

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**NETRIVIÁLNÍ CHYBY
A ZDÁNLIVÉ PARADOXY
V MECHANICE A PRUŽNOSTI**

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1980

V této publikaci se probírají příklady úloh z mechaniky, pružnosti a pevnosti, v nichž se lze snadno dopustit neobvyklých chyb, plynoucích ze zdánlivě správné úvahy. Jde o případy nevhodné idealizace, o nepřesné nebo nedůsledné stanovení okrajových podmínek, o nesprávné užití Saint-Venantova principu, o chyby pramenící z nedomyšlení všech alternativ řešení, z neshody mezi fyzikálním a matematickým modelem apod.

Publikace je určena inženýrským pracovníkům, konstruktérům a technikům pracujícím ve strojním oboru. K jejímu studiu není třeba žádných speciálních předběžných znalostí.

Kdo se snaží poučit musí umět především pochybovat, neboť pochybnosti ducha vedou k zjevení pravdy.

Aristoteles

Jestliže se mýlím uzavírám z toho, že jsem, neboť ten, kdo není se nemůže mýlit; a tak právě z toho, že se mýlím cítím, že jsem.

Augustinus Aurelius

O B S A H

	Str.
Předmluva	4
1. Statika soustav se suchým třením	5
2. Nelineární tuhost v pružných soustavách	10
3. Geometrické odchylky od ideálních tvarů těles	16
4. Montážní nepřesnosti a dotyková tuhost	19
5. Namáhání klikových hřídelů	24
6. Záludnosti Castiglianovy věty	27
7. Problematické okrajové podmínky	36
8. Vzpěr hustě vinutých šroubovitých pružin	38
9. Ohyb tenkých desek	43
10. Nesprávné užití principu superpozice	49
11. O Saint-Venantově principu	53
12. Zvláštní jevy při krutu	61
13. Singulární napjatost a přetvoření	69
14. Kumulace vrubových účinků	72
15. Kdy se předimenzováním snižuje pevnost	75
16. Lom v nezatížených částech	78
17. Pohyblivé břemeno	80
18. Pohybová energie a srážka vozidel	84
19. Jiné zdánlivé paradoxy	87
20. Paradoxní jevy při namáhání rázem	93
21. Tři otázky pro laskavého čtenáře	99

Předmluva

V této práci se budeme zabývat různými případy netriviálních chyb a zdánlivých paradoxů, které představují určitá úskalí v běžné práci konstruktérů a techniků. Různá přehlédnutí, přepsání, chyby při numerickém výpočtu považujeme za triviální a jimi se nebudeme zabývat. Máme na mysli chyby záludné, plynoucí ze zdánlivě správné úvahy, kterých se někdy dopustí i teoreticky zdatný a v jiném ohledu zkušený inženýr. Budeme se snažit, aby probíraná látka byla svým výběrem i formou podání dobrou školou zkušeností pro každého pracovníka ve strojním oboru.

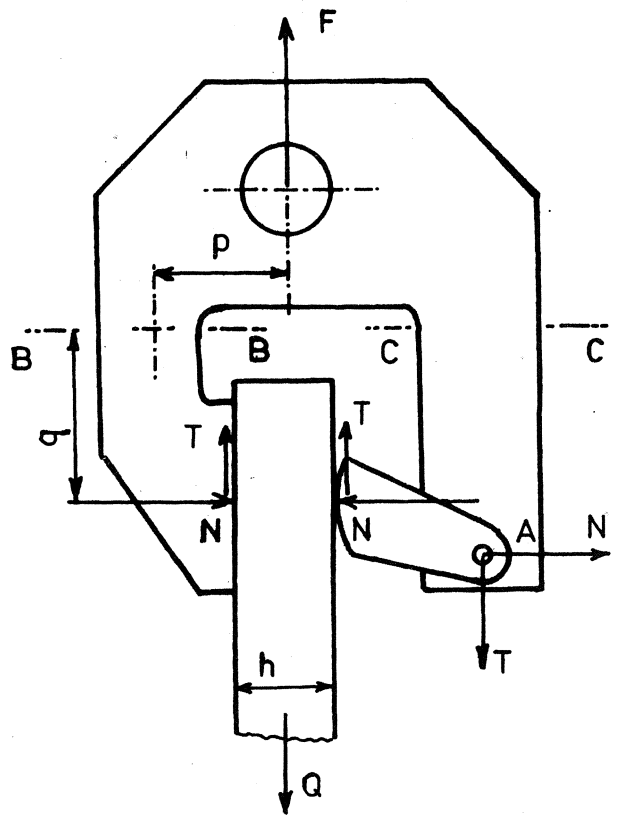
Příklady, které uvedeme, nejsou složité a nevyžadují žádných zvláštních předběžných znalostí. Většinou jsou převzaty z praxe, ale zde je uvedeme ve zjednodušené podobě. Text bude někdy úmyslně chybný; je na čtenáři, aby poznal chybu dříve, než mu ji nakonec prozradíme.

Na rozdíl od jiných seminářů pořádaných Domem techniky ČSVTS Praha nebudeme probírat ucelené téma z určitého odvětví mechaniky. Naše příklady chybných a paradoxních řešení zasahují od statiky až k dynamice a nelineární pružnosti. Soustřeďujeme se na hlavní myšlenkové postupy; nejde nám tedy o detailní řešení jednotlivých problémů. Domníváme se, že tak nejlépe posloužíme pracovníkům z našich průmyslových závodů, kteří se musí často zabývat velmi různorodými technickými úkoly. Některé chyby, na něž zde upozorníme, mohou mít v praxi nepříznivé důsledky (mohou vést k chybnému dimenzování konstrukce apod.). Doufáme, že účastníci semináře se podobných chyb nedopustí. Je-li tomu tak, splní seminář účel, přispěje totiž ke kvalitní výrobě a zabrání mnohým zbytečným ztrátám pramenícím z chybných konstrukčních návrhů.

Prof. Ing. Cyril Höschl

1. STATIKA SOUSTAV SE SUCHÝM TŘENÍM

Probereme nejprve jednoduchý příklad statického výpočtu svěrky, které se užívá k manipulaci s plechovými tabulemi. Uvedeme zjednodušenou konstrukční úpravu, schematicky znázorněnou na obr. 1. Tabule o váze Q je udržována v rovnováze vnější silou F . Z podmínky rovnováhy vnějších sil dostaneme, že $F = Q$. Síly N , T znázorněné na obr. 1 jsou vnitřní reakce. V mezním případě počne plech prokluzovat a z úchytky vypadne. Protože vodorovné složky reakcí N jsou zleva i zprava stejné, bude při prokluzu a při stejném součiniteli smykového tření f stejné i T , takže



Obr. 1

$$T = \frac{1}{2} Q, \quad N = \frac{T}{f} = \frac{1}{2f} Q. \quad (1.1)$$

Čep A budeme tedy navrhovat tak, aby bezpečně přenesl sílu

$$F_A = \sqrt{N^2 + T^2} = \frac{Q}{2f} \sqrt{1 + f^2}. \quad (1.2)$$

Průřez BB bude namáhán tahovou silou N_B a ohybovým momentem M_B :

$$N_B = T; \quad M_B = T(p - \frac{h}{2}) + Nq. \quad (1.3)$$

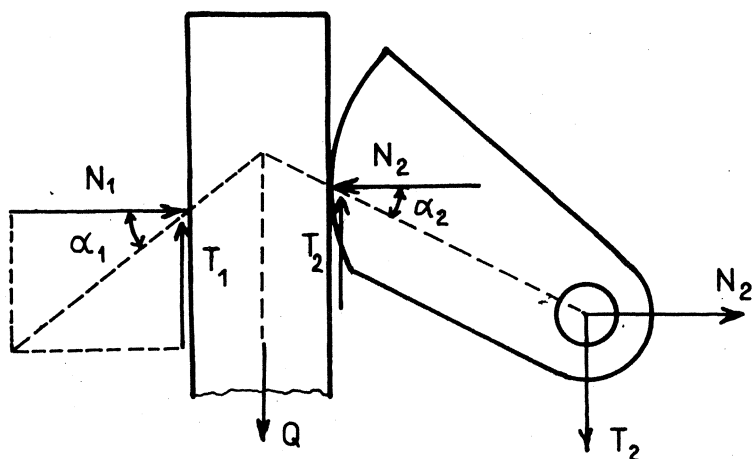
Obdobný výpočet statických účinků v řezu CC si čtenář snadno sám doplní.

Dosadíme-li z rovnice (1.1) do (1.3), dostaneme

$$N_B = \frac{1}{2} Q; \quad M_B = \frac{1}{2} Q (p - \frac{h}{2} + \frac{q}{f}). \quad (1.4)$$

Na uvedeném výpočtu jsou nápadné dvě nesrovnalosti. Za prvé nebude splněna momentová podmínka pro palec (leďa ve výjimečném případě, kdy výslednice sil N , T v bodě A by procházela dotykovým bodem mezi palcem

a plechovou tabulí). Za druhé dostaneme pro absolutně hladký povrch ($f \rightarrow 0$) nekonečně velkou reakci N , ačkoli z názoru je zřejmé, že tato reakce by měla být v limitě spíše nulová. Kde je chyba?



Obr. 2

Především musí být beze zbytku splněny podmínky rovnováhy sil pro palec. Protože jde o těleso zatížené dvěma silami (jednou silou v bodě A, druhou v bodě dotyku palce s plechem), musí obě tyto síly ležet na společné přímce. Výslednice sil N , T v bodě dotyku palce s plechem tedy musí procházet bodem A. Musí tedy být (obr. 2)

$$T_2 = N_2 \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (1.5)$$

bez ohledu na velikost součinitele smykového tření. Z podmínek rovnováhy plechu dostaneme, že

$$N_1 = N_2 ; \quad T_1 + T_2 = Q. \quad (1.6)$$

Také tyto podmínky musí platit vždy, ať je tření jakékoli. Síly N_1 a N_2 již nebudou na jedné přímce, protože tři síly, a to

$$(\vec{N}_1 + \vec{T}_1), \quad \vec{Q}, \quad (\vec{N}_2 + \vec{T}_2)$$

musí procházet jedním bodem, mají-li být v rovnováze. Takže za rovnováhy musí být také

$$T_1 = N_1 \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (1.7)$$

Čtyři rovnice (1.5), (1.6) a (1.7) obsahují pět neznámých, a to T_1 , N_1 , T_2 , N_2 a α_1 . Nestačí proto k řešení úlohy. Další podmínky poskytl Amontonsův-Coulombův zákon smykového tření

$$|T_1| \leq f_1 N_1 ; \quad |T_2| \leq f_2 N_2. \quad (1.8)$$

Předpokládáme, že síly mají smysl vyznačený na obr. 2 a že úhly α_1 , α_2 jsou kladné. Zákon smykového tření poskytuje dvě nerovnosti. Nemůžeme je používat jako rovnice. To byla zásadní chyba prvního postupu,

která nás přivedla k chybným rovnicím (1.1). Podmínky (1.8) můžeme zapsat s použitím (1.5) a (1.7) také tak, že

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \leq f_1 ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 \leq f_2 . \quad (1.9)$$

Úhel α_2 je dán konstrukcí svěrky a tloušťkou plechu. Aby svěrka mohla správně pracovat, musí být α_2 menší než třecí úhel

$$\delta_2 = \operatorname{arctg} f_2 . \quad (1.10)$$

Pracovní rozsah svěrky můžeme zvětšit zdrsněním tohoto povrchu např. vroubkováním. Pak δ_2 bude velké a k prokluzu na palci nikdy nedojde; druhá z podmínek (1.9) bude vždy splněna.

Kdybychom opatřili vroubkováním i protější dotykovou plochu, znesnadnilo by se tím uvolnění svěrky po manipulaci.

Z rovnic (1.5) až (1.7) dostaneme

$$N_1 = N_2 = \frac{Q}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} , \quad (1.11)$$

$$T_1 = \frac{Q \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} ; \quad T_2 = \frac{Q \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} . \quad (1.12)$$

Přitom $0 < \operatorname{tg} \alpha_1 \leq f_1$ podle (1.9) pro $\alpha_1 > 0$. Vypočteme-li nyní namáhání čepu A, bude

$$\begin{aligned} F_A^* &= \sqrt{N_2^2 + T_2^2} = \frac{Q}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2} = \\ &= \frac{Q}{\cos \alpha_2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{Q}{\operatorname{tg} \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Tato hodnota bude největší, když $\operatorname{tg} \alpha_1 = 0$. V tom případě by však bylo také $T_1 = 0$, což je nepravděpodobné.*) Pokud nedojde k posuvu desky, nevíme o "skutečné" velikosti této tečné reakce nic; je staticky neurčitá. Uvědomíme-li si však, jak probíhá celý uchopovací proces, dojdeme k závěru, že deska se relativně ke svěrce zpočátku posouvá a to tak dlouho, až se palec

*) Předpokládáme, že $\alpha_1 > 0$. Podle (1.8) by však mohlo být $-f_1 < \operatorname{tg} \alpha_1 < +f_1$ a T_1 by mohlo být dokonce záporné.

natolik pootočí, že vzniklé reakce N , T_1 , T_2 postačují k přenosu síly Q . Tomu odpovídá případ na mezi smykového tření, kdy $\operatorname{tg} \alpha_1 = f_1$. Není důvodu, proč by se měl úhel α_1 zmenšovat po skončeném zatěžování. Dosadíme-li tedy $\operatorname{tg} \alpha_1 = f_1$ a uvážíme-li, že α_2 je malý úhel, dostaneme

$$\bar{F}_A^* = \frac{Q}{f_1 + \sin \alpha_2} \quad (1.14)$$

Namáhání v řezu BB nyní vyjde

$$N_B^* = \frac{Qf}{f + \operatorname{tg} \alpha_2} ; \quad M_B^* = \frac{Qf}{f + \operatorname{tg} \alpha_2} \left(p - \frac{h}{2} + \frac{Q}{f} \right) \quad (1.15)$$

Je-li $f_1 = f_2 = f$ a $\operatorname{tg} \alpha_2 < f$, budou síly F_A^* , N_B^* i moment M_B^* větší než síla F_A podle (1.2) a hodnoty N_B , M_B podle (1.4). Chybný výpočet, který jsme uvedli na začátku naší úvahy, tedy vede k poddimenzování svěrky.

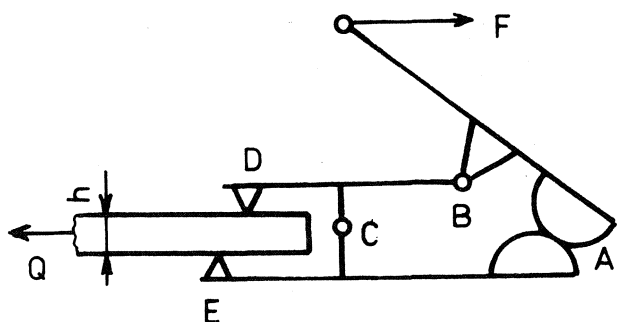
Výpočet bychom mohli dále zpřesnit, kdybychom uvážili vliv čepového tření v bodu A a popř. vyosení střední roviny plechu a středu závěsného oka (působíště síly F) při změně tloušťky plechu h . Tyto podrobnosti ponecháme stranou. Nejde nám totiž o výpočet konkrétní svěrky, ale o vysvětlení možných chyb, které vznikají, když soustavu nerovností plynoucí ze zákona smykového tření nahradíme neuváženým způsobem rovnostmi. Poznamenáváme, že konstrukce skutečně užívaných svěrek je složitější. Palec bývá přitlačován do záběru působením ještě dalšího silového momentu kolem čepu A, který se vyvozuje převodem od závěsné síly F .

Uvedeme jiný příklad. Na obr. 3 je schéma konstrukce dvojité ruční úchytky k vytahování plechů uložených ve stohu. Plech o tloušťce h je vytahován ze stohu; klade přitom odpor vyjádřený silou Q . Na plech působí reakce v bodech D, E, přenášené z úchytky. Tyto body nebudou obecně na společné normále. Je-li síla Q příliš velká, začne v jednom z těchto bodů smyk; reakce se tak dostane na povrch "třecího kužele". Když nastane smyk i v druhém bodě, bude situace taková, jak je znázorněno na obr. 4. Přitom

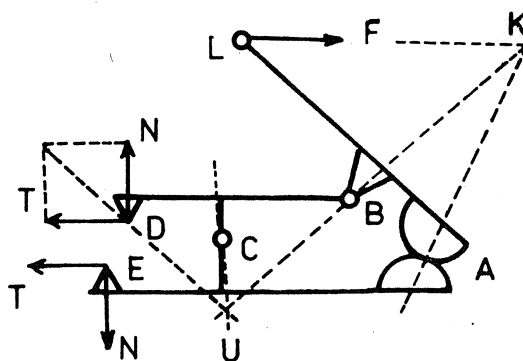
$$T = \frac{1}{2} Q ; \quad N = \frac{T}{f} \quad (1.16)$$

Tyto síly tedy známe. Nyní určíme nositelku reakce v bodě B (musí procházet průsečíkem síly F s nositelkou reakce v bodě A, tj. bodem K). Jde o rovnováhu tří sil působících na horní část úchytky ABL. Reakci v bodě B pak určíme z momentové podmínky k bodu C pro část DCB nebo graficky z podmínky rovnováhy tří sil působících na tuto část. Připomeňme, že tři síly jsou v rovnováze, procházejí-li společným bodem a jejich

vektory tvoří uzavřený složkový obrazec. Pro část DCB je tímto společným bodem bod U. Z řešení pak vyplyne i reakce v bodě A.



Obr. 3

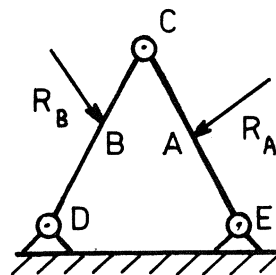


Obr. 4

Ale je tomu tak opravdu? Především si všimněme, že obecně nebude splněna podmínka rovnováhy vnějších sil. Bude zajisté $F = Q$, ale dvojice těchto sil nebude mít obecně stejný moment jako dvojice sil N opačného smyslu, jak by to vyžadovala podmínka momentové rovnováhy. Síla N je totiž podle (1.16) prostě rovna $Q/2f$, je tedy - podobně jako síla F - zcela určena. Ramena silových dvojic N popř. F, Q jsou však dána konstrukcí a nezávisí na součiniteli tření f (kdežto síla N ano). Momentová podmínka nebude proto obecně platit.

Úvaha by byla správná, kdyby dolní část úchytky ACE byla pevně spojena se zemí (byl by to "rám") a volně vložený plech by byl vytahován silou Q ze sevření vyvozeném silou F. Tak tomu ale není!

Ve skutečnosti chceme, aby ve stykových bodech D, E nedošlo ke kluzu. Zde tedy bude úchytka při správné funkci kloubově uložena na plechu pevně spjatém se zemí (plech je tedy "rám"). Pak obě čelisti DCB a ECA tvoří "tříkloubový nosník", zatížený známými silami v bodech B, A. Jsou to reakce R_A , R_B , které snadno vyšetříme z rovnováhy členu ABL. Analogická, ale přehlednější úloha je naznačena na obr. 5. Řešíme ji buď početně (jde o úlohu staticky určitou) nebo graficky. Při grafickém řešení vynecháme vždy jednu z působících sil, abychom v nezátíženém členu dostali nositelku obou reakcí (je to spojnice kloubů, neboť dvě síly mohou být v rovnováze jen tehdy, mají-li společnou nositelku). Tím získáme řešení i pro zbývající člen. Pak oba případy superponujeme.



Obr. 5

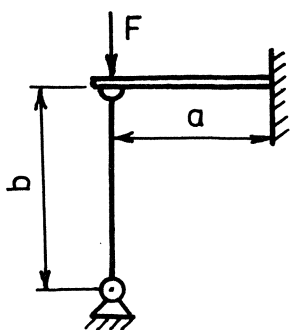
Může se stát, že reakce v kloubech D a E (správně vyřešené podle popsaného postupu) nepadnou obě dovnitř třecího kužele. Pak to

znamená, že se úchytka v takové poloze neudrží, že nastane smyk spojený buď s pootočením úchytky do jiné polohy nebo úplné vyklouznutí plechu.

Detailním řešením, které je rutinní úlohou ze statiky, se nebudeme zabývat. Chtěli jsme jen ukázat, jak chybná idealizace vede ke zcela falešným výsledkům.

Amontonsův-Coulombův zákon smykového tření poskytuje pro vazební síly v soustavě těles podmínky, které lze matematicky formulovat jako soustavu nerovností. Jedině u takové dvojice, u které dochází k relativnímu smyku styčných povrchů, musíme nerovnost nahradit rovností. Neurčíme-li tyto dvojice správně, tj. nahradíme-li jiné nerovnosti rovnostmi nebo nahradíme-li je i tam, kde k tomu není důvod, dostaneme řešení, které nesplňuje některé podmínky rovnováhy a je proto falešné nebo které vyhovuje podmínkám rovnováhy, ale za předpokladu jiného uložení soustavy; řešíme pak nevědomky zcela jinou úlohu. Falešná řešení, která takto získáme, mohou vést k chybnému výpočtu součinitele bezpečnosti a k chybným závěrům, pokud jde o funkci konstrukce.

2. NELINEÁRNÍ TUHOST V PRUŽNÝCH SOUSTAVÁCH



Obr. 6

Budeme řešit "školní" příklad soustavy složené z vetknutého prizmatického nosníku s ohybovou tuhostí EJ_1 a vzpěry o tuhosti v tlaku ES_2 (S_2 je průřez vzpěry). Soustava je zatížena silou F podle obr. 6.

Přenáší-li vzpěra sílu P , prohne se nosník na konci o

$$\Delta = \frac{a^3}{3EJ_1} (F - P). \quad (2.1)$$

O stejnou hodnotu se zkrátí vzpěra, která přenáší tlakovou sílu P

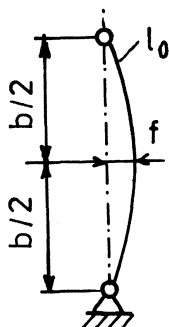
$$\Delta = \frac{b}{ES_2} P. \quad (2.2)$$

Ze srovnání obou posledních rovnic dostaneme

$$P = F \frac{1}{1 + \frac{3bJ_1}{a^3S_2}}. \quad (2.3)$$

Řešení vyhovuje zvláštním případům. Je-li vzpěra velmi tuhá ($S_2 \rightarrow \infty$), je $P = F$ (celou sílu F zachytí vzpěra, deformace nosníku vymizí). Je-li naopak vzpěra velmi tenká ($S_2 \rightarrow 0$), je $P = 0$ (vzpěra nenes nic). Změní-li se smysl síly F , změní se i smysl síly P (z tlakové síly se stane tahová).

Takové příklady najdeme velmi často v učebnicích a ve sbírkách příkladů z pružnosti a pevnosti. Učí studenta schématickému, chybnému myšlení; zbavují ho pochybností, které by mohly vést "ke zjevení pravdy" (Aristoteles).



Obr. 7

Ve skutečnosti lze jen velmi obtížně vyrobit vzpěru, která by byla dokonale rovná a přenášela sílu právě v ose. Spíše to lze prohlásit za nemožné. Ukážeme, jak se změní případ na obr. 6, zavedeme-li do výpočtu malou excentricitu f danou počátečním zakřivením prutu (obr. 7)

$$y = f \sin \frac{\pi x}{b} \quad (2.4)$$

Uvedeme jen přibližný výpočet. Zvětší-li se průhyb účinkem tlakové síly P , popíšeme jej rovnicí

$$y = (f + g) \sin \frac{\pi x}{b}, \quad (2.5)$$

kde g je přírůstek průhybu uprostřed vzpěry. *)

Průhyb na konci nosníku bude (stejně jako dříve)

$$\Delta = \frac{a^3}{3EJ_1} (F - P). \quad (2.6)$$

Vzpěra bude jednak tlačena, jednak ohýbána. Délka tyče l_0 měřená po oblouku na obr. 7 se změní na délku l_1 (účinkem tlakové síly P) a klouby se dále přiblíží o posuv u (účinkem ohybu).

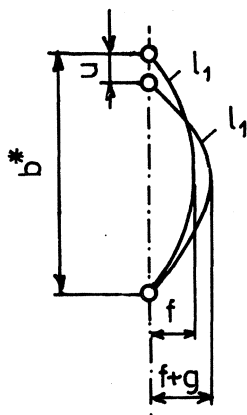
Určíme nejdříve vztah mezi délkou l_0 a počáteční vzdáleností kloubů b . Podle obr. 7 platí, že

$$\begin{aligned} l_0 &= \int_0^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \doteq \int_0^b \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx = \\ &= b + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 f^2}{b^2} \int_0^b \cos^2 \frac{\pi x}{b} dx = b + \frac{1}{4} \frac{\pi^2 f^2}{b}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

*) Malou změnu délky b jsme zanedbali.

Z Hookeova zákona

$$l_0 - l_1 = \frac{Pb}{ES_2} \cong b - b^* \quad (2.8)$$



Obr. 8

Je to změna délky tyče účinkem tlakové síly P . Zanedbáme-li vliv tohoto zkrácení na počáteční excentricitu vzpěry, bude posuv u podle obr. 8 dán rovnicí vyjadřující neproměnnost délky l_1 za ohybu

$$b^* + \frac{1}{2} \int_0^{b^*} (\nu')^2 dx = b^* - u + \frac{1}{2} \int_0^{b^*-u} (y')^2 dx \quad (2.9)$$

Dosadíme-li sem podle (2.4) a (2.5) a uvážíme-li, že f , g i u jsou velmi malé veličiny ve srovnání s b^* a že $b^* \cong b$, dostaneme po integraci a po úpravě

$$u = \frac{\pi^2}{4b} (2fg + g^2) \quad (2.10)$$

Deformační podmínka je

$$\Delta = l_0 - l_1 + u \quad (2.11)$$

Další podmínku najdeme z principu virtuálních prací. Změní-li se g o δg , změní se u o δu

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial g} \delta g = \frac{\pi^2}{2b} (f+g) \delta g \quad (2.12)$$

O stejnou hodnotu se podle (2.11) změní průhyb nosníku Δ . Síla F vykoná práci

$$\delta A = F \delta u \quad (2.13)$$

To je práce vnějších sil. Deformační energie v nosníku se změní o

$$\delta U_1 = (F - P) \delta u \quad (2.14)$$

(neboť výslednice sil působících na nosník je $F - P$ a průhyb se změní o δu). Deformační energie ve vzpěře příslušná tlakovým napětím se zanedbatelně nezmění. Změní se však ohybová deformační energie vzpěry; pro tuto energii máme vztah

$$U_2 = \frac{1}{2} EJ_2 \int_0^b (y'' - \nu'')^2 dx = \frac{1}{2} EJ_2 \frac{\pi^4 q^2}{b^4} \int_0^b \sin^2 \left(\frac{\pi x}{b} \right) dx = \frac{1}{4} EJ_2 \frac{\pi^4 q^2}{b^3} \quad (2.15)$$

Příslušná změna je

$$\delta U_2 = \frac{\partial U_2}{\partial q} \delta q = \frac{1}{2} E J_2 \frac{\pi^4 q}{b^3} \delta q. \quad (2.16)$$

Princip virtuálních prací dá rovnici

$$\delta A = \delta U_1 + \delta U_2 \quad (2.17)$$

tj. virtuální práce vnějších sil se rovná virtuální změně deformační energie.

Po dosazení

$$F \delta u = (F - P) \delta u + \delta U_2 \quad (2.18)$$

čili

$$P \delta u = \delta U_2. \quad (2.19)$$

To znamená, že změnu ohybové deformační energie vzpěry δU_2 vyvodí síla P na posuvu δu , což bylo možno očekávat.

S použitím (2.12) dá (2.19)

$$P \frac{\pi^2}{2b} (f+g) \delta q = \frac{1}{2} E J_2 \frac{\pi^4 q}{b^3} \delta q. \quad (2.20)$$

Protože δq se nerovná nule, vyjde odtud

$$P = \frac{q}{f+g} Q, \quad (2.21)$$

kde

$$Q = \frac{\pi^2 E J_2}{b^2} = \text{Eulerova vzpěrná síla.} \quad (2.22)$$

Rovnici (2.21) můžeme napsat také ve tvaru

$$g = \frac{P}{Q-P} f, \quad (2.23)$$

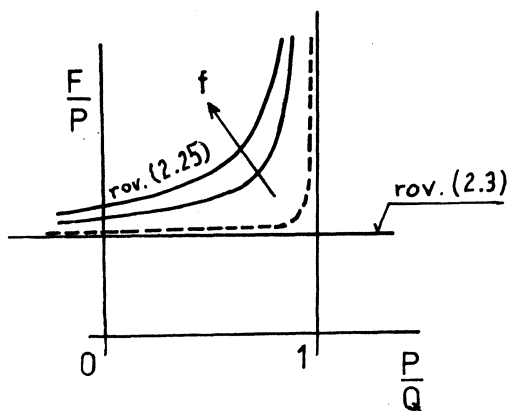
z něhož je patrné, že $g \rightarrow \infty$ pro $P \rightarrow Q$.

Z deformační podmínky (2.11) dostaneme s použitím (2.6), (2.8) a (2.10)

$$\frac{a^3}{3EJ_1} (F-P) = \frac{b}{ES_2} P + \frac{\pi^2}{4b} (2fg + g^2). \quad (2.24)$$

Rovnice (2.21) a (2.24) představují přibližné řešení našeho problému.*) Vyloučíme-li z nich sílu P , dostaneme nelineární závislost průhybu q na síle F , ačkoli materiál je lineárně elastický. Je to způsobeno tím, že nyní přihlížíme k ohybovému namáhání vzpěry, které se s rostoucím průhybem zvětšuje. Vyloučíme-li naopak průhyb q , dostaneme vztah mezi silami F a P ; po úpravě

$$\frac{F}{P} = 1 + \frac{3bJ_1}{a^3S_2} + \frac{3\pi^2f^2}{4a^3b} EJ_1 \frac{2Q-P}{(Q-P)^2} \quad (2.25)$$



Obr. 9

Srovnáme-li toto řešení s rovnicí (2.3) vidíme, že se liší o poslední člen na pravé straně rovnice (2.25). Závislost (2.25) je schematicky znázorněna na obr. 9. Je zřejmé, že síla P nepřesáhne sílu Q a že poměr F/P není konstantní dokonce ani v případě $\lim_{f \rightarrow 0} f \rightarrow 0$ (čárkovaný průběh).

I kdybychom tedy řešili ideální případ dokonale přímé vzpěry a souosé síly P , nemohli bychom se spojit s rovnicí (2.3). Správně bychom měli její platnost omezit podmínkou $P < Q$. Kdyby tato podmínka nebyla splněna, platila by místo ní rovnice

$$P = Q \quad \text{pro} \quad F \geq Q \left[1 + \frac{3bJ_1}{a^3S_2} \right]. \quad (2.26)$$

Kdo tedy učí studenty průmyslových a vysokých škol, že řešení úlohy z obr. 6 má tvar (2.3), prokazuje jim špatnou službu.

