytvoření zárodečné trhliny (nebo u součástí s počáteční trhlinou) vznikne lom velmi brzy. Případy lomů staticky zatížených částí vlivem koroze nazýváme praskání za koroze. Šíření trhliny se zastaví, je-li součinitel intenzity napětí  $K_I$  menší než prahová hodnota  $K_{Isc}$  (stress-corrosion-cracking). Rychlost šíření trhliny závisí na  $K_I$  asi tak, jak je naznačeno na obr. 36. V oblasti I závisí tato rychlost podstatně na  $K_I$ . V oblasti II je tato závislost velmi malá, rychlost je téměř konstantní. Ve stadiu III nastává zrychlený růst trhliny do kritické velikosti, při níž  $K_I \rightarrow K_C$  a vzniká lom. Ve stadiích I a III tedy převládá mechanické působení, ve stadiu II převládají ostatní vlivy (chemické, elektrochemické, sdílení hmoty, difúze, adsorpce).

Je-li součást namáhána cyklicky, ovlivňuje korozivní prostředí šíření trhliny i pod prahovou hodnotou součinitele intenzity napětí, tj. při  $K_I < K_{Isc}$ <sup>x)</sup>. Protože se zde projevují dva vlivy zároveň - čas a počet cyklů - závisí rychlost šíření trhliny nejen na  $\Delta K_I$ , ale také na frekvenci. To je zřejmé ze schematického obrázku 37. Křivka označena *ferit* přísluší frekvenci, při níž se koroze uplatňuje nejvíce.

x) Snad s výjimkou plynných prostředí (např. ocel-vodík).



Obr. 36



Obr. 37

Je-li  $K_{I_{max}} > K_{I_{sc}}$ , uplatňuje se zároveň i praskání za koroze, takže rychlost šíření trhliny dále vzroste.

Pro  $K_{I_{max}} < K_{I_{sc}}$  platí empirický vztah

$$\frac{dL}{dN} = D(f)(\Delta K_I)^2, \quad (9.1)$$

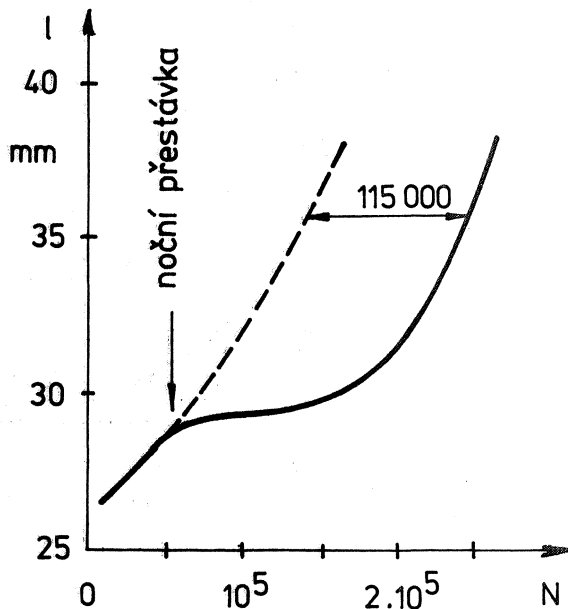
kde  $D(f)$  závisí na frekvenci. Např. pro ocel 12Ni-5Cr-3Mo ve vodním roztoku se 3 % NaCl jsou hodnoty  $D(f)$  dány takto:

$f [s^{-1}]$	0,1	1	10	vzduch
$D(f)$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$8,1 \cdot 10^{-7}$	$4,6 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$

Přitom  $\Delta K_I$  se dosazuje v MPa  $\sqrt{m}$  a  $dL/dN$  vyjde v mm/cyklos. Hodnoty platí pro sinusový průběh namáhání v závislosti na čase. Na obr. 38 jsou znázorněny výsledky pokusů Barsoma a Nováka, kteří sledovali rychlost růstu trhliny zkušební vzorku z oceli A 514 (užívané ke stavbě mostů) při namáhání s frekvencí  $f = 0,2s^{-1}$  v 3 % roztoku NaCl. Po  $N = 5 \cdot 10^4$  cyklech zařadili přestávku (po celou noc), při níž byl vzorek na vzduchu usušen. Při obnoveném namáhání v solném roztoku se ukázal příznivý vliv

přestávky znamenající prodloužení životnosti asi o 115 000 cyklů. Z toho se mohou radovat automobilisté, kteří sice jezdí v zimě po zasolených silnicích, avšak mají suchou garáž.

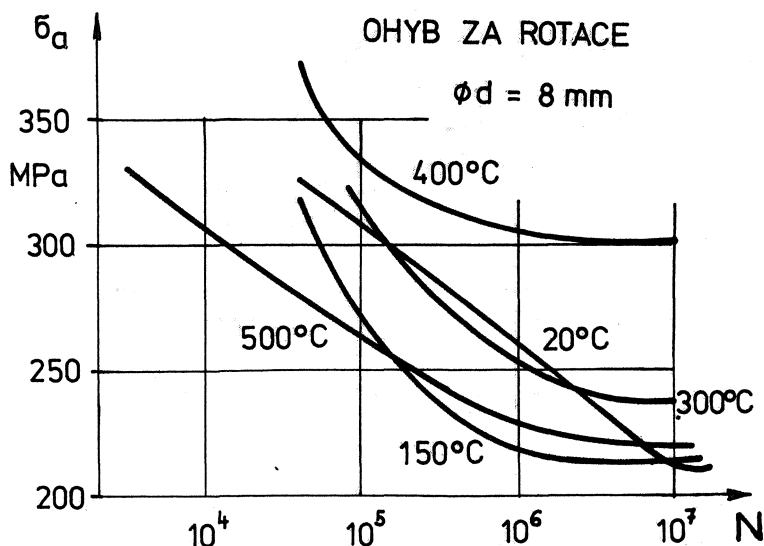
Vliv teploty je podstatný, a to jak ve stadiu iniciace, tak při šíření trhliny. Zhruba lze tvrdit, že rychlost šíření trhliny se s rostoucí teplotou zvyšuje. Na teplotě však závisí i tvar Wöhlerovy křivky, tedy životnost i mez únavy. Mez únavy i životnost rostou s poklesem teploty pod normální teplotu. Za mírně zvýšené teploty u ocelí klesají, dosahují lokálního minima kolem 100 až 200 °C a pak zase rostou až k maximu kolem 350 až 400 °C. Při teplotách vyšších než asi 400 °C začnou rychle klesat. To je vyznačeno na obr. 39 a 40, které se vztahují k vzorkům z válcované oceli o chemickém složení (v procentech)



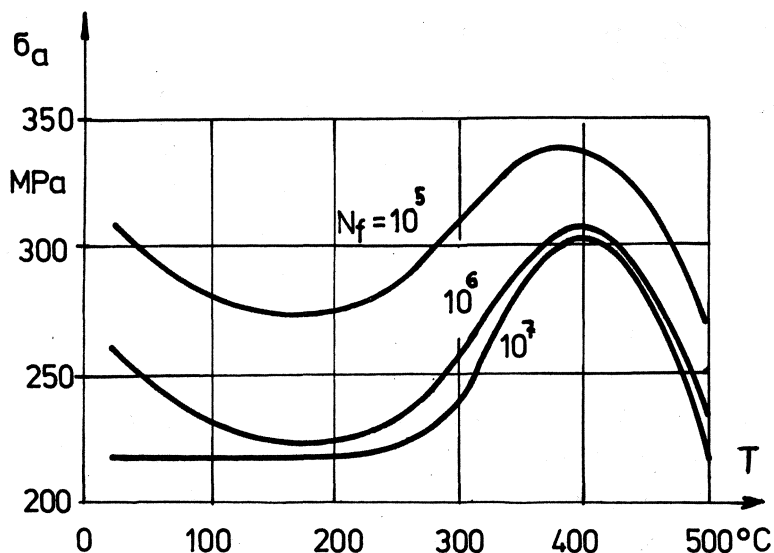
Obr. 38

C	Si	Mn	P	S
0,15	0,21	0,65	0,013	0,014

Mez pevnosti  $\sigma_{pt} = 450 \text{ MPa}$ , mez kluzu  $\sigma_{kt} = 290 \text{ MPa}$ .

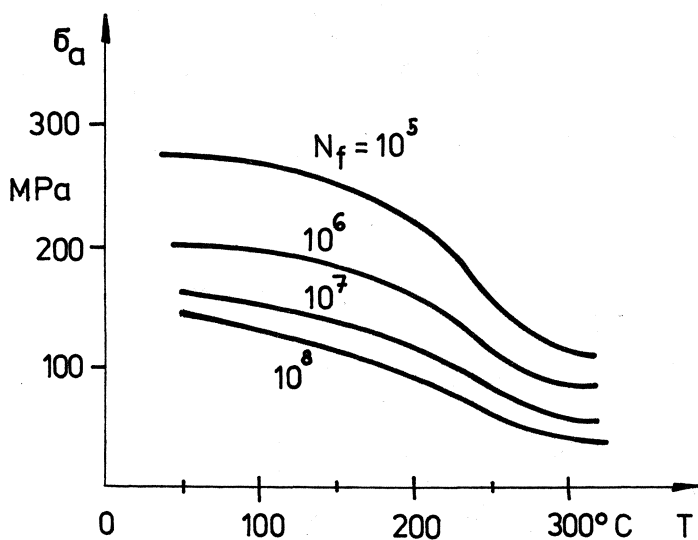


Obr. 39



Obr. 40

Zvýšení časované pevnosti za teplot kolem 350 až 400 °C (obr. 40) souvisí se známým "křehnutím ocelí za modrého žáru" a u jiných materiálů se nevyskytuje. Např. u kovaných hliníkových slitin životnost s rostoucí teplotou stále klesá (při dané amplitudě napětí), jak je zřejmé z příkladu na obr. 41.



Obr. 41

Při vyšších teplotách (nad 400 °C) se s únavou uplatňuje zároveň tečení materiálu (creep). Pak záleží nejen na teplotě, ale i na frekvenci, na průběhu napětí v jednom cyklu (sinusový, obdélníkový aj.)

a na asymetrii cyklu. Lom přitom přechází z transkrystalického na interkrystalický.

Vliv tloušťky stěny na rychlost šíření trhliny souvisí s tím, že v povrchových vrstvách převládá rovinná napjatost, kdežto uvnitř převládá (u tlustších stěn) rovinné přetvoření. To vede k tomu, že v povrchových vrstvách vzniká okolo kořene trhliny větší rozsah plastických deformací než uvnitř. Větší rozsah plastické zóny znamená větší efektivní délku trhliny a tím i větší rychlost jejího šíření. Zároveň se však uplatní i protichůdný vliv plastických deformací spočívající ve vytvoření zbylých pnutí zpomalujících růst trhliny, popř. vliv zpevnění. Proto jsou výsledky pokusů rozporné. U vysoce pevných ocelí a hliníkových slitin je rychlost šíření trhliny v tenkých stěnách menší než v tlustých. U běžných ocelí je tomu spíše naopak. Tento vliv se projevuje u stěn tenkých než asi 10 mm a spíše pro větší hodnoty  $K_{I\max}$ .

#### 10. Vliv občasných přetížení na průběh šíření trhliny

Již na konci 8. kapitoly jsme se zmínili o tom, že při náhlé změně zatěžovacího režimu reaguje materiál po přechodnou dobu (po přechodný počet cyklů) jinak než za ustálených podmínek. Tím vznikají odchylky od zákonů kumulace poškození, které tyto přechodové jevy obvykle nepostihují. Pokusíme se tento jev vysvětlit na idealizovaném modelu.

Představme si, že se trhlina šíří účinkem periodického namáhání od  $\sigma_{\min}$  do  $\sigma_{\max}$ . Tomu odpovídá v daném okamžiku součinitel intenzity napětí  $K_{I\max}$ . Před čelem trhliny vzniká, jak známo, plastická oblast, která sahá (za podmínek rovinného přetvoření) až do vzdálenosti  $2R$  od kořene trhliny, kde

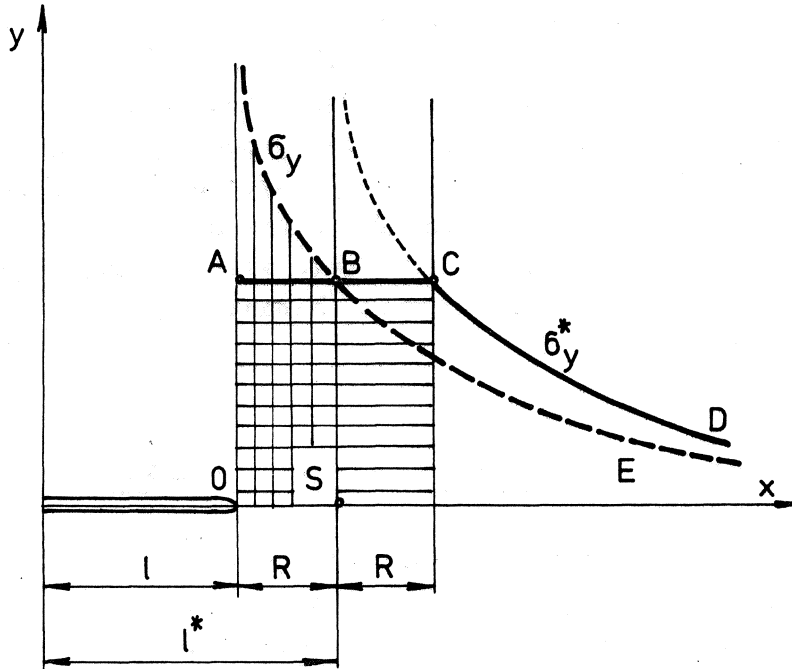
$$R = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_{I\max}}{\sigma_k} \right)^2 \quad (10.1)$$

značí poloměr zplastizované oblasti. Tento vztah platí za předpokladu, že plastická oblast je relativně malá <sup>x)</sup>. Porovnáme ještě čistě elastické a elastickoplastické řešení. Podle (1.8) platí pro  $\varphi = 0$  a  $\psi = 0$ , že v elastickém stavu se napětí  $\sigma_y$  mění podél osy  $x$  podle zákona

$$\sigma_y = K_I / \sqrt{2\pi r}, \quad (10.2)$$

<sup>x)</sup> Viz např. Knott (1973). Mez plastických deformací  $\sigma_k = \sigma_{kt}$  resp.  $\sigma_{q2}$ .

kde  $K_I = \sigma \sqrt{\pi l}$ ,  $l$  je délka trhliny a  $r$  je vzdálenost od jejího kořene. V elastickoplastickém stavu má trhlina efektivní délku  $l^* = l + R$  a plastická oblast sahá do vzdálenosti  $2R$  od skutečného konce trhliny (obr. 42).



Obr. 42

Místo (10.2) budeme nyní mít

$$\sigma_y^* = \sigma_k \quad \text{pro} \quad 0 < r \leq 2R, \quad (10.3)$$

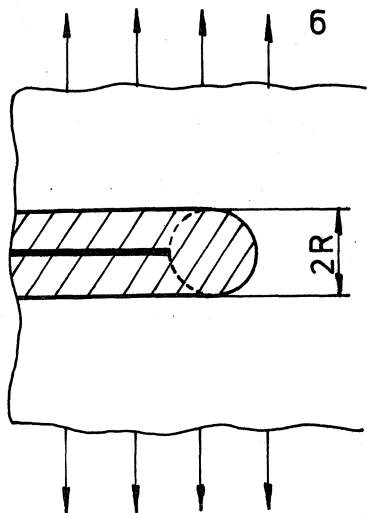
$$\sigma_y^* = K_I^* / \sqrt{2\pi(r-2R)} \quad \text{pro} \quad r > 2R.$$

Zde  $K_I^* = \sigma \sqrt{\pi l^*}$ . Zavedeme-li ještě  $r^* = r - R$ , bude mít druhá z rovnic (10.3) stejný tvar jako (10.2).

Snadno se přesvědčíme, že výsledná síla přenesená oběma způsoby je stejná, neboť plochy pod čarami SBCD a OABE jsou stejné a také svisle a vodorovně vyšrafované části jsou stejné. Přitom  $\sigma_k = K_I / \sqrt{2\pi R} = \sigma \sqrt{l/2R}$  (bod B je průsečíkem křivek  $\sigma_y(r)$  a  $\sigma_y^*(r)$ ). Představa, že trhlina má efektivní délku  $l^*$  a že poloměr plastické oblasti je  $R$ , nevede proto k rozporům. Přibližnost spočívá v tom, že předpokládáme, že plastická oblast neovlivní tvar funkce  $\sigma_y^* = f(r^*)$  v elastické oblasti; ten zůstává stejný jako v rovnici (10.2). Křivky BE a CD jsou vzájemně posunuté,

ale jinak stejné.

Podle této představy ponechává trhlinka při stacionárním šíření za sebou zplastizovaný pás o šířce  $2R$  (obr. 43). Oba "břehy" trhliny



Obr. 43

jsou k sobě při odlehčení přitlačovány, takže než dojde k opětovnému otevření kořene trhliny, musí napětí  $\sigma$  stoupnout alespoň na hodnotu  $\sigma_0$ . Můžeme si představit, že bychom toto vlastní "předpětí" odstranili; pak by vznikl přesah (negativní otevření trhliny)  $\delta_1$ . Kdybychom uvažovali pouze zplastizovanou oblast, bylo by

$$\delta_1 = - \frac{\sigma_k}{E} 2R. \quad (10.4)$$

Při otevření trhliny  $\delta_2$  (bez předpětí, účinkem napětí  $\sigma$ ) platí přibližný vztah podle Dugdalova modelu

$$\delta_2 = \frac{K_I^2}{E \sigma_k} \quad (10.5)$$

Trhlinka se počne otvírat, když  $\delta_1 + \delta_2 = 0$ , tj. při

$$K_I = \sigma_k \sqrt{2R} = K_{I0}. \quad (10.6)$$

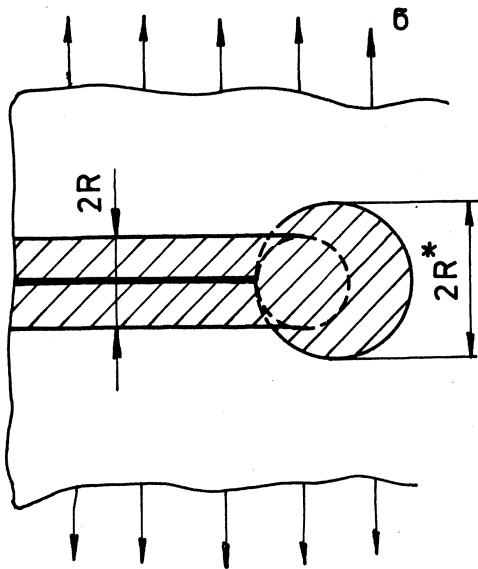
Efektivní rozkmit součinitele intenzity napětí je tedy

$$\Delta K_{Ief} = \frac{K_{I_{max}} - K_{I0}}{K_{I_{max}} - K_{I_{min}}} \cdot \Delta K_I. \quad (10.7)$$

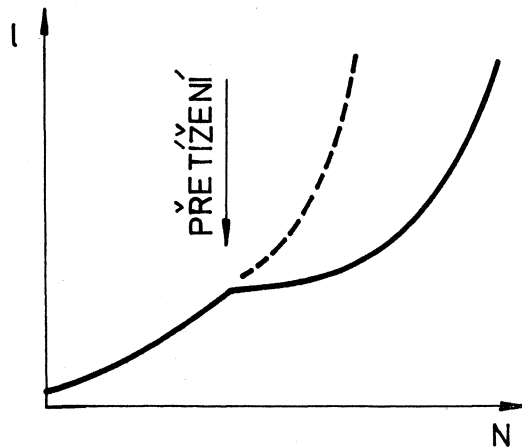
Co se nyní stane při jednorázovém přetížení?

Plastická oblast se náhle zvětší z hodnoty  $R$  na  $R^* > R$  (obr. 44). Tím se podle (10.6) zvětší i hodnota  $K_{I0}$ . Protože se při dalším zatěžování jiné hodnoty v rovnici (10.7) nezmění, klesne hodnota  $\Delta K_{Ief}$  a bude nižší tak dlouho, dokud se trhlinka nerozšíří za zvětšenou plastickou oblast. Proto - v souladu s rovnicí (5.3) - bude rychlost šíření trhliny po nějakou dobu od okamžiku přetížení snížena. To je zřejmé ze schematického obr. 45, kde je zakreslen průběh šíření trhliny při konstantní amplitudě napětí. Toto paradoxní prodloužení životnosti následkem přetížení ovšem nevznikne, jsou-li již vyčerpány plastické rezervy nebo způsobí-li přetížení nestabilní vzrůst délky trhliny.





Obr. 44

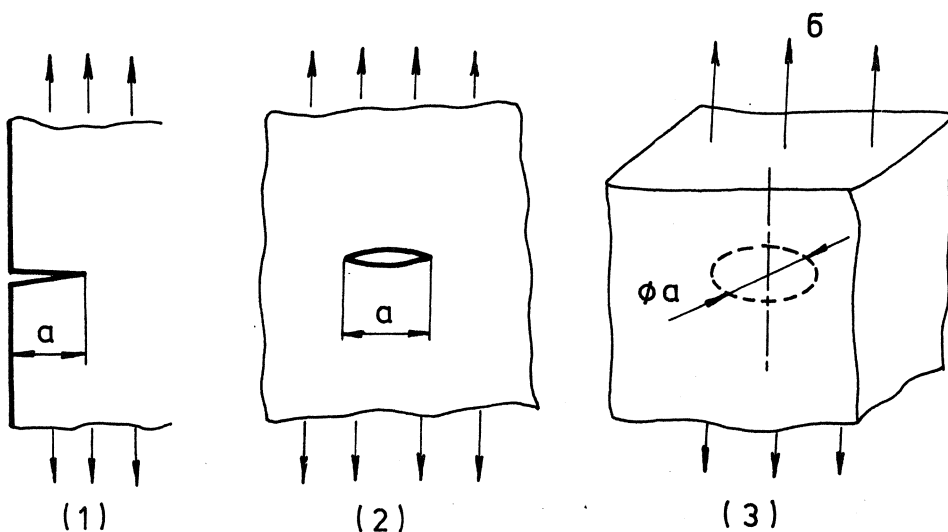


Obr. 45

11. Vliv vnějších a vnitřních vad na mez únavy

Porovnejme tři trhliny o stejné charakteristické délce podle obr. 46. Pro případ (1) dostaneme součinitel intenzity napětí

$$K_{I1} = 1,12 G \sqrt{\pi a} \quad (11.1)$$



Obr. 46

Je to průchozí trhlina na okraji taženého širokého pásu o délce  $l = a$ .

Případ (2) představuje průchozí trhlinu délky  $2l = a$  uvnitř taženého pásu. Bude

$$K_{I2} = \sigma \sqrt{\pi l} = \sigma \sqrt{\pi a/2} \quad (11.2)$$

Pro penízkovitou trhlinu o poloměru  $r = a/2$  uvnitř rozměrného tělesa zatíženého tahem působícím kolmo k rovině trhliny máme

$$K_{I3} = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi} a} \quad (11.3)$$

Poměr těchto součinitelů je

$$K_{I1} : K_{I2} : K_{I3} = 1 : 0,63 : 0,40. \quad (11.4)$$

V tomto poměru je také "nebezpečnost" vad.

Přípustnost vad je totiž, jak jsme již dříve ukázali, dána prahovou hodnotou součinitele intenzity napětí. Velikost přípustné vady pro případ (1) označme  $a_1$  a podobně i pro další případy. Pak stejné prahové hodnotě součinitele intenzity napětí budou odpovídat rozměry vad v poměru

$$a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 2,51 : 6,19. \quad (11.5)$$

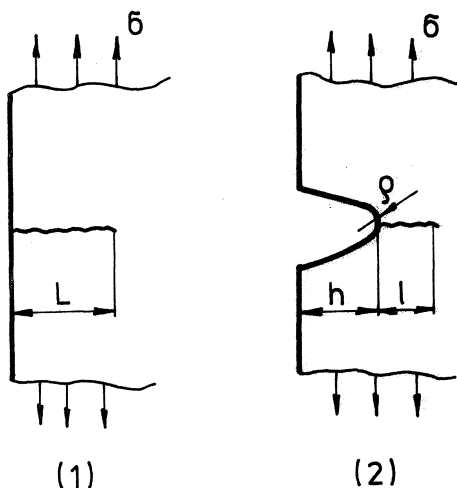
Je-li - při dané úrovni namáhání - vnější trhlina (1) o délce např.

