

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**NOVÉ SMĚRY VE VYUŽITÍ
METODY KONEČNÝCH PRVKŮ**

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1984

Na jednoduchých příkladech se vysvětlují nejdůležitější pojmy, představy, předpoklady a výpočetní obraty, na nichž se zakládá metoda konečných prvků a metoda okrajové integrace. Výklad je zaměřen na potřeby konstruktérů, tedy zadavatelů úloh, kteří také výsledky řešení interpretují. Problémy programování a implementace metody na počítači se ponechávají stranou.

V aplikacích se omezuje na mechaniku pružných a poddajných těles. Na rozdíl od dřívějších seminářů probíráme základy metody konečných prvků jen stručně. Zato mnohem více pozornosti věnujeme různým průvodním jevům, obměnám původní metody (hybridním prvkům a smíšeným variačním metodám), metodám řešení nelineárních úloh a základům metody okrajových prvků. Tato metoda představuje nový směr numerického řešení úloh z mechaniky kontinua. Výběr témat je omezen rozsahem publikace. Témata byla vybírána tak, aby čtenář získal určitý názor na aplikační možnosti a snáze se orientoval v odborné literatuře. Výklad doplňují a rozšiřují četné příklady. Jsou podrobně řešeny a voleny tak, aby k výpočtům nebylo nutné používat počítač.

Předpokládají se znalosti z matematiky, mechaniky a teorie pružnosti, které odpovídají vysokoškolskému vzdělání. Studium usnadní zvláště znalost základů maticové algebry a variačních metod.

OBSAH

| | |
|--|-----|
| Předmluva | 7 |
| 1. KINEMATICKÉ, KONSTITUTIVNÍ A SILOVÉ VZTAHY | 9 |
| 2. ZÁKLADNÍ A SMÍŠENÉ VARIACNÍ METODY | 17 |
| 3. METODA KONEČNÝCH PRVKŮ, JEJÍ KONVERGENCE A PŘESNOST | 26 |
| 4. POŽADAVKY, KTERÝM MUSÍ VYHOVOVAT SÍŤ KONEČNÝCH PRVKŮ | 40 |
| 5. ROZMAZANÉ MNOŽINY A ROZMAZANÉ KONEČNÉ PRVKY | 44 |
| 6. HYBRIDNÍ KONEČNÉ PRVKY | 50 |
| 7. ELASTICKÉ JÁDRO MATICE TUHOSTI | 55 |
| 8. POKUTOVÉ FUNKCE | 58 |
| 9. INTERPRETACE NAPĚŤOVÉHO POLE | 67 |
| 10. PARAZITNÍ SMYK U LINEÁRNÍCH PRVKŮ | 74 |
| 11. NEPRAVÁ SINGULARITA MATICE TUHOSTI | 77 |
| 12. MOHROVY VĚTY A GREENOVA FUNKCE | 81 |
| 13. PŘÍMÁ FORMULACE OKRAJOVÉHO INTEGRÁLU | 87 |
| 14. NEPŘÍMÁ FORMULACE OKRAJOVÉHO INTEGRÁLU | 94 |
| 15. METODA OKRAJOVÝCH ELEMENTŮ | 102 |
| 16. NEWTONOVA-RAPHSONOVA METODA ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ÚLOH | 103 |
| 17. MODIFIKACE NEWTONOVY METODY | 108 |
| 18. KVAZI-NEWTONOVY METODY | 111 |
| 19. KRITÉRIA KONVERGENCE | 117 |
| LITERATURA | 120 |

"Je třeba se zabývatí jenom takovými věcmi, na jejichž jisté a nepochybné poznání se zdají naše vlohy stačiti.

.....

K hledání pravdy o věcech je nutná metoda.

.....

Jestliže dokonale pochopíme otázku, musíme z ní odstraniti všechen zbytečný pojem, co nejvíce jí zjednodušiti a pomocí výčtu jí rozdělití v nejmenší části.

Touž otázku musíme uvéstí ve vztah ke skutečné rozprostraněnosti věcí a musíme jí předložiti obraznosti v holých tvarech: tak totiž je mnohem zřetelněji uvědomena rozumem.

Také většinou pomáhá, jestliže tyto tvary nakreslíme a ukážeme vnějším smyslům, aby tak naše myšlení bylo snadněji udržováno pozorným.

Ty věci, které nevyžadují přítomné pozornosti ducha, třebas jsou nutné k závěru, jest lépe označiti nejkratšími značkami spíše než úplnými obrazy: tak totiž paměť se nemůže zmýlití a myšlení není rozptylováno tím, aby je podržovalo, zatím co se zabývá vyvozováním jiných."

René Descartes, *Regulae ad directionem ingenii*
(vydáno latinsky roku 1628)

Předmluva

Metoda konečných prvků je jednou z mnoha metod přibližného řešení úloh vedoucích na obyčejné nebo parciální diferenciální rovnice a jejich soustavy. Původ metody se klade obvykle do počátku druhé poloviny tohoto století, ale ve skutečnosti je základní myšlenka obsažena už ve známé Courantově-Hilbertově učebnici metod matematické fyziky, jež vyšla poprvé ve třicátých letech. Od metody Ritzovy a Galerkinovy se ostatně liší jen způsobem, jakým se vybírají bazové funkce, v jejichž prostoru hledáme řešení. Nebylo by však spravedlivé tvrdit, že metoda konečných prvků neznamena vlastně nic nového. Přinesla totiž neobyčejný impuls pro aplikaci počítačů na problémy dříve prakticky neřešitelné. Vyvolala mnoho problémů nových, souvisejících s otázkami existence, konvergence, stability, dosažitelné přesnosti a efektivnosti řešení. Její obecnost, značná volnost ve formulaci matematického modelu, relativně snadná algoritmizace a programovatelnost z ní učinily na dlouhý čas bezkonkurenční metodu numerického řešení nejrůznějších úloh technické praxe. Různost metodických přístupů a nové metody řešení i nelineárních úloh přilákaly ke spolupráci matematiky a techniky i tam, kde dříve jen obtížně nacházeli společný jazyk. Právem můžeme hovořit o explozi poznatků, která vedla k zakládání nových a nových časopisů a k vydání mnoha monografií ve všech částech světa. Několikaletým úsilím desítek odborníků byla vytvořena řada programových systémů, kterými lze řešit úlohy nejrůznějšího druhu. Využitelnost těchto systémů má však své meze. Jednak jejich aplikace na úlohy malého rozsahu není vždy ekonomická, jednak ani nejdůmyslnější systémy nejsou zcela univerzální, zvláště pokud jde o řešení nelineárních úloh. Zde se potvrzuje stará zkušenost, že numerická matematika je zčásti vědou, zčásti uměním.

V našem výkladu ukážeme a na jednoduchých příkladech vysvětlíme základní myšlenky, na nichž spočívá metoda konečných prvků. Osvětlíme některá úskalí v její aplikovatelnosti a zejména některé obraty, jimiž lze její použití rozšířit nebo zlepšit. Vysvětlíme také, v čem tkví problematika nelineárních úloh a na jakých myšlenkách spočívá metoda okrajové integrace. Bude nás zajímat podstata metodických postupů. Otázky spojené s jejich praktickou realizací na počítači ponecháme stranou, neboť jsou příliš speciální a mohou zajímat jen malý okruh odborníků.

Budeme předpokládat, že čtenář má předběžné znalosti zákonů mechaniky pružných a poddajných těles a že z matematiky zná základy teorie obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic. Pokusíme se zjednodušit výklad tak, aby jej mohli s porozuměním sledovat i ti, kteří nemají speciální matematickou přípravu. Budeme se opírat spíše o názor a intuici než o dedukce. Omlouváme se proto, jestliže náš text neuspokojí náročné čtenáře: nebyl určen jim.

Pokud jde o formu zápisu, volíme ji co nejjednodušší. Většinou použijeme maticové algebry. Bude-li ze souvislostí zřejmé, že jde o matice, popř. o vektory, nebudeme příslušné symboly zvlášť rozlišovat a označíme je stejně jako skaláry. Zvykneme-li si na to, shledáme, že je to dost přirozené. Jeden fyzikální pojem, např. napjatost v daném bodě, označíme jediným symbolem. O tom, že jde o tenzor druhého řádu se šesti skalárními složkami, nepotřebujeme zatím vědět nic. Teprve při realizaci naznačených operací musíme těchto šest čísel podle všech pravidel maticové algebry skutečně dosadit. Tak se stane, že během výkladu "paměť se nemůže zmýlit a myšlení není rozptylováno."

Cyril Höschl

1. KINEMATICKÉ, KONSTITUTIVNÍ A SILOVÉ VZTAHY

Je-li nějaká rovná a hladká tyč zatěžována tahem, platí pro ni tyto tři základní rovnice:

(a) vztah mezi poměrným prodloužením a posuvem

$$\varepsilon = \mathcal{D}u \quad (1.1)$$

v němž \mathcal{D} představuje lineární operátor transformace $u \rightarrow \varepsilon$. V daném případě je $\mathcal{D} = \partial/\partial x$. Tato rovnice platí, pokud nejsou posuvy příliš velké. Je to čistě geometrický vztah popisující pohyb tyče za jejího prodloužování v daném místě $x \in (0, \ell)$.

(b) vztah mezi napětím a poměrným prodloužením

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (1.2)$$

Je to rovnice popisující fyzikální vlastnosti tělesa. Když platí Hookeův zákon, změní se vztah (1.2) na přímou úměrnost

$$\sigma = C\varepsilon \quad (1.3)$$

(c) vztah vyjadřující rovnováhu v daném místě

$$\mathcal{D}^* \sigma = \chi \quad (1.4)$$

kde χ je objemová síla a \mathcal{D}^* je operátor adjungovaný k operátoru \mathcal{D} ; v daném případě je $\mathcal{D}^* = -\partial/\partial x$.^{*)} Rovnice rovnováhy (1.4) platí jen za předpokladu, že se těleso nepohybuje nebo že pohyb tělesa je téměř rovnoměrný, takže zrychlení můžeme zanedbat. Není-li tomu tak, obnovíme platnost rovnic rovnováhy přidáním objemových setrvačných sil podle d'Alembertova principu.

Obdobné rovnice platí i pro prostorová tělesa a jejich soustavy. Najdeme-li řešení, které vyhovuje uvedeným třem rovnicím, popř. třem soustavám rovnic, i okrajovým podmínkám úlohy, pak toto řešení je v dané oblasti přesným řešením. Za určitých předpokladů, o nichž se pojednává v mechanice kontinua, je toto řešení jediné. Najít přesné řešení nebývá vždy snadné a často ani možné, takže jsme nuceni spokojit se s přibližným řešením. Snažíme se, aby se k přesnému co nejvíce přiblížilo. Pro tuto "vzdálenost" přesného a přibližného řešení potřebujeme nějaké kritérium. Různé metody přibližného řešení se mohou ve výběru tohoto kritéria lišit.

^{*)} Souvislost operátorů v rovnicích (1.1) a (1.4) objasníme v příkladu 2.

Problém rovnováhy tělesa lze převést na bilanci energií. To pochopíme, uvědomíme-li si, že při každé změně rovnovážného stavu tělesa se nějaká energie buď uvolňuje, nebo spotřebovává. Objemová hustota deformační energie v tažené tyči se vypočte ze vztahu

$$\Lambda = \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \Lambda(\varepsilon) \quad (1.5)$$

Těleso - tyč - nechť má objem Ω a povrch Γ . Pak celková deformační energie je $\int \Lambda d\Omega$. Princip virtuálních prací říká, že práce vykonané vnějšími i vnitřními silami v daném okamžiku (při zastaveném čase) na libovolných, kinematicky možných, nekonečně malých deformacích tělesa je za rovnováhy nulová; tedy

$$-\delta \int_{\Omega} \Lambda d\Omega + \int_{\Omega} \chi \delta u d\Omega + \int_{\Gamma} p \delta u d\Gamma = 0 \quad (1.6)$$

Symbol δ znamená variaci (nepatrnou libovolnou změnu) dané funkce. Např. si můžeme představit, že $\delta f(x) = \varepsilon g(x)$, kde $g(x)$ je nějaká "rozumná" funkce a $\lim \varepsilon \rightarrow 0$. *)

První člen v rovnici (1.6) představuje virtuální práci vnitřních sil; záporné znaménko vyjadřuje, že se tato práce spotřebovává (mění se ve vnitřní nebo i v jinou energii). Druhý člen představuje virtuální práci objemových sil a třetí člen virtuální práci povrchových sil.

V daném případě (natahovaná tyč) je element objemu $d\Omega = S dx$, je-li S průřez tyče. "Povrch" Γ je představován pouze koncovými průřezy $S(x=0)$ resp. $S(x=l)$. Jde totiž o jednorozměrný útvar, jehož vnitřek obsahuje body vyhovující nerovnostem $0 < x < l$, kdežto povrch obsahuje pouze body $x=0$ resp. $x=l$. Rovnice (1.6) však bude platit stejně i pro plošné nebo prostorové těleso, dáme-li symbolům potřebný význam. To ještě na některých příkladech objasníme později.

Nechť jsou na části povrchu Γ_u tělesa předepsány posuvy $u = \bar{u}$, kdežto na zbyvajících části povrchu Γ_G jsou předepsány povrchové síly, tj. vektory napětí $p = \bar{p}$. Přitom platí, že $\Gamma_G \cup \Gamma_u = \Gamma$, $\Gamma_G \cap \Gamma_u = \emptyset$. Nezatížený povrch považujeme za povrch s předepsaným nulovým vektorem napětí. Nepohyblivé podpory považujeme za část povrchu tělesa s předepsaným nulovým posuvem.

Je jasné, že variace δu musí na části povrchu Γ_u vymizet, protože tam je hodnota posuvu předepsána a nelze ji měnit. Proto by stačilo v posledním členu rovnice (1.6) naznačit integraci jen přes oblast Γ_G . Na to budeme v dalším textu pamatovat. Výjimkou by mohlo být, kdybychom tě-

*) Základy variačního počtu jsme podrobně vysvětlili v publikaci "Užití malých počítaců v dynamice soustav", DT ČSVTS Praha (1983), publikace č. 60-643-83 (DT 2420).

leso na ploše Γ_u uvolnili, což zatím nepředpokládáme.

Jde-li o pružné těleso, lze rovnici (1.6) obvykle integrovat. Můžeme ji pak zapsat jako variaci celkové potenciální energie

$$U = \int_{\Omega} \Lambda d\Omega + W, \quad (1.7)$$

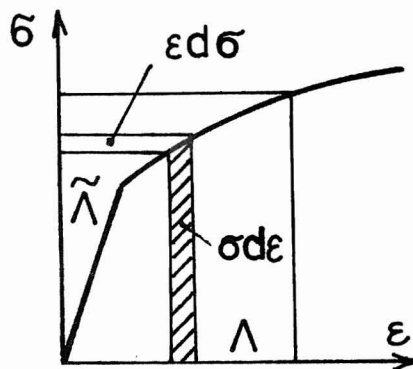
kde

$$W = - \int_{\Omega} \chi u d\Omega - \int_{\Gamma_{\bar{p}}} \bar{p} u d\Gamma \quad (1.8)$$

představuje potenciální energii vnějších sil (objemových a povrchových). Jako nezávisle proměnná vstupuje do rovnic (1.6) až (1.8) pouze posuv (popř. vektor posuvů) w . Poměrná deformace ε závisí na posuvech podle vztahu (1.1).

Součin $\sigma d\varepsilon$ v integrandu rovnice (1.5) lze znázornit v pracovním diagramu na obr. 1 vyšrafovanou ploškou. Symetrický výraz dostaneme, připojíme-li k tomuto výrazu ještě $\varepsilon d\sigma$. Protože $d(\sigma\varepsilon) = \varepsilon d\sigma + \sigma d\varepsilon$, vyjde

$$\varepsilon\sigma = \int \varepsilon(\sigma) d\sigma + \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1.9)$$



OBR. 1

Poslední člen v rovnici (1.9) se shoduje s hustotou deformační energie (1.5). Předposlední člen nazveme hustota doplňkové čili komplementární energie napjatosti a označíme $\tilde{\Lambda}$. Název naznačuje, že tato hustota energie je vyjádřena jako funkce napětí

$$\tilde{\Lambda}(\sigma) = \int \varepsilon(\sigma) d\sigma \quad (1.10)$$

Hustota komplementární energie napjatosti má pouze matematický, nikoli fyzikální smysl. Mezi oběma hustotami energie vyplývá z rovnice (1.9)

vztah známý jako Legendreova transformace

$$\Lambda(\epsilon) = \epsilon \sigma - \tilde{\Lambda}(\sigma) \quad (1.11)$$

K potenciální energii W předepsaných sil můžeme obdobně definovat také komplementární potenciální energii \tilde{W} předepsaných posuvů

$$\tilde{W} = - \int_{\Gamma_u} \bar{u} p d\Gamma \quad (1.12)$$

Rozdíl mezi rovnicemi (1.8) a (1.12) je v tom, že při variaci potenciální energie (1.8) považujeme silové veličiny χ , p za neměnné, takže

$$\delta W = - \int_{\Omega} \chi \delta u d\Omega - \int_{\Gamma_G} \bar{p} \delta u d\Gamma \quad (1.13)$$

kdežto u rovnice (1.12) je naopak neměnná veličina $u = \bar{u}$. Proto

$$\delta \tilde{W} = - \int_{\Gamma_u} \bar{u} \delta p d\Gamma \quad (1.14)$$

Objemové síly do komplementární energie (1.14) nevstupují, neboť posuvy uvnitř tělesa nemůžeme předepisovat. Neobjeví se tedy ani ve variaci (1.14).

Podle Lagrangeova variačního principu je ve shodě s rovnicí (1.6)

$$\delta U = 0 \quad (1.15)$$

kdežto podle komplementárního Castiglianova principu je

$$\delta \tilde{U} = 0 \quad (1.16)$$

kde

$$\tilde{U} = \int_{\Omega} \tilde{\Lambda} d\Omega + \tilde{W} \quad (1.17)$$

Při aplikaci Lagrangeova principu (1.15) předpokládáme, že posuvy a poměrná prodloužení, na nichž energie U závisí, splňují předem kinematické rovnice (1.1) a geometrické okrajové podmínky na Γ_u . Při aplikaci komplementárního principu (1.16) požadujeme, aby napětí splňovalo rovnici rovnováhy (1.4) a silové okrajové podmínky na Γ_G .*) Hodnota potenciální energie U tedy závisí na posuvech $u(x)$, kdežto hodnota komplementární energie \tilde{U} závisí na napětích $\sigma(x)$. Když se tyto funkce proměnné x změní, změní se obecně i hodnota energie; je to tedy funkcionál. Rovnice (1.15), resp. (1.16) pak představují podmínku pro existenci stacionární

*) Je-li pole poměrných deformací odvozeno z pole posuvů, které jsou spojitě i v první derivaci, říkáme, že je kompatibilní.

hodnoty funkcionálu U resp. \tilde{U} . Za stabilní rovnováhy tělesa je tato hodnota minimální.

Vztahy, které jsme až dosud napsali, můžeme intuitivně zobecnit i na případy dvojosé a tříosé napjatosti. Stačí, abychom si pod příslušnými symboly mysleli vždy souhrn příslušných složek a pak respektovali pravidla pro výpočet skalárního součinu. Např. pro dvojosou rovinnou napjatost zavedeme v maticovém zápisu vektory

$$u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.18)$$

a operátory

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad D^* = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Pro lineárně pružné těleso bude v rovnici (1.3)

$$C = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

kde E je Youngův modul pružnosti, μ Poissonovo číslo. Hustota deformační energie Λ vyjde podle (1.5) jako integrál ze skalárního součinu ^{*)}

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int \sigma^T d\varepsilon = \int [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \\ &= \int (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \tau_{xy} d\gamma_{xy}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dosadíme-li nejprve z rovnice (1.3) do (1.5), bude

$$\Lambda = \int \varepsilon^T C^T d\varepsilon = \int \varepsilon^T C d\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon =$$

*) Symbolem T vyznačujeme transpozici.

$$\begin{aligned}
&= \frac{E}{2(1-\mu^2)} [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}] \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{E}{2(1-\mu^2)} (\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^2) \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Stejný výsledek bychom dostali, kdybychom Hookeův zákon (1.3) rozepsali, dosadili za napětí do rovnice (1.21) a integrovali. Zřejmě platí - ve shodě s definicí (1.5) - že

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon} = \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_x} \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_y} \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{xy}} \right]^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T = \sigma \quad (1.23)$$

Obdobně dostaneme pro hustotu komplementární energie napjatosti

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda} &= \int \varepsilon^T d\sigma = \int \sigma^T C^{-1} d\sigma = \frac{1}{2} \sigma^T C^{-1} \sigma = \\
&= \frac{1}{2E} [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}] \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 2(1+\mu) \tau_{xy}^2] \quad (1.24)
\end{aligned}$$

a odtud - ve shodě s rovnicí (1.10) -

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \sigma} = \varepsilon \quad (1.25)$$

Oba variační principy, totiž (1.15) a (1.16), lze odvodit z věty Gaussovy - Ostrogradského, podle které

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \bar{p}^T u d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u}^T p d\Gamma &= \oint_{\Gamma} u^T p d\Gamma = \\
&= \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} u^T \chi d\Omega \quad (1.26)
\end{aligned}$$

Při odvozování vztahu (1.26) jsme využili souvislost mezi vektorem napětí p , tenzorem napjatosti σ a vektorem jednotkové vnější normály n k hranici Γ (viz příklad 3). Mimoto jsme použili vztahů (1.1) a (1.4). V rovnici (1.26) považujeme pole posuvů u a pole napětí σ za nezávislá pole. Variací posuvů u dostaneme (1.15), variací napětí σ vyjde (1.16). Přitom pamatujeme, že poměrná deformace ε závisí na u a vektor napětí p závisí na σ . Variace δu vymizí na Γ_u a variace δp vymizí na Γ_σ .

Větu Gaussovu - Ostrogradského můžeme zapsat ve tvaru

$$\oint_{\Gamma} f^T(x) n d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^T} f(x) d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} f d\Omega \quad (1.27)$$

nebo v tenzorové symbolice s použitím Einsteinova součtového pravidla

$$\oint_{\Gamma} f_i n_i d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} d\Omega \quad (1.28)$$

Věta říká jen to, že průtok vektoru povrchem tělesa se rovná divergenci vektorového pole v celém objemu tělesa. Představuje-li vektor f rychlost proudění tekutiny, pak rovnice (1.27), resp. (1.28) říkají jen to, že z objemu Ω uzavřeného povrchem Γ vyvěrá právě tolik tekutiny, kolik jí proteče povrchem.

Odvozením obou principů z rovnice (1.26), která je čistě formální, jsme prokázali jejich vzájemnou souvislost. Lagrangeův princip (1.15) lze vyložit jako princip virtuálních prací. Komplementární princip (1.16) jsme získali matematickou spekulací. Gaussova-Ostrogradského věta objasnila podstatu duality obou těchto principů.

Příklad 1

Odvoďte Greenovu větu pro funkce dvou proměnných $f(x, y)$, $g(x, y)$, podle které

$$\iint_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} g f dy - \iint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy,$$

$$\iint_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \oint_{\Gamma} g f dx - \iint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial y} dx dy.$$

Funkce jsou definovány v uzavřené oblasti Ω s hranicí Γ a jsou spojité až do prvních derivací.

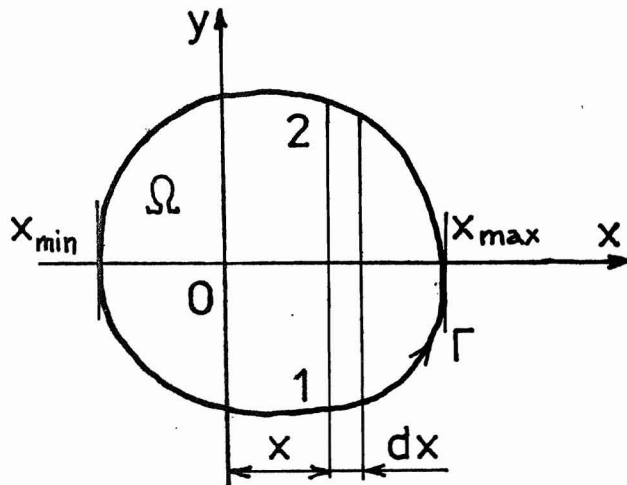
S použitím obr. 2 dokážeme druhý vztah. Důkaz prvního vztahu je analogický. Bude

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int g dx \int \frac{\partial f}{\partial y} dy = \\ &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [g f]_{y_1}^{y_2} dx - \iint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial y} dx dy \end{aligned} \quad (a)$$

Avšak

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} [g f]_{y_1}^{y_2} dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} g(x, y_2) f(x, y_2) dx - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} g(x, y_1) f(x, y_1) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{x_{\max}}^{x_{\min}} g(x, y_2) f(x, y_2) dx - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} g(x, y_1) f(x, y_1) dx = \\
&= - \oint_{\Gamma} g(x, y) f(x, y) dx \quad (b)
\end{aligned}$$



OBR. 2

Dosazením (b) do (a) je důkaz dokončen. Větu budeme potřebovat v následujícím příkladu.

Příklad 2

Dokažte, že operátory podle (1.19) jsou navzájem adjungované, takže platí (1.1) a (1.4).

Zvolíme takovou variaci posuvů, při níž povrchové síly nevykonají žádnou práci. Poslední člen v rovnici (1.6) pak odpadne. Zbývající dva členy s použitím (1.5) dají

$$\int_{\Omega} \chi^T \delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sigma^T \delta \varepsilon d\Omega \quad (a)$$

Pravou stranu rozepíšeme s použitím (1.1). Vyjde

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega} \left[\sigma_x \delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \sigma_y \delta \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] dx dy = \\
&= \iint_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u_x + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} \delta u_y + \tau_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta u_x + \frac{\partial}{\partial x} \delta u_y \right) \right] dx dy \quad (b)
\end{aligned}$$

Tuto rovnici budeme integrovat per partes s použitím Greenovy věty (příklad 1). Dostaneme

$$\int_{\Omega} \sigma^T \delta \varepsilon d\Omega = \oint_{\Gamma} \sigma_x \delta u_x dy - \oint_{\Gamma} \sigma_y \delta u_y dx + \\ + \oint_{\Gamma} \tau_{xy} \delta u_y dy - \oint_{\Gamma} \tau_{yx} \delta u_x dx - \\ - \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta u_x + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \delta u_y \right] dx dy \quad (c)$$

Zvolili jsme takovou variaci posuvů δu , která na povrchu Γ vymizí. Proto se křivkové integrály v rovnici (c) rovnají nule. Zbývající člen na pravé straně se musí podle (a) rovnat výrazu

$$\int_{\Omega} \chi^T \delta u d\Omega = \iint_{\Omega} (\chi_x \delta u_x + \chi_y \delta u_y) dx dy \quad (d)$$

Porovnáním vztahů (c) a (d) dostaneme

$$\chi = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (e)$$

To je však rovnice (1.4), což jsme chtěli dokázat.

K danému reálnému lineárnímu diferenciálnímu operátoru \mathcal{D} najdeme tedy adjungovaný operátor \mathcal{D}^* tak, že jej transponujeme a u naznačených derivací lichých řádů změnímme znaménko.

2. ZÁKLADNÍ A SMÍŠENÉ VARIČNÍ METODY

Celkovou potenciální energii (1.7) zapíšeme v maticové symbolice. Za předpokladu platnosti Hookeova zákona bude

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}^T u d\Gamma - \int_{\Omega} \chi^T u d\Omega \quad (2.1)$$

Pro komplementární potenciální energii budeme mít

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_u} \bar{u}^T p d\Gamma \quad (2.2)$$

Hustota komplementární energie napjatosti je u lineárně pružného tělesa stejně velká jako hodnota deformační energie, neboť

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma = \tilde{\Lambda} \quad (2.3)$$

Chceme-li aplikovat Lagrangeův variační princip (1.15), musí pole přetvoření $\varepsilon(x)$ odpovídat poli posuvů $u(x)$ podle vztahu (1.1), tj. musí být kompatibilní. Mimoto musí pole posuvů splňovat geometrické okrajové podmínky. Je-li tomu tak, je podle (2.1)

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \mathcal{D} u d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{p}^T u d\Gamma - \int_{\Omega} \chi^T u d\Omega \quad (2.4)$$

Variací posuvů dostaneme

$$\delta U = \int_{\Omega} (\sigma^T \mathcal{D} - \chi^T) \delta u d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{p}^T \delta u d\Gamma \quad (2.5)$$

Variaci δu můžeme vždy volit tak, aby na povrchu Γ vymizela. Pak vymizí i poslední člen v rovnici (2.5). Zbývá tedy podmínka

$$\int_{\Omega} (\sigma^T \mathcal{D} - \chi^T) \delta u d\Omega = 0 \quad (2.6)$$

První člen v integrandu (2.6) musíme integrovat per partes stejně jako v příkladu 2, neboť \mathcal{D} je diferenciální operátor. Dostaneme (za předpokladu, že $\delta u = 0$ na Γ)

$$\int_{\Omega} \sigma^T \mathcal{D} \delta u d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T \mathcal{D}^* \sigma d\Omega \quad (2.7)$$

Rovnici (2.6) pak můžeme upravit do tvaru

$$\int_{\Omega} \delta u^T (\mathcal{D}^* \sigma - \chi) d\Omega = 0 \quad (2.8)$$

Je totiž $\chi^T \delta u = \delta u^T \chi$, neboť jde o skalární součin dvou vektorů. Protože uvnitř oblasti Ω je funkce δu libovolná, musí být

$$\mathcal{D}^* \sigma - \chi = 0 \quad (2.9)$$

To znamená, že Lagrangeův princip (1.15) dává rovnice rovnováhy (1.4), ovšem jen tehdy, je-li pole přetvoření kompatibilní s polem posuvů, které splňuje geometrické okrajové podmínky.

Podobně lze ukázat, že komplementární princip (1.16) dává kinematickou rovnici (1.1), splňuje-li pole napětí rovnice rovnováhy a silové okrajové podmínky (viz příklad 3).

Za uvedených předpokladů je tedy rovnice (1.15) rovnocenná s rovnicí (1.4) a rovnice (1.16) s rovnicí (1.1). Přesné řešení musí splňovat všech-

ny tyto rovnice (a ovšem i okrajové podmínky). Situace se změní, půjde-li o přibližné řešení. Neznámé přesné řešení $\bar{u}(x)$, kde x je polohový vektor, nahradíme přibližným řešením $u(x)$ takovým, aby v jistém smyslu bylo k přesnému řešení co nejbližší. Kritériem pro to může být právě Lagrangeův princip. Nechť přibližné řešení $u(x)$ splňuje geometrické okrajové podmínky a nechť lineárně závisí na parametrech q_1, q_2, \dots, q_n , takže

$$u(x) = q_1 h_1(x) + q_2 h_2(x) + \dots + q_n h_n(x) \quad (2.10)$$

Ve vztahu (2.10) jsou h_1, h_2, \dots, h_n známé (zvolené) báze funkce, které vyhovují okrajovým podmínkám na Γ_u . Pak funkcionál (2.4) přejde po dosazení z rovnice (2.10) ve funkci

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (2.11)$$

a bude záviset už jen na parametrech q_1 až q_n . Nejsprávnější vektor $\{q\} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ je takový, který minimalizuje tuto funkci. Z různých náhrad typu (2.10), pokud bychom chtěli vyzkoušet různá řešení, je nejvhodnější ta, která vede k nejmenšímu minimu funkce (2.11). Nutné podmínky pro existenci tohoto minima jsou

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \quad (2.12)$$

Dostali jsme tak soustavu rovnic, ze které můžeme neznámé parametry vypočítat. To je podstata Ritzovy metody. Z pole posuvů (2.10) můžeme užítím (1.1) vypočítat pole přetvoření a užítím (1.2), resp. (1.3) i pole napětí. Toto pole napětí však nebude obecně splňovat ani podmínky rovnováhy, ani silové okrajové podmínky na Γ_G , neboť kdyby je splňovalo, šlo by o přesné řešení.

Kdybychom místo toho aproximovali pole napětí a obdobně k rovnici (2.10) psali

$$\tilde{G}(x) = \beta_1 q_1(x) + \beta_2 q_2(x) + \dots + \beta_m q_m(x) \quad (2.13)$$

tak, aby byly splněny diferenciální rovnice rovnováhy (1.4) a také okrajové podmínky na Γ_G , vyšlo by podle (1.17)

$$\tilde{U} = \tilde{U}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \quad (2.14)$$

Z komplementárního variačního principu (1.16) bychom dostali soustavu rovnic pro neznámé parametry β_1 až β_m

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \beta_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \beta_m} = 0 \quad (2.15)$$

což jsou nutné podmínky pro minimum komplementární potenciální energie. Když k poli napětí podle (2.13) vypočteme pole poměrných deformací užitím vztahu inverzního k rovnici (1.2), resp. (1.3), nebude toto pole obecně kompatibilní, takže nebude možné přiřadit k němu pole posuvů. I kdyby tomu tak náhodou bylo, nebyly by obecně splněny geometrické okrajové podmínky (leďa by šlo o přesné řešení úlohy). Také nalezení vhodných funkcí $g_i(x)$ splňujících zároveň podmínky rovnováhy a silové okrajové podmínky není snadné. To jsou důvody, proč se variační princip (1.16) v metodě konečných prvků neuplatňuje.