Změní-li se smysl síly F , stane se ze vzpěry táhlo. Řešení podle (2.25) a (2.3) pak prakticky splývají pro velké absolutní hodnoty síly P . Tehdy vymizí poslední člen na pravé straně rovnice (2.25). Vymizí i výsledný průhyb, neboť podle rovnice (2.23) se bude průhyb q blížit hodnotě $-f$.

*) Řešení ztrácí platnost při větších průhybech f , q ; pro jiné tvary počátečního zakřivení prutu by je bylo třeba zobecnit např. tak, že by se tvar vzpěry vyjádřil Fourierovou řadou.

V našem řešení jsme předpokládali, že vzpěra vybočí v rovině nákresny na obr. 6. Ve skutečnosti bychom se měli přesvědčit, zda nevybočí dříve jiným směrem. To záleží na poměru hlavních momentů setrvačnosti průřezu vzpěry.

V naší úvaze se ukázaly dva možné zdroje chyb. První chyba vzniká, když nekontrolujeme možnost vzniku elastické nestability konstrukce (v našem příkladu dosažení Eulerovy vzpěrné síly, případ $P = Q$). Druhá chyba vzniká, když zanedbáváme vliv tvarových nedokonalostí, který se projeví zvláště v oblasti tlakových namáhání (v našem případě u vzpěry).

Mohlo by se zdát, že tyto chyby jsou stejného druhu, že totiž obě vznikají zanedbáním vlivu deformace na velikost vnitřních statických účinků. To je sice pravda, ale přece jen je zde základní rozdíl. U ideálního případu rovné vzpěry je $f = 0$ podle obr. 7 a ohybová napětí ve vzpěře nemohou vzniknout, dokud není $P = Q$, tj. dokud tlaková síla v prutu nedosáhne kritické velikosti podle Eulerovy teorie; síla F pak může nabývat jakékoli hodnoty vyhovující nerovnosti (2.26), aniž se tím ovlivní síla P (viz čárkovaný průběh na obr. 9). Je-li však $f > 0$, bude vždy $P < Q$ a ohyb vzpěry vznikne už v podkritické oblasti.

Je třeba upozornit na to, že elastická stabilita může být porušena nejen tak, že se vzpěra prohne jako celek (globální nestabilita), ale také tak, že se vybočí stěna jen v některém místě (lokální nestabilita). Tento druh nestability vzniká u tenkostěnných konstrukcí. Zvětšujeme-li rozměry profilu tenkostěnné vzpěry tak, že zároveň zmenšujeme tloušťku stěny, takže hmotnost vzpěry se nemění, zvětšuje se kritická síla, při níž dochází ke ztrátě globální stability, a zmenšuje se kritická síla příslušná lokální nestabilitě. V takovém případě existuje při dané hmotnosti a délce vzpěry určitý rozměr profilu, při němž je únosnost vzpěry největší.

Vliv geometrických odchylek od ideálních tvarů těles probereme ještě v příští kapitole.

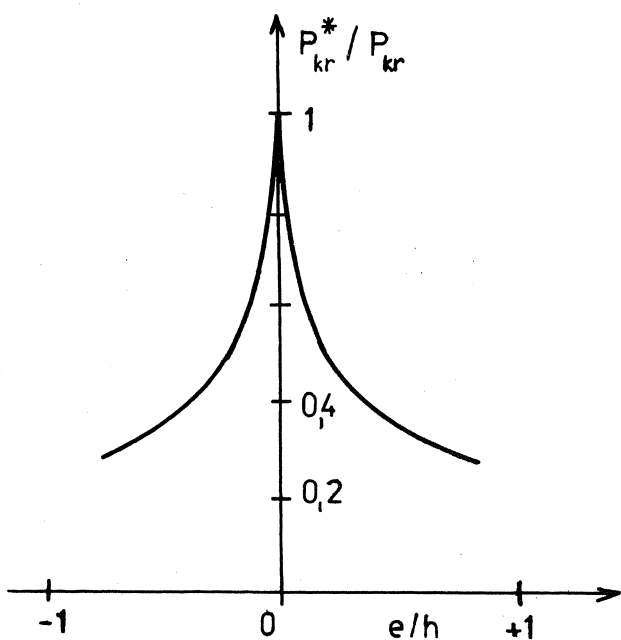
Ukázali jsme, že i u soustav lineárně pružných těles může dojít k nelineární závislosti deformací na zatěžujících silách a to i tehdy, jsou-li předepsány korektní okrajové podmínky. Řešení podle teorie lineární pružnosti pak nepopisuje správně skutečnost; odchylky jsou velké, blíží-li se namáhání některých členů mezi elastické stability.

3. GEOMETRICKÉ ODCHYLKY OD IDEÁLNÍCH TVARŮ TĚLES

Geometrické nedokonalosti mohou změnit zásadním způsobem chování konstrukce. Stlačuje-li se osovou silou P například "dokonalá" válcová elastická skořepina o poloměru r a o tloušťce stěny $h \ll r$, dává teorie pružnosti pro kritické tlakové napětí $G = P/2\pi r h$ na mezi lokální elastické stability tento vzorec:

$$G_{kr} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{Eh}{r} \quad (3.1)$$

Zde μ značí Poissonův poměr příčné kontrakce.*) Pro $\mu = 0,3$ dostaneme, že $G_{kr} = 0,605 Eh/r$. Při této hodnotě by mělo nastat zvlnění stěn, znamenající "rozdvojení rovnováhy" (kromě dokonalé válcového tvaru existuje ještě rovnováha skořepiny s porušeným tvarem). Ve skutečnosti se hodnoty (3.1) nikdy nedosáhnou, skutečně pozorované hodnoty kritického napětí jsou dva až třikrát menší. Je to způsobeno jednak tvarovou nedokonalostí skutečné skořepiny, jednak pružností ostatních členů soustavy, např. zkušebního stroje. První vliv prozkoumal teoreticky W. T. Koiter /"Proc. K. ned. Akad. Wet.", Series B, vol. 72 (1969), p. 40/. Nanášíme-li na osu úseček poměr amplitudy geo-

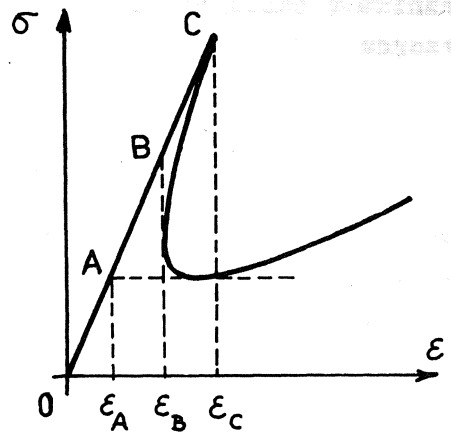


Obr. 10

metrické odchylky e k tloušťce skořepiny h a na osu pořadnic poměr dosažitelné kritické síly P_{kr}^* k teoretické hodnotě P_{kr} počítané pro $e = 0$, dostaneme závislost znázorněnou na obr. 10.

*) Ve smyslu toho, co jsme uvedli na konci předchozí kapitoly, zmenšuje se G_{kr} , jestliže zvětšujeme poloměr r a zmenšujeme tloušťku h . Podmínku stálé hmotnosti lze vyjádřit požadavkem $rh = \text{konst.}$

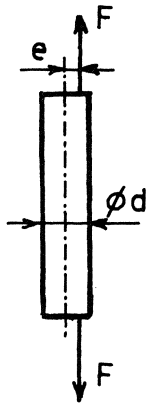
Druhý vliv prozkoumali Mossakovskij a Smelyj /"Izv. An-SSSR, Mechanika i mašinstrojenije" (1963), No. 4, s. 162 - 166/. Závislost tlakového napětí σ na poměrném stlačení ε trouby lze schematicky znázornit na obr. 11. Bod C odpovídá rovnici (3.1) a představuje horní mez kritického napětí. Pro $\varepsilon_B < \varepsilon < \varepsilon_C$ existují tři možné stavy rovnováhy. Hodnotu $\sigma_B = E \varepsilon_B$ označili Kármán a Tsien jako dolní mez kritického napětí /"Journal of Aeronautical Sci." (1941), No. 8, p. 302/. Změna rovnovážného tvaru však probíhá za konstantního ε jen u velmi tuhého zkušebního stroje. Je-li zkušební stroj pružný (s malou pružinovou konstantou), probíhá tato změna spíše při konstantním napětí σ a za dolní mez bychom tedy měli brát hodnotu $\sigma_A = E \varepsilon_A$ (obr. 11).



Obr. 11

Z obr. 10 a 11 je zřejmé, že tenké skořepiny jsou v oblasti vzpěru obzvláště citlivé na geometrickou nedokonalost (popř. nehomogenitu) a že jde o konstrukční prvky, u nichž při překročení meze elastické stability dochází k dramatickému poklesu únosnosti.

Jako další příklad vlivu geometrických nepřesností uvedeme vyosení tahové síly vzhledem k ideální ose prutu kruhového průřezu o průměru d . K tahovému napětí $\sigma_t = F / \pi d^2$ přibude ještě ohybové napětí $\sigma_o = 32 F e / \pi d^3$, takže výsledné napětí je (obr. 12)

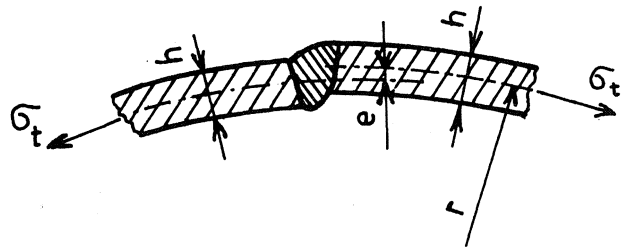


Obr. 12

$$\sigma = \sigma_t + \sigma_o = \sigma_t \left(1 + 8 \frac{e}{d} \right). \quad (3.2)$$

Vyosením síly F např. o desetinu poloměru ($e/d = 0,05$) vzroste tedy napětí v krajním vlákně průřezu o plných 40%. Na to je třeba pamatovat při posuzování výsledků únavových zkoušek vzorků namáhaných tahem-tlakem a při experimentálním výzkumu, kdy naopak z naměřených hodnot poměrných prodloužení vnějších vláken chceme usuzovat na velikost působící síly.

Jako další příklad uvedeme plášť tenkostěnné válcové tlakové nádoby s přesazením ve švu podle obr. 13. Obvodové napětí σ_t je při dokonalém tvaru nádoby rozděleno po tloušťce stěny rovnoměrně. Účinkem přesazení



Obr. 13

vzniká v okolí švu přídatné ohybové napětí, které lze odhadnout s použitím vzorce

$$\sigma_0 \approx 3 \sigma_t \frac{e}{h} \quad (3.3)$$

Ohybový moment je totiž přibližně $\sigma_t h e / 2$ a průřezový modul $h^3 / 6$. To znamená, že např. při přesazení $e = 0,1 h$ vzroste maximální napětí z hodnoty σ_t na $\sigma_t + \sigma_0 = \sigma_t (1 + 3e/h)$, tedy asi o 30 %. Toto zvýšení se sice může vyrovnat místní plastickou deformací, ale za určitých okolností může způsobit nežádoucí snížení provozní bezpečnosti. Dochází k němu u spojů namáhaných v únavě nebo u zkřehlých materiálů. Uplatní se přitom nejen přídatné ohybové napětí (3.3), ale i koncentrace napětí vzniklá porušením hladkosti svarového spoje. Zkřehlá zóna v okolí svaru může mít zvýšenou vrubovou citlivost a může také obsahovat drobné trhlinky, zárodky příštího lomu.

Uvažme dále vliv nekruhovosti průřezu tenkostěnné tlakové válcové nádoby. Bude-li mít průřez tvar elipsy o poloosách $r + \varepsilon$, $r - \varepsilon$ místo tvaru kružnice o poloměru r ($0 \leq \varepsilon \ll r$), bude se průřez účinkem vnitřního přetlaku přetvářet z elipsy zpět na kružnici, a to tím dokonaleji, čím bude přetlak větší (ovšem za předpokladu konstantní tloušťky stěny a homogenity). Křivost ve vrcholu elipsy na konci dlouhé poloosy je

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a}{b^2} \quad (3.4)$$

jsou-li a , b délky poloos. V našem případě je $a = r + \varepsilon$, $b = r - \varepsilon$, takže

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r + \varepsilon}{r^2 - 2r\varepsilon + \varepsilon^2} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) \left(1 + 2\frac{\varepsilon}{r}\right) \approx \frac{1}{r} + 3\frac{\varepsilon}{r^2} \quad (3.5)$$

Změna křivosti tedy může nabýt největší hodnoty

$$\alpha = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = 3\frac{\varepsilon}{r^2} \quad (3.6)$$

Tomu odpovídá ohybový moment (připadající na jednotku délky řezu)

$$M_0 = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \alpha = \frac{E h^3 \varepsilon}{4(1-\mu^2)r^2} \quad (3.7)$$

a ohybové napětí

$$\sigma_0 = \frac{6 M_0}{h^2} = \frac{3}{2} \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{\varepsilon h}{r^2} \quad (3.8)$$

Také toto napětí se vyrovná plastickými deformacemi, nebrání-li tomu křehkost materiálu nebo časový průběh zatěžování vedoucí k únavě materiálu při relativně nízké úrovni namáhání.

Vezměme například ocel, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN m}^{-2}$, $\mu = 0,3$, $r = 500 \text{ mm}$,
 $h = \varepsilon = 10 \text{ mm}$. Pak

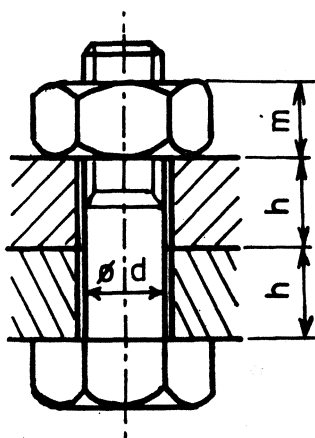
$$\sigma_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{0,91} \cdot \frac{100}{500^2} \approx 132 \text{ MN m}^{-2}, \quad (3.9)$$

což není malá hodnota. Přitom $\varepsilon/r = 0,02$.

Vzorec (3.8) byl odvozen za předpokladu, že průřez je eliptický, ale jen velmi málo odlišný od kružnice a že čela nádoby jsou daleko, takže se nemůže uplatnit jejich výztužný vliv (dál než asi $2,5 \sqrt{r h}$). Vzorec (3.8) dává pro ohybové napětí horní mez, neboť ani při velkém přetlaku se nedosáhne dokonalé kruhovosti původně nekruhového průřezu. Výhodou vzorce je jeho jednoduchost, neboť přesnější výpočet ohybových napětí (podle teorie eliptických prutů nebo podle teorie skořepin) je velmi pracný. *)

Ukázali jsme, že tvarová nedokonalost může zásadně změnit deformační vlastnosti tenkostěnných skořepin namáhaných vzpěrem. Avšak i u jednoduše namáhaných těles může vést ke vzniku přídavných ohybových (popř. i jiných) napětí. To je zvláště nežádoucí u součástí vyrobených z křehkého materiálu a u součástí namáhaných v únavě.

4. MONTÁŽNÍ NEPŘESNOSTI A DOTYKOVÁ TUHOST



Obr. 14

Vypočteme namáhání ocelového šroubu s dřívkem o průměru d , kterým se stahují dva plechy, každý o tloušťce h (obr. 14). Předpokládáme, že se po dosednutí otočí maticí o úhel β .

Při utahování šroubu se jeho dřív prodlužuje a plechy se stlačují. Z pokusů vyplývá, že se šroub deformuje částečně i v matici, takže je třeba počítat s efektivní délkou šroubu

$$l = 2h + 0,5m. \quad (4.1)$$

Plechy se stlačují jako by šlo o ideální tlak válce o vnějším průměru

*) Dvořák, J.: Strojírenství 17 (1967), č. 3, str. 171-174.

$$D = s + h, \quad (4.2)$$

kde s je otvor klíče. Vnitřní průměr je přibližně d . Pak tuhost šroubu je

$$k_1 = E \frac{\pi d^2}{4l} \quad (4.3)$$

a tuhost plechů

$$k_2 = E \frac{\pi(D^2 - d^2)}{8h} \quad (4.4)$$

Prodloužení šroubu označíme δ_1 , zkrácení plechů δ_2 . Bude-li síla přenášená šroubem F , bude

$$\delta_1 = F/k_1; \quad \delta_2 = F/k_2 \quad (4.5)$$

Součet obou těchto délek dá dohromady posuv matky po dřívku šroubu. Je-li výška závitu Δ , bude platit tato deformační podmínka:

$$\frac{\beta \Delta}{360} = \delta_1 + \delta_2 \quad (4.6)$$

Úhel otočení matky β měříme ve stupních. Odtud vyjde - s použitím rovnice (4.5) -

$$F = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{\beta \Delta}{360} \quad (4.7)$$

Dosaďme například $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$, $\beta = 15^\circ$, $d = 20 \text{ mm}$, $\Delta = 2,5 \text{ mm}$, $m = 16 \text{ mm}$, $h = 24 \text{ mm}$, $s = 30 \text{ mm}$. Vyjde

$$k_1 = 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4 \cdot (48 + 0,5 \cdot 16)} = 1,122 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1},$$

$$k_2 = 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot [(30 + 24)^2 - 20^2]}{8 \cdot 24} = 8,234 \cdot 10^6 \text{ N mm}^{-1}.$$

Ze vzorce (4.7)

$$F = \frac{1,122 \cdot 8,234}{1,122 + 8,234} \cdot \frac{15 \cdot 2,5}{360} = 0,103 \text{ MN}.$$

Tomu odpovídá napětí v dřívku šroubu v průřezu, který nebyl zeslaben závit-
tem *)

$$\sigma_{\xi} = \frac{0,103 \cdot 10^6}{\pi \cdot 20^2/4} \approx 328 \text{ MN m}^{-2}.$$

Zdálo by se, že tímto způsobem, tj. měřením úhlu otočení klíče od dosednutí matice šroubu, lze snadno kontrolovat předpětí šroubu. Avšak v praxi se to tak neprokázalo. Důvod je ten, že skutečné povrchy nejsou ani rovné ani hladké. **)

Předpokládejme nyní, že povrch je drsný a že jeho nerovnosti mají efektivní hloubku $30 \mu\text{m}$. Tyto nerovnosti se při utahování šroubu omačkají a plasticky zdeformují, takže skutečný posuv matice po šroubu je třeba brát jako rozdíl

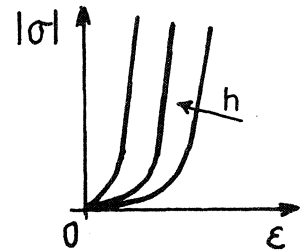
$$\frac{\beta \Delta}{360} - \frac{30}{1000} = \frac{15 \cdot 2,5}{360} - 0,03 = 0,074 \text{ mm}$$

a nikoli jako $\beta \Delta / 360 = 0,104 \text{ mm}$. Proto vyvozená síla F bude menší v poměru 74/104 a také napětí v dřívku šroubu bude jen

$$\sigma_{\xi} = 328 \cdot \frac{74}{104} \approx 234 \text{ MN m}^{-2}.$$

Bude tedy o 29 % menší než udává výpočet pro ideálně hladký povrch.

Omačkáním nerovností povrchu se do deformační charakteristiky vnáší nelinearita. Protože jde zčásti o plastické deformace, bude dotyková tuhost jiná při prvním a jiná při opakovaném zatížení. Projeví se zvláště tam, kde se stýká mnoho vrstev tenkého materiálu. Stlačuje-li se například stoh tenkých plechů, je závislost napětí $|\sigma|$ na poměrném stlačení $|\epsilon|$ a na tloušťce plechů h taková, jak je na obr. 15 schematicky znázorněno.



Obr. 15

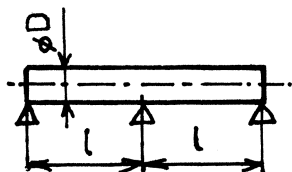
*) Připomeňme, že $1 \text{ N mm}^{-2} = 1 \text{ MN m}^{-2}$.

**) Vlivem přídatného ohybu šroubů způsobeného nerovnostmi popř. nerovnoběžnostmi dosedacích ploch se nebudeme zabývat; tuto problematiku považujeme za obecně známou.

Čím jsou plechy tenčí, tím je nelinearita této deformační charakteristiky výraznější. Na to je třeba pamatovat při vymezení vůlí mnoha tenkými distančními vložkami. Čtyři vložky po 0,05 mm budou mít poněkud menší tuhost než jedna vložka 0,2 mm; teprve při větším utahení se bude rozdíl vyrovnávat. Pro ocelové plechy stlačované ve stohu uvedli Treťjakov, Albrecht a Solovjev experimentální výsledky, jež lze popsat rovnicí

$$|\varepsilon| = 0,00947 \cdot h^{-0,3040} \cdot |\sigma|^{0,1129} \quad [\text{mm}, \text{MN m}^{-2}] \quad (4.8)$$

v rozsahu $|\sigma| < 250 \text{ MN m}^{-2}$ a pro tloušťky $h = 0,15$ až $2,5 \text{ mm}$
/Věstník Mašinstrojenija (1961), No. 8, str. 39 - 42/.



Obr. 16

Uvedeme jiný příklad montážních nepřesností. Chceme usadit ocelový hřídel o průměru D na třech nepoddajných ložiskách vzdálených o l (obr. 16). Ložiska budeme usazovat s použitím předepjaté ocelové struny o průměru d ; předpětí je F , hustota oceli ρ . Průhyb struny vlastní tíhou uprostřed rozpětí $2l$ bude

$$\delta = \frac{\pi \rho g d^2 l^2}{8 F} \quad (4.9)$$

Tento vzorec snadno odvodíme z diferenciální rovnice dokonale ohebné struny

$$F \frac{d^2 y}{dx^2} + q = 0, \quad (4.10)$$

kde $q = (\pi d^2/4) \rho g$ znamená tíhu připadající na jednotku délky. Okrajové podmínky jsou $y(0) = 0$, $y(2l) = 0$. Vyjde

$$y = \frac{q}{2F} x (2l - x) \quad (4.11)$$

a průhyb uprostřed rozpětí bude

$$\delta = y(l) = \frac{q l^2}{2F} \quad (4.12)$$

To je však vzorec (4.9). Hodnotu δ tedy "proměříme". To bude chyba v sousostí domněle dokonale usazeného ložiska. Po vložení hřídele do pánví může nastat případ, že hřídel bude dosedat jen v krajních ložiskách. Jeho průhyb vyvolaný vlastní tíhou bude

$$\Delta = \frac{5}{384} \frac{q^*(2l)^4}{EJ} = \frac{5}{24} \frac{q^* l^4}{EJ}, \quad (4.13)$$

kde

$$q^* = \frac{\pi D^2}{4} \rho g. \quad (4.14)$$

Protože $J = \pi D^4/64$, bude nakonec

$$\Delta = \frac{5}{24} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \rho g \frac{l^4}{E} \cdot \frac{64}{\pi D^4} = \frac{10}{3} \frac{\rho g l^4}{E D^2}. \quad (4.15)$$

Hřídel dosedne na všechny tři ložiska teprve, když předpětí struny F bude splňovat nerovnost

$$F \geq \frac{3\pi}{80} \frac{\alpha^2}{l^2} D^2 E. \quad (4.16)$$

Napětí ve struně pak bude

$$\sigma_s = \frac{4F}{\pi \alpha^2} \geq \frac{3}{20} \frac{D^2}{l^2} E. \quad (4.17)$$

Je zajímavé, že pravá strana této nerovnosti neobsahuje průměr struny α . Je-li např. $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN m}^{-2}$, $D = 200 \text{ mm}$, $l = 2000 \text{ mm}$, bude podle (4.17)

$$\sigma_s \geq \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{200}{2000} \right)^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \doteq 300 \text{ MN m}^{-2}. \quad (4.18)$$

Potřebné napětí tedy bude poměrně velké. Bude-li předpětí dosahovat právě hodnoty podle pravé strany (4.18), bude průhyb struny a hřídele vlastní tíhou stejný a bude dosahovat hodnoty

$$\delta = \frac{\rho g l^2}{2 \sigma_s} = \frac{7800 \cdot 9,81 \cdot 2^2}{2 \cdot 1200 \cdot 10^6} \doteq 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,128 \text{ mm}.$$

Hřídel se sice bude dotýkat všech ložisek, ale reakce se budou přenášet jen v krajních ložiskách, prostřední nebude vůbec zatíženo. Tíha Q hřídele se tedy zachytí reakcemi

$$R_1 = 0,5 Q; \quad R_2 = 0; \quad R_3 = 0,5 Q. \quad (4.19)$$

Zaškrábeme-li krajní ložiska tak, aby se eliminovala nepřesnost daná průhybem struny δ , tj. o 0,128 mm, budou reakce

$$R_1 = 0,1875 Q; \quad R_2 = 0,625 Q; \quad R_3 = 0,1875 Q. \quad (4.20)$$

Tento výsledek dává "školní" úloha o hřídeli třikrát ideálně podepřeném podle obr. 16 a rovnoměrně zatíženém.

Je zřejmé, že nepatrným zaškrábáním se podstatně změní rozdělení reakcí. Ve skutečnosti nejsou ložiska absolutně tuhá a nepoddajná, ani je nelze nastavovat a zaškrábávat s absolutní přesností. Vliv pružnosti se uplatní tak, že rozdělení reakcí se bude blížit rovnoměrnému ($R_1 = R_2 = R_3 = Q/3$) a to tím více, čím bude pružinová konstanta ložisek menší (ovšem jen bude-li u všech ložisek stejná). Vliv vůlí a montážních nepřesností se projeví změnou rozdělení reakcí a tím i změnou provozního namáhání hřídele.

Probraný příklad nás poučil o tom, že výpočet staticky neurčitých pružných soustav má smysl jen tenkrát, známe-li přesně okrajové podmínky a deformační vazby. Malá změna těchto podmínek nebo deformačních vazeb může někdy způsobit velkou změnu namáhání některých členů soustavy. S takovými případy se setkáme ještě několikrát při dalším výkladu.

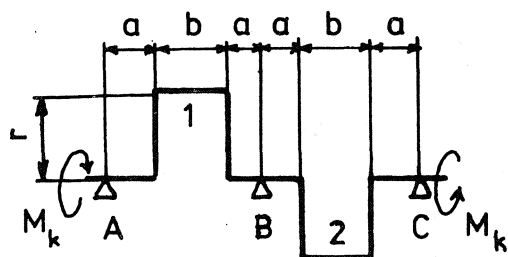
V této kapitole jsme se přesvědčili o tom, že u staticky neurčitých pružných soustav mohou vzniknout podstatné změny napjatosti, jestliže se jen málo změní okrajové nebo deformační podmínky (uplatní-li se např. odchylka od souososti, plastická deformace mikronerovností drsného povrchu aj.). Detailní výpočet staticky neurčitých soustav má smysl pouze tehdy, známe-li deformační a okrajové podmínky s dostatečnou přesností. Vyplatí se odhadnout možné důsledky montážních nepřesností.

5. NAMÁHÁNÍ KLIKOVÝCH HŘÍDELŮ

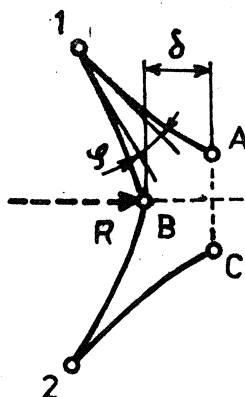
Nebudeme zde probírat tuto speciální problematiku stavby strojů. Zájemce odkazujeme na odbornou literaturu, např. na autorův článek ve Strojnickém sborníku sv. 11, SNTL, Praha 1954. Zde upozorníme jen na to, že staticky neurčitě uložené klikové hřídele jsou namáhány mnohem složitěji než hladké hřídele za jinak stejných podmínek. Je to dáno tím, že se ohýbají a zkrucují nejenom čepy hřídele, ale také jeho ramena a že ložiskové a ojnicí čepy nemají společnou osu.

Probereme například, jak se chovají dvě kliky v téže rovině při namáhání krutem podle obr. 17. Kliky svírají úhel 180°. Hřídel jsme si

idealizovali jako tenký prut uložený ve třech ložiskách. Odchytky efektivních délek při výpočtu deformací od skutečných délek čepů a ramen zanedbáme, protože nám jde v současné chvíli jen o to, abychom poukázali na jistý zdánlivý paradox.



Obr. 17



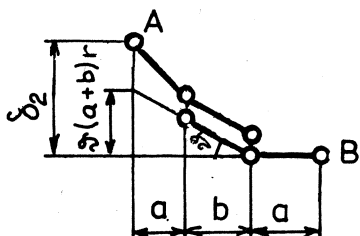
Obr. 18

Uvolníme ložisko B. Účinkem krouticího momentu se ohnou a rozevřou ramena u obou klik tak, že výsledná deformace bude jako na obr. 18. Je-li ohybová tuhost ramen při ohybu kolmo k nákresně na obr. 17 rovna EJ_1 , torzní tuhost čepů GJ_p , bude

$$\delta = \frac{M_k r^2}{EJ_1} + \varphi r, \quad (5.1)$$

$$\varphi = \frac{M_k b}{GJ_p}. \quad (5.2)$$

První člen na pravé straně rovnice (5.1) odpovídá dvojnásobku průhybu nosníku na jednom konci vetknutého, zatíženého konstantním ohybovým momentem $M_0 = M_k$. Jde o ohyb ramene. Druhý člen popisuje skok v průhybové čáře způsobený zkroucením ojnicního čepu o úhel φ . Obr. 18 je poněkud nezvyklý tím, že deformace jsou zakreslovány s velkým zvětšením a tak, aby čepy hřídele zůstaly kolmé k nákresně. Zakreslený průmět ohybové čáry tedy znázorňuje pouze ramena, čepy se promítají do bodů vyznačených kroužky. Zlom čáry v bodě B je dán zkroucením čepu v ložisku B. Podobně se projeví i zkroucení ojnicních čepů 1, 2 o úhel φ . Zůstanou-li středy ložiskových čepů A, C na ose spojující ložiska, vybočí ložiskový čep B z této osy kolmo k nákresně na obr. 17 o hodnotu δ . Chceme-li jej vrátit zpět, musíme připojit reakci R čárkovane vyznačenou na obr. 18. Způsobí deformaci čepů i ramen. Ohybem čepů vznikne v místě B průhyb



Obr. 19

$$\delta_1 = \frac{R(4a+2b)^3}{48 EJ} = \frac{R(2a+b)^3}{6 EJ} \quad (5.3)$$

Krutem ramen a ojničních čepů vznikne (obr.19)

$$\delta_2 = \frac{Rr}{2GJ_k} [(a+b)^2 + a^2] + \frac{Rbr^2}{2GJ_p} \quad (5.4)$$

Ramena se promítají do neoznačených zakroužkovaných bodů; ohybová čára je lomená vlivem krutu v ramenech. Např. zkroucení druhého ramene vzniká účinkem momentu $(R/2)(a+b)$; pro zkrut dostaneme

$$\varphi^r = \frac{R}{2} (a+b) / GJ_k \quad (5.5)$$

Tím vzniká relativní posuv podpory A vzhledem ke klikovému čepu v podpoře B o velikosti $\varphi^r (a+b)$. To však je první člen na pravé straně rovnice (5.4). Obdobně odvodíme i druhý člen, který odpovídá zkroucení prvního ramene momentem $(R/2) \cdot a$. Třetí člen značí zkrut ojničního čepu.

