

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**MODIFIKACE PEVNOSTNÍCH
VÝPOČTŮ PRO MALÉ
DIGITÁLNÍ POČÍTAČE**

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1976

Předmluva

Protějškem a doplňkem mechanizace a automatizace prací ve výrobě je mechanizace a automatizace prací v přípravě výroby, v jejím řízení a v ekonomice. Rozhodující úkol zde připadá výpočetní technice, především číslicovým počítačům. Velké počítače představují velkou investici. Proto je obvykle mohou používat ke zkvalitnění své práce konstruktéři jen ve velkých závodech. Do konstrukčních kanceláří i menších závodů pronikají však malé číslicové počítače, které jsou mnohem méně náročné na obsluhu i údržbu, lze je instalovat prakticky všude a představují vynikající pomoc pro běžnou i náročnější výpočetní práci.

Účelem tohoto semináře je uvést některé poznatky z numerické matematiky, nezbytné pro práci s jakýmkoli číslicovým počítačem, a příklady využití malých číslicových počítačů v konstrukční praxi. Seminář je určen konstruktérům a technikům, kteří nemají zvláštní matematickou přípravu, a snaží se jim poskytnout takové informace a podněty, aby mohli efektivně a správně využívat výpočetní techniku.

Pracovníci Domu techniky ČVTS v Praze jsou přesvědčeni, že tímto seminářem přispějí ke zkvalitnění práce konstruktérů a techniků v našich závodech, a tím i k plnění náročných úkolů šesté pětiletky.

Prof. Ing. Cyril Höschl

Obsah

	Str.
Předmluva	3
1. Úvod	7
2. Práce s malými digitálními počítači	9
3. O podmíněnosti lineárních soustav rovnic	11
4. O řešení lineárních soustav a o inverzi matic	17
5. O harmonické analýze	26
6. O Taylorově řadě a o diferenčních vzorcích	33
7. Aproximace funkcí Čebyševými polynomy	36
8. O Gaussově kvadratuře	40
9. Interpolace pomocí spline-funkcí	42
10. Průhyb nosníku jako úloha s počátečními podmínkami	52
11. O stabilitě řešení diferenciálních a diferenčních rovnic	62
12. O maticích přenosu	67
13. Rozvětvené konstrukce	87
14. O maticích přenosu (pokračování)	96
15. Několik poznámek k práci s maticemi	108
Literatura	110

Kdo chvíli stál,
již stojí opodál.

Jan Neruda

1. Úvod

Nezbytnou pomůckou starší generace konstruktérů bylo logaritmické pravítko. Jednoduchost, s jakou lze na něm násobit, dělit, umocňovat a odmocňovat, i jeho malé rozměry, láce a prakticky bezporuchový, bezhluchý provoz činí z logaritmického pravítka dodnes počítaací stroj "par excellence". Pro náročnější numerické výpočty se používaly tabulky, popř. mechanické počítaací stroje. Později byly tyto stroje upraveny tak, aby násobení a dělení na nich probíhalo automaticky. Dnes na ně pohlížíme jako na muzeální stroje, ačkoli ještě nedávno patřily k velkým vymoženostem výpočetní techniky. Jsou velké, hřmotné a pomalé, nemohou tedy konkurovat mnohem výkonnějším elektronickým kalkulačním a počítaacím strojům. Změny, které tyto moderní stroje způsobují, jsou dalekosáhlé.

Mění se nejen způsob výpočtů, ale i náplň exaktních technických nauk, počítaje v to i samu numerickou matematiku. Různé grafické a početní metody, kterými se ještě dnes hemží učebnice na některých školách, rychle ztrácejí význam a jsou nahrazovány novými. Do jisté míry se mění i způsob technického myšlení, především způsob formulace úloh. Klade se důraz na obecnost a exaktnost řešení, kdežto rozsah numerických výpočtů v běžné konstruktérské praxi přestal být - až na výjimky - limitujícím činitelem.