Vraťme se nyní k Lagrangeovu principu (1.15). Co se stane, upustíme-li od požadavku kompatibility i od požadavku splnění geometrických okrajových podmínek na Γ_u ? Pak máme volnost v aproximaci nejen funkce $u(x)$ ale také ve funkci $\varepsilon(x)$, přičemž $u(x)$ nemusí splňovat geometrické okrajové podmínky. Zvolíme např. aproximaci $u(x)$ podle (2.10) a $\varepsilon(x)$ podle vztahu^{*)}

$$\varepsilon(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_k f_k(x) \quad (2.16)$$

Ovšemže si budeme přát, aby kinematické vztahy (1.1), zaručující kompatibilitu deformací, jakož i okrajové podmínky na Γ_u byly splněny co nejlépe. Kritériem tohoto "co nejlépe" bude opět Lagrangeův variační princip, k němuž připojíme požadavky na splnění rovnice (1.1) a na splnění okrajových podmínek prostřednictvím Lagrangeových součinitelů λ , μ (budou to obecně vektory). Takže

$$U = \int_{\Omega} \Lambda(\varepsilon) d\Omega - \int_{\Gamma_G} p^T u d\Gamma - \int_{\Omega} \chi^T u d\Omega + \\ + \int_{\Omega} \lambda^T (\mathcal{D}u - \varepsilon) d\Omega + \int_{\Gamma_u} \mu^T (\bar{u} - u) d\Gamma \quad (2.16)$$

Poslední dva členy v rovnici (2.16) představují dislokační potenciál. Kdyby šlo o přesné řešení, byly by tyto členy nulové a rovnice (2.16) by se shodovala s rovnicí (2.1). Při přibližném řešení se však budou obě rovnice lišit. Variaci nyní podléhají nezávislé funkce u , ε , λ , μ . Variací posuvů u dostaneme z podmínky (1.15) po snadné úpravě

$$\int_{\Omega} (\lambda^T \mathcal{D} - \chi^T) \delta u d\Omega - \int_{\Gamma_G} p^T \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mu^T \delta u d\Gamma = 0 \quad (2.17)$$

Zvolíme-li variaci δu tak, aby na povrchu Γ vymizela, zůstane v rovnici (2.17) jen objemový integrál. První člen v něm zintegrujeme per partes tak, jak jsme to objasnili v souvislosti s rovnicí (2.7). Dostaneme

$$\int_{\Omega} \lambda^T \mathcal{D} \delta u d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T \mathcal{D}^* \lambda d\Omega \quad (2.18)$$

*)

Funkce $h_i(x)$ ve vztahu (2.10) nyní nemusí splňovat okrajové podmínky.

Rovnice (2.17) pak dá

$$\int_{\Omega} \delta u^T (\mathcal{D}^* \lambda - \chi) d\Omega = 0 \quad (2.19)$$

Je totiž $\chi^T \delta u = \delta u^T \chi$, neboť jde o skalární součin vektorů. Vzhledem k libovolnosti δu musí být $\mathcal{D}^* \lambda - \chi = 0$. Když to porovnáme s rovnicí (1.4), vidíme, že $\lambda \equiv \sigma$. Lagrangeův parametr λ má tedy význam napětí σ v tělese (resp. vektor λ má význam vektoru σ).

Protože povrchové síly (vektor napětí) p působí jen na části Γ_{σ} povrchu Γ , bude mít Lagrangeův parametr μ v rovnici (2.17) význam povrchové reakce na části Γ_u . Poslední dva členy v rovnici (2.17) pak představují virtuální práci všech povrchových sil (akčních sil i reakcí).

Když v rovnici (2.16) podrobíme variaci funkci ε , dostaneme z podmínky (1.15)

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon} - \lambda \right) d\Omega = 0 \quad (2.20)$$

Protože podle (1.5) je $\partial \Lambda / \partial \varepsilon = \sigma$, vyplývá z rovnice (2.20), že $\lambda = \sigma$. Tedy nic nového. Variace parametrů λ resp. μ dá rovnici (1.1), resp. okrajovou podmínku $u = \bar{u}$ na Γ_u .

Víme-li, že $\lambda \equiv \sigma$ a že $\mu \equiv p$ na Γ_u , můžeme tyto hodnoty do rovnice (2.16) rovnou dosadit. Použijeme-li přitom ještě Legendreovu transformaci (1.11) a rovnicí (1.1), dostaneme

$$U_R = \int_{\Omega} [\sigma^T \mathcal{D}u - \tilde{\Lambda}(\sigma)] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{p}^T u d\Gamma - \int_{\Omega} \chi^T u d\Omega + \int_{\Gamma_u} p^T (\bar{u} - u) d\Gamma \quad (2.21)$$

Variaci podléhají nyní napětí σ a posuvy u . Požadavek, aby funkcionál (2.21) nabýval stacionární hodnoty

$$\delta U_R = 0 \quad (2.22)$$

je Reissnerův variační princip.

Základem variačních metod je Lagrangeův variační princip (1.15), resp. jeho doplněk (1.16). Všechny variační metody, které jsou od základního variačního principu odvozeny užitím Lagrangeových součinitelů, např. Reissnerův princip, se nazývají smíšené.

Poznámka

Podmínky (1.15), resp. (1.16), se vztahovaly k minimu funkcionálu U , resp. \tilde{U} za předpokladu, že rovnováha tělesa je stabilní. O funkcionálu

U_R podle (2.21) však předem nevíme, zda za stabilní rovnováhy nabývá minima, maxima či zda jde o sedlový bod. Můžeme hovořit už jen o jeho stacionární hodnotě.

Příklad 3.

Ukažte, že komplementární variační princip (1.16) dává pro rovnovážnou napjatost splňující silové okrajové podmínky na Γ_G kinematické vztahy mezi poměrnými deformacemi a posuvy.

Variací funkce \tilde{U} podle (1.17), (1.10) a (1.14) dostaneme

$$\delta \tilde{U} = \int_{\Omega} \varepsilon^T \delta \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_u} \bar{u}^T \delta p d\Gamma \quad (a)$$

Protože $\delta p = 0$ na Γ_G , můžeme za poslední člen v rovnici (a) dosadit^{**}

$$\int_{\Gamma_u} \bar{u}^T \delta p d\Gamma = \int_{\Gamma} u^T \delta p d\Gamma \quad (b)$$

a po transpozici prvního členu psát rovnici (a) ve tvaru

$$\int_{\Omega} \delta \sigma^T \varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma} u^T \delta p d\Gamma = 0 \quad (c)$$

V tenzorové symbolice platí pro vektor napětí rovnice, kterou snadno odvodíme pomocí obr. 3; z podmínek rovnováhy vyjde $p_j = \sigma_{ij} n_i$ (platí Einsteinovo součtové pravidlo, podle kterého se sčítá podle indexu, který se v daném členu vyskytne dvakrát). Pro rovinné úlohy jsou indexy $i, j = 1, 2$ a pro prostorové $i, j = 1, 2, 3$. Přitom n_i jsou směrové kosiny vnější normály n k hranici Γ . Podle věty Gaussovy-Ostrogradského (1.28) je pak

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u^T \delta p d\Gamma &= \int_{\Gamma} u_j \delta \sigma_{ij} n_i d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} (u_{j,i} \delta \sigma_{ij} + u_j \delta \sigma_{ij,i}) d\Omega \end{aligned} \quad (d)$$

Index za čárkou znamená derivaci. Protože napjatost splňuje rovnici rovnováhy, je $\delta \sigma_{ij,i} = -\delta x_j = 0$. Nula je tu proto, že variaci předepsaných vnějších objemových sil x_j nepřipouštíme. Zbývá tedy

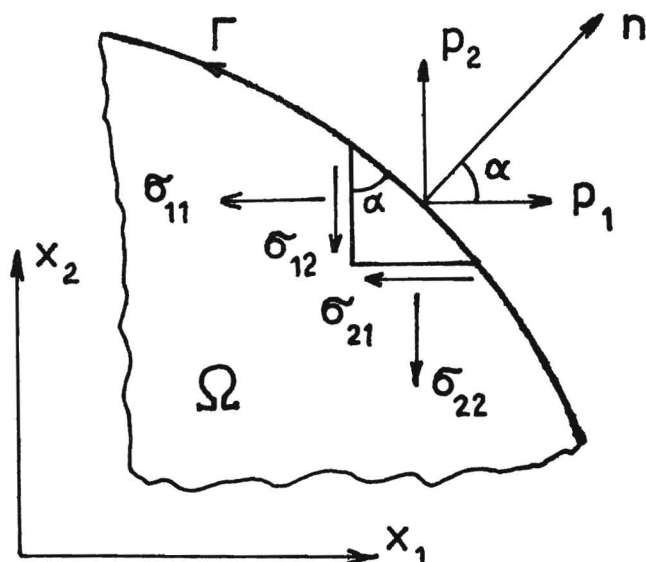
$$\int_{\Gamma} u^T \delta p d\Gamma = \int_{\Omega} u_{j,i} \delta \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \sigma^T \mathcal{D}u d\Omega \quad (e)$$

Dosazením (e) do (c) vyjde

$$\int_{\Omega} \delta \sigma^T (\varepsilon - \mathcal{D}u) d\Omega = 0 \quad (f)$$

^{**}) Symbolem \oint zdůrazňujeme, že se integrace vztahuje na celou hranici Γ .

Protože variaci $\delta\sigma$ můžeme volit různě, musí být $\varepsilon = \mathcal{D}u$, což jsme měli dokázat.



$$\begin{aligned} p_1 &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 & n_1 &= \cos \alpha \\ p_2 &= \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 & n_2 &= \sin \alpha \end{aligned}$$

OBR. 3

Příklad 4

Užitím Reissnerova variačního principu řešte přibližně úlohu o průhybu prostě podepřeného, rovnoměrně zatíženého prismatického nosníku.

Pro nosník délky ℓ , na koncích kloubově podepřený, platí kinematická rovnice

$$\varkappa(x) = -\gamma''(x) \quad (a)$$

kde \varkappa je křivost nosníku a γ jeho průhyb v místě $x \in \langle 0, \ell \rangle$. Dále platí konstituční (fyzikální) rovnice

$$M(x) = EJ \varkappa(x) \quad (b)$$

kde EJ je ohybová tuhost a M ohybový moment, a konečně rovnice rovnováhy

$$M''(x) = -q(x) \quad (c)$$

kde q je délkové zatížení, v našem případě $q = \text{konst.}$ Čárkou označujeme derivaci podle x , což je vzdálenost od levého konce nosníku. Má tedy y význam posuvu u , křivost κ význam poměrného přetvoření ε , ohybový moment M odpovídá napětí σ a délkové zatížení q objemové síle X . Operátor $\mathcal{D} = \mathcal{D}^* = -\partial^2/\partial x^2$. Pak rovnice (a) odpovídá rovnici (1.1), vztah (b) rovnici (1.3) a vztah (c) rovnici (1.4).

Reissnerův princip požaduje, aby vymizela variace funkcionálu (2.21). Ten nabývá tvaru

$$U_R = \int_0^l (-My'' - \frac{1}{2EJ} M^2) dx - \int_0^l qy dx - R_0 y(0) - R_1 y(l) \quad (d)$$

Zde R_0, R_1 jsou reakce v podporách. Variaci podléhají nyní funkce $M(x), y(x)$. Můžeme je proto nezávisle aproximovat. Aproximaci průhybu volíme tak, aby $y(0) = y(l) = 0$. Pak poslední dva členy v rovnici (d) odpadnou. Zvolíme např. kvadratickou parabolou

$$y = 4a \frac{x}{l} (1 - \frac{x}{l}) \quad (e)$$

kde a je maximální průhyb; ten nastává v bodě $x = l/2$. Víme, že průhybová čára je ve skutečnosti parabolou čtvrtého stupně. Výraz (e) je proto jen přibližný. Pro ohybové momenty zvolíme po částech lineární aproximaci

$$M(x) = \begin{cases} bx & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ b(l-x) & \text{pro } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \quad (f)$$

Ve skutečnosti je tato funkce představována kvadratickou parabolou. Rovnice rovnováhy (c) není zřejmě splněna. To však ani nepožadujeme. Dosadíme-li (e) a (f) do rovnice (d), dostaneme

$$U_R = \frac{16ab}{l^2} \int_0^{l/2} x dx - \frac{b^2}{EJ} \int_0^{l/2} x^2 dx - 4qa \int_0^l \frac{x}{l} (1 - \frac{x}{l}) dx = \\ = 2ab - \frac{1}{24EJ} b^2 l^3 - \frac{2}{3} qal \quad (g)$$

Z podmínek

$$\frac{\partial U_R}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial U_R}{\partial b} = 0 \quad (h)$$

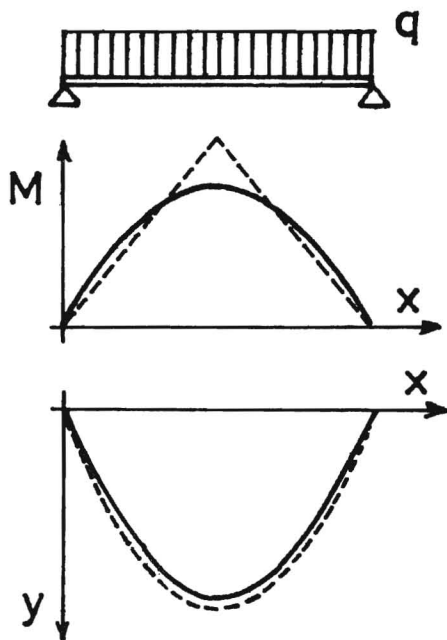
vyjde $a = b l^3 / 24 EJ$, $b = q l / 3$. Největší průhyb tedy vyjde

$$y_{\max} = a = \frac{q l^4}{72 E J} \quad (i)$$

místo přesné hodnoty $q l^4 / 76,8 E J$ a maximální ohybový moment vyjde

$$M_{\max} = \frac{q l}{2} = \frac{q l^2}{6} \quad (j)$$

místo přesné hodnoty $q l^2 / 8$. Porovnání přesného a přibližného řešení umožňuje obr. 4 (přibližné řešení je vytaženo čárkovaně, přesné plně).



OBR. 4

Protože se ve funkcionálu (d) vyskytuje druhá derivace průhybu, musí být první derivace aproximace $y(x)$ spojitá. Funkcionál však můžeme upravit integrací prvního členu per partes. Bude

$$-\int_0^l M y'' dx = -[M y']_0^l + \int_0^l M' y' dx \quad (k)$$

Okrajový člen se rovná nule, protože ohybový moment v podporách nepůsobí. Nový funkcionál tedy je

$$U_R = \int_0^l \left(M' y' - \frac{1}{2 E J} M^2 \right) dx - \int_0^l q y dx \quad (l)$$

Nyní bychom již mohli volit po částech lineární aproximaci průhybu $y(x)$ tj. předpokládat průhyb ve tvaru lomené čáry. Taková volba by s použitím funkcionálu (d) vedla k nezdaru.

Je zřejmé, že uvedená formální úprava rovnice (d) do tvaru (l) má zásadní význam, pokud jde o možnosti výběru vhodných aproximací. Vybereme-li však aproximace tak, aby byly přípustné nejen pro funkcionál (l), ale také pro funkcionál (d), dostaneme z variačního principu v obou případech stejný výsledek.

Příklad 5

Řešte průhyb nosníku z předchozího příkladu užitím Lagrangeova variačního principu.

V tomto případě vyjde funkcionál U podle (1.7)

$$U = \frac{1}{2} EJ \int_0^l (y'')^2 dx - \int_0^l q y dx \quad (a)$$

Přijmeme-li opět předpoklad, že

$$y = 4a \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (b)$$

vyjde

$$U = 32 EJ \frac{a^2}{l^3} - \frac{2}{3} q a l \quad (c)$$

a z podmínky $\partial U / \partial a = 0$ dostaneme

$$y_{\max} = a = \frac{q l^4}{96 EJ} \quad (d)$$

Chyba tohoto řešení je 20 %, kdežto řešení v příkladu 4 bylo zatíženo chybou jen asi -6,7 % (s opačným znaménkem).

3. METODA KONEČNÝCH PRVKŮ, JEJÍ KONVERGENCE A PŘESNOST

Ritzova metoda přibližného řešení spočívá v aproximaci řešení vhodnými funkcemi - viz rovnici (2.10) - a v minimalizaci příslušného funkcionálu. Očekáváme, že při větším počtu konkurenčních funkcí $h_i(x)$ zahrnutých do zvolené aproximace dosáhneme větší přesnosti. Říkáme, že přibližné řešení $u(x)$ konverguje k přesnému řešení $\bar{u}(x)$, platí-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n q_i h_i(x) = \bar{u}(x) \quad (3.1)$$

Má-li metoda konvergovat, musí být prostor funkcí $h_i(x)$ úplný v tom smyslu, že funkce $\bar{u}(x)$ a její derivace, které se objevují ve funkcionálu U , mohou být aproximovány s libovolnou přesností. To znamená, že vztah

$$\left| \bar{u}^{(k)}(x) - \sum_{i=1}^n q_i h_i^{(k)}(x) \right| < \varepsilon \quad (3.2)$$

pro k -té derivace musí být pro libovolné $\varepsilon > 0$ splněn pro všechna $n > N$, kde N je nějaké přirozené číslo. Vztah (3.2) musí být splněn pro všechny derivace vstupující do funkcionálu. Vyšší derivace konvergovat nemusí.

Variální počet řeší úlohu minimalizace funkcionálu U tím, že odvozuje Eulerovu diferenciální rovnici, která je nutnou podmínkou pro existenci minima. Přitom získáme z tzv. okrajových členů, které musí vymizet, i výčet možností, jak předepsat okrajové podmínky. Např. pro nosník z příkladu 5 máme variaci funkcionálu

$$\delta U = E \int_0^l y'' \delta y'' dx - \int_0^l q \delta y dx = 0 \quad (3.3)$$

Integrací per partes postupně dostaneme

$$\begin{aligned} E \int_0^l [y'' \delta y']_0^l - E \int_0^l y''' \delta y' dx - \int_0^l q \delta y dx - \\ = E \int_0^l [y'' \delta y']_0^l - E \int_0^l [y''' \delta y]_0^l + \\ + \int_0^l (E y^{(4)} - q) \delta y dx = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Má-li výraz (3.4) vymizet, musí být oblá závorka rovna nule, tj. musí platit Eulerova diferenciální rovnice, v níž poznáváme diferenciální rovnici pro průhyb nosníku

$$E y^{(4)} - q = 0 \quad (3.5)$$

Kromě toho se musí anulovat "okrajové členy"

$$[y'' \delta y']_0^l - [y''' \delta y]_0^l = 0 \quad (3.6)$$

Máme nyní tyto možnosti výběru okrajových podmínek

(1) Oba konce vetknuté; podstatné okrajové podmínky jsou čtyři

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 & y(l) &= 0 \\ y'(0) &= 0 & y'(l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pak musí variace δy i $\delta y'$ na obou koncích vymizet a rovnice (3.6) je splněna.

- (2) Oba konce prostě podepřené; podstatné okrajové podmínky jsou nyní jen dvě, a to

$$y(0) = 0 \quad y(l) = 0 \quad (3.8)$$

Variace $\delta y'$ může být tedy libovolná, takže (3.6) dává další dvě přirozené okrajové podmínky

$$y''(0) = 0 \quad y''(l) = 0 \quad (3.9)$$

Jsou to silové okrajové podmínky, neboť y'' je úměrné ohybovému momentu.

- (3) Jeden konec vetknutý, druhý volný. Nechť je vetknutý konec $x = 0$. Pak máme tyto dvě podstatné okrajové podmínky

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad (3.10)$$

Na volném konci $x = l$ nemůžeme předepsat ani δy , ani $\delta y'$. Z rovnice (3.6) pak dostaneme tyto dvě přirozené okrajové podmínky

$$y''(l) = 0 \quad y'''(l) = 0 \quad (3.11)$$

Připomeňme, že y''' je úměrné posouvající síle.

- (4) Oba konce volné; nyní nemůžeme předepsat žádnou podstatnou okrajovou podmínku, takže musí být

$$\begin{aligned} y''(0) &= 0 & y''(l) &= 0 \\ y'''(0) &= 0 & y'''(l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

To jsou čtyři přirozené okrajové podmínky. Cítíme však, že zde není všechno v pořádku, neboť nepodepřený nosník nemůže být obecně v rovnováze, pokud vnější síly netvoří rovnovážný systém. Zatížení $q(x)$ v rovnici (3.5) nemůže být vskutku předepsáno libovolně, pokud okrajové podmínky nevedou k triviálnímu, identicky nulovému řešení zkrácené homogenní diferenciální rovnice $y^{(4)} = 0$. V daném případě existují dvě netriviální řešení homogenní rovnice, a to $y = c_0$ a $y = c_1 x$. V takovém případě nelze okrajovou úlohu řešit, není-li $q(x)$ ortogonální k uvedeným řešením, tj. neplatí-li

$$\int_0^l q(x) dx = 0, \quad \int_0^l q(x) x dx = 0 \quad (3.13)$$

To jsou však podmínky rovnováhy, které musí vnější síly působící na nepodepřený nosník splňovat.

U Ritzovy metody stačí, vyhovuje-li aproximace posuvů jen podstatným, tj. geometrickým okrajovým podmínkám. Silovým podmínkám vyhovovat nemusí. Je-li např. $u(x)$ průhyb nosníku, pak u kloubově podepřeného konce musí být $u=0$, ale druhá derivace $u''(0)$, která je úměrná ohybovému momentu, se v tomto místě nemusí rovnat nule.^{*)} Řešíme-li úlohy jiného typu, bývá někdy obtížné rozpoznat, které z okrajových podmínek jsou podstatné. Platí jednoduché pravidlo. Je-li hledaná funkce obsažena v diferenciální rovnici s nejvyšším řádem derivace $2m$, týkají se podstatné okrajové podmínky derivací řádů 0 až $m-1$.

Užitím Ritzovy metody dostaneme posuvy v elastické konstrukci menší než přesné (nebo přesné, shoduje-li se aproximace s přesným řešením). Působí-li totiž na pružné těleso zobecněné síly Q sdružené se zobecněnými posuvy q , pak se vykoná práce $Q^T q / 2$, která je vždy menší nebo nejvýš stejná jako přesná hodnota $Q^T \bar{q} / 2$. Avšak z podmínky, že

$$Q^T q < Q^T \bar{q} \quad (3.14)$$

ještě nevyplývá, že $q_j < \bar{q}_j$ pro všechna j . Jinými slovy, při přibližném řešení deformací pružných těles jsou posuvy q_j vcelku nedoceny, ale to neznamená, že jsou nedoceny skutečně všechny stupně volnosti.

Nevycházíme-li z Lagrangeova variačního principu, ale z nějaké smíšené variační metody, pak žádné ohraničení přesného výsledku nedostaneme. Důvod je zřejmý z poznámky na konci 2. kapitoly.

Napětí se počítají z pole posuvů užitím vztahů (1.1) a (1.2), resp. (1.3). Mohlo by se tedy zdát, že také napětí vyjdou menší než jejich přesné hodnoty, jsou-li posuvy nedoceny. Ale to je ukvapený, nesprávný úsudek. Napětí vycházejí ve skutečnosti někde příliš vysoká, jinde příliš malá. To pochopíme, porovnáme-li např. tyto funkce

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= 1 - x^2 \\ f_2(x) &= \cos \frac{\pi x}{2} \end{aligned} \right\} x \in (-1, 1) \quad (3.15)$$

Uvnitř celého intervalu je $f_2(x) < f_1(x)$, ale pro druhé derivace

$$f_1''(x) = -2 \quad f_2''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi x}{2} \quad (3.16)$$

vyjde $f_2'' < f_1''$ pro $|x| < \xi$, $f_2'' > f_1''$ pro $|x| > \xi$, kde $\xi \approx 0,3983$. Můžeme si představit, že funkce $f_2(x)$ představuje přibližné řešení průhybu nosní-

^{*)} Přesné řešení musí ovšem splňovat i tuto druhou, silovou podmínku.

ku ohnutého do paraboly $f_1(x)$.

Pak druhé derivace jsou úměrné ohybovým napětím.

Funkcionál U nabývá minima, je-li jeho první variace nulová $\delta U = 0$ a druhá variace pozitivní $\delta^2 U > 0$. Přesné řešení dává $\bar{U}_{\min} = U_0$, přibližné řešení $U_{\min} > U_0$. Protože posuvy vycházejí z přibližného řešení založeného na Lagrangeově variačním principu vcelku menší než přesné, dalo by se předpokládat, že také deformační energie bude vždy menší než přesná, tj. že

$$\int_{\Omega} \Lambda d\Omega \leq \int_{\Omega} \bar{\Lambda} d\Omega \quad (3.17)$$

Ale ani tento závěr není správný. Nerovnost (3.17) skutečně platí, jsou-li předepsány síly. Jsou-li předepsány posuvy, bude

$$\int_{\Omega} \Lambda d\Omega \geq \int_{\Omega} \bar{\Lambda} d\Omega \quad (3.18)$$

neboť k překonání zvýšené tuhosti je třeba vynaložit k vyvození předepsaných posuvů větší sílu.

Je velmi výhodné, když funkce $h_i(x)$ v rovnici (2.10), resp. (3.1) splňují podmínku ortogonality s vahou $w(x)$ ($x \in \Omega$)

$$\int_{\Omega} w(x) h_i(x) h_j(x) d\Omega = \delta_{ij} \quad (3.19)$$

kde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i=j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad (3.20)$$

značí Kroneckerovo delta. Je-li funkce $u(x)$ známa, lze v takovém případě velmi snadno určit koeficienty q_k . Násobením rovnice (3.1) funkcí $w(x) h_k(x)$ a integrací vyjde

$$q_k = \int_{\Omega} w(x) h_k(x) u(x) d\Omega \quad (3.21)$$

Není-li funkce $u(x)$ známa a hledáme-li ji minimalizací funkcionálu U , pak za určitých předpokladů dostaneme pro neznámý vektor q soustavu rovnic s diagonální maticí, tj. se separovanými neznámými.

Výběr takových ortogonálních funkcí, které by splňovaly podstatné okrajové podmínky na hranici nepravidelného tvaru, není snadný a nejčastěji není ani možný. Vybereme proto funkce, které se ortogonálnímu systému co nejvíce blíží, ale které lze přesto definovat s velkou volností. To právě činí metoda konečných prvků.

Za zobecněnou souřadnici q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) vybereme právě funkční hodnotu $u(x)$ v bodě $x = x_k$, kterou označíme u_k . Takže bude

$$u(x) = u_1 h_1(x) + u_2 h_2(x) + \dots + u_n h_n(x) \quad (3.22)$$

Pak ovšem musí platit, že

$$h_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (3.23)$$

Podmínce (3.19) se nejvíce přiblížíme, budeme-li požadovat, aby bázová funkce $h_k(x)$ byla nenulová právě jen v blízkém okolí bodu x_k . Nejsnáze toho dosáhneme tak, že body x_k ($k=1, 2, \dots, n$) spojíme sítí, která oblast Ω rozdělí na suboblasti Ω_e ($e=1, 2, \dots, m$), takže

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_m &= \Omega \\ \Omega_i \cap \Omega_j &= \emptyset \quad \text{pro } i \neq j \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Bodům x_k budeme říkat uzlové body nebo krátce uzly. Suboblast Ω_e představuje prvek (element). Protože má konečné rozměry, mluvíme o konečném prvku. Na hranici každého prvku bude několik uzlových bodů. Některé body mohou zůstat nespojené uvnitř prvků. Bázovou funkci $h_k(x)$ určíme tak, aby byla nenulová jen v těch prvcích, které se v uzlu x_k stýkají. Definujeme ji po částech, tj. v každém z těchto prvků samostatně, a to tak, aby byla splněna podmínka (3.23). S výhodou lze k tomu použít polynomů. Funkcionál, který je integrálem nad oblastí Ω , pak vypočteme jako součet integrálů nad jednotlivými prvky Ω_e . (To je ovšem možné jen za určitých předpokladů o spojitosti integrandu na hranicích prvků.) Pak lze také postupovat tak, že studujeme vlastnosti jednotlivých prvků odděleně. Využíváme jich k sestavení rovnic pro danou úlohu tak, abychom co nejlépe využili paměti počítače.

Někdy je výhodné zavést v každém uzlu jako zobecněnou souřadnici nejen funkční hodnotu, ale také její derivace. Zavedeme-li např. u nosníku aproximaci průhybu $u(x)$ tak, že bude v každém uzlovém bodu dán průhyb $u_k = u(x_k)$ a jeho první derivace $u'_k = u'(x_k)$, bude

$$u(x) = u_1 h_1(x) + u'_1 h_2(x) + \dots + u_n h_{2n-1}(x) + u'_n h_{2n}(x) \quad (3.25)$$

Bázové funkce musí v tomto případě splňovat podmínky

$$\left. \begin{aligned} h_{2k-1}(x_j) &= \delta_{kj} & h_{2k}(x_j) &= 0 \\ h'_{2k-1}(x_j) &= 0 & h'_{2k}(x_j) &= \delta_{kj} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Těmto podmínkám nejsnáze vyhovíme, zvolíme-li za bázové funkce po částech Hermiteovy interpolační polynomy.

Jak jsme již uvedli, bázová funkce je definována nad oblastmi všech konečných prvků, které se v daném uzlu stýkají. Části bázových funkcí připadající na jeden konečný prvek nazýváme tvarové funkce. Stejným právem bychom je mohli nazvat interpolační funkce.

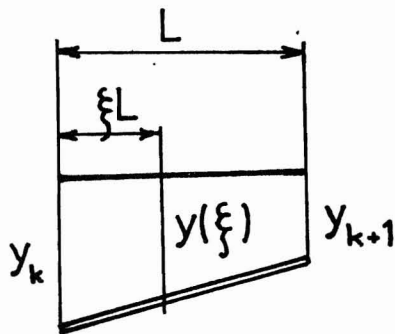
Příklad 6

Řešte průhyb struny napjaté mezi body $x=0$ a $x=l$ metodou konečných prvků.

Je-li struna rovnoměrně zatížena, je funkcional

$$U = \frac{1}{2} F \int_0^l [y'(x)]^2 dx - q \int_0^l y(x) dx \quad (a)$$

Zde F je předpětí struny, o němž předpokládáme, že se průhybem struny nezmění. Protože funkcional obsahuje nejvýše první derivaci hledané funkce, musí být aproximace v nulté derivaci spojitá, v první už nikoliv. Může být proto hladká jen po částech. Oblast $0 \leq x \leq l$ rozdělíme např. na čtyři konečné prvky, každý o délce $L = l/4$. V každém z nich použijeme lineární aproximace. Pro k -tý prvek tedy bude (obr. 5)



OBR. 5

$$y(\xi) = y_k (1 - \xi) + y_{k+1} \xi \quad (b)$$

kde $\xi \in \langle 0; 1 \rangle$ je bezrozměrová lokální souřadnice. Derivací (b) podle x dostaneme (pro $x_k < x < x_{k+1}$)

$$y'(x) = \frac{y_{k+1} - y_k}{L} \quad (c)$$

Souvislost mezi lokální souřadnicí ξ a globální souřadnicí $x \in \langle 0, l \rangle$ dává

$$dx = L d\xi \quad (d)$$

takže část funkcionalu připadající na k -tý prvek je

$$U_k = \frac{1}{2} \frac{F}{L} \int_0^1 [y'(\xi)]^2 d\xi - q L \int_0^1 y(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{F}{2L} (y_{k+1} - y_k)^2 - \frac{qL}{2} (y_k + y_{k+1}) \quad (\text{e})$$

Přítom

$$U = \sum_{k=1}^4 U_k \quad (\text{f})$$

Okrajové podmínky požadují, aby $y_1 = 0$, $y_5 = 0$. Pro zbývající neznámé platí rovnice

$$\frac{\partial U}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y_4} = 0 \quad (\text{g})$$

Odtud dostaneme

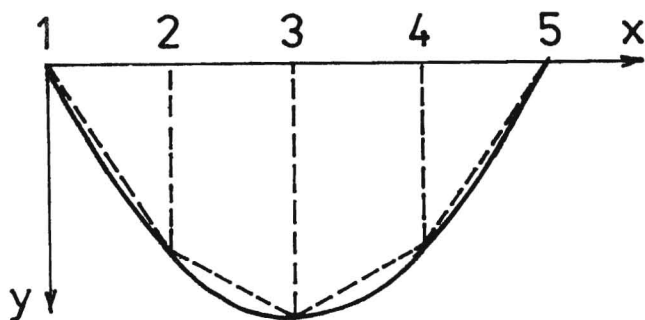
$$\frac{F}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = qL \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{h})$$

Snadno vypočteme, že

$$y_2 = y_4 = 3qL^2/2F = 3q\ell^2/32F$$

$$y_3 = 2qL^2/F = q\ell^2/8F \quad (\text{i})$$

Tyto hodnoty se shodují s přesným řešením. Průhyb struny mimo uzlové body je však menší než přesné řešení, což znázorňuje obr. 6.



OBR.6

Příklad 7

Řešte stejnou úlohu užitím jednoho hermiteovského prvku.

Hermiteovy interpolační polynomy napíšeme pro lokální bezrozměrovou souřadnici ξ na intervalu $0 \leq \xi \leq 1$. Polynomy musí vyhovovat podmínkám (3.26) pro proměnnou ξ a pro $i, j = 1, 2$. Tedy

$$\begin{aligned}
 h_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\
 h_2(\xi) &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\
 h_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\
 h_4(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

Z okrajových podmínek je zřejmé, že $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Bude proto

$$y(\xi) = y_1' h_2(\xi) + y_2' h_4(\xi) \tag{b}$$

a funkcionál (a) z příkladu 6 dá

$$U = \frac{F}{30l} [2(y_1')^2 - (y_1')(y_2') + 2(y_2')^2] - \frac{ql}{2} [(y_1') - (y_2')] \tag{c}$$

Z podmínky pro minimum této funkce plyne soustava rovnic

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \frac{5ql^2}{2F} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
 \tag{d}$$

Řešením dostaneme sklon v podpoře

$$y_1' = \frac{ql^2}{2F} = -y_2' \tag{e}$$

a největší průhyb uprostřed struny ($\xi = 0,5$)

$$y_{\max} = \frac{ql^2}{8F} \tag{f}$$

Hodnoty (e) a (f) jsou přesné. Řešení (b) je rovněž přesné, neboť členy třetího stupně se ruší, takže dostáváme průhyb struny ve tvaru kvadratické paraboly, což odpovídá přesnému řešení.