Reakci R vypočteme z deformační podmínky

$$\delta_1 + \delta_2 \approx \delta \quad (5.6)$$

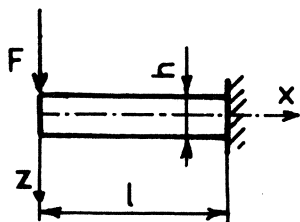
Tím je dáno i ohybové namáhání hřídele, ačkoli jsme hřídel zatížili pouze krouticím momentem. Nelze tedy o čistém krutu vůbec hovořit.

U řadových motorů jsou klikové hřídele mnohokrát staticky neurčitě uloženy. Výpočet reakcí a namáhání hřídele je složitou prostorovou úlohou. Výsledky jsou iluzorní, nebereme-li v úvahu poddajnost, nesouosost a vůle v ložiskách. Proto se v praxi posuzuje namáhání klikového hřídele jen podle jedné, nejvíce zatížené kliky, o které se předpokládá, že je uložena staticky určitě na nejbližších ložiskách; vliv vzdálenějších podpor se zanedbává. Zatížení kliky představuje časově proměnná síla na ojničním čepu, která má radiální a obvodovou složku, a krouticí moment přenášený danou klikou z ostatních částí klikového hřídele. Setrvačné síly se zpravidla počítají za předpokladu rovnoměrné rotace hřídele; torzní kmitání, které se často vyskytuje u hřídelů řadových motorů, se počítá zvlášť a superponuje se. Účinky torzního kmitání se však mohou projevit vlivem staticky neurčitěho uložení hřídele a vlivem členitosti klikového mechanismu mnohem složitěji než se na první pohled zdá.* Ke statické neurčitosti hřídele se přihlíží jen výjimečně. Často postačí, uvažujeme-li pouze tři sousední ložiska a vliv ostatních zanedbáme. Podrobnější výpočet má smysl jen tehdy, známe-li dostatečně přesné podmínky skutečného uložení hřídele.

* Viz autorův článek v časopise Strojírenství, sv. 4 (1954), č. 3, s. 163 - 170.

V této kapitole jsme ukázali složitost namáhání staticky neurčitě uložených klikových hřídelů, která vzniká i při jednoduchém zatížení. Vysvětlili jsme zdánlivě paradoxní vznik ohybového namáhání klikového hřídele zatíženého pouze krouticím momentem. Účinky torzního namáhání jsou proto u klikových hřídelů mnohem složitější než u hladkých hřídelů. Kroucením se obecně vyvodí i ohybové namáhání, při němž vznikají nenulové reakce v ložiskách.

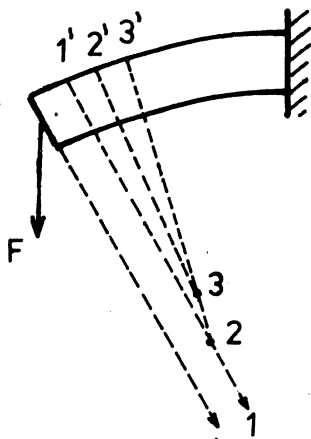
6. ZÁLUDNOSTI CASTIGLIANOVY VĚTY



Obr. 20

Probereme případ vetknutého nosníku obdélníkového průřezu $h \times b$ a zatíženého na konci silou F (obr. 20). Platí-li Bernoulliho-Navierova hypotéza, vyjde průhyb na konci nosníku, jak známo

$$\delta_0 = \frac{Fl^3}{3EJ} \quad (6.1)$$



Obr. 21

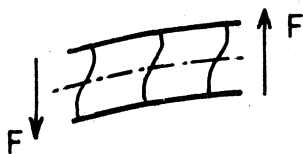
Vzorec (6.1) se odvodí tak, že se přihlíží pouze k ohybovým deformacím nosníku a vliv smyku působeného posouvající silou F se zanedbává. Předpokládá se, že průřezy zůstávají rovinné, vzájemně se natáčejí, ale neposouvají se (obr. 21). Jak roste ohybový moment, tak se zvětšuje i křivost nosníku, takže středy křivosti 1, 2, 3 se k nosníku přibližují.

Ve skutečnosti nejde o čistý ohyb, takže v průřezu vznikají také smyková napětí. Z rovnic rovnováhy lze jejich velikost přibližně odvodit, přijme-li se předpoklad, že rozdělení normálových napětí v průřezu se účinkem smyku nezmění.

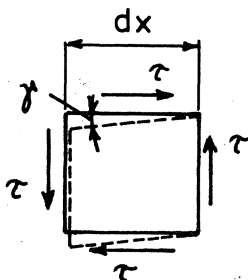
Dostaneme pak tyto vztahy:

$$\sigma_0 = -\frac{12F}{bh^3} \times z \quad (6.2)$$

$$\tau = \frac{3F}{2bh} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (6.3)$$



Obr. 22



Obr. 23

Rovnice (6.2) a (6.3) popisují průběh ohybového a smykového napětí v nosníku znázorněném na obr. 20. Účinkem smyku vzniká zřejmě zborcení průřezů podle obr. 22. Je u všech průřezů stejné, takže délka podélných vláken se tímto zborcením nemění. To platí, pokud je posouvající síla konstantní a posuvy jsou malé. V neutrální ose působí smykové napětí

$$\tau_0 = \tau(z=0) = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{bh} \quad (6.4)$$

Podle obr. 23 vznikne na elementu o délce dx relativní posuv $\gamma dx = \tau_0 dx / G$. Zvětšení průhybu účinkem smykových napětí τ proto vyjde

$$\delta_1 = \frac{\tau_0}{G} \int_0^l dx = \frac{3Fl}{2Gb} \quad (6.5)$$

Celkový průhyb bude

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 = \frac{Fl^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{E}{G} \frac{h^2}{l^2} \right) \quad (6.6)$$

Problém můžeme řešit také jinak. Vypočteme celkovou energii napjatosti v nosníku *)

$$U = \frac{1}{2E} \int G^2 dV + \frac{1}{2G} \int \tau^2 dV \quad (6.7)$$

S použitím rovnic (6.2) a (6.3) vypočteme, že

$$\begin{aligned} U &= \frac{b}{2E} \int_{x=0}^l dx \int_{z=-h/2}^{h/2} G^2(x, z) dz + \frac{bl}{2G} \int_{z=-h/2}^{h/2} \tau^2(z) dz = \\ &= \frac{2F^2 l^3}{Ebh^3} + \frac{3}{5} \frac{F^2 l}{Gbh} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Uvážíme-li, že $J = bh^3/12$, můžeme poslední vztah napsat ve tvaru

$$U = \frac{F^2 l^3}{6EI} \left(1 + \frac{3}{10} \frac{E}{G} \frac{h^2}{l^2} \right) \quad (6.9)$$

*) V lineární elasticitě se tato energie rovná deformační energii, je však vyjádřena jako funkce silových (a nikoli deformačních) veličin.

Podle Castiglianovy věty je posuv působivosti síly

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl^3}{3EJ} \left(1 + \frac{3}{10} \frac{E}{G} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (6.10)$$

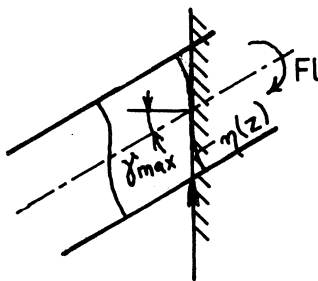
Porovnáme-li tento výsledek s rovnicí (6.6) vidíme, že se druhý člen v závorce liší. Vliv posouvající síly vyjádřený druhým členem v rovnici (6.6) bude v poměru 10 : 8 větší než podle rovnice (6.10). Jak je to možné? Vždyť pokaždé jsme použili stejného vztahu (6.3) pro výpočet smykových napětí.

Rozdíl posuvů vypočtených podle obou vzorců je

$$\Delta \delta = \frac{4Fl^3}{Ebh^3} \cdot \frac{E}{G} \frac{h^2}{l^2} \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{10} \right) = \frac{3}{10} \frac{Fl}{Gbh} \quad (6.11)$$

Protože posuv δ je dán parciální derivací energie napjatosti U podle síly F , odpovídá hodnotě $\Delta \delta$ přírůstek deformační práce

$$\Delta U = \frac{3}{20} \frac{F^2 l}{Gbh} \quad (6.12)$$



Obr. 24

O tuto hodnotu by měla být práce U podle (6.9) větší, abychom dostali její derivací průhyb (6.6). Ukážeme, jak to souvisí s deformací nosníku v místě vetknutí (obr. 24).

Deplanaci průřezu popisuje funkce $\gamma(z)$. Záporný zkos se bude rovnat derivaci této funkce (až na konstantu C), takže

$$-\gamma = \frac{d\gamma}{dz} + C = -\frac{\tau(z)}{G} \quad (6.13)$$

K tomuto závěru dojdeme, když si připomeneme definici zkosu jako změny pravého úhlu a geometrický význam první derivace jako směrnice tečny k čáře $\gamma(z)$. Přitom uvážíme, že konstantnímu zkosu odpovídá lineární průběh $\gamma(z)$, tedy otočení průřezu nosníku jako tuhého celku. Bude

$$\gamma = -\frac{3F}{2Ghb} \left(z - \frac{4}{3h^2} z^3 + Cz + C_1 \right) \quad (6.14)$$

Protože $\gamma(0) = 0$, musí být $C_1 = 0$. Dále požadujeme, aby $\left. \frac{d\gamma}{dz} \right|_{z=0} = 0$ (obr. 24). Proto $C = -1$ a

$$\psi(z) = \frac{2F}{Gbh^3} z^3. \quad (6.15)$$

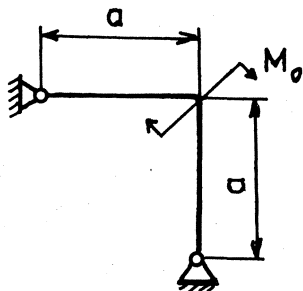
Při zatěžování nosníku se průřez v místě vetknutí postupně bortí podle této rovnice a ohybové napětí $\sigma_0(x=l, z)$ dává elementární síly ekvivalentní reakčnímu momentu $F\ell$. Tyto síly spotřebují práci

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_0(l, z) \psi(z) b dz = \frac{6F\ell}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z \psi(z) dz = \\ &= \frac{12 F^2 \ell}{G b h^6} \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz = \frac{3}{20} \frac{F\ell^2}{G b h}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

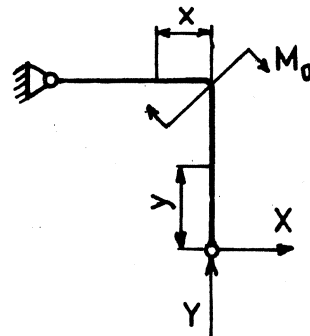
Jedna polovina před integrálem na pravé straně (6.16) je proto, že posuvy $\psi(z)$ narůstají úměrně s ohybovým napětím σ_0 (se silou F), takže elementární práce je dána součinem výsledného posuvu $\psi(z)$ a průměrné (tedy poloviny konečné) hodnoty elementární síly $\sigma_0(l, z) b dz$. Práci U_1 musí dodat síla F navíc proti původnímu předpokladu, neboť v rovnici (6.7) se s touto prací nepočítalo. O hodnotu U_1 je třeba zvětšit hodnotu U , abychom dostali skutečně celou energii akumulovanou v nosníku podle našeho deformačního modelu na obr. 24. Opravdu platí, že

$$\Delta U = U_1. \quad (6.17)$$

To plyne ze srovnání rovnic (6.12) a (6.16). Tím je zdánlivý paradox vysvětlen. Správný vzorec pro průhyb je tedy (6.6).



Obr. 25



Obr. 26

Uvedeme dále výpočet kloubově uloženého rámu zatíženého silovou dvojicí podle obr. 25. Ohybová tuhost $EJ = \text{konst.}$ Složky reakce ve spodním kloubu označíme X, Y (obr. 26). Ve svislém ramenu dostaneme ohybový moment

$$M_1 = X y \quad (6.18)$$

a ve vodorovném

$$M_2 = X a - M_0 - Y x. \quad (6.19)$$

Budeme přihlížet pouze k ohybu, vliv stlačení či roztažení prutu a vliv posunutí průřezů posouvající silou zanedbáme. Protože kloub se ve skutečnosti neposune, musí být podle Castiglianovy věty

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0. \quad (6.20)$$

Přitom U značí celkovou energii napjatosti uloženou v rámu, která přísluší ohybovým napětím. Zřejmě

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2EJ} \left[\int_0^a M_1^2(y) dy + \int_0^a M_2^2(x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{6EJ} \left[a^3(4X^2 + 3XY + Y^2) - 3a^2 M_0(2X + Y) + 3a M_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Proto platí podle (6.20) tyto deformační podmínky:

$$\begin{aligned} 8aX + 3aY &= 6M_0, \\ 3aX + 2aY &= 3M_0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Odtud

$$X = \frac{3}{7} \frac{M_0}{a}, \quad Y = \frac{6}{7} \frac{M_0}{a}. \quad (6.23)$$

Toto řešení však nevyhovuje momentové podmínce rovnováhy

$$Xa + Ya = M_0. \quad (6.24)$$

Jak je to možné?

Chyba vznikla tím, že máme dvě deformační podmínky (6.20), ačkoli úloha je jen jednou staticky neurčitá. Má-li platit rovnice rovnováhy (6.24), není Y nezávislá veličina, ale je

$$Y = \frac{1}{a} M_0 - X = f(X) \quad (6.25)$$

a místo rovnic (6.20) má být jediná rovnice

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial X} = 0. \quad (6.26)$$

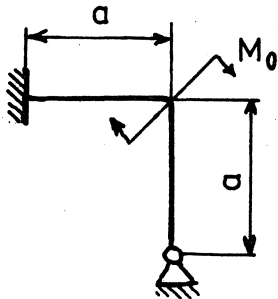
Kromě rovnice (6.24), která musí být samozřejmě splněna, bude platit už jen jedna deformační podmínka (6.26). Ta dává

$$5aX + aY = 3M_0. \quad (6.27)$$

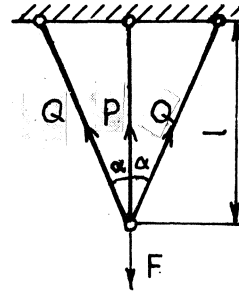
Správný výsledek je řešením rovnic (6.24) a (6.27) a je

$$X = \frac{1}{2} \frac{M_0}{a}, \quad Y = \frac{1}{2} \frac{M_0}{a}. \quad (6.28)$$

Předpisem deformačních podmínek (6.20) jsme dosáhli nevědomky toho, že řešení (6.23) odpovídá případu znázorněnému na obr. 27, který se liší od zadání na obr. 25 vetknutím na horním konci rámu.



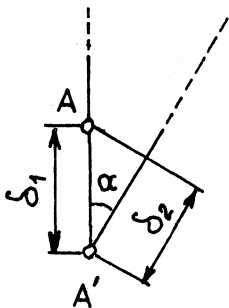
Obr. 27



Obr. 28

Jako další příklad probereme výpočet prodloužení svazku tří vláken, pro která platí nelineární zákon (obr. 28)

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n. \quad (6.29)$$



Obr. 29

Je-li $n = 1$, dostáváme Hookeův zákon, tj. lineární vztah mezi tahovým napětím a poměrným prodloužením vlákna. Bude platit podmínka rovnováhy sil

$$P + 2Q \cos \alpha = F \quad (6.30)$$

a deformační podmínka (obr. 29)

$$\delta_2 = \delta_1 \cos \alpha. \quad (6.31)$$

Při zatížení se uzel A posune do polohy A'.

Protože

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \quad (A = \text{průřez}), \quad (6.32)$$

bude

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\sigma_1}{E} \right)^n = \left(\frac{P}{EA} \right)^n \quad (6.33)$$

a prodloužení prvního vlákna vyjde

$$\delta_1 = \varepsilon_1 l = l \left(\frac{P}{EA} \right)^n. \quad (6.34)$$

Obdobně

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{l}{\cos \alpha} = \frac{l}{\cos \alpha} \left(\frac{Q}{EA} \right)^n. \quad (6.35)$$

Deformační podmínka (6.31) proto dává vztah

$$Q = P \cos^{\frac{2}{n}} \alpha. \quad (6.36)$$

Z rovnic (6.30) a (6.36) vyjde (s označením $m = \frac{2+n}{n}$)

$$P = \frac{F}{1 + 2 \cos^m \alpha}, \quad Q = \frac{F \cos^{m-1} \alpha}{1 + 2 \cos^m \alpha}. \quad (6.37)$$

Posuv společného uzlu bude podle (6.34)

$$\delta_1 = l \left(\frac{F}{EA} \right)^n \left(\frac{1}{1 + 2 \cos^m \alpha} \right)^n. \quad (6.38)$$

Kdybychom jej chtěli počítat podle Castiglianovy věty, vypočetli bychom energii napjatosti

$$U = A l \int \sigma_1 d\varepsilon_1 + 2A \frac{l}{\cos \alpha} \int \sigma_2 d\varepsilon_2 = U_1 + 2U_2. \quad (6.39)$$

První integrál dává

$$\begin{aligned}
 U_1 &= A l \int_0^P \frac{P}{A} n \left(\frac{P}{EA} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{EA} dP = \\
 &= n l \int_0^P \left(\frac{P}{EA} \right)^n dP = \frac{n l}{n+1} \cdot \frac{P^{n+1}}{(EA)^n}.
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Protože první vlákno přenáší pouze sílu P , musí být

$$\delta_1 = \frac{\partial U_1}{\partial P} = n l \left(\frac{P}{EA} \right)^n. \tag{6.41}$$

To je však hodnota n -krát větší než podle (6.34). Kde je chyba?

Poněvadž jde o nelineárně pružný materiál, musíme použít komplementární energii napjatosti

$$U^* = A l \int \epsilon_1 d\sigma_1 + 2A \frac{l}{\cos \alpha} \int \epsilon_2 d\sigma_2 = U_1^* + 2U_2^*. \tag{6.42}$$

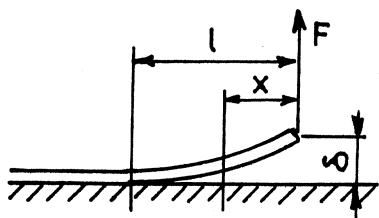
U lineárně pružného tělesa je $U^* = U$; není-li však $n=1$, tak tato rovnost neplatí. První integrál dává

$$\begin{aligned}
 U_1^* &= A l \int_0^P \left(\frac{P}{EA} \right)^n \frac{1}{A} dP = l \frac{1}{(EA)^n} \int_0^P P^n dP = \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{l}{(EA)^n} \cdot P^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Pak skutečně platí, že

$$\delta_1 = \frac{\partial U_1^*}{\partial P} = l \left(\frac{P}{EA} \right)^n \tag{6.44}$$

a staticky neurčitá síla P je taková, že minimalizuje komplementární energii napjatosti U^* podle (6.42).



Obr. 30

Další úloha se týká polonekonečného prutu na rovné podložce podle obr. 30, který zdviháme na jeho konci malou silou F . Ptáme se, jaký bude zdvih δ , je-li tíha připadající na jednotku délky nosníku q a ohybová tuhost EJ .

Prut odlehne do vzdálenosti l , kterou určíme z podmínky, že $M(x=l) = 0$ (dál má

nosník nulovou křivost, a tedy i nulový ohybový moment). Protože

$$M(x) = Fx - \frac{1}{2} qx^2 \quad \text{pro } 0 \leq x \leq l, \quad (6.45)$$

bude $F l - \frac{1}{2} q l^2 = 0$ a odtud

$$l = \frac{2F}{q}. \quad (6.46)$$

Energie napjatosti je

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{M^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2EJ} \int_0^l (Fx - \frac{1}{2} qx^2)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2EJ} \left[\frac{1}{3} F^2 l^3 - \frac{1}{4} F q l^4 + \frac{1}{20} q^2 l^5 \right]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Dosadíme-li sem z rovnice (6.46) $q = 2F/l$, dostaneme

$$U = \frac{1}{60} \frac{F^2 l^3}{EJ}. \quad (6.48)$$

Zdvih δ nyní vypočteme pomocí Castiglianovy věty. Vyjde

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{30} \frac{F l^3}{EJ}. \quad (6.49)$$

Tento výsledek je falešný. Zapomněli jsme, že délka l je závislá na síle F , takže správně mělo být

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial U}{\partial F} + \frac{\partial U}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial F} = \\ &= \frac{1}{30} \frac{F l^3}{EJ} + \frac{1}{20} \frac{F^2 l^2}{EJ} \frac{2}{q} = \frac{5}{60} \frac{F l^3}{EJ} = \frac{2}{3} \frac{F^4}{q^3 EJ}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Týž výsledek bychom dostali, kdybychom z rovnice (6.47) vyloučili l . Dosadili bychom podle (6.46) a vyšlo by

$$U = \frac{2}{15} \frac{F^5}{q^3 EJ}. \quad (6.51)$$

Potom

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{2}{3} \frac{F^4}{Q^3 EJ}, \quad (6.52)$$

což je výsledek shodný se vzorcem (6.50).

Kdybychom nechtěli použít Castiglianovy věty, mohli bychom si představit, že nosník je v řezu $X = \ell$ vetknutý. Ze známých vzorců pro vetknutý nosník bychom vypočetli

$$\delta = \frac{F\ell^3}{3EJ} - \frac{Q\ell^4}{8EJ} = \frac{2}{3} \frac{F^4}{Q^3 EJ}. \quad (6.53)$$

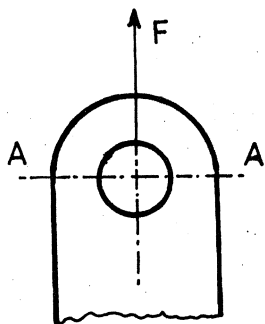
To však znamená, že jsme mohli derivovat vztah (6.47) parciálně podle F (při $\ell = \text{konst}$) a dostali bychom totéž. Jak je možné, že bychom v tomto případě nemuseli derivovat U jako složenou funkci $U[F, \ell(F)]$? Je to tím, že v tomto případě řešíme lineární úlohu o nosníku vetknutém ve vzdálenosti, která je předem známa.

V této kapitole jsme se přesvědčili, že Castiglianova věta je velmi účinným matematickým nástrojem, ale nebezpečným v rukou nezkušeného výpočtáře. Je-li materiál nelineárně pružný, je nutné rozlišovat obyčejnou (fyzikální) energii napjatosti od komplementární (fiktivní) energie napjatosti. Dále je třeba dbát o správné určení stupně statické neurčitosti. Do výpočtu musíme zahrnout skutečně všechnu deformační práci. Neplatí-li pro danou soustavu zákon superpozice, je třeba zvláštní opatrnosti.

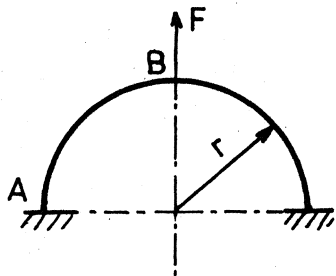
7. PROBLEMATICKÉ OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Chceme počítat napjatost v závěsném oku táhla podle obr. 31. Rozhodneme se, že budeme řešit půlkružnicový křivý prut nad řezem A-A zatížený v rovině souměrnosti silou F . Nabízí se představa, že prut je v řezu A-A vetknutý (obr. 32). Uložení prutu v rovině A-A však nebude absolutně tuhé. Uvolníme-li úplně vazbu v této rovině (až na normálovou sílu), dostaneme případ podle obr. 33. Zdá se, že jsme nyní tuto vazbu uvolnili nadměrně.

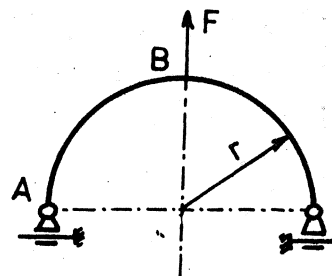
Jiná možnost je považovat prut za kloubově podepřený (obr. 34). Jde o určitý kompromis, při němž uvolňujeme na konci prutu jen jeden stupeň volnosti. Jiným kompromisem by mohlo být, kdybychom považovali konce prutu za posuvné, ale bez možnosti otočení (obr. 35).



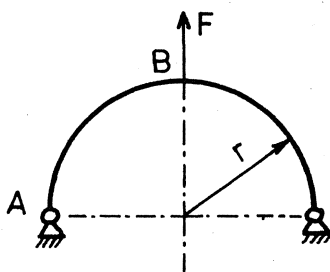
Obr. 31



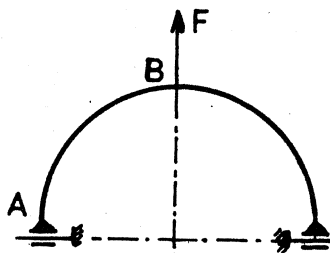
Obr. 32



Obr. 33



Obr. 34



Obr. 35

Výsledky, které dostaneme, se navzájem podstatně liší, jak plyne ze srovnání výsledků odvozených z teorie tenkých křivých prutů pro tyto tři případy - viz tab. 1. Teorie tlustých prutů by dala kvalitativně stejné výsledky a nebudeme je proto uvádět.

Tab. 1

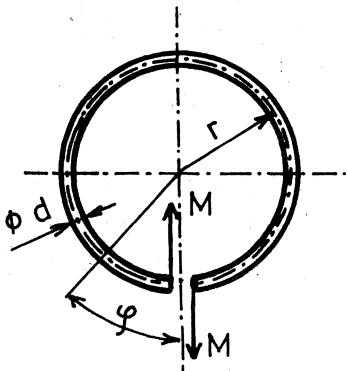
Obr.	M_A	M_B
32	-0,1106 Fr	-0,1515 Fr
33	0	-0,5000 Fr
34	0	-0,1817 Fr
35	0,1817 Fr	-0,3183 Fr

Rozdíly jsou zásadní, u momentu M_A se dokonce mění znaménko. Jakou idealizaci tedy vybrat? Nejlépe žádnou a řešit napjatost v oku buď experimentálně (např. fotoelasticimetricky) nebo metodou konečných prvků s užitím teorie rovinné pružnosti. Přitom je třeba pamatovat i na to, že napjatost bude značně záviset na vůli mezi čepem a okem a to zvláště, je-li tato vůle malá. O tomto problému bylo již napsáno hodně literatury a nebudeme se jím podrobněji zabývat. Chtěli jsme jen ukázat, že způsob idealizace může zásadně ovlivnit výsledek výpočtu.

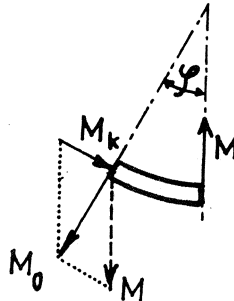
Závisí-li výsledek výpočtu podstatně na volbě okrajových podmínek a nevyplývají-li okrajové podmínky dostatečně přesně z fyzikální skutečnosti, je třeba brát výpočty založené na subjektivně podmíněné idealizaci s rezervou.

8. VZPĚR HUSTĚ VINUTÝCH ŠROUBOVITÝCH PRUŽIN

Hustě vinutou šroubovitou válcovou pružinu z drátu ϕd , s poloměrem vinutí r a s počtem N závitů připadajícím na délku l nahradíme elasticky ekvivalentním válcem s ohybovou tuhostí B a s tuhostí ve smyku C .



Obr. 36



Obr. 37

Při namáhání čistým ohybem se moment M přenáší do jednoho závitu podle obr. 36. V řezu určeném úhlem φ bude působit ohybový moment M_0 a kroticí moment M_k (obr. 37)

$$M_0 = M \cos \varphi,$$

$$M_k = M \sin \varphi. \quad (8.1)$$

Energie napjatosti v délce $r d\varphi$ bude $dU_1 = M_0^2 r d\varphi / 2EJ + M_k^2 r d\varphi / 2GJ_k$, takže

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{M^2 r}{2EJ} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{M^2 r}{2GJ_k} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{\pi M^2 r}{2EJ} \left(1 + \frac{EJ}{GJ_k} \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Protože pro kruhový průřez máme

$$J = \frac{\pi d^4}{64}, \quad J_k = \frac{\pi d^4}{32} \quad (8.3)$$

a dále $E = 2(1+\mu)G$ (μ je Poissonovo číslo), vyjde z rovnice (8.2)

$$U_1 = \frac{32Mr^2}{Ed^4} (2+\mu). \quad (8.4)$$

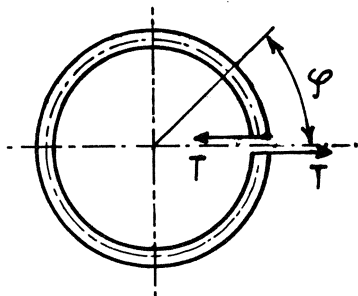
Pro ekvivalentní ohybovou tuhost B musí platit podmínka rovnosti úhlů otočení průřezů vzdálených o l/n u náhradního prutu a u pružiny, takže

$$\frac{Ml}{nB} = \frac{\partial U_1}{\partial M}. \quad (8.5)$$

Odtud

$$B = \frac{El d^4}{64(2+\mu)nr}. \quad (8.6)$$

Je-li pružina ohýbána ve stlačeném nebo roztaženém stavu, odpovídá l skutečné délce pružiny v tomto stavu.



Obr. 38

Pro případ smyku platí obr. 38. Ohybový moment v řezu daném úhlem φ je

$$M_0 = Tr \sin \varphi. \quad (8.7)$$

Drát pružiny přitom není zkrucován. Energie napjatosti proto bude

$$U_2 = \frac{T^2 r^3}{2EJ} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi T^2 r^3}{2EJ}. \quad (8.8)$$

S využitím první z rovnic (8.3) vyjde

$$U_2 = \frac{32T^2 r^3}{Ed^4}. \quad (8.9)$$

Ekvivalence smykových deformací se vyjádří rovnicí

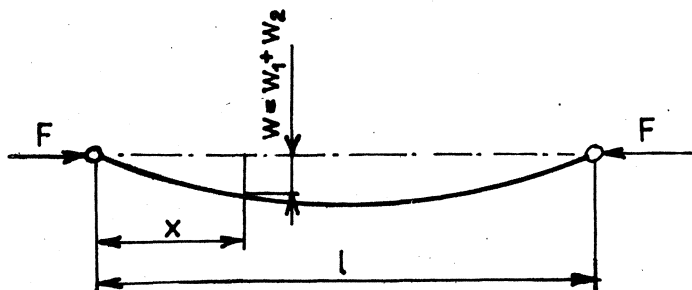
$$\frac{Tl}{nC} = \frac{\partial U_2}{\partial T}, \quad (8.10)$$

odkud

$$C = \frac{E l d^4}{64 n r^3} \quad (8.11)$$

Také zde se délka l vztahuje k deformované pružině.