$a_1 = 0,2$  mm pod prahovou hodnotou, pak vnitřní penízkovitá vada může mít průměr až 1,24 mm (za jinak stejných okolností).

Z uvedeného srovnání je zřejmé, proč únavové trhliny vznikají - až na výjimky - vždy na povrchu. Povrchová vrstva bývá nejvíce namáhána (vzpomeňme na průběh napětí při ohybu nebo krutu) a povrchovým vadám daných rozměrů a při daném namáhání přísluší větší součinitel intenzity napětí než vnitřním vadám.

Výjimka nastává jen u nehomogenních materiálů, u nichž je povrchová vrstva zpevněná (cementování a kalení, válečkování, nitridování) a podpovrchová vada je závažná. Na lasturovitě ploše lomu lze v takovém případě pozorovat zárodek trhliny jako "rybí oko". O těchto případech pojednáme ještě v 22. kapitole.

## 12. Účinek vrubu na mez únavy



Na obr. 47 je porovnán případ vnější průchozí trhliny v tažené ploché tyči s případem obdobné trhliny v ploché tyči s vrubem o hloubce  $h$  a s poloměrem křivosti v kořeni vrubu  $\rho$ . V prvním případě je součinitel intenzity napětí

$$K_{I1} = 1,12 \sigma \sqrt{\pi L} \quad (12.1)$$

a v druhém - obdobně k rovnici (6.3) -

$$K_{I2} = 1,12 \sigma \sqrt{\pi L} \cdot f(L; \alpha, \rho). \quad (12.2)$$

Obr. 47

Předpokládáme, že tyč je v obou případech velmi široká. Funkce  $f(L; \alpha, \rho)$  závisí jednak na délce trhliny  $L$  vybíhající z kořene vrubu, jednak na tvarovém činiteli  $\alpha$  a na poloměru zaoblení kořene vrubu  $\rho$ , neboť na těchto činitelích závisí koncentrace a gradient napětí. Pro funkci  $f(L; \alpha, \rho)$  známe dvě mezní hodnoty

$$f(0; \alpha, \rho) = \alpha, \quad (12.3)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} f(L; \alpha, \rho) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{h}{L}} = 1. \quad (12.4)$$

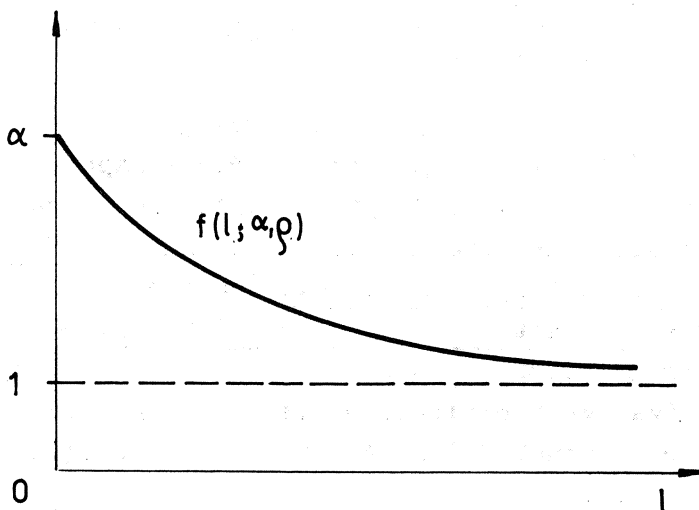
Schematicky je průběh funkce  $f$  v závislosti na  $L$  zakreslen na obr. 48. Tuto funkci můžeme rozvinout v Mäclaurinovu řadu

$$f(L; \alpha, \rho) = \alpha + \frac{\partial f}{\partial L} \Big|_0 L + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} \Big|_0 L^2 + \dots, \quad (12.5)$$

přičemž do derivací je dosazeno  $L = 0$  (při stejném  $\alpha$ ,  $\rho$ ). Ponecháme-li na pravé straně (12.5) jen tři členy, můžeme psát

$$f(L; \alpha, \rho) = \alpha [1 - c_0 L + c_1 L^2]. \quad (12.6)$$

Konstanty  $C_0$ ,  $C_1$  jsou zřejmě kladné, jak lze soudit z průběhu funkce  $f$  na obr. 48.<sup>x)</sup>



Obr. 48

Uvážíme-li, že mez únavy je při střídavém namáhání dána základní prahovou hodnotou  $K_{apz}$ , pak kritická velikost  $l_c$  zárodečné trhliny v hladké tyči je dána vztahem podle (12.1)

$$K_{apz} = 1,12 \sigma_c \sqrt{\pi l_c} \quad (12.7)$$

kde  $\sigma_c$  je mez únavy při střídavém namáhání hladké tyče (bez vrubu). Vytvoří-li se stejná zárodečná trhlina u tyče s vrubem, musí být na mezi únavy  $\sigma_c^*$  splněna rovnice (12.2)

$$K_{apz} = 1,12 \sigma_c^* \sqrt{\pi l_c} \cdot f(l_c; \alpha, \varphi) \quad (12.8)$$

Poměr

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_c^*} = \beta = f(l_c; \alpha, \varphi) \quad (12.9)$$

se nazývá vrubový činitel. Je to poměr jmenovitého napětí na mezi únavy u hladké tyče k téměř napětí u tyče s vrubem. Vyjadřuje tedy vliv vrubu na trvalou pevnost součásti.

<sup>x)</sup> O konstantách však můžeme mluvit jen, pokud se  $\alpha$  ani  $\varphi$  nemění.

Z rovnic (12.7) a (12.8) vyloučíme  $K_{apz}$  a za funkci  $f(l; \alpha, \varphi)$  dosadíme podle (12.6). S použitím (12.9) dostaneme po snadné úpravě

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{1 - c_0 l_c + c_1 l_c^2} = 1 + c_0 l_c + (c_0^2 - c_1) l_c^2 \quad (12.10)$$

Vždy je  $\alpha/\beta \geq 1$ . Hodnoty  $c_0$ ,  $c_1$  nezávisí na  $l_c$ , jsou však funkcemi  $(\alpha, \varphi)$  <sup>x)</sup>. Uvážíme-li, že poměrný gradient napětí  $\chi = 2/\varphi$  (tab. 1) vidíme, že poměr  $\alpha/\beta$  závisí jednak na kritické délce trhliny, jednak na tvarovém činiteli a na poměrném gradientu napětí. Kritická délka trhliny charakterizuje vlastnosti materiálu (podobně jako  $K_{apz}$ ). Tvarový činitel a poměrný gradient napětí charakterizují napjatost. Poměr  $\alpha/\beta$  je tím větší, čím je větší  $l_c$  popř. čím je větší poměrný gradient napětí  $\chi$ . Vliv tvarového činitele je méně výrazný; zvětšuje-li se tento činitel, zvětšuje se poněkud i poměr  $\alpha/\beta$  (při stejném  $\varphi$  a  $l_c$ ), avšak to neplatí vždy.

Na rozdíl od tvarového činitele závisí vrubový činitel na vlastnostech materiálu. Efektivní převýšení jmenovitého napětí  $(\beta \sigma_n - \sigma_n)$  podělíme teoretickým převýšením  $(\alpha \sigma_n - \sigma_n)$  a dostaneme tzv. vrubovou citlivost materiálu

$$q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1} \quad (12.11)$$

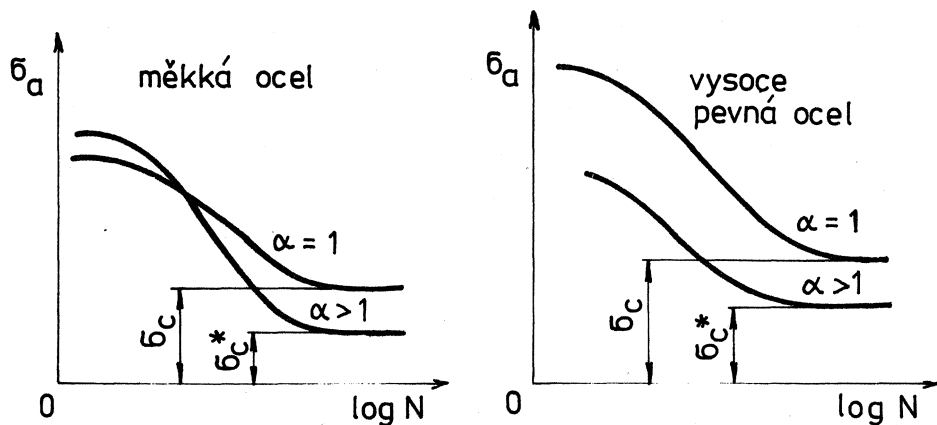
Původně se doufalo, že tento činitel bude záviset jen na vlastnostech materiálu. Podle (12.9) však vidíme, že z hlediska lomové mechaniky

$$q = \frac{f(l_c; \alpha, \varphi) - 1}{\alpha - 1} \quad (12.12)$$

je složitou funkcí všech parametrů  $(l_c, \alpha, \varphi)$ , takže hypotéza považující  $q$  za materiálovou konstantu nemohla být úspěšná.

Účinkem vrubu se tedy mez únavy snižuje, avšak méně než by odpovídalo teoretické koncentraci napětí. Při namáhání málo nad mezí únavy se účinkem vrubu zmenšuje i životnost. To však nemusí být pravda v oblasti nízkocyklové únavy, jak je zřejmé ze srovnání Wöhlerových křivek na obr. 49. U měkké oceli se křivky pro vrubovanou a hladkou tyč protínají (s výjimkou mělkých vrubů). To je vyznačeno na obr. 49 vlevo.

<sup>x)</sup> Konstanty  $c_0$ ,  $c_1$  musí vymizet, když  $\alpha = 1$  nebo  $\varphi \rightarrow \infty$  (vrubová tyč přejde v hladkou tyč, takže  $\alpha = \beta = 1$ ).



Obr. 49

### 13. Empirické vzorce pro výpočet časované a trvalé pevnosti hladkých vzorků

Nemáme-li po ruce výsledky únavových zkoušek, můžeme časovanou nebo trvalou pevnost odhadnout podle empirických vzorců, které nyní uvedeme, zpravidla odhadem podle meze pevnosti  $\sigma_{Pt}$  zjištěné při zkoušce tahem.

Mez únavy u různých a různě zušlechťených ocelí s mezí pevnosti v tahu 500 až 1500 MPa lze odhadnout při různých druzích namáhání s konstantní amplitudou napětí takto:

střídavý tah-tlak	$\sigma_{ct} = 0,35 \sigma_{Pt}$ ,
míjivý tah	$\sigma_{hc} = 0,61 \sigma_{Pt}$ ,
střídavý krut	$\tau_c = 0,25 \sigma_{Pt}$ ,
střídavý ohyb <sup>x)</sup>	$\sigma_{o,c} = 0,43 \sigma_{Pt}$ ,
míjivý ohyb	$\sigma_{o,hc} = 0,74 \sigma_{Pt}$ .

Meze únavy byly získány na tyčích  $\varnothing 10$  mm, takže při ohybu a krutu jsou ovlivněny gradientem napětí. Proto je  $\sigma_{o,c} = 1,23 \sigma_{ct}$  popř.  $\sigma_{o,hc} = 1,21 \sigma_{hc}$ . Vliv gradientu napětí je tedy dán činitelem asi 1,22. Poměr  $\tau_c / \sigma_{o,c} = 0,58$  odpovídá zhruba Misesově hypotéze ( $1 / \sqrt{3}$ ).

Ve skutečnosti je vliv gradientu napětí spojen též s vlivem velikosti, o němž pojednáme podrobněji v kapitole 15. Při zkoušce střídavým

x) Lhostejno, zda jde o střídavý ohyb v rovině nebo o ohyb za rotace.

tahem-tlakem (popř. míjivým tahem) se do určité míry uplatní excentricita síly k ose vzorku způsobená nepřesným upnutím. Základní mez únavy  $\sigma_c$ , která by odpovídala dokonale rovnoměrnému rozdělení napětí v průřezu, je proto poněkud větší než  $\sigma_{Pt}$ ; můžeme předpokládat asi 40 % meze pevnosti. Zanedbáme-li rozdílné uplatnění technologických vlivů a relativní vliv povrchové vrstvy, rovnala by se základní mez únavy hodnotě  $\sigma_{\sigma,c}$  u vzorků velkého průměru.

U lité oceli je mez únavy asi o 20 % menší než u kované oceli stejné pevnosti.

Pro hliníkové slitiny navrhl Heywood (1962) vztah

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{Pt}} = \frac{1 + \frac{0,0031 n^4}{1 + 0,0064 \sigma_{Pt}}}{1 + 0,0031 n^4}, \quad (13.1)$$

kde  $n = \log N$ . (dekadický logaritmus počtu cyklů do lomu),  $\sigma_{Pt}$  se dosazuje v MPa.

Pro šedou litinu platí orientační hodnoty uvedené v tabulce 4.

TABULKA 4 Mez únavy šedé litiny

Pevnost v tahu [MPa]		160	220	320	370
Mez únavy [MPa]	střídavý tah-tlak	46	50	120	140
	střídavý ohyb	63	85	140	150
	střídavý krut	77	85	120	150

K té je třeba poznamenat, že hodnoty uvedené pro ohyb a pro krut platí pro vzorky malých průměrů ( $d = 20$  mm); kromě vlivu velikosti se zde uplatní i nelinearita v průběhu napětí, které není přesně úměrné vzdálenosti od osy tyče. U litiny platí totiž Hookeův zákon jen pro malá napětí.

#### Příklad

Jaká je mez únavy lehké slitiny o pevnosti  $\sigma_{Pt} = 450$  MPa při základně  $N = 10^8$ ? Ze vzorce (13.1) pro  $n = 8$  vyjde

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_{Pt}} = \frac{1 + 0,000\ 467 \sigma_{Pt}}{1 + 0,006\ 4 \sigma_{Pt}} \doteq 0,312 ,$$

$$\sigma_c = 0,312 \cdot 450 \doteq 140 \text{ MPa.}$$

#### 14. Výpočet vrubového činitele

K výpočtu vrubového činitele doporučují Linhart, Jelínek a Auředník (1970) vzorce Němcův, Lejkinův a Serensenův popř. Heywoodův.

Podle Němce je

$$\beta = [1 + \alpha \left(\frac{\nu}{\nu_\beta} - 1\right) \gamma] \psi , \quad (14.1)$$

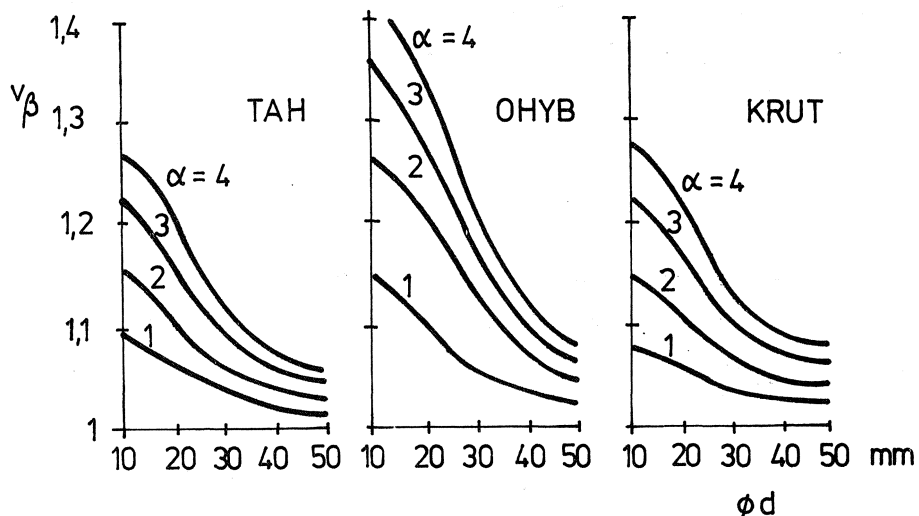
kde  $\alpha$  je tvarový činitel,

$\nu$  součinitel redukující dvouosou napjatost (u kulatých tyčí  $\nu = 0,95$ , u plochých  $\nu = 1$ ),

$\nu_\beta$  je součinitel velikosti podle obr. 50,

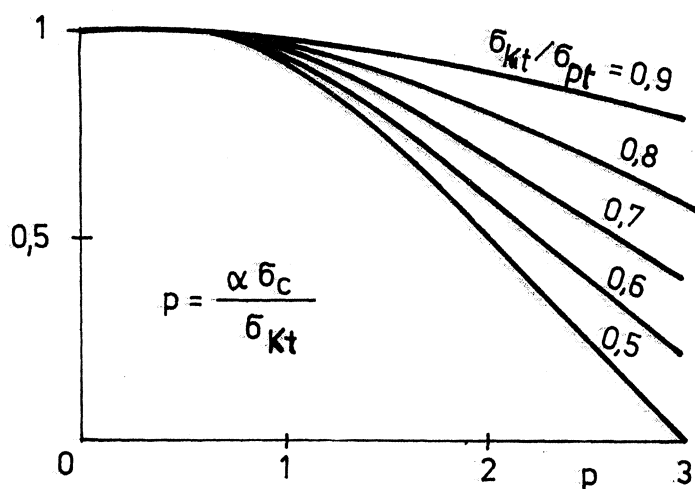
$\gamma$  vyjadřuje míru uplatnění vad v daném materiálu (feriticko-perlitická ocel  $\gamma \cong 0,9$ , austenitická  $0,67$ , vysoce pevná ocel  $\gamma = 1$ ),

$\psi$  je součinitel zpevnění (obr. 51).



Obr. 50





Obr. 51

Podle Serensena a Lejkina

$$\beta = 1 + q(\alpha - 1), \quad (14.2)$$

kde  $q$  je vrubová citlivost materiálu podle (12.11).  
Pro střídavý tah-tlak a ohyb

$$q = \frac{1}{2} (q_1 + q_2), \quad (14.3)$$

kde  $q_1$  závisí na mezi pevnosti  $\sigma_{Pt}$  a  $q_2$  na poměru  $\sigma_{kt}/\sigma_{Pt}$ . Obě hodnoty přitom závisejí ještě na poloměru křivosti  $\rho$  v kořeni vrubu a odečtou se z téhož diagramu (obr. 52).

Pro střídavý krut

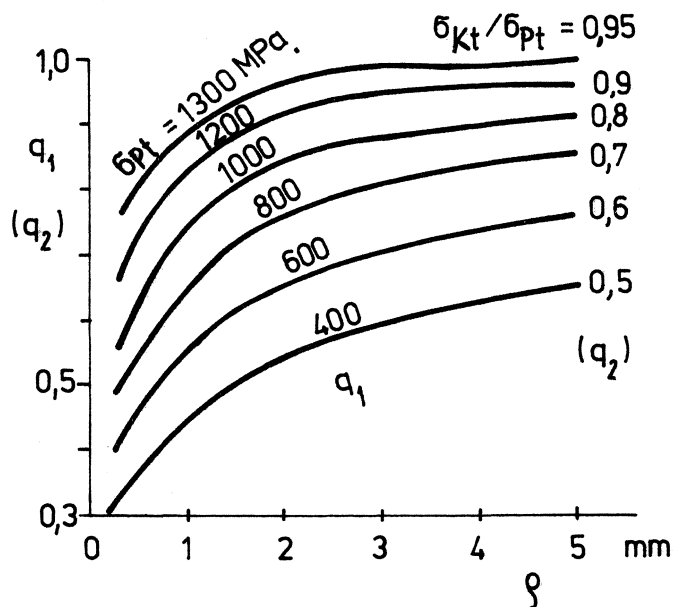
$$q = q_2. \quad (14.4)$$

Vztah (14.2) určuje poměr mezi únavy u hladké tyče a u tyče s vrubem větších rozměrů; lze jej použít bez dalších korekcí na vliv velikosti.

Podle Heywooda vypočteme

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{k}{\sqrt{\rho}}}, \quad (14.5)$$

kde  $\rho$  [mm] je poloměr křivosti v kořeni vrubu,  
 $k$  hodnota podle tab. 5.



Obr. 52

TABULKA 5 Hodnota  $k [\sqrt{\text{mm}}]$  ve vzorci (14.5)

Materiál	Vrub	$k [\sqrt{\text{mm}}]$
Ocel	Otvor	$360/\sigma_{Pt}$
	Osazení	$280/\sigma_{Pt}$
	Zápich	$220/\sigma_{Pt}$
Ostatní materiály	Hliníkové slitiny	$(370/\sigma_{Pt})^3$
	Hořčíkové slitiny	0,15
	Šedá litina	1,2
	Tvárná litina	$360/\sigma_{Pt}$
	Ocel na odlitky	0,44
Poznámka: $\sigma_{Pt}$ se dosazuje v MPa		

Také Heywoodův vzorec platí pro rozměrnější části bez další korekce na vliv velikosti.

Lukáš (1980) dokazuje, že z hlediska lomové mechaniky má největší oprávnění vzorec Siebela a Stielera

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{cX}} \quad (14.6)$$

kde  $X = \frac{1}{\sigma_{max}} \left| \frac{d\sigma}{dr} \right|$  je poměrný gradient napětí (tab. 1),  $c$  je hodnota závislá na materiálu a na tvarovém činiteli; závislost na tvarovém činiteli je méně výrazná, takže ji lze zanedbat. Hodnotu  $c$  lze pak odhadnout interpolací v tab. 6.

TABULKA 6 Hodnoty  $c$  v rovnici (14.6)

Materiál	$\sigma_{0,2}$ [MPa]	$\sigma_{pt}$ [MPa]	$c$ [mm]
Měkká ocel	150	-	0,100
	200	-	0,050
	400	-	0,022
Zušlechtěná ocel	400	-	0,022
	500	-	0,0078
	900	-	0,0014
Austenitická ocel	200	-	0,215
	400	-	0,100
Ocel na odlitky	-	400	0,250
	-	600	0,215
Šedá litina	-	180	0,38
	-	300	0,25
Slitiny Al, Mg	100	-	0,027
	300	-	0,008
Dural	300	-	0,074
	400	-	0,046
Mosaz	100	-	0,103
	250	-	0,021

Vliv velikosti je částečně zahrnut do poměrného gradientu napětí. Podrobněji pojednáme o vlivu velikosti v příští kapitole.

## 15. Vliv velikosti součásti na mez únavy

Při ohybu a při krutu se projevuje vliv gradientu napětí (i u hladkých tyčích, neboť napětí roste se vzdáleností od osy). Proto je např. mez únavy v ohybu větší než mez únavy v tahu-tlaku (u téhož materiálu), a to tím spíše, čím menší je průměr zkušebního vzorku.

Vliv velikosti zjistíme však i u tyčích s rovnoměrně rozděleným napětím (při tahu-tlaku). Ukáže se, že mez únavy poněkud klesá, když roste průměr vzorku. Tento jev souvisí s tím, že materiál větších vzorků je zpravidla jinak technologicky zpracován (např. méně prokovan) a má jinou úroveň zbytkových vlastních pnutí. Určitou roli zde má i okolnost, že povrchová vrstva má vlivem opracování vždy poněkud jinou kvalitu než jádro průřezu; vliv této nehomogenity se projeví u velkých částí relativně méně.