Příklad 8

Problém kroucení prizmatické tyče lze řešit v pravouhlých souřadnicích x , y , z tak, že posuvy vyjdou

$$u = -\vartheta' z y \quad v = \vartheta' z x \quad w = \vartheta' \psi(x, y) \tag{a}$$

Osa z spojuje středy krutu všech průřezů a je tedy totožná nebo rovnoběžná s osou, popř. se střednicí tyče; ϑ' znamená zkrut a ψ harmonickou funkci popisující deplanaci průřezů. Napětí jsou pak dána výrazy

$$\tau_{zx} = G\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right) \quad \tau_{zy} = G\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right) \quad (b)$$

Okrajové podmínky vyjadřují skutečnost, že smykové napětí má na okraji průřezu směr tečny k obrysu. Tyto podmínky se zjednoduší, přejdeme-li ke sdružené harmonické funkci $\varphi(x, y)$ takové, že

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (c)$$

Vztahy pro napětí uvnitř oblasti Ω pak budou

$$\tau_{zx} = -G\gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + y\right) \quad \tau_{zy} = G\gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\right) \quad (d)$$

a okrajové podmínky na hranici $\Gamma(s)$ vyjdou

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + y\right)\frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\right)\frac{dx}{ds} = 0 \quad (e)$$

Tuto rovnici však můžeme přepsat do tvaru

$$dy + y dy + x dx = 0 \quad (f)$$

Odtud dostaneme integraci okrajové hodnoty.

$$\varphi = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C \quad (\text{na } \Gamma) \quad (g)$$

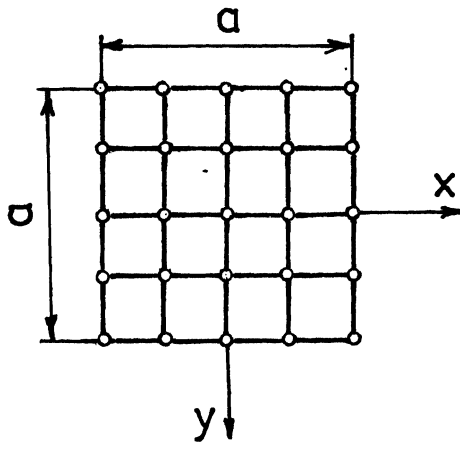
Na integrační konstantě v tomto případě nezáleží, protože při derivování odpadne. Můžeme proto zvolit $C = 0$. Protože φ je harmonická funkce, musí být

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (h)$$

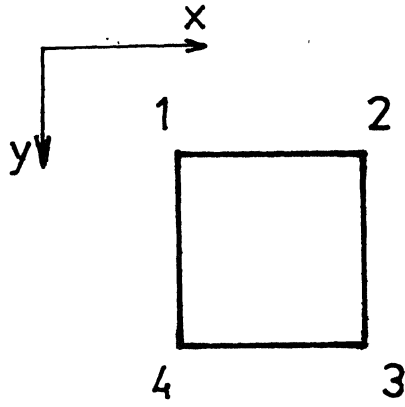
Tuto funkci budeme nyní hledat metodou konečných prvků. Budeme konkrétně předpokládat, že průřez tyče je čtverec o rozměrech $a \times a$ (obr. 7). Rozdělíme jej na 16 stejných čtvercových prvků, každý se čtyřmi uzlovými body. Jeden takový prvek je zakreslen na obr. 8. Transformujeme jej na čtverec 2×2 (obr. 9) užitím vztahů

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \\ y &= b_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\xi\eta \end{aligned} \quad (i)$$

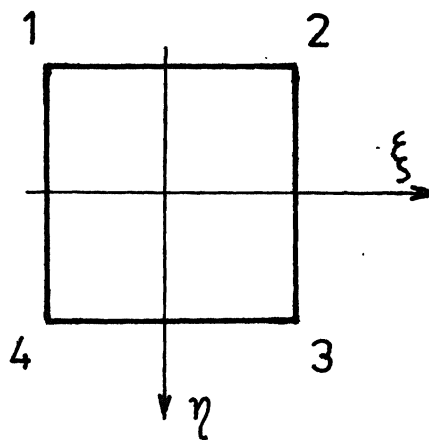
Osm konstant a_0 až b_3 vypočteme z podmínky, že uzlové body (tj. vrcholy) si musí odpovídat. Tedy



OBR. 7



OBR. 8



OBR. 9

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{j})$$

Obdobná rovnice platí pro ypsilonové souřadnice a konstanty b_0 až b_3 . Transformační vztahy (i) by platily i pro prvek ve tvaru obecného čtyřúhelníku. V našem případě je však $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3$, $y_1 = y_2$, $y_3 = y_4$ a vztahy (i) se zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\xi \\ y &= \frac{1}{2}(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}(y_3 - y_2)\eta \end{aligned} \quad (\text{k})$$

Rovnici (h) s okrajovými podmínkami (g) odpovídá funkcionál

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (\text{l})$$

Integrujeme přes plochu prvku na obr. 8. Uvnitř prvku v rovině ξ, η zvolíme aproximaci ("násadu") ve tvaru bilineárního polynomu

$$\varphi(\xi, \eta) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \xi \eta \quad (\text{m})$$

Tento polynom má čtyři konstanty c_0 až c_3 , což odpovídá čtyřem stupňům volnosti konečného prvku (funkční hodnoty lze předepsat ve čtyřech uzlových bodech). Bude

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{x_2 - x_1} (c_1 + c_3 \eta) \quad (\text{n})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{y_3 - y_2} (c_2 + c_3 \xi)$$

Protože $y_3 - y_2 = x_2 - x_1$, vyjde z rovnice (n) po úpravě

$$\begin{aligned} U &= \int_{-1}^1 (c_1 + c_3 \eta)^2 d\eta + \int_{-1}^1 (c_2 + c_3 \xi)^2 d\xi = \\ &= 2c_1^2 + 2c_2^2 + \frac{4}{3}c_3^2 \end{aligned} \quad (\text{o})$$

Konstanty c_0 až c_3 v rovnici (m) vypočteme z podmínky, že funkce φ nabývá v uzlovém bodu ξ_k, η_k hodnoty φ_k . Vyjde soustava rovnic obdobná k rovnici (j) s řešením ^{x)}

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{p})$$

^{x)} Čtvercové matice v rovnicích (j) a (p) jsou navzájem inverzní.

Z podmínek $\partial U / \partial \varphi_i = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, 4$ dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (q)$$

Platí pro jeden prvek zakreslený na obr. 8. Mohli jsme ji dostat kratěji i bez použití transformace (i). Použili jsme ji jen proto, abychom naznačili postup řešení pro obecný čtyřúhelník. Jakýkoli takový čtyřúhelník lze užitím rovnic (i) transformovat na čtverec $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$ a integraci podle (l) uskutečňovat vždy jen v tomto čtverci, ať má čtyřúhelník jakýkoli tvar. To je zvlášť výhodné, používáme-li numerické integrace. Protože souřadnice x , resp. y transformujeme se stejným počtem parametrů a_0 až a_3 , resp. b_0 až b_3 jako funkční hodnoty φ podle (m) (parametry c_0 až c_3), je prvek na obr. 8 s maticovou rovnicí (q) ze třídy izoparametrických prvků.

Číslování vrcholů na obr. 8 se vztahuje na jeden vybraný prvek. Jde tedy o lokální číslování. V soustavě konečných prvků na obr. 7 budeme mít čísla uzlů $1, 2, \dots, 25$. Pak se stane, že určitý prvek bude mít čísla uzlových bodů (vrcholů) i, j, k, l (v globální soustavě) místo $1, 2, 3, 4$ (v lokální soustavě). V paměti počítače vynulujeme pole pro matici typu 25×25 a přičteme do ní hodnoty z určitého řádku a sloupce čtvercové matice ze vztahu (q) na ta místa, kam skutečně patří, tj. hodnotu $(1, 1)$ na místo (i, i) , $(1, 2)$ na místo (i, j) atd., až konečně $(3, 4)$ na místo (k, l) a $(4, 4)$ na místo (l, l) . Když takto načteme (postupným přičítáním k hodnotám již do maticového pole dříve přičteným) všechny elementární matice - tj. matice všech šestnácti konečných prvků -, dostaneme výslednou matici $[K]$ typu 25×25 a rovnicí

$$[K]\{\varphi\} = \{0\} \quad (r)$$

Zde $\{\varphi\} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_{25}]^T$. V tomto vektoru je šestnáct okrajových hodnot předepsáno. Nechť je např. předepsána hodnota φ_7 . Pak sedmý sloupec matice $[K]$ vynásobíme touto hodnotou, převedeme na pravou stranu rovnice a zároveň vynecháme sedmý řádek. Nakonec zůstane soustava s maticí $[K]$ typu 9×9 a s nenulovou pravou stranou. Řešením dostaneme hodnoty φ ve vnitřních uzlových bodech.

Chceme-li popsanému postupu lépe porozumět, očíslováme uzlové body na obr. 7 tak, aby čísla $1, 2, \dots, 9$ připadala na vnitřní uzly, čísla $10, 11, \dots, 25$ na okrajové uzly. Rovnici (r) pak můžeme napsat užitím submatic ve tvaru

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (s)$$

Subvektor $\{\varphi_b\} = [\varphi_{10}, \dots, \varphi_{25}]^T$ zahrnuje předepsané hodnoty v okrajových uzlových bodech a subvektor $\{b\}$ představuje "reakce" v těchto bodech, které jsou obecně nenulové. V rovnici (r) jsme je nepsali, protože jsme řádky s nimi nakonec vynechali.

Soustavu (s) rozepíšeme takto

$$\begin{aligned} [K_{aa}] \{\varphi_a\} &= - [K_{ab}] \{\varphi_b\} \\ [K_{bb}] \{\varphi_b\} &= - [K_{ba}] \{\varphi_a\} + \{b\} \end{aligned} \quad (t)$$

První z rovnic (t) dává hledané řešení

$$\{\varphi_a\} = - [K_{aa}]^{-1} [K_{ab}] \{\varphi_b\} \quad (u)$$

kdežto druhá z rovnic (t) by dala vektor $\{b\}$, který nás nezajímá. Vynecháme ji proto.

Při ručním počítání využijeme souměrnosti. S očíslováním uzlů podle obr. 10 a s okrajovými hodnotami vypočtenými podle (g)

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= -0,125 a^2 \\ \varphi_5 &= -0,15625 a^2 \\ \varphi_6 &= -0,25 a^2 \end{aligned}$$

dostaneme soustavu rovnic

$$2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = a^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -0,875 \\ -1,625 \end{bmatrix} \quad (v)$$

s řešením

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -0,155357 a^2 \\ \varphi_2 &= -0,151786 a^2 \\ \varphi_3 &= -0,158929 a^2 \end{aligned}$$

Abychom získali přesnější hodnotu derivace $\partial\varphi/\partial x$ na ose x , proložíme body 4 - 2 - 1 - 2 - 4 (obr. 10) parabolou čtvrtého stupně

$$\varphi = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 \quad (w)$$

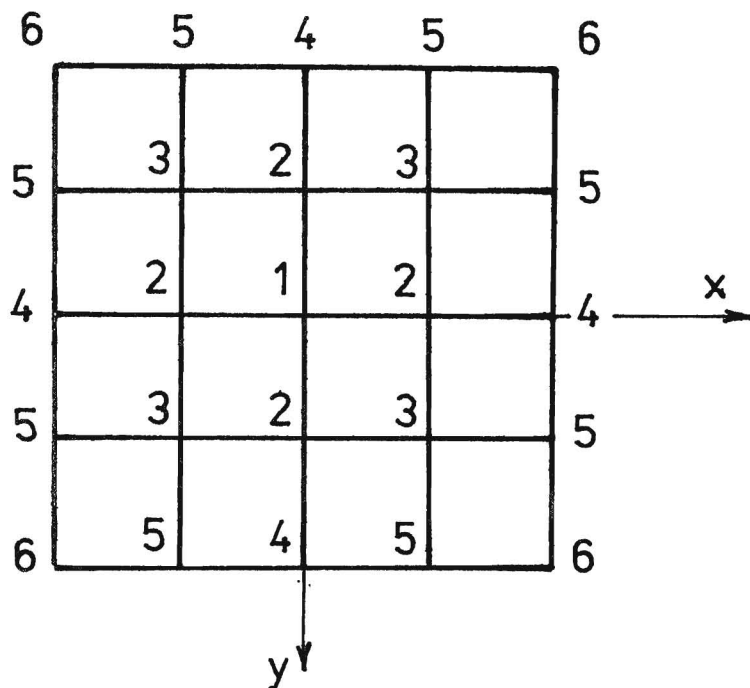
a vypočteme derivaci

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\beta x + 4\gamma x^3 \quad (z)$$

v bodě $x = a/2$. Vyjde $\beta = 0,035214$, $\gamma = 0,342857 a^{-2}$. Pak z rovnice (d) dostaneme napětí v uzlu 4

$$\tau_{\max} = 0,70714 G \vartheta a$$

místo přesné hodnoty $0,6753160a$. Chyba přibližného řešení je $4,7\%$.*)



OBR.10

Význam tohoto příkladu není ve výsledku řešení, ale v algoritmu; ten se nezmění, ani když budeme vyšetřovat kroucení tyče s průřezem ve tvaru libovolné oblasti, kterou lze rozdělit na obecné čtyřúhelníky. To je podstatná výhoda metody konečných prvků proti diferenční metodě, u které každá změna tvaru sítě si vynucuje i změnu diferenčních vztahů.

4. POŽADAVKY, KTERÝM MUSÍ VYHOVOVAT SÍŤ KONEČNÝCH PRVKŮ

Používáme-li deformační verze metody konečných prvků, která je nejběžnější, vycházíme z Lagrangeova variačního principu. Aproximujeme pole posuvů tak, abychom vyhověli podstatným, tj. geometrickým okrajovým podmínkám. Je-li tato aproximace (a popřípadě její derivace) uvnitř jednotlivých prvků spojitá, je tam zároveň kompatibilní (geometricky přípustná).

*) V publikaci "Úvod do metody konečných prvků", DT ČVTS Praha (1976) uvedl autor řešení stejné úlohy užitím trojúhelníkových prvků, založené na jednodušší Prandtlově metodě.

Z podstaty metody vyplývá, že posuvy jsou kompatibilní také v uzlových bodech (je-li jeden uzlový bod společný několika prvkům, je posuv tohoto bodu ve všech těchto prvcích přirozeně stejný). Chceme-li, aby posuvy byly kompatibilní také na hranicích mezi elementy, musíme se postarat o to, aby posuvy (a popřípadě i jejich derivace) na společné hranici dvou prvků byly zcela určeny právě jen zobecněnými posuvy zavedenými v uzlových bodech ležících na této společné hranici. Není-li tato podmínka splněna, jsou prvky nekompatibilní (nekonformní). Mohou někdy dávat užitečné výsledky, ale pro přesné řešení nedostaneme s nekompatibilními prvky žádné ohrazení (nevíme, zda vypočtené hodnoty jsou větší nebo menší než přesné).

Protože jde o přibližné řešení, upouštíme od požadavku důsledného splnění rovnic rovnováhy. Jsou splněny jen v uzlových bodech a jen výjimečně také uvnitř elementů.

Aproximace posuvů musí být taková, aby umožňovala vytvořit v prvku homogenní pole poměrné deformace. Toho dosáhneme, když v polynomu n -tého stupně nevynecháme žádné členy stupně nižšího než n . Nesmíme vynechat ani absolutní člen, neboť prvek musí mít možnost přemístit se libovolně jako absolutně tuhé těleso. Prvek má být vytvořen tak, aby nevznikala umělá anizotropie. Tomuto požadavku geometrické invariance nemůžeme - až na výjimky - beze zbytku vyhovět. Volíme však tvar prvků tak, aby nebyly v určitém směru zbytečně protáhlé a používáme pokud možno kompletních polynomů, v nichž jsou všechny proměnné symetricky zastoupeny.

Z uvedených požadavků vyplývá základní pravidlo. Obsahuje-li funkcionál derivace nejvyššího řádu m , je diferenciální rovnice problému řádu $2m$. Pak se požaduje, aby aproximace posuvů uvnitř prvků byly spojitě a úplně až do řádu m , kdežto na hranicích se mezi kompatibilními prvky žádá spojitost do řádu $m-1$.

Existuje jednoduchý "sešívací test" (angl. patch test; patch = záplata, to patch = slátat), kterému vyhovuje každá síť konečných prvků splňujících požadavky konvergence. Statická úloha vede k rovnici

$$Kq = f \quad (4.1)$$

kde K je globální matice tuhosti, q vektor zobecněných posuvů uzlových bodů a f vektor zobecněných sil působících v těchto bodech. Zvolíme-li posuvy q takové, které odpovídají homogennímu poli poměrných přetvoření, musí z rovnice (4.1) vyjít ve všech vnitřních uzlových bodech nulové zobecněné síly (ovšem nulové s počítačovou přesností). Splnění tohoto testu je nutnou podmínkou konvergence (což znamená, že se výsledky výpočtu při jemnějším dělení oblasti na konečné prvky přiblíží více k přesnému řešení, pokud nejsou zkaženy zaokrouhlovacími chybami). Test však nevypovídá nic o rychlosti konvergence.

Příklad 9

Jaké požadavky musí splňovat kompatibilní prvek pro řešení průhybu tenkých desek?

Funkcionál úlohy, tj. celková potenciální energie skládající se z deformační energie a z potenciální energie vnějších sil, obsahuje derivace nejvýše druhého řádu. Diferenciální rovnice pro průhyb tenkých desek je čtvrtého řádu. Je tedy $m = 2$. Aproximace průhybu $w(x, y)$ desky musí proto mít uvnitř elementů spojitě ještě i druhé derivace a musí umožňovat vytvořit pole s konstantními hodnotami druhých derivací $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial y^2$, $\partial^2 w / \partial x \partial y$. Mezi elementy se žádá jen spojitost průhybu w a prvních derivací $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$.

Příklad 10

Zkoumejme, zda prvek na obr. 11, navržený pro rovinnou napjatost, splní podmínky "sešívacího testu". Tvarové funkce h_1 až h_4 jsou spjaty s uzlovými body 1 až 4. Další dvě tvarové funkce h_5 , h_6 jsou nekonformní a jsou vázány k nezávislým parametrům λ_5 , λ_6 , μ_5 , μ_6 . Posuvy ve směrech souřadnicových os jsou

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 + u_4 h_4 + \lambda_5 h_5 + \lambda_6 h_6 \\ v(x, y) &= v_1 h_1 + v_2 h_2 + v_3 h_3 + v_4 h_4 + \mu_5 h_5 + \mu_6 h_6 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Přitom

$$\begin{aligned} h_1 &= (a+x)(b+y)/4ab & h_5 &= (a^2-x^2)/a^2 \\ h_2 &= (a-x)(b+y)/4ab & h_6 &= (b^2-y^2)/b^2 \\ h_3 &= (a-x)(b-y)/4ab \\ h_4 &= (a+x)(b-y)/4ab \end{aligned}$$

Prvek vyhoví sešívacímu testu, jestliže homogenní pole konstantního přetvoření lze vyvolat pouze silami působícími v uzlech, zatímco zobecněné síly příslušné nezávislým parametrům zůstanou nulové.

Zvolme např. pole posuvů

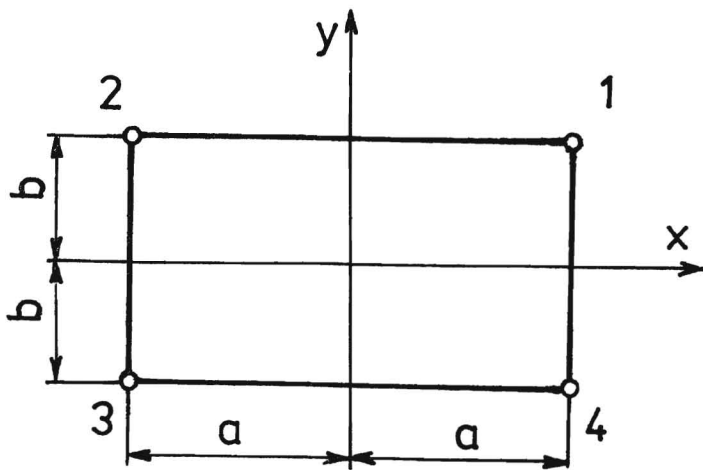
$$u = \alpha x + \beta \quad v = 0 \quad (b)$$

jemuž přísluší pole přetvoření

$$\epsilon_x = \alpha \quad \epsilon_y = 0 \quad \gamma_{xy} = 0 \quad (c)$$

To vyžaduje, aby bylo $u_1 = u_4$, $u_2 = u_3$

$$\alpha = \frac{u_1 - u_2}{2a} \quad \beta = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (d)$$



OBR. 11

a aby $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \mu_5 = \mu_6 = 0$.

Nemají-li se rovnoměrným roztažením prvku vyvolat tvarové funkce h_5, h_6 , musí v matici tuhosti odpadnout interakční prvky k_{ij} , resp. k_{ji} , $i = 1, 2, \dots, 4$, $j = 5, 6$. V daném případě vychází $k_{i6} = k_{6i} = 0$ a požadavek $k_{i5} = k_{5i} = 0$ vede k podmínce

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial h_5}{\partial x} dx dy = 0 \quad (e)$$

Integrací per partes dostaneme

$$\int_{-b}^b dy \int_{-a}^a \frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial h_5}{\partial x} dx = 2b \left[\frac{\partial h_i}{\partial x} h_5 \right]_{-a}^a - 2b \int_{-a}^a h_5 \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} dx \quad (f)$$

První člen na pravé straně rovnice (f) je nulový, neboť $h_5(x=a) = 0$, $h_5(x=-a) = 0$. Druhý člen je rovněž nulový, neboť $\partial^2 h_i / \partial x^2 = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, 4$.

Analogicky bychom se mohli přesvědčit, zda daný prvek splňuje podmínky testu i pro homogenní pole $\epsilon_y = \text{konst}$, resp. $\gamma_{xy} = \text{konst}$.

5. ROZMAZANÉ MNOŽINY A ROZMAZANÉ KONEČNÉ PRVKY

Pro potřeby kybernetiky a teorie informací byl zaveden pojem "roz-mazaná množina". O tom, zda některý prvek do dané množiny patří nebo ne, je totiž někdy těžké rozhodnout. Chceme-li např. z určité skupiny lidí vybrat množinu lidí zdravých, budeme v některém případě na rozpacích, zda dotyčný je ještě zdravý nebo už nemocný. Tím obtížnější by bylo vybrat např. množinu lidí veselých. Pro množiny tohoto typu se vžilo označení rozmazaná množina (angl. fuzzy set).^{*)}

Obdobný název byl zaveden i pro jistou množinu "konečných" prvků jdoucích do nekonečna. V některých případech je výhodné nahradit těleso konečných rozměrů, které má více nebo méně složitou hranici, tělesem nekonečným. Využíváme při tom Saint-Venantova principu, podle kterého nemohou nezatižené vzdálené části tělesa prakticky ovlivnit onu část tělesa, která je zatížena rovnovážným systémem vnějších sil v objemově omezeném rozsahu. Je-li např. čep zalisován do nějaké obdélníkové stěny, jejíž rozměry jsou podstatně větší než průměr čepu a čep je umístěn poblíž středu stěny, můžeme předpokládat, že stěna je nekonečná. Pro napjatost v blízkém okolí čepu, která bude nyní rotačně symetrická, dostaneme jednoduchý vzorec a výsledky budou přitom prakticky stejné, jaké bychom dostali pracným výpočtem napjatosti ve skutečné obdélníkové stěně konečných rozměrů. Jiným příkladem může být napjatost v okolí trhliny. Ta je určována průběhem napětí v blízkém okolí trhliny, ať je těleso jakkoli velké. Rovněž skořepinová napjatost na jednom konci dlouhé cylindrické tlakové nádoby se často počítá za předpokladu, že druhý konec nádoby je nekonečně vzdálený. K řešení pak potřebujeme vyčíslit jen poloviční počet integračních konstant a vyhneme se přitom i možné velké zaokrouhlovací chybě; ta může znehodnotit nebo i znemožnit přesné řešení uvažující zároveň oba konce tlakové nádoby.

Konečným počtem konečných prvků ovšem nelze pokrýt nekonečnou oblast. V takových případech je výhodné použít k modelování vzdálených "nezajímavých" částí tělesa konečných prvků velkých rozměrů, až konečně i takových, jež vedou v limitě do nekonečna. Tvarové funkce musí pak ve smyslu Saint-Venantova principu v nekonečnu vymizet. Jak rychle, v jaké vzdálenosti mají vymizet, zůstává otevřenou otázkou. Právě tato neurčitost nekonečnosti "konečných prvků" vytváří souvislost s rozmazanými množinami. Odtud pak název "rozmazané prvky" (angl. fuzzy elements).

Rozmazané prvky můžeme vytvářet generováním tak, že konečný prvek v $(k-1)$ -rozměrném prostoru rozšíříme podél tvořící křivky na oblouku

*)

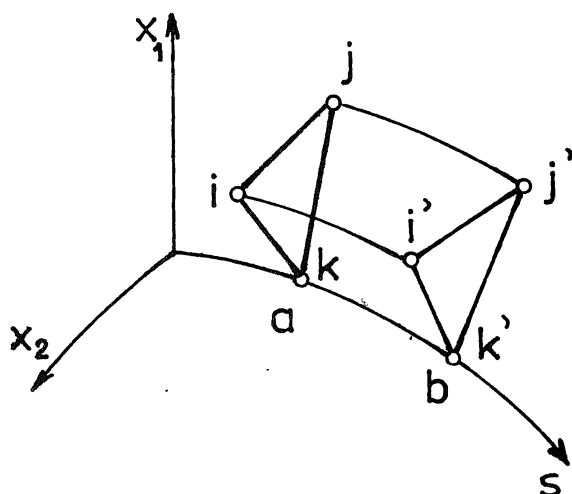
fuzzy = chomáčovitý; fuzzy-wuzzy = súdánský bojovník.

Dnes se v odborných textech většinou nepřekládá, dříve se překládalo jako „rozmazaný“ nebo „neostrý“.

$\langle a, b \rangle$ do h -rozměrného prostoru (obr. 12). Pro tvarové funkce dostaneme

$$h(x, s) = h_0(x) \psi(s) \quad (5.1)$$

Je-li tvořící oblouk křivky $\langle a, \infty \rangle$ nebo $(-\infty, b)$, vznikne nekonečný prvek.



OBR.12

Topologie nějakého konečného prvku o objemu Ω_e je určena tvarem hranice a uzlovými body. Můžeme ji však určit také "členskou funkcí" $f_e(P)$ takovou, že

$$f_e(P) = \begin{cases} 1 & \text{pro } P \in \Omega_e \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases} \quad (5.2)$$

Užitím této funkce můžeme rozhodnout, zda nějaký bod P patří do oblasti konečného prvku e nebo ne. Oblast Ω_e konečného prvku (elementu) e pak souvisí s oblastí V , v níž hledáme řešení celé úlohy, jednoduchým vztahem

$$\Omega_e = f_e V \quad (5.3)$$

Souvisí-li vektor poměrných deformací ε s vektorem posuvů q v uzlových bodech q vztahem

$$\varepsilon(x) = B(x)q \quad (5.4)$$

a platí-li Hookeův zákon

$$G(x) = C \varepsilon(x) \quad (5.5)$$

je celková deformační energie v prvku dána vztahem [srov. s rovnicí (1.22)]

$$\int_{\Omega_e} \Lambda(\varepsilon) d\Omega = \frac{1}{2} q^T \int_{\Omega_e} B^T C B d\Omega q \quad (5.6)$$

Tento vztah můžeme napsat v kvadratické formě

$$\int_{\Omega_e} \Lambda(\varepsilon) d\Omega = \frac{1}{2} q^T K_e q \quad (5.7)$$

utvořené se souměrnou maticí tuhosti daného prvku

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^T C B d\Omega \quad (5.8)$$

S použitím (5.3) můžeme psát, že

$$K_e = \int_V f_e B^T C B dV \quad (5.9)$$

Členská funkce podle (5.2) nabývá pouze dvou diskrétních hodnot nula nebo jedna. Pro rozmazané prvky však zavedeme členskou funkci, která bude v určité oblasti spojitá v intervalu

$$0 \leq f_e(P) \leq 1 \quad (5.10)$$

a za nosič prvku budeme považovat oblast S_e , pro niž $f_e > 0$. Funkci f_e v nerovnosti (5.10) volíme tak, aby vyhovovala praktickým potřebám úlohy.

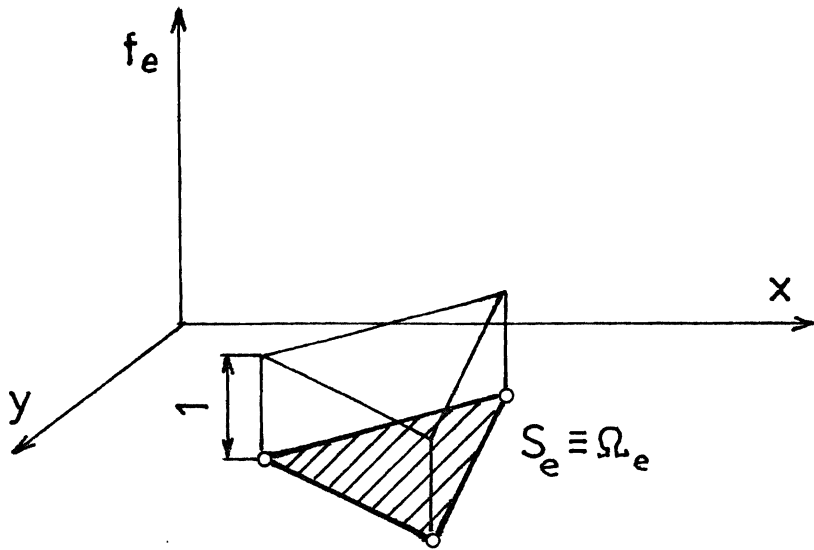
Například pro trojúhelníkový prvek v rovině x, y je nosič S_e totožný s oblastí prvku Ω_e , neboť platí (5.2) (obr. 13). Pro nekonečný prvek na obr. 14 je $S_e \subset \Omega_e$. Nekonečnost vyšetřované oblasti je tedy modelována konečnými prvky, v nichž se tvarové funkce se vzdáleností od exponované oblasti zmenšují absolutně k nule.

Příklad 11

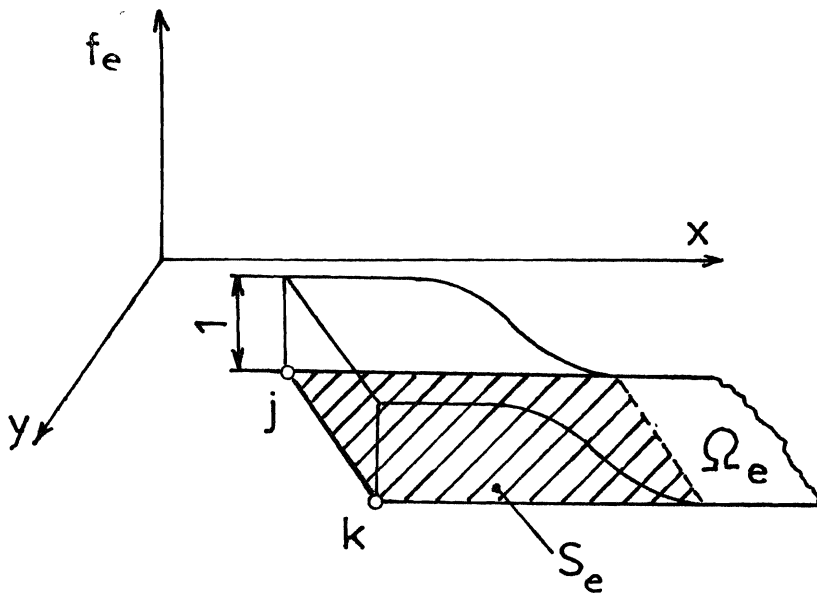
Tvarové funkce pro jednorozměrnou tyč $j - k$ na obr. 14 jsou

$$h_j = \frac{y - y_k}{y_j - y_k} \quad h_k = \frac{y - y_j}{y_k - y_j} \quad (a)$$

Tvarové funkce dvourozměrného polonekonečného prvku generovaného přímkou rovnoběžnou s osou x jsou s nimi totožné, předpokládáme-li $\psi(x) = 1$. Posuvy u, v ve směrech os x, y jsou



OBR. 13



OBR. 14

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_j & 0 & h_k & 0 \\ 0 & h_j & 0 & h_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (b)$$

Poměrná přetvoření jsou

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_k}{\partial y} \\ \frac{\partial h_j}{\partial y} & \frac{\partial h_j}{\partial x} & \frac{\partial h_k}{\partial y} & \frac{\partial h_k}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{y_k - y_j} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (c) \end{aligned}$$

To je rovnice (5.4). Pro rovinnou napjatost vypočteme

$$H = B^T C B = \frac{E}{(1-\mu^2)(y_k - y_j)^2} \begin{bmatrix} \frac{1-\mu}{2} & 0 & -\frac{1-\mu}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1-\mu}{2} & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Protože je tato matice konstantní, bude podle (5.9) pro desku o tloušťce t

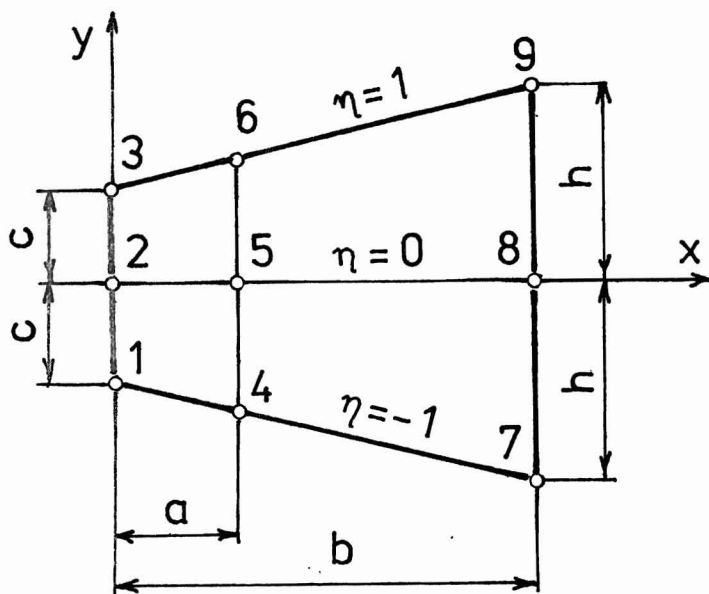
$$K = H \iint_{S_e} f_e t \, dx \, dy \quad (e)$$

Tato matice tuhosti je pouze čtvrtého řádu, neboť element na obr. 14 má pouze dva uzlové body a čtyři stupně volnosti (čtyři zobecněné posuvy).