Tím jsme vyřešili první část úlohy. Nyní stačí řešit vzpěr náhradního prutu, který má - na rozdíl od obvyklých případů štíhlých prutů -



Obr. 39

relativně malou tuhost ve smyku C . Musíme tedy přihlídnout i ke smykové deformaci. Průhyb W vzpěry se proto bude skládat z hodnoty W_1 vyplývající z čistě ohybové deformace a z přírůstku W_2 vlivem smyku (obr. 39). Bude platit, že

$$W = W_1 + W_2 \quad (6.12)$$

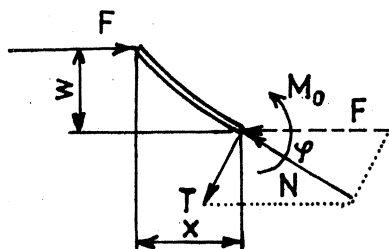
Zderivujeme-li tento vztah, budeme moci dosadit podle definice smykové tuhosti C

$$dW_2 = \frac{T}{C} dx, \quad (8.13)$$

takže vyjde

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dW_1}{dx} + \frac{T}{C} \quad (8.14)$$

Zde T je posouvající síla v průřezu.



Obr. 40

Uvážíme-li rovnováhu uvolněné části podle obr. 40 dojdeme k závěru, že

$$T = F \sin \varphi \doteq F \frac{dw}{dx} \quad (8.15)$$

Proto podle rovnice (8.14)

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dW_1}{dx} + \frac{F}{C} \frac{dw}{dx} \quad (8.16)$$

Jelikož $d^2W_1/dx^2 = -M_0/B$ a zároveň $M_0 = Fw$, vyjde po další derivaci z rovnice (8.16)

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{F}{B} w + \frac{F}{C} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (8.17)$$

Dostáváme tak problém vlastních hodnot

$$\left(1 - \frac{F}{C}\right) \frac{d^2 W}{dx^2} = -\frac{F}{B} W \quad (8.18)$$

s okrajovými podmínkami

$$W(0) = 0, \quad W(l) = 0. \quad (8.19)$$

Předpokládáme-li řešení splňující nulovou podmínku ve tvaru

$$W = a \sin \lambda x \quad (8.20)$$

dostaneme z rovnice (8.18)

$$\lambda^2 \left(1 - \frac{F}{C}\right) = \frac{F}{B}. \quad (8.21)$$

Má-li být splněna i druhá okrajová podmínka, musí být λl celistvým násobkem čísla π . Nejmenší nenulová vlastní hodnota dává $\lambda = \pi/l$ a odtud

$$\frac{\pi^2}{l^2} \left(1 - \frac{F}{C}\right) = \frac{F}{B}. \quad (8.22)$$

Označíme-li Q Eulerovu kritickou sílu, která přísluší bezsmykovému ohybu (pro $C \rightarrow \infty$), bude

$$Q = \frac{\pi^2 B}{l^2} \quad (8.23)$$

a z rovnice (8.22) vyjde podmínka pro kritickou sílu

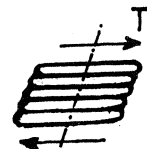
$$Q \left(1 - \frac{F}{C}\right) = F. \quad (8.24)$$

Odtud

$$F = Q \frac{1}{1 + Q/C}. \quad (8.25)$$

Hezký a jednoduchý výsledek, jenomže je chybný. Chybná je rovnice (8.15).

Musíme si totiž uvědomit, že účinkem smyku se úhel průřezů nezmění. Kdyby byla posouvající síla konstantní, vznikla by účinkem pouhého smyku deformace znázorněná na obr. 41. Pro větší názornost jsou závity kresleny hustě. Jde o abstrakci, neboť čistý smyk nemůže v prutu existovat, je vždy provázen ohybem. Nemůže být totiž



Obr. 41

$T(x) \neq 0$ a zároveň $M(x) \equiv 0$. Čtenář už jistě pochopil, v čem spočívá chyba - nemůže platit, že $\varphi = dw/dx$, musí být $\varphi = dw_1/dx$. S chybou tohoto druhu se setkáváme ve starší odborné literatuře často. Teprve Haringxova práce učinila v této otázce jasno. *)

Správně mělo místo (8.16) být

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw_1}{dx} + \frac{F}{C} \frac{dw_1}{dx}. \quad (8.26)$$

Po derivaci a dosazení $d^2w_1/dx^2 = -Fw_1/B$ vyjde diferenciální rovnice

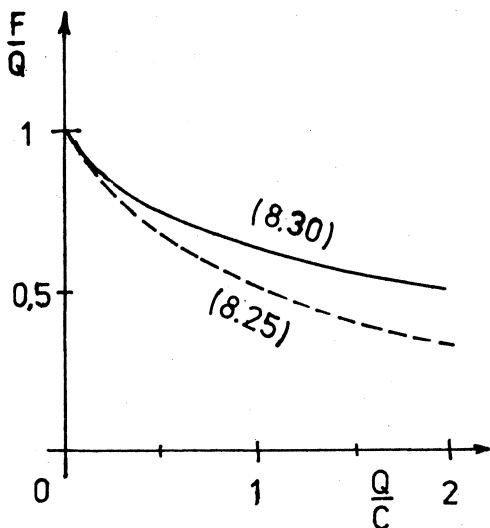
$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{F}{B} \left(1 + \frac{F}{C}\right) w, \quad (8.27)$$

která se liší od rovnice (8.18). Pro řešení (8.20) odtud dostaneme

$$\lambda^2 = \frac{F}{B} \left(1 + \frac{F}{C}\right) \quad (8.28)$$

a pro $\lambda = \pi/l$ s přihlédnutím k rovnici (8.23)

$$Q = F \left(1 + \frac{F}{C}\right). \quad (8.29)$$



Odtud

$$F = \frac{1}{2} C \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4Q}{C}}\right). \quad (8.30)$$

Je-li $C \rightarrow \infty$, bude možno výraz $\sqrt{1 + \varepsilon}$ nahradit $(1 + \frac{1}{2}\varepsilon)$ pro $\varepsilon = 4Q/C \ll 1$. Pak

$$F \doteq \frac{1}{2} C \left(-1 + 1 + \frac{2Q}{C}\right) = Q. \quad (8.31)$$

V limitě tedy dostaneme Eulerovu vzpěrnou sílu Q , což odpovídá definici této síly.

Rozdíl mezi vzorci (8.25) a (8.30)

je zřejmý z obr. 42. V něm jsme na osu po-
řadnic vynesli poměr kritické síly F

k Eulerově síle Q a na osu úseček Eulerovu sílu Q dělenou tuhostí ve smyku C (obě tyto veličiny mají týž fyzikální rozměr).

Obr. 42

*) J. A. HARINGX: On the buckling and the lateral rigidity of helical compression springs. - "Proc. Ned. Akad. Wet." 55 (1942), s. 533 a 650.

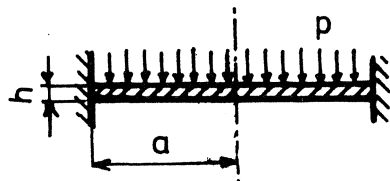
Inženýrská nauka o pružnosti těles vychází z některých zjednodušení, jejichž příkladem je Bernoulliho-Navierova hypotéza pro nosníky namáhané ohybem. Při zobecňování teorie pro složitější úlohy mohou vzniknout snadno chyby, které přehlédne i zkušený řešitel. Jde o chyby, kterými se liší idealizovaný fyzikální model od konečného matematického modelu. V probraném případě šlo o to, že při uvažování smyku působeného posouvající silou neprochází spojnice středů průřezů kolmo k průřezům, jak předpokládá zmíněná hypotéza platná pro bezsmykový ohyb.

9. OHYB TENKÝCH DESEK

Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek je známou inženýrskou teorií založenou na několika zjednodušujících předpokladech. Zvolíme-li souřadné osy x , y ve střední ploše desky, předpokládá se, že G_2 je zanedbatelné a že je zanedbatelný zkos působený smykovým napětím τ_{zx} a τ_{zy} ; dále se předpokládá, že normály ke střední ploše se nezakřivují a zůstávají i po deformaci kolmé k ohybové ploše. Těmito předpoklady se převádí prostorová úloha z teorie pružnosti na rovinný problém se dvěma nezávisle proměnnými x , y .

Tato teorie desek je obecně známá a je podrobně vykládána v dostupných učebnicích a monografiích. Nebudeme se jí proto v podrobnostech zabývat. Strojní inženýři zpravidla nejlépe znají teorii rotačně souměrných desek a běžně užívají vzorců tam odvozených. Teorie tenkých rotačně souměrných desek je totiž ještě jednodušší, obsahuje jen jednu nezávisle proměnnou, a to poloměr. Setkají-li se s případy desek jiných tvarů, pak si vyhledají potřebné vzorce v příručkách nebo - jde-li o orientační výpočet - nahradí skutečnou desku jinou, rotačně souměrnou, vepsanou do zkoumané oblasti. Výsledky jejich výpočtů se pak mohou lišit od skutečnosti zejména ze dvou důvodů. Prvním je vliv membránové napjatosti, která způsobuje, že tuhost tenkých desek je vždy poněkud větší než vyjde z Kirchhoffovy teorie (rozdíl se zvětšuje s rostoucím průhybem). Druhým je kvalitativní rozdíl mezi deskou s lomenou a hladkou kruhovou hranicí.

Abychom prozkoumali vliv membránové napjatosti, probereme případ vetknuté kruhové desky, rovnoměrně zatížené podle obr. 43. Pro ohyb takové desky platí podle Kirchhoffovy teorie diferenciální rovnice



Obr. 43

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\psi) \right) = - \frac{pr}{2D}, \quad (9.1)$$

kde $\psi = -dw/dr$, W je průhyb desky, $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ její ohybová tuhost. Dvojitou integrací dostaneme rovnici

$$\psi = -\frac{pr}{16D} + \frac{1}{2} C_1 r + C_2 \frac{1}{r}. \quad (9.2)$$

Okrajové podmínky jsou

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(a) = 0. \quad (9.3)$$

Odtud

$$C_1 = \frac{pa^2}{8D}, \quad C_2 = 0 \quad (9.4)$$

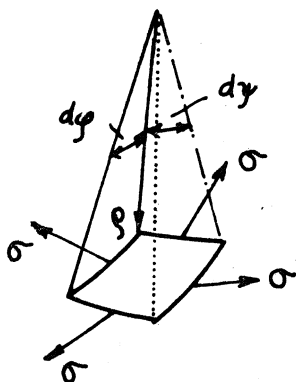
a konečně

$$\psi = \frac{pr}{16D} (a^2 - r^2). \quad (9.5)$$

Protože $dw = -\psi dr$ a $w(a) = 0$, vyjde další integrací průhyb

$$W = \frac{p}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (9.6)$$

Tyto výsledky jsou familiárně známe a platí pro desku ohybově tuhou, jež není schopna přenášet membránové napětí. Taková deska ve skutečnosti neexistuje. Obrátme proto úlohu a ptáme se, jaký by byl průhyb desky, kdyby měla pouze membránovou tuhost a její ohybová tuhost by vymizela (to odpovídá desce "nekonečně tenké"). Lze předpokládat, že by se deska přetvořila přibližně do tvaru kulového vrchlíku o poloměru ρ . Pravoúhlý element této membrány je nakreslen na obr. 44. ^{*})



Obr. 44

Svislá síla $p \rho d\psi \rho d\psi$ by byla v rovnováze s výslednicemi sil $\sigma h \rho d\psi$ popř. $\sigma h \rho d\psi$ působícími po stranách elementu, takže

$$p \rho^2 d\psi d\psi = \sigma h \rho d\psi d\psi + \sigma h \rho d\psi d\psi. \quad (9.7)$$

^{*}) Desku těchto vlastností budeme napříště nazývat membránou.

Odtud vyjde křivost membrány

$$\frac{1}{\rho} = \frac{p}{2\sigma h} \quad (9.8)$$

Je-li průhyb malý a kulový vrchlík mělký, je křivost dána zápornou druhou derivací průhybu, takže

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{p}{2\sigma h} \quad (9.9)$$

Integrací s okrajovými podmínkami

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad w(a) = 0 \quad (9.10)$$

vyjde

$$w = \frac{p}{4\sigma h} (a^2 - r^2) \quad (9.11)$$

Nyní ještě musíme aplikovat Hookeův zákon, abychom mohli z rovnice (9.11) vyloučit dosud neznámé napětí σ . Protože radiální úsečka o délce a se přetvoří do délky

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dr}\right)^2} dr \doteq \int_0^a \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right] dr, \quad (9.12)$$

bude poměrné prodloužení

$$\varepsilon = \frac{s-a}{a} = \frac{1}{2a} \int_0^a \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 dr \quad (9.13)$$

Z rovnice (9.11)

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{pr}{2\sigma h}, \quad (9.14)$$

takže

$$\varepsilon = \frac{1}{2a} \int_0^a \frac{p^2 r^2}{4\sigma^2 h^2} dr = \frac{p^2 a^2}{24\sigma^2 h^2} \quad (9.15)$$

Z Hookeova zákona pro rovinnou napjatost plyne (srovnej s obr. 44)

$$\sigma = \frac{E}{1-\mu} \varepsilon \quad (9.16)$$

Z posledních dvou rovnic dostaneme

$$\sigma^3 = \frac{E}{1-\mu} \frac{p^2 a^2}{24 h^2} \quad (9.17)$$

Označíme-li průhyb uprostřed membrány δ , bude podle (9.11)

$$\delta = w(0) = \frac{p a^2}{4 G h} \quad (9.18)$$

Umocníme na třetí a vyloučíme G^3 s použitím (9.17). Vyjde po úpravě

$$\delta^3 = \frac{3(1-\mu)}{8} \cdot \frac{p a^4}{E h} \quad (9.19)$$

Závislost největšího průhybu na tlaku je tedy nelineární.

Srovnejme oba případy. Pro ohybově pružnou desku uijeme index 1, pro membránu 2. Podle (9.6) a (9.19) bude

$$\delta_1 = \frac{p_1 a^4}{64 D} = \frac{3(1-\mu^2)}{16} \cdot \frac{p_1 a^4}{E h^3} \quad (9.20)$$

$$\delta_2 = \sqrt[3]{\frac{3(1-\mu)}{8} \cdot \frac{p_2 a^4}{E h}} \quad (9.21)$$

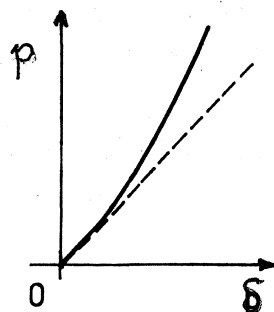
Ve skutečnosti bude deska podléhat ohybovým i membránovým deformacím zároveň. Bude tedy $\delta_1 = \delta_2$ a $p_1 + p_2 = p$. Odtud

$$\frac{16}{3(1-\mu^2)} \cdot \frac{E h^3}{a^4} \delta + \frac{8}{3(1-\mu)} \cdot \frac{E h}{a^4} \delta^3 = p \quad (9.22)$$

Pro průhyb desky tak dostaneme kubickou rovnicí

$$\delta + \frac{1+\mu}{2 h^2} \delta^3 = \frac{3(1-\mu^2)}{16} \cdot \frac{p a^4}{E h^3} \quad (9.23)$$

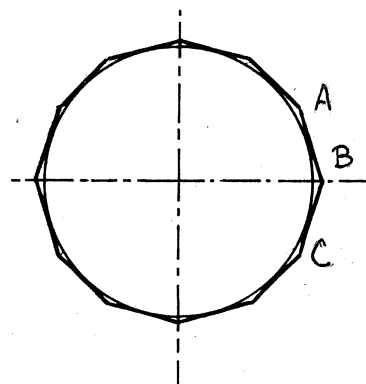
Rovnice (9.23) byla odvozena z velmi zjednodušené úvahy (skutečný tvar průhybové plochy se nepodobá kulovému vrchlíku), ale neodporuje příliš experimentálním výsledkům a dává názor na úlohu membránových napětí v teorii desek. Vynecháme-li druhý člen na levé straně (9.23), dostaneme hodnotu δ s lineární závislostí na tlaku p . Srovnání obou případů poskytuje schéma na obr. 45. Lineární průběh, který odpovídá Kirchhoffově teorii, je nakreslen čárkovaně. *)



Obr. 45

V naší úvaze jsme předpokládali, že deska je vetknutá bez možnosti radiálního posuvu. Není-li tomu tak, vzniká radiální posuv a v obvodovém směru pak působí na obvodu desky tlakové membránové napětí. Při větších průhybech tenkých desek může toto napětí přestoupit mez stability a způsobit obvodové zvlnění desky. Je třeba ještě poznamenat, že podmínka dokonalého vetknutí membrány je v rozporu s předpokladem homogenní napjatosti $\sigma_r = \sigma_t = \sigma = \text{konst}$ podle obr. 44. Dokonalé vetknutí totiž nedovoluje obvodové roztažení, které provází takovou napjatost ve shodě s rovnicí (9.16). Tuto nepřesnost pomíjíme, neboť celá úvaha je jen přibližná.

Nyní ještě upozorníme na zvláštní paradox. Je známo, že délku kružnice lze vypočítat jako limitu délky obvodu pravidelného mnohoúhelníku, zvětšujeme-li počet jeho stran bez omezení. Nabízí se možnost považovat kruhovou desku za mezní případ mnohoúhelníkové desky (obr. 46). Budou-li okraje desky kloubově podepřené, nedostaneme v limitním případě kloubově podepřenou kruhovou desku, ale spíše desku vetknutou. V limitě totiž zůstávají úsečky AB, BC různoběžné, přestože spolu svírají nekonečně malý úhel, a určují tečnou rovinu ABC k ohybové ploše, která splývá s průmětnou na obr. 46 (se střední rovinou nedeformované desky).



Obr. 46

To odpovídá podmínkám vetknutí a nikoli kloubového podepření. Mezi tímto

*) Přesnější metody výpočtu najde čtenář např. v monografii TIMOSHENKO, S. - WOINOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of plates and shells, McGraw-Hill, New York 1959. (Ruský překlad: Plastinky i obložky, Nauka, Moskva 1966).

limitním případem mnohoúhelníkové desky a kruhovou deskou je tedy kvalitativní rozdíl.

Označíme-li α úhel stran polygonu, který tvoří hranici desky a zavedeme-li v některém vrcholu polygonu polární souřadnice r, φ tak, aby deska byla kloubově podepřena na stranách $\varphi=0$ resp. $\varphi=\alpha$, je průhybová plocha v okolí tohoto vrcholu popsána rovnicí

$$W = \alpha r^k \sin(k\varphi), \quad (9.24)$$

kde $k = \pi/\alpha$. Je-li úhel α tupý, je $1 < k < 2$. Pak $\partial W/\partial r = 0$ pro $r \rightarrow 0$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$. Zavedeme-li pravouhlou soustavu x, y tak, že osa x splývá s přímkou $\varphi=0$, dostaneme křivosti desky (druhé partiální derivace) v okolí vrcholu

$$\begin{aligned} W_{xx} &= -\alpha k(k-1)r^{k-2} \sin[\varphi(2-k)], \\ W_{yy} &= \alpha k(k-1)r^{k-2} \sin[\varphi(2-k)]. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Pro $r \rightarrow 0$ jsou tyto křivosti nekonečné, je-li $\varphi \neq 0$. Pro $\varphi = 0$ jsou nulové. To znamená, že v rohu desky $r=0$ nejsou křivosti definovány. *)

Poznámka

Ukázali jsme, že membránová napětí u tenkých desek způsobují relativní zvýšení tuhosti desek ve srovnání s Kirchhoffovou teorií. K obdobnému, avšak opačnému jevu dochází při ohybu tenkostěnných křivých trub. Vlivem zploštění průřezu se několikrát zmenší ohybová tuhost ve srovnání s výpočtem podle Bernoulliho-Navierovy teorie ohybu. Jde-li o trubku s poloměrem střednice R , která má kruhový průřez o poloměru r a tloušťku stěny h , postačí podle Theodora von KÁRMÁNA nahradit ohybovou tuhost $EJ = E \cdot \pi r^3 h$ hodnotou **)

*) V odborné literatuře bývá citován chybný Marcusův důkaz, že tyto křivosti jsou nulové [MARCUS, H.: Die Theorie elastischer Gewebe. 2. vyd., Springer-Verlag, Berlin 1932, str. 46]. Poznámky k tomu viz též ROSSOW, M. P., "Journal of Applied Mechanics", sv. 45 (Sept. 1978), s. 689 - 690 (Brief Notes).

**) Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure sv. 55 (1911), s. 1889. O tenkostěnných trubkách obdélníkového průřezu pojednal Š. TIMOŠENKO v čas. Trans. ASME sv. 45 (1923), s. 135. Viz též překlad jeho knihy "Pružnost a pevnost", díl II, Techn. věd. vyd., Praha 1951.

$$B = EJ \frac{1 + 12\lambda^2}{10 + 12\lambda^2} \quad (9.26)$$

kde

$$\lambda = \frac{hR}{r^2} \quad (9.27)$$

Z těchto vztahů je zřejmé, že $EJ/10 < B \leq EJ$. Vigness dokázal, že stejný vzorec (9.26) platí nejen při ohybu v rovině střednice, ale i při ohybu v kolmém směru. *) Vzorec byl odvozen za předpokladu, že křivost střednice a ohybový moment jsou konstantní nebo se mění jen zvolna.

V této kapitole jsme poukázali na úlohu membránových napětí v teorii desek. Způsobuje, že tuhost desky je ve skutečnosti o něco větší než kolik vychází z Kirchhoffovy teorie. Rozdíl se zvětšuje, je-li průhyb desky větší. Závislost průhybu desky na jejím zatížení je proto mírně nelineární. Dále jsme poukázali na rozdíl mezi deskami kloubově uloženými na hranici, je-li tato hranice hladká nebo lomená. Zmínili jsme se též o zmenšení ohybové tuhosti zploštěním průřezu při ohybu tenkostěnných trubek.

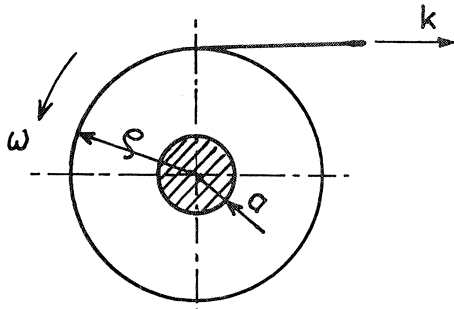
10. NESPRÁVNÉ UŽITÍ PRINCIPU SUPERPOZICE

Jak známo platí zákon superpozice tehdy, je-li závislost deformací na zatížení lineární. Tak tomu nemusí být, je-li materiál nelineárně elastický nebo mění-li se vnitřní statické účinky se zatížením. S tím jsme se již setkali v šesté kapitole.

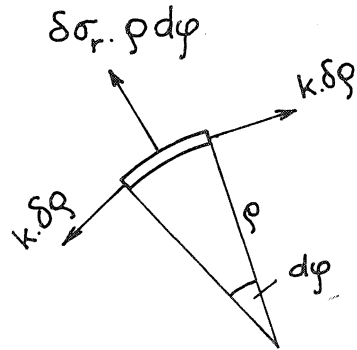
Nyní probereme případ, kdy bude zdroj chyby méně nápadný. Budeme počítat napětí, které vzniká, když se na pružný buben navíjí pás tenkého plechu pod stálým tahem. Ohybovou tuhost plechu zanedbáme. Nechť má svitek okamžitý poloměr ρ ; poloměr bubnu je a (obr. 47). Je-li tahové navíjecí napětí $\bar{\sigma} = \bar{k}$ a tloušťka plechu $\delta \rho \ll \rho$, vznikne navinutím jednoho závitu plechu radiální tlakové napětí $-\delta \sigma_r$, které stlačuje ostatní vrstvy ve svitku, o velikosti

*) HARTOG, J. P. Den: Advanced strength of materials. McGraw-Hill, New York 1952.

$$\delta\sigma_r = -k \frac{\delta\rho}{\rho} \quad (10.1)$$



Obr. 47



Obr. 48

Tento vzorec vyjde z podmínky rovnováhy elementu zakresleného na obr. 48. Budeme nejprve předpokládat, že buben je absolutně tuhý. Svitek pak představuje pružné těleso, jež je na poloměru $r=a$ neposuvně upevněno a na poloměru $r=\rho$ zatíženo napětím $\delta\sigma_r$. Protože v limitě bude $\delta\rho \rightarrow d\rho$, bude $\delta\sigma_r$ velmi malá veličina. Napjatost, která vzniká jejím působením bude mít rovněž infinitesimální velikost. Proto radiální i obvodové napětí ve svitku označíme jako diferenciály. Přechod k diferenciálům umožňuje okolnost, že navíjený plech je velmi tenký. Napětí $d\sigma_r, d\sigma_t$ jsou pak dána vztahy

$$d\sigma_r = dA - dB \frac{1}{r^2} \quad ; \quad d\sigma_t = dA + dB \frac{1}{r^2} \quad (10.2)$$

Podmínka nulového radiálního posuvu na poloměru $r=a$ vyžaduje, aby obvodové prodloužení na tomto poloměru vymizelo

$$d\varepsilon_t \Big|_{r=a} = \frac{1}{E} (d\sigma_t - \mu d\sigma_r) \Big|_{r=a} = 0 \quad (10.3)$$

Dosazením z rovnice (10.2) dostaneme podmínku

$$dA(1-\mu) + dB(1+\mu) \frac{1}{a^2} = 0 \quad (10.4a)$$

Protože $\delta\sigma_r = d\sigma_r \Big|_{r=\rho}$, máme

$$\delta\sigma_r = dA - dB \frac{1}{\rho^2} \quad (10.4b)$$

Z obou posledních rovnic vypočteme dA , dB

$$dA = \frac{\rho^2(1+\mu)}{\rho^2(1+\mu)+a^2(1-\mu)} \cdot \delta G_r ,$$

$$dB = \frac{a^2\rho^2(1-\mu)}{\rho^2(1+\mu)+a^2(1-\mu)} \delta G_r ,$$
(10.5)

Dosadíme-li nyní $\delta G_r = -k dp/\rho$, dostaneme po integraci v mezích $r < \rho < b$

$$A = -k(1+\mu) \int_r^b \frac{\rho d\rho}{\rho^2(1+\mu)+a^2(1-\mu)} =$$

$$= -\frac{k}{2} \ln [\rho^2(1+\mu) + a^2(1-\mu)]_r^b =$$
(10.6)

$$= -\frac{k}{2} \ln \frac{b^2(1+\mu)+a^2(1-\mu)}{r^2(1+\mu)+a^2(1-\mu)} .$$

Položíme-li pro stručnost $\mu=0$, tj. budeme-li předpokládat, že vliv Poissonova čísla není podstatný, vyjde

$$A = -\frac{k}{2} \ln \frac{b^2+a^2}{r^2+a^2}$$
(10.7)

a podobně

$$B = +\frac{ka^2}{2} \ln \frac{b^2+a^2}{r^2+a^2} .$$
(10.8)

Je-li tedy svitek navinut až do poloměru $\rho = b$, dostaneme napětí na poloměru r ($a < r < b$) tak, že integrujeme rovnice (10.2) a využijeme přitom (10.7) a (10.8); respektujeme také počáteční navíjecí napětí $G_t(r=\rho) = k$. Vyjde

$$G_r = -\frac{k}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \ln \frac{b^2+a^2}{r^2+a^2} ,$$
(10.9)

$$G_t = k - \frac{k}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \ln \frac{b^2+a^2}{r^2+a^2} .$$

Vzorce (10.9) se uvádějí v literatuře jako Simpsovy /SIMPS, R. B. - PLACE, J. A., "British Journal of Applied Physics", sv. 4 (1953), č. 7, s. 213 - 216/. Ve skutečnosti je Simps a Place neodvodili, ale převzali z učebnice J. Caseho /CASE, J.: Strength of materials, Arnold, London 1938/. Tam se uvádí tento příklad k procvičení principu superpozice u rotačně souměrné napjatosti.

Vzorce (10.9) se často citují v literatuře věnované technologii. Užívají se k výpočtu tlaku, kterým je zatížen buben válcovací stolice. Pro tento tlak vychází

$$p_b = -\sigma_r \Big|_{r=a} = k \ln \frac{b^2+a^2}{2a^2} \quad (10.10)$$

Bohužel dává tento jednoduchý vzorec výsledky, které odporují experimentům. Někteří autoři se jej proto snažili opravit. Především je třeba uvážit vliv pružnosti bubnu. Nebude-li buben tuhý, ale pružný, vznikne na jeho povrchu účinkem tlaku p radiální posuv $u = -p/c$, kde c je konstanta vyjadřující tuhost bubnu. Zmenší-li se vnitřní poloměr svitku z hodnoty a na $a-u$, zmenší se tlak p_b na hodnotu p . Z teorie rotačně souměrné napjatosti dostaneme pro tento případ deformační podmínku (pro $u = 0$)

$$\frac{p}{c} = \frac{a}{E} (p_b - p) \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} \quad (10.11)$$

Odtud dostaneme "správnou" hodnotu tlaku p mezi svitkem a bubnem

$$p = p_b \frac{1}{1 + \frac{E}{ac} \cdot \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}} \quad (10.12)$$

Vzorec (10.12) je rovněž často citován v odborné literatuře. Je-li $c \rightarrow \infty$, dostaneme $p = p_b$. Je-li $c < \infty$, je $p < p_b$. To je stále ještě hezký a jednoduchý výsledek, jenomže je chybný.

O chybě se snadno přesvědčíme, vypočteme-li obvodové napětí σ_t na poloměru $r = b$. Dostaneme superpozici

$$\sigma_t \Big|_{r=b} = k - 2(p_b - p) \frac{a^2}{b^2-a^2} \quad (10.13)$$

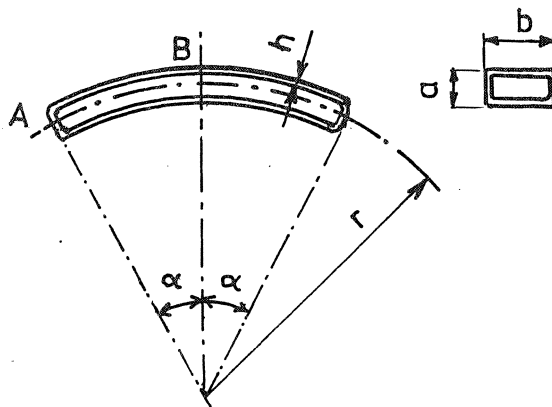
První člen na pravé straně odpovídá rovnici (10.9) pro $r = b$. Druhý vyjadřuje účinek tlakového rozdílu $(p_b - p)$ na povrchu bubnu. Ten vzniká tím, že jsme bubnu dodatečně přisoudili pružnost. Protože $p_b - p \neq 0$, není $\sigma_t \Big|_{r=b} = k$, jak vyžaduje počáteční podmínka při navíjení.