Například výpočet deformací staticky neurčitě uloženého osazovaného hřídele s uvažováním vlivu posouvajících sil je nyní jednodušší a kratší a mnohem přesnější, než bylo grafické řešení průhybu bez vlivu posouvajících sil s výpočtem reakcí pomocí příčinkových činitelů. Jestliže se tyto příčinkové činitele odečítaly z grafického řešení průhybů, stávalo se, že jejich přesnost nepostačovala pro numerický výpočet staticky neurčitých reakcí ze špatně podmíněné soustavy lineárních rovnic. Řešení pak bylo u složitějších úloh nejen pracné, ale dokonce nemožné, neboť vedlo numericky k falešným výsledkům. Čistě numerické řešení takových úloh bylo natolik pracné, a tedy i nákladné, že se dávala přednost různým zjednodušením úlohy (vynechávaly se některé podpory aj.).

Zjednodušování úloh až do snadno řešitelných fyzikálních a matematických modelů je i dnes pracovní metodou každého konstruktéra-výpočtáře. Rozdíl je však v tom, že dnešní konstruktér používá tyto silně zjednodušené představy a modely jen k předběžnému řešení úlohy. Detailní výpočet může být - bez nadměrné námahy - odvozen z modelů mnohem složitějších, které lépe vystihují skutečnost.

Používání tabulek různých funkcí - až na speciální funkce - se stává zbytečným. Elektronické kalkulační stroje a počítače jsou schopny generovat běžné funkce s velkou přesností pro jakoukoli hodnotu argumentu (v rozumném rozsahu), takže odpadá nutnost interpolace. Některé části numerické matematiky proto postupně ztrácejí význam a jiné - např. aproximace funkcí racionálními funkcemi - její získávají. Protože již nejsme vázáni tabulkami, jež měly nejčastěji ekvidistantní hodnoty argumentu, získává Gaussova metoda numerické kvadratury převahu nad tradičními metodami, vycházejícími z lichoběžníkového nebo Simpsonova pravidla. Uplatňují se maticové metody, diferenční počet, iterační metody. Zvláštní důležitost získávají i problémy odhadu dosažitelné přesnosti a stability numerického výpočtu. Řešíme-li např. lineární soustavu rovnic, chceme vědět nejen je-li teoreticky řešitelná, ale je-li řešitelná také prakticky, tj. nemohou-li nezbytným zaokrouhlováním čísel vzniknout nepřijatelné chyby.

Tato skripta nemohou nahradit učebnice numerické matematiky. Probereme v nich jen nejdůležitější poznatky bez nároků na úplnost. Výběr látky přizpůsobíme potřebám pracovníků, kteří mohou používat malé elektronické číslicové počítače k běžným výpočtům z oboru mechaniky, především pružnosti a dynamiky. Chceme je upozornit na zvláštní metody, které mohou s výhodou použít, a na některé problémy numerické matematiky, jež pro ně mohou mít význam. Probereme také základy některých metod, které se používají v knihovních programech malých počítačů. Protože se programovací jazyky těchto počítačů navzájem značně liší, nebudeme se technickou stránkou programování zabývat; tuto problematiku zvládne každý sám v několika dnech, dá-li si práci s prostudováním firemního návodu.

Malé počítače pracují zpravidla v systému pohyblivé desetinné čárky, takže počítají s velkou numerickou přesností, avšak mají malý rozsah operační paměti. Zvětšování paměti užitím přídatných bloků je možné a účelné jen do určité míry, dané poměrně malou operační rychlostí počítače. Budeme probírat metody, vhodné pro tento typ počítačů (např. metodu matic přenosu) a nikoli ty, které se hodí jen pro velké počítače (např. metodu konečných prvků).

Ve způsobu výkladu dáváme přednost induktivní metodě a názorným příkladům před exaktními dedukcemi, neboť se domníváme, že takový způsob výkladu je technikům bližší. Ty, kteří si chtějí nebo potřebují dále prohloubit a zpřesnit své znalosti, odkazujeme na literaturu podle připojeného seznamu. Ke studiu skript potřebujeme jen základní poznatky z diferenciálního a integrálního počtu a základy maticové lineární algebry. Ty jsme opakovaně probírali v nedávných seminářích, pořádaných Domem techniky ČVTS v Praze.