Příklad 12

Nekonečný element lze navrhnout i jiným způsobem. Na obr. 15 je znázorněn lagrangeovský prvek se šesti uzly. Souřadnice x , y jsou lokální. Souřadnice η je bezrozměrová, vázaná se souřadnicí y transformací

$$y = \left(c + \frac{h-c}{b} x \right) \eta \quad (a)$$



OBR. 15

Chceme aproximovat funkci φ . Hodnoty funkce φ v uzlech jsou φ_i , $i = 1, 2, \dots, 9$. Na přímce $x=0$ bude

$$\varphi(x=0) = \varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \varphi_3 g_3 \quad (\text{b})$$

kde

$$g_1 = \frac{1}{2}(\eta^2 - \eta) \quad g_2 = 1 - \eta^2 \quad g_3 = \frac{1}{2}(\eta^2 + \eta)$$

Na přímce $\eta = -1$ bude

$$\varphi(\eta = -1) = \varphi_1 h_1 + \varphi_4 h_2 + \varphi_7 h_3 \quad (\text{c})$$

Zvolíme

$$h_1 = \frac{a-x}{a} e^{-x/\ell} \quad (\text{d})$$

$$h_2 = \frac{x}{a} e^{\frac{x-a}{\ell}} \quad (\text{e})$$

$$h_3 = 1 - h_1 - h_2 \quad (\text{f})$$

Vztah (f) musí platit, mají-li mít tvarové funkce schopnost modelovat homogenní pole $\varphi = \text{konst.}$ Délka ℓ je volena tak, aby pro ℓ rostoucí bez omezení vystíhovaly exponenciální funkce v rovnicích (d), (e) monotónní pokles tvarových funkcí k nule. Uspokojivé výsledky dostaneme,

zvolíme-li $a < l < 4a$.

Připomeňme, že $h_1(x=0) = 1$, $h_1(x=a) = 0$, $h_1(x=\infty) = 0$. Podobně $h_2(x=0) = 0$, $h_2(x=a) = 1$, $h_2(x=\infty) = 0$. Je-li $\varphi(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, nepotřebujeme tvarovou funkci h_3 znát. Zbývá proto jen šest stupňů volnosti. Aproximace v oblasti celého prvku je

$$\varphi(x, \eta) = \varphi_1 N_1 + \varphi_2 N_2 + \dots + \varphi_6 N_6 \quad (g)$$

kde

$$N_1 = q_1 h_1, \quad N_2 = q_2 h_1, \quad \dots \quad N_6 = q_3 h_2 \quad (h)$$

6. HYBRIDNÍ KONEČNÉ PRVKY

V druhé kapitole jsme uvedli, proč se v praxi neujala silová varianta metody konečných prvků odvozená z komplementárního variačního principu (1.16). Hlavním důvodem je, že je velmi obtížné nalézt takovou aproximaci pole napětí, která by splňovala podmínky rovnováhy uvnitř řešené oblasti Ω a zároveň vyhovovala na části povrchu Γ_G předepsaným silovým okrajovým podmínkám.

Existuje však způsob, jak tuto nesnáz zmírnit. Stačí oddělit od sebe jednotlivé prvky tak, aby nebylo nutné splňovat podmínky rovnováhy na jejich hranicích, ale jen uvnitř prvků. Pak není nutné ani to, aby aproximace napětí zavedená uvnitř prvků situovaných na okraji oblasti splňovala silové okrajové podmínky. Tohoto oddělení prvků dosáhneme tak, že pole napětí definujeme pouze uvnitř otevřené oblasti Ω prvku, kdežto na jeho hranici Γ předepíšeme posuvy. Volíme je tak, aby byly kompatibilní, tj. aby byly společné pro prvky, které na té či oné části hranice sousedí. Protože jde o předepsané posuvy na hranici daného prvku, objeví se v povrchovém integrálu obsaženém v komplementární potenciální energii (1.17). Vezmeme tedy

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T C^{-1} \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_u} \bar{u}^T p d\Gamma \quad (6.1)$$

Napětí σ uvnitř prvku budeme aproximovat tvarovými funkcemi sestavenými do matice $G(x)$. Parametry této aproximace sestavíme do sloupcového vektoru β . Rovnici (2.13) pak můžeme zapsat maticově ve tvaru

$$\sigma(x) = G(x) \beta \quad (6.2)$$

Pro aproximaci posuvů na hranici prvku budeme mít obdobně k rovnici (2.10)

$$\bar{u}(x) = H(x)\bar{q} \quad (6.3)$$

Vztah (6.2) platí uvnitř jednoho prvku, vztah (6.3) platí jen pro body na jeho hranici. Rovnici (6.1) budeme nyní chápat tak, že se vztahuje právě jen na tento prvek. Dosazením (6.2) a (6.3) do (6.1) dostaneme

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \beta^T \int_{\Omega} G^T C^{-1} G d\Omega \beta - \bar{q}^T \oint_{\Gamma} H^T q d\Gamma \beta \quad (6.4)$$

Matice Q interpoluje na hranici Γ vektor napětí p a je odvozena z matice G . Označme zkráceně

$$S = \int_{\Omega} G^T C^{-1} G d\Omega \quad N = \oint_{\Gamma} q^T H d\Gamma \quad (6.5)$$

Pak

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \beta^T S \beta - \beta^T N \bar{q} \quad (6.6)$$

Napěťové parametry musíme vybrat tak, aby \tilde{U} nabývalo stacionární hodnoty, tedy z podmínky

$$\delta \tilde{U} = \frac{\partial U}{\partial \beta^T} \delta \beta = 0 \quad (6.7)$$

Derivace (6.6) podle vektoru β musí být proto nulová, takže

$$S \beta = N \bar{q} \quad (6.8)$$

Odtud

$$\beta = S^{-1} N \bar{q} \quad (6.9)$$

Když tento vektor dosadíme do vztahu (6.6), bude po úpravě

$$\tilde{U} = -\frac{1}{2} \bar{q}^T N^T S^{-1} N \bar{q} \quad (6.10)$$

Vyjdeme-li na druhé straně z Lagrangeova variačního principu (1.15), bude potenciál U podle rovnice (2.1) po malé úpravě

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T C \epsilon d\Omega - \int_{\Omega} u^T \chi d\Omega - \int_{\Gamma_0} u^T \bar{p} d\Gamma \quad (6.11)$$

Aproximaci podle posuvů můžeme psát analogicky k rovnici (6.3)

$$u(x) = \mathcal{H}(x)q \quad x \in \Omega \quad (6.12)$$

Pak (6.11) dává

$$U = \frac{1}{2} q^T K q - q^T f \quad (6.13)$$

kde - shodně s rovnicemi (5.4) až (5.8) -

$$K = \int_{\Omega} B^T C B d\Omega$$

$$B = D \mathcal{X}$$

$$f = \int_{\Omega} \mathcal{X} X d\Omega + \int_{\Gamma_0} \mathcal{X} \bar{p} d\Gamma + f_0$$

Vektor f zahrnuje osamělé síly f_0 působící v uzlových bodech a také objemové a povrchové akční síly přepočtené do uzlových bodů. Princip (1.15) aplikovaný na výraz (6.13) dává

$$\delta q^T (Kq - f) = 0 \quad (6.14)$$

a tedy - shodně s rovnicí (4.1) -

$$Kq = f \quad (6.15)$$

Tohoto formalismu použijeme k vyčíslení komplementárního funkcionálu \tilde{U} . Jsou-li předepsány posuvy uzlových bodů \bar{q} , vznikají zobecněné síly

$$f = K\bar{q} \quad (6.16)$$

a komplementární potenciální energie vyjde

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{1}{2} \bar{q}^T K \bar{q} - \bar{q}^T f = \frac{1}{2} \bar{q}^T K \bar{q} - \bar{q}^T K \bar{q} = \\ &= -\frac{1}{2} \bar{q}^T K \bar{q} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Rovnice (6.13) se liší od rovnice (6.17) jen tím, že v rovnici (6.13) jsou předepsány síly a deformace q jsou proměnné. V rovnici (6.17) jsou předepsány posuvy \bar{q} a síly f podle (6.16) jsou proměnné. Porovnáme-li (6.17) a (6.10) vidíme, že maticový součin $N^T S^{-1} N$ má význam matice tuhosti K . Tedy

$$K = N^T S^{-1} N \quad (6.18)$$

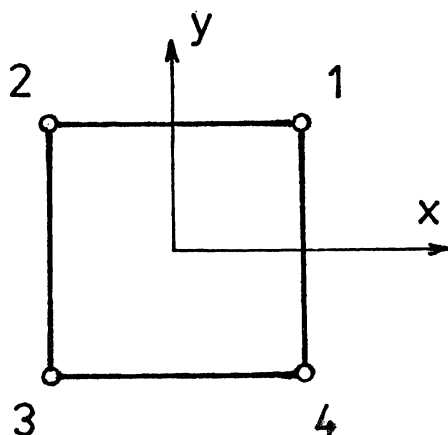
Od tohoto okamžiku počítáme s maticí tuhosti K podle (6.18) jako v deformační variantě metody konečných prvků. Příznačné pro hybridní konečné prvky je právě to, že napětové parametry β jsou na úrovni prvku předem eliminovány, takže algoritmus řešení celé úlohy je stejný jako u deformační varianty metody konečných prvků. Rozdíl je jen ve způsobu odvození matice tuhosti. Tato matice vyjde poněkud rozdílně, neboť je odvozena z komplementárního variačního principu. Nejde však ani o důslednou silovou variantu metody, neboť jsme na hranicích prvků předepsali posuvy na způsob deformační metody.

Soustava hybridních konečných prvků se tedy skládá ze silových prvků vestavěných do sítě, která se předepsaným způsobem deformuje. Po vyšetření vnějších sil, které k takové deformaci potřebujeme, formulujeme inverzní úlohu pro výpočet deformací, jež odpovídají daným akčním silám. Tím se vracíme k formalismu deformační varianty metody konečných prvků, takže můžeme využít běžných výpočtových systémů pro tuto metodu.

Odvození hybridních prvků, tj. odvození jejich matice tuhosti, je pracné. Řešení však bývá při stejné síti přesnější než při aplikaci deformační varianty (obdobně jako řešení odvozené ze smíšených variačních principů, srovnej příklady 4 a 5). Při stejném požadavku na přesnost vystačíme proto s menším počtem hybridních prvků.

Příklad 13

Pro čtvercovou desku 2 x 2 znázorněnou na obr. 16 navrhnete v rovině x, y , aproximaci pole napětí a okrajových posuvů.



OBR.16

Rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (a)$$

splníme nejjednodušeji aproximací

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -y & -x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_7 \end{Bmatrix} \qquad (b)$$

Každá složka napětí je v ploše prvku lineárně proměnná. Rovnice (b) představuje vztah (6.2). Vektor posuvů v uzlových bodech zvolíme

$$\{q\} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T \quad (c)$$

Na hranici Γ budou posuvy

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [H]\{q\} \quad (d)$$

a vektory napětí

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = [g]\{\beta\} \quad (e)$$

Vztahy (d) a (e) rozepíšeme pro každou stranu čtverce na obr. 16 zvlášť. Bude

(1) na straně 1 - 2 ^x)

$$[H] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+x & 1-x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+x & 1-x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -y & -x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}$$

(2) na straně 2-3

$$[H] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1+y & 1-y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+y & 1-y & 0 \end{bmatrix}$$

$$[g] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -y & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & y & x \end{bmatrix}$$

(3) na straně 3-4

$$[H] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-x & 1+x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x & 1+x \end{bmatrix}$$

$$[g] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -x & 0 & -y \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & y & x \end{bmatrix}$$

^{x)} Na této straně je $p_x = \tau_{yx}$, $p_y = \sigma_y$. Toho použijeme k sestavení matice $[g]$.

(4) na straně 4 - 1

$$[H] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+y & 0 & 0 & 1-y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+y & 0 & 0 & 1-y \end{bmatrix}$$

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -y & -x \end{bmatrix}$$

Matice N je typu 7×8 , matice S typu 7×7 , takže matice tuhosti K vyjde 8×8 , což odpovídá osmi stupňům volnosti pro hledané posuvy u_1, u_2, \dots, v_4 .

7. ELASTICKÉ JÁDRO MATICE TUHOSTI

Každý konečný prvek musí být navržen tak, aby umožňoval bezsilový posuv prvku jakožto absolutně tuhého tělesa (setrvačné síly neuvažujeme). Úplná elementární matice tuhosti prvku je proto singularární. Vnucuje se myšlenka rozdělit posuvy na takové, které odpovídají přemístění prvku jako tuhého celku, a na posuvy působící jeho přetvoření. Rovnicí $Kq = f$ můžeme vskutku rozepsat na submatice

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{RR} & K_{RE} \\ \hline K_{ER} & K_{EE} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q_R \\ q_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_R \\ f_E \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

Index R odpovídá přemístění tuhého tělesa, index E elastickému přetvoření. Matice K je singularární, ale submatice K_{EE} nikoli, protože nezahrnuje posuvy příslušné pohybu prvku jako tuhého tělesa. Proto můžeme z druhého řádku (7.1) vypočítat

$$q_E = K_{EE}^{-1} (f_E - K_{ER} q_R) \quad (7.2)$$

a dosadit do prvního řádku. Bude

$$(K_{RR} - K_{RE} K_{EE}^{-1} K_{ER}) q_R + K_{RE} K_{EE}^{-1} f_E = f_R \quad (7.3)$$

Nevzniká-li elastické přetvoření, je $f_E = 0$ a rovnice (7.2) dá

$$q_E = -K_{EE}^{-1} K_{ER} q_R \quad (7.4)$$

Na druhé straně můžeme posuvy separovat z čistě kinematických úvah. Při pohybu tělesa jako tuhého celku musí existovat nějaký transformační vztah

$$q_E = T q_R \quad (7.5)$$

kde T je obdélníková matice (obvykle má více řádků než sloupců). Porovnáme-li pravé strany rovnic (7.4) a (7.5) a připomeneme-li si, že q_R volíme libovolně, dojdeme k závěru, že

$$K_{ER} = -K_{EE} T \quad (7.6)$$

Až dosud jsme předpokládali, že $f_E = 0$. Nyní budeme předpokládat, že $f_E \neq 0$. Je zřejmé, že síly f_E nemohou záviset na stupních volnosti q_R příslušných pohybu tuhého tělesa. Proto vztah (7.3) nemůže obsahovat první člen. Ten vymizí, jestliže

$$K_{RR} = K_{RE} K_{EE}^{-1} K_{ER} \quad (7.7)$$

Protože matice tuhosti je souměrná, musí být $K_{RE} = K_{ER}^T$. S použitím (7.6) dá rovnice (7.7)

$$K_{RR} = T^T K_{EE} T \quad (7.8)$$

Když (7.6) a (7.8) dosadíme do matice tuhosti K , což je čtvercová matice ve vztahu (7.1), dostaneme

$$[K] = \begin{bmatrix} T^T K_{EE} T & -T^T K_{EE} \\ -K_{EE} T & K_{EE} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Známe-li tedy elastické jádro K_{EE} matice tuhosti a kinematický vztah (7.5), můžeme sestavit celou matici tuhosti podle (7.9). Počítáme-li matici tuhosti numericky (např. Gaussovou numerickou integrací nebo vyčíslováním vztahů citlivých na zaokrouhlovací chyby), vede výpočet s použitím elastického jádra podle (7.9) k menším numerickým chybám.

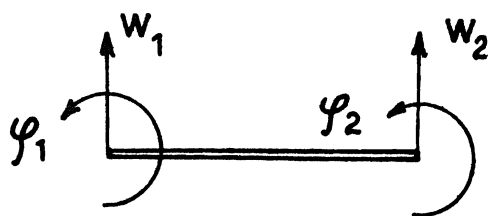
Příklad 14

Nosník se dvěma uzlovými body $x=0$, $x=l$ nechť má zobecněné souřadnice podle obr. 17.

$$\{q\} = [w_1 \quad \varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2] \quad (a)$$

kde w_1 , w_2 jsou průhyby uzlových bodů a φ_1 , φ_2 otočení v nich. K pohybu tuhého nosníku stačí předepsat pouze w_1 , φ_1 , takže můžeme zvolit

$$q_R = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} \quad q_E = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (b)$$



OBR. 17

Při pohybu tuhého nosníku zřejmě bude platit, že

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

To je vztah (7.5). S použitím hermiteovských polynomů a za předpokladu, že $w_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ vypočteme křivost nosníku

$$\varkappa(x) = \left[\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \quad \left(-\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \right] \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

Tento vztah zapíšeme krátce jako

$$\varkappa(x) = H_E(x) q_E \quad (e)$$

Pro deformační energii v nosníku pak vyjde vzorec

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q_E^T K_{EE} q_E &= \frac{1}{2} EJ \int_0^l [\varkappa(x)]^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} q_E^T EJ \int_0^l H_E^T(x) H_E(x) dx \cdot q_E \end{aligned} \quad (f)$$

Odtud

$$K_{EE} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (g)$$

Protože

$$T = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (h)$$

vyjde podle (7.9)

$$K = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (i)$$

Příklad 15

Elastické jádro odvodíme nejnázorněji, když za zobecněné souřadnice vezmeme koeficienty interpolačního polynomu. U nosníku z příkladu 14 např. bude

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (\text{a})$$

Zřejmě $a_R = [a_0 \ a_1]^T$, $a_E = [a_2 \ a_3]^T$. Pohyb tuhého nosníku je totiž popsán výrazem $w_R = a_0 + a_1 x$, takže $w_E = a_2 x^2 + a_3 x^3$. Místo rovnice (d) z příkladu 14 nyní máme

$$\kappa(x) = w_E'' = [2 \quad 6x] \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = H_a a_E \quad (\text{b})$$

a elastické jádro $EJ \int_0^l H_a^T H_a dx$ vyjde

$$K_{aa} = EJ \begin{bmatrix} 4l & 6l^2 \\ 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

Protože koeficienty a_0, a_1 popisují pouze pohyb nosníku jako tuhého celku, můžeme je vynechat. Pak

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & l^3 \\ 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{d})$$

Tuto rovnici zapíšeme symbolicky jako

$$q_E = A a_E \quad (\text{e})$$

Pak

$$K_{EE} = A^{-T} K_{aa} A^{-1} \quad (\text{f})$$

Matice K_{EE} vyjde stejná jako v příkladu 14.

8. POKUTOVÉ FUNKCE

Lagrangeův potenciál můžeme zapsat ve tvaru (6.13), totiž

$$U = \frac{1}{2} q^T K q - q^T f \quad (\text{8.1})$$

Zde q značí vektor zobecněných posuvů a f vektor zobecněných sil. Předpokládejme, že zobecněné posuvy nejsou všechny nezávislé, že mezi nimi platí vazba

$$Nq - d = 0 \quad (8.2)$$

kde N je obecně obdélníková matice a d daný vektor. Splnění vazebních podmínek můžeme dosáhnout tak, že rovnici (8.2) skalárně znásobíme vektorem λ sestaveným z Lagrangeových součinitelů a tento součin připojíme k funkcionálu (8.1). Vyjde

$$U = \frac{1}{2} q^T K q - q^T f + \lambda^T (Nq - d) \quad (8.3)$$

Variaci nyní podléhají vektor q a vektor λ . Bude tedy

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad \cdot \quad \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 \quad (8.4)$$

Odtud vyplyne jednak

$$Kq - f + N^T \lambda = 0 \quad (8.5)$$

jednak

$$Nq - d = 0 \quad (8.6)$$

Vektor Lagrangeových součinitelů λ má význam zobeconěných sil vynucujících vazbu (8.2), neboť členy v rovnici (8.3) mají rozměr práce. V maticovém uspořádání lze rovnice (8.5) a (8.6) zapsat společně ve tvaru

$$\left[\begin{array}{c|c} K & N^T \\ \hline N & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ d \end{Bmatrix} \quad (8.7)$$

což je tvar zcela obdobný k rovnici (6.15). Lze namítat, že nulová submatice znemožní řešení soustavy (8.7) Gaussovou eliminační metodou. Ale není tomu tak. Je-li matice tuhosti K pozitivně definitivní, pak se nulová submatice v průběhu řešení zaplní a výpočet proběhne bez obtíží.

Lagrangeova metoda zahrnutí přidanych vazeb do výpočtu je výhodná, je-li vazeb málo a týkají-li se velkého počtu stupňů volnosti.

Vazební podmínku (8.2) nyní zmírníme. Napíšeme

$$Nq - d = t \quad (8.8)$$

kde t je nějaký obecně nenulový vektor. Kdybychom dosadili $t = 0$, dostali bychom úplnou vazbu (8.2). My však připustíme její nedokonalé splnění. Tuto nedokonalost budeme řídit tzv. pokutovou funkcí

$$\Pi = \frac{1}{2} t^T \alpha t \quad (8.9)$$

Funkce Π je skalární; je to kvadratická forma vytvořená s diagonální maticí α . Prvky α_{ii} této matice jsou pokutová čísla. Místo funkcionálu (8.3) nyní napíšeme

$$U = \frac{1}{2} q^T K q - q^T f + \Pi \quad (8.10)$$

Je-li α nulová matice, je $\Pi = 0$ a vazby se ignorují. Splnění vazeb se bude vynucovat tím přísněji, čím budou pokutová čísla větší. Jsou-li však příliš velká, zhorší se numerická přesnost řešení.

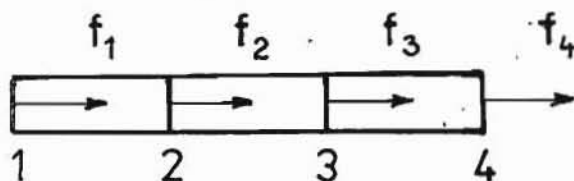
Použití pokutových funkcí má proti Lagrangeově metodě velkou výhodu v tom, že se nezavádějí nové proměnné. Implementace pokutových funkcí do výpočtového programu je stejně snadná jako zavedení rozdílného modulu pružnosti. Nevýhodou je, že pokutová čísla musí být volena rozvážně. Jsou-li příliš malá, není vazba dostatečně respektována. Jsou-li příliš velká, vzrostou zaokrouhlovací chyby.

Příklad 16

Tyč na obr. 18 je rozdělena na tři stejně dlouhé prvky, každý o tuhosti v tlaku k . V uzlových bodech jsou předepsány síly f_1 až f_4 . Pro nepodepřenou tyč platí rovnice

$$\begin{bmatrix} -k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Má-li mít tato rovnice řešení, musí síly f splňovat podmínku rovnováhy. Řešení pak dostaneme až na aditivní konstantu.



OBR.18

Předepíšeme nyní okrajovou podmínku $u_4 = 0$ (pravý konec vetkneme). Pak síly f_1 až f_4 mohou být libovolné. Stačí v soustavě (a) vynechat čtvrtý řádek a čtvrtý sloupec. Ze zmenšené soustavy

$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

vypočteme

$$\begin{aligned}
 u_1 &= (3f_1 + 2f_2 + f_3)/k \\
 u_2 &= (2f_1 + 2f_2 + f_3)/k \\
 u_3 &= (f_1 + f_2 + f_3)/k
 \end{aligned}
 \tag{c}$$

Poslední řádek rovnice (a) pak dává reakci

$$f_4 = -k u_3 = -(f_1 + f_2 + f_3) \tag{d}$$

Místo toho můžeme podmínku vazby zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = 0 \tag{e}$$

To je rovnice (8.2), takže $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $d = 0$.

Rovnice (8.7) má proto tvar

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{f}$$

Její řešení je

$$\begin{aligned}
 u_1 &= (3\lambda - 3f_4 - 2f_3 - f_2)/k \\
 u_2 &= (2\lambda - 2f_4 - f_3)/k \\
 u_3 &= (\lambda - f_4)/k \\
 \lambda &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4
 \end{aligned}
 \tag{g}$$

Když za λ dosadíme z poslední rovnice (g) do rovnic předchozích, dostaneme (c). Parametr λ má význam reakční síly zachycující všechny vnější síly f_1 až f_4 .

Konečně můžeme použít pokutové funkce. Podle (8.8) je $t = Nq$ a podle (8.9)

$$\Pi = \frac{1}{2} \{q\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \{q\} \tag{h}$$

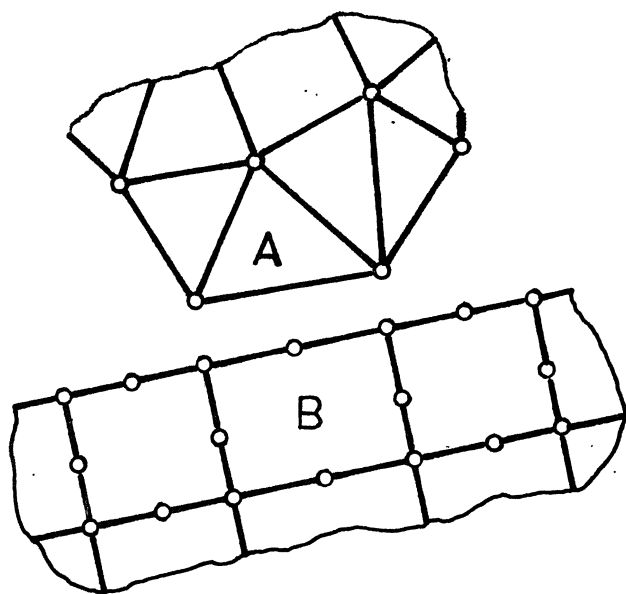
Tento člen můžeme sloučit s výrazem $\frac{1}{2} q^T K q$, takže dostaneme novou matici tuhosti zvětšenou o pokutové číslo v pravém dolním rohu. Místo rovnice (a) dostaneme

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & -k & k+\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Zvolíme-li α dostatečně velké, např. 10^8 , vyjde $u_4 \approx 0$.

Příklad 17

Dva sousední prvky označené na obr. 19 písmeny A a B nejsou spojeny, ale mají společnou délku l jedné strany. Zahrňte do výpočtu podmínku jejich spojení



OBR.19

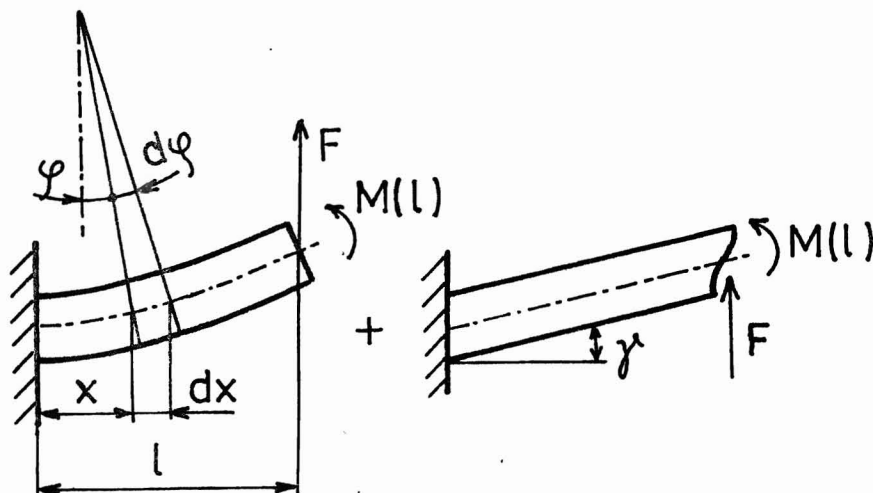
Po spojení budou mít prvky stejné posuvy u , v ve směrech os x , y , takže k Lagrangeovu potenciálu připojíme členy

$$\lambda_1 \int_0^l [u_A(s) - u_B(s)] ds \quad \lambda_2 \int_0^l [v_A(s) - v_B(s)] ds \quad (a)$$

Počet stupňů volnosti spojené soustavy nebude dán pouhým součtem stupňů volnosti obou těles, ale bude rozšířen o parametry λ_1 , λ_2 . Připojením členů (a) vynutíme na společné hranici kompatibilitu, avšak jen v integrálním smyslu (v průměru).

Příklad 18

Vypočteme matici tuhosti pro nosníkový prvek se čtyřmi stupni volnosti podle obr. 17, přičemž do výpočtu zahrneme i vliv smykových deformací.



OBR. 20

Průhyb nosníku vzniká jednak ohybem, jednak smykem (obr. 20). Za kladný průhyb vezmeme ten, který směřuje vzhůru (ve směru síly F). Takže

$$\frac{dw}{dx} = \varphi + \gamma \quad (a)$$

kde φ je úhel otočení průřezu a γ zkos. Přitom

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EJ} \quad \gamma = \frac{F}{GA_s} \quad (b)$$

A_s je redukovaná plocha průřezu. Protože $dM/dx = -F$ a $dF/dx = 0$ (délkové zatížení nepůsobí nebo je nahrazeno zobecněnými silami v uzlových bodech), bude

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} = 0 \quad (c)$$

Užitím rovnic (a) až (c) můžeme najít obě funkce $\varphi(x)$, $w(x)$, jsou-li dány geometrické okrajové podmínky. Předepíšeme-li např.

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 & \varphi(l) &= 0 \\ w(0) &= 1 & w(l) &= 0 \end{aligned} \quad (d)$$

dostaneme reakce v podporách, které mají význam prvků v matici tuhosti

$$k_{11} = R(0) \qquad k_{21} = M_R(0) = k_{12} \qquad (e)$$

Pro zobecněné posuvy a síly

$$q = [w_1 \quad \varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2]^T \qquad (f)$$

$$f = [F_1 \quad M_1 \quad F_2 \quad M_2]^T \qquad (g)$$

dostaneme popsaným způsobem maticí tuhosti

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \qquad (h)$$

v níž

$$k_{11} = \frac{12 EJ}{l^3} \left(1 - \frac{\phi}{1+\phi} \right)$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{6 EJ}{l^2} \left(1 - \frac{\phi}{1+\phi} \right)$$

$$k_{13} = k_{31} = -k_{11}$$

$$k_{14} = k_{41} = k_{12}$$

$$k_{22} = \frac{4 EJ}{l} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\phi}{1+\phi} \right)$$

$$k_{23} = k_{32} = -k_{12}$$

$$k_{24} = k_{42} = \frac{2 EJ}{l} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\phi}{1+\phi} \right)$$

$$k_{33} = k_{11}$$

$$k_{34} = k_{43} = -k_{12}$$

$$k_{44} = k_{22}$$

$$\phi = \frac{12 EJ}{GA_s l^2}$$

Matici tuhosti (h) můžeme zřejmě rozdělit na dvě části

$$K = K_0 + K_S \qquad (i)$$

První matice K_0 přísluší ohybu podle teorie štíhlých nosníků. Je to matice K , dosadíme-li $\varnothing = 0$. Je stejná jako matice (h) v příkladu 14. Druhá matice K_S představuje korekci na smyk. Je-li nosník štíhlý, je \varnothing malé a K_S lze zanedbat. To znamená, že převládají ohybové deformace nad smykovými. Je-li \varnothing velké, je tomu naopak. Činitel \varnothing tedy můžeme považovat za jakési pokutové číslo, kterým omezuje podíl čistě ohybových deformací v poměru k deformacím smykovým.