V čem je chyba? Vznikla nesprávnou aplikací principu superpozice. Buben totiž není během navíjení tuhý, aby pak až nakonec ustoupil tlaku navinuté cívky, ale poddává se tlaku už během navíjení. Je to také svým způsobem změna vnitřních statických účinků vlivem deformace. Správný výpočet je proto složitější a nebudeme ho zde uvádět ze dvou důvodů. Jednak pro jeho zdlouhavost, jednak proto, že i jeho výsledky se neshodují s experimenty. Uspokojivé řešení získáme teprve tehdy, přihlédneme-li k nelineární dotykové tuhosti mezi plechy při radiálním stlačování cívky /viz autorův článek v časopise "Acta technica ČSAV", sv. 23 (1978), č. 4, s. 446 - 458/.

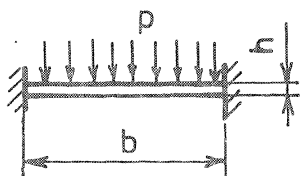
V této kapitole jsme upozornili na omezení platnosti principu superpozice. Princip neplatí, je-li materiál nelineárně elastický popř. je-li namáhán nad mez úměrnosti a neplatí ani tehdy, mění-li se vnitřní statické účinky během deformace. Na příkladu napjatosti ve svitku tenkého plechu navíjeného na buben válcovací stolice pod stálým tahovým napětím jsme se přesvědčili, že je třeba podmínky platnosti principu superpozice vždy pečlivě prozkoumat.

11. O SAINT - VENANTOVĚ PRINCIPU

Jednouúčelový žehlicí stroj má pracovní "desku" ve tvaru dutého kruhového segmentu obdélníkového průřezu (obr. 49). Deska je vytápěna parou s přetlakem p . Pokusme se určit, jak bude namáhána. Jsou-li rozměry a , b malé ve srovnání s poloměrem r , můžeme kontrolovat zvláště lokální a globální deformaci a napjatost. Např. budeme stěnu o šířce b považovat přibližně za nosník na obou koncích vetknutý a zatížený podle obr. 50. Napětí na jeho koncích je - jak známo -



Obr. 49



Obr. 50

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} p \left(\frac{b}{h} \right)^2. \quad (11.1)$$

Potom budeme zkoumat, jak se bude dané těleso globálně deformovat. Kdyby tvořilo úplný uzavřený prstenek, vznikl by ve vnitřní i vnější válcové

skořepině přibližně stejný radiální posuv, neboť skořepiny jsou vázány bočními mezikruhovými stěnami a šířka mezikruží a je relativně malá. Proto by vzniklo ve skořepinách obvodové prodloužení nepřímo úměrné poloměru, tedy $\epsilon_t = u/r$ a obvodové napětí by mělo přibližně velikost

$$\sigma_{t1} = E \frac{u}{r + a/2} \quad (\text{vnější skořepina}), \quad (11.2)$$

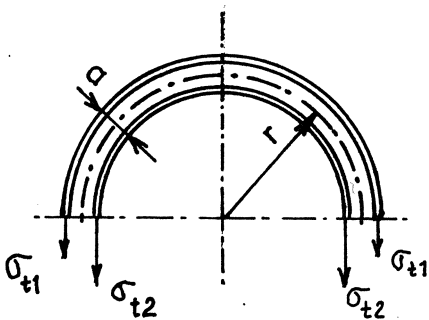
$$\sigma_{t2} = E \frac{u}{r - a/2} \quad (\text{vnitřní skořepina}).$$

Zanedbáme-li účinek napětí v krátkých bočních stěnách ($a \ll b$), vyjde podmínka rovnováhy pro půlkruhovou část (obr. 51)

$$(\sigma_{t1} + \sigma_{t2})bh = p \cdot a \cdot b. \quad (11.3)$$

S použitím (11.2) pak vyjde

$$u = \frac{p}{E} \cdot \frac{a}{h} \cdot \frac{4r^2 - a^2}{8r}, \quad (11.4)$$



Obr. 51

$$\sigma_{t1} = p \frac{a}{h} \cdot \frac{2r - a}{4r}, \quad (11.5)$$

$$\sigma_{t2} = p \frac{a}{h} \cdot \frac{2r + a}{4r}. \quad (11.6)$$

Prstenec však není úplný. Chceme-li dostat napjatost v segmentu podle obr. 49, musíme v bodech A účinek napětí σ_{t1} , σ_{t2} odečíst. Budeme řešit jen polovinu topného tělesa. Vzhledem k souměrnosti si totiž můžeme představit, že deska je v bodě B vetknutá. Prakticky to znamená, že musíme v bodě A připojit sílu

$$N = (\sigma_{t1} + \sigma_{t2})b \cdot h = p \cdot a \cdot b \quad (11.7)$$

a silovou dvojici

$$M = \frac{1}{2} (\sigma_{t2} - \sigma_{t1})b \cdot h \cdot a = \frac{p \cdot a^3 b}{4r}. \quad (11.8)$$

Tím se bude topné těleso (žehlicí "deska") účinkem tlaku p narovnávat. Tohoto efektu se používá u manometrických trubek. *) Nyní již můžeme snadno určit namáhání v kterémkoli místě. Např. ve vnitřní stěně v bodě B bude účinkem síly N vznikat tlakové napětí $N \cos \alpha / 2bh$ (připomeňme, že a zanedbáváme proti b) a ohybový moment $Nr(1 - \cos \alpha)$ se sečte s momentem M_0 . Účinek momentu M_0 na napjatost však bude zanedbatelný, protože $a \ll b$. Ze stejného důvodu bude $G_{t1} = G_{t2} = pa/2h$. Proto výsledné napětí bude **)

$$\begin{aligned} G_{tB2} &= \frac{pa}{2h} - \frac{N \cos \alpha}{2bh} + \frac{Nr(1 - \cos \alpha)}{abh} = \\ &= \frac{pr}{h} (1 - \cos \alpha) \left(1 + \frac{a}{2r}\right) \approx \frac{pr}{h} (1 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Ve vnitřní skořepině bude

$$G_{tB1} = \frac{pa}{2h} - \frac{N \cos \alpha}{2bh} - \frac{Nr(1 - \cos \alpha)}{abh} \approx - \frac{pr}{h} (1 - \cos \alpha). \quad (11.10)$$

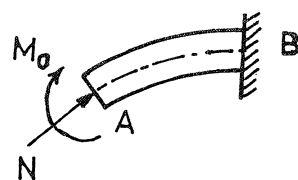
Zároveň s těmito obvodovými napětími bude působit na okrajích osová napětí podle (11.1). Pevnostní podmínku tedy budeme psát pro rovinnou napjatost znázorněnou na obr. 53. Použijeme-li Guestovy hypotézy, bude

$$G_D \geq \frac{pr}{h} (1 - \cos \alpha) + \frac{p}{2} \left(\frac{b}{h}\right)^2. \quad (11.11)$$

Zde G_D značí dovolené napětí.

Z obr. 53 je vidět, že ten, kdo by chtěl posuzovat napjatost topného tělesa podle vzorců platných pro tenkostěnné válcové tlakové nádoby, by se dopustil hrubé chyby.

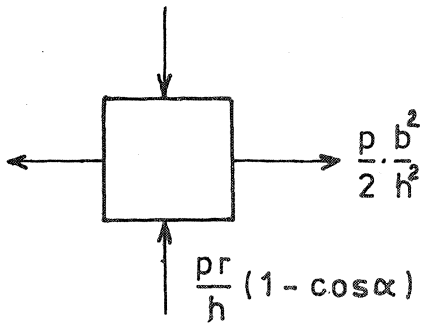
Aniž jsme si to uvědomili, použili jsme Saint-Venantova principu. Po prvé, když jsme účinky napětí G_{t1} , G_{t2} nahradili jejich výslednicemi N , M_0 (obr. 52; po druhé, když jsme



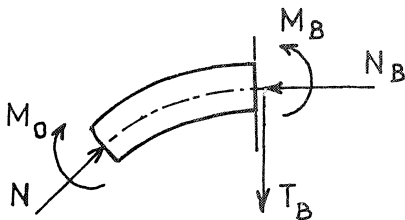
Obr. 52

*) Jejich podrobnější výpočet obsahuje kniha FEODOSJEV, V. I.: Uprugije elementy točnogo priborostrojenija. Oberongiz, Moskva 1949.

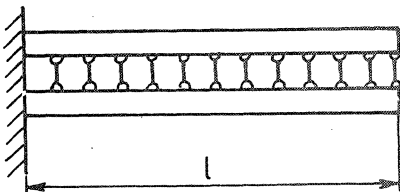
**) Je-li tloušťka $h \ll b$, bude moment setrvačnosti průřezu $J \approx 2bh(a/2)^2$ a průřezový modul v ohybu $W_0 = J/(a/2) \approx abh$.



Obr. 53



Obr. 54



Obr. 55

zavedli v bodě B vetknutí topného tělesa. Nestarali jsme se přitom o to, jakým způsobem se na těleso přenáší v tomto místě reakční síly N_B , T_B a moment M_B (obr. 54). Jde-li o absolutně tuhé těleso, můžeme působící soustavu sil vždy nahradit jakoukoli jinou staticky ekvivalentní soustavou. Je-li však těleso pružné, je to možné jenom za podmínky, že působíště sil v obou soustavách lze uzavřít do oblasti, jejíž objem je zanedbatelný v porovnání s objemem tělesa. Jinými slovy, působí-li na touž malou část daného tělesa dvě staticky ekvivalentní silové soustavy, pak napjatost a přetvoření v ostatních místech, dostatečně vzdálených od zatížené části tělesa, nezáleží na tom, která z obou soustav působí. Tak lze formulovat Saint-Venantův princip. Tato formulace má však určitou slabinu, kterou nám objasní následující příklad.

Na obr. 55 je znázorněna soustava dvou tenkých nosníků obdélníkového průřezu. Nosníky mají jednotkovou šířku, takže průřez každého z nich má rozměr $1 \times h$. Jsou spojeny četnými krátkými, kloubově uloženými rozpěrkami, které zaručují, že průhyb $w(x)$ je u obou nosníků týž. Vzdálenost střednic obou nosníků je a (obr. 56). Je to mezní případ idealizované soustavy dvou planžet spojených vrstvou lepidla. Při výpočtu podobných soustav se často předpokládá, že nosníky jsou ohybově pružné, ale účinkem smyku se nedeformují (platí tedy pro ně Bernoulliho-Navierova hypotéza), kdežto vrstva lepidla se deformuje smykem, ale tloušťka vrstvy se nemění a normálové napětí se zanedbává. K této idealizaci nás vede skutečnost, že vrstva lepidla je tenká a její modul pružnosti relativně malý. Ohybová poddajnost je tedy soustředěna do nosníků, smyková do vrstvy lepidla. Tyto předpoklady se často využívají při výpočtu vrstevnatých materiálů a sendvičů. Limituje-li modul pružnosti ve vrstvě lepidla k nule, nemá vrstva lepidla už jiný smysl než ten, že udržuje vzdálenost povrchů obou planžet konstantní; stejnou funkci mají rozpěrky na obr. 55. Jde tedy o pouhou distanční vložku, která není schopna přenášet ani ohybová, ani smyková napětí v soustavě.

Přijali jsme tuto představu jako mezní případ idealizace jen pro zjednodušení dalšího výkladu.

Je-li nosník zatížen čistým ohybem (ohybový moment $M_0 = \text{konst}$), nevzniknou v něm žádné smykové napětí. To znamená, že vrstva lepidla - kdyby šlo o lepený nosník - by nebyla zatížena a nejsou zatíženy ani rozpěrky v soustavě na obr. 55. Ohybovou tuhost složeného nosníku určíme pomocí obr. 56. Přihlédneme přitom k tomu, že $h \ll a$. Vyjde

$$EJ = E \cdot 2 \left(h \frac{a^2}{4} + \frac{1}{12} h^3 \right) \cong E \frac{ha^2}{2}. \quad (11.12)$$

Průhyb na konci nosníku je pak

$$\delta_0 = \frac{M_0 l^2}{2EJ} = \frac{M_0 l^2}{Eha^2}. \quad (11.13)$$

Je-li složený nosník zatížen spojitě rozděleným břemenem $q = \text{konst}$, rozdělí se toto břemeno stejným dílem na obě planžety (neboť $W_1(x) = W_2(x) = W(x)$; oba nosníky se deformují stejně). Protože ohybová tuhost každé planžety je

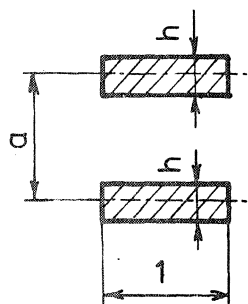
$$EJ_1 = EJ_2 = \frac{1}{12} E h^3, \quad (11.14)$$

dostaneme průhyb na konci takto zatíženého nosníku

$$\delta_1 = \frac{(q/2) \cdot l^4}{8 \cdot \frac{1}{12} \cdot E h^3} = \frac{3q l^4}{4 E h^3}. \quad (11.15)$$

Probereme nyní případ složeného nosníku, jehož průhyb je popsán rovnicí

$$W(x) = \frac{2}{\pi - 2} W_0 \left(\frac{\pi x}{2l} - \sin \frac{\pi x}{2l} \right). \quad (11.16)$$



Zřejmě $W(0) = 0$. Derivace dá

$$W'(x) = \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \frac{W_0}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) \quad (11.17)$$

a také $W'(0) = 0$. To tedy znamená, že jde o nosník na počátku vetknutý (obr. 57). Dále máme tyto derivace:

$$W''(x) = \frac{\pi^2}{2(\pi - 2)} \frac{W_0}{2l^2} \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad (11.18)$$

Obr. 56

$$W'''(x) = \frac{\pi^3}{4(\pi-2)} \cdot \frac{W_0}{l^3} \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad (11.19)$$

$$W''(x) = -\frac{\pi^4}{8(\pi-2)} \cdot \frac{W_0}{l^4} \sin \frac{\pi x}{2l}. \quad (11.20)$$

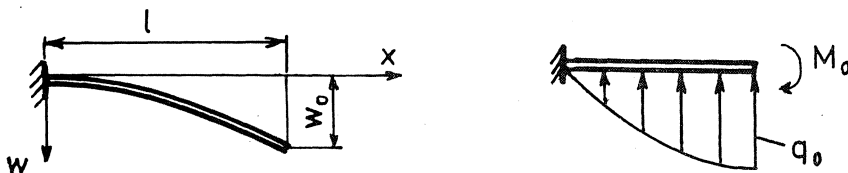
Uvážíme-li, že pro každou planžetu platí známé diferenciální vztahy

$$M_1 = -EJ_1 W''(x), \quad T_1 = -EJ_1 W'''(x), \quad (11.21)$$

$$q_1 = EJ_1 W''''(x)$$

seznáme, že v daném případě jde o složený nosník zatížený podle obr. 57 příčemž

$$q_0 = -2q_1(x=l) = 2EJ_1 \frac{\pi^4}{8(\pi-2)} \cdot \frac{W_0}{l^4}. \quad (11.22)$$



Obr. 57

Dosadíme-li sem podle (11.14), dostaneme

$$q_0 = \frac{\pi^4}{48(\pi-2)} \cdot \frac{Eh^3 W_0}{24}. \quad (11.23)$$

Posouvající síla na konci nosníku nepůsobí, neboť $W'''(0) = 0$. Ohybový moment v tomto místě je $M_0 = -2M_1(x=l)$, tedy

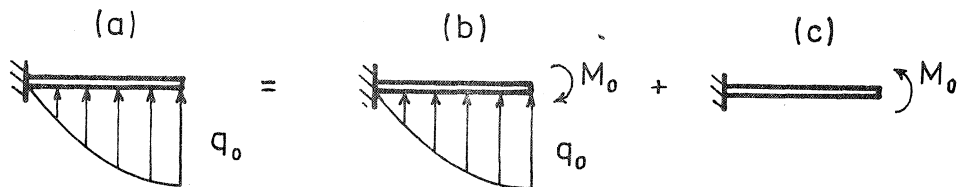
$$M_0 = \frac{\pi^2}{12(\pi-2)} \cdot \frac{Eh^3 W_0}{l^2}. \quad (11.24)$$

Chceme-li nyní dostat případ nosníku zatíženého pouze spojitým břemenem

$q(x)$, musíme odečíst účinek ohybového momentu M_0 podle obr. 58. Případu podle obr. 58b odpovídá na konci $x=l$ průhyb W_0 směřující dolů (srovnej s obr. 57). Od něho tedy odečteme průhyb δ_0 podle (11.13). Za ohybový moment M_0 přitom dosadíme z rovnice (11.24). Vyjde průhyb δ na konci nosníku znázorněného na obr. 58a

$$\delta = w_0 - \delta_0 = w_0 - \frac{l^2}{Eha^2} \cdot \frac{\pi^2}{12(\pi-2)} \cdot \frac{Eh^3w_0}{l^2} =$$

$$= w_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12(\pi-2)} \cdot \frac{h^2}{a^2} \right]. \quad (11.25)$$

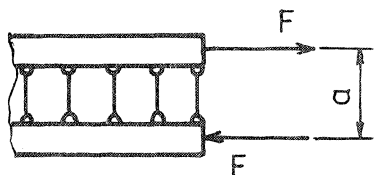


Obr. 58

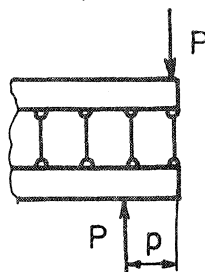
Je-li $h < 1,18 a$, je tento výraz kladný. To znamená, že nosník zatížený silami směřujícími nahoru podle obr. 58a se prohýbá dolů! Jak jsme mohli dospět k tak nápadnému rozporu?

Je to tím, že jsme použili nesprávně Saint-Venantova principu. Uvažme dva staticky ekvivalentní případy zatížení konce složeného nosníku podle obr. 59 resp. 60. Statickou ekvivalenci vyjadřují rovnice

$$M_0 = Fa, \quad M_0 = Pp \quad (11.26)$$



Obr. 59



Obr. 60

Protože působíště obou sil se nacházejí v relativně malé oblasti na konci nosníku (na délce $L \ll l$, kde L je jen o málo větší než rameno p), můžeme podle dříve uvedeného znění Saint-Venantova principu oba případy zatížení zaměnit. Ve skutečnosti to není pravda, neboť v případě podle obr. 59 vůbec žádný průhyb nevznikne (planžety se pouze natáhnou nebo zkrátí, ale neohnou), kdežto v případě podle obr. 60 vznikne průhyb

$$\delta_3 = \frac{\frac{1}{2} M_0 l^2}{2EJ_1} = \frac{3M_0 l^2}{Eh^3} \quad (11.27)$$

Oba případy se tedy - pokud jde o vyvolané deformace - podstatně liší. Správně jsme měli odečíst v rovnici (11.25) právě tuto hodnotu δ_3 místo δ_0 ; pak by vyšlo

$$\delta^* = W_0 - \delta_3 = W_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{4(\pi-2)} \right] \doteq -1,16 W_0 \quad (11.28)$$

Tento výraz je vždy záporný, takže rozpor nevzniká (nahoru zatížený nosník se prohýbá rovněž nahoru).

Formulaci Saint-Venantova principu je proto nutné doplnit tak, že deformační práce obou staticky ekvivalentních systémů musí mít srovnatelnou velikost. To v našem případě nebylo splněno. Energie napjatosti při zatížení podle obr. 59 je

$$U_1 = 2 \frac{F^2 l}{2Eh} = \frac{M_0^2 l}{Eha^2} \quad (11.29)$$

kdežto při zatížení podle obr. 60 je

$$U_2 = 2 \frac{(M_0/2)^2 l}{2Eh^3/12} = \frac{3M_0^2 l}{Eh^3} \quad (11.30)$$

Protože $a > h$ (při zjednodušení rovnice (11.12) jsme předpokládali dokonce silnou nerovnost), je U_2 podstatně větší než U_1 .

Při aplikaci Saint-Venantova principu je někdy nutná obezřetnost. Zaměňujeme-li dvě staticky ekvivalentní soustavy sil, můžeme tak učinit jen tehdy, lze-li působiště sil obou soustav uzavřít do jedné oblasti, jejíž objem je velmi malý ve srovnání s objemem zatíženého tělesa a má-li deformační práce vyvolaná těmito soustavami velmi přibližně stejnou velikost.

12. ZVLÁŠTNÍ JEVY PŘI KRUTU

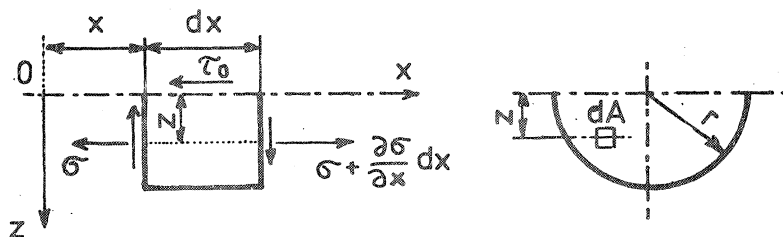
Budeme předpokládat, že čtenář zná Saint-Venantovu teorii kroucení prizmatických těles a že zná i teorii ohybového (nerovnoměrného) krutu tenkostěnných průřezů. V této kapitole upozorníme jen na některé zvláštnosti, kterým se v odborné literatuře věnuje jen málo pozornosti a které by se tak mohly stát zdrojem případných chyb v inženýrských výpočtech nebo při experimentální práci.

V nauce o pružnosti a pevnosti nosníků se odvozují diferenciální vztahy mezi vnitřními statickými účinky M , T a vnějším spojitým zatížením q . Bývají označovány jako Schwedlerovy popř. Žuravského věty

$$T = \frac{dM}{dx}, \quad q = -\frac{dT}{dx}. \quad (12.1)$$

Ihned vidíme, že při čistém ohybu $M = M_0 = \text{konst}$ je vždy $T = 0$, $q = 0$. Nosník, v němž by působila naopak jen posouvající síla $T = T_0 = \text{konst}$, přičemž by bylo zároveň $M = 0$, neexistuje. Působení posouvající síly nelze od ohybu odloučit. V inženýrských výpočtech se obvykle vliv posouvající síly na deformaci nosníku zanedbává (nebo se uvažuje způsobem, který jsme vyložili v šesté kapitole). Počítá se jen se smykovým napětím, které posouvající síla vyvolává. Toto napětí se odvozuje z podmínky rovnováhy uvolněné části nosníku. Například pro neutrální osu kruhového průřezu, kde je toto napětí největší a rovno $\tau_{zx}(z=0) = \tau_0$, dostaneme z obr. 61

$$\int_A \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) dA - \int_A \sigma dA = \tau_0 \cdot 2r dx. \quad (12.2)$$



Obr. 61

Předpokládáme, že napětí τ_0 je rovnoměrně rozděleno po ploše $2r dx$. Protože

$$\sigma = \frac{M}{J} z, \quad J = \frac{\pi r^4}{4}, \quad (12.3)$$

dostaneme z rovnice (12.2) s použitím (12.1)

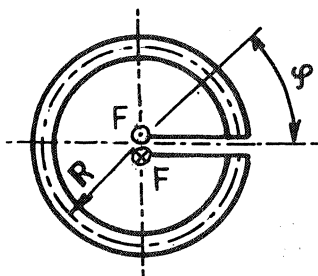
$$\tau_0 = \frac{T}{2rJ} \int_A z dA = \frac{2T}{\pi r^3} \int_A z dA. \quad (12.4)$$

Integrace se vztahuje na půlkruh (obr. 61 vpravo), takže $A = \pi r^2/2$. Protože $\int z dA = z_T \cdot A$ (z_T je souřadnice těžiště) a podle Pappovy-Guldinovy věty platí, že

$$2\pi z_T \cdot \pi r^2/2 = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (12.5)$$

máme $z_T = 4r/3\pi$ a z rovnice (12.4)

$$\tau_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\pi r^2}. \quad (12.6)$$



Obr. 62

Probereme nyní namáhání drátu, z něhož je vinuta šroubovitá válcová pružina, axiálně zatížená silou F (obr. 62). Závit má střední poloměr R . V řezu pod úhlem φ působí krouticí moment (obr. 63)

$$M_k = FR \quad (12.7)$$

a příčná síla

$$Q = F. \quad (12.8)$$

Krouticí moment vyvodí smykové napětí na okraji průřezu o velikosti

$$\tau = \frac{M_k}{W_k} = \frac{16 FR}{\pi d^3} \quad (12.9)$$

a posouvající síla Q vyvodí napětí podle vzorce (12.6), totiž

$$\tau_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{16}{3\pi} \frac{F}{d^2}. \quad (12.10)$$

Obě napětí se sečtou v krajním vnitřním vláknu, takže

$$\tau_{\max} = \tau + \tau_0 = \frac{16 M_k}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{3R}\right). \quad (12.11)$$

Vzorec (12.11) platí za předpokladu, že R je relativně k d velké, takže lze užít vzorců platných pro přímé pruty.

Pozorný čtenář jistě postřehl, že předchozí text, počínaje rovnicí (12.10), je falešný a že poslední věta je zcela nepravdivá. Síla Q totiž není "posouvající síla" známá z teorie nosníků, protože není spjata s ohybem a vzorec (12.6) nelze použít, protože byl odvozen z rovnováhy elementu podle obr. 61, na který působí ohybové napětí; to v křivém prutu na obr. 63 nepůsobí.

Zjednodušená "inženýrská" teorie nepostačuje k výpočtu smykového napětí vyvolaného příčnou silou Q . Výraz v závorce v rovnici (12.11) se nahrazuje tvarovým činitelem α , takže máme

$$\tau_{\max} = \alpha \frac{16 M_k}{\pi d^3} \quad (12.12)$$

a pro α se udává v odborné literatuře poloempirický vztah ^{*})

$$\alpha = \frac{D - 0,25d}{D - d} + 0,615 \frac{d}{D} \quad (12.13)$$

Probereme nyní případ kroucení přímého tenkého drátu ϕd . Vzorec pro úhel zkroucení

$$\varphi = \frac{M_k l}{G J_p}, \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (12.14)$$

platí jen tenkrát, nepřekročí-li kroučící moment mez úměrnosti ani mez elastické stability. Tuto druhou podmínku zapíšeme ve tvaru

$$M_k < M_e. \quad (12.15)$$

Index G připomíná jméno badatele, který tuto teorii roku 1895 uveřejnil (A. G. Greenhill).

Předpokládáme, že materiál je ideálně elastický. Na mezi elastické stability nastane rozdvojení rovnováhy (bifurkace). To znamená, že kromě rovnováhy v drátu s přímým tvarem existuje ještě rovnováha v drátu ohybově deformovaném. Protože se na drát přenáší na koncích jen kroučící moment M_k a žádná reakce, nemůže v drátu vzniknout žádná posouvající síla. Počáteční tvar ohybově deformovaného drátu musí tedy odpovídat čistému

*) $D = 2R$

ohybu, tj. musí mít konstantní křivost. Protože to nemůže být rovinná křivka (kružnice), je to šroubovice. *) Její rovnice jsou

$$v = a \sin \lambda(x-x_0), \quad W = a \cos \lambda(x-x_0). \quad (12.16)$$

Na začátku deformace bude a velmi malé, tj. křivý prut se bude jen nepatrně lišit od přímého. Protože nezáleží na posuvu počátku souřadnic ve směru osy x , zvolíme $x_0 = 0$, takže bude

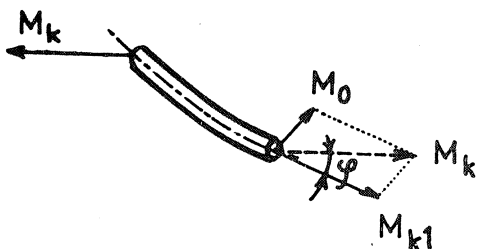
$$v = a \sin \lambda x, \quad W = a \cos \lambda x. \quad (12.17)$$

Tečna ke šroubovici svírá s osou x úhel

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2} = \lambda a. \quad (12.18)$$

Je-li a malé, je malé i φ a složky $dv/dx, dW/dx$. Pro ohybový moment bude proto platit vzorec

$$M_0 = EJ \sqrt{\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)^2} = \lambda^2 a EJ. \quad (12.19)$$



Obr. 64

Podmínka rovnováhy s krouticím momentem dá (obr. 64)

$$M_0 = M_k \varphi \quad (12.20)$$

($M_{k1} \doteq M_k$ je krouticí moment v průřezu). Dosazením (12.18) a (12.19) do (12.20) dostaneme

$$\lambda^2 a EJ = M_k \lambda a. \quad (12.21)$$

Odtud

$$\lambda = \frac{M_k}{EJ}. \quad (12.22)$$

*) Ohybový moment při rovinném ohybu by měl vektor kolmý k vektoru krouticího momentu, takže by s ním nemohl být v rovnováze.

Podmínka periodicity pro jeden závit délky l vyžaduje, aby $\lambda l = 2\pi$, tedy aby platilo, že

$$\frac{2\pi}{l} = \frac{M_k}{EJ} \quad (12.23)$$

Protože $J = \pi d^4/64$, bude

$$M_k = \frac{\pi^2}{32} E \frac{d^4}{l} = M_G \quad (12.24)$$

To je Greenhillova hodnota kritického krouticího momentu. Je tedy

$$M_G = 0,3084 E \frac{d^4}{l} \quad (12.25)$$

Je-li prut namáhán mimo to tahem silou F , vyjde kritická hodnota krouticího momentu ze vztahu

$$M_{krit} = 0,3084 \frac{d^4}{l} \sqrt{1 + 2,064 \frac{Fl^2}{Ed^4}} \quad (12.26)$$

Zde l značí vzdálenost ložisek, které umožňují úhlové vychýlení střednice prutu. Je-li

$$F = -\frac{Ed^4}{2,064 l^2} = -F_E \quad (12.27)$$

(F_E je Eulerova vzpěrná síla), vyjde $M_{krit} = 0$. Je zřejmé, že tlaková síla zmenšuje krouticí moment, při němž prut vybočí. Naopak platí, že krouticí moment snižuje únosnost vzpěry; rovnici (12.26) můžeme totiž upravit do tvaru

$$|F_{krit}| = F_E \left[1 - \left(\frac{M_k}{M_G} \right)^2 \right] \quad \text{pro } F < 0. \quad (12.28)$$

Na to se často zapomíná. Úvahu, kterou jsme uvedli pro kruhový průřez, by bylo možno zobecnit i pro obecný tvar průřezu.