Vliv velikosti lze tedy vyjádřit součinem dvou činitelů

$$V = V_g \cdot V_p, \quad (15.1)$$

kde  $V_g$  vyjadřuje vliv gradientu napětí a  $V_p$  poměrný vliv povrchové vrstvy a vlivy technologické. Tento druhý vliv se obvykle zanedbává. U konstrukčních ocelí jej lze podle Němce a Puchnera vyjádřit vzorcem

$$V_p = 1 - \sqrt{0,02 \log \frac{d}{d_0}}, \quad (15.2)$$

kde  $d_0 = 10$  mm a  $d$  je průměr části. Podle Afanasjeva je přibližně (v úpravě podle Klesnila a Lukáše)

$$V_p = \left( \frac{d_0}{d} \right)^{0,1}. \quad (15.3)$$

Gradient napětí bývá zpravidla reprezentován jen spádem největšího hlavního napětí. Tab. 1 platí pro relativně mělké vruby, takže se zde stírá rozdíl mezi kulatou a plochou tyčí o stejném obrysu při namáhání ohybem.<sup>x)</sup> Přijmeme-li toto zjednodušení, můžeme pro vliv gradientu napětí použít vzorec odvozený za stejných předpokladů jako (14.6), totiž

---

x) Podrobněji jej uvažuje Němec (1955).

$$v_g = 1 + \sqrt{cX} = 1 + \sqrt{\frac{2c}{d}}, \quad (15.4)$$

kde  $c$  závisí na materiálu a lze je odečíst z tab. 6,  
 $d$  je průměr zkušební tyče.

Je-li tedy základní mez únavy resp. mez únavy v tahu-tlaku zkušebního vzorku  $\phi d_0 = 10$  mm rovna  $\sigma_c(d_0)$  resp.  $\sigma_{ct}(d_0)$ , bude táž mez v tyči  $\phi d$  rovna

$$\sigma_c(d) = \sigma_c(d_0) v_p \quad \text{resp.} \quad \sigma_{ct}(d) = \sigma_{ct}(d_0) v_p \quad (15.5)$$

a mez únavy v ohybu u tyče  $\phi d$  bude

$$\sigma_{o,c}(d) = \sigma_c(d) \cdot v_g. \quad (15.6)$$

Vyloučením  $\sigma_c(d)$  z těchto rovnic dostaneme mez únavy hladké tyče  $\phi d$  v ohybu odvozenou ze základní meze únavy tyče  $\phi d_0$  v tahu-tlaku

$$\sigma_{o,c}(d) = \sigma_c(d_0) \cdot V, \quad (15.7)$$

kde  $V$  vypočteme podle (15.1) až (15.4).

### Příklad

Ocel o mezi pevnosti  $\sigma_{pt} = 600$  MPa, mezi kluzu  $\sigma_{kt} = 400$  MPa má mez únavy ohybem za rotace vzorku  $\phi d_0 = 12$  mm  $\sigma_{o,c} = 260$  MPa. Jaká bude mez únavy v ohybu u vzorku  $\phi d = 50$  mm a jaká bude základní mez únavy  $\sigma_c$  ?

Podle (15.4) a tab. 6 bude  $c = 0,022$  mm a  $v_g = 1,06$ , takže z rovnice (15.6) vyjde základní mez únavy vzorku  $\phi 12$  mm

$$\sigma_c(d_0) = 260/1,06 = 245 \text{ MPa.}$$

Pro vzorek  $\phi 50$  mm bude podle (15.5) a (15.2) základní mez únavy

$$\sigma_c(d) = \sigma_c(d_0) \cdot 0,889 \doteq 218 \text{ MPa.}$$

Mez únavy v ohybu tyče  $\phi 50$  mm vyjde pro  $v_g = 1 + \sqrt{0,022/25} = 1,03$  ze vzorce (15.7)

$$\sigma_{o,c}(d) \doteq 225 \text{ MPa.}$$

Vypočtená základní mez únavy u vzorku  $\phi 12$  mm je asi 41 % meze pevnosti,

u vzorku  $\emptyset$  50 mm jen asi 36 % meze pevnosti.

Těmto výpočtům nelze přisuzovat absolutní platnost. Únava materiálu je statistickým jevem a vzorce, které jsme uvedli, dávají jen odhad středních hodnot, nikoli odhad rozptylu.

## 16. Výpočet meze únavy při střídavém namáhání

Protože nukleace trhliny probíhá zpravidla v povrchové vrstvě, závisí mez únavy velmi citlivě na jakosti povrchu. Drobné nerovnosti a vady povrchu se mohou sloučit se zárodečnou trhlinou v jeden větší defekt, takže stačí menší kritická délka zárodečné trhliny k iniciaci lomu než by tomu bylo u tyče s dokonalým povrchem. Tuto okolnost zpravidla zahrnujeme do výpočtu pomocí součinitele jakosti povrchu  $\gamma$ , který odečteme z obr. 53 (podle Siebela a Gaiera).

Mez únavy součásti s vrubem je pak ve střídavém tahu-tlaku

$$\sigma_{ct}^* = \frac{\sigma_{ct}}{\beta} \gamma, \quad (16.1)$$

kde  $\sigma_{ct}$  je mez únavy ve střídavém tahu-tlaku u tyče srovnatelné velikosti<sup>x)</sup>,  
 $\beta$  je vrubový činitel,  
 $\gamma$  činitel jakosti povrchu podle obr. 53.

Jde-li o střídavý ohyb, budeme mít

$$\sigma_{o,c}^* = \frac{\sigma_c}{\beta} \gamma \quad (16.2)$$

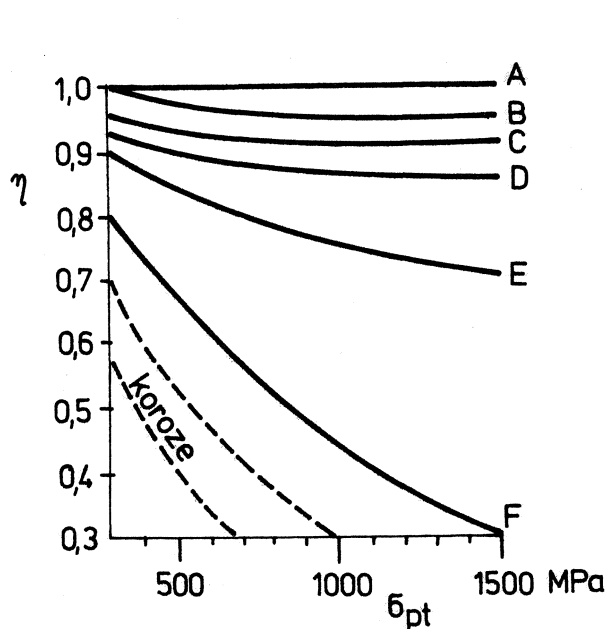
resp.

$$\sigma_{o,c}^* = \frac{\sigma_c}{\beta} \gamma v_g. \quad (16.3)$$

Zde  $\sigma_c$  značí základní mez únavy u tyče srovnatelné velikosti,  
 $v_g$  činitel vlivu gradientu napětí podle (15.4).

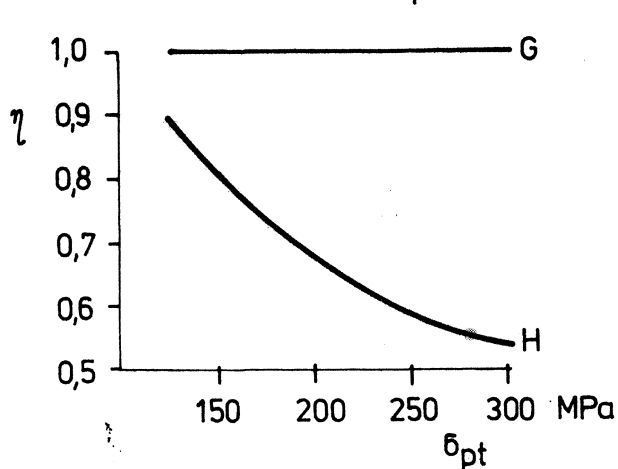
---

x) Dosadíme  $\sigma_{ct}(d) = v_p \sigma_{ct}(d_0)$  podle (15.2) a (15.5). U feriticko-perlitických ocelí můžeme odhadnout  $\sigma_{ct}(d) \cong 0,35 v_p \sigma_{pt}$ .



### OCEL

- A velmi jemně leštěno ( $R \leq 1 \mu\text{m}$ )
- B leštěno ( $1,5 \mu\text{m} < R < 2 \mu\text{m}$ )
- C broušeno ( $2,5 \mu\text{m} < R < 6 \mu\text{m}$ )
- D obrobeno ( $6 \mu\text{m} < R < 16 \mu\text{m}$ )
- E hrubováno
- F povrch s okujemi



### ŠEDÁ LITINA

- G leštěno
- H povrch po odlití (nepracováno)

Obr. 53

Gradient napětí vzniká jednak tím, že jde o ohyb, jednak účinkem vrubu. Tento druhý vliv započítává Němec do vztahu (14.1), takže při jeho aplikaci dosadíme do (16.3) už pouze  $\sqrt{q} = 1 + \sqrt{2c/a}$  podle (15.4). Siebelův vzorec (14.6) zahrnuje oba vlivy do veličiny  $\chi$ , takže pro další výpočet použijeme (16.2). Vztah (16.2) použijeme i v návaznosti na vzorec Heywoodův (14.5) a Serensenův-Lejkinův (14.2).

Jde-li o krut, dostaneme obdobně

$$\tau_c^* = \frac{\tau_c}{\beta} \chi_k \quad (16.4)$$

kde činitel  $\chi_k \cong \chi$  zahrnuje vliv jakosti povrchu (který se u soustružených částí uplatňuje relativně méně než při ohybu, pokud nejde

o korozi) a

$$\tau_c \approx 0,58 \sigma_c \quad (16.5)$$

Všechny tyto vzorce platí pro střídavé namáhání a pro případy, kdy povrchová vrstva není uměle zpevněna. Tento případ - a také některé zvláštní případy - probereme ještě později.

### 17. Mez únavy při nesouměrném cyklu zatěžování

V předchozí kapitole jsme ukázali, jak lze vypočítat - alespoň přibližně - mez únavy části s vrubem při střídavém namáhání. Nyní tento výpočet zobecníme pro případ, že cyklus má nenulovou střední hodnotu  $\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2$  a amplitudu  $\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$ .

Na příkladu v 2. kapitole jsme ukázali, že skutečný průběh napětí a přetvoření v kořeni vrubu závisí při nesouměrném cyklickém zatěžování na historii zatěžování. Kromě toho je třeba počítat se změnami mechanických vlastností vlivem cyklického zatěžování, jak jsme ukázali ve 3. kapitole. Protože výpočet podle těchto zásad je - navzdory všem zjednodušením - složitý, dává se v praxi přednost fenomenologickému výpočtu podle empirických vzorců. Zpravidla se předpokládá, že platí vztah

$$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_p^*}\right)^k = 1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_c^*} \quad (\sigma_m \geq 0), \quad (17.1)$$

kde  $\sigma_c^*$  je mez únavy části při střídavém cyklu vypočtená podle kap. 16,<sup>x)</sup>

$\sigma_p^*$  je jmenovité napětí na mezi statické pevnosti.

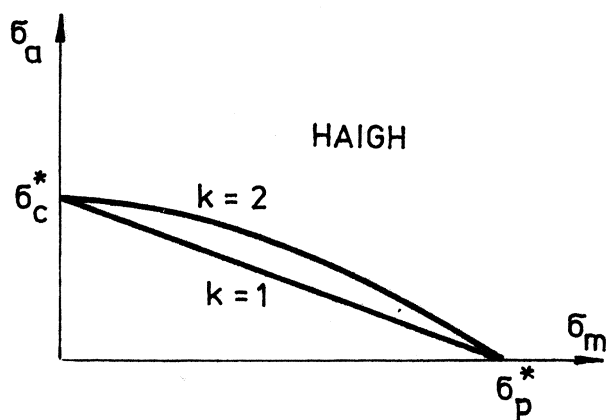
Pro vysoce pevné, popř. křehké materiály  $k = 1$ , pro tvárné materiály (např. měkkou ocel)  $k = 2$ .

Hodnota  $\sigma_p^*$  je u houževnatých materiálů rovna  $\sigma_p$  nebo je o málo větší. Toto zvýšení bývá způsobeno omezením příčné kontrakce u tyčí s vrubem, zčásti též vlivem složitější napjatosti v okolí vrubů. U vysoce pevných a křehkých materiálů se  $\sigma_p^*$  blíží hodnotě  $\sigma_{pt}/\alpha$  (srovnej s obr. 49). U součástí namáhaných ohybem je  $\sigma_p^* = M_{op}/W_o$ , kde  $W_o$  je průřezový modul v ohybu a  $M_{op}$  je mezní hodnota ohybového momentu při statickém namáhání.

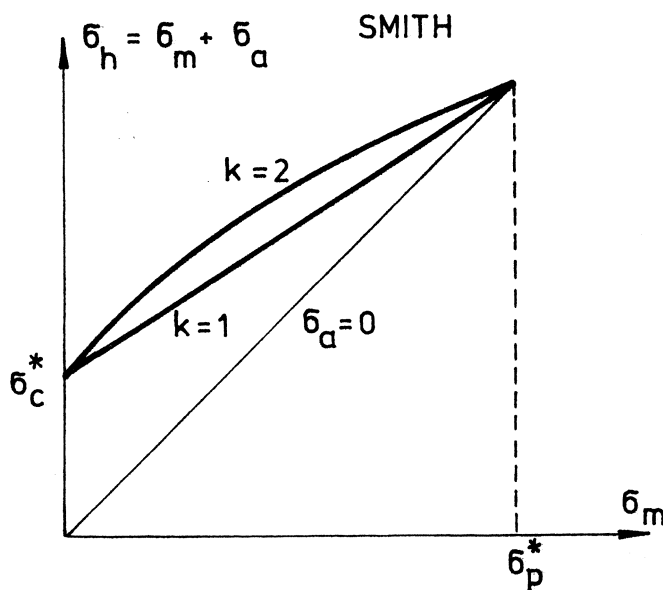
<sup>x)</sup> Hvězdička značí, že jde o jmenovité napětí v části s vrubem. Vzorec (17.1) pro  $k > 1$  se někdy linearizuje (viz příklad 6 z kapitoly 26).



Rovnice (17.1) platí pro  $\sigma_m \geq 0$ ; představuje mezní čáru v Haig-  
hově či Smithově diagramu (obr. 54 a 55).



Obr. 54



Obr. 55

Pro  $k = 1$  je to přímka, pro  $k = 2$  parabola. Je-li  $\sigma_m < 0$ , lze vliv  
středního napětí zanedbat; pak

$$\sigma_a = \sigma_c^* \quad (\sigma_m < 0) \quad (17.2)$$

Zde se totiž příznivě uplatní okolnost, že uzavřenou trhlinou se může  
přenášet tlakové napětí bez velké koncentrace napětí v okolí kořene

trhliny. Proto může být dokonce  $\sigma_a > \sigma_c^*$ , zvláště když  $\sigma_h < 0$ . O těchto vlivech pojednává podnětná práce Puchnerova (1967).

Pro krut dostaneme obdobnou rovnici

$$\left(\frac{|\tau_m|}{\tau_p^*}\right)^k = 1 - \frac{\tau_a}{\tau_c^*} \quad (17.3)$$

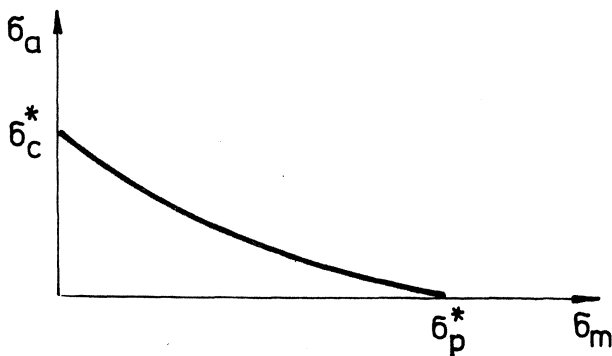
platnou bez zřetele ke smyslu středního napětí cyklu  $\tau_m$ . Přitom  $\tau_p^* = M_{kp} / W_k$ , kde  $W_k$  je průřezový modul v krutu a  $M_{kp}$  je silový moment, kterým se daná součást "ukrotí". Je to tedy mezní hodnota krouticího momentu při statickém zatížení.

Pro šedou litinu byla navržena mezní čára ve tvaru

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*} = \frac{\sigma_p^* - \sigma_m}{\sigma_p^* + \sigma_m} \quad (17.4)$$

Je znázorněna v Haighově diagramu na obr. 56.

Ve stavbě letadel se používají lehké slitiny s vysokou pevností, pro něž je typická poměrně vysoká mez kluzu  $\sigma_{0,2}$  a velká vrubová citlivost. Pro tyto materiály navrhl Gunn (1956) konstrukci mezní čáry založené na předpokladu, že  $q = 1$ , tj.  $\alpha = \beta$ . Respektuje se příznivý vliv vlastních pnutí vzniklých v kořeni vrubu, když  $\alpha \sigma_h > \sigma_{0,2}$ . Konstrukce je na-



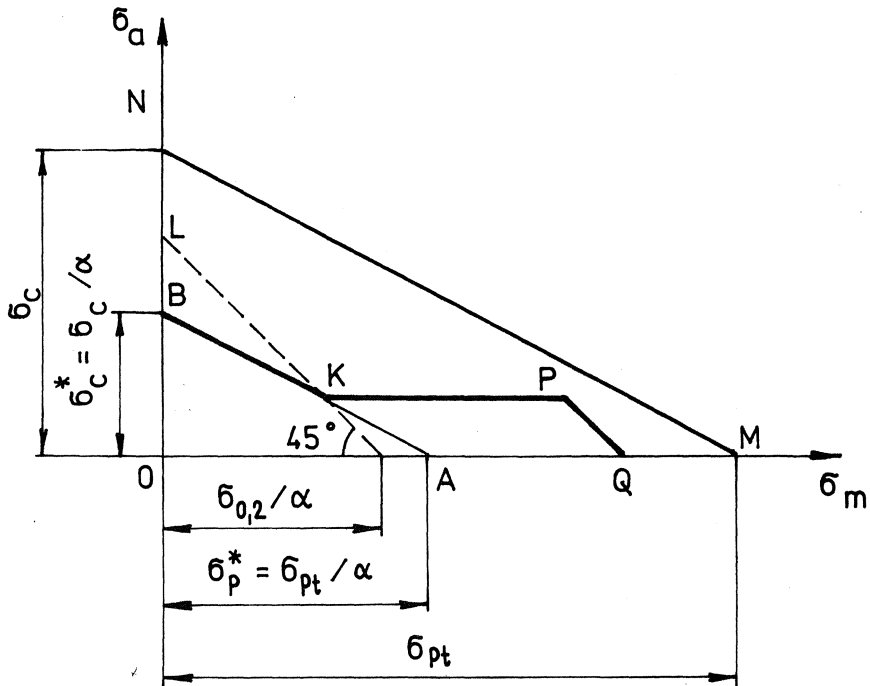
Obr. 56

značena v Haighově diagramu na obr. 57. Čára MN odpovídá hladké tyči; podle rovnice (17.1) je to přímka, neboť bereme  $k = 1$ . Přímka AB pak odpovídá části s vrubem, pro niž  $\sigma_p^* = \sigma_{pt} / \alpha$ ,  $\sigma_c^* = \sigma_c / \alpha$ . Je tedy  $\overline{ON} : \overline{OB} = \alpha$ ; obě přímky jsou rovnoběžné. V bodě K je splněna podmínka  $\alpha \sigma_h = \sigma_{0,2}$ ; od tohoto bodu je  $\sigma_a$  nezávislé na  $\sigma_m$  vlivem toho, že horní napětí se jen málo mění (neboť u kořene vrubu vznikají plastické deformace). Přímka KL je skloněna o  $45^\circ$  k osám souřadnic a má rovnici  $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_h = \sigma_{0,2} / \alpha$ . Předpokládá se, že hladká tyč i součást s vrubem mají stejnou jakost povrchu.

Zpravidla si nepřejeme, aby jmenovité napětí přestoupilo mez kluzu  $\sigma_{kt}$  resp.  $\sigma_{0,2}$ . Pak připojíme ještě omezující podmínku

$$\sigma_h \leq \sigma_{kt} \quad \text{resp.} \quad \sigma_{0,2} \quad (17.5)$$

Mezní čára odpovídající této podmínce je na obr. 57 označena PQ. Je rovnoběžná s přímkou LK. Mezní přímky odpovídající vztahu (17.5) bylo možno zakreslit i do obr. 54 resp. 55. V Haighově diagramu je mezní přímka podle (17.5) skloněná k osám o  $45^\circ$ , ve Smithově diagramu rovnoběžná s osou úseček.



Obr. 57

### 18. Mez únavy při složeném namáhání

Zpravidla jde o kombinaci ohybu a krutu resp. tahu-tlaku a krutu a jen výjimečně o jiné případy.

Působí-li napětí  $\sigma$  od ohybu (resp. tahu-tlaku) a napětí  $\tau$  od krutu v témže místě a jsou-li obě tato napětí úměrná témuž parametru  $\lambda(t)$ , nemění se roviny hlavních napětí. Známe-li amplitudy těchto hlavních napětí  $\sigma_{a1}$ ,  $\sigma_{a2}$  při střídavém namáhání, bude na mezi únavy platit empirický vztah

$$\sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2 - \left(\frac{\sigma_c^2}{\tau_c^2} - 2\right) \sigma_{a1} \sigma_{a2} = \sigma_c^2. \quad (18.1)$$

Přitom - označíme-li  $\sigma_{1\max} = \sigma_1(\lambda_1)$ ,  $\sigma_{1\min} = \sigma_1(\lambda_2)$  -

$$\begin{aligned} \sigma_{a1} &= \frac{1}{2} [\sigma_1(\lambda_1) - \sigma_1(\lambda_2)], \\ \sigma_{a2} &= \frac{1}{2} [\sigma_2(\lambda_1) - \sigma_2(\lambda_2)]. \end{aligned} \quad (18.2)$$

Bude-li např.  $\sigma = 0$ , bude  $\sigma_{a1} = \tau_a$ ,  $\sigma_{a2} = -\tau_a$  a z rovnice (18.1) dostaneme  $\tau_a = \tau_c$ . Bude-li naopak  $\tau = 0$ , bude  $\sigma_{a1} = \sigma_a$ ,  $\sigma_{a2} = 0$  a  $\sigma_a = \sigma_c$ .

Jiný empirický vztah, u něhož se nevyžaduje vyhledání hlavních napětí, je

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_c^*}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*}\right)^2 \left(\frac{\sigma_c^*}{\tau_c^*} - 1\right) + \frac{\sigma_a}{\sigma_c^*} \left(2 - \frac{\sigma_c^*}{\tau_c^*}\right) = 1. \quad (18.3)$$

Tento vztah platí pro jmenovitá napětí  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$  a pro součást s vrubem (jde-li o hladkou část, vynecháme hvězdičku). U šedé litiny bývá  $\sigma_c/\tau_c = 0,9$  až  $1,3$  (zpravidla  $1,1$  až  $1,2$ ), u hladkých ocelových tyčí  $\sigma_c/\tau_c = 1,5$  až  $2,0$  (větší hodnota pro měkčí ocele). U ocelových tyčí s vruby je  $\sigma_c^*/\tau_c^*$  asi  $1$  až  $1,5$  (nižší hodnota přísluší ostřejším vrubům).

Také rovnice (18.3) vyhovuje mezním případům. Je-li např.  $\sigma_a = 0$ , vyjde  $\tau_a = \tau_c^*$ . Pro  $\tau_a = 0$  zase  $\sigma_a = \sigma_c^*$ . Dosadíme-li do rovnice (18.3)  $\sigma_c^*/\tau_c^* = 2$ , vyjde vztah často citovaný v technické literatuře

$$\left(\frac{\tau_a}{\tau_c^*}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*}\right)^2 = 1. \quad (18.4)$$

Podle toho, co bylo uvedeno v textu k rovnici (18.3), však vztah (18.4) platí spíše pro hladké tyče (nebo pro tyče s mělkými vruby).