Je velmi poučné rozebrat tento příklad z hlediska Lagrangeova variačního principu. Celková potenciální energie vyjde s použitím (a) a (b) takto

$$U = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} GA_S \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right)^2 dx + W \quad (j)$$

Zde W představuje potenciální energii vnějších sil. Protože derivace ve funkcionálu (j) jsou nejvýše prvního řádu, můžeme použít lineární, po částech hladkou aproximaci dvou nezávislých funkcí $\varphi(x)$, $w(x)$. Dostaneme ovšem jinou, patrně méně přesnou, ale jednodušší matici tuhosti než podle (h). Vezmeme tedy

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_1 h_1(x) + \varphi_2 h_2(x) \\ w(x) &= w_1 h_1(x) + w_2 h_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

kde

$$h_1 = 1 - \frac{x}{l} \quad h_2 = \frac{x}{l} \quad (l)$$

Když tyto výrazy dosadíme do funkcionálu (j) a napíšeme podmínky pro existenci jeho stacionární hodnoty $\partial U / \partial \varphi_1 = 0$ atd., až $\partial U / \partial w_2 = 0$, dostaneme maticovou rovnici

$$(K_0 + K_S) q = f \quad (m)$$

v níž

$$q = [w_1 \quad \varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2]^T \quad (n)$$

$$f = [F_1 \quad M_1 \quad F_2 \quad M_2]^T \quad (o)$$

$$K_0 = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (p)$$

$$K_s = \frac{GA_s}{l} \begin{bmatrix} 1 & l/2 & -1 & l/2 \\ l/2 & l^2/3 & -l/2 & l^2/6 \\ -1 & -l/2 & 1 & -l/2 \\ l/2 & l^2/6 & -l/2 & l^2/3 \end{bmatrix} \quad (q)$$

Ukáže se však, že výpočet nevede k uspokojivým výsledkům. Protože jsme použili nezávislé aproximace dvou funkcí, které jsou ve skutečnosti vázány rovnicí (a), nedá naše metoda žádné ohraničení pro přesný výsledek. Lineární aproximace (k) je schopna modelovat jen po částech konstantní, nespojitý průběh ohybového momentu. Poměr $GA_s l^2/EJ$ má význam pokutového čísla. Je-li toto číslo velké, vynucuje si druhý člen na pravé straně rovnice (j) rovnost $dw/dx = \varphi$, přičemž však podle (k) je $dw/dx = \text{konst}$ a φ je spojitě. To znamená, že nosník se jeví nadměrně tuhý; pokutové číslo si tedy vynucuje nejen nulový zkos, ale vlivem přijaté aproximace i nulový průhyb. Říkáme, že se konečný prvek "uzamkne".

Nadměrně tuhosti matematického modelu daného nosníku při velkém poměru $GA_s l^2/EJ$ lze odpomoci tak, že integrály v rovnici (j) vyčíslíme nikoli analyticky, ale numericky užitím Gaussovy jednobodové numerické integrace.^{*)} Použijeme tedy hodnotu funkce uprostřed intervalu a násobíme ji délkou intervalu; není-li integrovaná funkce konstantní nebo lineární, je taková integrace zatížena numerickou chybou. Matice K_s pak vyjde singulární, a to

$$K_s = \frac{GA_s}{l} \begin{bmatrix} 1 & l/2 & -1 & l/2 \\ l/2 & l^2/4 & -l/2 & l^2/4 \\ -1 & -l/2 & 1 & -l/2 \\ l/2 & l^2/4 & -l/2 & l^2/4 \end{bmatrix} \quad (r)$$

S maticí (r) dává rovnice (m) velmi dobré výsledky i pro velmi rozdílné hodnoty pokutového čísla. Často lze takovýmto numerickým "zkažením" variační metody dospět při stejném dělení oblasti na konečné prvky k přesnějším výsledkům.

Abychom to ukázali na konkrétním případě, vypočteme průhyb krakorce na levém konci vetknutého a na pravém konci zatíženého letmou silou F . Nosník rozdělíme na dva konečné prvky a předepíšeme okrajové podmínky $w(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$. Výsledky shrnuje tab. 1.

^{*)} Kdybychom ke Gaussově integraci použili dva nebo více bodů, dostali bychom přesně nevyhovující matici (q).

Tab.1. Srovnání vypočtených deformací nosníku z příkladu 18

| Řešení | s maticí (q) | s maticí (r) | přesně |
|--------------------|--------------|--------------|--------|
| $GA_s l^2/EJ = 6$ | | | |
| EJW_2/Fl^3 | 1,0000 | 0,9167 | 0,9375 |
| $EJ\varphi_2/Fl^3$ | 1,6667 | 1,5000 | 1,5000 |
| EJW_3/Fl^3 | 3,3333 | 2,8333 | 3,0000 |
| $EJ\varphi_3/Fl^2$ | 2,6667 | 2,0000 | 2,0000 |
| $GA_s l^2/EJ = 60$ | | | |
| EJW_2/Fl^3 | 0,1417 | 0,7667 | 0,8583 |
| $EJ\varphi_2/Fl^2$ | 0,2500 | 1,5000 | 1,5000 |
| EJW_3/Fl^3 | 0,4500 | 2,5333 | 2,7000 |
| $EJ\varphi_3/Fl^2$ | 0,3333 | 2,0000 | 2,0000 |

Poznámka: l je délka prvku, $2l$ je délka nosníku

9. INTERPRETACE NAPĚŤOVÉHO POLE

Platí-li vztah (5.4) a zobecněný Hookeův zákon ve tvaru

$$\sigma - \sigma_0 = C(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (9.1)$$

kde σ_0 , resp. ε_0 je počáteční napětí, resp, počáteční přetvoření, dostaneme pro napětí uvnitř nějakého konečného prvku vzorec

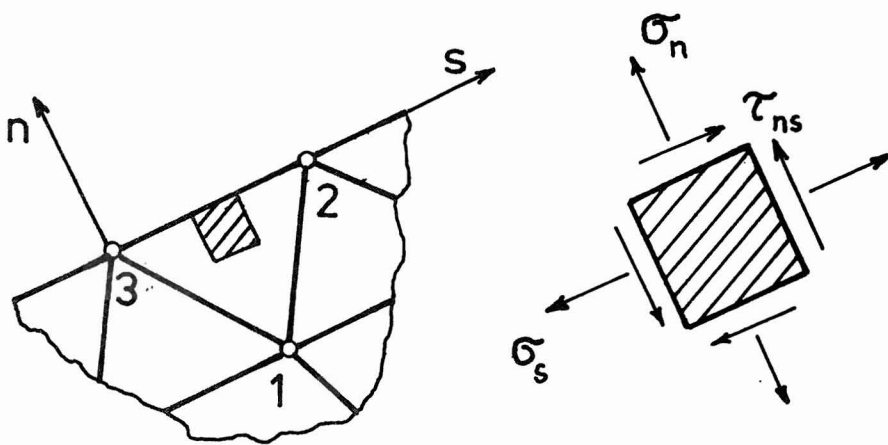
$$\sigma = \sigma_0 + C(Bq - \varepsilon_0) \quad (9.2)$$

V něm q značí vektor zobecněných posuvů v uzlových bodech prvku. Ten získáme předchozím řešením úlohy. Je-li řešení přibližné a zakládá-li se na Lagrangeově variačním principu, nespĺňuje napětí vypočtené podle (9.2) obecně ani zákon akce a reakce mezi jednotlivými prvky (s výjimkou uzlových bodů, kde se přenos sil soustřeďuje), ani okrajové podmínky na části Γ_σ povrchu. Interakce mezi prvky vzájemně a mezi prvky a okolím se odehrává jedině v uzlových bodech. Např. při řešení rovinné úlohy užitím trojúhelníkových konečných prvků s lineárními tvarovými funkcemi dosta-

neme v každém prvku konstantní napětí, jež vykresluje skutečné napěťové pole mozaikovitě.

Aby se získal věrnější obraz napjatosti bez nadměrného zjemňování sítě konečných prvků, přisuzuje se vypočtené napětí těžištěm prvků a takto získanými body se pak prokládá nějaká hladká plocha, která v zájmové, nepřilíživě velké oblasti lépe aproximuje spojitý průběh napětí. To však nemusí být nejvhodnější způsob. Vyžaduje dodatečnou manipulaci s vypočtenými hodnotami, která se neobejde bez subjektivních rozhodnutí řešitele. Ostatně k tomu, abychom vypočtená napětí přisuzovali právě těžištěm prvků, nemáme žádný objektivní důvod. Uvedeme vhodnější metody, které z vypočteného spojitého pole posuvů dají automaticky i spojité pole napětí. Jde-li o prvek umístěný na okraji zájmové oblasti (obr. 21), můžeme vypočítat poměrné obvodové prodloužení

$$\varepsilon_A = \frac{u_2 - u_3}{l} \quad (9.3)$$



OBR. 21

Je-li známo napětí σ_n působící na hranici Γ , vypočteme z Hookeova zákona obvodové napětí; pro rovinnou napjatost bude

$$\sigma_A = E \varepsilon_A + \mu \sigma_n \quad (9.4)$$

Je-li ε_A a σ_n spojitou funkcí souřadnice s , je spojitě i vypočtené obvodové napětí σ_A . A právě obvodové napětí na okraji definiční oblasti nás zpravidla nejvíce zajímá, neboť tam bývá i maximální namáhání. Ostatně k iniciaci trhliny dochází nejčastěji právě na povrchu částí.

Nevýhodou tohoto postupu je, že prodloužení (9.3) a napětí (9.4) musíme počítat v lokálních souřadnicích s, n , a že se tato metoda týká jen okraje definiční oblasti.

Spojité napěťové pole lze však získat jednoduše i v celé vyšetřované oblasti. Nejprve vypočteme napěťové vektory σ podle rovnice (9.2). Pak v každém uzlu vypočteme vážený průměr napětí $\bar{\sigma}$ z hodnot vektorů σ ze všech prvků, které se v daném uzlu stýkají. Bude

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sum w_e \sigma_e}{\sum w_e} \quad (9.5)$$

Indexem e rozlišujeme prvky, které se stýkají v i -tém uzlu, w_e jsou váhové koeficienty. Takto vypočtené hodnoty napětí v uzlech interpolujeme užitím stejných tvarových funkcí, jaké jsme použili k aproximaci posuvů. V určitém konečném prvku (pro určité e) bude

$$\bar{\sigma}_e(x) = H(x) s_e \quad (9.6)$$

Vektor s_e se skládá se subvektorů $\bar{\sigma}_i$ příslušných uzlovým bodům e -tého prvku, jehož napjatost je popsána vektorem $\bar{\sigma}_e(x)$, $H(x)$ je matice tvarových funkcí. Pole napětí (9.6) je nyní spojité, ale nevyhovuje podmínkám rovnováhy sil v uzlech. Odpovídají mu totiž vratné síly r_e , které vypočteme pomocí principu virtuálních prací z rovnice

$$\int_{\Omega_e} \delta \varepsilon_e^T \sigma_e d\Omega_e = \delta q_e^T r_e \quad (9.7)$$

Ze vztahu (5.4) vychází $\delta \varepsilon_e^T = \delta q_e^T B^T$, takže

$$r_e = \int_{\Omega_e} B^T \sigma_e d\Omega_e \quad (9.8)$$

Když tyto vektory načteme do výsledného vektorů sil r , bude se obecně lišit od daných vnějších sil f . Rozdíl $r-f$ představuje nevyvážené síly, které musíme odečíst. To znamená, že přičteme síly $f-r$. Tím obnovíme rovnováhu v uzlech, ale způsobíme dodatečné přetvoření provázené posuvy uzlů Δq . Vypočteme je z rovnice

$$K \Delta q = f - r \quad (9.9)$$

Nové posuvy jsou

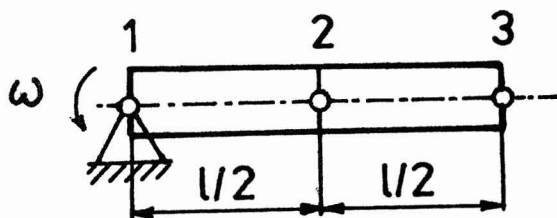
$$q_{\text{nové}} = q_{\text{staré}} + \Delta q \quad (9.10)$$

Odtud dosadíme do (5.4), (9.2), (9.5) a (9.6). Není-li Δq zanedbatelné, postup zopakujeme. Zpřesňují se tedy zároveň napětí i posuvy. Posuvy jsou pak spíše přeceněny než nedoceněny.

Jiný způsob zpřesnění okrajových hodnot hledaných funkcí je užití smíšených interpolačních funkcí, které umožňují splnit přesně podstatné i přirozené okrajové podmínky.^{*)}

Příklad 19

Prizmatické rameno rotuje úhlovou rychlostí ω kolem uzlového bodu 1 (obr. 22). Je rozděleno na dva konečné prvky s lineárními tvarovými funkcemi. Průřez tyče je A , modul pružnosti v tahu E , hustota ρ .



OBR. 22

Z teorie pružnosti víme, že v daném rotujícím ramenu vznikají posuvy

$$u(x) = \frac{\omega^2 \rho l^3}{2E} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (a)$$

a napětí

$$\sigma(x) = \frac{\omega^2 \rho l^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (b)$$

Hodnoty (a) a (b) použijeme k srovnání s přibližným řešením, které získáme metodou konečných prvků. Nechť prvek zabírá obecně interval $a \leq x \leq b$, kde x je vzdálenost od osy rotace (obr. 23). Jeho délku označíme $L = x_k - x_j = b - a$. Aproximace posuvů bude

$$u(x) = \left[\frac{b-x}{L} \quad \frac{x-a}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (c)$$

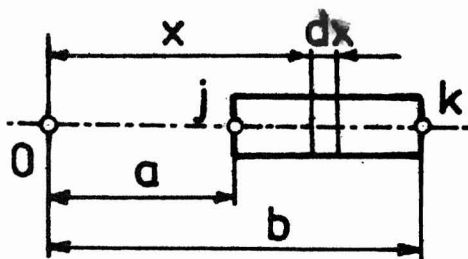
a poměrné prodloužení

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (d)$$

Je tedy podle (5.4)

$$[B] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (e)$$

^{*)} HALL, C.A. - HEINRICH, J.: A finite element that satisfies natural boundary conditions exactly. - "Journal of the Institute of Mathematics and its Applications" 21 (1978), s. 237-250.



OBR. 23

Tato matice zprostředkovává transformaci posuvů uzlových bodů na poměrné prodloužení. Matice tuhosti vyjde podle (5.8)

$$\begin{aligned}
 [K] &= \int_a^b [B]^T [C] [B] A dx = \frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (f)
 \end{aligned}$$

Objemové odstředivé síly $X = \omega^2 \rho x$ působící v objemu $A dx$ přepočteme na síly v uzlových bodech. Musí být

$$- \int_a^b u(x) X A dx = -u_j f_j - u_k f_k \quad (g)$$

Výraz (g) představuje potenciální energii odstředivých sil. Dosazením z rovnice (c) do (g) dostaneme

$$\begin{aligned}
 f_j &= \frac{\omega^2 \rho A}{6L} (b^3 - 3ba^2 + 2a^3) \\
 f_k &= \frac{\omega^2 \rho A}{6L} (2b^3 - 3ab^2 + a^3) \quad (h)
 \end{aligned}$$

Součet těchto sil dává celkovou odstředivou sílu, která má velikost

$$\omega^2 \rho A L (b+a)/2 = \omega^2 \rho A (b^2 - a^2)/2$$

Pro první konečný prvek (1 - 2) bude tedy platit, že

$$2 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 \rho A L^2}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

a pro druhý prvek (2 - 3)

$$2 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 \rho A L^2}{24} \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad (j)$$

Pro soustavu obou prvků dostaneme načtením do společných maticových polí soustavu rovnic ve tvaru

$$\frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 \rho A l^2}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad (k)$$

Předepíšeme okrajovou podmínku $u_1 = 0$, tj. vynecháme první sloupec i řádek. Vyjde

$$\frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 \rho A l^2}{24} \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad (l)$$

Tuto rovnici označíme zkráceně $Kq = f$; řešením dostaneme

$$q = K^{-1}f = \frac{\omega^2 \rho l^3}{48E} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad (m)$$

čili

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 \rho l^3}{48E} \begin{Bmatrix} 11 \\ 16 \end{Bmatrix} \quad (n)$$

Napětí vypočteme z Hookeova zákona $\sigma = E\varepsilon$. Protože ε vyšlo podle (d) po prvcích konstantní, bude vypočtené napětí nespojité

$$\sigma_{12} = \frac{11}{24} \omega^2 \rho l^2 \quad \sigma_{23} = \frac{5}{24} \omega^2 \rho l^2 \quad (o)$$

Předepíšeme hodnoty napětí v uzlu 1 a 3, neboť ty můžeme vypočítat přesně předem, aniž úlohu řešíme. Bude

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \omega^2 \rho l^2 \quad \sigma_3 = 0 \quad (p)$$

Podle (9.5) tedy bude

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \frac{1}{2} \omega^2 \rho l^2 \\ \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{11}{24} + \frac{5}{24} \right) \omega^2 \rho l^2 = \frac{1}{3} \omega^2 \rho l^2 \\ \bar{\sigma}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (q)$$

Interpolovaná napětí podle vztahu (9.6) a rovnice (c) jsou

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(x) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{x}{l} \right) \omega^2 \rho l^2 \\ \sigma_{23}(x) &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \omega^2 \rho l^2 \end{aligned} \quad (r)$$

S použitím rovnice (e) vypočteme ze vztahu (9.8) síly v uzlech

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \frac{5}{12} \omega^2 \rho A l^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} \omega^2 \rho A l^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (s)$$

Načtením do společného vektoru dostaneme

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 \rho A l^2}{12} \begin{Bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (t)$$

Zbytkové nevyvážené síly jsou $-(f-r)$, kde

$$f-r = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 \rho A l^2}{24} \begin{Bmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (u)$$

První řádek nebudeme potřebovat, neboť posuvy počítáme ze zmenšené soustavy (l) a nikoli z rovnice (k). Opravy vypočteme z rovnice (9.9), totiž z rovnice

$$\frac{2EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 \rho A l^2}{24} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (v)$$

Vyjde

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2 \rho l^3}{48E} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (w)$$

Z opravených hodnot $u_1 + \Delta u_1$, $u_2 + \Delta u_2$ vyjdou nové hodnoty napětí

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho l^2, \quad \bar{\sigma}_{23} = \frac{1}{4} \omega^2 \rho l^2 \quad (x)$$

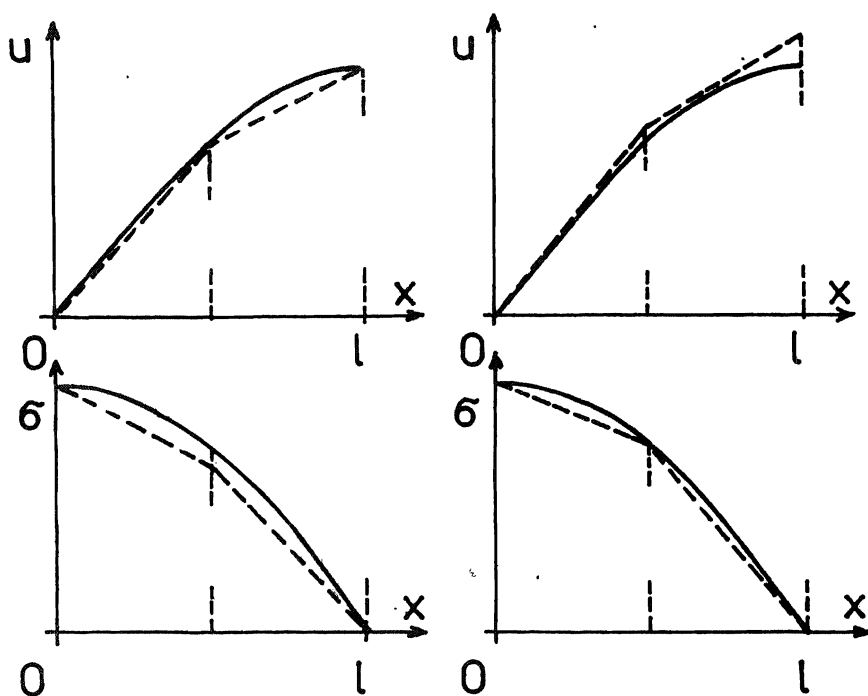
a průměrné hodnoty v uzlech

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{2} \omega^2 \rho l^2, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{3}{8} \omega^2 \rho l^2, \quad \bar{\sigma}_3 = 0 \quad (y)$$

Výsledky jsou porovnány v tab. 2 a na obr. 24. Přesné řešení je vytaženo plně, přibližné čárkovaně. Je zřejmé, že průběh napětí je po opravě přesnější, v uzlových bodech vyjdou dokonce přesné hodnoty. Deformace jsou však nyní větší než přesné.

Tab. 2 Vypočtené hodnoty z příkladu 19

| Hodnota | přesná | přibližná | opravená |
|--------------------------------------|--------|-----------|----------|
| $E u_2 / \omega^2 \rho l^3$ | 0,2292 | 0,2292 | 0,2500 |
| $E u_3 / \omega^2 \rho l^3$ | 0,3333 | 0,3333 | 0,3750 |
| $\bar{\sigma}_2 / \omega^2 \rho l^2$ | 0,3750 | 0,3333 | 0,3750 |



ŘEŠENÍ PŘIBLIŽNÉ - ŘEŠENÍ OPRAVENÉ

OBR. 24

10. PARAZITNÍ SMYK U LINEÁRNÍCH PRVKŮ

Obdélníkový element se čtyřmi uzly ve vrcholech, znázorněný na obr. 11, se zdá být velmi vhodný k modelování např. rovinného ohybu nosníku obdélníkového průřezu, u něhož lze přepokládat buď rovinnou napjatost, nebo rovinné přetvoření. S použitím transformace

$$\xi = \frac{x}{a} \qquad \eta = \frac{y}{b} \qquad (10.1)$$

dostaneme tuto bilineární aproximaci

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= [H(\xi, \eta)] \{u\} \\ v(\xi, \eta) &= [H(\xi, \eta)] \{v\} \end{aligned} \qquad (10.2)$$

Přitom $\{u\} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$, $\{v\} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]^T$ a řádková matice $[H]$ má prvky

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ h_2 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \\ h_3 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ h_4 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Při čistém ohybu souměrném k ose η bude $u_1 = -\bar{u}$, $u_2 = \bar{u}$, $u_3 = \bar{u}$, $u_4 = \bar{u}$. Posuvy $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$. Rovnice (10.2) pak dají

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= -\bar{u} \xi \eta \\ v(\xi, \eta) &= 0 \end{aligned} \quad (10.4)$$

místo správných výrazů

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= -\bar{u} \xi \eta \\ v(\xi, \eta) &= -\frac{a\bar{u}}{2b} (1 - \xi^2) + \mu \frac{b\bar{u}}{2a} (1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (10.5)$$

které dostáváme z teorie pružnosti. Tak se stane, že místo deformace vyznačené na obr. 25 dostaneme deformaci podle obr. 26. Rovnice (10.5) dává správně nulový zkos

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (10.6)$$

kdežto rovnice (10.4) dá parazitní zkos

$$\gamma_{xy} = -\frac{\bar{u}}{b} \xi = -\frac{\bar{u}}{ab} x \quad (10.7)$$

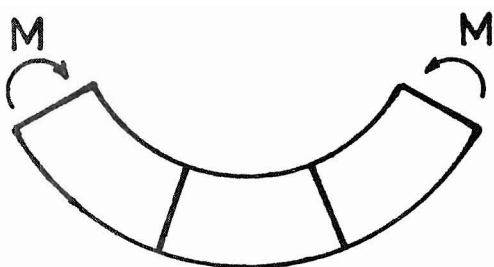
a jemu odpovídající parazitní smykové napětí $\sigma \gamma_{xy}$, které ve skutečnosti při čistém ohybu neexistuje. Je-li poměr a/b velký, znehodnotí tento parazitní smyk výpočet. Tomu lze čelit tím, že se k interpolačním funkcím přibere další tvarová funkce h_5 s parametrem λ_1 , resp. λ_2 . Bude

$$\begin{aligned} u &= -\bar{u} \xi \eta + \lambda_1 h_5(\xi, \eta) \\ v &= \lambda_2 h_5(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (10.8)$$

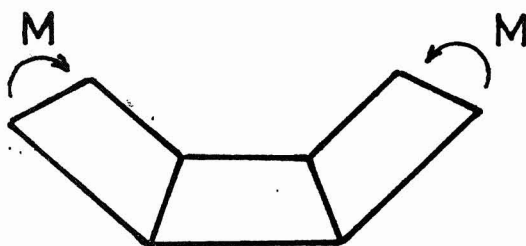
"Bublinové" tvarové funkce

$$h_5(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (10.9)$$

jsme nepřisoudili žádný uzlový bod. To znamená, že parametry λ_1 , λ_2 nemají význam posuvu nějakého uzlového bodu. To není nic neobvyklého, s tím jsme se již setkali v příkladu 10. Parametry λ_1 , λ_2 můžeme předem "statickou kondenzací" na úrovni prvku vyloučit, takže počet stupňů volnosti prvku se nezmění.



OBR. 25



OBR. 26

Zdá se, že bychom pořídili nejlépe, kdybychom vzali do výpočtu tvarové funkce $(1 - \xi^2)$ a $(1 - \eta^2)$ místo (10.9), takže by bylo

$$\begin{aligned} u &= [H] \{q_1\} + \lambda_1 (1 - \xi^2) + \lambda_2 (1 - \eta^2) \\ v &= [H] \{q_2\} + \mu_1 (1 - \xi^2) + \mu_2 (1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (10.10)$$

Tato aproximace by v sobě zahrnovala přesné řešení (10.5) pro čistý ohyb. Má však jednu nevýhodu, nedává totiž kompatibilní prvek. Funkce $(1 - \xi^2)$, $(1 - \eta^2)$ nevymizí všude na okraji a koeficienty λ_1 až μ_2 jsou nezávislé parametry. Posuvy bodů na společné hranici sousedních prvků nemusí proto vyjít stejné.

Příklad 20

Řešte úlohu čistého ohybu prvku znázorněného na obr. 11 s aproximací posuvů (10.8) a (10.9).

Uvedeme jen výsledek. Ohybový moment je ekvivalentní se silami v uzlech $f_1 = f_3 = -f/4$, $f_2 = f_4 = f/4$. Celková práce vykonaná těmito silami při ohybu je

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 f_i u_i = \frac{1}{2} f \bar{u} \quad (\text{a})$$

Vyjde

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & 0 \\ k_{13} & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{b})$$

a odtud $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(k_{31}/k_{33}) \bar{u}$. Dosazením těchto výrazů do prvního řádku soustavy (b) dostaneme tuhost

$$\frac{f}{\bar{u}} = k_{11} - \frac{k_{13} k_{31}}{k_{33}} \quad (\text{c})$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (c) představuje zlepšení, které přineslo zahrnutí tvarové funkce (10.9) do výpočtu. Přitom vyšlo

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{4}{3} \left(E^* \frac{b}{a} + G \frac{a}{b} \right) \\ k_{13} &= k_{31} = \frac{16}{9} (\mu E^* + G) \\ k_{22} &= \frac{128}{45} \left(E^* \frac{b}{a} + G \frac{a}{b} \right) \\ k_{33} &= \frac{128}{45} \left(E^* \frac{a}{b} + G \frac{b}{a} \right) \end{aligned} \quad (\text{d})$$

$$E^* = \frac{E}{1-\mu^2} \quad (\text{e})$$

11. NEPRAVÁ SINGULARITA MATICE TUHOSTI

Vrátíme se ještě k obdélníkovému prvku znázorněnému na obr. 11 a budeme předpokládat, že posuvy u , v jsou aproximovány bilineárními tvarovými funkcemi podle vztahů (10.1) až (10.3). Vektor poměrných deformací ε dostaneme derivováním posuvů podle známých Cauchyho vztahů, takže bude

$$\varepsilon = B q \quad (\text{11.1})$$

kde $B(\xi, \eta)$ je obdélníková matice typu 3×8 a q je vektor posuvů uzlových bodů typu 8×1 . S pomocí Hookeova zákona $\sigma = C \varepsilon$ dostaneme deformační energii nahromaděnou v prvku (elementu) o ploše Ω_e

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \varepsilon^T \sigma d\Omega = \frac{1}{2} q^T \int_{\Omega_e} B^T C B d\Omega q \quad (\text{11.2})$$

Je to kvadratická forma vytvořená s maticí tuhosti prvku

$$k_e = \int_{\Omega_e} B^T C B d\Omega \quad (11.3)$$

Obdobné integrály dostáváme i při výpočtu matic tuhosti konečných prvků jiných typů. Není-li analytický výpočet integrálu (11.3) snadný, můžeme jej svěřit počítači. Jestliže předtím transformujeme prvek do roviny ξ, η tak, abychom dostali čtverec $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$ nebo jiný jednoduchý obrazec, jak je to běžné u izoparametrických prvků, je nejvýhodnější Gaussova numerická integrace. Vzniká otázka, kolik Gaussových integračních bodů máme volit. Chceme-li dostat přesnou hodnotu integrálu ("přesnou" s počítačovou přesností), musí být těchto bodů jistý minimální počet závislý na stupni polynomů obsažených v integrandu. Zvětšování počtu integračních bodů zdražuje výpočet a nic se tím nezíská. Snížíme-li počet integračních bodů pod uvedenou minimální mez, dosáhneme často dvou příznivých efektů současně, totiž zlevnění a zpřesnění výpočtu. Zlevnění je samozřejmé. Zpřesnění spočívá v tom, že nedokonalou numerickou integrací prvek "změkne". Odvodíme-li matici tuhosti rigorózně, vyjdou z Lagrangeova variačního principu posuvy menší nebo nejvýš rovné přesným posuvům. Při nedokonalé integraci (tj. při integraci s malým počtem integračních bodů) se stává, že v integračních bodech má některá z tvarových funkcí malou nebo dokonce nulovou hodnotu, takže se v matici tuhosti prakticky neprojeví nebo projeví málo. Prvek se pak jeví poddajnější, což může přispět k lepšímu výsledku. Tímto numerickým "pokažením" matice tuhosti se však připravujeme o vlastnost ohraničení přesného výsledku, tj. nebudeme už vědět, zda vypočtené hodnoty jsou stále ještě menší nebo už větší než přesné. Přeženeme-li tuto redukci počtu Gaussových integračních bodů, můžeme dostat výsledky buď nesmyslné, nebo vůbec žádné. K žádným výsledkům se nedopracujeme tehdy, stane-li se globální matice tuhosti singulární. Protože k tomu došlo numerickou cestou a ne z fyzikálních příčin, označili jsme tuto singularitu matice tuhosti jako "nepravou".

Prvek na obr. 11 s bilineárními tvarovými funkcemi vede na integrand v rovnici (11.3), který obsahuje kvadratické funkce proměnných ξ, η . Proto k přesné integraci postačí 2x2 Gaussovy integrační body. Použijeme-li jen jednoho integračního bodu, dá integrál (11.3) s maticí $B(\xi, \eta)$ hodnotu

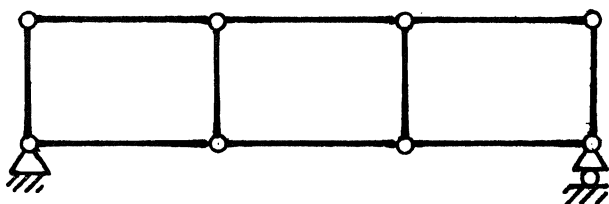
$$k_e^* = 4 B^T(0,0) C B(0,0) |J| \quad (11.4)$$

Zde $|J|$ je jakobián transformace (10.1), který vyjde v tomto případě konstantní.^{*)} Stane-li se, že z prvků sestavíme strukturu znázorněnou

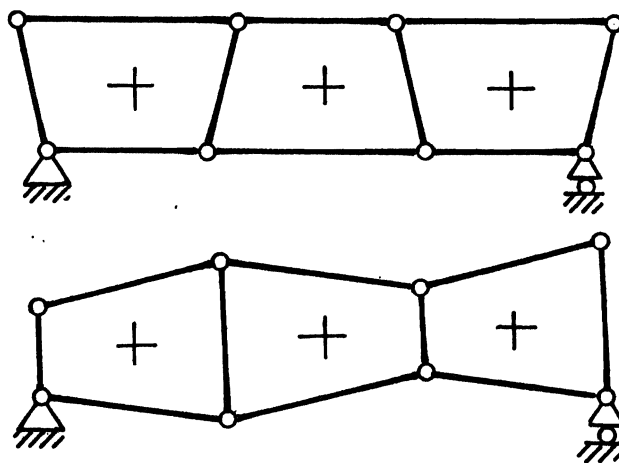
^{*)} Připomeneme, že platí

$$\iint f[x, y] dx dy = \iint f[x(\xi), y(\xi)] |J| d\xi d\eta.$$

Plocha prvku na obr. 11 je $\Omega_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J| d\xi d\eta = 4|J| = 4ab$.



OBR.27



OBR.28

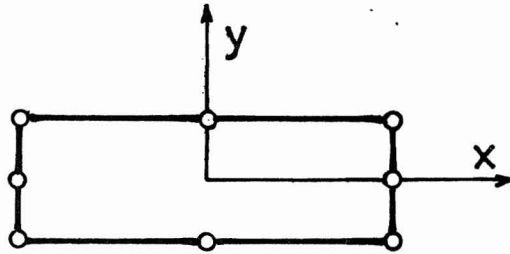
na obr. 27 a použijeme matice (11.4), bude globální matice tuhosti 1 po předepsání okrajových podmínek singulární, neboť lichoběžníkovým deformacím uvedeným na obr. 28 nebude příslušet žádná deformační energie (při výpočtu jednobodovou Gaussovou integrací). Abychom tomu zabránili, musíme bychom konstrukci uložit staticky neurčitě nebo alespoň v jednom z prvků použít čtyř (tj. 2×2) integračních bodů.

Příklad 21

Kolik Gaussových integračních bodů musíme použít, abychom dostali rigorózní matice tuhosti u rovinného prvku s osmi uzlovými body, znázorněného na obr. 29?