Všeobecně je známo, že při krutu se nezachovává (až na výjimky) rovinnost průřezů. *) Nemůže-li průřez z nějakých důvodů volně vybočit ze své roviny, vzniká tímto omezením deplanace soustava druhotných napětí, kterou lze přibližně vypočítat z teorie ohybového kroucení. Podélná

*) Výjimku tvoří kruhové a mezikruhové průřezy.

napětí však vznikají i při volném, rovnoměrném krutu a to tím, že podélná vlákna se přetvářejí do tvaru šroubovic, jejichž délka je různá podle toho, jak jsou vzdálena od osy (od středu krutu). Zpravidla jsou tato napětí zanedbatelná a proto se tomuto problému nevěnuje pozornost. Nemusí však být zanedbatelná u tenkostěnných otevřených profilů, u nichž mohou vzniknout velké úhly zkroucení při relativně malém smykovém namáhání. *)

Uvedeme příklad. Prut - planžeta - má průřez ve tvaru úzkého obdélníku $b \times h$, $h \ll b$. Saint-Venantova teorie pro tento případ dává největší smykové napětí

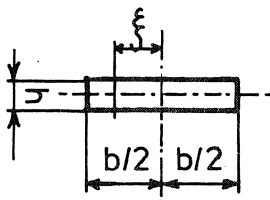
$$\tau = \frac{3M_k}{bh^2} \quad (12.29)$$

a zkrut

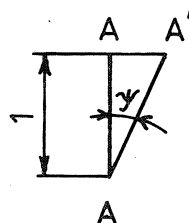
$$\vartheta = \frac{3M_k}{Gb^3h} \quad (12.30)$$

Podle (12.30) existuje přímá úměrnost mezi deformací a zatížením, takže platí Hookeův zákon (v původním znění). Ve skutečnosti tomu tak nebude. Kdyby se zachovávala délka osy prutu a přímota střední příčky rovnoběžné se stranou b (obr. 65), přetvořilo by se podélné vlákno AA ve vzdálenosti ξ do šroubovice AA' s poměrným prodloužením podle obr. 66

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\cos \psi} - 1 \doteq \frac{\psi^2}{2} \quad (12.31)$$



Obr. 65



Obr. 66

Zde

$$\psi = \vartheta \xi \quad (12.32)$$

*) Připomeňme, že tenkostěnné pruty s počátečním zkroucením (podélné hrany mají tvar šroubovic už v nezatíženém stavu) jsou méně tuhé v ohybu a více tuhé v krutu než jak předpovídá "klasická" nauka o pružnosti a pevnosti.

značí úhel šroubovice s osou prutu. Předpokládáme, že je malý, takže $\cos\psi \doteq 1 - \frac{1}{2}\psi^2$ a $(\cos\psi)^{-1} \doteq 1 + \frac{1}{2}\psi^2$. Vlivem prodloužení ε vznikne v prutu podélné tahové napětí

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = \frac{1}{2} E\nu^2 \xi^2. \quad (12.33)$$

Tomu by odpovídala osová síla

$$F = 2 \int_0^{b/2} \sigma_1(\xi) h d\xi = \frac{1}{24} E\nu^2 b^3 h. \quad (12.34)$$

Ve skutečnosti v prutu tato síla nepůsobí, takže její účinek je nutno odečíst. Zbude v prutu podélné napětí

$$\sigma(\xi) = \sigma_1 - \frac{F}{bh} = \frac{1}{2} E\nu^2 \left[\xi^2 - \frac{1}{12} b^2 \right]. \quad (12.35)$$

Toto napětí nemusí být malé ve srovnání se smykovým napětím τ podle rovnice (12.29). Ve vnějším vláknu $\xi = b/2$ je

$$\sigma_{\max} = E\nu^2 b^2 / 12, \quad (12.36)$$

kdežto

$$\tau = G\nu h. \quad (12.37)$$

Poměr obou napětí je

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau} = \frac{E}{G} \cdot \frac{\nu b}{12h} \quad (12.38)$$

a s rostoucím ν se zvětšuje. Protože elementární síla $\sigma(\xi)h d\xi$ svírá s osou úhel ψ , má obvodovou složku $\sigma h d\xi \cdot \psi$ a přispívá ke krouticímu momentu podílem

$$dM = \sigma h \psi \xi d\xi. \quad (12.39)$$

Dosadíme-li sem z rovnic (12.32) a (12.35) a integrujeme v mezích $-b/2 < \xi < b/2$, vyjde

$$M = E\nu^3 h \int_0^{b/2} \left[\xi^4 - \frac{1}{12} b^2 \xi^2 \right] d\xi = \frac{1}{360} E\nu^3 b^5 h. \quad (12.40)$$

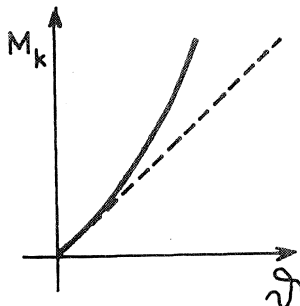
Tento moment složíme s krouticím momentem pocházejícím od smykových napětí podle Saint-Venantovy teorie. Ten má velikost $Gh^3b\vartheta/3$ (viz rovnici (12.30)). Bude

$$M_k = \frac{1}{3} G b h^3 \vartheta + \frac{1}{360} E b^5 h \vartheta^3 \quad (12.41)$$

a po úpravě

$$M_k = \frac{1}{3} G b h^3 \vartheta \left(1 + \frac{1}{120} \frac{E}{G} \frac{b^4 \vartheta^2}{h^2} \right). \quad (12.42)$$

Závislost deformace na zatížení bude tedy nelineární (obr. 67).



Obr. 67

Uvedená teorie má dva praktické důsledky

- (1) nelinearitě závislosti deformace na zatížení (vzpomeňme na pružiny vinuté z planžety obdélníkového průřezu);
- (2) závislosti torzní deformační charakteristiky prutu s úzkým obdélníkovým průřezem na působícím osovém (tahovém nebo tlakovém) napětí. *)

Závěrem této kapitoly připomeneme ještě jednu známou skutečnost. Má-li při rovnoměrném krutu prut otevřený tenkostěnný profil, vzniká největší smykové napětí v tom místě profilu, kde je tloušťka stěny největší. Tento zdánlivý paradox nevzniká u profilů s uzavřeným průřezem. Názornou představu o průběhu a relativní velikosti smykových napětí při rovnoměrném krutu dává Prandtlova membránová analogie.

Upozornili jsme na neplatnost Schwedlerových vět, jak je známe z teorie přímých nosníků, u křivých prutů. Probrali jsme dále vliv krutu na elastickou stabilitu prutů. Ukázalo se, že vzpěrná únosnost se krutem zmenšuje; naopak přiložením podélné síly lze ovlivnit velikost kritického krouticího momentu, při němž kroucený prut ohybově vybočí.

Planžeta s průřezem ve tvaru úzkého obdélníku má nelineární průběh torzní deformační charakteristiky; lze jej ovlivnit přiložením osového (tahového nebo tlakového) napětí.

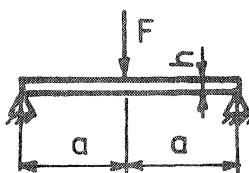
*) Toto přidané napětí by vstoupilo do pravé strany rovnice (12.35).

13. SINGULÁRNÍ NAPJATOST A PŘETVOŘENÍ

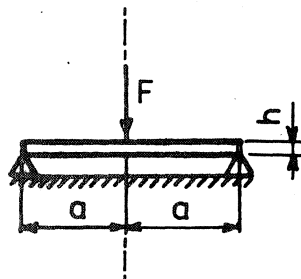
Je-li nosník délky $2a$ obdélníkového průřezu $b \times h$ zatížen uprostřed osamělou silou F (obr. 68), vzniká uprostřed napětí

$$\sigma_{\max} = \frac{3Fa}{bh^2}. \quad (13.1)$$

Bylo odvozeno s použitím Bernoulliho-Navierovy hypotézy o zachování rovinnosti průřezů.



Obr. 68



Obr. 69

Postupujeme-li zcela obdobně u rotačně souměrné desky na obr. 69, dostaneme v bodě $r=0$ napětí

$$\sigma_{\max} \rightarrow \infty. \quad (13.2)$$

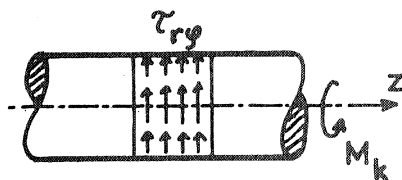
Toto napětí bylo odvozeno s použitím Kirchhoffovy hypotézy, která je zcela analogická k hypotéze Bernoulliho-Navierově, namáhání desky však limituje k nekonečnu. Jak je to možné? Kdybychom z desky vyřízli úzký proužek o šířce b , dostali bychom případ podle obr. 67 a napětí v ohybu by zůstalo konečné. Podle názoru je však zřejmé, že řezáním pevnost desky nezvýšíme, spíše naopak. Zde je tedy teorie v rozporu s praxí.

To však nesvědčí proti teorii, ale proti nám, že jsme totiž extrapolovali osvědčené vzorce až k meznímu případu koncentrované síly, při němž vzorce nemohou platit. Oba vzorce jsou totiž odvozeny za předpokladu, že napětí $\sigma_z \approx 0$ (osa z směřuje kolmo k ose nosníku resp. kolmo ke střední ploše desky). Pod působitěm osamělé síly však $\sigma_z \rightarrow \infty$, měrný tlak roste bez omezení. Měli jsme tedy použít jiných vzorců. V teorii desek se dokazuje, že napětí u spodního povrchu uprostřed desky zatížené podle obr. 68 lze počítat ze vzorce

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{h^2} \left(0,63 \ln \frac{a}{h} + 1,15 \right) \quad (13.3)$$

a toto napětí je konečné.

Osamělá síla je ve skutečnosti abstrakcí; v přírodě je síla vždy spojitě rozdělena.



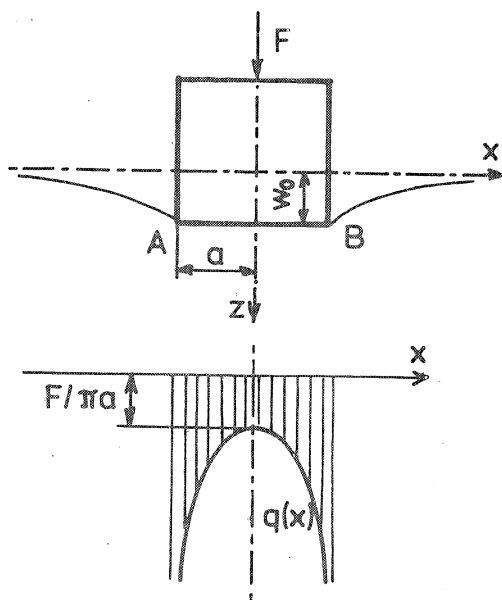
Obr. 70

Paradoxní koncentraci napětí však můžeme dostat i při spojitě rozdělené síle, existuje-li nespojitost na hranici oblasti. Působí-li např. na pásu na povrchu hřídele smykové napětí $\tau_{r\varphi} = \text{konst}$ podle obr. 70, vzniká na okraji pásu v povrchové vrstvě podle teorie pružnosti napětí $\tau_{z\varphi} \rightarrow \infty$. Ve skutečnosti ovšem nevznikne, neboť žádný materiál není lineárně elastický při neomezeně vzrůstajícím napětí.

Veškeré pokusy, počítat koncentraci napětí pod okrajem nalisovaného náboje při krutu elastického hřídele jsou však odsouzeny v důsledku uvedeného "paradoxu" k nezdaru.

Vniká-li do pružné poloviny absolutně tuhý razník (obr. 71), je rozdělení síly ve styčné ploše popsáno podle Boussinesqa rovnicí

$$q = \frac{F}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (|x| < a) \quad (13.4)$$



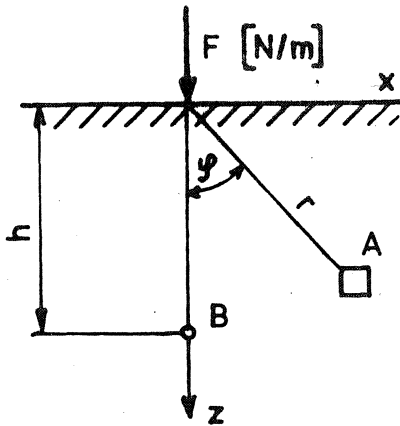
Obr. 71

Má polytropický průběh zakreslený rovněž na obr. 71. Je zřejmé, že $q \rightarrow \infty$ pro $|x| \rightarrow a$, což není fyzikálně možné. Je to důsledek nespojitosti napětí σ_z v bodech A, B, která byla vyvolána "tvrdými" okrajovými podmínkami

$$W(z=0) = W_0 = \text{konst}, \quad \tau_{zx} = 0 \quad \text{pro } |x| < a,$$

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = 0 \quad \text{pro } |x| > a.$$

Řešení (13.5) proto nemůžeme fyzikálně interpretovat v blízkosti bodů A, B na obr. 71.



Obr. 72

Působí-li na pružný poloprostor (obr. 72) síla F rovnoměrně rozdělená na přímce $x=0, z=0$, vznikají v bodě A, určeném vzdáleností $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ a úhlem φ , tato napětí:

$$\sigma_z = -\frac{2F}{\pi r} \cos^3 \varphi,$$

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi r} \sin^2 \varphi \cos \varphi, \quad (13.5)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\frac{2F}{\pi r} \sin \varphi \cos^2 \varphi.$$

Vidíme, že pro $\varphi = 0$ resp. $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ vymizí napětí σ_x a τ_{xz} . Pro $r \rightarrow 0$ roste σ_z nade všechny meze; není-li $\varphi = 0$ resp. $\pm \pi/2$, rostou tak i obě zbývající složky tenzoru napjatosti. Pro přetvoření povrchu ($z=0, \varphi = \pm \pi/2$) dává teorie pružnosti radiální posuv

$$u = \mp \frac{(1+\mu)(1-2\mu)F}{2E}, \quad (13.6)$$

směřující vždy k působišti síly F (pro $x > 0$ vlevo, pro $x < 0$ vpravo na obr. 72) a svislý posuv

$$W = \frac{(1+\mu)F}{\pi E} \left[(1-\mu) \ln \left(\frac{h}{x} \right)^2 - 1 \right]. \quad (13.7)$$

Svislý posuv přitom měříme relativně k vzdálenému bodu B, který má souřadnici $z = h$ (obr. 72) a o němž předpokládáme, že se neposouvá.

Ihned je zřejmý paradox - není $u \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow 0$ a působišť síly F ($x=0$) se "prepadá do nekonečna", přestože $W=0$ pro $z=h$ a $x=0$. *)

*) Úplný vzorec pro W zní

$$W = \frac{(1+\mu)F}{\pi E} \left[(1-\mu) \ln \frac{h^2}{x^2+z^2} - \frac{x^2}{x^2+z^2} \right].$$

Dosadíme-li $z=0$, dostaneme odtud rovnici (13.7).

Osamělé síly a liniové soustředěné síly odporují požadavkům spojitosti kladeným na napjatost a přetvoření v matematické teorii pružnosti. Dospíváme-li k těmto pojímům limitním přechodem od spojitého zatížení, nebudou odvozené výsledky platit v blízkém okolí působišť těchto soustředěných sil. I v jiných případech může dojít k vzniku singulární napjatosti v některých bodech nebo na některých liniích, nemají-li okrajové podmínky potřebnou hladkost např. (na okraji vtlačovaného tuhého razníku nebo u hřídele na obr. 69).

14. KUMULACE VRUBOVÝCH ÚČINKŮ

K výpočtu maximálních napětí u těles složitějších tvarů se používá tvarových činitelů α , jež představují "opravu" k běžným vzorcům používaným při výpočtu napětí podle "inženýrských" metod nebo - jak se někdy také říká - podle vzorců "technické" nauky o pružnosti těles. Dostáváme tak

$$\sigma_{max} = \alpha_0 \sigma_n \quad (14.1)$$

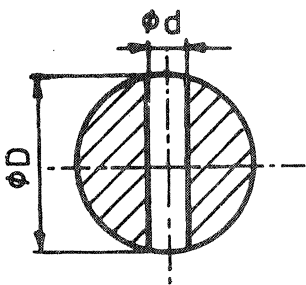
resp.

$$\tau_{max} = \alpha_k \tau_n, \quad (14.2)$$

kde σ_n resp. τ_n jsou jmenovitá (nominální) napětí vypočtená z jednoduchých vzorců a σ_{max} resp. τ_{max} jsou maximální hodnoty vypočtené z přesnějších vzorců teorie pružnosti nebo určené experimentálně. Tvarový činitel α_0 resp. α_k závisí na tvaru a na způsobu zatížení tělesa.

Nemáme-li se při výpočtu podle těchto vzorců dopustit omylu musí být zcela jednoznačně dáno, jakým způsobem se má počítat jmenovité napětí.

Zpravidla se jmenovité napětí počítá ze vzorců platných pro hladký prut (bez vrubu), jehož průřez se rovná zeslabenému průřezu skutečného prutu (s vrubem). Toto pravidlo však není závazné a mimo to jeho výklad bývá sporný, např. u hřídele s příčnou dírou při namáhání krutem. Průřezový modul v krutu pro průřez s dírou podle obr. 73 nikterak nevyplývá z teorie kroucení prizmatických tyčí a musí být určen konvencí. Zpravidla se bere



Obr. 73

$$W_k = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{d D^2}{6} \quad (14.3)$$

Někteří autoři dávají přednost výpočtu s nezeslabeným průřezem, takže berou

$$W_k^* = \frac{\pi D^3}{16} \quad (14.4)$$

Hodnoty tvarových činitelů nebudou v obou případech stejné. Musí platit, že oběma způsoby výpočtu vyjde stejné špičkové napětí, takže

$$\alpha \frac{M_k}{W_k} = \alpha^* \frac{M_k}{W_k^*} \quad (14.5)$$

Odtud dostaneme poměr příslušných tvarových činitelů

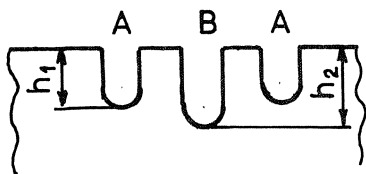
$$\frac{\alpha}{\alpha^*} = \frac{W_k}{W_k^*} = 1 - \frac{8}{3\pi} \frac{d}{D} \quad (14.6)$$

Špičkové napětí přitom není smykové. (ačkoli jde o krut), ale normálové; působí obvodově poblíž okraje otvoru těsně pod jeho povrchem. Na rozdíl od rovnic (14.1) a (14.2) zde platí, že

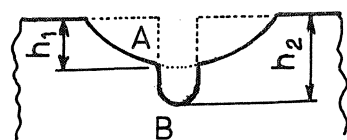
$$\sigma_{\max} = \alpha \tau_n \quad (14.7)$$

Pro $d/D \rightarrow 0$ je přibližně $\alpha \rightarrow 4$.

Ve výpočtu tvarové pevnosti se lze dopustit chyby také tak, že zanedbáme kumulaci vrubových účinků, nachází-li se jeden vrub v blízkosti druhého nebo překrývají-li se tyto vruby (obr. 74 a 75). Zvětšujeme-li hloubku h_1 vrubů A na obr. 74 při jinak stejných ostatních kótách, roste koncentrace napětí na vrubech A a zároveň klesá na vrubu B (obr. 76). Existuje tedy optimální hloubka h_{1opt} vrubů A.

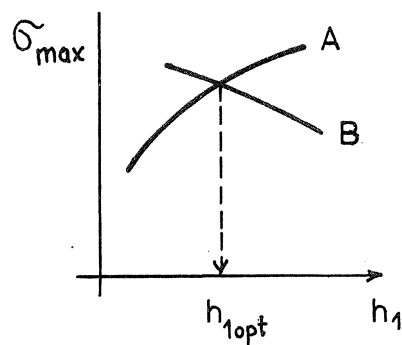


Obr. 74



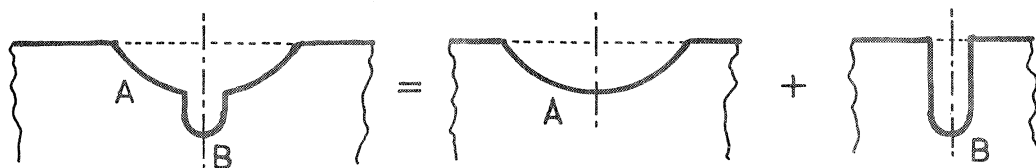
Obr. 75

Na obr. 75 se vrub B nachází v oblasti, jejíž napjatost je ovlivněna zároveň vrubem A. Představme si, že vrub B je dán, kdežto hloubku a šířku vrubu A můžeme měnit. Zvolíme-li tento vrub relativně široký a mělký, odlehčí koncentraci napětí v kořenu vrubu B. Zvýší se totiž nejen efektivní šířka vrubu, ale větší



Obr. 76

se i efektivní poloměr křivosti. Podle tvaru a vzájemné polohy vrubů se však zároveň uplatní i druhý vliv, způsobující naopak zvýšení koncentrace napětí. Vzniká tím, že relativně malý vrub o hloubce $(h_2 - h_1)$ působí v zóně koncentrovaného napětí prvního vrubu o hloubce h_1 (obr. 77).



Obr. 77

Platí multiplikační pravidlo pro souměrné vruby

$$\alpha \leq \alpha_A \cdot \alpha_B. \quad (14.8)$$

To znamená, že výsledný tvarový činitel je nejvýš roven součinu tvarových činitelů platných pro každý vrub zvlášť. Protože vruby A a B mají různé hloubky, vztahují se α_A a α_B k různým jmenovitým napětím. Výsledný tvarový činitel α se vztahuje k většímu z obou jmenovitých napětí, tj. k průřezu zeslabenému vrubem B. Někdy bývá nerovnost (14.8) příliš silná, zvláště když z vrubu B proniká do kořene vrubu A jen malá část. Realističtější odhad koncentrace napětí bychom dostali, kdybychom v tomto případě brali za hloubku vrubu B pouze $h_2 - h_1$.

Je-li koncentrace napětí značná, může napětí v okolí kořene vrubu překročit mez úměrnosti, ačkoli ve zbytku průřezu zůstává materiál lineárně elastický. Pro takový případ je třeba rozlišit součinitel koncentrace napětí K_σ od součinitele koncentrace poměrného prodloužení K_ϵ . Pro tažné materiály přibližně platí Neuberův vztah

$$K_\sigma K_\epsilon = \alpha^2, \quad (14.9)$$

kde α značí tvarový činitel (součinitel koncentrace napětí pro ideální lineárně pružný materiál). Vztah (14.9) neplatí pro velké deformace, neboť v blízkosti mezního plastického stavu se napětí i deformace po průřezu vyrovnávají a $K_\sigma \rightarrow 1$, $K_\epsilon \rightarrow 1$. Přitom

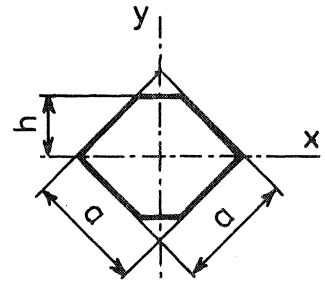
$$K_\sigma = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}, \quad K_\epsilon = \frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_n}. \quad (14.10)$$

Zde σ_n , ϵ_n jsou jmenovité (nominální) hodnoty napětí resp. poměrného prodloužení.

V této kapitole jsme upozornili na chyby, jež mohou vzniknout při výpočtu koncentrace napětí v součástech s vruby. Používáme-li tvarových činitelů, je nutné jednoznačně uvést, jakým způsobem se počítá jmenovité napětí, k němuž se činitelé vztahují. Překrývají-li se vruby nebo jsou-li vzájemně blízké, ovlivňují koncentraci napětí složitým způsobem. Horní mez pro špičkové napětí lze získat pomocí multiplikačního pravidla (výsledný tvarový činitel složeného vrubu je dán součinem tvarových činitelů pro jednotlivé vruby). Někdy však toto pravidlo dává příliš vysoké hodnoty. Překročí-li napětí v okolí kořene vrubu mez úměrnosti, je třeba rozlišovat součinitel koncentrace napětí od součinitele koncentrace poměrného přetvoření. Pro lineárně elastický materiál tyto hodnoty splývají s tvarovým činitelem α (s teoretickým součinitelem koncentrace napětí). V nelineární oblasti namáhání přibližně platí - pokud jsou deformace malé - Neuberův vztah, podle něhož tvarový činitel je geometrickým průměrem součinitelů koncentrace napětí a koncentrace poměrného přetvoření.

15. KDY SE PŘEDIMENZOVÁNÍM SNIŽUJE PEVNOST

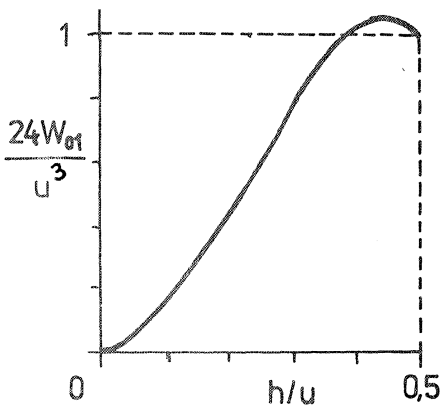
Vypočteme průřezový modul W_{0x} pro ohyb v rovině (y, z) průřezu znázorněného na obr. 78. Průřez vznikl zkomolením čtverce $a \times a$, a to sražením dvou protějších hran ve vzdálenostech $y = \pm h$.



Obr. 78

Nejprve určíme moment setrvačnosti. Je-li $u = a\sqrt{2}$ úhlopříčka čtverce, vyjde plošný moment setrvačnosti k ose x

$$J_x = \frac{1}{3} h^3 (2u - 3h). \quad (15.1)$$



Obr. 79

Je-li $h = u/2$, vyjde pro plný čtvercový průřez $J_x = u^4/48 = a^4/12$.

Průřezový modul v ohybu je

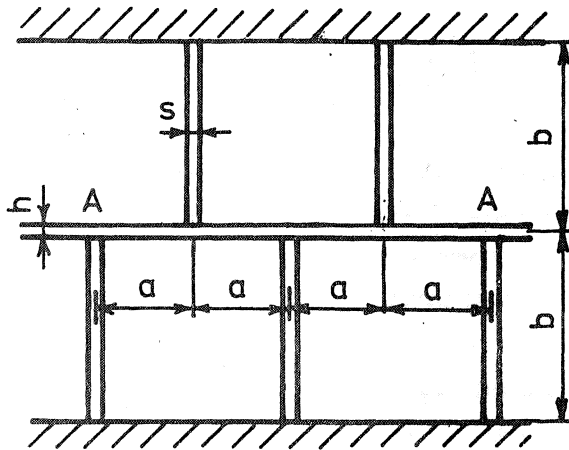
$$W_{0x} = \frac{J_x}{h} = \frac{1}{3} h^2 (2u - 3h). \quad (15.2)$$

Budeme-li při konstantním u měnit h , bude poměr $24W_{0x}/u^3$ probíhat v závislosti na poměru h/u podle obr. 79.

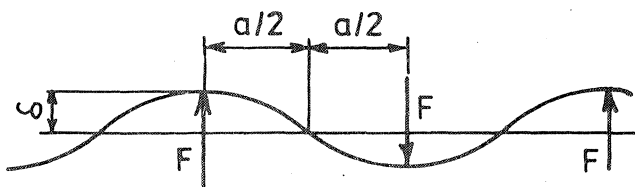
Je zřejmé, že tato funkce má maximum a to pro $h = 4u/9$

$$W_{oxmax} \doteq 1,054 \frac{1}{24} u^4. \quad (15.3)$$

Zkosením hran do hloubky $u/2 - h = u/18$, tedy ubráním materiálu, se ohybové napětí zmenší o 5,4 %. Je to způsobeno tím, že vzdálenost vnějšího vlákna se zmenšila ve větším poměru než plošný moment setrvačnosti průřezu. Tak je tomu i u jiných masivních průřezů, z nichž vyčnívají ojedinělá tenká žebra. Zmenší-li se výška žeber, zmenší se podstatně vzdálenost vnějšího vlákna od neutrální osy, ale moment setrvačnosti průřezu se zmenší jen málo; výsledkem je vzrůst průřezového modulu a tedy pokles ohybového napětí. Zvyšujeme-li žebra, je tomu naopak; napětí zpočátku roste a teprve později - při dostatečné výšce žeber - začne opět klesat. K paradoxnímu zvyšování napětí účinkem žeber dochází, nejsou-li žebra dostatečně bohatě dimenzována. Žebra musí být buď důkladná, masivní a dostatečně hustá nebo raději žádná. Ojedinělá tenká a nepříliš vysoká žebra mohou napětí zvyšovat.



Obr. 80



Obr. 81

Na obr. 80 je nakreslena stěna AA o tloušťce h , k níž jsou po stranách v pravidelných vzdálenostech a střídavě přivařeny přepážky o tloušťce s a délce b . Za provozu se přepážky zahřejí o t °C a vznikne ohyb stěny AA. Vypočteme

ohybové napětí. Předpokládáme, že stěna není jiným způsobem zatížena. Průhyb stěny je nakreslen na obr. 81. Zřejmé

$$\delta = \frac{1}{3} \frac{(F/2)(a/2)^3}{EJ} = \frac{1}{48} \frac{Fa^3}{EJ} \quad (15.4)$$

Vztáhneme-li výpočet na jednotku výšky stěny, bude $J = h^3/12$, takže

$$\delta = \frac{Fa^3}{4Eh^3} \quad (15.5)$$

Prodloužení přepážek je

$$\delta = \alpha bt - \frac{Fb}{Es} \quad (15.6)$$

Zde α je součinitel lineární teplotní roztažnosti. První člen na pravé straně poslední rovnice značí teplotní dilataci, druhý stlačení přepážky silou F . Vzorec platí pokud je síla F pod mezí elastické stability, což budeme nyní předpokládat. Ze srovnání obou posledních rovnic vyjde síla

$$F = \frac{E\alpha bt}{\frac{b}{s} + \frac{a^3}{4h^3}} \quad (15.7)$$

Ohybové napětí ve stěně v místě působivosti síly F je

$$\sigma_0 = \frac{6(F/2)(a/2)}{h^2} = \frac{3Fa}{2h^2} \quad (15.8)$$

Dosazením z rovnice (15.7) dostaneme

$$\sigma_0 = \frac{6E\alpha a b t s h}{4bh^3 + a^3s} \quad (15.9)$$

Napětí $\sigma_0 \rightarrow 0$ jednak pro $h \rightarrow 0$, jednak pro $h \rightarrow \infty$. Funkce $\sigma_0 = f(h)$ má maximum pro

$$h = h_1 = \frac{a}{2} \sqrt[3]{\frac{s}{b}} \quad (15.10)$$

Máme-li např. $a = 0,5$ m, $b = 1$ m, $s = 0,05$ m, bude $h_1 = 0,092$ m. Je-li $h < h_1$, pak malým zmenšením tloušťky h napětí ve stěně poklesne, zesílením stěny v ní napětí naopak vzroste.