Autor skript oceňuje náročnou práci všech pracovníků Domu techniky ČVTS v Praze, kteří se podíleli na přípravě semináře a na vydání těchto skript, a upřímně jim za tuto spolupráci děkuje.

Stanu se menším a ještě menším,
až budu nejmenším na celém světě.

Jiří Wolker

2. Práce s malými číslicovými počítači

Tyto počítače mají zpravidla základní jednotku, která se prodává samostatně, a příslušenství podle volného výběru. Základní jednotka slouží k přímým "kalkulačkovým" výpočtům i k uskutečnění programovaných výpočtů. Paměť bývá společná pro program i numerická data, tj. pro krátký program můžeme používat mnoho numerických dat a naopak. Kromě běžných aritmetických operací bývají vestavěny programy pro generování různých funkcí (logaritmických, exponenciálních, goniometrických), které vyvoláváme pouhým stisknutím tlačítka. Některé počítače jsou přizpůsobeny i výpočtům s maticemi, popř. s komplexními čísly. Počítače jsou schopny vykonávat také logické operace (zjišťovat, které ze dvou čísel je větší atd. a podle toho rozhodnout, v které programové větvi se má pokračovat). Vnější paměť představují magnetické štítky, pásy nebo výjimečně i jiná zařízení. Výstupem z počítače bývá tiskárna, někdy však jen display (číslícová obrazovka). Tiskárna je velmi užitečná, neboť umožňuje snadnou dokumentaci výpočtů. Lze vytisknout a uložit program, vstupní i výstupní data. To umožňuje i dodatečnou kontrolu výpočtů a vylučuje nebezpečí chyb vzniklých nepozorným opisováním číslic z displaye.

Velkou pomocí pro programátora je automatické, okamžitá indikace chyb při vkládání programu, poruší-li programátor pravidla syntaxe (chybějící závorčka, nelogický nebo nesprávný sled znaků aj.). Některé chyby jsou indikovány i v průběhu výpočtu (přehlcení nebo podhlcení počítače, dělení nulou, odmocnina ze záporného čísla apod.). Ve styku s počítačem může tak programátor ihned opravit chyby, jež vznikají nepozorností nebo nedostatečně důsledným myšlením. To má velký vliv na jeho výchovu. Programátor napříště ví, nač má zaměřit pozornost, aby se znovu nedopouštěl stejné chyby.

Ani nejpečlivěji sestavený program nebývá tak dokonalý, aby nemohl být ještě dokonalejší, tj. účelnější a úspornější. To se pozná teprve při jeho používání. Proto je vždy výhodné, zpracovává-li programy též pracovník, který je pak používá. Dobře osvědčené a vyzkoušené programy se mohou zařazovat do manuálů, takže je pak používají i další pracovníci.

Příslušenstvím základní jednotky podle volného výběru uživatele bývá doplňková operační paměť, rozšiřující kapacitu počítače. Periferními zařízeními pak bývají vnější paměť, souřadnicový zapisovací stroj, který umožňuje rychlé grafické zpracování výsledků, a přístroj k převodu zadaných křivek na digitální údaje pro další numerické zpracování.

Má-li se počítač účelně využít, je nezbytné, aby práce s ním byla dobře zorganizována. Každý pracovník, který to potřebuje, by měl mít k němu přístup, a to v čase, kdy potřebuje. Předpokladem však je, aby byl dokonale seznámen s činností počítače a uměl aktivně používat všechny jeho vymoženosti. Zbytečným laborováním nezaškolených pracovníků se ztrácí mnoho času a zvětšuje se riziko poškození počítače nesprávnou obsluhou. Ztráty vznikají i při ne dost obratně sestavených programech, např. dává-li se tisknout zbytečně

mnoho dat, kreslí-li se křivky se zbytečně malým krokem argumentu, vkládají-li se ručně znovu data, která by mohla být registrována ve vnější paměti, nevyžívají-li se všechny možnosti počítače apod.