K aproximaci můžeme použít polynom nejvýše s osmi koeficienty, tedy

$$\begin{aligned}
 P(x, y) = & a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + \\
 & + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 x y^2
 \end{aligned}
 \tag{a}$$



OBR. 29

Koeficienty a_0 až a_7 určíme tak, aby pro tvarovou funkci $h_i(x, y)$ bylo

$$h_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (\text{b})$$

kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta.^{*)} Poměrné deformace ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} budou pak obsahovat nejvýš kvadratické funkce, takže integrand v rovnici (11.3) bude polynom čtvrtého stupně. Protože s počtem n Gaussových integračních bodů můžeme přesně integrovat polynom až do stupně $2n-1$, tj. pro $n = 2$ polynom až třetího stupně a pro $n = 3$ polynom až pátého stupně, musíme použít devět integračních bodů (tj. 3×3).

Takto exaktně vypočtené matice tuhostí použijeme k řešení úlohy o rovnoměrně tažené desce zakreslené na obr. 30. Má rozměr $6\text{ m} \times 2\text{ m}$ a na pravé straně je zatížena konstantním délkovým zatížením $q = 300\text{ N/m}$. Protože prvek je kompatibilní, je posuv $u(x=3, y)$ určován pouze posuvy uzlů u_1, u_2, u_3 . Může to být jen kvadratická parabola

$$u(3, y) = u_1 y(y-1)/2 + u_2(1-y^2) + u_3 y(y+1)/2 \quad (\text{c})$$

Pro ekvivalentní síly v uzlech musí platit princip virtuálních prací, podle něhož

$$\int_{-1}^1 q \delta u dy = f_1 \delta u_1 + f_2 \delta u_2 + f_3 \delta u_3 \quad (\text{d})$$

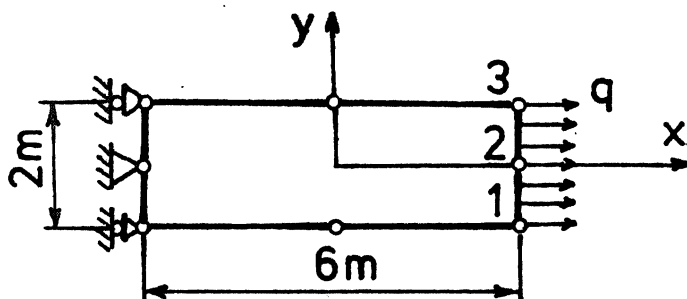
Přitom

$$\delta u = \delta u_1 y(y-1)/2 + \delta u_2(1-y^2) + \delta u_3 y(y+1)/2 \quad (\text{e})$$

Protože variace je libovolná, musí vztah (d) platit identicky. Porovnáním koeficientů vyjde

^{*)} Zvolíme tedy $h_i(x, y) = P(x, y)$ tak, aby platilo $P(x_j, y_j) = 0$ pro $i \neq j$, $P(x_i, y_i) = 1$.

$$f_1 = f_3 = q/3 \quad f_2 = 4q/3 \quad (f)$$



OBR. 30

Velmi často se v takových případech volí náhrada spojitého rovnoměrného zatížení osamělými silami "od oka"

$$f_1 = f_3 = \frac{q}{2} \quad f_2 = q \quad (g)$$

Chybu, která tím vzniká, můžeme posoudit z tab. 3, v níž uvádíme hodnoty napětí vypočtené v Gaussových integračních bodech A ($3\sqrt{0,6}$; $\sqrt{0,6}$), B ($3\sqrt{0,6}$; 0), C ($3\sqrt{0,6}$; $-\sqrt{0,6}$).

Tab. 3 Napětí v Gaussových integračních bodech v desce na obr. 30

| Bod | Síly podle (f) | | | Síly podle (g) | | |
|-----|----------------|------------|-------------|----------------|------------|-------------|
| | σ_x | σ_y | τ_{xy} | σ_x | σ_y | τ_{xy} |
| A | 300 | 0 | 0 | 301,41 | -7,85 | 24,72 |
| B | 300 | 0 | 0 | 295,74 | -9,55 | 0 |
| C | 300 | 0 | 0 | 301,74 | -7,85 | -24,72 |

12. MOHROVY VĚTY A GREENOVA FUNKCE

Pro ohyb štíhlého nosníku platí, jak známo, diferenciální rovnice

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ(x)} \quad (12.1)$$

Kladný průhyb y směřuje dolů, osa x zleva doprava, kladný ohybový moment M způsobuje tah ve spodním vláknu. Označme pravou stranu této nehomogenní diferenciální rovnice zkráceně $-m(x) = -M(x)/EI(x)$. Tuto veličinu nazveme redukovaný ohybový moment. Pak bude $y''(x) + m(x) = 0$. Je-li to pravda, musí být

$$\int_0^l W(x) [y''(x) + m(x)] dx = 0 \quad (12.2)$$

pro jakoukoli váhovou funkci $W(x)$, která nenabývá na definičním intervalu $\langle 0, l \rangle$ nikde nekonečné hodnoty. Rovnice (12.2) bude splněna, bude-li řešení $y(x)$ přesné. Použijeme-li nějaké přibližné aproximace, nebude integrál v rovnici (12.2) nulový, ale aproximace bude pravděpodobně tím lepší, čím bude absolutní hodnota tohoto integrálu menší. Kvalita výsledku bude záležet nejen na zvolené aproximaci, ale také na zvolené váhové funkci $W(x)$. Na této myšlence se zakládá metoda vážených reziduí, kterou se však nyní nechceme zabývat.

Budeme tedy předpokládat, že $y(x)$ je přesné řešení a rovnice (12.2) platí beze zbytku. První člen rovnice (12.2) můžeme integrovat per partes. Dostaneme

$$\int_0^l W y'' dx = [W y']_0^l - \int_0^l W' y' dx \quad (12.3)$$

Opakováním tohoto postupu vyjde

$$\int_0^l W y'' dx = [W y']_0^l - [W' y]_0^l + \int_0^l W'' y dx \quad (12.4)$$

O váhové funkci $W(x)$ jsme dosud nic nerozhodli. S přihlédnutím k rovnici (12.4) a k tomu, že řešení $y(x)$ dosud neznáme, zvolíme váhovou funkci tak, aby platilo $W'' = 0$. To znamená, že bude

$$W(x) = C_0 + C_1 x \quad (12.5)$$

Poslední člen v rovnici (12.4) v důsledku naší volby odpadne. Zbývající členy rozepíšeme a dosadíme do rovnice (12.2). Vyjde

$$\begin{aligned} (C_0 + C_1 l) y'(l) - C_0 y'(0) - C_1 y(l) + C_1 y(0) + \\ + \int_0^l (C_0 + C_1 x) m(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (12.6)$$

Řešení (12.6) obsahuje okrajové hodnoty hledané funkce a její derivace a kromě toho dvě integrační konstanty. Pro ně musí vztah (12.6) platit iden-

ťicky, neboť jediné omezení, které klademe na váhovou funkci $w(x)$, je požadavek linearity (12.5). Porovnáním koeficientů u konstant C_0 , C_1 dostaneme

$$y'(0) - y'(\ell) = \int_0^{\ell} m(x) dx \quad (12.7)$$

$$y(\ell) - y(0) - \ell y'(\ell) = \int_0^{\ell} x m(x) dx \quad (12.8)$$

To jsou však dobře známé Mohrovy věty o momentové ploše.^{*)}

Jsou-li známy podstatné okrajové podmínky, dají tyto rovnice zbývající (neznámé) okrajové hodnoty funkcí $y(x)$, $y'(x)$.

Pozoruhodné na této spekulativní úvaze je to, že okrajové hodnoty hledané funkce dostaneme, aniž jsme řešili úlohu uvnitř definiční oblasti. Kdyby se podařilo dosáhnout stejného efektu i u dvourozměrných a třírozměrných úloh, znamenalo by to např., že bychom získali hodnoty hledaných funkcí na povrchu tělesa, aniž jsme řešili prostorovou úlohu. Tak by se stalo, že třeba napjatost v povrchové vrstvě tělesa by bylo možné určit řešením v dvourozměrné oblasti, a tím obejít nesnáz s rozměrností prostorových úloh řešených metodou konečných prvků. Tato jednoduchá myšlenka se stala základem metod okrajové integrace.

Zajímáme-li se také o průhyb nosníku uvnitř intervalu, stačí, zvolíme-li váhovou funkci tak, aby platilo

$$w''(x) = -\delta(\xi - x) \quad (12.9)$$

Zde $\delta(x)$ je Diracova (zobecněná) funkce mající tu vlastnost, že

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pro } x \neq 0$$

$$\delta(x) = \infty \quad \text{pro } x = 0$$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1$$

Řešení rovnice (12.9) nyní závisí na okrajových podmínkách. Bude-li např. nosník na obou koncích kloubově podepřený, bude $y(0) = y(\ell) = 0$; zvolíme také $w(0) = w(\ell) = 0$. Integrací (12.9) vyjde pro $x, \xi \in \langle 0, \ell \rangle$

$$w'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\xi}{\ell} & \text{pro } x < \xi \\ -\frac{\xi}{\ell} & \text{pro } x > \xi \end{cases} \quad (12.10)$$

a další integrací

^{*)} Najdeme je např. v knize TIMOŠENKO, Š.: Pružnost a pevnost, díl I. TVV, Praha 1951, v čl. 34, kde byly odvozeny zcela jiným způsobem.

$$W(x) = G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \frac{\xi}{l}) & \text{pro } x \leq \xi \\ \xi(1 - \frac{x}{l}) & \text{pro } x \geq \xi \end{cases} \quad (12.11)$$

Funkce $W(x)$ zřejmě závisí také na souřadnici ξ bodu, v němž se Diracova funkce $\delta(\xi - x)$ stává singulární. Označili jsme ji proto $G(x, \xi)$. Je to Greenova funkce příslušná k diferenciálnímu výrazu $-y''$ a okrajovým podmínkám $y(0) = y(l) = 0$. Dosadíme-li tuto váhovou funkci do rovnice (12.4), odpadnou členy s hranatými závorkami a zbude

$$\int_0^l W y'' dx = - \int_0^l y(x) \delta(\xi - x) dx = -y(\xi) \quad (12.12)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu spolu s funkcí $W(x) = G(x, \xi)$ do (12.2), vyjde průhyb v libovolném místě $x = \xi$ nosníku

$$y(\xi) = \int_0^l G(x, \xi) m(x) dx \quad (12.13)$$

Výhodou tohoto způsobu řešení je, že Greenova funkce (12.11) je stejná pro všechny kloubově podepřené nosníky, takže ji můžeme vyšetřit předem. Pak místo řešení diferenciální rovnice (12.1) počítáme pouze integrál (12.13). Jistě nás nepřekvapí, že Greenova funkce hraje v metodách okrajové integrace důležitou roli.

Příklad 22

Vyslovte věty o momentové ploše vyjádřené rovnicemi (12.7) a (12.8).

Je-li úhel φ , který svírá tečna k ohybové čáře $y(x)$ s osou x malý, je $\tan \varphi = y'(x) \doteq \varphi$. Za tohoto předpokladu zní věty (12.7), resp. (12.8) takto:

(12.7) Úhel, který spolu svírají tečny ve dvou bodech ohybové čáry, se rovná redukované momentové ploše mezi ordinálami (pořadnicemi) těchto bodů.

(12.8) Tečny ve dvou bodech ohybové čáry vytínají na ordinále jednoho z nich úsek, který se rovná statickému momentu redukované momentové plochy k této ordinále, přičemž redukovaná momentová plocha je ohraničena oběma ordinálami.

Redukovaná momentová plocha je plocha pod křivkou $m(x) = M(x)/EJ(x)$.

Příklad 23

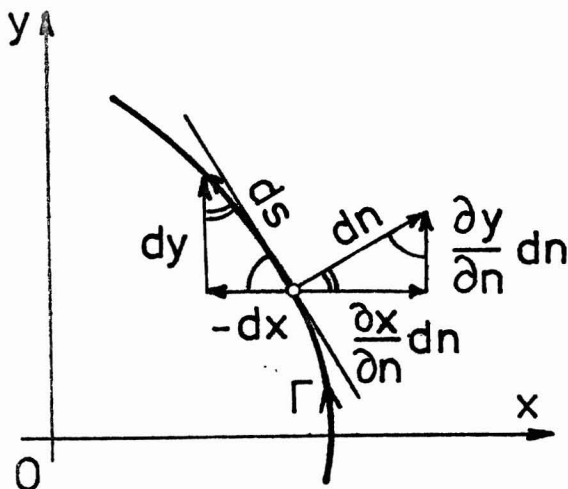
Odvoďte Greenovu identitu pro funkce $W(x, y)$, $\varphi(x, y)$, které jsou v uzavřené oblasti Ω s hranicí Γ spojitě až do druhých derivací včetně. Greenovu identitu píšeme ve tvaru

$$\iint_{\Omega} W \nabla^2 \varphi dx dy - \iint_{\Omega} \varphi \nabla^2 W dx dy = \oint_{\Gamma} W \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial W}{\partial n} ds$$

S použitím výsledků z příkladu 1 dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} w \nabla^2 \varphi \, dx \, dy &= \int dy \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} w \, dx + \int dx \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} w \, dy = \\ &= \oint_{\Gamma} w \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx \right) - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \, dy \end{aligned} \quad (a)$$

Z podobnosti trojúhelníků na obr. 31 je



OBR.31

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\partial x}{\partial n} \quad \frac{dx}{ds} = -\frac{\partial y}{\partial n} \quad (b)$$

takže

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dx}{ds} \right) ds = \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds = \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (c)$$

Výraz (a) lze tedy upravit takto

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \int dx \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy &= \\ = \oint_{\Gamma} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial w}{\partial n} ds + \iint_{\Omega} \varphi \nabla^2 w \, dx \, dy \end{aligned} \quad (d)$$

takže

$$\iint_{\Omega} W \nabla^2 \varphi \, dx \, dy = \oint_{\Gamma} W \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds - \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial W}{\partial n} \, ds + \iint_{\Omega} \varphi \nabla^2 W \, dx \, dy \quad (e)$$

což jsme měli odvodit. Dosadíme-li do (e) $W = 1$, dostaneme větu Gaussovu-Ostrogradského (1.28) psanou pro gradient funkce φ

$$\iint_{\Omega} \nabla^2 \varphi \, dx \, dy = \oint_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds \quad (f)$$

Příklad 24

Zobecněte Diracovu funkci pro dvě proměnné.

Diracovu funkci pro jednu proměnnou jsme použili v rovnici (12.9). Není to funkce v pravém smyslu slova, neboť její hodnota v bodě $x = 0$ není ohraničená a je definována jen nepřímo integrálem

$$\int_{-a}^b \delta(x) \, dx = 1, \quad a, b > 0 \quad (a)$$

Rigorózní výklad spadá do teorie distribucí (zobecněných funkcí) a nebudeme jej uvádět. ^{*)} Můžeme si představit, že funkce $\delta(x)$ vznikla limitním přechodem nějaké spojité funkce $f(x)$ podle obr. 32 takové, že při zužujícím se definičním intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$, $\lim \varepsilon \rightarrow 0$, se zachovává jednotková plocha pod křivkou $f(x)$ v souladu s požadavkem (a).

Diracova funkce pro dvě proměnné x, y bude mít tyto vlastnosti

$$\delta(x, y) = 0 \quad (b)$$

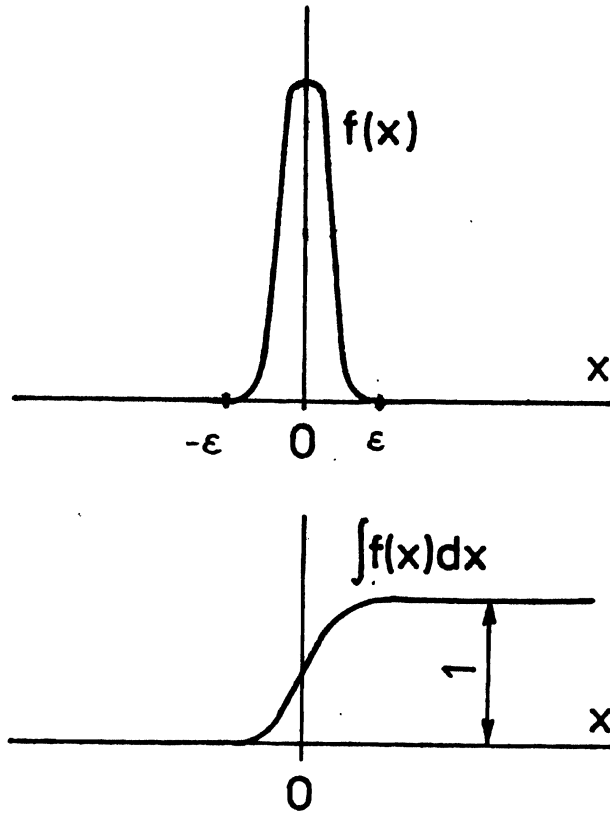
ve všech bodech mimo počátek $x = 0, y = 0$ a dále

$$\iint_{\Omega} \delta(x, y) \, dx \, dy = 1 \quad (c)$$

pro jakoukoli oblast Ω obsahující počátek jako vnitřní bod. Má-li (b) platit, musí být

$$\delta(0, 0) = \infty \quad (d)$$

^{*)} SCHWARTZ, L.: *Matematické metody ve fyzice* (překlad z francouzského originálu). SNTL, Praha 1972.



OBR. 32

13. PŘÍMÁ FORMULACE OKRAJOVÉHO INTEGRÁLU

Pokusíme se nyní napodobit postup, který jsme použili ve 12. kapitole, při řešení dvourozměrné úlohy o krutu z příkladu 8. Chceme tedy najít metodou okrajové integrace harmonickou funkci φ takovou, aby splňovala rovnici

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{v oblasti } \Omega \quad (13.1)$$

a okrajovou podmínku

$$\varphi = \bar{\varphi} \quad \text{na hranici } \Gamma \quad (13.2)$$

Použijeme metodu vážených reziduí, podle které

$$\iint_{\Omega} W(x, y) \nabla^2 \varphi(x, y) dx dy = 0 \quad (13.3)$$

kde $W(x, y)$ je váhová funkce. Z Greenovy identity, kterou jsme odvodili v příkladu 23, pak dostaneme

$$-\iint_{\Omega} \varphi \nabla^2 W dx dy = \oint_{\Gamma} W \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial W}{\partial n} ds \quad (13.4)$$

kde s je oblouk měřený po hranici Γ .

Nyní bychom měli za váhovou funkci $W(x, y)$ zvolit Greenovu funkci $G(x, y; \xi, \eta)$. Nalézt Greenovu funkci je však obtížná úloha. $\nabla^2 G$ musí mít v bodě $P(\xi, \eta)$ singularitu, a to takovou, aby platila rovnice (c) z příkladu 24. Mimoto musí splňovat okrajovou podmínku na hranici Γ . Tuto nesnáz lze zmírnit tím, že oběma požadavkům vyhovíme odděleně. Greenovu funkci vyjádříme jako součet fundamentálního řešení $\gamma(x, y; \xi, \eta)$, které má potřebnou singularitu a splňuje nulovou okrajovou podmínku v nekonečnu, a harmonické funkce $u(x, y)$, která je v celé definiční oblasti spojitá a je tak zvolena, aby součet $\gamma + u$ vyhovoval okrajovým podmínkám na hranici Γ . Tedy

$$G(x, y; \xi, \eta) = \gamma(x, y; \xi, \eta) + u(x, y) \quad (13.5)$$

Ukáže se však, že vystačíme s fundamentálním řešením

$$W(x, y) = \gamma(x, y; \xi, \eta) \quad (13.6)$$

které snadno nalezneme a které nezávisí na tvaru definiční oblasti Ω . Vyhovuje rovnici

$$\nabla^2 \gamma(x, y; \xi, \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta) \quad (13.7)$$

a nulové okrajové podmínce v nekonečnu. Když z rovnic (13.6) a (13.7) dosadíme ro rovnice (13.4), dostaneme na levé straně $-\varphi(\xi, \eta)$. Označme body uvnitř oblasti $P(\xi, \eta)$ a $Q(x, y)$. Přejde-li některý z těchto bodů na hranici Γ , označíme jej pruhem. Z rovnice (13.4) pak dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi(P) = & \oint_{\Gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n}(\bar{Q}, P) \varphi(\bar{Q}) ds - \\ & - \oint_{\Gamma} \gamma(\bar{Q}, P) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\bar{Q}) ds \end{aligned} \quad (13.8)$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$\gamma(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{r}{r_0} \right| = \gamma(P, Q) \quad (13.9)$$

kde

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (13.10)$$

a r_0 je libovolná referenční délka. Všude mimo bod $P(\xi, \eta)$ je totiž $\nabla^2 \gamma = 0$ a v bodě P je $\gamma = \infty$. Abychom se přesvědčili, že singularita v bodě P má vlastnost (c) z příkladu 24, použijeme větu Gaussovu-Ostrogradského, podle které

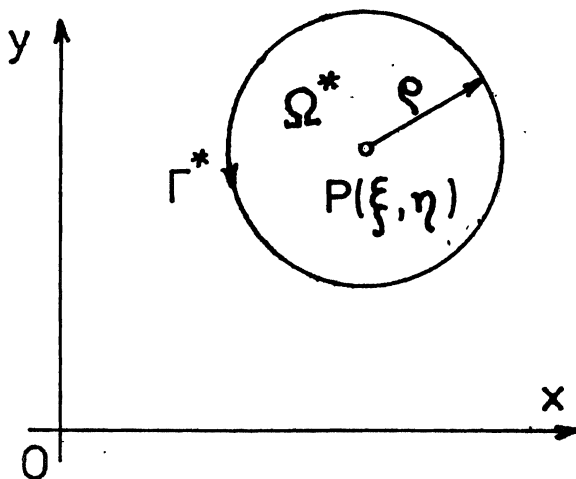
$$\iint_{\Omega^*} \nabla^2 \gamma \, dx \, dy = \oint_{\Gamma^*} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \, ds \quad (13.11)$$

Je to rovnice (f) z příkladu 23. Oblast Ω^* obsahuje $P(\xi, \eta)$ jako vnitřní bod. Zvolíme ji ve tvaru kruhu o poloměru ρ se středem v bodě P (obr. 33). Integrand na pravé straně rovnice (13.11) je pak

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right|_{\Gamma^*} = \left. \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right|_{r=\rho} = \frac{1}{2\pi\rho} \quad (13.12)$$

a integrál dává

$$\oint_{\Gamma^*} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\rho} \rho \, d\psi = 1 \quad (13.13)$$



OBR.33

Protože platí (13.7), dává levá strana rovnice (13.11) rovněž jedničku, takže funkce $\gamma(P, Q)$ vyhovuje podmínce (c) z příkladu 24.

Rovnice (13.8) umožňuje vypočítat funkční hodnotu $\varphi(\xi, \eta)$ v kterémkoliv vnitřním bodě oblasti Ω , známe-li okrajové hodnoty φ a $\partial\varphi/\partial n$.

Protože φ je v oblasti Ω harmonická funkce, stačí k jejímu určení znát buď okrajové hodnoty φ (Dirichletova úloha), nebo $\partial\varphi/\partial n$ (Neumannova úloha). Okrajové hodnoty $\partial\varphi/\partial n$ jsou tedy úplně určeny okrajovými hodnotami φ a naopak [pokud platí dále uvedený vztah (13.21)].

Abychom získali integrální rovnici, která řeší vztahy pouze mezi okrajovými hodnotami, přesuneme bod $P(\xi, \eta)$ na hranici Γ do bodu \bar{P} . Místo vztahu ^{*)}

$$\int_{\Omega} \varphi(Q) \nabla^2 \gamma(P, Q) d\Omega = \varphi(P) \quad (13.14)$$

dostaneme nyní, pokud \bar{P} leží na hladké části hranice Γ , vztah

$$\int_{\Omega} \varphi(Q) \nabla^2 \gamma(\bar{P}, Q) d\Omega = \frac{1}{2} \varphi(\bar{P}) \quad (13.15)$$

neboť integrace se nyní vztahuje jen na jednu polovinu, jejíž okraj tvoří tečna v bodě \bar{P} . Kdybychom bod P ztotožnili s hrotem (vrcholem) \bar{P} hranice Γ (obr. 34), bylo by

$$\int_{\Omega} \varphi(Q) \nabla^2 \gamma(\bar{P}, Q) d\Omega = \frac{\omega}{2\pi} \varphi(\bar{P}) \quad (13.16)$$

kde ω značí úhel tečen zleva a zprava; na hladké části hranice je $\omega = \pi$.

Pro jednoduchost budeme nadále předpokládat, že hranice je hladká. S použitím (13.15) dá rovnice (13.4)

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{P}) &= 2 \oint \frac{\partial \gamma}{\partial n}(\bar{Q}, \bar{P}) \varphi(\bar{Q}) ds - \\ &\quad - 2 \oint \gamma(\bar{Q}, \bar{P}) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\bar{Q}) ds \end{aligned} \quad (13.17)$$

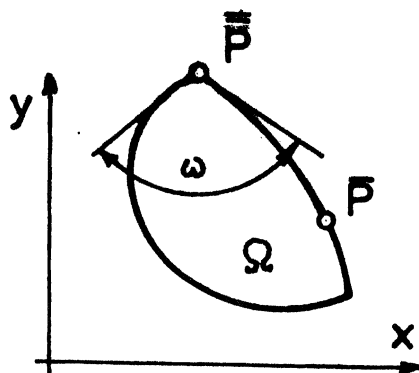
Funkce $\gamma(\bar{Q}, \bar{P})$ je přitom dána rovnicí (13.9), kde r značí vzdálenost bodů \bar{P} , \bar{Q} .

Rovnice (13.17) je základem jedné verze metody okrajové integrace. Protože $\bar{Q} \in \Gamma$, je $\varphi(\bar{Q}) = \varphi(s)$ a podobně i další funkce. Při numerickém řešení použijeme podobnou aproximaci jako v metodě konečných prvků. Budeme interpolovat mezi uzlovými body obě funkce, φ i $\partial\varphi/\partial n$, jako by šlo o nezávislé funkce. Vezmeme

$$\varphi(s) = \sum g_i(s) \varphi_i = [G] \{ \varphi \} \quad (13.18)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(s) = \sum h_i(s) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i = [H] \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} \quad (13.19)$$

^{*)} Vztah (13.14) je přímým důsledkem toho, že $\nabla^2 \gamma$ je Diracova funkce.



OBR. 34

kde q_i a h_i jsou bázové funkce. Výrazy (13.18) a (13.19) dosadíme do (13.17) a budeme požadovat splnění této rovnice v dostatečném počtu koločních bodů. Dostaneme tak soustavu algebraických rovnic ve tvaru

$$[A]\{\phi\} = [B]\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\right\} \quad (13.20)$$

odkud můžeme vypočítat vektor $\{\partial\phi/\partial n\}$, je-li $\{\phi\}$ dáno, nebo naopak. Protože $\nabla^2\phi = 0$, musí být podle rovnice (f) z příkladu 23

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial\phi}{\partial n} (s) ds = 0 \quad (13.21)$$

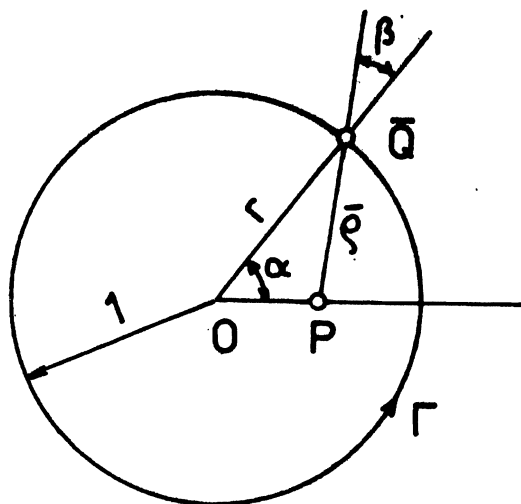
Tuto rovnici splňuje přesné řešení beze zbytku. Přibližné řešení (13.19) nemusí rovnici (13.21) přesně splňovat.

Když jsme z rovnice (13.20) našli vektor $\{\partial\phi/\partial n\}$ pomocí daného vektoru $\{\phi\}$, který obsahuje okrajové hodnoty ϕ_i , můžeme z rovnice (13.8) určit funkční hodnotu ϕ kdekoli uvnitř oblasti. Pokud nás zajímá jen smykové napětí na okraji oblasti Ω , pak k jeho výpočtu stačí znát jen okrajové hodnoty ϕ a $\partial\phi/\partial n$, takže rovnici (13.8) ani nepotřebujeme.

Příklad 25

Přesvědčte se o správnosti rovnice (13.8) pro případ, že harmonická funkce $\phi = x = r\cos\alpha$ (v polárních souřadnicích) a že definiční oblast tvoří jednotkový kruh. Souřadnice bodu P zvolte $r = 0,5$; $\alpha = 0$.

Podle obr. 35 je na hranici Γ



OBR. 35

$$\varphi(\bar{Q}) = \cos \alpha, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}(\bar{Q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(\bar{Q}) = \cos \alpha \quad (\text{a})$$

Pro vzdálenost $\bar{\rho}$ bodu \bar{Q} od bodu P dostaneme pomocí kosinové věty

$$\bar{\rho} = \sqrt{1,25 - \cos \alpha} \quad (\text{b})$$

neboť $OP = 0,5$. Pro $r_0 = 1$ dostaneme uvnitř oblasti Ω

$$\gamma(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \ln \rho \quad (\text{c})$$

a na hranici Γ

$$\gamma(\bar{Q}, P) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1,25 - \cos \alpha} \quad (\text{d})$$

Pak také

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n}(\bar{Q}, P) = \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} \Big|_{\rho=\bar{\rho}} = \frac{1}{2\pi \bar{\rho}} \cos \beta \quad (\text{e})$$

kam za $\bar{\rho}$ dosadíme z rovnice (b). Avšak

$$\sin \beta = \frac{1}{2\bar{\rho}} \sin \alpha \quad (\text{f})$$

Když (b) a (f) dosadíme do (e), dostaneme po úpravě

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n}(\bar{Q}, P) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - 0,5 \cos \alpha}{1,25 - \cos \alpha} \quad (\text{g})$$

Rovnice (13.8) dává

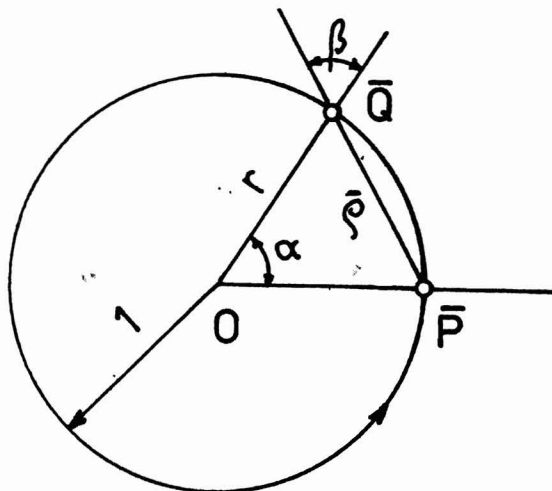
$$\varphi(P) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1 - 0,5 \cos \alpha}{1,25 - \cos \alpha} - \ln \sqrt{1,25 - \cos \alpha} \right] \cos \alpha \, d\alpha \quad (h)$$

Analytický výpočet integrálu v rovnici (h) je pracný. Avšak numerickým výpočtem se snadno přesvědčíme, že vyjde správná hodnota

$$\varphi(P) = 0,5 \quad (i)$$

Příklad 26

Zvolte nyní bod \bar{P} na hranici Γ podle obr. 36 a přesvědčte se o platnosti rovnice (13.17).



OBR. 36

Tentokrát vyjde

$$\gamma(\bar{P}, \bar{Q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad (a)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial m}(\bar{Q}, \bar{P}) = \frac{1}{4\pi} \quad (b)$$

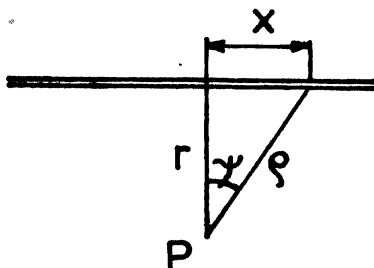
a rovnice (13.17) dá

$$\varphi(\bar{P}) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \ln \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos \alpha \, d\alpha = 1 \quad (c)$$

Protože druhý z integrálů v rovnici (13.17) obsahuje singulární bod, počítáme jeho hlavní hodnotu. První integrál na pravé straně (13.17) vyjde nulový.

14. NEPŘÍMÁ FORMULACE OKRAJOVÉHO INTEGRÁLU

Je-li nekonečně dlouhý rovný drát nabit pozitivním elektrickým nábojem, působí na bodový pozitivní náboj ve vzdálenosti r od drátu odpudivá elektrostatická síla, která je podle Coulombova zákona úměrná integrálu (obr. 37)



OBR. 37

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \psi}{r^2} dx = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 \psi}{r} d\psi = -\frac{4}{3} \frac{1}{r} \quad (14.1)$$

Chceme-li tuto sílu dostat derivací nějakého potenciálu ve směru r , musí být tento potenciál úměrný $\ln(1/r)$.