Příklad na obr. 80 jsme volili poněkud uměle stylizovaný, aby výpočet byl jednoduchý a aby vynikla podstata problému. S podobným jevem se setká-

váme - ovšem ve složitější podobě - u různých konstrukcí, u nichž se některému prvku soustavy vnučuje deformace málo závislá na jeho dimenzích (velikost deformace je určována z větší míry jinými prvky v soustavě). Pak zeslabení prvku může vést ke snížení namáhání v celé soustavě. Snaha zvýšit pevnost soustavy zesílením prvku nemusí být v takovém případě úspěšná. Zesílení musí být podstatné a pak se často stává, že se takovým zásahem přenesou poruchovost do jiného prvku soustavy.

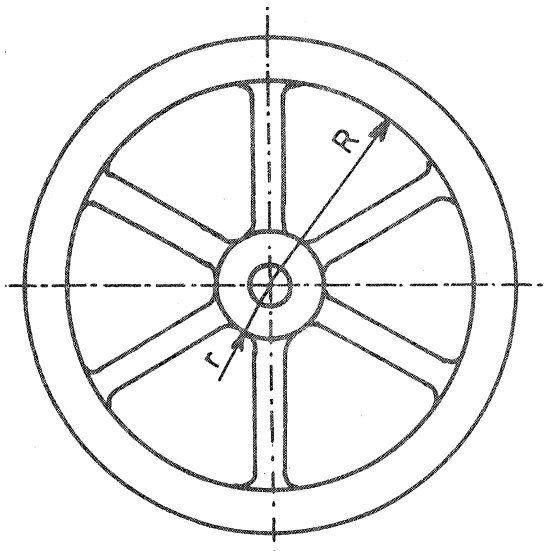
Mez únavy a rázová pevnost se úběrem materiálu rovněž zvyšují, dosáhne-li se tím větší hladkosti (plynulejšího tvaru) při nezměněném nebo jen málo změněném jmenovitém napětí. Někdy se příznivě projeví odebrání poškozené povrchové vrstvy materiálu; tím se zabrání vzniku (nebo se odálí vznik) progresivní únavové trhliny. Takový zásah může být účinný jen tehdy, nevzroste-li příliš jmenovité napětí.

Připomeňme ještě účinek "odlehčujících" vrubů na mez únavy. Zčásti jsme se tím zabývali už v minulé kapitole a nebudeme se k tomu vracet.

Ukázali jsme, že u některých průřezů lze úběrem materiálu dosáhnout zvětšení průřezového modulu v ohybu a tím i poklesu ohybového napětí. Nevhodná, nedostatečně dimenzovaná žebra mohou pevnost nosníku nebo desky snížit. Je-li některému členu v soustavě těles vnučována deformace (ostatními členy), která jen málo závisí na jeho dimenzích a není-li tento člen namáhán ještě jiným způsobem, může se jeho namáhání zmenšit nejenom tak, že se člen dostatečně zesílí, ale naopak také tak, že se dostatečně zeslabí. V tomto druhém případě zpravidla poklesne i namáhání ostatních členů v soustavě. Také mez únavy lze někdy úběrem materiálu zvýšit (např. vytvořením odlehčujících vrubů nebo odstraněním poškozené povrchové vrstvy). Úběr materiálu může zvýšit i rázovou pevnost součásti, zvyšuje-li se jím plynulost tvaru součásti.

16. LOM V NEZATÍŽENÝCH ČÁSTECH

Na obr. 82 je znázorněn setrvačnický ze šedé litiny o pevnosti $\sigma_{pe} = 180 \text{ MN m}^{-2}$. Je-li odléván, počne litina tuhnut nejprve v ramenech, která mají relativně malý průřez. Pak tuhne věnec, neboť má relativně velký povrch a naposledy náboj. Má-li litina průměrnou hodnotu součinitele teplotní roztažnosti $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ a zanedbáme-li deformace náboje a věnce ve srovnání s deformacemi ramen, pak můžeme snadno určit zbytkové vlastní pnutí ve vychladlém odlitku. Předpokládejme, že rozdíl teplot náboje a věnce v okamžiku tuhnutí náboje je stále ještě Δt °C. Po vychladnutí



Obr. 82

se rameno prodlouží o $\alpha \Delta t (R-r)$.
Tím vznikne v ramenu tahové napětí

$$\sigma = E \alpha \Delta t (R-r). \quad (16.1)$$

Je-li např. $E = 10^5 \text{ MN m}^{-2}$,
 $R-r = 1,5 \text{ m}$, $\Delta t = 120 \text{ }^\circ\text{C}$,
bude

$$\begin{aligned} \sigma &= 10^5 \cdot 10^{-5} \cdot 120 \cdot 1,5 = \\ &= 180 \text{ MN m}^{-2}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Napětí tedy dosáhne meze pevnosti.

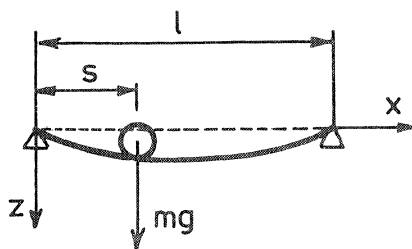
Skutečnost bude složitější, neboť mechanické vlastnosti litiny se budou v průběhu chladnutí na různých místech různě měnit; uplatní se také ohybová tuhost věnce a radiální tu-

host náboje. Protože jsme však volili teplotní rozdíl Δt malý je zřejmé, že i tehdy může lom velmi snadno vzniknout a to záhy po odlití. Tomu je nutno čelit pomalým, kontrolovaným chladnutím odlitku, popř. zlepšením jakosti litiny a technologického postupu. Popsaný jev byl v praxi mnohokrát pozorován. Někdy docházelo k prasknutí ramen ihned po odlití, jindy až ve skladu odlitků nebo při montáži na karuselu, na němž měl být setrvačnický obráběn.

Vlastní pnutí ovlivňují také únavovou pevnost částí. Mohou mít příznivý vliv, vytvoří-li se u kořene vrubu v povrchové vrstvě tlakové vlastní pnutí. Akumulovaná energie vlastních pnutí může mít velmi nepříznivý vliv na vznik náhlého kvazikřehkého nebo křehkého lomu a to zvláště u velkých a složitých svařenců.

Vlastní pnutí v odlitcích a svařencích mohou mít nepříznivý vliv na pevnost, a to při porušení únavou nebo náhlým lomem. U litinových odlitků může lom vzniknout záhy po odlití i v nezátíženém tělese. Je známo, že nevhodně navržené odlitky s velkými rozdíly v tloušťkách stěn se snadno po odlití samovolně trhají. Na to je třeba pamatovat už při konstrukčním návrhu.

17. POHYBLIVÉ BŘEMENO



Obr. 83

Probereme případ prostě podepřeného prizmatického nosníku, po kterém se pohybuje břemeno o hmotnosti m tak, že jeho vzdálenost od levého konce nosníku je známou funkcí času $s = s(t)$ (obr. 83). Průhyb nosníku je $W = w(x,t)$.

Abychom mohli do výpočtu zahrnout také setrvačnou sílu příslušnou vertikálnímu zrychlení břemene, potřebujeme toto zrychlení znát. Bude to zřejmě zrychlení nosníku v bodě $x = s$, takže

$$a = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right|_{x=s} = a(t). \quad (17.1)$$

Tato rovnice je však chybná. Svislý posuv břemena nevzniká jen tím, že plyne čas, ale také tím, že v průběhu času se břemeno dostává do jiných míst. Chceme-li určit svislou složku jeho rychlosti, musíme pro svislý posuv břemene napsat rovnici $W_b = w(x=s(t), t)$ a derivovat jako složenou funkci

$$\frac{dW_b}{dt} = \left[\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \right]_{x=s(t)} \quad (17.2)$$

Pro derivaci svislé složky posuvu břemene podle času tedy platí operátor

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (17.3)$$

Jeho opětovým užitím dostaneme druhou derivaci

$$\frac{d^2 W_b}{dt^2} = \left(\frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 W = \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (17.4)$$

Opět dosadíme $x = s(t)$. Jenže ani rovnice (17.4) není správná. "Poctivou" derivací pravé strany rovnice (17.2) totiž vyjde

$$a = \frac{d^2 W_b}{dt^2} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \right]_{x=s(t)} +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right]_{x=s(t)} \quad (17.5)$$

První hranatá závorka odpovídá derivaci prvního členu na pravé straně rovnice (17.2), druhá závorka druhému členu. Porovnáme-li pravé strany (17.4) a (17.5) vidíme, že na pravé straně (17.4) chybí člen $(\partial W / \partial x)(\partial^2 s / \partial t^2)$ (poslední člen v první hranaté závorce (17.5)). Je-li $s = ct$ konstantní rychlost pohybu břemene, je

$$a = \left[c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2c \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right]_{x=ct} \quad (17.6)$$

Je-li $\partial W / \partial t$ malé (tj. narůstá-li průhyb pomalu), lze druhé dva členy v hranaté závorce poslední rovnice zanedbat. Tak tomu je, je-li průhyb malý a nosník nehmotný, který se prohýbá stejně jako při statickém zatížení silou

$$Q = m(g-a) = mg \left(1 - \frac{c^2}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{x=ct} \quad (17.7)$$

vzdálenou o $s(t)$ od levého konce nosníku. Pro průhyb pak platí diferenciální rovnice

$$W = mg \left(1 - \frac{c^2}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{x=ct} \cdot \frac{x^2(l-x)^2}{3lEJ} \quad (17.8)$$

Dosadíme-li do výrazu pro druhou derivaci přibližně statický průhyb $W = mgx^2(l-x)^2/3lEJ$, vyjde z rovnice (17.8) zpřesněná hodnota průhybu, jakož i největší síla zatěžující nosník Q_{max} a největší průhyb δ_{max} pro $s = l/2$

$$Q_{max} = mgZ, \quad \delta_{max} = \delta_{st} Z, \quad (17.9)$$

kde

$$\delta_{st} = \frac{mg l^3}{48 EJ},$$

$$Z = 1 + \frac{c^2}{g} \frac{mgl}{3EJ}.$$

Probereme nyní druhý limitní případ, kdy hmotnost břemene je relativně malá, takže jeho působení lze nahradit pohyblivou konstantní silou

$F = mg$. Podáme jen přibližné řešení. *) Budeme předpokládat, že průhybová čára má rovnici

$$W(x,t) = f(t) \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (17.10)$$

Je-li μ hmotnost nosníku připadající na jednotku délky, je nosník zatížen spojitě rozdělenou setrvačnou silou

$$q = -\mu \ddot{W} = -\mu \ddot{f} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (17.11)$$

a vnější silou F ve vzdálenosti $s = ct$ od počátku souřadnic. Energie napjatosti je

$$V = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EJ f^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{1}{4} \frac{\pi^4 f^2 EJ}{l^3}. \quad (17.12)$$

Změní-li se $f(t)$ o virtuální přírůstek $\delta f(t)$, vykonají setrvačné síly q virtuální práci

$$\delta A_1 = \int_0^l q \frac{\partial W}{\partial f} \delta f dx = -\mu \ddot{f} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx \delta f = -\frac{1}{2} \mu l \ddot{f} \delta f. \quad (17.13)$$

Síla F vykoná virtuální práci

$$\delta A_2 = F \left[\frac{\partial W}{\partial f} \delta f \right]_{x=ct} = F \sin \frac{\pi ct}{l} \delta f. \quad (17.14)$$

Součet těchto prací musí dát dohromady virtuální změnu energie napjatosti

$$\delta A_1 + \delta A_2 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial f} \delta f. \quad (17.15)$$

Dosazením

$$-\frac{1}{2} \mu l \ddot{f} \delta f + F \sin \frac{\pi ct}{l} \delta f = \frac{\pi^4 EJ f \delta f}{2 l^3}. \quad (17.16)$$

Protože $\delta f \neq 0$, můžeme rovnici (17.16) krátit a dostaneme

*) Podrobnější rozbor účinků pohyblivých břemen obsahuje monografie FRÝBA, L.: Vibration of solids and structures under moving loads. Academia, Praha 1972.

$$\ddot{f} + \frac{\pi^4 EJ}{\mu l^4} f = \frac{2F}{\mu l} \sin \frac{\pi ct}{l} \quad (17.17)$$

Obecný integrál této rovnice odpadne, je-li nosník před najetím břemene v klidu (v nedeformovaném tvaru). Partikulární integrál je

$$f = f_0 \sin \frac{\pi ct}{l}, \quad (17.18)$$

kde

$$f_0 = \frac{2Fl^3}{\pi^4 EJ} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mu c^2 l^2}{\pi^2 EJ}} \quad (17.19)$$

Výraz (17.19) dostaneme, když (17.18) dosadíme do (17.17) a krátíme.

Rovnice (17.18) je však chybná, neboť úvaha o obecném integrálu byla ukvapená a nesprávná. Z nulových počátečních podmínek

$$f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = 0 \quad (17.20)$$

totiž nikterak nevyplývá, že obecný integrál vymizí. Správné řešení je

$$f = f_0 \sin \frac{\pi ct}{l} - f_0 \frac{cl}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{EJ}} \sin \left(\frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \cdot t \right). \quad (17.21)$$

Je-li

$$c = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}, \quad (17.22)$$

nastává rezonance. Jmenovatel v (17.19) je nulový, takže $f_0 \rightarrow \infty$. Avšak výsledný průhyb f podle (17.21) není nekonečný, protože pro f dostaneme neurčitý výraz $0 \cdot \infty$. Vypočítáme-li jeho limitu zjistíme, že za rezonance je

$$f_{\text{res}} = \frac{Fl}{\pi^2 \mu c^2} \left[\sin \frac{\pi ct}{l} - \frac{\pi ct}{l} \cos \frac{\pi ct}{l} \right]. \quad (17.23)$$

Tento výraz je maximální pro

$$t = \frac{l}{c}. \quad (17.24)$$

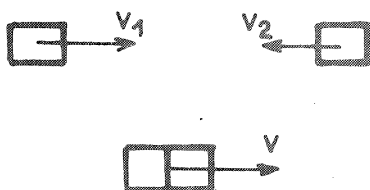
To znamená, že největší průhyb za rezonance nastane právě když pohyblivá síla F opouští nosník (je nad jeho pravou podporou). V tom okamžiku je průhybová čára dána rovnicí

$$W = \frac{F l^3}{\pi^3 E J} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (17.25)$$

Tento průhyb je asi o 50 % větší než statický průhyb, když stejná síla F působí uprostřed nosníku.

Na příkladu výpočtu zrychlení pohyblivého břemena přejíždějícího přes pružný most jsme ukázali, jak snadno vznikají chyby nepozorností, zejména mechanickým používáním rutinních postupů, např. rekurentních vzorců a spoléháním na vžitě zkušenosti a představy. Dále jsme upozornili na zdánlivý paradox, který vzniká, pohybuje-li se konstantní síla stálou rychlostí po prostě podepřeném nosníku. Za rezonance vznikne největší namáhání a největší průhyb nosníku teprve v okamžiku, kdy síla je už nad podporou nosníku a nosník opouští. Rezonance není provázána neomezeným vzrůstem průhybu jak tomu bývá v jiných případech. Tyto jevy souvisejí se superpozicí volného avynuceného kmitání (obecného a partikulárního integrálu) diferenciální rovnice.

18. POHYBOVÁ ENERGIE A SRÁŽKA VOZIDEL



Obr. 84

Proti sobě se pohybují dva stejné automobily o hmotnosti m , přičemž první jede konstantní rychlostí v_1 , druhý v opačném směru rychlostí v_2 . Při srážce se část energie zmaří; předpokládáme, že vozidla se natolik zdeformují a do sebe vniknou, že se neodrazí a po srážce se pohybují společně rychlostí v (obr. 84). Chceme porovnat účinek tohoto rázu s případem, kdy stejné vozidlo narazí do tuhé

(nepohyblivé) zdi. Ptáme se, při jaké rychlosti v_0 nárazu vozidla do zdi lze očekávat stejný účinek jako v předchozím případě.

Nahlédneme do Příručního slovníku naučného, Academia, Praha 1966, heslo RÁZ: " = uhození, úder, náraz; ve fyzice krátkodobá srážka těles, při které se rychle mění velikosti a směry rychlostí těles, avšak celková hybnost soustavy zůstává stálá. Při dokonalé pružnosti těles se nemění ani jejich celková pohybová energie; při polopružném a nepružném rázu se

projeví úbytek celkové pohyblivé energie těles jejich zahřátím, trvalou deformací a podobně".

To znamená, že rychlost po rázu V lze stanovit ze zákona zachování hybnosti a že účinek rázu lze posoudit podle zmařené kinetické energie.

Z rovnosti hybností

$$mV_1 - mV_2 = 2mV \quad (18.1)$$

ihned vyjde

$$V = \frac{V_1 - V_2}{2} \quad (18.2)$$

Při rázu podle obr. 84 ztratí první vozidlo kinetickou energii

$$E = \frac{1}{2} mV_1^2 - \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{8} m(3V_1^2 + 2V_1V_2 - V_2^2) \quad (18.3)$$

Kdyby jelo rychlostí V_0 a narazilo na zeď, ztratilo by kinetickou energii

$$E = \frac{1}{2} mV_0^2 \quad (18.4)$$

Mají-li se tyto výrazy rovnat, musí být

$$V_0 = \frac{1}{2} \sqrt{3V_1^2 + 2V_1V_2 - V_2^2} \quad (18.5)$$

Pěkný vzorec, ale zvláštní. Je-li totiž $V_2 > 3V_1$, vyjde rychlost V_0 imaginární. Zvolíme-li $V_1 = 30$ km/hod, $V_2 = 90$ km/hod, vyjde $V_0 = 0$. Na první pohled je patrné, že vzorec (18.5) dává nesmyslné výsledky. Kde je chyba? Deformace prvního automobilu totiž není vůbec dána úbytkem jeho kinetické energie, neboť na srážce se podílejí oba automobily. Pojede-li druhé vozidlo rychlostí V_2 vyšší než $3V_1$, pak energie prvního vozidla dokonce při srážce vzroste.

Sečteme-li zmařenou část kinetické energie u obou vozidel, budeme mít

$$\begin{aligned} 2E^* &= \frac{1}{8} m(3V_1^2 + 2V_1V_2 - V_2^2) + \frac{1}{8} m(3V_2^2 + 2V_1V_2 - V_1^2) = \\ &= \frac{1}{4} m(V_1^2 + 2V_1V_2 + V_2^2) = m \left(\frac{V_1 + V_2}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (18.6)$$

Protože konstrukce vozů i jejich hmotnost je stejná, případně z této energie na každé vozidlo stejná část. Základ srovnání tedy poskytuje rovnice

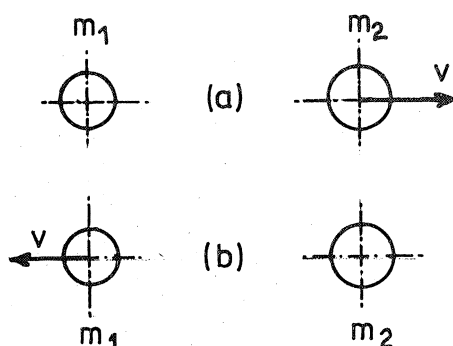
$$E^* = \frac{1}{2} mV_0^2 \quad (18.7)$$

odkud

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (18.8)$$

Je-li tedy $V_1 = 30$ km/hod, $V_2 = 90$ km/hod (v opačném směru podle obr. 84), bude

$$\begin{aligned} V &= -30 \text{ km/hod,} \\ V_0 &= 60 \text{ km/hod.} \end{aligned} \quad (18.9)$$



Obr. 85

Pojem kinetické energie je zvláštní tím, že je vázán na určitý inerciální systém. Představme si dvě kosmická tělesa o nesejných hmotnostech, jež se od sebe vzdalují konstantní relativní rychlostí V (obr. 85a, b). Vztáhneme-li jejich pohyb k inerciální soustavě spojené s prvním tělesem, bude celková kinetická energie soustavy (obr. 85a)

$$E_1 = \frac{1}{2} m_2 v^2 \quad (18.10)$$

Bude-li inerciální soustava spjata s druhým tělesem (obr. 85b), vyjde

$$E_2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 \neq E_1 \quad (18.11)$$

Otázka "jaká je kinetická energie doopravdy" nemá zde smysl. Nemá jej dokonce ani tehdy, je-li hmotnost obou těles stejná, tj. bude-li $m_1 = m_2 = m$. Zvolíme-li totiž inerciální soustavu např. tak, že bude spjata s bodem půlícím spojnicí středů obou těles, dostaneme

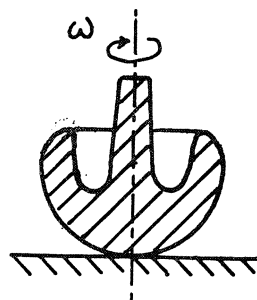
$$E_3 = 2 \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m v^2 \neq E_1 \quad (18.12)$$

Upozornili jsme na paradoxní výsledky, jež můžeme dostat ze zdánlivě správné úvahy, při které posuzujeme škodu vzniklou na vozidle při jeho srážce podle rozdílu kinetické energie vozidla před rázem a po rázu. Připomněli jsme také, že srovnávat lze jen energie vztahované k stejnému inerciálnímu systému.

19. JINÉ ZDÁNLIVÉ PARADOXY

V této kapitole uvedeme různé případy zdánlivých paradoxů, z nichž jen některé mají praktický význam, avšak všechny jsou poučné.

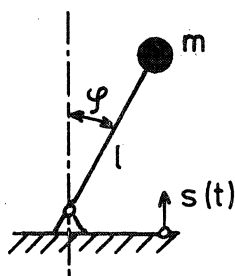
Na obr. 86 je znázorněn dřevěný "vlček", jaký se kdysi prodával v hračkářských obchodech. Má tvar houby s hlavou kulovitého tvaru. Při rotaci v naznačené poloze záhy ztratí stabilitu; podmínky valení a smykového tření jej přivedou k tomu, že se "postaví" na nožičku a setrvá v rotaci v obrácené poloze (kloboukem nahoru). Pozoruhodné je, že se přitom zvýší poloha těžiště.



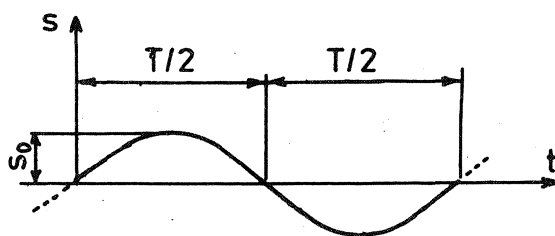
Obr. 86

Bylo též konstruováno mnoho dětských hraček využívajících zdánlivě paradoxního chování gyroskopu. Od nich není daleko k principům jízdy na kole nebo na motocyklu.

Probereme nyní případ poněkud zajímavější, totiž případ obráceného kyvadla, jehož závěs se ve svislém směru periodicky pohybuje (obr. 87).



Obr. 87



Obr. 88

Pro jednu periodu pohybu $s(t)$ bude podle obr. 88 platit

$$s = \frac{16s_0}{T^2} t \left(\frac{T}{2} - t \right) \quad \text{pro } 0 \leq t \leq \frac{T}{2},$$

$$s = -\frac{16s_0}{T^2} \left(t - \frac{T}{2} \right) (T - t) \quad \text{pro } \frac{T}{2} \leq t \leq T. \quad (19.1)$$

Je-li úhel φ malý, takže $\sin \varphi \doteq \varphi$ a $\cos \varphi \doteq 1$, platí tato pohybová rovnice:

$$m l^2 \ddot{\varphi} - m l (g + \ddot{s}) \varphi = 0. \quad (19.2)$$

Z rovnic (19.1) dostaneme dvojí derivací podle času

$$\ddot{S} = -\frac{32s_0}{T^2} \quad \text{pro } 0 < t < \frac{T}{2}, \quad (19.3)$$

$$\ddot{S} = +\frac{32s_0}{T^2} \quad \text{pro } \frac{T}{2} < t < T.$$

Označíme-li $32s_0/T^2 = \varepsilon g$, lze obě poslední rovnice shrnout do společného zápisu $\ddot{S} = \mp \varepsilon g$; pak (19.2) bude mít tvar

$$\ddot{\psi} - \frac{g}{l}(1 \mp \varepsilon)\psi = 0. \quad (19.4)$$

Řešení této rovnice bude v každé půlperiodě jiné. S označením

$$\omega^2 = -\frac{g}{l}(1-\varepsilon), \quad \Omega^2 = -\frac{g}{l}(1+\varepsilon) \quad (19.5)$$

dostaneme pro úhlovou výchylku v první resp. v druhé půlperiodě

$$\begin{aligned} \psi_1 &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \\ \psi_2 &= C_3 \sin \Omega t + C_4 \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (19.6)$$

V maticovém tvaru zapíšeme výchylku i rychlost do jednoho stavového vektoru; bude

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \\ \omega \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}, \quad (19.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \Omega t & \cos \Omega t \\ \Omega \cos \Omega t & -\Omega \sin \Omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}. \quad (19.8)$$

Tyto rovnice zapíšeme zkráceně ve tvaru

$$\{\Phi_1(t)\} = [A_1(t)]\{b_1\}, \quad (19.9)$$

$$\{\Phi_2(t)\} = [A_2(t)]\{b_2\}. \quad (19.10)$$

Význam veličin je zřejmý ze srovnání s předchozími rovnicemi. Podmínka spojitosti kmitu v čase $t = T/2$ dává

$$[A_1(\frac{T}{2})]\{b_1\} = [A_2(\frac{T}{2})]\{b_2\}. \quad (19.11)$$

Protože kmity se mohou s každou periodou zvětšovat nebo zmenšovat, bude výchylka v okamžiku $t = T$ násobkem výchylky v čase $t = 0$; násobitel označme λ . Budeme mít

$$[A_2(T)]\{b_2\} = \lambda [A_1(0)]\{b_1\}. \quad (19.12)$$

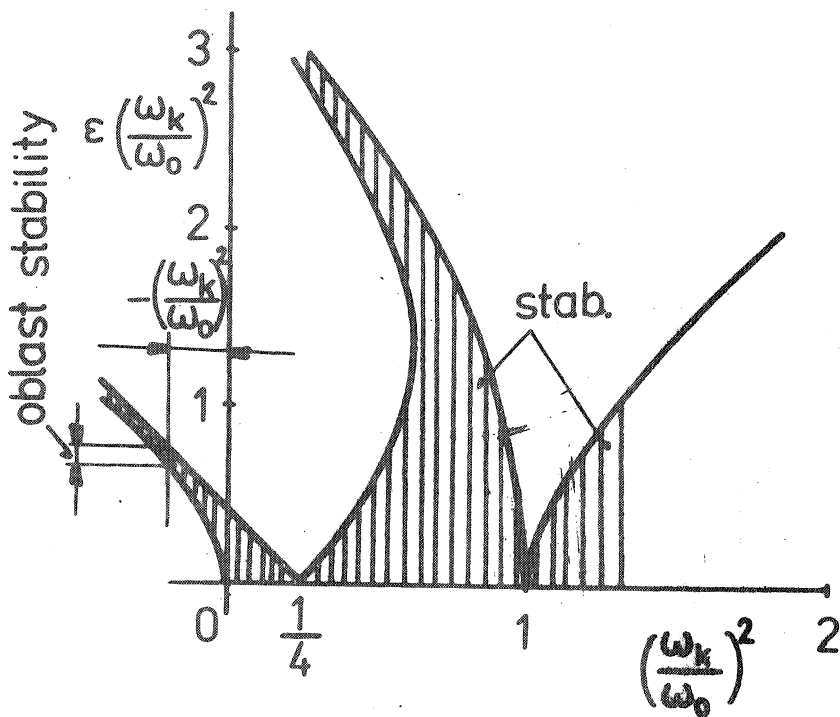
Vyloučením vektoru $\{b_2\}$ z rovnic (19.11) a (19.12) dostaneme problém vlastních hodnot

$$[A_2(\frac{T}{2})]^{-1}[A_1(\frac{T}{2})]\{b_1\} = \lambda [A_2(T)]^{-1}[A_1(0)]\{b_1\}. \quad (19.13)$$

Podmínkou stability je požadavek, aby $|\lambda| < 1$. Zavedeme-li kruhové frekvence

$$\omega_k^2 = -\frac{g}{l} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (19.14)$$

dostaneme v grafickém podání na obr. 89 vyšrafované stabilní zóny, odpovídající podmínce $|\lambda| < 1$. Odtud je vidět, že pro naladění dané poměrem $(\omega_k/\omega_0)^2 < 0$ existuje malé rozmezí hodnot ε , při kterém je obrácená poloha kyvadla stabilní.

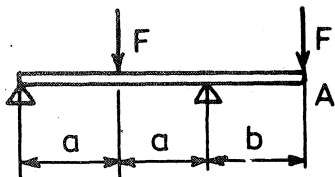


Obr. 89

Poznámka

kladným hodnotám $(\omega_k/\omega_0)^2$ odpovídá normální poloha závěsu kyvadla (závěs nahore, kyvadlo dole).

N. W. McLACHLAN: Theory and Applications of Mathieu Function. Clarendon Press, Oxford 1951.



Obr. 90

Položme si dále otázku, zda se může vyztužením nosníku zvětšit jeho průhyb? Jakkoli se to zdá absurdní je to možné, jak ukáže následující příklad. Snadno se přesvědčíme výpočtem, že průhyb prizmatického nosníku na obr. 90 v místě A je

$$y_A = \frac{Pb}{48EJ} [16b^2 - 3a^2]. \quad (19.15)$$

Je-li $a = 4b/\sqrt{3}$, vyjde $y_A = 0$.

Zvětšíme-li ohybovou tuhost nosníku mezi podporami z hodnoty EJ na hodnotu $EJ_1 > EJ$, přičemž ohybovou tuhost přečnívajících částí ponecháme, bude průhyb v místě A

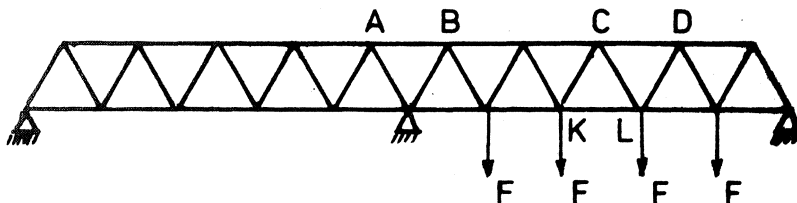
$$y_A^* = \frac{Pb}{48EJ} [16b^2 - 3a^2 \frac{J}{J_1}]. \quad (19.16)$$

Dosadíme-li nyní $a = 4b/\sqrt{3}$, vyjde

$$y_A^* = \frac{Pb^3}{3EJ} [1 - \frac{J}{J_1}] > 0. \quad (19.17)$$

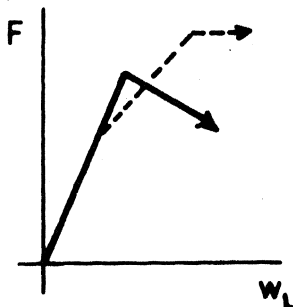
S rostoucím J_1 se bude tento průhyb dále zvětšovat. Pro $J_1 \rightarrow \infty$ se bude blížit limitní hodnotě $Pb^3/3EJ$.