Není-li střední napětí nulové, lze použít vztahu

$$\sqrt{\sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2 - \sigma_{a1} \sigma_{a2}} = \sigma_c - \psi \cdot (\sigma_{m1} + \sigma_{m2}), \quad (18.5)$$

kde  $\sigma_{a1}$ ,  $\sigma_{a2}$  jsou amplitudy hlavních napětí v kořeni vrubu (obdobně jako v rovnici (18.1)),  $\sigma_{m1}$ ,  $\sigma_{m2}$  jsou střední hodnoty těchto napětí zahrnující i zbytková vlastní pnutí a  $\psi = 0$  až  $0,2$  (větší hodnota u ocelí vyšší pevnosti).

Je-li jedno z obou napětí v čase neměnné, např.  $\tau = \text{konst}$ ,  
 $\sigma = \sigma_a \sin \omega t$ , dosadíme do uvedených rovnic  $\tau/\tau_p^*$  místo  $\tau_a/\tau_c^*$   
 Obdobně bychom postupovali, kdyby bylo  $\sigma = \text{konst}$ .

Nepůsobí-li obě napětí ve fázi (nevznikají-li extrémní napětí  $\sigma$   
 resp.  $\tau$  současně), dostáváme vždy větší výslednou pevnost v únavě  
 než když jsou ve fázi. U ocelí tím vzniká rozdíl asi 10 %, u šedé  
 litiny až 30 %, u hliníkových slitin je tento rozdíl zanedbatelný.  
 O zvláštním případě hřídele s příčnou dírou pojednáme ještě ve 20.  
 kapitole.

## 19. Výpočet bezpečnosti vzhledem k únavě

V 17. kapitole jsme vysvětlili, jak se sestrojí mezní čára v sou-  
 řadnicích  $(\sigma_m, \sigma_a)$  resp.  $(\tau_m, \tau_a)$ . Předpokládejme, že tato mezní čára je  
 popsána rovnicí

$$\sigma_a = f(\sigma_m). \quad (19.1)$$

Připomínáme, že v této rovnici jde o mezní hodnoty  $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$  (o hod-  
 noty na mezi únavy). Provozní hodnoty jsou  $\sigma_{ac}$ ,  $\sigma_{mc}$ .

Nyní musíme uvážit, jakým způsobem může dojít k poruše. Zpravidla  
 se přitom změní amplituda i střední hodnota cyklu podle obecné závi-  
 slosti na nějakém parametru  $\lambda$ , takže

$$\sigma_a = \sigma_{a0} \cdot \psi_1(\lambda), \quad \sigma_m = \sigma_{m0} \psi_2(\lambda) \quad (19.2)$$

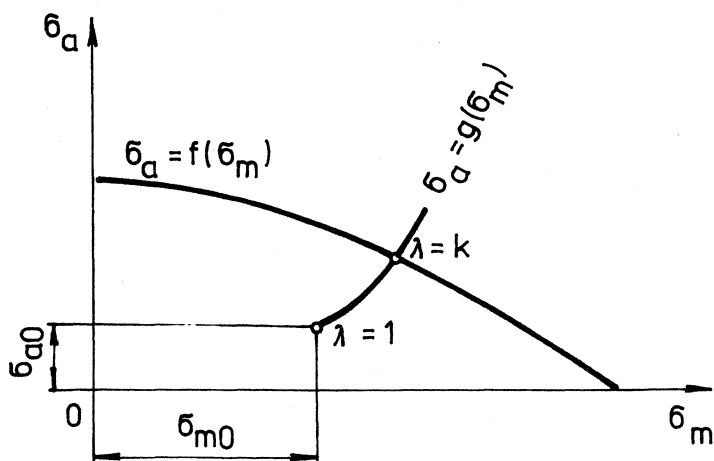
Parametr  $\lambda$  budeme normovat podmínkou, aby

$$\psi_1(1) = 1, \quad \psi_2(1) = 1. \quad (19.3)$$

Vyloučením parametru  $\lambda$  z rovnic (19.2) dostaneme rovnici křivky

$$\sigma_a = g(\sigma_m) \quad (19.4)$$

procházející bodem  $\sigma_{a0}, \sigma_{m0}$  (obr. 58). Průsečíku křivky (19.4) s mezní  
 čárou (19.1) přísluší hodnota  $\lambda = k$ , která je mírou bezpečnosti vzhle-  
dem k únavě.



Obr. 58

Mění-li se namáhání například tak, že  $\sigma_a : \sigma_m = \text{konst}$ , je

$$\psi_1(\lambda) = \lambda, \quad \psi_2(\lambda) = \lambda. \quad (19.5)$$

Roste-li pouze amplituda při konstantním středním napětí, je

$$\psi_1(\lambda) = \lambda, \quad \psi_2(\lambda) = 1 \quad (19.6)$$

a roste-li pouze střední napětí při konstantní amplitudě, je

$$\psi_1(\lambda) = 1, \quad \psi_2(\lambda) = \lambda. \quad (19.7)$$

Není-li růst napětí rovnoměrný, mohou být funkce  $\psi_1(\lambda)$  resp.  $\psi_2(\lambda)$  nelineární. Volíme je tak, aby míra bezpečnosti  $k$  měla technický smysl a byla co nejvýstižnější vzhledem k předpokládanému meznímu stavu.

Obdobně postupujeme i při kombinovaném namáhání. Využíváme přitom poznatků z 18. kapitoly.

O výpočtu bezpečnosti částí namáhaných v oblasti časované pevnosti pojednal Václavík (1969).

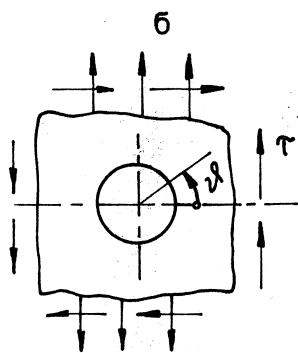
## 20. Hřídel s příčnou dírou při složeném namáhání

Je-li průměr díry malý, bude v okolí otvoru napjatost daná přibližně rovnicemi (1.15) popř. (1.20). Při kombinovaném namáhání napětími

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_a \cos \omega t, \\ \tau &= \tau_a \cos (\omega t - \psi)\end{aligned}\quad (20.1)$$

vyjde napětí na okraji otvoru podle rovnic (1.16) a (1.21) s přihlédnutím k obr. 59

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_a (1 + 2 \cos 2\varphi) \cos \omega t - 4 \tau_a \sin 2\varphi \cos (\omega t - \psi). \quad (20.2)$$



Obr. 59

Zaměříme se na dva zvláštní případy. V prvním budou mít obě napětí společnou fázi, tj.  $\psi = 0$ . Největší amplituda napětí  $\sigma_{\varphi}$  pak je

$$\sigma_{\varphi a} = \sigma_a + \sqrt{4 \sigma_a^2 + 16 \tau_a^2} \quad (20.3)$$

a vzniká v místech daných podmínkou

$$\varphi = -\frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2\tau_a}{\sigma_a} \right). \quad (20.4)$$

Zanedbáme-li prozatím vliv gradientu napětí, bude na mezi únavy  $\sigma_{\varphi a} = \sigma_c$ . Nebudeme-li rozlišovat ani rozdíl mezi tvarovými a vrubovými činiteli, bude  $\sigma_c = 3\sigma_c^* = 4\tau_c^*$ . Budeme-li rovnici (20.3) touto hodnotou dělit, dostaneme

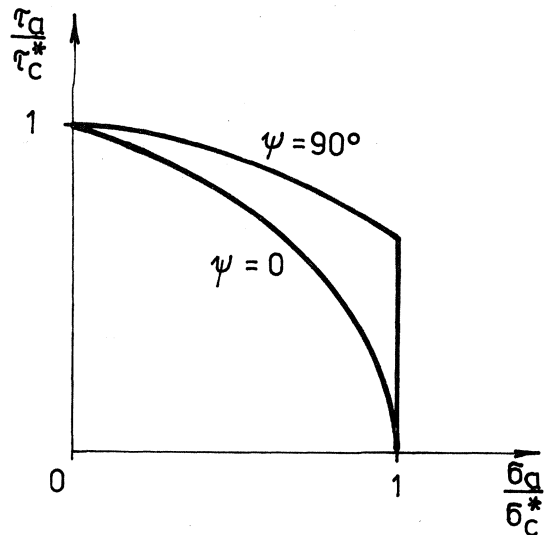
$$1 = \frac{\sigma_a}{3\sigma_c^*} + \sqrt{\frac{4}{9} \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_c^*} \right)^2 + \left( \frac{\tau_a}{\tau_c^*} \right)^2}. \quad (20.5)$$

To po úpravě dává rovnici eliptického oblouku

$$\left( \frac{\sigma_a}{\sigma_c^*} + 1 \right)^2 + 3 \left( \frac{\tau_a}{\tau_c^*} \right)^2 = 4 \quad (20.6)$$

v souřadnicích  $\sigma_a/\sigma_c^*$ ,  $\tau_a/\tau_c^*$  (obr. 60). Této rovnici použijeme i pro případ, že mezi vrubovými a tvarovými činiteli bude rozdíl závislý na vrubové citlivosti materiálu a že otvor nebude mít velmi malý průměr v porovnání s průměrem hřídele. Za  $\sigma_c^*$  resp.  $\tau_c^*$  pak dosadíme skutečné hodnoty amplitud jmenovitých napětí na mezi únavy při jednoduchém namáhání (buď jen ohybem resp. tahem-tlakem nebo jen krutem).

V druhém případě vezmeme  $\psi = 90^\circ$ . Pak půjde o to, nalézt extrémní amplitudu obvodového napětí



Obr. 60

$$\sigma_{va} = \sqrt{[\sigma_a(1 + 2\cos 2\psi)]^2 + (4\tau_a \sin 2\psi)^2} \quad (20.7)$$

Lze dokázat, že pro  $\sigma_a > 2\tau_a$  je tento extrém nezávislý na  $\tau_a/\sigma_a$  a nastává v místech  $\psi = 0$ , resp.  $180^\circ$ . Přitom  $\sigma_{vmax} = 3\sigma_a$ . Je-li  $\sigma_a < 2\tau_a$ , platí rovnice

$$\sigma_{vmax} = 2\tau_a \frac{\sqrt{64\tau_a^4 - 28\tau_a^2\sigma_a^2 + 3\sigma_a^4}}{4\tau_a^2 - \sigma_a^2} \quad (20.8)$$

Odtud dostaneme po úpravě rovnici mezní čáry

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{\tau_a}{\tau_c^*}\right) - 4\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*}\right)^2 &= \\ &= \frac{\tau_a}{\tau_c^*} \sqrt{21\left(\frac{\tau_a}{\tau_c^*}\right)^4 - 63\left(\frac{\tau_a}{\tau_c^*}\right)^2\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*}\right)^2 + 12\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*}\right)^2} \end{aligned} \quad (20.9)$$

Tato rovnice platí jen pro  $\frac{\tau_a}{\tau_c^*} > \frac{2}{3}$  (obr. 60).

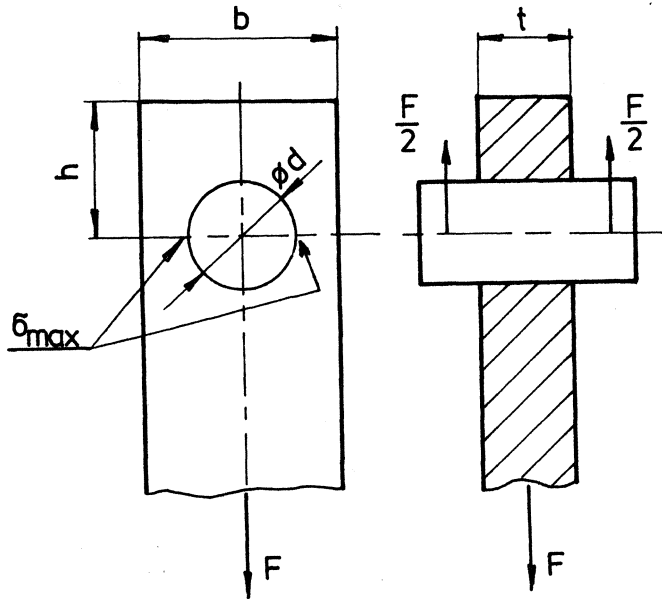
Je zřejmé, že fázový rozdíl  $\psi$  mění významně mezní čáru v diagramu na obr. 60. V 18. kapitole jsme uvedli, že tak významný vliv fázového úhlu pozorujeme i u hladkých tyčí ze šedé litiny. Je to způsobeno zřejmě heterogenní strukturou šedé litiny, která vytváří obdobu s hřídelem s příčnými dírami (pokud jde o vliv fázového úhlu  $\psi$ ).

Podrobněji o hřídelích s příčnou dírou pojednává Puchner (1951) a Höschl (1971).



## 21. Čepy a táhla, lisované spoje

Na obr. 61 je naznačeno spojení čepu a táhla v nejjednodušším tvaru (bez vylehčení profilu dříku táhla, bez sražení hran ap.).



Obr. 61

Je-li spojení čepu a táhla surné, lze určit tvarový činitel  $\alpha$  při jmenovitém napětí

$$\tilde{\sigma}_n = \frac{F}{(b-d)t} \quad (21.1)$$

empirickými vzorci

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,6 + 0,95 \frac{b}{d} & \text{pro } \frac{h}{b} &\geq 1, \\ \alpha &= 0,85 + 0,95 \frac{b}{d} & \text{pro } \frac{h}{b} &= 0,5. \end{aligned} \quad (21.2)$$

Snadno se přesvědčíme, že při stejném průřezu táhla ( $b \times t$ ) je maximální napětí v táhle největší, je-li  $d/b = 0,421$  až  $0,439$ . Tvarový činitel je pak  $\alpha = 2,76$  až  $3,11$ .

Vrubový činitel je však podle Heywooda přibližně

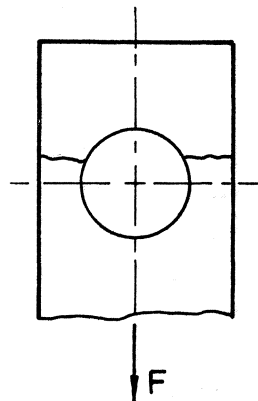
$$\beta = c(1 + 0,04 d) \alpha, \quad (21.3)$$

kde  $d$  [mm] značí průměr čepu,

$c = 2,7$  pro ocel resp.  $1,85$  pro hliníkové slitiny.

Je tedy  $\beta > \alpha$ , což znamená, že koncentrace napětí není v tomto případě jedinou významnou příčinou vrubového účinku (snížení jmenovitého napětí na mezi únavy). Dalším významným vlivem zde působí třecí koroze (tj. koroze, jejíž vznik je podmíněn působením smykového tření mezi dvěma vzájemně přitlačovanými povrchy). Proto také lom nevzniká v místech největší koncentrace napětí (obr. 61), ale poněkud výš v místech s nejvýraznější třecí korozí (obr. 62) a vzniká i po větším počtu cyklů než u materiálů bez koroze (u oceli např. i po  $10^8$  až  $10^9$  cyklech). Kromě toho se uplatňuje i nerovnoměrnost tlaku závislá na relativní tloušťce táhla (čím větší je tloušťka táhla  $t$ , tím menší je mez únavy, a tedy větší vrubový činitel). Vzorce (21.2) byly totiž zjišťovány na rovinných fotoelasticimetrických modelech, takže nezahrnují vliv ohybu čepu a jím způsobené prostorové napjatosti.

Mez únavy táhla se zvýší zhruba na dvojnásobek, bude-li čep do táhla zalisován s přesahem poloměřů. O únavě závěsných ok pojednal Běťák (1978).



Obr. 62

Třecí koroze je povrchovou vadou, takže vliv této koroze by bylo možno formálně zahrnout do součinitele jakosti povrchu  $\eta$ ; pak by zůstalo  $\beta \leq \alpha$ . Vzniku třecí koroze lze zabránit jen důsledným oddělením povrchů např. vložkou na způsob silentbloku nebo souvislým olejovým filmem (hydrodynamickým mazáním). Běžné prostředky antikorozní ochrany nepostačují.

Třecí koroze se uplatňuje rovněž u dynamicky namáhaných spojů hřídelů a nábojů (resp. u čepů zalisovaných do stěny) s přesahem poloměřů. Ve stykové ploše vzniká velký měrný tlak, zvýšený ještě poblíž okraje stykové plochy, kde hřídel z náboje (resp. čep ze stěny) vystupuje. Vlivem cyklického namáhání v tahu-tlaku, ohybu nebo krutu zde dochází k malým relativním posuvům mezi oběma povrchy, a tím i k třecí korozi. Přitom vzniká - zpravidla pod hranou náboje resp. stěny - i koncentrace napětí. Lom však vzniká v malé vzdálenosti od hrany směrem dovnitř, tedy nikoli tam, kde je největší koncentrace napětí, ale tam, kde se nejintenzivněji projevuje třecí koroze. Nalisováním náboje na hladký hřídel klesne mez únavy hřídele v ohybu zpravidla na polovinu. Jde-li však o náboj s tvrdým povrchem (cementovaný a kalený), může se mez únavy snížit dokonce až na čtvrtinu původní hodnoty.

Podrobněji pojednává o lisovaných spojích Höschl (1957) a Berniker (1968). Viz též O. Puchner - A. Kamenský, Strojírnoství 12 (1962) č. 11, s. 803-809.

## 22. Úpravy zvyšující mez únavy

Vzorec pro výpočet amplitudy  $\sigma_c^*$  na mezi únavy můžeme napsat podle (12.9), (15.5) a (16.1) ve tvaru

$$\sigma_c^* = \frac{\sigma_c \psi \nu_p}{\alpha f(l_c, \alpha, \rho)} \quad (22.1)$$

Budeme-li v tomto vzorci sledovat jednotlivé činitele, poznáme i způsoby, jak ovlivnit mez únavy. Můžeme např. volit materiál s větší základní mezí únavy  $\sigma_c$  popř. s větší prahovou kritickou délkou trhliny  $l_c$ . Tím zvětšíme poměr  $\sigma_c/f$ . Zpravidla roste  $\sigma_c$  zároveň s funkcí  $f$ , jestliže volíme vyšší mez pevnosti  $\sigma_{pe}$ . To znamená, že pevnější materiál je zároveň vrubově citlivější, takže hodnota  $\sigma_c^*$  roste pomaleji než  $\sigma_{pe}$ . To platí zvláště o součástech s velmi ostrými vruby, u kterých je použití vysoce pevných materiálů zcela neekonomické.

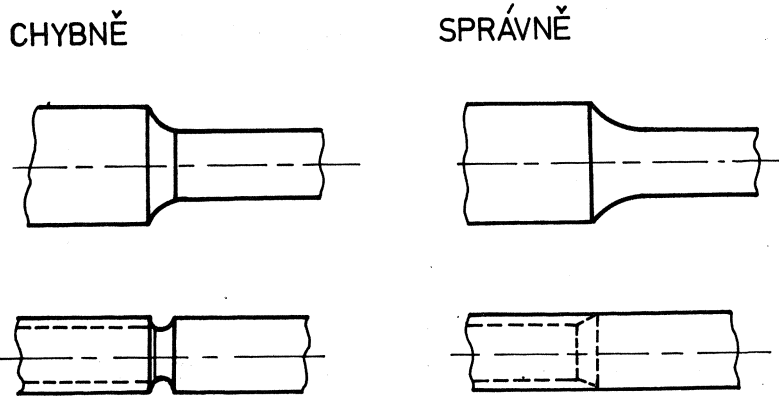
Součinitel vlivu velikosti obsahuje jako parametr nejen geometrickou velikost částí, ale také technologický faktor (stupeň homogenity a úroveň zbylého vlastního pnutí závisí na technologii a jsou jiné u malých a jiné u velkých částí). Mez únavy tedy můžeme zvýšit např. tak, že důkladnějším prokovením zlepšíme homogenitu a jemnozrnnost materiálu a že volíme takové tepelné zpracování, kterým se vytvoří příznivé tlakové pnutí v povrchové vrstvě.

Na vlastnostech povrchové vrstvy závisí součinitel  $\psi$ . Ten můžeme zvýšit jemnějším opracováním, avšak také speciálními povrchovými úpravami. O nich pojednáme zvláště v příští kapitole.

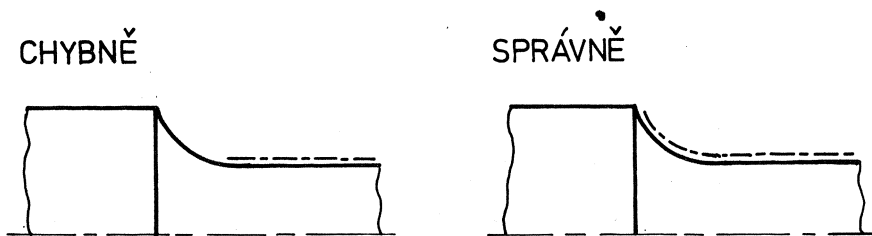
Konečně je možné změnit tvar součásti a tím ovlivnit tvarový činitel  $\alpha$  i gradient napětí  $\chi$  (změnou poloměru  $\rho$ ).

Je třeba si uvědomit, že jako vrub působí i malé povrchové vady, např. vyražená značka nebo číslo, nýt připevňující štítek, návarek způsobený bezděčným škrtnutím elektrodou při svařování. Tyto defekty mohou být neškodné v málo namáhaných místech, ale mohou vést k iniciaci lomu na exponovaných místech. Škodlivá může být např. stopa po soustružnickém

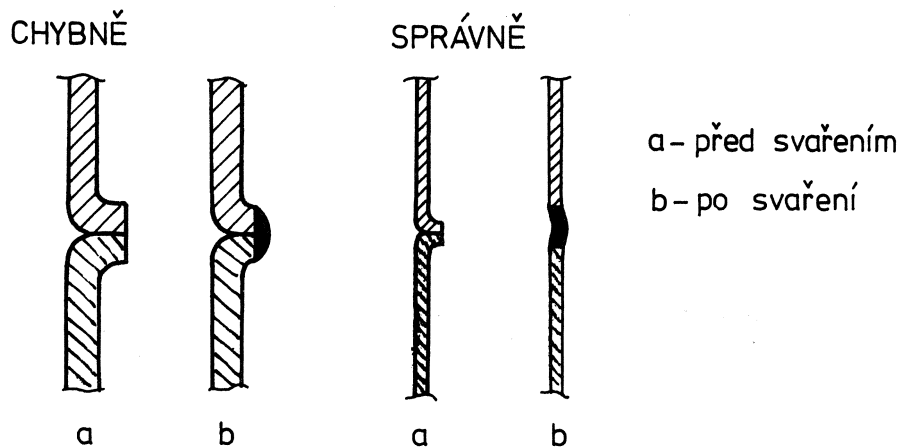
noži v místě osazení nebo podpíchnutí závitu (obr. 63)<sup>x)</sup>. Jako vrub působí i nehomogenita vzniklá nevhodným ukončením povrchové úpravy (povrchového kalení) v místech s koncentrací napětí (obr. 64).



Obr. 63



Obr. 64



Obr. 65

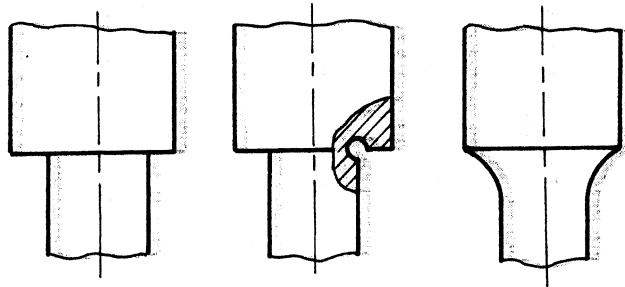
<sup>x)</sup> Z hlediska únavy materiálu jsou lepší válcované závity než řezané. Jemnější závity jsou výhodnější než hrubé.

Na obr. 65 je znázorněn postup při svařování tenkých plechů pro-  
vařením na tupo. Jsou-li plechy příliš tlusté, může tento postup vést  
k velké koncentraci napětí.