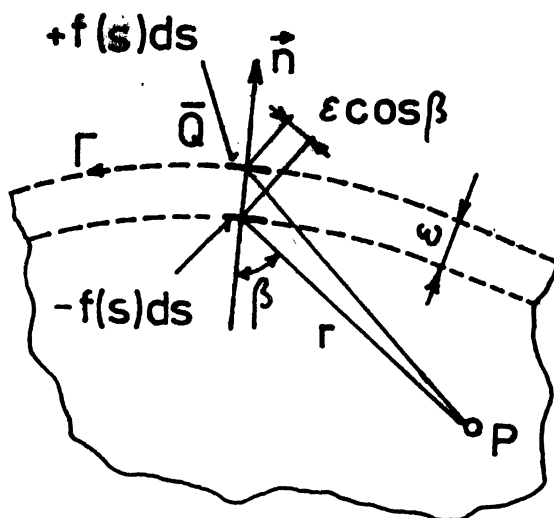
Představme si nyní rovinnou oblast Ω ohraničenou křivkou Γ jako průmět nekonečného válce kolmého k nákrešně. Na jeho povrchu nechť jsou právě takové "dráty" široké ds , z nichž každý nese náboj úměrný hodnotě $f(s)ds$. Výsledný potenciál ve vnitřním bodě oblasti bude úměrný hodnotě^{*)}

$$v(P) = \oint f(s) \ln \frac{1}{r} ds. \quad (14.2)$$

kde r je vzdálenost bodu P od bodu $\bar{Q}(s) \in \Gamma$ a $f(s)$ je hustota elektrického náboje. Výraz (14.2) je v matematice, resp. v teoretické fyzice znám jako rovinný potenciál jednoduché vrstvy.

Úlohu můžeme zkomplikovat tím, že budeme na povrchu válce předpokládat dva izolované polepy ve vzdálenosti ε , v nichž bude opačně polarizovaný náboj $f(s)ds$, resp. $-f(s)ds$. Součin $\varepsilon f(s)$ nazveme hustota momentu dvojvrstvy a označíme $\mu(s)$.

^{*)} Konstanta úměrnosti obsahuje permitivitu; do výpočtu ji nezahrnujeme, neboť se zajímáme jen o matematickou stránku věci. Násobek harmonické funkce $v(P)$ je rovněž harmonická funkce.



OBR. 38

Potenciál dvojvrstvy vypočteme s přihlédnutím k obr. 38 a rovnici (14.2)

$$w(P) = - \oint_{\Gamma} \mu(s) \frac{\cos \beta}{r} ds \quad (14.3)$$

Je totiž

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{r + \varepsilon \cos \beta} - \ln \frac{1}{r} &= -\ln(r + \varepsilon \cos \beta) + \ln r \doteq -\varepsilon \cos \beta \frac{d}{dr} \ln r = \\ &= -\frac{\varepsilon \cos \beta}{r} \end{aligned} \quad (14.4)$$

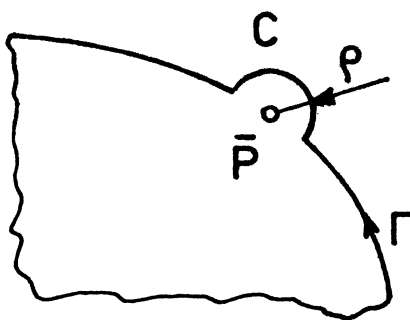
Označili jsme $\beta = \angle(\vec{PQ}, \vec{n})$, $r = |\vec{PQ}|$.

Funkce $w(P)$ podle (14.2) je harmonická z obou stran hranice Γ a přes ni spojitá. Funkce $w(P)$ podle (14.3) je vně i uvnitř hranice rovněž harmonická, avšak na hranici Γ nespojitá. Prodloužíme-li funkci $w(P)$ do bodu \bar{P} na hranici Γ zevnitř, dostaneme hodnotu $w_i(P)$. Prodloužením zvenku vyjde $w_e(P)$. Hodnota potenciálu $w_0(\bar{P})$ přímo na hranici souvisí s dřívějšími hodnotami takto

$$\begin{aligned} w_i &= w_0 - \pi \mu(\bar{P}) \\ w_e &= w_0 + \pi \mu(\bar{P}) \end{aligned} \quad (14.5)$$

Dokážeme první z těchto vztahů pomocí obr. 39. Pro bod \bar{P} na hranici Γ bude podle (14.3) platit $r = |\bar{P}Q|$; bude

$$w_0 = w(\bar{P}) = - \oint_{\Gamma} \mu(s) \frac{\cos \beta}{r} ds \quad (14.6)$$



OBR. 39

Integrand obsahuje slabou singularitu, takže počítáme hlavní hodnotu integrálu. Prodloužení zevnitř dostaneme, když se při integrování vyhneme singulárnímu bodu \bar{P} tak, aby tento bod zůstal uvnitř oblasti. Opíšeme tedy kolem tohoto bodu malou půlkružnici C o poloměru ϱ a přejdeme k limitě $\varrho \rightarrow 0$. Bude

$$W_i(\bar{P}) = - \oint_{\Gamma-C} \mu(s) \frac{\cos \beta}{r} ds - \mu(\bar{P}) \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \frac{1}{\varrho} \varrho d\psi = \quad (14.7)$$

$$= W_0(\bar{P}) - \pi \mu(\bar{P})$$

Kdyby bod \bar{P} nebyl na hladké křivce, ale někde v hrotu, tedy kdyby to byl např. bod \bar{P} na obr. 34, musili bychom činitel π v rovnici (14.7) nahradit činitelem $(2\pi - \omega)$.

Řešení Dirichletovy úlohy, tj. vyhledání funkce φ vyhovující rovnici (13.1) a okrajové podmínce (13.2), je možné získat ve tvaru (14.3), kde hustota $\mu(s)$ bude nyní neznámá funkce. Předepsané okrajové hodnoty $\bar{\varphi}$ ztotožníme s vnitřním prodloužením funkce $W_i(\bar{P})$, neboť mezi hodnotami $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{P})$ na okraji Γ a $\varphi(P)$ uvnitř oblasti Ω není žádná nespojitost. Do rovnice (14.7) tedy dosadíme $W_i(\bar{P}) = \varphi(\bar{P})$ a dostaneme

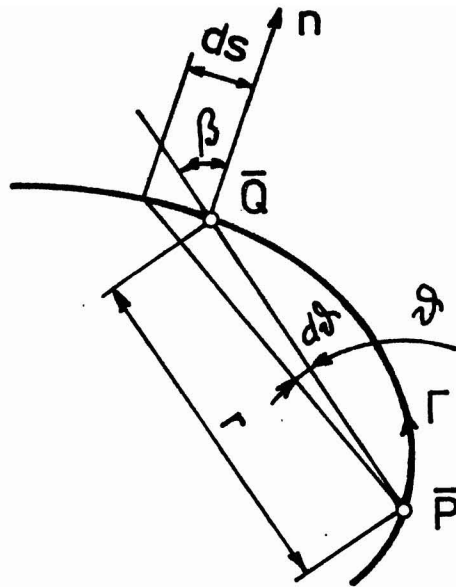
$$\varphi(\bar{P}) = - \oint_{\Gamma} \mu(s) \frac{\cos \beta}{r} ds - \pi \mu(\bar{P}) \quad (14.8)$$

Za výraz $ds \cos \beta / r$ můžeme do integrálu rovnice (14.8) dosadit $d\vartheta$ (obr.40). Bude pak

$$\varphi(\bar{P}) = - \oint_{\Gamma} \mu(\vartheta) d\vartheta - \pi \mu(\bar{P}) \quad (14.9)$$

Neznámou funkci $\mu(s)$ v rovnici (14.8), resp. $\mu(\vartheta)$ v rovnici (14.9), můžeme interpolovat užitím bázových funkcí $h_i(s)$, takže

$$\mu(s) = \sum h_i(s) \mu_i = [H] \{m\} \quad (14.10)$$



OBR. 40

Zde $[H]$ je řádková matice bázových funkcí a $\{m\}$ vektor obsahující uzlové hodnoty μ_i . Dosazením (14.10) do (14.9) dostaneme soustavu algebraických rovnic

$$[M]\{m\} = \{\Phi\} \quad (14.11)$$

kde $\{\Phi\}$ obsahuje okrajové hodnoty φ_i . Řešením rovnice (14.11) dostaneme vektor $\{m\}$ a z rovnice (14.10) aproximaci funkce $\mu(s)$. Funkční hodnoty φ můžeme pak vypočítat kdekoli uvnitř oblasti užitím rovnice (14.3), kterou přepíšeme do tvaru

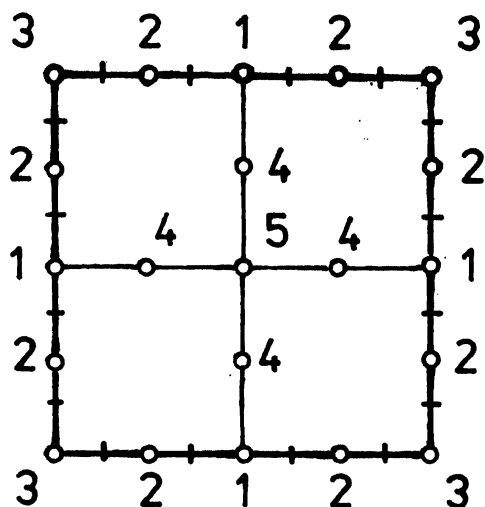
$$\varphi(P) = - \oint_{\Gamma} \mu(s) \frac{\cos\beta}{r} ds = - \int_0^{2\pi} \mu(\vartheta) d\vartheta \quad (14.12)$$

Poznámka

V literatuře bývá místo úhlu β zaveden úhel $\angle(\vec{Q}P, \vec{n}) = \pi - \beta$, takže křivkové integrály obsahující $\cos\beta$ mají pak opačné znaménko [$\cos\beta = -\cos(\pi - \beta)$]. Mimoto bývá někdy zavedena dvojrůstava s opačnou polaritou, takže funkce $\mu(s)$ změní znaménko. Při přejímání vzorců z literatury musíme těmto okolnostem věnovat zvýšenou pozornost.

Příklad 27

Řešte problém krutu tyče čtvercového průřezu 2×2 metodou povrchové integrace podle rovnic (14.9) a (14.12).



OBR. 41

Pro srovnání s příkladem 8 použijeme na obvodě průřezu stejné uzlové body jako na obr. 7, avšak očíslováme je odlišně od obr. 10 (viz obr. 41). Předepsané okrajové hodnoty budou stejné jako v příkladu 8, dosadíme-li $a = 2$. Bude $\varphi_1 = -0,5$; $\varphi_2 = -0,625$; $\varphi_3 = -1$. K řešení využijeme souměrnosti, což bychom ovšem při rutinním řešení na přiměřeně velkém počítači nedělali; sestavili bychom výpočetní program tak, aby jej bylo možno použít pro obecný tvar průřezu.

Nejprve nalezneme hustotu $\mu(s)$ z integrální rovnice (14.9), kterou upravíme takto

$$(2\pi - \omega)\mu(\bar{P}) + \oint \mu(\mathcal{V}) d\mathcal{V} = -\varphi(\bar{P}) \quad (a)$$

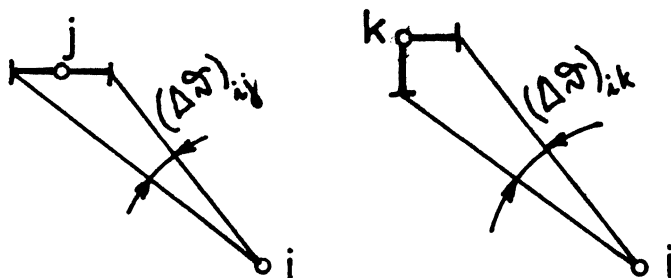
kde $\omega = \pi$ pro body 1, 2 a $\omega = \pi/2$ pro bod 3. Protože jde pouze o demonstraci metody a nikoli o získání velmi přesných výsledků, použijeme k integraci "obdélníkové pravidlo". Obvod rozdělíme na stejné části tak, aby uzlový bod byl vždy uprostřed. Při integraci budeme předpokládat, že funkce $\mu(s)$ je uvnitř každé části konstantní a rovna uzlové hodnotě μ_i . Rovnice (a) tak přejde v soustavu algebraických rovnic

$$(2\pi - \omega)\mu_i + \sum_j \mu_j (\Delta\mathcal{V})_{ij} = -\varphi_i \quad (b)$$

Význam veličiny $(\Delta\mathcal{V})_{ij}$ je zřejmý z obr. 42. Pro bod 1 např. dostaneme

$$\pi\mu_1 + 2 \left[\mu_3 \arctg \frac{1}{4} + \mu_2 \left(\arctg \frac{3}{4} - \arctg \frac{1}{4} \right) + \right. \\ \left. + \mu_1 \left(\arctg \frac{5}{4} - \arctg \frac{3}{4} \right) + \mu_2 \left(\arctg \frac{7}{4} - \arctg \frac{5}{4} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_3 (\operatorname{arctg} \frac{8}{3} - \operatorname{arctg} \frac{7}{4}) + \mu_2 (\operatorname{arctg} 8 - \operatorname{arctg} \frac{8}{3}) + \\
 & + \mu_1 \operatorname{arctg} \frac{1}{8}] = -\varphi_1 \quad (c)
 \end{aligned}$$



OBR. 42

Můžeme ještě použít součtové věty

$$\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u-v}{1+uv} \quad (d)$$

Tímto způsobem dostaneme soustavu rovnic (14.11) ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 3,8954 & 1,5771 & 0,8107 \\ 0,6730 & 4,6774 & 0,9716 \\ 0,3997 & 0,7893 & 5,0942 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,625 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

První řádek (e) odpovídá rovnici (c). Druhý, resp. třetí řádek platí pro bod 2, resp. 3. Uvádíme zaokrouhlené hodnoty. Ze soustavy (e) vypočteme

$$\begin{aligned}
 \mu_1 & = 0,055\ 383 \\
 \mu_2 & = 0,088\ 630 \\
 \mu_3 & = 0,178\ 223
 \end{aligned} \quad (f)$$

Když jsme získali tuto okrajovou funkci, vypočítáme hodnoty φ_4 , φ_5 z rovnice (14.12). Použijeme stejné integrační metody. Vyjde

$$\begin{aligned}
 \varphi_4 & = -0,58786 \\
 \varphi_5 & = -0,59342
 \end{aligned} \quad (g)$$

Funkci $\varphi(x,y)$ nahradíme na úsečce 1 - 4 - 5 - 4 - 1 parabolou čtvrtého stupně obdobně jako v příkladu 8 a vypočteme derivaci v bodě 1; dostaneme největší smykové napětí v průřezu

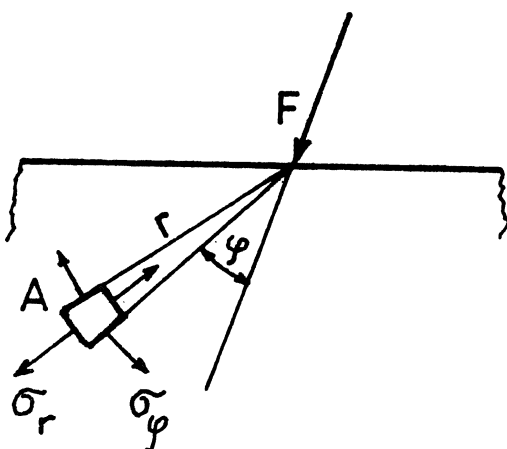
$$\tau_{\max} = G \dot{\vartheta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_1 + 1 \right) = 1,37661 G \dot{\vartheta} \quad (\text{h})$$

místo přesné hodnoty 1,35062 $G \dot{\vartheta}$. Chyba tohoto řešení je jen 1,9 % (navzdory poměrně hrubé numerické integraci). Je tedy asi dvaapůlkrát menší než v příkladu 8.

Příklad 28

Ukážeme řešení úlohy o elastické rovinné napjatosti s použitím principu superpozice. Základem je řešení napjatosti v polorovině zatížené na okraji osamělou silou F (obr. 43). Napětí jsou

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r} \quad \sigma_\varphi = 0 \quad (\text{a})$$



OBR. 43

To znamená, že vektor napětí \vec{p} v řezu vyznačeném na obr. 44 je

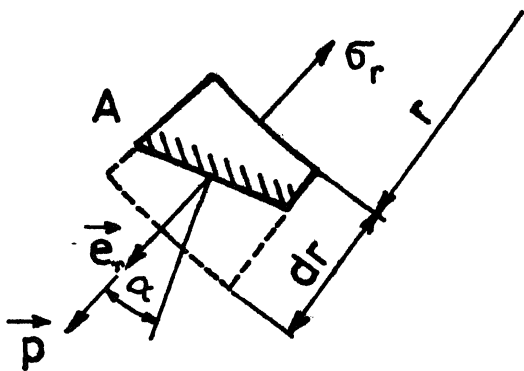
$$\vec{p} = \sigma_r \cos \alpha \vec{e}_r = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{e}_r \quad (\text{b})$$

Zde \vec{e}_r je jednotkový vektor ve směru poloměru r .^{*)}

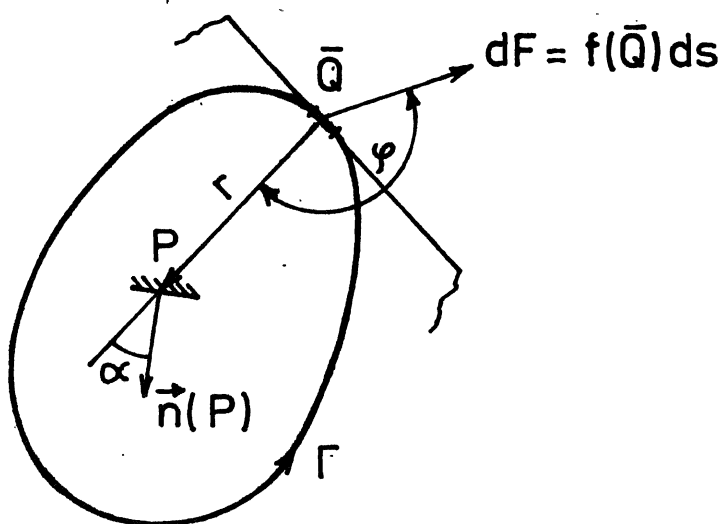
Budeme hledat napětí v oblasti Ω s hranicí Γ zatížené na obvodě známým způsobem (obr. 45). Těleso si budeme myslet složené z polorovin, jejichž okraje vytvářejí hranici Γ jako obálku. Jedna z těchto fiktivních polorovin je na obr. 45 zakreslena, dotýká se tělesa v bodě \bar{Q} . V dotykovém bodě připojíme fiktivní zatížení

$$d\vec{F} = \vec{f}(\bar{Q}) ds \quad (\text{c})$$

^{*)} Je totiž $p ds = \sigma_r ds \cos \alpha$, kde ds je délka řezu vyznačená na obr. 44 šrafováním.



OBR. 44



OBR. 45

které vyvolá v bodě $P \in \Omega$ v naznačeném řezu vektor napětí

$$d\vec{p} = - \frac{2f(\bar{Q})}{\pi} \frac{\cos\varphi \cos\alpha}{r} \vec{e}_r ds \quad (d)$$

s využitím zákona superpozice dostaneme celkem

$$\vec{p}(P) = - \frac{1}{\pi} \oint f(\bar{Q}) \frac{\cos\varphi \cos\alpha}{r} \vec{e}_r ds \quad (e)$$

Rovnice (e) platí pro vnitřní bod oblasti. Budeme-li tedy znát okrajové (povrchové) zatížení $\vec{f}(\bar{Q}) = \vec{f}(s)$, budeme umět vypočítat napětí v kterémkoli vnitřním bodě tělesa z rovnice (e). Mýlili bychom se však, kdybychom soudili, že toto okrajové zatížení $\vec{f}(\bar{Q})$ je totožné se skutečným zatížením $\vec{p}(\bar{Q})$ na povrchu tělesa. Když totiž přejdeme s bodem P do bodu $\bar{P} \in \Gamma$

bude integrál v rovnici (e) obsahovat slabou singularitu (když se bod \bar{Q} ztotožní s bodem \bar{P} , je $r = 0$). Funkci $\vec{p}(\bar{P})$ lze sice prodloužit zevnitř na hranici Γ , ale tato hodnota se bude lišit od hodnoty \vec{f} v téže bodě, neboť funkce (e) se na hranici Γ nespojitě mění. Vnitřní přiblížení bodu \bar{P} do bodu \bar{P} dostaneme, když obdobně jako na obr. 39 obejdeme singulární bod. Nejprve z integračního oboru vyjme nejblíže okolí singulárního bodu a vypočteme v limitě hlavní hodnotu integrálu. Co jsme přitom v singulárním bodě \bar{P} vynechali, je právě hodnota $\vec{f}(\bar{P})$. Musíme ji tedy přidat (odpovídá integraci po křivce \bar{C} na obr. 39). Dostaneme hodnotu $\vec{p}(\bar{P})$, která odpovídá skutečnému zatížení okraje, neboť spojitě navazuje na pole napětí uvnitř definiční oblasti. Bude tedy

$$\vec{p}(\bar{P}) = \vec{f}(\bar{P}) - \frac{2}{\pi} \oint f(\bar{Q}) \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{r} \vec{e}_r ds \quad (f)$$

Levá strana v rovnici (f) je dána. Neznámé fiktivní zatížení $\vec{f}(s)$ nahradíme soustavou diskretních hodnot \vec{f}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) v uzlových bodech a příslušnými interpolačními funkcemi. Z rovnice (f) pak dostaneme soustavu algebraických rovnic obdobně jako tomu bylo v příkladu 27.

15. METODA OKRAJOVÝCH ELEMENTŮ

Podstatou metody okrajové integrace je řešení integrální rovnice, kterou získáme buď přímo pomocí fundamentálního řešení diferenciální rovnice nebo nepřímou superpozicí účinků osamělých "sil" působících na povrchu (okraji) řešeného tělesa (definiční oblasti). Pokaždé jde o řešení účinků bodového zatížení prostoru nebo poloprostoru, popř. roviny nebo polov roviny. To jsme podrobně ukázali na příkladu řešení Dirichletovy úlohy v kapitole 13 a 14. Integrální rovnici řešíme numericky. V příkladu 27 jsme použili nejjednodušší integrační metody a přesto jsme dosáhli vynikající přesnosti i při hrubém dělení obvodu vyšetřované oblasti. Výpočet bychom mohli dále zpřesnit, kdybychom použili jemnějšího dělení nebo přesnější integrační metody. Jednou z možností, o které jsme se již zmínili, je aplikace metody konečných prvků. Mluvíme pak o metodě okrajových elementů (prvků).

Porovnáme-li příklady 8 a 27, nezdá se být v pracnosti řešení velký rozdíl. To je tím, že jsme řešili úlohu malého rozsahu. V praxi se však projeví velký rozdíl v tom, že úlohu o n -rozměrném tělese řešíme metodou okrajových elementů v $(n-1)$ -rozměrném prostoru; metoda konečných prvků tuto výhodu nemá. Užití metody okrajových prvků může tedy znamenat podstatnou úsporu paměti, což může často rozhodnout o praktické řešitelnosti úlohy. Viděli jsme také, že při stejné síti uzlových bodů jsme do-

sáhli metodou okrajové integrace větší přesnosti než metodou konečných prvků. Rozdíl by byl ještě větší, kdyby šlo o definiční oblast zasahující do nekonečna nebo o oblast, která by obsahovala singularity (těleso s trhlinami). Velmi výhodná je aplikace metody okrajových elementů v kontaktních úlohách, neboť podmínky dotyku povrchů těles se dají jednoduše formulovat a řešení, které vyžaduje iterační postup, se týká právě jen povrchových elementů. Za uvedené výhody však musíme něčím zaplatit. Je to větší matematická náročnost a potřeba znát analytické řešení účinků bodového působení, které tvoří základ metody. Nalézt toto řešení je snadné u lineárních izotropních materiálů, ale v jiných případech může být obtížné. Jinou nevýhodou je, že matice $[A]$, $[B]$ v rovnici (13.20), resp. matice $[M]$ v rovnici (14.11), vyjdou plné a nesouměrné, kdežto metoda konečných prvků dává matici pásovou a souměrnou.

Omezený rozsah této publikace nedovoluje probírat metodu okrajových elementů podrobněji. Její efektivnost může být ještě zvýšena tím, že ji lze snadno spojit s metodou konečných prvků. Část úlohy může být řešena jednou metodou, jiná část úlohy druhou metodou. Když o těchto možnostech referovali Zienkiewicz, Kelly a Bettles, dali svému příspěvku název: "Svatba podle módy. Nejlepší z obou světů (konečných elementů a okrajových integrálů)".^{*)}

Ačkoli se zdá být metoda okrajové integrace zcela moderní, jsou její podstatné myšlenky tak staré jako sama teorie integrálních rovnic. Ve 12. kapitole jsme ukázali její souvislost dokonce s Mohrovou teorií z roku 1868. Integrální metoda řešení rovinné napjatosti, kterou jsme použili v příkladu 28, pochází z roku 1924. Dříve však byly integrální metody považovány za těžkopádné a za nevhodné pro praxi. Používaly se jen v mechanice tekutin a v úlohách o potenciálním poli, kde patřily k tzv. nepřímým metodám. Pokroky v počítačové technice však vedly k tomu, že se od sedmdesátých let metoda okrajových elementů intenzivně rozvíjí a používá se i k řešení úloh z teorie pružnosti. Dnes se tato metoda uplatňuje také v geomechanice a dokonce v elastoplasticitě.

16. NEWTONOVA-RAPHSONOVA METODA ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ÚLOH

Užití metody konečných prvků vyžaduje, abychom nejprve vybrali reprezentativní strukturu konečných prvků popisujících danou konstrukci, a tím vytvořili její matematický model. Pak následuje výpočet neznámých

^{*)} Energy methods in finite analysis (red. R. Glowinski aj.). John Wiley, Chichester 1979.

polí a konečně interpretace výsledků. Z hlediska praktického využití výsledků je nejdůležitější formulace matematického modelu a interpretace výsledků. U lineárních úloh to platí téměř bez výhrad. Avšak u nelineárních úloh záleží přesnost a spolehlivost výsledků i na výpočtové strategii. Ta vyžaduje zkušenost. Nechceme totiž dostat jakékoli řešení, ale jen takové, které je stabilní, dostatečně přesné a má fyzikální smysl. Kromě toho je ve hře časová náročnost, a tedy i cena řešení.

Podle dosavadních zkušeností se zdá, že nejefektivnější je rozdělení nelineární úlohy na posloupnost linearizovaných úloh řešených krok za krokem, tedy inkrementální přístup. Je důležité, aby fyzikální rovnice byly splněny na každém kroku, neboť jinak se mohou chyby akumulovat a mohou vést ke zcela falešným výsledkům nebo ke ztrátě numerické stability. Zvolíme-li příliš malý krok, vzrostou nároky na výpočetní čas. Zvolíme-li příliš velký krok, vzroste nutný počet iterací a tím znovu vzrostou nároky na výpočetní čas, což znamená i vzrůst ceny za výpočet. Mimoto hrozí ztráta konvergence. Existuje tedy nejvýhodnější velikost kroku, kterou však předem neznáme. Krok Δt přitom nemusí být v celém rozsahu řešení konstantní. Naopak, např. v úlohách o creepu by to bylo velmi nevýhodné.

Základem inkrementálního řešení nelineární statické úlohy je rovnice

$$K(t)q = F(t + \Delta t) - R(t) \quad (16.1)$$

kde $K(t)$ je tečná matice tuhosti, odvozená z konfigurace v čase t ; $F(t + \Delta t)$ je vektor zobecněných vnějších sil, které působí v uzlových bodech v okamžiku $t + \Delta t$; $R(t)$ je vektor vratných sil v uzlových bodech, vyvolaných napětím uvnitř prvků v okamžiku t ; q je rozdíl zobecněných posuvů u na konci a na začátku kroku, tedy

$$q = u(t + \Delta t) - u(t) \quad (16.2)$$

Rovnice (16.1) byla odvozena linearizací úlohy pro čas t ; předpokládáme, že tečná matice tuhosti $K(t)$ se v intervalu $(t, t + \Delta t)$ nezmění. Kdyby $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ přešel by přírůstek q v diferenciál posuvů du a rovnice (16.1) by platila přesně. Při konečném kroku Δt jde jen o první přiblížení, které musíme ještě korigovat.

V dynamice přibudou v rovnici (16.1) ještě setrvačné síly, takže bude

$$K(t)q = F(t + \Delta t) - R(t) - M\ddot{u}(t + \Delta t) \quad (16.3)$$

Nahradíme-li zrychlení v intervalu $(t, t + \Delta t)$ konstantní střední hodnotou, dostaneme pro rychlosti přibližný vztah, který odpovídá "lichoběž-

níkovému pravidlu" integrace v čase, totiž vztah

$$\dot{u}(t + \Delta t) - \dot{u}(t) = \frac{1}{2} \{ \ddot{u}(t + \Delta t) + \ddot{u}(t) \} \Delta t \quad (16.4)$$

Obdobně dostaneme

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \frac{1}{2} \{ \dot{u}(t + \Delta t) + \dot{u}(t) \} \Delta t \quad (16.5)$$

Z rovnice (16.4) vypočteme $\ddot{u}(t + \Delta t)$ a dosadíme do rovnice (16.3). Pak ještě $\dot{u}(t + \Delta t)$ nahradíme hodnotou vypočtenou z rovnice (16.5) a dostaneme

$$\begin{aligned} [K(t) + \frac{4}{(\Delta t)^2} M] q &= \\ &= F(t + \Delta t) - R(t) + M \left\{ \frac{4}{\Delta t} \dot{u}(t) + \ddot{u}(t) \right\} \end{aligned} \quad (16.6)$$

Rovnice (16.1), resp. (16.6) slouží k výpočtu přírůstku q vektoru zobecněných posuvů, který musíme iteracemi dále zpřesňovat. Je-li ve staticce třeba na každém kroku iterovat tak dlouho, až jsou v okamžiku $t + \Delta t$ s potřebnou přesností splněny podmínky rovnováhy, platí to tím spíše o dynamice, kde ovšem podmínky rovnováhy nahrazují pohybové rovnice. Avšak ani to, že je splníme na každém kroku, ještě nezaručuje stabilitu řešení.

Označme přesné řešení hvězdičkou. Pro ně musí být na konci integračního kroku splněna podmínka rovnováhy

$$F(u^*(t + \Delta t)) - R(u^*(t + \Delta t)) = 0 \quad (16.7)$$

resp. pohybová rovnice

$$F(u^*(t + \Delta t)) - M \ddot{u}^*(t + \Delta t) - R(u^*(t + \Delta t)) = 0 \quad (16.8)$$

Obě tyto rovnice můžeme zapsat jednotně jako nelineární vektorovou rovnici pro posuvy

$$f(u^*) = 0 \quad (16.9)$$

Zde $f(u^*)$ znamená levou stranu rovnice (16.7), resp. (16.8). Když z Taylorovy řady pro tuto funkci ponecháme první dva členy, dostaneme

$$f(u^*) \cong f(u^{(i-1)}) + \frac{\partial f}{\partial u^T} \Big|_{u^{(i-1)}} \cdot (u^* - u^{(i-1)}) \quad (16.10)$$

Zde $u^{(i-1)}$ je $(i-1)$ ní aproximace k přesnému řešení u^* v čase $t + \Delta t$. Levá strana (16.10) je podle (16.9) rovna nule. První člen na pravé straně je podle (16.7) a (16.9)

$$f(u^{(i-1)}) = F(u^{(i-1)}) - R(u^{(i-1)}) \quad (16.11)$$

v čase $t + \Delta t$, takže rovnice (16.10) dá

$$-R^{(i-1)} + F^{(i-1)} + \left[\frac{\partial F}{\partial u^T} - \frac{\partial R}{\partial u^T} \right]^{(i-1)} (u^* - u^{(i-1)}) = 0 \quad (16.12)$$

V úlohách z dynamiky bude na levé straně rovnice (16.12) ještě člen $-M\ddot{u}^{(i-1)}$ podle (16.8).

Avšak podle definice tečné matice tuhosti je ^{*)}

$$\left[\frac{\partial R}{\partial u^T} \right]^{(i-1)} = K^{(i-1)}(t + \Delta t) \quad (16.13)$$

Protože setrvačné síly řadíme podle d'Alembertova principu k vnějším silám, je s přihlédnutím k (16.6) a (16.3)

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u^T} \right]^{(i-1)} = -\frac{4}{(\Delta t)^2} M \quad (16.14)$$

Přírůstek vektoru posuvů během iterace označíme

$$\Delta u^{(i)} = [u^* - u^{(i-1)}]_{t+\Delta t} \quad (16.15)$$

Rovnice (16.12) pak dává

$$\begin{aligned} \left[K^{(i-1)}(t + \Delta t) + \frac{4}{(\Delta t)^2} M \right] \Delta u^{(i)} &= F(t + \Delta t) - R^{(i-1)}(t + \Delta t) - \\ &- M \left\{ \frac{4}{(\Delta t)^2} (u^{(i-1)}(t + \Delta t) - u(t)) - \right. \\ &\left. - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}(t) - \ddot{u}(t) \right\} \end{aligned} \quad (16.16)$$

Protože rovnice (16.12) představuje podle Taylorova rozvoje pouze první aproximaci k přesnému řešení u^* , použijeme ji k výpočtu další aproximace, takže iterační smyčka bude

$$u^{(i)}(t + \Delta t) = u^{(i-1)}(t + \Delta t) + \Delta u^{(i)} \quad (16.17)$$

Rovnice (16.16) a (16.17) popisují Newtonovu-Raphsonovu metodu řešení nelineárních rovnic (16,7), popř. (16.8) s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} K^0(t + \Delta t) &= K(t) \\ R^0(t + \Delta t) &= R(t) \\ u^0(t + \Delta t) &= u(t) \end{aligned} \quad (16.18)$$

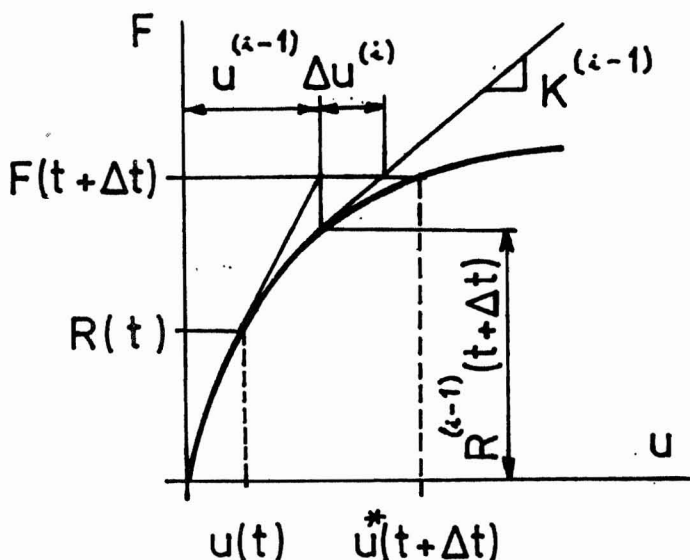
^{*)} Je-li např. $\sum_j k_{ij} u_j = r_i$, je $k_{ij} = \partial r_i / \partial u_j$. V maticovém zápisu $[K] = \partial\{R\} / \partial\{u\}^T$ nebo stručněji $K = \partial R / \partial u^T$. Horní index T znamená transpozici.