V literatuře byl uveden příklad příhradové konstrukce z tažné ocele, podepřené a zatížené podle obr. 91. *) Při určité velikosti síly F se dosáhne meze elastické stability prutu CD a vzápětí i mezní tahové síly v prutu AB . Při vybočení prutu CD síla poklesne a konstrukce se zhroutlí. Vynášíme-li sílu F v závislosti na průhybu W_L bodu L , dostaneme plně vytaženou čáru na obr. 92. Zeslabíme-li poněkud prut KL , předejdeme vybočení prutu CD a celková únosnost se zvýší (čárkovaná čára na obr. 92). Zeslabením prutu KL jsme paradoxně zvýšili únosnost konstrukce.



Obr. 91

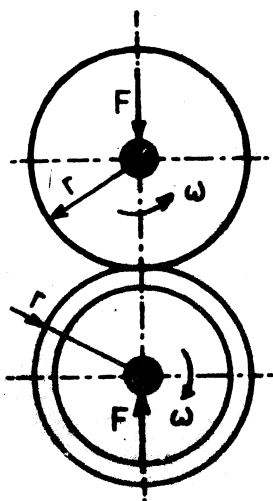
*) NEAL, B. G. - MANSELL, O. S., "International Journal of Mechanical Science" sv. 5 (1963), s. 87, a diskuse L. K. Stevensena tamtéž, sv. 6 (1964), s. 145 - 149.



Obr. 92

Při výpočtu mezní statické únosnosti staticky neurčitých konstrukcí (např. prutových soustav) zjišťujeme, že plastické deformace nevznikají v konstrukci ihned tak, aby vznikl mezní stav (pohyb s jedním stupněm volnosti), ale že vznikají postupně. Nejprve se plasticky deformuje součást (prut), která je nejvíce v pružném stavu namáhána. Tím se změní deformační mechanismus a tedy i poměr sil v jednotlivých částech konstrukce. Postupně zachvacují plastické deformace další a další části až vznikne mezní stav spojený s nadměrným vzrůstem deformací (např. se vyvinou

plastické klouby na dostatečném počtu míst, aby vznikl mechanismus s jedním stupněm volnosti). Přitom nemusí být zatěžování všech členů monotónní. Může se např. stát, že se plastická deformace rozšíří do dalších míst (do dalšího prutu), ale zároveň se odlehčí jiné místo (jiný prut), kde naopak plastické deformace ustanou. *)



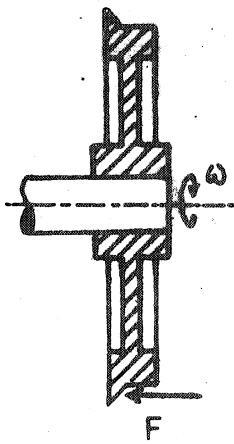
Obr. 93

Jiný zajímavý paradox popsali H. ANSCOMBE a K. L. JOHNSON. **) Na jednom ze dvou kotoučů z oceli o vysoké pevnosti byla s přesahem natažena obruč z měkké oceli (obr. 93). Jestliže byly oba kotouče k sobě přitlačovány silou F překračující určitou mez, začala se obruč po kotouči "plížit", a to tak, že předbíhala nosný kotouč, na němž byla nalisována. Kotouče byly přitom poháněny tak, aby se mezi nimi zaručeně nepřenášela žádná tečná reakce.

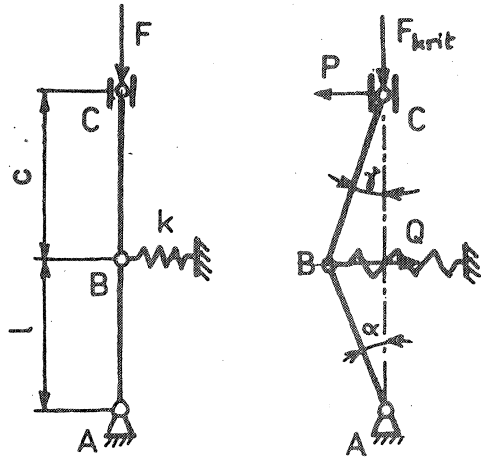
Uvedeme ještě jeden podobný případ. Nalisované kolo podle obr. 94, vystavené působení boční síly, má tendenci se za rotace "plížit" směrem proti působící síle. Na obr. 94 je zakresleno nalisované kolo železničního vozidla. Podobný jev byl však pozorován i u ozubeného kola v převodové skříní.

*) Viz např. PRAGER, W.: Probleme der Plastizitätstheorie. Birkhäuser-Verlag, Basel 1955.

**) "International Journal of Mechanical Science" sv. 16, 1974, č. 5, s. 329 - 334.



Obr. 94



Obr. 95

V teorii vzpěru se dokazuje, že kritická síla je menší, je-li vzpěra - při stejném průřezu - delší. Uvedeme příklad, kdy toto "pravidlo" neplatí. Na obr. 95 je zakreslena soustava dvou neohebných tyčí spojených kloubem. Do kloubu B je zavěšena příčná pružina s tuhostí k . Účinkem síly F se pruty nepatrně stlačují a zachovávají přímou polohu, až síla F dosáhne kritické velikosti F_{krit} . Pak obě tyče náhle vybočí, jak je na obr. 95 znázorněno. Budou platit podmínky momentové rovnováhy pro část BC resp. pro celou soustavu

$$\begin{aligned} Fc \sin \gamma - Pc \cos \gamma &= 0, \\ P(l \cos \alpha + c \cos \gamma) &= Ql \cos \alpha, \end{aligned} \quad (19.18)$$

dále Hookeův zákon pro pružinu

$$Q = kl \sin \alpha \quad (19.19)$$

a konečně kinematická vazba

$$l \sin \alpha = c \sin \gamma. \quad (19.20)$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic reakce P , Q a úhel γ , dostaneme, jsou-li α , γ malé úhly, po zkrácení tuto rovnici pro kritickou sílu

$$F_{krit} = kl \frac{c}{l+c}. \quad (19.21)$$

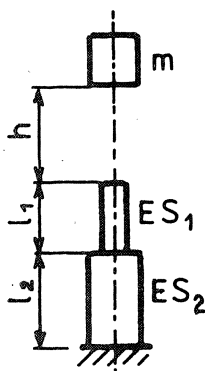
Připomeňme, že $c > 0$. Je zřejmé, že s rostoucím C roste i kritická síla, tedy delší vzpěře BC přísluší větší kritická síla. To jsme právě

chtěli ukázat. Zvláštní na této soustavě bylo pouze to, že jsme zanedbávali ohybové deformace obou členů soustavy AB, BC. Šlo vlastně o klikový mechanismus složený ze dvou tuhých členů; elastická byla pouze pružina připojená v bodě B. V zakreslené poloze však tento mechanismus převzal funkci vzpěry.

Je-li mezní stav konstrukce určován jednak plastickými deformacemi, jednak překročením meze stability, může se za určitých (celkem výjimečných) okolností zeslabením některého členu konstrukce předejít ztrátě stability v jiném členu a tím se může zvýšit celková únosnost. Upozornili jsme také na to, že i při monotónním zatěžování staticky neurčité konstrukce se může stát, že plastické deformace, které se rozšíří do určité oblasti, způsobí částečné odlehčení v jiné oblasti. Zmínili jsme se také o tom, že u lisovaných nebo za tepla sestavených spojů s přesahem, které jsou vystaveny periodickému namáhání, může vzniknout relativní "plížení" obou spojených částí. Na příkladu vzpěry podle obr. 95 jsme ukázali, jak snadno se lze dopustit chyby při povrchním zobecňování zkušeností.

20. PARADOXNÍ JEVY PŘI NAMÁHÁNÍ RÁZEM

Rázovému namáhání těles jsme věnovali nedávny seminář, proto se omezíme jen na několik poznámek. *)



Obr. 96

V některých učebnicích pružnosti a pevnosti se probírá namáhání těles za rázu na základě zjednodušené představy, podle které je rozdělení napětí stejné jako při statickém zatížení a jen jeho velikost je ovlivněna dynamikou děje; získá se z energetické bilance. Postup vysvětlíme na příkladu osazené tyče, na kterou dopadne beran o hmotnosti m s výšky h (obr. 96). Po dopadu beranu se tyč začne zkracovat. Největší hodnota posuvu konce tyče, při níž se pohyb na okamžik zastaví, bude y . Uvolní se polohová energie beranu $mg(h+y)$ a změní v potenciální energii napjatosti

$$mg(h+y) = \frac{1}{2} Fy. \quad (20.1)$$

*) Stavba strojů XLIV, Rázová pevnost těles. ČVTS - Dům techniky Praha, 1977, Kčs 86,-.

Z Hookeova zákona

$$y = \frac{Fl_1}{ES_1} + \frac{Fl_2}{ES_2} \quad (20.2)$$

Odtud

$$F = \frac{Ey}{\left(\frac{l_1}{S_1}\right) + \left(\frac{l_2}{S_2}\right)} \quad (20.3)$$

Z rovnic (20.1) a (20.3) dostaneme kvadratickou rovnici pro y .

Případ se zjednoduší, bude-li $h \gg y$. Výsledná rovnice je pak ryze kvadratická a má řešení

$$y = \sqrt{\frac{2mgh}{E} \left(\frac{l_1}{S_1} + \frac{l_2}{S_2}\right)} \quad (20.4)$$

Je-li $S_1 < S_2$, dostaneme největší tlakové napětí v první části tyče

$$\sigma_1 = \frac{F}{S_1} = \sqrt{\frac{2mghE}{l_1 S_2 + l_2 S_1} \frac{S_2}{S_1}} \quad (20.5)$$

Toto napětí paradoxně roste, zvětšujeme-li S_2 . Pro $S_2 \rightarrow \infty$ vyjde

$$\sigma_1^* = \sqrt{\frac{2mghE}{l_1 S_1}} \quad (20.6)$$

kdežto pro $S_2 = S_1$ by bylo

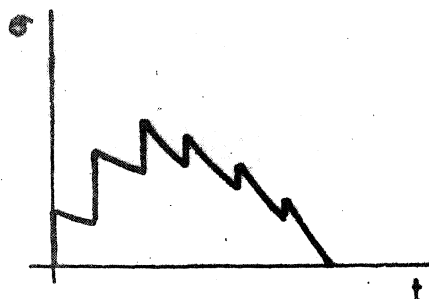
$$\sigma_1 \approx \sqrt{\frac{2mghE}{(l_1 + l_2) S_1}} \quad (20.7)$$

Toto druhé napětí, platné pro hladkou tyč (bez osazení) je podstatně menší.

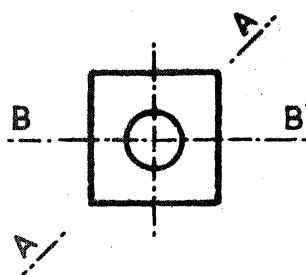
Ve skutečnosti je celá úvaha pochybná; platila by jen v případě, kdyby hmotnost tyče bylo možno zanedbat. Po nárazu se od konce tyče šíří konečnou rychlostí převážně podélná napěťová vlna a v místě osazení se částečně odráží.* Je-li $S_1 < S_2$, je odražená vlna tlaková.

* Podélná vlna převažuje; vlivem příčné kontrakce, vlivem osazení a vlivem odrazů na válcovém povrchu se napěťové pole komplikuje, takže o čistě podélném vlnění nelze hovořit a to ani u hladké tyče.

Skládá se s dopadající vlnou a způsobuje zvýšení napětí v první části tyče. Kdyby byla tyč hladká, odrazila by se napěťová vlna až od vetknutého konce. Následují odrazy na obou koncích tyče, tedy také mezi tyčí a beranem, pokud zde nedojde k odtržení beranu při změně smyslu přenášeného napětí ve styčné ploše. Napětí přitom zpravidla po prvních několik odrazech skokovitě narůstá a teprve později počne klesat (obr. 97).



Obr. 97

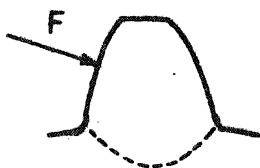


Obr. 98

Avšak závěr o škodlivém vlivu "zesílení" tyče osazením na větší průřez S_2 ($S_2 > S_1$) platí v hrubých rysech i v tomto případě (u osazené tyče ovšem dochází k mnohem složitější interferenci napěťových vln než u tyče hladké a také odchylky od případu jednorozměrného šíření podélných vln jsou větší).

Také lom vzniká a šíří se při rázovém namáhání podle jiných zákonů než při pomalém statickém zatěžování. Například betonový kanál čtvercového průřezu s kruhovým otvorem, znázorněný na obr. 98, praskne při přetížení statickým vnitřním přetlakem v průřezu BB a lom se rozšíří od vnitřní strany. Při explozivním zatížení vnitřním přetlakem praskne stěna naopak v nejtlustším řezu AA a lom se bude šířit od rohu průřezu směrem dovnitř. Vznikne účinkem superponovaných odražených vln (při odrazu na volném povrchu se z tlakové vlny stane tahová).

Také lomy zubů ozubených kol se mohou kvalitativně lišit, jde-li o poruchu vyvolanou rázem nebo statickým zatížením. Lom způsobený statickým zatěžováním, při němž síla pomalu vzrůstá, probíhá vždy podle obr. 99 kolmo k hlavním napětím a je kvazikřehký. Lom vzniklý rázem má často tvar podle obr. 100; na tlačené straně kořene zubu vzniká smykový lom, který je hladký. Také únavový lom je hladký, probíhá však vždy kolmo k největším hlavním napětím podle obr. 99 a jeho "lastury" jsou orientované převážně kolmo k nákresně. Smykový lom při rázovém namáhání podle obr. 100 má někdy nepravidelné drobné rýhování ve směru relativního pohybu při smyku, tj. rovnoběžně s nákresnou.

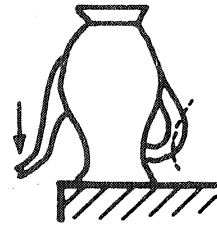


Obr. 99



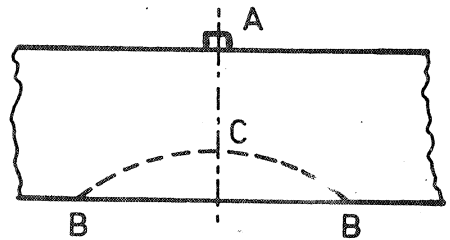
Obr. 100

O tom, jak složité mohou být interferenční jevy při rázovém namáhání, svědčí případ porušené porcelánové konvice, která byla podle obr. 101 postavena vzhůru dnem a poškozena rázem padajícího tělesa ve směru šipky. Kromě malé části hubice v místě dopadu tělesa se odštípla větší část dutého držadla ("ucha") v místě vyznačeném čárkovanou čarou, tedy na protější straně konvice.



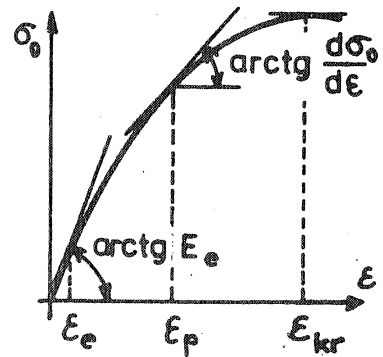
Obr. 101

Tento jev lze jednodušeji vysvětlit na desce znázorněné na obr. 102. Exploduje-li v bodě A trhavina, odštěpí se účinkem odražené vlny čočkovitá část na protější straně desky (vyznačená čárkovaně). Napěťová vlna má za čelem exponenciálně klesající průběh. Bod C odpovídá místu, kde čelo odražené tahové vlny se skládá s oslabenou postupující tlakovou vlnou a výsledné napětí je tahové a právě rovné mezi pevností. Touto podmínkou je určena velikost "čočky".

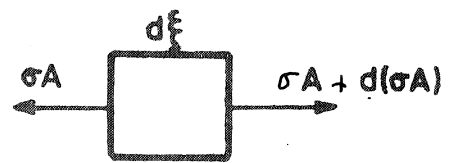


Obr. 102

Zabýváme se šířením napěťových vln v tenké tyči, která má nelineární deformační charakteristiku (obr. 103). Takovou charakteristiku má při monotónním prodloužení elasticko-plastický materiál. Budeme předpokládat, že se v tyči šíří jednorozměrná podélná vlna a všechny odchylky od jednorozměrné teorie zanedbáme. Z tyče vyjmeme element, který měl před deformací průřez A_0 a délku dx . Po deformaci, tj. po průchodu napěťové vlny, se jeho průřez změní na A a délka na $d\xi$ (obr. 104). Je-li $u(x,t)$ posuv průřezu, dostaneme tuto pohybovou rovnici:



Obr. 103



Obr. 104

$$\sigma A + d(\sigma A) - \sigma A = \rho A_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (20.8)$$

Zde $\rho A_0 dx$ je hmotnost elementu, která se jeho přetvořením nezmění. Vztáhneme-li napětí σ_0 k původnímu průřezu A_0 , bude

$$\sigma_0 A_0 = \sigma A, \quad (20.9)$$

takže (20.8) dá

$$A_0 dG_0 = \rho A_0 dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (20.10)$$

čili

$$dG_0 = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \quad (20.11)$$

Protože $\varepsilon = \partial u / \partial x$, je také

$$d\varepsilon = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (20.12)$$

Dělením obou posledních rovnic dostaneme

$$\frac{dG_0}{d\varepsilon} = \frac{\rho(\partial^2 u / \partial t^2)}{\partial^2 u / \partial x^2} \quad (20.13)$$

Protože $E_t = dG_0 / d\varepsilon$ je tečný modul pružnosti (obr. 103), bude pohybová rovnice (20.13) mít nakonec tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E_t}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (20.14)$$

To je vlnová rovnice, která má d'Alembertovo řešení $u = f(x \pm ct)$. *

Pro rychlost postupující vlny dostaneme (dosazením do předchozí rovnice)

$$c = \sqrt{\frac{E_t}{\rho}} \quad (20.15)$$

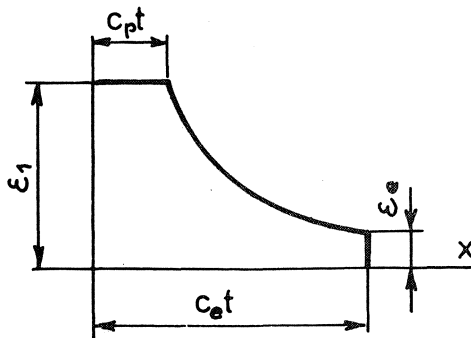
Protože točný modul pružnosti závisí na poměrném prodloužení ε , bude na tomto prodloužení záviset i rychlost vlny. Jak bude vypadat vlna vzbuzená náhlým pohybem koncového průřezu prizmatické tyče konstantní rychlostí V ? Bude .

$$\begin{aligned} V &= 0 & \text{pro} & t \leq 0, \\ V &= \text{konst} & \text{pro} & t > 0. \end{aligned} \quad (20.16)$$

Předpokládejme, že na konci tyče se pohybem vyvodí poměrné prodloužení ε_p jež odpovídá tečný modul pružnosti E_{tp} a rychlost vlny $c_p = \sqrt{E_{tp} / \rho}$.

*) Je-li $u = C_1 f(x+ct) + C_2 f(x-ct)$, je také $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Výsledný tvar vlny je znázorněn na obr. 105. Čelo vlny, jehož rychlost $c_e = \sqrt{E_e / \rho}$ je dána elastickým modulem E_e a poměrným přetvořením na mezi úměrnosti ϵ_e dospělo do vzdálenosti $c_e t$, kdežto plastická vlna s poměrným přetvořením ϵ_p je ve vzdálenosti $c_p t < c_e t$. Existuje tedy celé pásmo vlnových rychlostí $c_p \leq c \leq c_e$.



Obr. 105

Prozkoumáme nyní, jaká je rychlost částic tyče, která se liší od rychlosti postupující vlny. Vlna s poměrným prodloužením ϵ potřebuje k průletu vzdáleností dx čas

$$dt = \frac{dx}{c} = \sqrt{\frac{\rho}{E_t}} dx \quad (20.17)$$

Za tuto dobu se impulsem síly $d(A\sigma) = A_0 d\sigma_0$ změní hybnost elementu o hmotnosti $\rho A_0 dx$ o hodnotu

$$\rho A_0 dx dv = A_0 d\sigma_0 dt \quad (20.18)$$

Když obě poslední rovnice znásobíme a krátíme činitelem $\rho A_0 dx dt$, dostaneme

$$dv = \frac{d\sigma_0}{\sqrt{E_t \rho}} \quad (20.19)$$

Dosadíme $d\sigma_0 = E_t d\epsilon$ a dostaneme

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_{\epsilon=0}^{\epsilon_1} \sqrt{E_t(\epsilon)} d\epsilon \quad (20.20)$$

Je zřejmé, že integrál (20.20) má smysl jen pro $E_t \geq 0$. Je-li $\epsilon > \epsilon_{kr}$ (obr. 103), je $E_t < 0$ a v integraci nelze pokračovat. Největší tzv. Kármánova kritická rychlost, s jakou můžeme zatížit čelo tyče, je tedy

$$v_{krit} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_{\epsilon=0}^{\epsilon_{kr}} \sqrt{E_t(\epsilon)} d\epsilon \quad (20.21)$$

Pro tuto vlnu bude $c_p = 0$, neboť $E_t(\epsilon_{kr}) = 0$.

Tato jednoduchá teorie pochází od Theodora von Kármána a byla koncem čtyřicátých let středem zájmu mnoha fyziků. Pokoušeli se experimentálně

prokázat závislost rychlosti šíření vlny na tečném modulu. Použili k tomu tyče, která byla předepjata do plastického stavu a pak dodatečně přitížena rázovou vlnou malé intenzity, která by se měla podle Kármánovy teorie šířit rychlostí danou vzorcem (20.15). K překvapení všech badatelů se tato vlna šířila rychlostí elastických vln

$$c_e = \sqrt{\frac{E_e}{\rho}} > c_p. \quad (20.22)$$

Dokonce i tehdy, bylo-li přitížení rázovou vlnou velké se před plastickou vlnou vždy šířila "elastická návěšť". Pro tento jev hledali někteří badatelé vysvětlení v tom, že předpokládali závislost na deformační rychlosti. Prokázalo se však, že k stejnému jevu dochází i u materiálů, jejichž deformační charakteristika na deformační rychlosti prakticky vůbec nezávisí. Tento paradox, pro který chybí uspokojivé teoretické vysvětlení, objasnili teprve roku 1962 J. F. BELL a A. STEIN. *) Ukázali, že při velmi pomalém zatěžování neprobíhá plastická deformace plynule, ale po malých skocích. Zastaví-li se na delší nebo kratší okamžik plastická deformace, je k jejímu obnovení třeba překonat určitou bariéru, "elastickou spoušť". Právě ta způsobuje, že se před plastickou vlnou šíří elastická návěšť a to nezávisle na plastickém předpětí. Elastická návěšť se neobjeví, jestliže předchozí plastická deformace ještě probíhá.

Při rázovém namáhání je třeba počítat se vznikem napěťových vln, s jejich odrazy a superpozicí. Tu se může stát, že lom vznikne v jiném místě než kde došlo k rázu, že vznikne dokonce v nejširším průřezu, kde by při statickém zatěžování bylo napětí naopak nejmenší. Pole napjatosti se může kvalitativně lišit od případu se staticky působícími silami. V závěru kapitoly jsme se zmínili o elastické vlně, která paradoxně předbíhá inkrementální plastickou vlnu v tyči předem plasticky deformované.

21. TŘI OTÁZKY PRO LASKAVÉHO ČTENÁŘE

Na závěr těchto úvah připojujeme tři kontrolní otázky, podle kterých si může čtenář zkontrolovat, do jaké míry přispěla četba této publikace ke zbystrění nebo naopak k utlumení jeho schopností rozlišovat chyby nenápadně ukryté ve studovaném textu. Klíč, obsahující správné odpovědi, je připojen na konci tohoto odstavce.

*) "Journal de Mécanique" sv. 1 (1962), č. 4, s. 395 - 412.

První otázka

Je-li do válcového pouzdra s vnitřním poloměrem r a s vnějším poloměrem R zalisován čep, působí na vnitřní válcový povrch pouzdra tlak p . Předpokládejme, že je konstantní. Vypočteme, jaké vzniká zvětšení vnitřního poloměru účinkem tohoto tlaku.

Z teorie pružnosti je známo, že ve vnitřní vrstvě materiálu na poloměru r vzniká radiální napětí σ_r a obvodové napětí σ_t o velikosti

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -p, \\ \sigma_t &= p \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}.\end{aligned}\quad (21.1)$$

Tření a s ním související osovou složku napjatosti σ_z zanedbáme. Zvětšení poloměru Δr vypočteme pomocí radiálního poměrného prodloužení a Hookeova zákona

$$\frac{\Delta r}{r} = \epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_t). \quad (21.2)$$

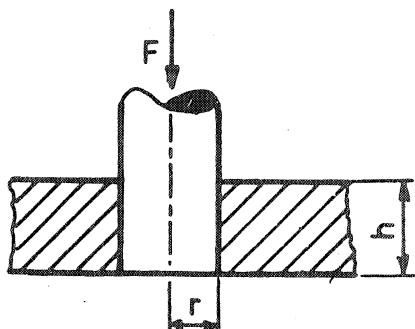
Dosazením (21.1) do (21.2) dostaneme

$$\Delta r = \frac{r}{E} \left[-p - \mu p \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2} \right] = -\frac{pr}{E} \cdot \frac{(1+\mu)R^2 - (1-\mu)r^2}{R^2-r^2} < 0. \quad (21.3)$$

Protože $R > r$, je $\Delta r < 0$, tj. účinkem vnitřního tlaku se otvor zmenšuje. Je to stejně absurdní výsledek, jako kdybychom tvrdili, že nafukováním se balón smršťuje. Jak jsme k němu mohli dospět? Kde je chyba?

Druhá otázka

Do ocelové stěny o tloušťce h byl zalisován čep o poloměru r . Předpokládejme, že v dotykové ploše vznikl rovnoměrný tlak p . Je-li mezi čepem a stěnou součinitel adheze f , jakou silou F musíme působit, abychom čep ze stěny opět uvolnili?



Obr. 106

Protože dotyková plocha má velikost $2\pi rh$ (obr. 106), bude normálová reakce v této ploše

$$N = 2\pi rh p \quad (21.4)$$

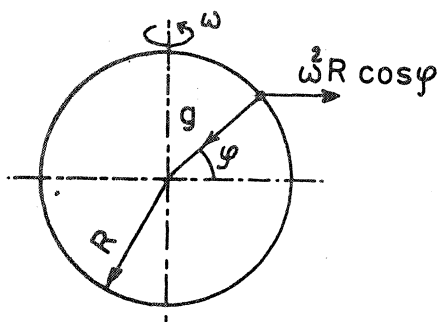
a tečná reakce, kterou musíme osovou silou F překonat, bude $T = fN$.
Odpověď tedy je

$$F \geq T = 2\pi r h f p. \quad (21.5)$$

Kde je v našem výkladu chyba?

Třetí otázka

Na povrchu Země působí tíhové zrychlení g , které však není všude konstantní. Rozdíly jsou způsobeny zploštěním a nehomogenitou Země, slapovými účinky Slunce a Měsíce a v neposlední řadě rotací Země. Abychom odhadli tento poslední vliv, odečteme od tíhového zrychlení g na obr. 107 složku odstředivého zrychlení $\omega^2 R \cos \varphi$ vzniklého rotací Země. Vyjde opravená hodnota



Obr. 107

$$g^* = g - \omega^2 R \cos^2 \varphi, \quad (21.6)$$

kde R je střední poloměr Země,
 ω - úhlová rychlost zemské rotace,
 φ - zeměpisná šířka.

Kde je v tomto výkladu zásadní chyba?

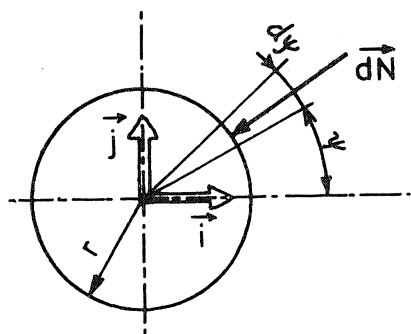
Klíč

Paradoxní výsledek výpočtu deformace otvoru pouzdra vznikl tím, že jsme počítali přírůstek deformace poloměru, tj. radiální posuv na poloměru r z radiálního poměrného prodloužení. Správně jsme měli použít obvodového poměrného prodloužení, neboť $\epsilon_t = \Delta r / r$ značí poměrné zvětšení délky obvodu kružnice, která měla původně poloměr r . Pro radiální poměrné prodloužení platí jiný vztah, totiž

$$\epsilon_r = \frac{d}{dr} (\Delta r).$$

V druhém případě jsme nesprávně použili pojmu "normálová reakce". Síla \vec{N} totiž neexistuje, přestože existují diferenciály

$$d\vec{N} = \vec{i} dN_x + \vec{j} dN_y \quad (21.7)$$



Obr. 108

(obr. 108) se složkami

$$dN_x = -prh \cos \psi d\psi, \quad (21.8)$$

$$dN_y = -prh \sin \psi d\psi.$$

Zde \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} jsou jednotkové vektory. Je totiž

$$N_x = -prh \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi = 0, \quad (21.9)$$

$$N_y = -prh \int_0^{2\pi} \sin \psi d\psi = 0, \quad (21.10)$$

a tedy také $\vec{N} = 0$. Proto

$$N = |\vec{N}| = 0 \quad (21.11)$$

Správně můžeme napsat pouze

$$d\vec{T} = \vec{k} f |d\vec{N}| = \vec{k} prh f d\psi \quad (21.12)$$

a konečně

$$\vec{T} = \int d\vec{T} = \vec{k} \cdot prh f \int_0^{2\pi} d\psi = \vec{k} 2\pi rh f p = \vec{k} \cdot T, \quad (21.13)$$

$$F \cong T = 2\pi rh f p. \quad (21.14)$$

Vzorec (21.5) je tedy správný, ale jeho fyzikální výklad byl chybný.

V třetím případě bylo nesprávně užito pojmu "odstředivé zrychlení". Za rotačního pohybu existuje pouze dostředivé zrychlení. Vzorec (21.6) je správný, ale předcházející výklad chybný. Ponecháváme čtenáři, aby sám promyslel správnou formulaci.

Druh publikace:	Sborník
Název:	Stavba strojů 69 NETRIVIÁLNÍ CHYBY A ZDÁNLIVÉ PARADOXY V MECHANICE A PRUŽNOSTI
Autor:	Prof. Ing. Cyril Höschl
Počet stran:	103
Náklad:	190
Formát:	A4
Číslo publikace:	60 - 674 - 80 (1782)
Vydal a rozmnožil:	Dům techniky ČSVTS Praha, Praha 1, Gorkého náměstí 23
Rok vydání:	1980

Tato publikace je prodejná pouze socialistickým organizacím.
Cena