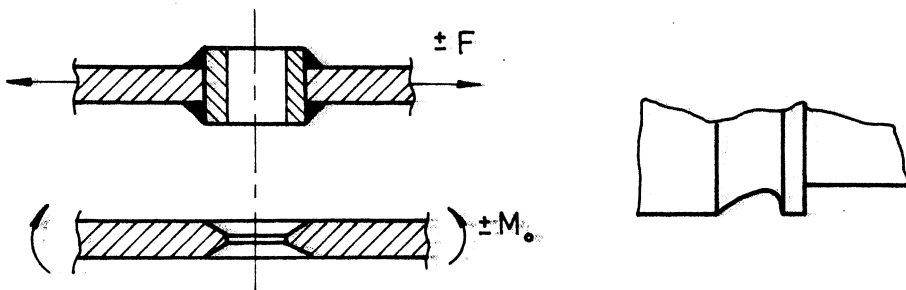
Obr. 66 ukazuje důležitost řádného zaoblení přechodů. Obr. 67 na-  
značuje příznivý vliv odlehčujících vrubů. Stejného principu se využí-  
vá u nákrůžku na obr. 68; úzký nákrůžek působí menší koncentraci napě-  
tí než široký.

CHYBNĚ

SPRÁVNĚ

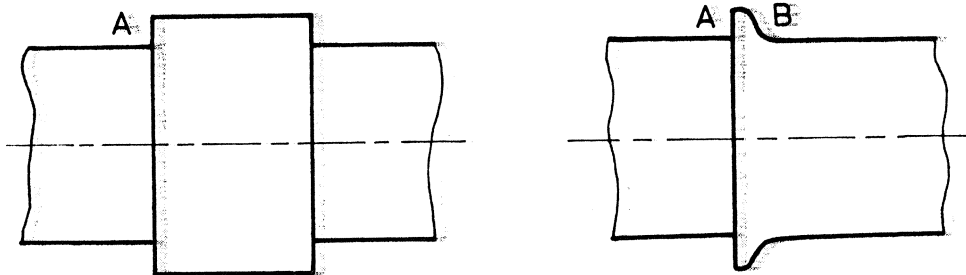


Obr. 66

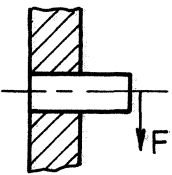
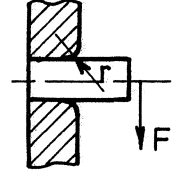
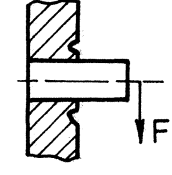
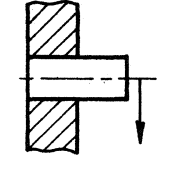
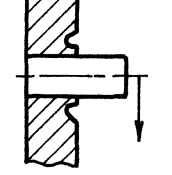


Obr. 67

VRUB „B“ ODLEHČUJE „A“



Obr. 68

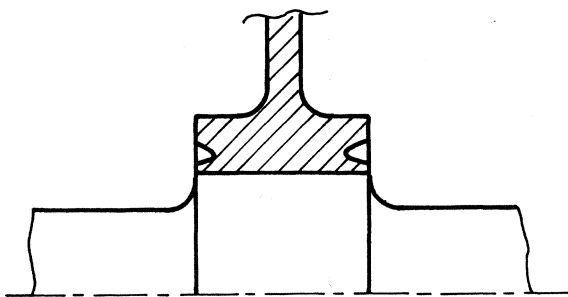
VZOREK	ÚPRAVA	$\beta^*$
	$\phi d = 14 \text{ mm}$	1,9
	$r = 1 \text{ mm}$ $r = 3 \text{ mm}$	1,8 1,6
	odlehčovací drážka	1,4
	válečkováno	1,1
	odlehčovací drážka válečkováno	1,0

Obr. 69

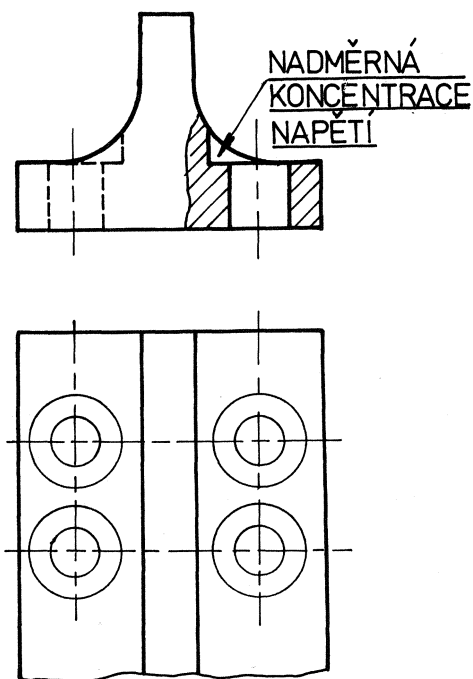
Na obr. 69 jsou znázorněny různé úpravy lisovaného spoje čepu se stěnou a jejich vliv na mez únavy ohybem za rotace  $\sigma_C^* = \sigma_{0,C} / \beta^*$  ( $\beta^*$  je celkový vrubový činitel zahrnující vliv zalisování čepu). Tabulka platí pro  $\phi d = 14 \text{ mm}$ , pevnost čepu 670 MPa, náboje 380 MPa, průměrný tlak ve stykové ploše po zalisování byl 210 MPa. Pro náboje nalisované na křídél lze doporučit nákrůžek podle obr. 70.

Navzdory tomu, že již více než sto let se technické zabývají výzkumem únavy materiálu a že téměř padesát let jsou známy a kvantitativně prozkoumány škodlivé účinky běžných tvarů vrubů způsobujících koncentraci napětí, setkáváme se stále s nesprávně navrženými konstrukcemi, jejichž životnost je zkrácena proti předpokladům zanedbáním známých zásad.

Často jde o drobné součástky spotřebního zboží (např. ocelové spony užívané ke spojování trubíc a hadic u některých typů vysavačů), někdy však jde o závažné závady (např. nevhodné otvory umístěné v exponovaných místech automobilového rámu). Únavové lomy vznikají i u nadměrně namáhaných patek, jimiž jsou uchyceny relativně pružné konstrukce; . jako příklad uvedeme ještě lom vycházející z nevhodného zapuštění šroubů (obr. 71). Ostré hrany otvorů pro hlavy šroubů mohou být příčinou vzniku únavového lomu.



Obr. 70



Obr. 71

### 23. Povrchové úpravy

Zmínili jsme se již o tom, jak příznivě působí broušení povrchu v místech koncentrace napětí; k eliminaci vlivu drsnosti povrchu se zkušební tyče dokonce lapují. Existují však ještě jiné povrchové úpravy, které mohou pronikavě ovlivnit mez únavy resp. životnost části.

Příznivě působí takové úpravy, které jsou spojeny se vznikem tlakového předpětí a popř. se zpevněním povrchové vrstvy. Nepříznivě působí úpravy, jež narušují - ať mechanicky, chemicky nebo elektrochemicky - odolnost povrchové vrstvy proti nukleaci trhliny.

Do první skupiny patří válečkování, prokování povrchu za studena, kuličkování, povrchové kalení popř. cementování a kalení (nesmí však vzniknout při kalení žádná povrchová trhlina a zakalená vrstva musí být homogenní) nebo nitridace. Do druhé skupiny patří galvanické pokovování, šopování ap. Patří sem také koroze, o které jsme pojednali zvlášť.

Příznivý vliv úprav první skupiny se projeví relativně tím více, čím je větší gradient napětí. To nyní krátce vysvětlíme. Je-li tyč homogenní, může se z povrchu šířit nukleoovaná trhlina teprve tehdy, překročí-li její délka hodnotu  $l_c$ , přičemž podle (12.7)

$$1,12 \sigma_a \sqrt{\pi l_c} = K_{apz}. \quad (23.1)$$

Je-li trhlina o stejné délce pod povrchem, bude

$$K_{\tau a} = \sigma_a \sqrt{\pi l_c / 2} = K_{apz} / 1,58 \quad (23.2)$$

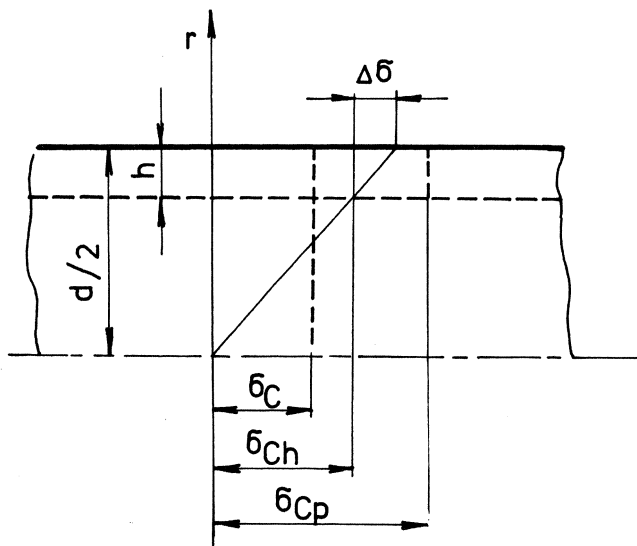
To znamená, že amplituda napětí by musila vzrůst asi o 58 %, aby nastala stejná pravděpodobnost šíření této podpovrchové trhliny. Jinak řečeno, základní mez únavy materiálu ( $\sigma_c$ ) je na povrchu menší než uvnitř ( $\sigma_{ch}$ ). Kdyby se nám podařilo nějak zabránit vzniku trhlin na povrchu, byla by mez únavy  $\sigma_{ch} > \sigma_c$  a trhlina by vznikaly uvnitř.<sup>x)</sup>

Způsob, jak zabránit vzniku trhlin na povrchu spočívá ve vytvoření tlakového předpětí v povrchové vrstvě a ve zpevnění povrchové vrstvy. Obojí vzniká při povrchových úpravách první skupiny. Zároveň však vzniká i nehomogenita, takže poměr  $\sigma_{ch} / \sigma_c$  bude menší než těch "teoretických" 1,58. Povrchová vrstva o idealizované tloušťce  $h$

x) Indexem "h" vyznačujeme, že jde o hodnotu vztaženou k místu pod zpevněnou a přechodovou vrstvou v hloubce  $h$  (obr. 72).



(obr. 72) bude mít mez únavy  $\sigma_{cp}$ . Kdyby tyč nebyla zpevněna, vznikl by lom z povrchové trhliny při ohybovém napětí  $\sigma_a = \sigma_c$  (předpokládáme, že jde o rozměrnější tyč, takže  $\sigma_{0,c} \approx \sigma_c$ ).



Obr. 72

Pokud je u zpevněné tyče  $\sigma_{cp} > \sigma_{ch} + \Delta\sigma$ , vznikne lom pod povrchem v hloubce  $h$  při napětí  $\sigma_a = \sigma_{ch} + \Delta\sigma$ . Poměrné zvýšení meze únavy povrchovým zpevněním tedy bude

$$H = \frac{\sigma_{ch} + \Delta\sigma}{\sigma_c} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_c} \left( 1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{ch}} \right) \quad (23.3)$$

Při ohybu hladké tyče podle obr. 72 je  $\Delta\sigma / \sigma_{ch} = -h / (d/2 - h) \approx (2h/d) + (2h/d)^2$ , takže

$$H = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_c} \left[ 1 + \left( \frac{2h}{d} \right) + \left( \frac{2h}{d} \right)^2 \right] \quad (23.4)$$

Podle Linharta je skutečně (podle výsledků zkoušek SVÚM)

$$H = \alpha \left[ 1 + \left( \frac{2h}{d} \right) + \left( \frac{2h}{d} \right)^2 \right], \quad (23.5)$$

kde  $h$  je celková tloušťka zpevněné vrstvy včetně přechodového pásma,  $h < 0,1 d$ ,

$d$  je průměr hřídele (zkušební vzorku) a  
 $\alpha = 1,1$  až  $1,18$  pro část nitridovanou,  
 $1,22$  až  $1,3$  pro část cementovanou a kalenou,  
 $1,26$  pro část povrchově zakalenou. <sup>x)</sup>

Hodnota  $H$  je poměr meze únavy části povrchově zpevněné (tvrzené) a nezpevněné (netvrzené).

Zavedeme-li do výpočtu poměrný gradient napětí  $\chi$  podle (1.13), bude

$$\Delta \sigma = \chi \cdot \sigma_{\max} \cdot h \quad (23.6)$$

Zároveň  $\sigma_{\max} = \sigma_{Ch} + \Delta \sigma$ , takže

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma_{Ch}} = \frac{\chi h}{1 - \chi h} \quad (23.7)$$

U nevytvrzené tyče s vrubem bude mez únavy

$$\sigma_c^* = \frac{\sigma_c}{\beta} \gamma_v \approx \frac{\sigma_c}{\beta} \quad (23.8)$$

a u vytvrzené tyče bude buď

$$\sigma_{c1}^* = \frac{\sigma_{cp}}{\alpha} \quad (23.9)$$

vznikne-li lom z povrchové trhliny nebo

$$\sigma_{c2}^* = (\sigma_{Ch} + \Delta \sigma) / \alpha \quad (23.10)$$

vznikne-li zárodek trhliny pod povrchovou vrstvou. V rovnici (23.9) se uplatní prakticky celá špička napětí, neboť vrubová citlivost zpevněné vrstvy je vysoká ( $\alpha/\beta \rightarrow 1$ ). Proto je ve jmenovateli na pravé straně rovnice tvarový činitel  $\alpha$ . Vrubový činitel  $\beta$  v rovnici (23.8) se vztahuje k nezpevněnému materiálu. Pro poměrný růst meze únavy povrchovým vytvrzením tedy máme buď

---

x) Ze srovnání vztahů (23.4) a (23.5) je zřejmé, že  $\alpha$  má význam poměru  $\sigma_{Ch} / \sigma_c$ .

$$H_1 = \frac{\sigma_{cp}}{\alpha} \frac{\beta}{\sigma_c} = \frac{\sigma_{cp}}{\sigma_c} \frac{\beta}{\alpha} \quad (23.11)$$

nebo (vznikne-li lom pod povrchem)

$$H_2 = \frac{\sigma_{ch} + \Delta\sigma}{\alpha} \frac{\beta}{\sigma_c} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_c} \frac{\psi\beta}{\alpha} \quad (23.12)$$

Užitím (23.7) dostaneme

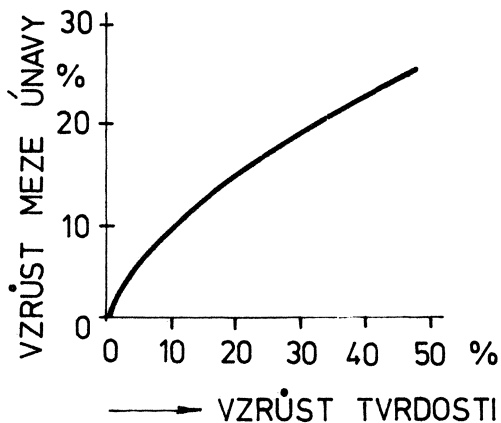
$$\psi = 1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{ch}} = \frac{1}{1 - X_h} \quad (23.13)$$

Pak

$$H = \min(H_1, H_2). \quad (23.14)$$

Poměr  $H$  je menší z obou hodnot  $H_1$ ,  $H_2$ . Uplatní-li se hodnota  $H_1$ , vzniká lom z povrchu; v opačném případě vznikne pod povrchem, což se na lomu projeví jako tzv. rybí oko.

Poměr  $\sigma_{cp}/\sigma_c$  můžeme odhadnout podle poměrného zvýšení tvrdosti povrchovou úpravou. Nejde však o přímou úměru, protože kromě zpevnění se uplatňuje ještě vyvolané vlastní pnutí a různé metalurgické vlivy.



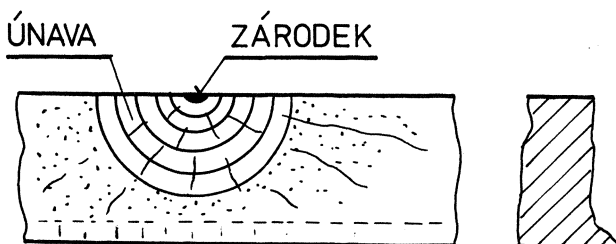
Obr. 73

Uvedli jsme již, že válečkovaní má podstatný vliv na zvýšení meze únavy u lisovaných spojů (srov. s obr. 69). Na obr. 73 je znázorněna závislost poměrného zvýšení meze únavy lisovaného spoje válečkováním na poměrném vzrůstu tvrdosti povrchu válečkovaného hřídele. Po válečkování se hřídel přebroušuje. Zahřívát se však již nesmí, neboť už při ohřevu asi na 200 °C se příznivý vliv válečkování na mez únavy lisovaných spojů ztrácí.

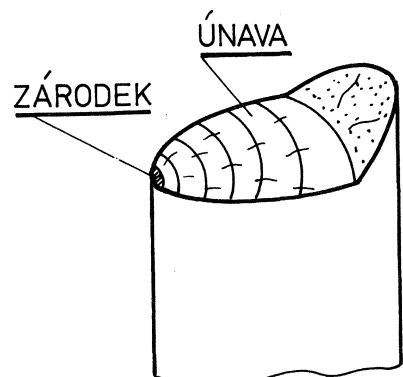
## 24. Fraktografie únavového lomu

Zárodek únavové trhliny vzniká nejčastěji extrusemi a intrusemi na povrchu, nejčastěji v místech povrchových nerovností a nehomogenit. Orientace zárodečné trhliny je závislá nejen na napjatosti, ale také na mikrostruktuře materiálu, tj. na poloze skluzových rovin a na možnostech pohybu a vytváření dislokací v nehomogenní mikrostruktuře. Jakmile se však trhlina začne šířit, postupuje vždy tak, aby přírůstek lomové plochy byl kolmý k největšímu hlavnímu napětí v daném místě. Jen výjimečně se tato změna směru šíření opoždí a lom se šíří dál podél skluzových rovin zhruba ve směru největších smykových napětí (např. u některých slitin niklu). Typický únavový lom se šíří kolmo k největšímu hlavnímu napětí, a to transkrystalicky. Jen za zvýšených teplot se šíří po hranicích zrn (stejně jako u creepu).

Lomová plocha únavového lomu je hladká, lasturovitá. Někdy jsou na ní patrné drobné "schůdky" vzniklé dodatečným spojením samostatně se šířících sousedních trhlinek (drobné čáry ve směru šíření) i čáry k nim kolmé, vzniklé odstupňovanou změnou jakosti povrchu např. vlivem pracovních přestávek. Tato změna vzniká postupným oksyločením lomu nebo i jinými chemickými vlivy. Je-li lomová plocha tak velká, že součinitel intenzity napětí vzroste na kritickou hodnotu, rozlomí se součást náhle; na lomové ploše tohoto zbytku průřezu bude patrná větší zrnitost. Na okraji může u houževnatých materiálů vzniknout ještě smykový lom ve tvaru hladkého olemování s plochou odkloněnou asi o  $45^\circ$  od hlavního směru. Tyto fáze jsou zachyceny na obr. 74 a 75.<sup>x)</sup>

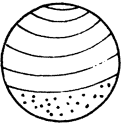
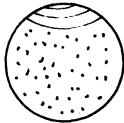
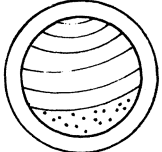
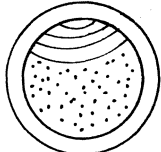
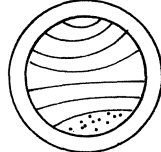
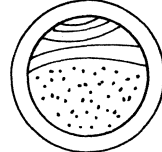
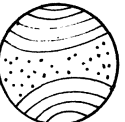
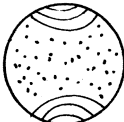
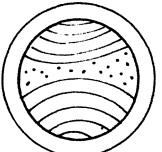
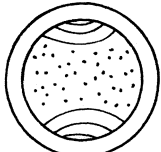
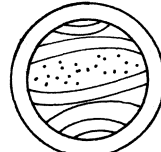
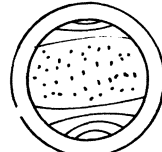
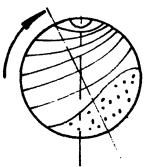
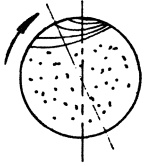
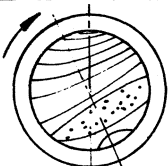
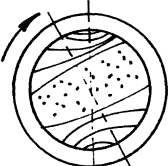
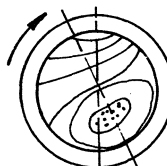
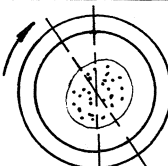


Obr. 74



Obr. 75

<sup>x)</sup> Na obr. 75 chybí smykový lom, což často bývá.

SOUČÁST	HLADKÝ HŘÍDEL		MĚLKÝ VRUB		OSTRÝ VRUB	
	MALÉ	VELKÉ	MALÉ	VELKÉ	MALÉ	VELKÉ
MÍJIVÝ OHYB						
STŘÍDAVÝ OHYB						
OHYB ZA ROTACE						

Poměr únavové plochy lomu ke zbytku lomové plochy dává určitou představu o tom, jak namáhání převýšilo mez únavy, tj. jaké bylo přetížení. Při ohybu za rotace lze z lomové plochy vyčíst i smysl rotace; je to možné proto, že vlivem cyklického namáhání vzniká určitá hysterese (což souvisí s tvarem cyklické křivky napětí - přetvoření) a že trhlina se šíří postupně, takže při otáčení hřídele se mění součinitel intenzity napětí podél kořene trhliny; v místě náběhu trhliny do roviny ohybového momentu je menší než když trhlina tuto rovinu opouští. Proto je na náběhové straně rychlost šíření trhliny menší než na opačné straně. Tak vzniká stáčení osy souměrnosti lomové plochy proti rovině ohybového momentu, a to proti smyslu otáčení hřídele (obr. 76).

## 25. Statistické hodnocení pevnosti a únavy materiálu

Je známo, že pevnost nějaké soustavy závisí na pevnosti nejslabšího článku. Skutečná statická pevnost materiálu je vždy řádově nižší než její teoretická hodnota vypočtená z kohezivních atomových sil. Rozdíl si lze vysvětlit přítomností materiálových vad (dislokací, vakancí, intersticiálních atomů, nedokonalých mezikrystalických vazeb, mikrotrhlinek, vměstků ap.). Budeme-li předpokládat náhodný výskyt těchto vad s náhodně rozdělenou závažností, dospějeme užitím počtu pravděpodobnosti k závěru, že pravděpodobnost  $S$  lomu při napětí  $\sigma$  je dána vztahem <sup>x)</sup>

$$S = 1 - e^{-V \left( \frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_0} \right)^m} \quad (25.1)$$

Zde  $e$  je základ přirozených logaritmů,  
 $V$  objem materiálu podrobenému napětí  $\sigma$  ( $\sigma \geq \sigma_p$ ),  
 $\sigma_p$  je prahová hodnota napětí, pod kterou lom nikdy nenastane,  
 $\sigma_0$  je pevnost "bezvadného" materiálu,  
 $m$  je relativní výskyt vad v jednotce objemu.

Je-li  $\sigma = \sigma_p$ , je  $S = 0$  (lom nenastává, pokud není  $\sigma > \sigma_p$ ).

Je-li  $\sigma \rightarrow \infty$ , je  $S = 1$  (při velkém napětí vzniká lom s určitostí).

Pravděpodobnost poruchy daného materiálu bude stejná, bude-li stejný součin  $V(\sigma - \sigma_p)^m$ . Zanedbáme-li  $\sigma_p$ , bude

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \left( \frac{V_1}{V} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (25.2)$$

<sup>x)</sup> W. Weibull (1939), N. N. Afanasjev (1953).

To je zákon vyjadřující vliv velikosti na pevnost staticky namáhané části. Pro vznik únavového lomu je důležitá jen povrchová vrstva o tloušťce  $h$ . Protože pak  $V = \pi d h l$ ,  $V_1 = \pi d_1 h l$ , bude

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \left( \frac{d_1}{d} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (25.3)$$

Pro ocele je  $\frac{1}{m} = 0,08$  až  $0,13$ . Tento vzorec jsme již jednou uvedli [rov. (15.3)] ; vystihuje vliv velikosti.