Jednou z možných forem práce s malým počítačem je zřídit výpočetní centrum s několika stálými pracovníky, kteří přebírají požadavky ostatních pracovníků, vypracovávají programy, obsluhují počítač a dodávají hotové výsledky. Za vhodnější však považujeme, jsou-li pro práci s počítačem vyškoleni všichni pracovníci, kteří výpočty potřebují, a pracují pak s počítačem sami podle možností, které jim dává společný časový plán. Pracovník, odpovědný za počítač, obstarává vypracování tohoto plánu (dispečink), stará se o údržbu a o provozní materiální zásobování. Důvodem pro tuto druhou alternativu je právě výše uvedená zpětná vazba: počítač si vychovává své uživatele, neboť ten, kdo prakticky a ze své zkušenosti ví, co všechno počítač dovede, ví také, co může od počítače očekávat. Ponenáhlu přizpůsobuje své pracovní i výpočtové metody možnostem počítače; jen tak lze dosáhnout největšího užitku, který může počítač poskytnout.

Lze také doporučit, aby se nešetřilo na příslušenství počítače; zejména rozšíření paměti mnohonásobně zvětší jeho užitečnost při technických výpočtech. Ale i grafický výstup, tj. souřadnicový zapisovač, je neobyčejně výhodným zařízením. Graf funkce je pro některé účely vhodnější výstup z počítače než málo přehledná numerická tabulka. Tímto zařízením lze také ušetřit velkou práci i čas při kreslení složitějších obrázků a grafů, které potřebujeme pro nejrůznější účely.

Výrobce zpravidla dodává s počítačem také sbírku nejdůležitějších programů. Bývají vypracovány velmi důmyslně a tak, aby byly co nejuniverzálnější. Někdy je však právě tato jejich univerzálnost na závalu. Potřebujeme-li např. uskutečnit sled maticových operací, které na sebe navazují, nebude se nám příliš hodit program vypracovaný společně pro sečítání a násobení matic, do něhož musíme vždy znovu matice vkládat a registrovat mezivýsledky, ačkoli je nepotřebujeme. Pro inverzi, která by mohla následovat, máme jiný program, který nenavazuje. V takovém případě bude mnohem výhodnější, sestavíme-li si sami programové bloky pro jednotlivé operace, jež můžeme stavebnicově skládat ve větší celky podle potřeby. Protože do těchto programů dobře vidíme, není pro nás obtížné dosáhnout návaznosti bloků tak, aby mezivýsledky, pokud na nich nemáme zájem, zůstávaly v operační paměti a aby se postupně "přemazávaly", není-li jich už třeba. Tím se uvolní paměť pro další operace. K takovéto tvůrčí práci s počítačem je nutné mít zkušenost. Tu rychle získáme, budeme-li samostatně promýšlet a zpracovávat programy pro jednodušší úlohy a budeme-li se zároveň snažit i o jejich co nejúčelnější uspořádání.

Každý program, pokud je to možné, kontrolujeme pomocí jednoduchého vzorového příkladu. Není-li to z praktických důvodů možné (výpočet kontrolního příkladu by byl časově velmi náročný), snažíme se takto kontrolovat alespoň důležité části programu. Podle možností používáme také různé kontrolní testy, abychom si ověřili správnost a popř. numerickou přesnost výsledků.

Jestliže jsme na počátku označili logaritmické pravítko za velmi užitečný a stále moderní počítačový stroj, musíme tytéž a ještě lepší vlastnosti připsat i kapesnímu elektronickému kalkulátoru, který proniká i do škol jako učební pomůcka. Rozsah jeho použitelnosti se však - přes všechny nesporné výhody - podstatně liší od aplikačních možností programovatelných počítačů, na něž se v dalších úvahách zaměříme.

Figurky stojí rok co rok,
figurky pestré, laškující.
Je marno hrát na útok,
je marno hrát na pozici.