Iterace pokračují až do splnění vhodného kritéria (kap. 19).

Příklad 29

Na obr. 46 naznačujeme průběh iterací podle Newtonovy-Raphsonovy metody pro nelineární rovnici $f(u) = 0$ o jedné proměnné. Představme si, že jde o nelineární pružinu, kterou monotónně zatěžujeme pomalu rostoucí silou $F(t)$. Na počátku integračního kroku (v čase t) bude

$$\begin{aligned} R(t) &= F(t) = R^{(0)}(t + \Delta t) \\ K(t) &= K^{(0)}(t + \Delta t) \\ u(t) &= u^{(0)}(t + \Delta t) \end{aligned} \tag{a}$$



OBR. 46

Pak podle (16.16), kam dosadíme $M = 0$ (statický případ), vyjde

$$K^{(i-1)} \Delta u^{(i)} = F(t + \Delta t) - R^{(i-1)}(t + \Delta t). \tag{b}$$

Tento vztah je zakreslen pro $i = 1, 2$; kótované hodnoty se vztahují k iteraci $i = 2$. Iterace skončí, jakmile se bude $\Delta u^{(i)}$ blížit nule. Pak také

$$\begin{aligned} R^{(i)}(t + \Delta t) &\cong F(t + \Delta t) \\ u^{(i)}(t + \Delta t) &\cong u^*(t + \Delta t) \end{aligned} \tag{c}$$

17. MODIFIKACE NEWTONOVY METODY

Úplná Newtonova iterace vyžaduje, abyhom v každém kroku a při každé iteraci počítali a faktorizovali matici tuhosti, což prodlužuje (a tím i prodražuje) výpočet. Je-li úloha pouze geometricky nelineární, je možné tomu částečně čelit zvětšením intervalů Δt . Avšak v úlohách materiálově nelineárních a v úlohách z dynamiky musí být krok Δt malý, neboť jinak můžeme dostat málo přesné a dokonce nestabilní řešení. Např. v elastoplasticitě se předpokládá během každého kroku proporcionální zatěžování, což samo o sobě je důvodem k volbě malého kroku.^{*)} Také nepřesný výpočet aproximací během iteračního cyklu v jednom kroku může vést k velkým chybám, závisí-li materiálové vlastnosti na historii.

Značné úspory lze dosáhnout, užívá-li se v každém kroku stále stejné (počáteční) hodnoty matice tuhosti, takže v rovnici (16.16) se objeví $K_0 = K^{(0)}(0)$ místo $K^{(i-1)}(t + \Delta t)$. Dostaneme tak metodu počátečních napětí, která odpovídá linearizaci soustavy pouze na počátku řešení. Je-li nelinearita silná a zvláště dochází-li k změkčení soustavy v průběhu daného kroku, může být konvergence velmi pomalá a původní výhoda modifikované Newtonovy metody se ztrácí. Může nastat dokonce divergence, takže se výpočet zhroutí. Tomu lze někdy předejít tak, že se zvolí matice tuhosti $K_0 = K(\tau)$, kde τ odpovídá některému z okamžiků $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$.

Matici $K_0 = K(\tau)$ můžeme zpřesňovat nejen v okamžiku τ , ale v několika vybraných okamžicích τ_1, τ_2, \dots . Kdybychom ji zpřesňovali v každém kroku, dostali bychom ovšem původní Newtonovu-Raphsonovu metodu. Vhodný počet hodnot τ_i , v nichž počítáme matici tuhosti z okamžité konfigurace soustavy, závisí na vlastnostech soustavy. Nemáme-li o nich předem žádnou představu, učiníme lépe, zvolíme-li původní Newtonovu-Raphsonovu metodu.

Modifikovaná Newtonova metoda konverguje obzvlášť pomalu, nastávají-li během integračního kroku Δt náhlý pokles tuhosti. Počet nutných iterací pak rychle roste. Protože do programu je vhodné zařadit omezení počtu iterací v cyklu, je možné, že se výpočet zastaví před dosáhnutím konvergence. Konvergenci můžeme urychlit pomocí Aitkenova akceleratoru; místo rovnice (16.17) použijeme předpisu

$$u^{(i)}(t + \Delta t) = u^{(i-1)}(t + \Delta t) + \alpha^{(i-1)} \Delta u^{(i)} \quad (17.1)$$

^{*)} O aplikaci metody konečných prvků v plasticitě pojednal autor podrobně v publikaci "Mezní plastické stavy", publ. č. 60-644-83 (2561), DT ČSVTS Praha, 1983.

kde $\alpha^{(i-1)}$ je diagonální matice koeficientů

$$\alpha_{kk}^{(i-1)} = \frac{\Delta u_k^{(i-1)}}{\Delta u_k^{(i-1)} - \Delta u_k^{(i)}} \quad (17.2)$$

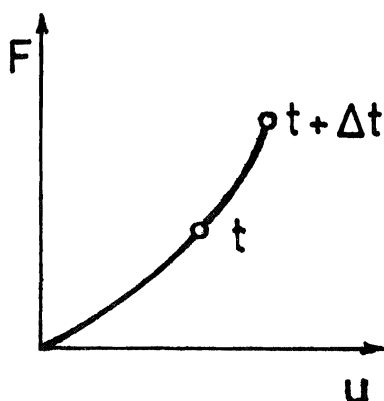
Nesnáze vzniknou, když se jmenovatel ve zlomku na pravé straně (17.2) blíží (nebo rovná) pro některé k nule. Kromě toho je třeba pamatovat, že koeficienty $\alpha_{kk}^{(i-1)}$ počítáme z diferencí hodnot dosud neustálených, tedy zatížených většími chybami. Nemá-li těmito nepřesnostmi výpočet "vykolejit", můžeme Aitkenovu rovnici (17.1) užít nejvýš pro každou druhou iteraci.

Při výpočtu napětí musíme uvážit, že matice C , která váže tenzor přetvoření s tenzorem napjatosti, nebývá během integračního kroku konstantní. Pak

$$G^{(i-1)}(t + \Delta t) = G(t) + \int_{\varepsilon(t)}^{\varepsilon^{(i-1)}(t + \Delta t)} C(\varepsilon) d\varepsilon \quad (17.3)$$

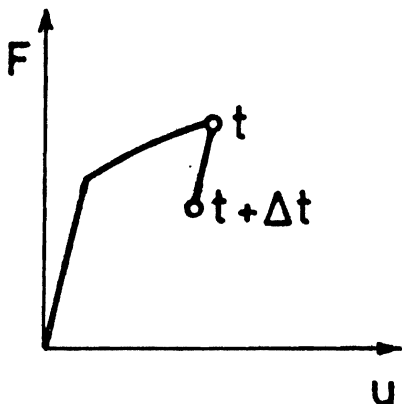
Integruje se vždy od poslední přijaté hodnoty vektoru $\varepsilon(t)$, která se během iterací nemění, k aktuálním hodnotám. Tak se dosáhne toho, že konvergované výsledky nezávisí na průběžných iterovaných hodnotách, které jsou zatíženy chybami.

Zjistíme-li, že se nevyvážená síla $F(t + \Delta t) - R^{(i)}(t + \Delta t)$ během iterací zvětšuje, znamená to zpravidla divergenci. Ta se může objevit vždy, dohází-li k vzrůstu tuhosti soustavy. Je-li tento vzrůst mírný (jde-li např. o geometrickou nelinearitu s charakteristikou podle obr.47), stačí zvolit menší integrační krok Δt a konvergence se obnoví.

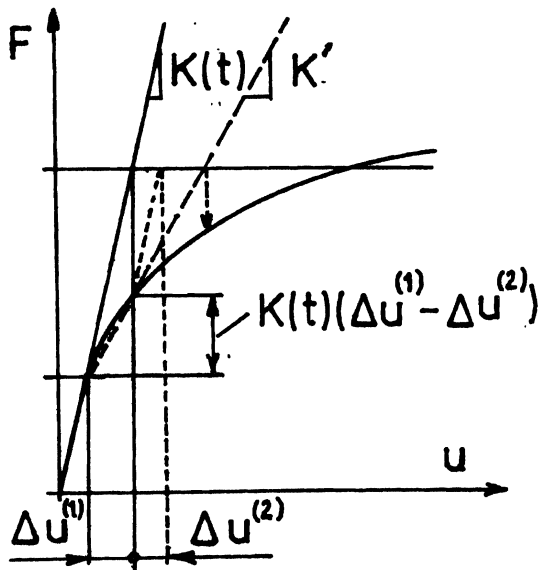
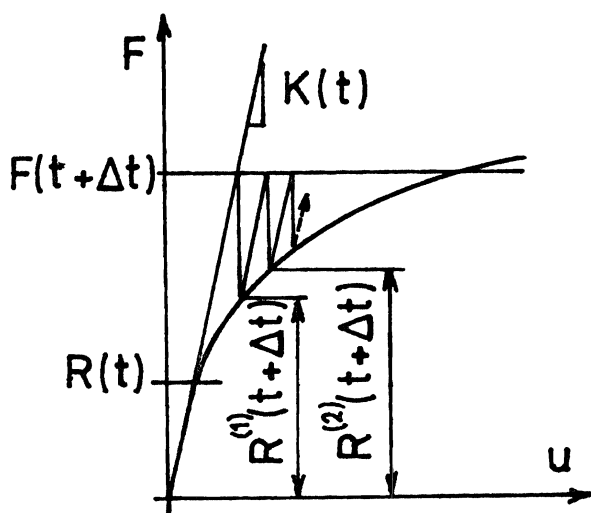


OBR.47

Jde-li o náhlý vzrůst (např. o návrat do elastického stavu při plastickém tváření, obr. 48), je situace obtížnější; v úlohách z dynamiky stačí i zde jen zmenšit integrační krok, ale ve staticce to zpravidla nestačí, je nutné vytvořit novou (elastickou) matici tuhosti odvozenou pro okamžik t .



OBR. 48



OBR. 49

Příklad 30

Pro jednorozměrný případ lze sledovat význam Aitkenova akcelérátoru na obr. 49. Na levé polovině obrázku je vidět postup při nezrychlené iteraci. Na pravé polovině je zrychlení dáno sečnou, jejíž směrnice je označena K' . Platí, že

$$K(t) \Delta u^{(1)} = F(t + \Delta t) - R(t) = F(t + \Delta t) - F(t) \quad (a)$$

$$K(t) \Delta u^{(2)} = F(t + \Delta t) - R^{(1)}(t + \Delta t) \quad (b)$$

Z druhé strany

$$\frac{K(t)}{K'} = \frac{\Delta u^{(1)}}{\Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}} = \alpha^{(1)} \quad (c)$$

18. KVAZI-NEWTONOVY METODY

Zopakujeme nejprve, v čem spočívá Newtonova (popř. Newtonova-Raphsonova) metoda řešení soustavy nelineárních rovnic

$$f(x) = 0 \quad (18.1)$$

kde f je vektorová funkce, x je vektor neznámých veličin. Rozvineme-li tuto funkci kolem správného řešení x^* v Taylorovu řadu a ponecháme z ní jen první dva členy, dostaneme přibližný vztah

$$f(x) \cong f(x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x=x^*} (x - x^*) \quad (18.2)$$

První člen na pravé straně (18.2) je nulový, protože x^* je přesné řešení rovnice (18.1). V druhém členu vystupuje čtvercová matice

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x^T} \quad (18.3)$$

což je Jacobiho matice k funkci $f(x)$; obsahuje první parciální derivace $\partial f_i / \partial x_j$. Z rovnice (18.2) vypočteme přibližnou hodnotu přesného řešení

$$x^* \cong x - J^{-1}(x) f(x) \quad (18.4)$$

Tu můžeme dále stejným způsobem zpřesňovat. Předpis pro iteraci tedy je

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - J^{-1}(x^{(i)}) f(x^{(i)}) \quad (18.5)$$

Často je třeba najít minimum nějaké skalární funkce vektoru x

$$\bar{\Phi}(x) = \min \quad (18.6)$$

Nutnou podmínkou je vymizení všech parciálních derivací

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} = f(x) = 0 \quad (18.7)$$

Jacobiho matice vektorové funkce $f(x)$ je zřejmě Hessova matice skalární funkce $\bar{\Phi}(x)$. Hessova matice obsahuje druhé parciální derivace $\partial^2 \bar{\Phi} / \partial x_i \partial x_j$. Je-li funkce $\bar{\Phi}(x)$ konvexní, pak její stacionární hodnota je minimem a Hessova matice je pozitivně definitní nebo semidefinitní. Jsou-li funkce $\bar{\Phi}(x)$ a její první derivace $\partial \bar{\Phi} / \partial x$ spojité, je Hessova matice souměrná.

Je-li Jacobiho matice $J(x)$ pozitivně definitní, pak její inverze vždy existuje a iterační proces (18.5) rychle konverguje, pokud ovšem vůbec konverguje. Newtonova metoda má tři nevýhody. Za prvé její použitelnost závisí na počátečním odhadu řešení $x^{(0)}$. Při nevhodném odhadu se proces zhroutí. Tomu lze někdy předejít tím, že se poslední člen v rovnici (18.5) násobí nějakým vhodným parametrem tak zvoleným, aby aproximace $x^{(i+1)}$ byla v jistém smyslu lepší než $x^{(i)}$, např. aby poskytovala menší hodnotu funkce $\bar{\Phi}(x)$. Druhá nesnáze je v tom, že při každé iteraci je třeba řešit soustavu rovnic vždy znovu. Tuto nevýhodu nemají modifikované metody, o nichž jsme pojednali v předchozí kapitole, ale ty mají zase jiné nedostatky. Konečně třetí nevýhoda spočívá v tom, že analytické odvození Jacobiho matice bývá často pracné. Matici by bylo možné počítat také numericky pomocí konečných diferencí, kterými bychom nahradili parciální derivace. Ale takový výpočet není hospodárný.

Soustředíme se nyní na odstranění třetí nevýhody. Nabízí se možnost nahradit Jacobiho matici $J(x)$ nějakou jinou, přibližnou maticí $B(x)$ kterou by bylo možné snadno sestavit z výsledků předchozích iterací. Místo abychom tuto matici v každém iteračním kroku znovu počítali, budeme ji pouze korigovat. Naší snahou bude najít takové korekce, které nebudou vyžadovat příliš mnoho operací.

Budeme-li považovat v rovnici (18.2) hodnotu x za i -tou iteraci a hodnotu x^* za $(i+1)$ -ní iteraci, bude

$$f^{(i+1)} - f^{(i)} = J^{(i+1)}(x^{(i+1)} - x^{(i)}) \quad (18.8)$$

Když Jacobiho matici J nahradíme její přibližnou náhradou B , bude pro ni platit rovnice (18.8) v této úpravě

$$y^{(i)} = B^{(i+1)} \Delta^{(i)} \quad (18.9)$$

kde

$$y^{(i)} = f^{(i+1)} - f^{(i)}$$

$$\Delta^{(i)} \equiv x^{(i+1)} - x^{(i)}$$

Vztah (18.9) se nazývá kvazi-Newtonova rovnice. Známe-li vektory $\Delta^{(i)}$, $y^{(i)}$, není tím matice $B^{(i+1)}$ ještě určena; úloha je mnohoznačná. Existuje mnoho metod, jak matici $B^{(i+1)}$ nebo přímo její inverzi účelně sestavit. Nebudeme je však probírat a zájemce odkazujeme na speciální literaturu. ²²⁾

Příklad 31

Ukážeme aplikaci kvazi-Newtonovy metody na příkladu řešení nelineární soustavy rovnic pro dvě neznámé. Rovnice (18.1) bude mít tvar

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{a}$$

Konkrétně bude dáno

$$\begin{aligned} 4x_1^3 + 2x_1x_2^2 - 0,904 &= 0 \\ 2x_1^2x_2 + 8x_2^3 - 6,12 &= 0 \end{aligned} \tag{b}$$

Význam symbolů v rovnici (18.1) je

$$f = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

Vypočteme Jacobiho matici

$$\begin{aligned} J = \frac{\partial f}{\partial x^T} &= \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 12x_1^2 + 2x_2^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2x_1^2 + 24x_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{d}$$

Je pozitivně semidefinitní, neboť determinant ani subdeterminant matice (d) nemůže být záporný. Můžeme tedy použít dále popsané metody.

²²⁾ BRODLIE, K. - GOURLAY, A. - GREENSTADT, J.: Rank-one and rank-two corrections to positive definite matrices expressed in product form. - "J. Inst. Math. Appl." 11 (1973), s. 73-82.

Odhadneme řešení, tj. zvolíme nultou aproximaci. Např. zvolíme

$$x^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

Dosadíme-li (e) do (b), vyjde zbytkový vektor

$$f^{(0)} = \begin{Bmatrix} -0,904 \\ 1,880 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

Z rovnice (18.5) vypočteme první aproximaci. Nultá aproximace Jacobiho matice a její inverze jsou

$$[J^{(0)}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix} \quad [J^{(0)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \quad (g)$$

Přírůstek vektorů posuvů vyjde

$$\Delta x = x^{(1)} - x^{(0)} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,904 \\ 1,880 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,45200 \\ -0,07833 \end{Bmatrix} \quad (h)$$

takže

$$x^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0,45200 \\ 0,92167 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

Protože nultá aproximace nemusí být vhodně volena, doporučuje se nepoužít celého přírůstku Δx , ale jen jeho části $\Delta x^{(1)} = \beta \Delta x$. Koefficient β se určí zkusmo tak, aby práce "nevyvážených sil" $f^{(1)}$ na posuvech Δx byla co nejbližší k nule, aby tedy platilo

$$|f^{(1)\top} \Delta x| \leq \varepsilon |f^{(0)\top} \Delta x| \quad (j)$$

kde ε je nějaká zvolená tolerance (např. $\varepsilon = 0,5$). Tím se často předejde možné divergenci a zkrátí výpočet. Hodnota (i) požadavku (j) vyhoví, takže výběr vhodné velikosti β můžeme ignorovat a brát $\beta = 1$. Aproximaci (i) odpovídají hodnoty

$$f^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0,23330 \\ 0,52002 \end{Bmatrix} \quad (k)$$

vypočtené z rovnic (b) a (i).

V dalším výpočtu budeme vyčíslovat při každé iteraci už jenom Jacobiho matici, ale nikoli její inverzi; tu budeme získávat korekcemi podle algoritmu, který uvedeme. Invertování Jacobiho matice tedy odpadne. Pro $i = 0$ vypočteme z rovnice (18.9)

$$\Delta^{(0)} = [B^{(1)}]^{-1} y^{(0)} \quad (l)$$

$$\Delta^{(0)} = x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0,45200 \\ -0,07833 \end{Bmatrix} \quad (m)$$

$$y^{(0)} = f^{(1)} - f^{(0)} = \begin{Bmatrix} 1,13730 \\ -1,35998 \end{Bmatrix} \quad (n)$$

Dále vezmeme

$$B^{(0)} = J^{(0)} \quad [B^{(0)}]^{-1} = [J^{(0)}]^{-1} \quad (o)$$

Korekce matice $[B^{(i)}]^{-1}$ probíhá takto :

$$[B^{(i+1)}]^{-1} = A^{(i)T} [B^{(i)}]^{-1} A^{(i)} \quad (p)$$

kde

$$A^{(i)} = I + v^{(i)} w^{(i)T}$$

$$I = \text{jednotková matice}$$

$$v^{(i)} = \alpha^{(i)} B^{(i)} \Delta^{(i)} - y^{(i)}$$

$$w^{(i)} = \frac{\Delta^{(i)}}{\Delta^{(i)T} y^{(i)}}$$

$$\alpha^{(i)} = \sqrt{\frac{\Delta^{(i)T} y^{(i)}}{\Delta^{(i)T} B^{(i)} \Delta^{(i)}}}$$

Korekci (p) lze použít, pokud $\alpha^{(i)} < 10^5$. Jinak mohou být výsledky numericky znehodnoceny špatnou podmíněností matice $A^{(i)}$. Zpřesněná matice (p) splňuje kvazi-Newtonovu rovnici

$$\Delta^{(i)} = [B^{(i+1)}]^{-1} y^{(i)} \quad (q)$$

V našem případě vyjde

$$\Delta^{(0)T} y^{(0)} = 0,62059$$

$$w^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0,72834 \\ -0,12622 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta^{(0)T} B^{(0)} \Delta^{(0)} = 0,55587$$

$$\alpha^{(0)} = 1,05661$$

$$v^{(0)} = \begin{Bmatrix} -0,18213 \\ -0,62645 \end{Bmatrix}$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,86735 & 0,02299 \\ -0,45627 & 1,07907 \end{bmatrix}$$

$$[B^{(1)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,38482 & -0,01054 \\ -0,01054 & 0,04878 \end{bmatrix}$$

Když tuto matici dosadíme za $[J^{(1)}]^{-1}$ do rovnice (18.5), vyjde druhá aproximace

$$x^{(2)} = x^{(1)} - [B^{(1)}]^{-1} f^{(1)} \quad (r)$$

Dostaneme

$$x^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0,3677 \\ 0,8988 \end{Bmatrix} \quad (s)$$

V iteracích bychom mohli pokračovat. Přesné řešení je

$$x^* = \begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,9 \end{Bmatrix} \quad (t)$$

Příklad 32

Nelineární rovnice z příkladu 31 můžeme interpretovat jako úlohu o rovnováze nelineární mechanické soustavy o dvou stupních volnosti. Vrátime-li se k označení z kapitol 16. a 17., dostaneme pro vratné síly vzorec

$$R = K(q) q = \begin{bmatrix} 4x_1^2 & 2x_1x_2 \\ 2x_1x_2 & 8x_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Zatěžující síly jsou

$$F(t) = \begin{Bmatrix} 0,904 \\ 6,12 \end{Bmatrix} \cdot \varphi(t) \quad (b)$$

kde $\varphi(t)$ je monotónně rostoucí funkce času, $0 \leq \varphi(t) \leq 1$. Tečná matice tuhosti je totožná s Jacobiho maticí z příkladu 31

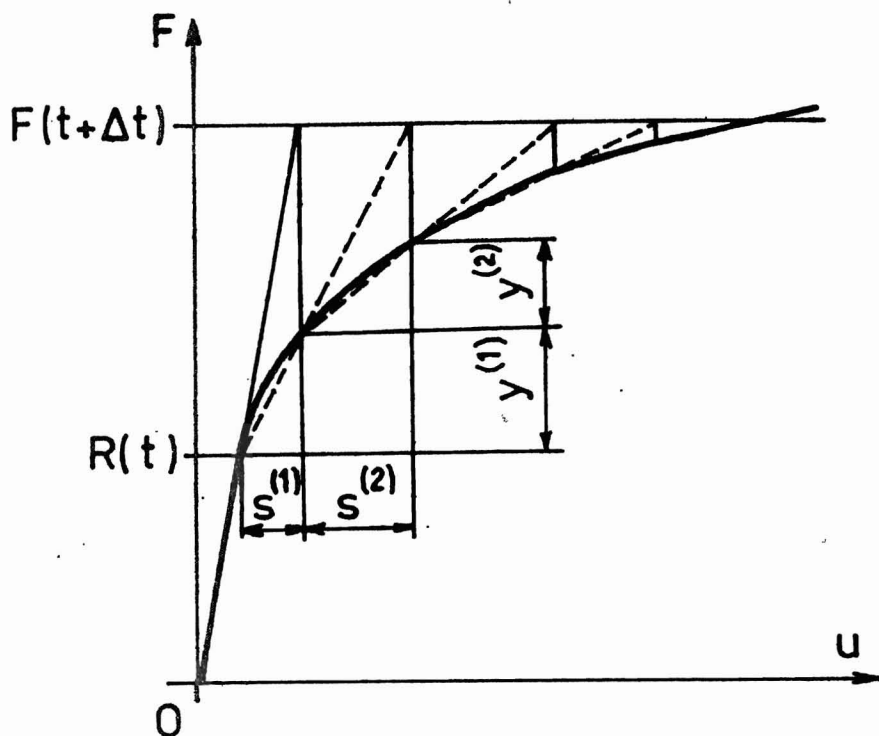
$$K(t) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 + 2x_2^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2x_1^2 + 24x_2^2 \end{bmatrix} \quad (c)$$

kde $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$. Za rovnováhy je, jak víme z řešení příkladu 31, $x_1 = 0,4$; $x_2 = 0,9$.

Kdybychom měli jen jeden stupeň volnosti, dostali bychom rovnici

$$K(u) \cdot u = F(t) \quad (d)$$

a iterace, kterou jsme popsali v příkladu 31, by probíhala tak, jak je naznačeno na obr. 50. Je zřejmé, že matice B v kvazi-Newtonově rovnici má význam směrnice sečen urychlujících konvergenci.



OBR. 50

Kvazi-Newtonovy metody (někdy označované jako algoritmy s variabilní metrikou) bývají součástí moderních programových systémů pro řešení úloh z nelineární mechaniky, neboť jsou relativně nejefektivnější.

19. KRITÉRIA KONVERGENCE

Volba kritéria, podle kterého rozhodujeme, zda iterační proces skončil, má u nelineárních úloh velký význam. Jsou-li tolerance příliš volné, vznikají nepřipustné chyby, které se kumulují. Jsou-li naopak příliš těsné, počítá se zbytečně dlouho; požadujeme-li přesnost, které nelze na daném počítači dosáhnout, nedopočítáme se vůbec.

Kritérium pro ukončení iteračního procesu můžeme volit různě. Nabízí se porovnávání posuvů, porovnávání nevyvážených sil a porovnávání deformační energie. Protože prvotní neznámou jsou zpravidla posuvy, je nej přirozenější deformační (posuvové) kritérium

$$\frac{\|\Delta u^{(i)}\|}{\|u(t+\Delta t)\|} \leq \varepsilon_D \quad (19.1)$$

Dvojitými čarami vyznačujeme euklidovskou normu. Hodnota určuje toleranci. Vektor $u(t+\Delta t)$ bohužel předem neznáme, což činí volbu ε_D problematickou. Proto je výhodnější vycházet z kvocientu

$$q = \frac{\|\Delta u^{(i)}\|}{\|\Delta u^{(i-1)}\|} \quad (19.2)$$

Kritérium konvergence je $q < 1$. Jestliže se tento kvocient v průběhu iterací nezvětšuje, platí nerovnost

$$\|u^*(t+\Delta t) - u^{(i)}(t+\Delta t)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^k \|\Delta u^{(i)}\| \quad (19.3)$$

Geometrickou řadu na pravé straně (19.3) můžeme sečíst, takže dostaneme

$$\|u^*(t+\Delta t) - u^{(i)}(t+\Delta t)\| \leq \frac{q}{1-q} \|\Delta u^{(i)}\| \quad (19.4)$$

Pravá strana rovnice (19.4) je odhadem toho, co ještě zbývá "doiterovat". Za kritérium tedy můžeme zvolit nerovnost

$$\frac{q}{1-q} \|\Delta u^{(i)}\| \leq \varepsilon_D \|u(\tau)\| \quad (19.5)$$

kde τ je nějaký reprezentativní okamžik, např. $\tau = t$. Zkušenost však ukazuje, že toto kritérium není spolehlivé, neboť předpoklad nerostoucího kvocientu nebývá u nelineárních úloh vždy splněn a levá strana v nerovnosti (19.5) pozbývá původního smyslu.

Nevyvážené síly poskytují kritérium

$$\begin{aligned} & \|F(t+\Delta t) - R^{(i)}(t+\Delta t) - M\ddot{u}^{(i)}(t+\Delta t)\| \leq \\ & \leq \varepsilon_F \|F(t+\Delta t) - R(t) - M\ddot{u}(t)\| \end{aligned} \quad (19.6)$$

Na levé straně (19.6) je norma nevyvážené síly, na pravé straně norma přírůstku síly za integrační krok. Je-li tento přírůstek v některém kroku malý, je pravá strana zbytečně malá; proto je radno ponechat na pravé straně vždy tu normu, která je větší, i když spadá do jiného integračního kroku.

Nevýhodou kritéria (19.6) je, že v úlohách z plasticity s malým zpevněním mohou být nevyvážené síly malé, ale přírůstky posuvů velké. Společným nedostatkem dosud probraných kritérií je, že vektor zobecněných posuvů, popř. vektor zobecněných sil, nemusí být rozměrově homogenní (např. vektor zobecněných sil může obsahovat osamělé síly i silové dvojice, vektor zobecněných posuvů se může skládat ze skutečných posuvů a z úhlů otočení). Některé prvky vektoru mohou být z tohoto důvo-

du v normě nepřiměřeně zastoupeny. Tuto nevýhodu nemá energetické kritérium

$$\begin{aligned} \Delta u^{(i)T} (F - R^{(i-1)} - M \ddot{u}^{(i-1)})_{t+\Delta t} &\leq \\ &\leq \varepsilon_E \Delta u^{(i)T} (F(t+\Delta t) - R(t) - M \ddot{u}(t)) \end{aligned} \quad (19.7)$$

Dosadíme-li sem $\varepsilon_E = 1$, může nerovnost (19.7) sloužit také jako kritérium divergence. Nejlépe se osvědčuje kombinace kritérií (19.6) a (19.7).

Má-li konstrukce "měknoucí" charakteristiku, musí být ε_D , resp. ε_E malé. Při "tuhnoucí" charakteristice musí být naopak malé ε_F . Běžně se doporučují tolerance

$$\varepsilon_F = 0,1 \quad \varepsilon_D = 0,001 \quad \varepsilon_E = 10 \varepsilon_D \varepsilon_F \quad (19.8)$$

Tyto hodnoty uvádíme pouze pro představu, nikoli jako předpis. V praxi je třeba se přizpůsobit charakteru řešených úloh.

LITERATURA

- /1/ BATHE, K.J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1982.
- /2/ BECKER, E.D. - CAREY, G.F. - ODEN, J.T.: *Finite Elements. An Introduction*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1981.
- /3/ BREBBIA, C.A. (red.): *Boundary Element Methods*. Springer-Verlag, Berlin 1981.
- /4/ CHEUNG, Y.K. - YEO, M.F.: *A Practical Introduction to Finite Element Method*. Pitman Publ., Marshfield, Ma., 1979.
- /5/ COOK, R.D.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 2.vyd. John Wiley, New York 1981.
- /6/ KANDIDOV, V.P. - ŠESNOKOV, S.S. - VYSLOUCH, V.A.: *Metod konečných elementov v zadačach dinamiki*. Moskovskij Universitět, Moskva 1980.
- /7/ *Méthodes numériques dans les sciences de l'ingénieur*. Dunod, Paris 1979.
- /8/ MOROZOV, Ja.M. - NIKIŠKOV, G.P.: *Metod konečných elementov v mechanike razrušenija*. Mir, Moskva 1980.
- /9/ MURRAY, W. (red.): *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*. Academic Press, London 1972.
- /10/ ODEN, J.T.: *Finite Elements of Nonlinear Continua*. McGraw-Hill, New York 1972.
- /11/ POBEDRJA, B.E.: *Čislennyje metody v teoriji uprugosti i plastičnosti*. Moskovskij Universitět, Moskva 1981.
- /12/ RAO, S.S.: *The Finite Element Method in Engineering*. Pergamon Press, Oxford 1982.
- /13/ REDDY, J.N. - RASMUSSEN, M.L.: *Advanced Engineering Analysis*. John Wiley, New York 1982.
- /14/ SAATY, T.L. - BRAM, J.: *Nonlinear Mathematics*. McGraw-Hill, New York 1964.
- /15/ VALCHÁŘOVÁ, J.: *Soudobé numerické metody v mechanice kontinua*. SNTL, Praha (v tisku).

- /16/ WUNDERLICH, W. - STEIN, E. - BATHE, K.J. (red): Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Springer-Verlag, Heidelberg 1981.
- /17/ ZIENKIEWICZ, O.C. - HOLISTER, G.S.: Stress Analysis. Recent Developments in Numerical and Experimental Methods. John Wiley, New York 1965.

| | |
|--------------------|---|
| Název: | Stavba strojů 92 NOVÉ SMĚRY VE VYUŽITÍ METODY KONEČNÝCH PRVKŮ |
| Autor: | Prof. Ing. Cyril Höschl |
| Počet stran: | 122 |
| Náklad: | 160 výtisků |
| Formát: | A4 |
| Číslo publikace: | 60 - 603 - 84 (2680) |
| Vydal a rozmnožil: | Dům techniky ČSVTS Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23 |
| Rok vydání: | 1984 DT 01 - 74/84 |
| Cena publikace: | 260 Kčs |