Afanasjev a Freudenthál zahrnuli do výpočtu i okolnost, že porucha nastává postupně za opakovaného namáhání. To vede k teoretické závislosti

$$\sigma_a = \sigma_{pt} - k \log N, \quad (25.4)$$

kde  $\sigma_a$  je amplituda zatěžovacího cyklu,  
 $\sigma_{pt}$  statická pevnost ( $\sigma = \sigma_{pt}$  pro  $N = 1$ ),  
 $k$  konstanta.

Rovnice (25.8) přibližně popisuje šikmou větev Wöhlerovy křivky.

Pevnost i mez únavy se zjišťují na vybraných vzorcích. Věrohodnost výsledků zkoušek je třeba statisticky hodnotit. Určujeme-li např. Wöhlerovu křivku jako "střední", tj. takovou, že přibližně odpovídá 50 % porušených částí při dané amplitudě namáhání a požadované životnosti, musíme si být vědomi toho, že na hranici výpočtové únosnosti budeme mít polovinu výrobků s kratší životností než jakou předpokládáme. Často si klademe požadavek, aby procento poruch nepřesáhlo danou, samozřejmě velmi nízkou hranici. Pak nás nezajímá, jakou má daný soubor vzorků střední hodnotu pevnosti, ale naopak, jakou má nejnížší pevnost. Dostáváme tak statistiku extrémních hodnot výběrových souborů.

Uvedeme příklad. Chceme zjišťovat pevnost šroubů, kterých máme na skladě např. 20 000 kusů. Jejich pevnost bude mít zhruba normální (Gaussovo) rozdělení

$$f(\sigma_{pt}) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{pt} - \bar{\sigma}_{pt}}{s} \right)^2 \right], \quad (25.5)$$

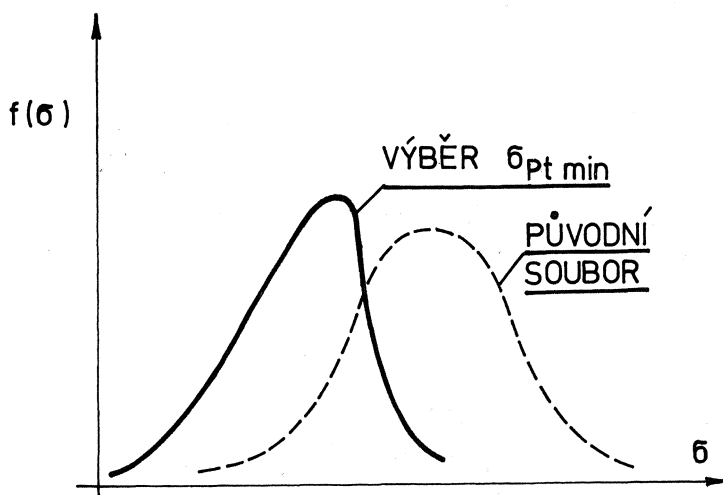
kde  $s$  je směrodatná odchylka,  
 $\bar{\sigma}_{pt}$  je střední hodnota pevnosti,  
 $f(\sigma_{pt})$  je hustota pravděpodobnosti.

To znamená, že pravděpodobnost výskytu vzorků s pevností  $\sigma_{pt}$  až

$\sigma_{pt} + \Delta\sigma$  je  $\Delta F = f(\sigma_{pt})\Delta\sigma$ , je-li  $\Delta\sigma$  malé. Jinak - přesněji - by tato pravděpodobnost byla

$$\Delta F = \int_{\sigma_{pt}}^{\sigma_{pt} + \Delta\sigma} f(\sigma) d\sigma. \quad (25.6)$$

Šrouby nyní rozdělíme do 200 souborů po 100 kusech a v každém z těchto souborů zjistíme minimální pevnost. Takto vybraný soubor 200 vzorků s minimální pevností už nebude mít normální rozdělení, jak je zřejmé z obr. 77. Rozdělení nebude ani souměrné, levá část bude protáhlejší než pravá. Tvar této křivky rozdělení bude záviset na velikosti souborů, z nichž  $\sigma_{pt \min}$  vybíráme. Čím větší jsou tyto soubory, tím menší je střední hodnota  $\sigma_{pt \min}$  a tím menší má rozptyl (tím užší je tvar křivky).



Obr. 77

Podobné povahy je i Weibullova křivka. Znázorňuje hustotu pravděpodobnosti, s jakou je rozdělena životnost souboru stejných zkušebních vzorků (podle teorie nejslabšího článku)

$$f(N) = \frac{b}{N_a - N_0} x^{b-1} e^{-x^b}, \quad (25.7)$$

kde

$$x = \frac{N - N_0}{N_a - N_0},$$



$N_0$  je prahová životnost,

$N_a$  charakteristická životnost pro 36,8 % neporušených vzorků z dané populace ( $e^{-1} = 0,368$ ),

$b$  parametr (konstanta).

Je-li  $b = 1$ , vyjde exponenciální rozdělení

$$f(N) = \frac{1}{N_a - N_0} e^{-x} \quad (25.8)$$

Pro  $b = 2$  máme

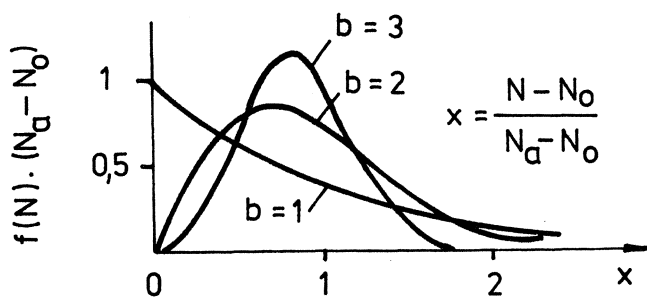
$$f(N) = \frac{2}{N_a - N_0} \frac{x}{e^{x^2}}, \quad (25.9)$$

což je Rayleighovo rozdělení (je užitečné při studiu akustické únavy).

Konečně pro  $b = 3,57$  vyjde

$$f(N) = \frac{3,57}{N_a - N_0} x^{2,57} \cdot e^{-x^{3,57}}, \quad (25.10)$$

což je velmi přibližně normální rozdělení. Příklady Weibullova rozdělení jsou na obr. 78.



Obr. 78

Kumulativní funkce  $F(N) = \int_0^N f(N) dN$  udává procento porušených vzorků po  $N$  cyklech zatížení

$$F(N) = 1 - e^{-x^b} = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{N - N_0}{N_a - N_0} \right)^b \right] \quad (25.11)$$

Tato rovnice je analogická se vztahem (25.1). Po dvojnásobném logaritmování dostaneme

$$\log \log \left[ \frac{1}{1-F(N)} \right] = b \log (N - N_0) - 0,362216 - b \log (N_a - N_0) \quad (25.12)$$

To znamená, že zakreslením závislosti

$$\log \left[ \frac{1}{1-F(N)} \right] = \text{funkce } (N - N_0)$$

do logaritmického papíru (log - log) dostaneme přímku, z jejíž polohy lze určit  $b$ ,  $N_0$  a  $N_a$ . Parametr  $b$  je směrnicí této přímky. Weibullovo rozdělení je tříparametrické (na rozdíl od Gaussova, které je určeno jen dvěma parametry).

## 26. Příklady

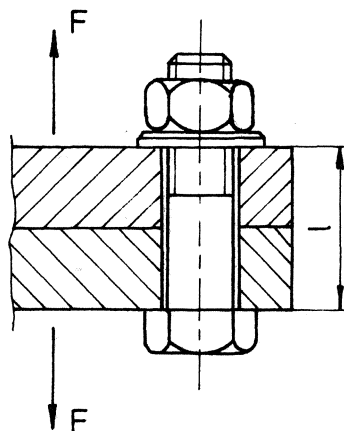
### Příklad 1

#### Pevnost předepjatého šroubového spoje

Ocelový šroub M20 rep. příruby na obr. 79 mají konstanty poddajnosti  $c_1 = 1,2 \cdot 10^{-6}$  mm/N resp.  $c_2 = 0,12 \cdot 10^{-6}$  mm/N, takže vlivem předpětí  $Q$  [N] vzniká prodloužení šroubu  $c_1 Q$  a stlačení přírub  $c_2 Q = \delta$ . Určete míru bezpečnosti spoje při namáhání míjivou silou  $F = 30\,000$  N a při předpětí v mezích  $30\,000$  N  $< Q < 60\,000$  N. Pevnost šroubu je  $\sigma_{pe} = 500$  MPa.

#### Řešení

Pracovní diagram šroubového spoje je zakreslen na obr. 80. Na osu úseček se vynáší změna  $\Delta l$  délky  $l$  spoje, na osu poradič tahová síla ve šroubu  $F_s$  resp. tlaková síla v přírubách  $F_p$ . Je-li  $\Delta l = 0$ , je  $F_s = F_p = Q$ . Při prodloužení  $\Delta l = \delta \leq s$  vzroste síla ve šroubu o  $\Delta F_s = F_1 = \delta / c_1$  a klesne síla v přírubách o  $\Delta F_p = F_2 = \delta / c_2$ . Zřejmě  $\tan \alpha / \tan \beta = c_2 / c_1$ . Z podmínky rovnováhy listu příruby dostaneme  $F = F_1 + F_2$ . Proto  $F_1 = F / (1 + \frac{c_1}{c_2})$ ,  $F_2 = F \frac{c_1}{c_2} / (1 + \frac{c_1}{c_2})$ .



Obr. 79

Jestliže  $\delta = s$ , klesne síla v přírubách k nule, tj. bude  $F_2 = Q$ . Další přírůstek síly  $F$  musí zachytit už jen šroub, takže pro  $\delta > s$  bude  $F_1 = F - Q$ ,  $F_2 = Q$ .

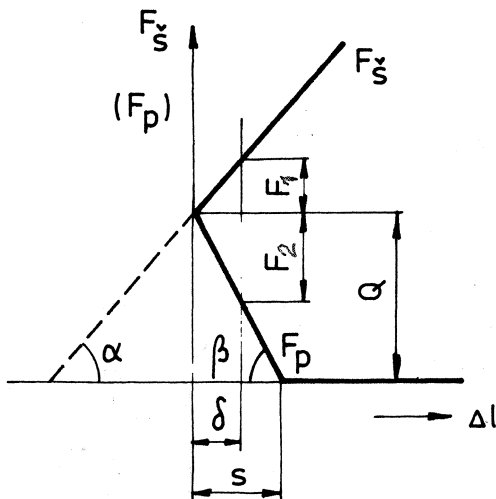
Zavedeme průživost spoje  $b$  definicí

$$b = 1 + \frac{c_1}{c_2} \quad (26.1)$$

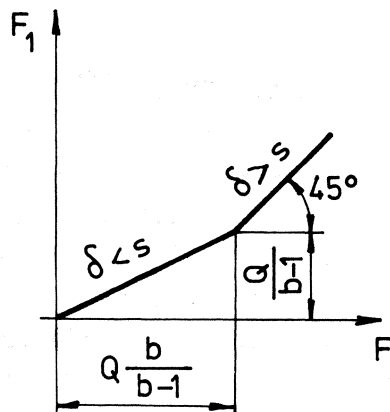
Pak budeme mít

$$F_1 = \frac{1}{b} F, \quad F_2 = \frac{b-1}{b} F \quad \text{pro } \delta \leq s, \quad (26.2)$$

$$F_1 = F - Q, \quad F_2 = Q \quad \text{pro } \delta > s. \quad (26.3)$$



Obr. 80



Obr. 81

Závislost přírůstku  $F_1$  síly ve šroubu na vnější síle  $F$  je podle těchto vztahů znázorněna na obr. 81. Zlom čáry na tomto obrázku odpovídá případu  $\delta = s$ .

Mez únavy ve střídavém tahu-tlaku (bez zřetele k ohybu, který může vzniknout nerovnoběžností dosedacích ploch hlavy a matky šroubu) lze odhadnout podle Heywoodova empirického vzorce

$$\sigma_c^* = 0,15 \sigma_{Pt} \frac{25 + d}{25 + 3d}, \quad (26.4)$$

kde  $d$  [mm] je průměr šroubu v milimetrech.

Bude tedy

$$\sigma_c^* = 0,15 \cdot 500 \frac{25 + 20}{25 + 3 \cdot 20} \doteq 39,7 \text{ MPa.} \quad (26.5)$$

U šroubů se zpravidla zanedbává vliv střední složky napětí na mez únavy [ tj. bere se  $k \rightarrow \infty$  v rovnici (17.1) ]. Pak stačí uvažovat jen amplitudu jmenovitého napětí, která je

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \frac{F}{b S_j} = \frac{F}{2 \cdot 11 \cdot 220} = \frac{F}{4840} \quad \text{pro } F \leq 1,1 Q, \quad (26.6)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \frac{F-Q}{S_j} = \frac{F-Q}{2 \cdot 220} = \frac{F-Q}{440} \quad \text{pro } F > 1,1 Q. \quad (26.7)$$

Protože zkoumáme, zda může dojít k poruše vlivem změny provozní síly  $F$  při nezměněném předpětí šroubu  $Q$ , ztotožníme parametr  $\lambda$  (19. kapitola) se silou  $F / 30\,000$ . Bude tedy  $\lambda = 1$  při provozní síle  $F = 30\,000 \text{ N}$ . Amplituda napětí ve šroubu přitom bude  $\sigma_{a0} = 30\,000 / 4840 = 6,198 \text{ MPa}$  (pro  $F \leq 1,1 Q$ , tj. pro  $Q \geq 27\,273 \text{ N}$ ). Podle definice (19.2)

$$\psi_1(\lambda) = \lambda \quad \text{pro } F \leq 1,1 Q, \quad (26.8)$$

$$\psi_1(\lambda) = \frac{30\,000 \lambda - Q}{6,198 \cdot 440} \doteq 11 \lambda - Q / 2727 \quad \text{pro } F > 1,1 Q. \quad (26.9)$$

Na mezi únavy bude  $\psi_1(\lambda) \sigma_{a0} = \sigma_c^*$ , takže  $\psi_1(\lambda) = \sigma_c^* / \sigma_{a0} = 39,7 / 6,198 \doteq 6,405$ . Protože na mezi únavy bude vždy  $F > 1,1 Q$ , jak se můžeme dodatečně přesvědčit, použijeme rovnice (26.9).<sup>x)</sup>

Bude

$$11\lambda - Q / 2727 = 6,405$$

a odtud vyjde míra bezpečnosti jako lineární funkce předpětí  $Q$  (vzorec platí pro  $Q > 27\,273 \text{ N}$ )

<sup>x)</sup> Test správnosti tohoto předpokladu je tvrzení, že  $30\,000 k > 1,1 Q$ , tj.  $27\,272,7 k > Q$ . Hodnoty  $k$  jsou v tabulce na konci příkladu.

$$\lambda = \frac{6,405 + Q / 2727}{11} = k \quad (26.10)$$

Horní napětí ve šroubu při namáhání na mezi únavy

$$\sigma_h^* = \frac{Q}{S_j} + 2 \sigma_c^* = \frac{Q}{220} + 79,4 \quad (26.11)$$

Je rozumné požadovat, aby toto napětí nepřekročilo mez kluzu, tj. asi 350 MPa. Pak  $Q \leq 60\,000$  N.

Pro míru bezpečnosti  $k$  dostaneme tyto hodnoty:

$Q$ [N]	$3 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$
$k$	1,58	1,92	2,25	2,58

Je zřejmé, že vlivem relaxace roste nebezpečí únavového lomu. Je to způsobeno tím, že při malém předpětí spoje dojde při přetížení záhy k úplnému odlehčení přírub, což má za následek vzrůst směrnice  $\alpha_{F_1} / dF$  z hodnoty  $1/b$  na jednotkovou hodnotu (obr. 81). Předpětí má být proto co největší (v tomto případě 60 000 N).

## Příklad 2

### Torzní vibrace klikového hřídele

Klikový hřídel má experimentálně zjištěnou mez únavy ve střídavém ohybu  $\sigma_c^* = 80$  MPa, ve střídavém krutu  $\tau_c^* = 60$  MPa. K lomům dochází v obou případech v přechodu klikového čepu do ramene. Jmenovité napětí se vztahuje k průřezu klikového čepu a má za předpokládaných provozních podmínek tyto hodnoty:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 25 \text{ MPa,} & \tau_a &= 14 \text{ MPa,} \\ \sigma_m &= 15 \text{ MPa,} & \tau_m &= 18 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Oč smí vzrůst amplituda smykových napětí účinkem torzních vibrací, nemá-li míra bezpečnosti klesnout pod hodnotu 1,5 ?

### Řešení

Nesouměrný cyklus přepočteme na souměrný tím, že amplitudu zvětšíme asi o 0,05 střední hodnoty napětí [obdobně k rovnici (18.5)] .

Budeme tedy mít tyto ekvivalentní hodnoty čistě střídavého namáhání:

$$\sigma_a = 25 + 0,05 \cdot 15 = 25,75 \text{ MPa,}$$

$$\tau_a = 14 + 0,05 \cdot 18 = 14,9 \text{ MPa.}$$

Pro amplitudu  $\tau_a + x$  a míru bezpečnosti  $k$  dostaneme na mezi únavy podle (18.3)

$$k^2 \left( \frac{14,9 + x}{60} \right)^2 + k^2 \left( \frac{25,75}{80} \right)^2 \left( \frac{80}{60} - 1 \right) + k \left( \frac{25,75}{80} \right) \left( 2 - \frac{80}{60} \right) = 1.$$

Odtud po úpravě

$$k^2 [(14,9 + x)^2 + 124,32] + 772,5 k - 3600 = 0.$$

Je-li  $x = 0$ , dostaneme míru bezpečnosti hřídele bez uvažování torzních vibrací. Vyjde  $k \doteq 2,3$ . Pro  $k = 1,5$  vyjde pak přípustná velikost přírůstku torzních vibrací, tj. namáhání  $x = \Delta \tau_a = 16,1$  MPa. Předpokládali jsme, že při přechodu k meznímu stavu vzrostou všechna napětí úměrně témuž parametru, tj. jejich vzájemný poměr se zachová.

### Příklad 3

#### Mez únavy tyče ze šedé litiny

Vrubovaná tyč ze šedé litiny o pevnosti  $\sigma_p^* = 220$  MPa má mez únavy ve střídavém tahu-tlaku  $\sigma_c^* = 20$  MPa. Jakou lze předpokládat mez únavy při míjivém tahu ?

#### Řešení

Podle (17.4) dostaneme pro  $x = \sigma_a / \sigma_p^* = \sigma_m / \sigma_p^*$

$$\frac{\sigma_p^*}{\sigma_c^*} x = \frac{1-x}{1+x} \quad (26.12)$$

Dosazením  $\sigma_p^* / \sigma_c^* = 220/20 = 11$  a výpočtem dostaneme  $x = 0,077787$ , takže  $\sigma_{h,c} = 2 \sigma_a = 2x \sigma_p^* = 34,22$  MPa.

#### Příklad 4

##### Kрут osazeného hřídele

Hřídel  $\phi D = 48$  mm je zeslaben osazením na  $\phi d = 40$  mm s poloměrem zaoblení  $\rho = 2$  mm. Je vyroben z oceli o mezi pevnosti  $\sigma_{pe} = 700$  MPa, mez kluzu je  $\sigma_{0,2} = 560$  MPa. Jaká je míra bezpečnosti při namáhání míjivým krutem při jmenovitém napětí  $\tau_n = 60$  MPa ?

##### Řešení

Nejprve odhadneme mez únavy hladké tyče  $\phi 40$  mm v krutu. Pro  $\phi 10$  mm je  $\tau_c(d_0) \doteq 0,25 \sigma_{pe} = 0,25 \cdot 700 = 175$  MPa. Podle (15.2) bude

$$v_p = 1 - \sqrt{0,02 \log \frac{40}{10}} \doteq 0,89 \quad (26.13)$$

a poměr příslušných činitelů  $v_g$  podle (15.4) bude pro  $C = 0,004$

$$\frac{v_g(d)}{v_g(d_0)} = \frac{1 + \sqrt{\frac{2c}{d}}}{1 + \sqrt{\frac{2c}{d_0}}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 0,004}{40}}}{1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 0,004}{10}}} \doteq 0,986. \quad (26.14)$$

Mez únavy v krutu tyče  $\phi 40$  mm tedy bude

$$\tau_c(d) = \tau_c(d_0) \cdot v_p \cdot \frac{v_g(d)}{v_g(d_0)} = 175 \cdot 0,89 \cdot 0,986 \doteq 154 \text{ MPa.}$$

Nyní vypočteme vrubový činitel. Tvarový činitel je  $\alpha = 1,56$ , poměrný gradient  $\lambda$  podle tab. 1 je  $\lambda = 1/2 + 4/(40+48) = 0,54545 \text{ mm}^{-1}$ . Podle (14.6) vyjde

$$\beta = \frac{1,56}{1 + \sqrt{0,004 \cdot 0,545}} = 1,49. \quad (26.15)$$

Mez únavy osazené tyče vyjde podle (16.2) pro  $\eta \doteq 0,9$

$$\tau_c^* = \frac{154}{1,49} \cdot 0,9 \doteq 93 \text{ MPa.} \quad (26.16)$$

Pevnost v krutu odhadneme podle mezního krouticího momentu pro hřídel z pružnoplastického materiálu bez zpevnění

$$M_{km} = W_{pl} \cdot \tau_k = \frac{\pi}{12} d^3 \cdot \tau_k = \frac{4}{3} W_k \sigma_{0,2} \cdot 0,58. \quad (26.17)$$

Součinitel plasticity  $W_{pl}/W_k = 4/3$  udává kolikrát je větší mezní krouticí moment než ten, při němž vznikají první plastické deformace. Ve skutečnosti se bude u daného materiálu projevovat zpevnění, zároveň se však bude účinkem vrubu vytvářet složitější napjatost bránící tomu, aby se plně využilo plastických vlastností materiálu. Odhadneme proto  $W_{pl}/W_k \approx 1,25$  a dostaneme

$$\tau_p^* = 1,25 \tau_k = 1,25 \cdot 0,58 \sigma_{0,2} = 1,25 \cdot 0,58 \cdot 560 = 406 \text{ MPa}. \quad (26.18)$$

Při míjivém namáhání napětím  $\tau_n$  bude na mezi únavy

$$\sigma_a = \frac{k \tau_n}{2}, \quad \sigma_m = \frac{k \tau_n}{2}, \quad (26.19)$$

takže podle (17.3) <sup>x)</sup>

$$\left( \frac{k \tau_n}{2 \tau_p^*} \right)^2 = 1 - \frac{k \tau_n}{2 \tau_c^*} \quad (26.20)$$

čili

$$k^2 \left( \frac{60}{2 \cdot 406} \right)^2 + k \left( \frac{60}{2 \cdot 93} \right) - 1 = 0, \quad (26.21)$$

$$k^2 + 59,08 k - 183,15 = 0. \quad (26.22)$$

Řešením poslední rovnice vyjde míra bezpečnosti  $k = 2,95$ .

---

x) Nezaměňuj exponent v rovnici (17.3) s mírou bezpečnosti.



## Příklad 5

### Hřídel pracovního stroje

Hřídel pracovního stroje má v kritickém průřezu mez únavy v ohybu  $\sigma_c^* = 80$  MPa, mez únavy v krutu  $\tau_c^* = 60$  MPa. Je namáhán konstantní amplitudou ohybového napětí  $\sigma_a = 20$  MPa a amplitudou krouticího napětí  $\tau_a = 15$  MPa při frekvenci pracovních cyklů  $f_0 = 0,5 \text{ s}^{-1}$ . Tato amplituda roste se změnou frekvence v poměru  $(f/f_0)^2$ . Určete míru bezpečnosti.

### Řešení

Nejprve budeme předpokládat, že k poruše dojde překročením jmenovité frekvence  $f$ . Pak  $\lambda = f/f_0$ , takže v jednotkách MPa bude

$$\tau_a = 15 \lambda^2, \quad \sigma_a = 20 \quad (26.23)$$

a podle (18.3)

$$\left(\frac{15}{60}\right)^2 \lambda^4 + \left(\frac{20}{80}\right)^2 \left(\frac{80}{60} - 1\right) + \left(\frac{20}{80}\right) \left(2 - \frac{80}{60}\right) = 1. \quad (26.24)$$

Odtud  $\lambda^4 = 13$ ,  $\lambda = k \doteq 1,9$ .

Potom budeme předpokládat, že k poruše dojde zhoršením kvality materiálu. Kdyby se mez únavy v ohybu a v krutu zmenšily ve stejném poměru, bylo by to totéž, jako kdyby místo toho napětí vzrostla v témže poměru.

Můžeme proto vzít

$$\tau_a = 15 \lambda, \quad \sigma_a = 20 \lambda. \quad (26.25)$$

Pak podle (18.3) vyjde

$$\left(\frac{15}{60}\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{20}{80}\right)^2 \left(\frac{80}{60} - 1\right) \lambda^2 + \left(\frac{20}{80}\right) \left(2 - \frac{80}{60}\right) \lambda = 1 \quad (26.26)$$

čili

$$\lambda^2 + 2\lambda - 12 = 0. \quad (26.27)$$

Odtud  $\lambda = k \doteq 2,6$ . Je zřejmé, že větší nebezpečí hrozí od překročení jmenovité frekvence o níž předpokládáme, že je proměnlivá a závislá na provozních poměrech <sup>x)</sup>.

Na tomto příkladu jsme se pokusili ukázat, jaké možnosti poskytuje definice míry bezpečnosti zavedená v kapitole 19.

### Příklad 6

#### Linearizace mezní čáry

Linearizujte vztah (17.1) tak, aby lineární průběh mezní čáry dával shodné střídavé a mívivé napětí na mezi únavy.

#### Řešení

Linearizovaná rovnice bude mít tvar

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_f} = 1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_c^*} \quad (\sigma_m \geq 0). \quad (26.28)$$

Pro  $\sigma_m = 0$  (střídavé namáhání) dostaneme z obou rovnic  $\sigma_a = \sigma_c^*$ . Je-li namáhání mívivé, je  $\sigma_a = \sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_h$ . Mají-li rovnice (17.1) a (26.28) dávat stejnou mez únavy také při mívivém namáhání, musí platit rovnice

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} = \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_p^*} \right)^k. \quad (26.29)$$

Odtud dostaneme pro "fiktivní mez pevnosti"  $\sigma_f$  vztah

$$\sigma_f = \frac{(\sigma_p^*)^k}{(\sigma_a)^{k-1}}. \quad (26.30)$$

Pro  $k = 1$  je jednoduše  $\sigma_f = \sigma_p^*$ . Pro  $k = 2$  vyjde

$$\sigma_f = (\sigma_p^*)^2 / \sigma_a = 2 (\sigma_p^*)^2 / \sigma_{nc}^*. \quad (26.31)$$

U hladkých tyčí je  $\sigma_{nc} = 0,61 \sigma_{pt}$ ,  $\sigma_p^* = \sigma_{pt}$ , takže  $\sigma_f = 2 \sigma_{pt}^2 / (0,61 \sigma_{pt}) = (2/0,61) \sigma_{pt} \doteq 3,28 \sigma_{pt}$ .

---

<sup>x)</sup> Meze únavy se dosáhne při frekvenci  $f = k f_0 = 1,9 \cdot 0,5 = 0,95 \text{ s}^{-1}$ .

Význam fiktivní pevnosti pochopíme, dosadíme-li do rovnice (26.28)  $\sigma_a = 0$  (případ statického namáhání). Vyjde  $\sigma_m = \sigma_f$  místo správného  $\sigma_m = \sigma_p^*$  podle rovnice (17.1). Shodu dostaneme pouze pro  $k = 1$ . Avšak ani pro  $k = 2$  není rozdíl mezi (17.1) a (26.28) podstatný, omezíme-li horní napětí podmínkou (17.5).

## PŘÍLOHY

- A. Přehled vzorců pro výpočet rychlosti šíření trhliny
- B. Přepočítání jednotek
- C. Vzorce a grafy pro výpočet tvarových činitelů

**A. PŘEHLED VZORCŮ PRO VÝPOČET RYCHLOSTI ŠÍŘENÍ TRHLINY**

Vzorec 
$$\frac{dl}{dN} = A (\Delta K_I)^n$$

$l$  [mm] je délka trhliny,

$N$  - počet cyklů přibližně míjivého zatížení  
( $R = 0,1$ ),

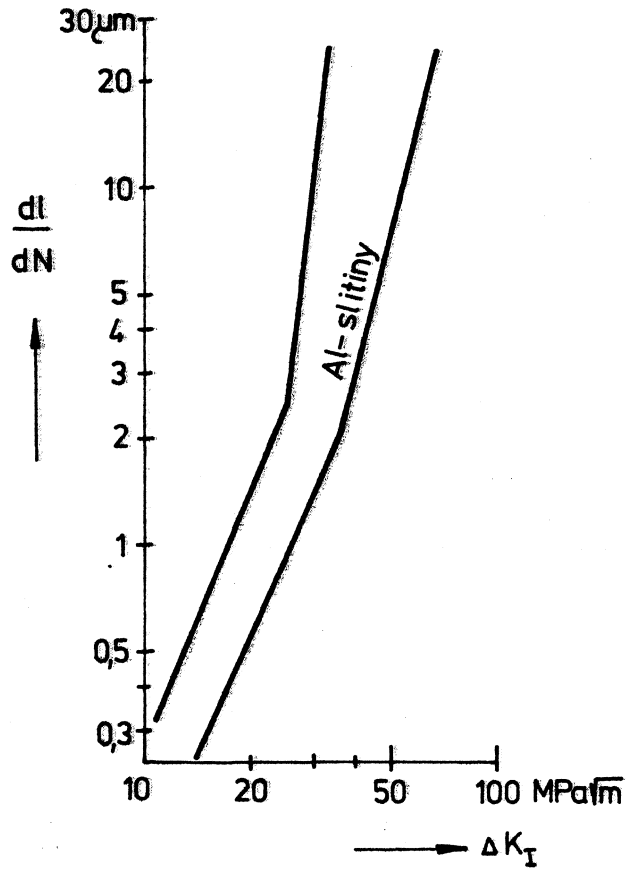
$\Delta K_I = K_{I\max} - K_{I\min}$  [MPa  $\sqrt{m}$ ],

$A, n$  - konstanty podle tabulky 7

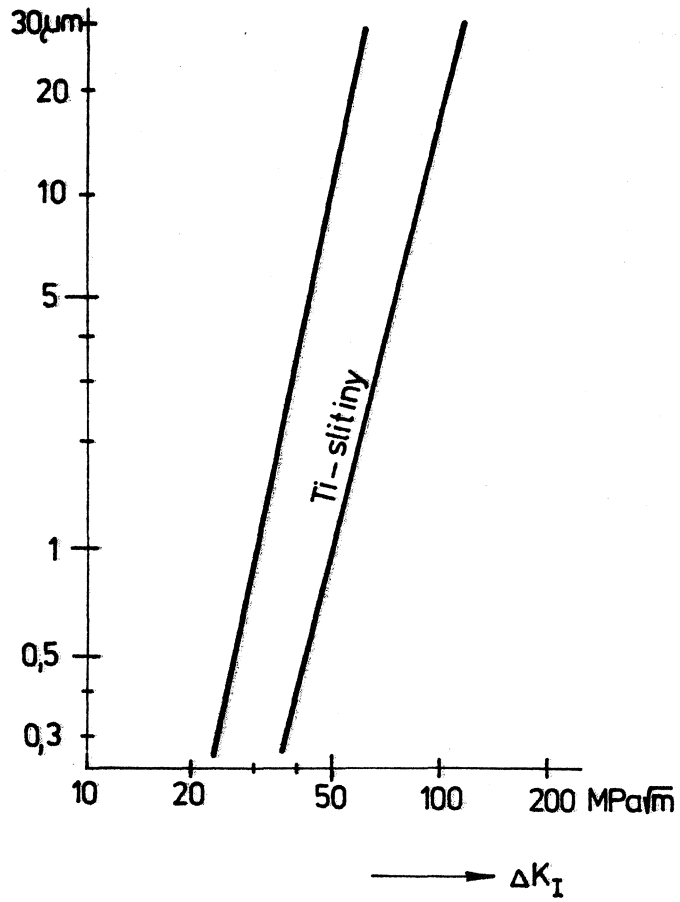
**TABULKA 7 K výpočtu rychlosti šíření trhliny**

Materiál	$\sigma_{0,2}$ [MPa]	$\sigma_{pe}$ [MPa]	A	n
Austenitická antikorozi ocel	210 až 350	520 až 650	$5,609 \cdot 10^{-9}$	3,25
Feriticko-perlitická ocel	210 až 550	350 až 760	$6,891 \cdot 10^{-9}$	3,0
Martenzitická ocel	$\sigma_{0,2} > 480$	$\sigma_{pe} > 620$	$1,356 \cdot 10^{-7}$	2,25
Hliníkové slitiny	235 až 380	-	Viz obr.A1	
Titanové slitiny	760 až 1030	-	Viz obr.A2	

Obr. A1



Obr. A2



B. PŘEPOČET JEDNOTEK

Chceme-li převést	na jednotky	musíme násobit
kp mm <sup>-2</sup>	MPa	9,80665
MPa	kp mm <sup>-2</sup>	0,10197
kp cm <sup>-2</sup>	MPa	0,0980665
MPa	kp cm <sup>-2</sup>	10,19716
psi	MPa	6,894.10 <sup>-3</sup>
MPa	psi	145,0
ksi	MPa	6,894
MPa	ksi	0,145
tons/in <sup>2</sup>	MPa	15,45
MPa	tons/in <sup>2</sup>	0,0644
ksi $\sqrt{\text{in}}$	MPa $\sqrt{\text{m}}$	1,09886
MPa $\sqrt{\text{m}}$	ksi $\sqrt{\text{in}}$	0,910032
psi $\sqrt{\text{in}}$	Nm <sup>-2</sup> $\sqrt{\text{m}}$	1098,9
Nm <sup>-2</sup> $\sqrt{\text{m}}$	psi $\sqrt{\text{in}}$	9,10032.10 <sup>-4</sup>
kp cm <sup>-2</sup> $\sqrt{\text{cm}}$	MPa $\sqrt{\text{m}}$	9,8067.10 <sup>-3</sup>
MPa $\sqrt{\text{m}}$	kp cm <sup>-2</sup> $\sqrt{\text{cm}}$	101,972
N mm <sup>-3/2</sup>	MPa $\sqrt{\text{m}}$	0,031623
MPa $\sqrt{\text{m}}$	N mm <sup>-3/2</sup>	31,623
N mm <sup>-3/2</sup>	ksi $\sqrt{\text{in}}$	0,02878
ksi $\sqrt{\text{in}}$	N mm <sup>-3/2</sup>	34,749

### C. VZORCE A GRAFY PRO VÝPOČET TVAROVÝCH ČINITELŮ

Pro kulovou dutinu v nekonečném pružném tělese při namáhání tahem (obr. C1) vyjde v bodě A osově napětí ( $\mu$  = Poissonovo číslo)

$$\sigma_{Az} = \frac{27 - 15\mu}{2(7 - 5\mu)} \sigma = \sigma_{max}$$

a obvodové napětí

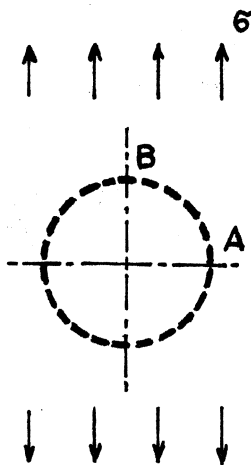
$$\sigma_{At} = \frac{15\mu - 3}{2(7 - 5\mu)} \sigma$$

V bodě B vzniká obvodové napětí

$$\sigma_{Bt} = - \frac{3 + 15\mu}{2(7 - 5\mu)} \sigma$$

Je-li takové tělese namáháno smykem, vzniká na obvodu koule největší napětí

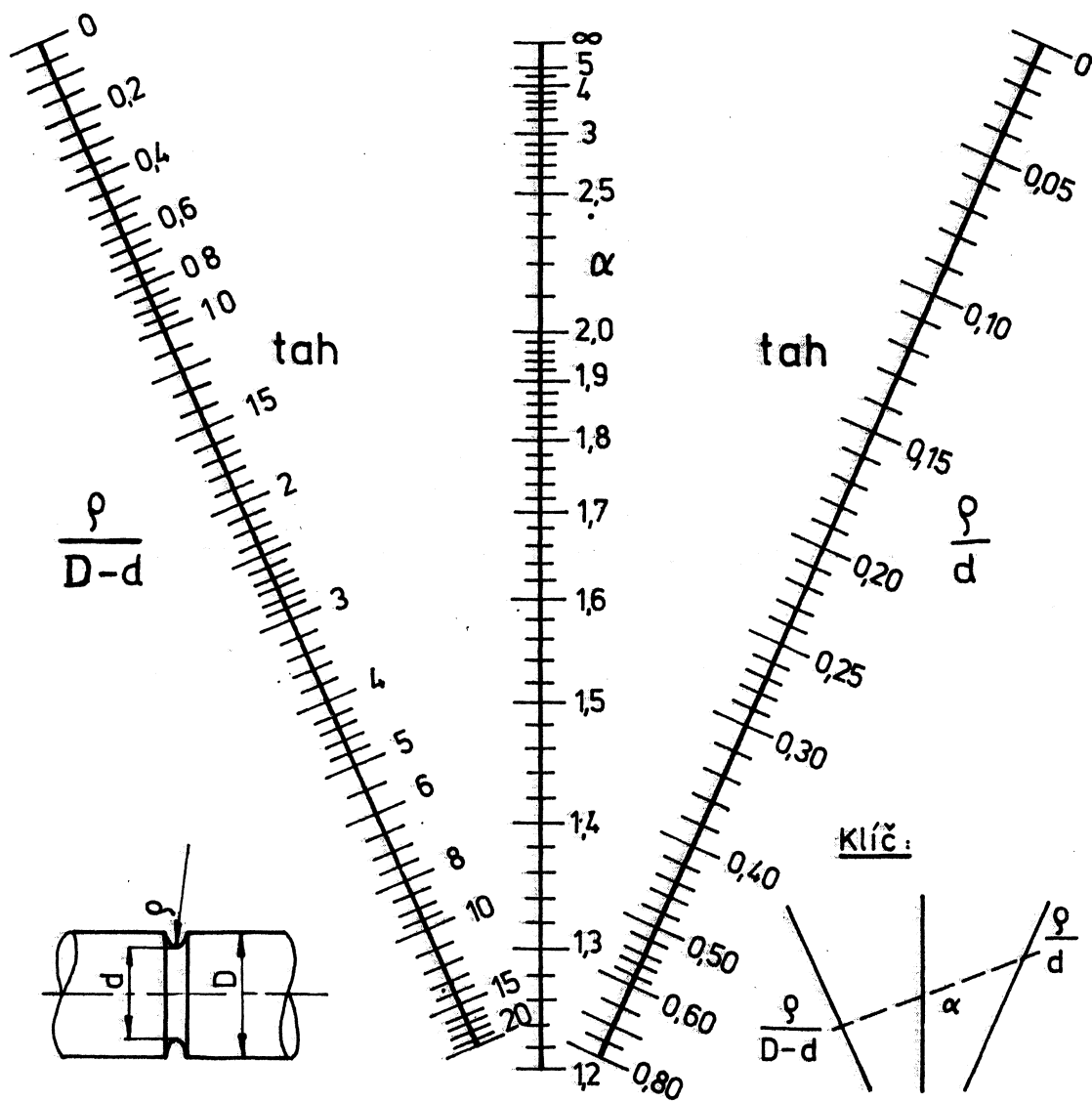
$$\sigma_{max} = \frac{15(1 - \mu)}{7 - 5\mu} \tau$$



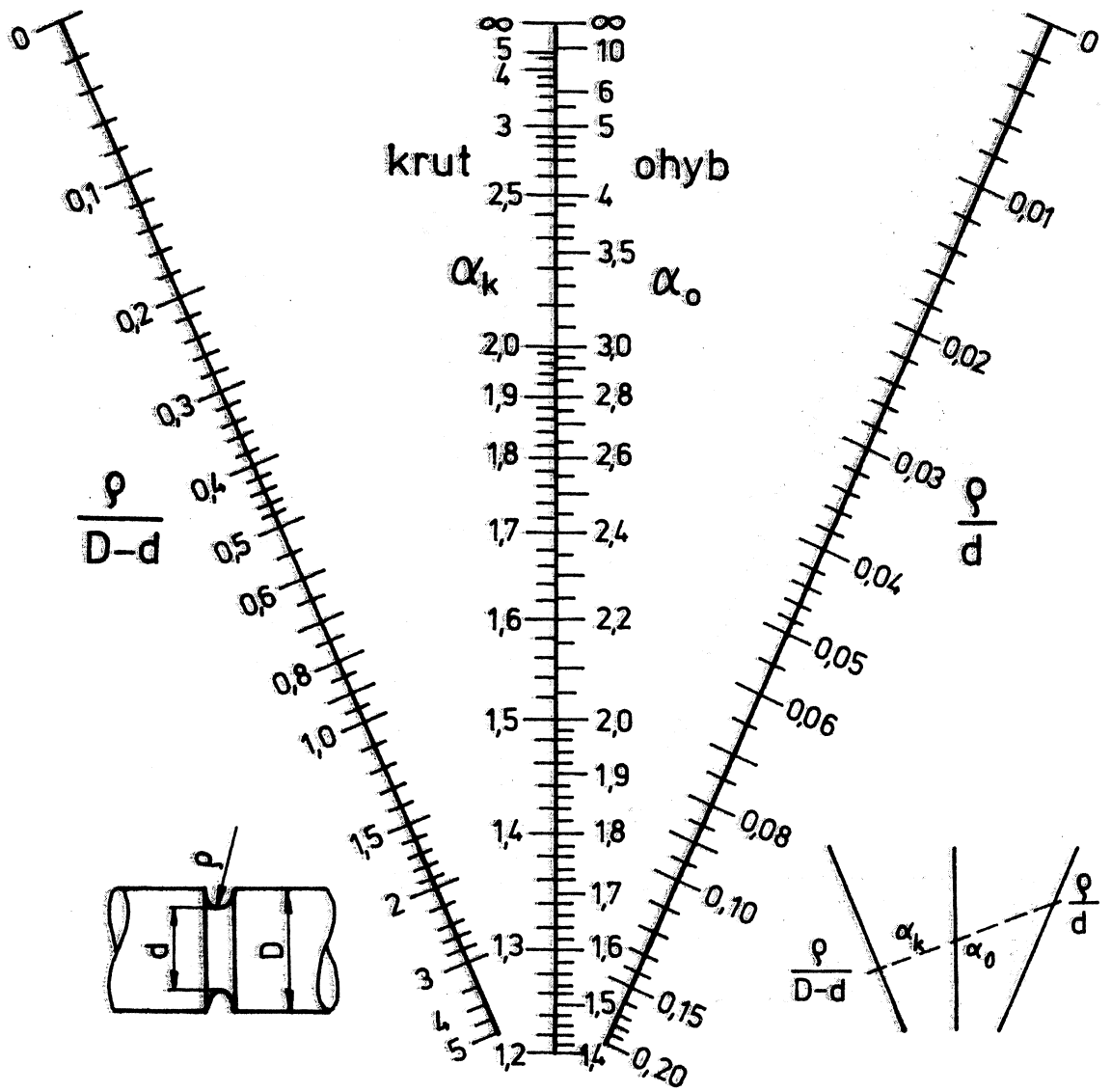
Obr. C1

Některé další činitele lze odečíst z grafů C1 až C9.

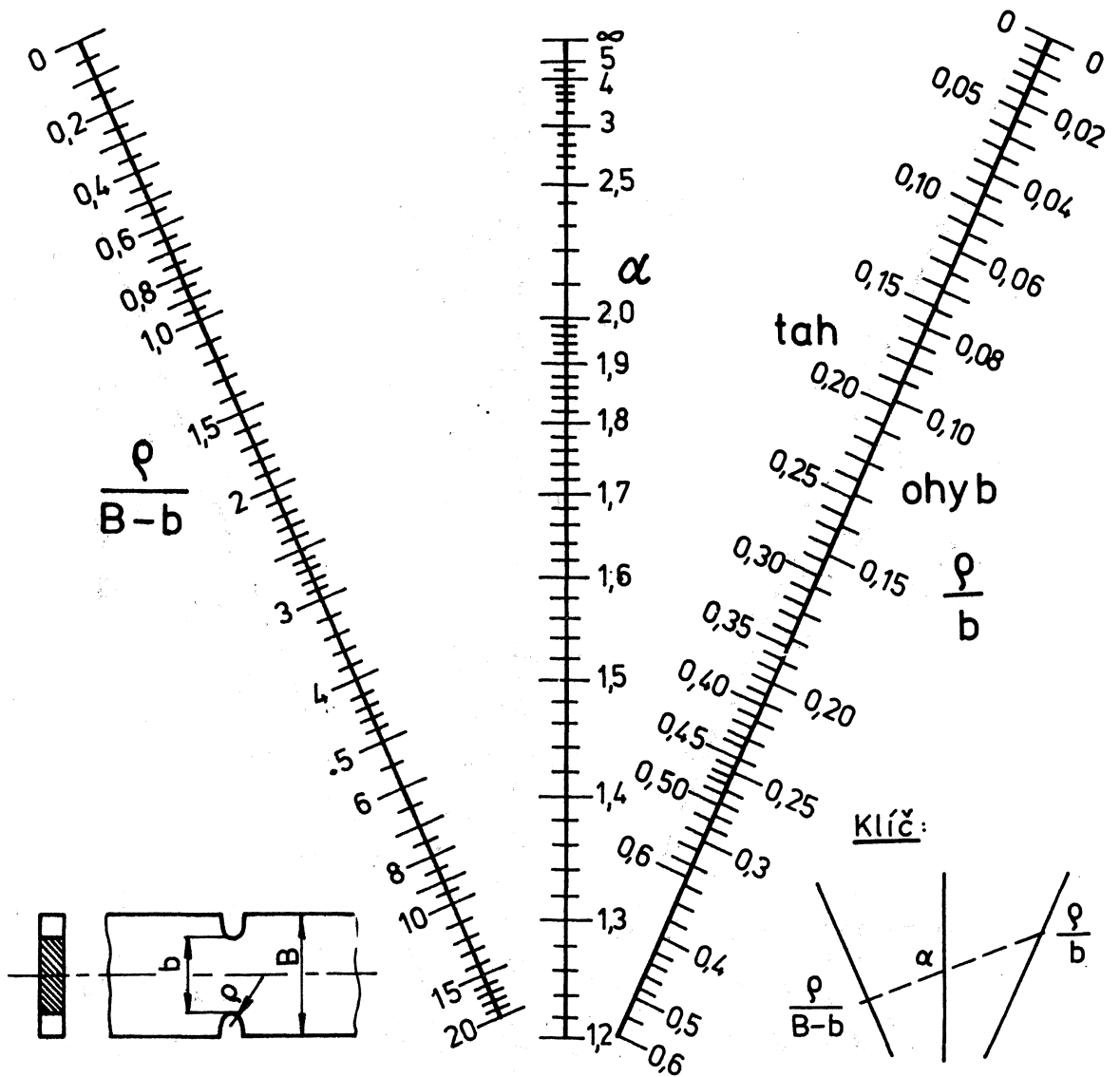




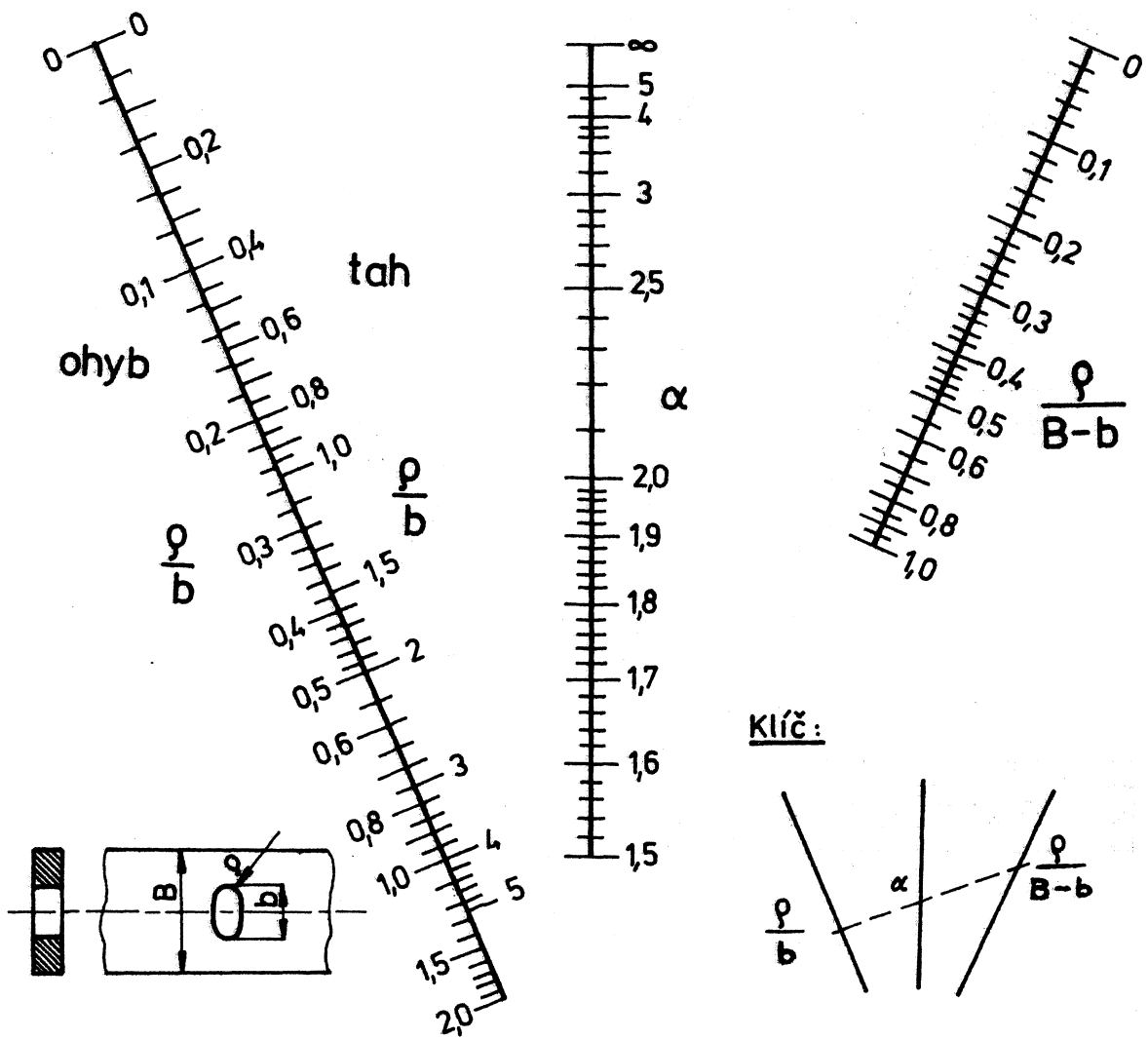
Obr. C1



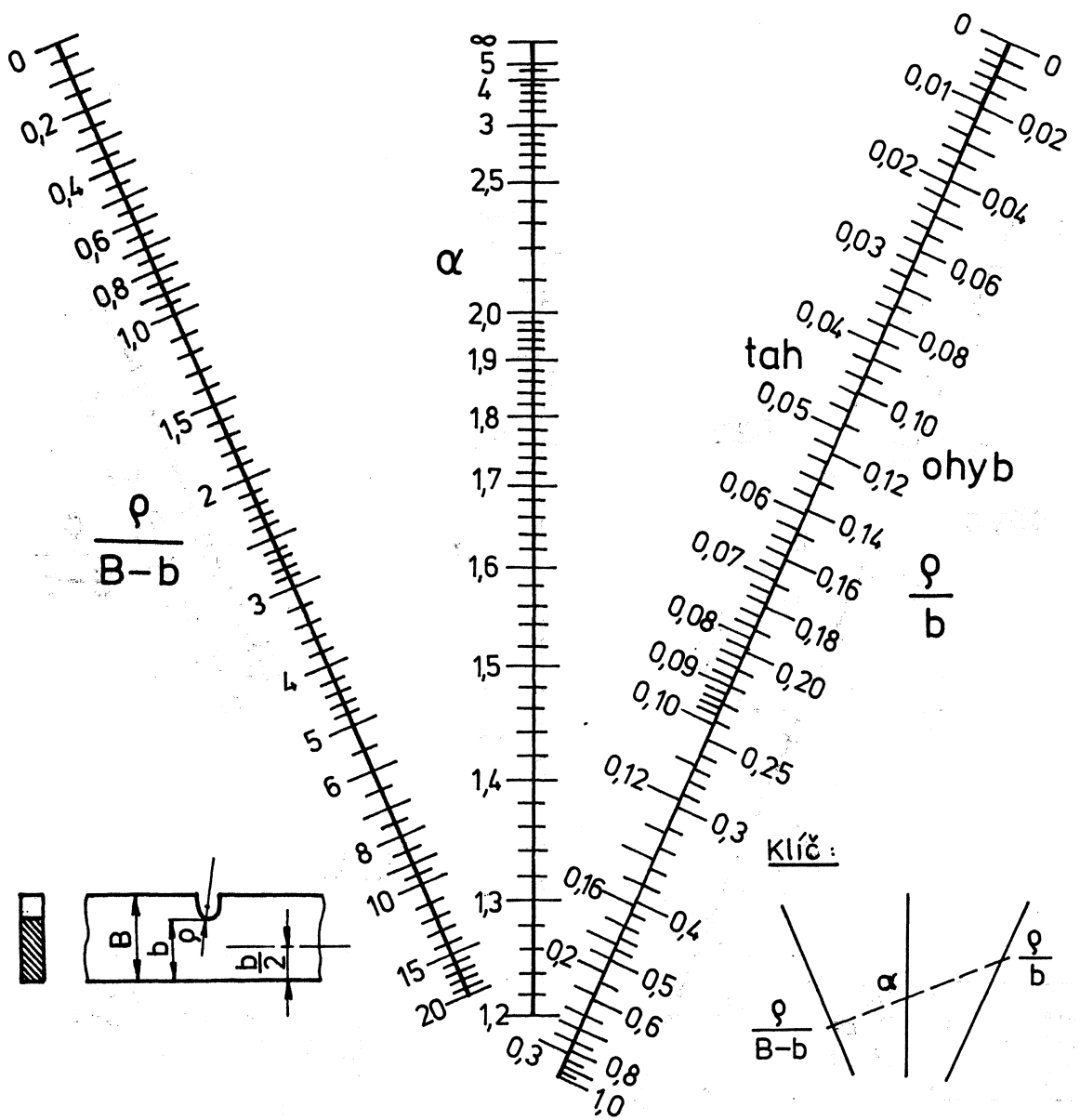
Obr. C2



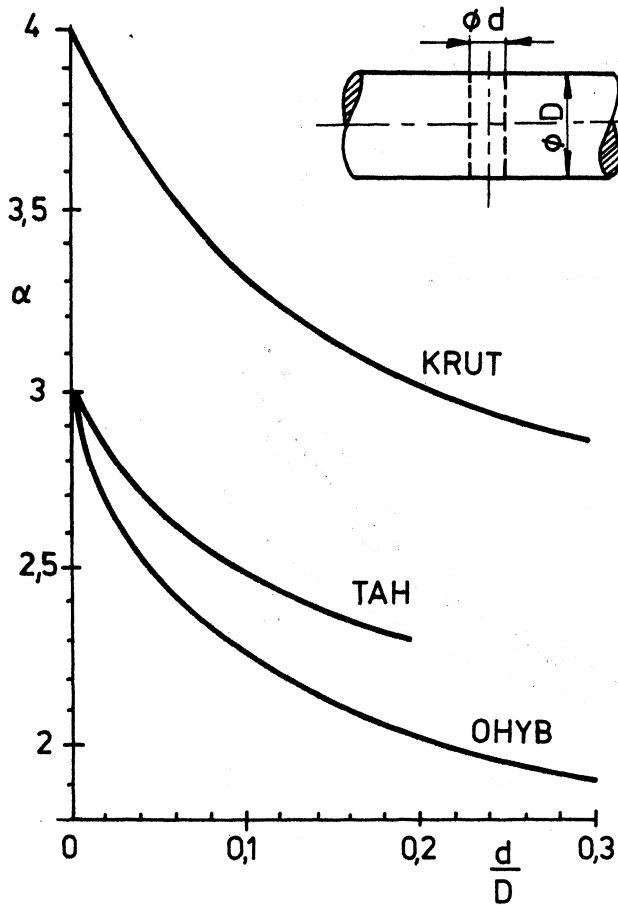
Obr. C3



Obr. C4



Obr. C5



$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_n \text{ resp. } \alpha \tau_n$$

KRUT:

$$\tau_n = \frac{M_k}{\frac{\pi D^3}{16} - \frac{d D^2}{6}}$$

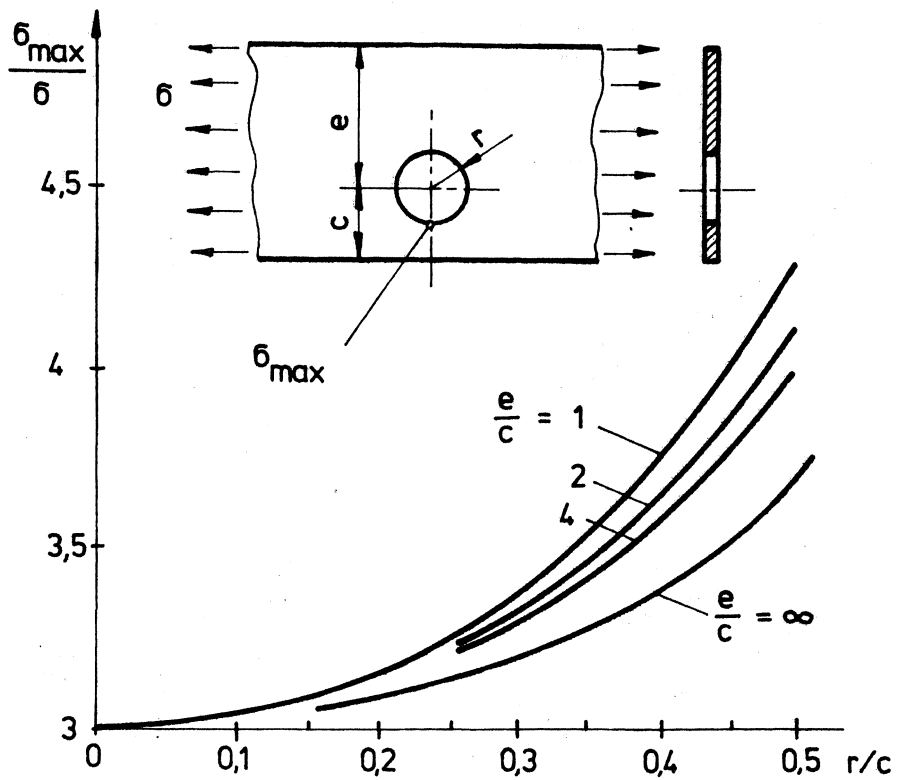
TAH:

$$\sigma_n = \frac{F}{\frac{\pi D^2}{4} - d D}$$

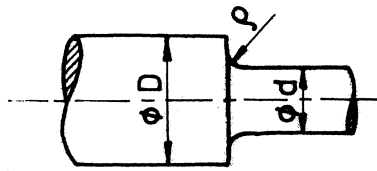
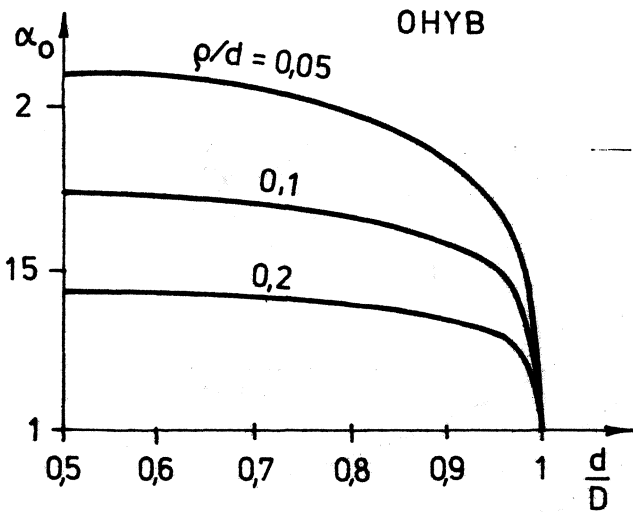
OHYB:

$$\sigma_n = \frac{F}{\frac{\pi D^3}{32} - \frac{d D^2}{6}}$$

Obr. C6



Obr. C7

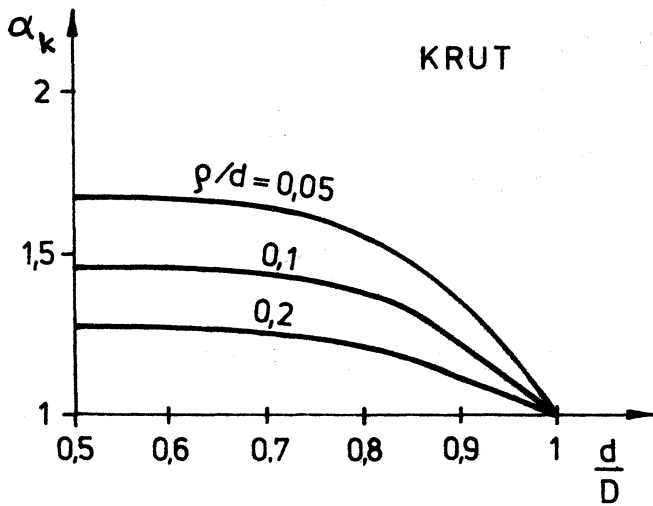


$$\sigma_n = \frac{M_o}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

$$\sigma_{\max} = \alpha_0 \sigma_n$$

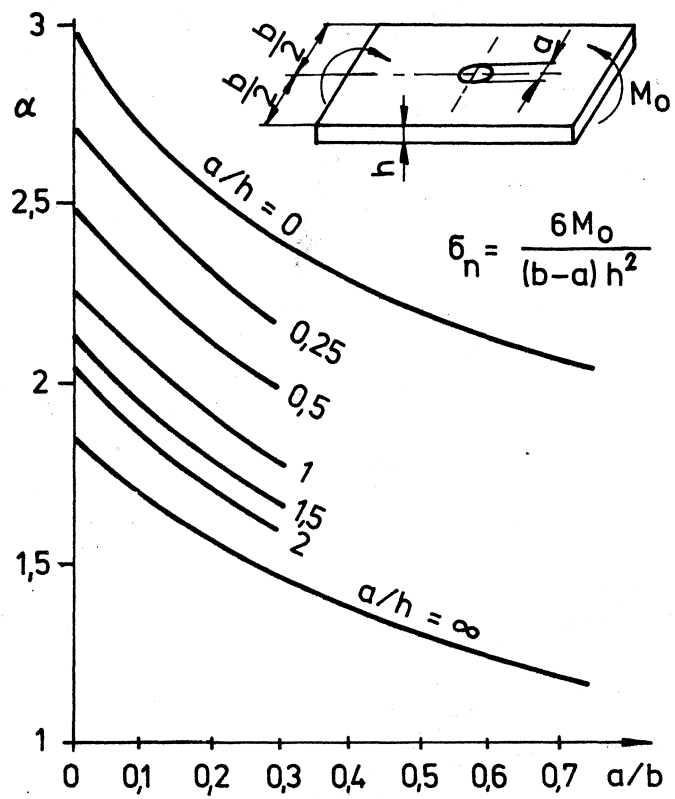
$$\tau_n = \frac{M_k}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

$$\tau_{\max} = \alpha_k \tau_n$$



Obr. C8





Obr. C9

## LITERATURA

- /1/ ADVANCES in research on the strength and fracture of materials (red. D.M.R. Taplin), vol. 2B - fatigue. New York, Pergamon Press 1978.
- /2/ AFANASJEV, N.N.: Statističeskaja teorija ustalostnoj pročnosti metallov. Izd. AN USSR, Kijev 1953.
- /3/ BĚŤÁK, V.: Tvarová pevnost závěsných ok namáhaných na únavu. Strojírnoství 28 (1978), 9, 559-569.
- /4/ BERNIKER, E.I.: O rasčete posadok s natjagom pri odnovernennom dějstviji krutjaščego i izgibajuščego momentov. Věstnik mašinostrojenija 48 (1968), 8, 36-37.
- /5/ BÍLÝ, M. - IVANOVA, S. - TĚRENTĚV, V.F.: Pevnost' súčasťi a materiálov pri peremennom zaťažení. Nakladatelství SAV, Bratislava 1976.
- /6/ CRAEGER, M.: The elastic stress-field near the tip of a blunt crack. Master of Science Thesis, Lehigh University, Bethlehem, Pa., 1966.
- /7/ FREUDENTHAL, A.M.: The statistical aspect of fatigue and metals proceedings. Proceedings of the Royal Society (London) 187 (1946), 416.
- /8/ GAJDOŠ, L.: Zhodnocení postupů pro výpočet částí při nízkocyklové únavě. - Strojírnoství 29 (1979), 7, 423-428.
- /9/ GAJDOŠ, L. - AUŘEDNÍK, B.: Nízkocyklová únava, tabulky čs. ocelí. Strojírnoství 30 (1980), tabulky v příloze.
- /10/ GUNN, K.: Effect of yielding on the fatigue properties of testpieces containing stress concentrations. Aeronautical Quarterly 6 (1956), s. 277.
- /11/ HEYWOOD, R.B.: Designing against fatigue of metals. New York, Reinhold Publ. 1962.

- /12/ HÖSCHL, C.: Tvarová pevnost lisovaných spojů  
Strojírenství 7 (1957), 1, 3-8.
- /13/ HÖSCHL, C.: Tvarová pevnost.  
Skriptum VŠST, Liberec 1970.
- /14/ HÖSCHL, C.: Výpočet hřídele s příčnou dírou na pevnost při  
složeném namáhání v únavě.  
Strojírenství 21 (1971), 8, 451-455.
- /15/ HÖSCHL, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví,  
SNTL, Praha 1971.
- /16/ HÖSCHL, C. - STRÍŽ, B.: Tabulky tvarových činitelů k výpočtu  
koncentrace napětí u strojních částí. Příloha  
k čas. Strojírenství 18 (1968), č. 1 až 12.
- /17/ KLESNIL, M. - LUKÁŠ, P.: Dvoustupňová kumulace poškození  
při nestacionárním cyklickém zatěžování.  
Strojírenství 18 (1968), 163-168.
- /18/ KLESNIL, M. - LUKÁŠ, P.: Únava kovových materiálů při mecha-  
nickém namáhání. Academia. Praha 1975.
- /19/ KNOTT, J.F.: Fundamentals of fracture mechanics.  
New York, John Wiley 1973.
- /20/ KOGAJEV, V.P.: Rasčety na pročnosť pri naprjaženijach, pere-  
mennych vo vremeni. Moskva, Mašinstrojenije 1977.
- /21/ LINHART, V. - GAJDOŠ, L. - BĚŤÁK, V. - DREXLER, J. - HANKE, M.:  
Podklady a směrnice pro únavové pevnostní výpočty.  
Výzkumná zpráva SVÚM Z-74-3103, Praha 1974.
- /22/ LINHART, V. - JELÍNEK, E. - AUŘEDNÍK, B.: Směrnice a doporučení  
pro výpočty únavové pevnosti částí.  
Výzkumná zpráva SVÚM Z-70-2495, Praha 1970.
- /23/ LUKÁŠ, P.: Únavové šíření trhlin ve vrubovaných tělesech.  
In: Pokroky v aplikaci lomové mechaniky, sborník  
ze IV. celostátního semináře.  
Vydal Ústav fyzikální metalurgie ČSAV, Brno 1980.

- /24/ MADAYAG, A.F.: Metal fatigue, theory and design.  
New York, John Wiley 1969.
- /25/ MANSON, S.J.: Fatigue: a complex subject-some simple approximations. *Experimental Mechanics* 5 (1965), 7, 193-226.
- /26/ NĚMEC, J.: Tvarová pevnost součástí kolejových vozidel  
Praha, SNTL 1955.
- /27/ NĚMEC, J. - PUCHNER, O.: Tvarová pevnost kovových těles.  
Praha, SNTL 1971.
- /28/ NEUBER, H.: Kerbspannungslehre.  
2. vyd., Berlin-Göttingen-Heidelberg,  
Springer-Verlag 1958.
- /29/ ONDRÁČEK, E. - FARLÍK, A.: Mezní stavy v pevnostních výpočtech.  
SNTL, Praha 1973.
- /30/ ORTOŠ, Z. - DYLAG, Z.: Únava materiálu a její zkoušení.  
SNTL, Praha 1968.
- /31/ OUCHIDA, H.: Fatigue strength and size effect of shrink-fitted specimens. *Bulletin of the JSME* 5 (1962), 20, 587-595.
- /32/ PETERSON, R.E.: Stress concentration design factors.  
New York, John Wiley 1953.
- /33/ PISARENKO, G.S. - LEBEDĚV, A.A.: Deformirovanije i pročnosť materialov pri složnom naprjažennom sostojaniji.  
Kijev, Naukova dumka 1976.
- /34/ PUCHNER, O.: Dauerhaltbarkeit quergebahrter Wellen bei überlagerter wechselnder und statischer Biegung und Verdrehung.  
*Schweizer Archiv* 17 (1951), 46-63.
- /35/ PUCHNER, O.: K otázce smyčkových diagramů únavy u součástí s vrubem. *Strojírenství* 17 (1967), 4, 243-250.

- /36/ PUCHNER, O.: Die Kerbwirkung sehr scharfer Kerben bei Dauerbeanspruchung.  
Konstruktion 22 (1970), 12, 471-476.
- /37/ ROLFE, S.T. - BARSOM, J.M.: Fracture and fatigue control in structures. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall 1977.
- /38/ SIEBEL, E. - GAIER, M.: Untersuchungen über den Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 98 (1956), 30, 1715.
- /39/ STEINCHEN, W.: Numerische Bestimmung des bezogenen Spannungsgefälles aus spannungsoptischen Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 42 (1976), 2, 47-55.
- /40/ VÁCLAVÍK, V.: Aplikace součinitele bezpečnosti na výpočet strojních součástí v oblasti časované únavy. Strojírenství 19 (1961), 1, 3-10.
- /41/ VALENTA, J. - BĚŤÁK, V.: Koncentrace napětí v lokálních oblastech strojních částí a konstrukcí.  
Výzkumná zpráva.  
Část I - SVÚSS - 69 - 01023  
Část II - SVÚSS - 70 - 01026
- /42/ VYKUTIL, J. - VAŠÁTKO, J. - KŘUPKA, V.: K predikci únavové životnosti při proměnných amplitudách zatěžování. Strojírenství 30 (1980), 4, 245-248.
- /43/ WEIBULL, W.: A statistical theory of the strength of materials.  
Ingen. Vetenskaps Akad. Handl. Proc. 151 (1939), s. 1 až 45.
- /44/ WEIBULL, W.: Fatigue testing and analysis of results. Pergamon Press, New York 1961.

Druh publikace:	Sborník
Název:	Stavba strojů 79 ÚNAVA MATERIÁLU PŘI PERIODICKÉM ZATĚŽOVÁNÍ
Autor:	Prof. Ing. Cyril Höschl
Počet stran:	125
Náklad:	90 výtisků
Formát:	A4
Vydal a rozmnožil:	Dům techniky ČSVTS Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23
Rok vydání:	1981
Číslo publikace:	DT 2192

Publikace nebyla jazykově upravena.  
Jen pro vnitřní potřebu DT ČSVTS Praha