Viktor Dyk

3. O podmíněnosti lineárních soustav rovnic

Většina problémů technické praxe vede k úlohám lineární mechaniky; jim pak v algebře odpovídá řešení soustav lineárních rovnic. Takové soustavy dostáváme často i při jiných úlohách, např. při zpracování empirických dat (lineární regresi), při aproximaci funkcí aj. V maticovém tvaru řešíme soustavu

$$[A] \{x\} = \{b\} \quad (1)$$

formálně jednoduše tak, že k čtvercové matici A , o níž předpokládáme, že je regulární, najdeme inverzní matici A^{-1} ; řešení je pak

$$\{x\} = [A]^{-1} \{b\}. \quad (2)$$

Z matematického hlediska jde o jednoduchý problém; z numerického hlediska tomu tak není.

Uvědomíme-li si, že prvky matice A můžeme zaznamenat jen s konečným počtem desetinných míst, vidíme, že přidáním jakýchkoli čísel mimo rozsah těchto míst nemůžeme matici A změnit. Přičteme-li např. k číslu $a = 0,234567 \cdot 10^2$ číslo $b = 0,135468 \cdot 10^{-4}$ a jsme-li přitom omezeni v mantise čísla šesti ciframi, dostaneme součet $a + b = c \approx 0,234567 \cdot 10^2 = a$. Číslo b se v součtu vůbec neuplatní, takže čísla a , c jsou numericky ekvivalentní, ačkoli se sobě nerovnají. Nemáme možnost je v našich výpočtech rozlišit, nemáme-li v mantise více než šest míst; jsou to tedy "prakticky" stejná čísla. Informace obsažená v číslu b se přitom ztrácí. Jiným důvodem nerozlišitelnosti dvou čísel může být jejich empirický původ. Vzniklo-li číslo a měřením nějaké veličiny a je-li číslo b v mezích pozorovacích chyb, představuje součet $c = a + b$ numericky možnou hodnotu veličiny a . Jinými slovy, koeficienty v soustavě (1) jsou "pokaženy šumem" vzniklým buď nutným zaokrouhlováním čísel, nebo nepřesností fyzikálních dat, popř. obojím.

Uveďme např. tuto soustavu:

$$\begin{aligned} x + \quad \quad \quad \gamma &= 2,000 \text{ 01}, \\ x + 1,000 \text{ 01 } \gamma &= 2,000 \text{ 02}. \end{aligned} \quad (3)$$

Řešení je

$$x = 1,000 \text{ 01}, \quad \gamma = 1. \quad (4)$$

Kdyby pravá strana soustavy (3) vznikla měřením nějaké veličiny s přesností 1 promile, udávaly by obě rovnice totéž, totiž součet $x + \gamma = 2$. K separaci obou neznámých bychom potřebovali ještě rozdíl $x - \gamma$, avšak jeho výpočet ze soustavy (3) nemá smysl, neboť tato soustava pro to neobsahuje dostatečnou informaci; žádná matematická kouzla to nespraví. Pomohlo by teprve extrémní zvýšení přesnosti našeho měření, což nebývá vždy možné. Rozebereme tento případ podrobněji. Zavedeme nové proměnné

$$\xi = \frac{1}{2} (x + \gamma), \quad \eta = \frac{1}{2} (x - \gamma). \quad (5)$$

Pak soustava (3) dá

$$\begin{aligned} 2 \xi &= 2,000 \text{ 01}, \\ 2,000 \text{ 01 } \xi - 0,000 \text{ 01 } \eta &= 2,000 \text{ 02}. \end{aligned} \quad (6)$$

Okamžitě vidíme, že veličina η je v soustavě slabě zastoupena. Kdyby na pravé straně poslední rovnice bylo 2,001 00 místo přesné hodnoty 2,000 02 (chyba 0,5 promile), vyšlo by $\xi \approx 1$, $\eta = 100$, takže řešení by bylo

$$x = 101, \quad \gamma = -99, \quad (7)$$

zcela rozdílné od dřívějšího řešení (4).

Abychom mohli posoudit chyby, které vznikají uvedeným způsobem, potřebujeme nějak definovat "velikost" matice, popř. vektoru. K tomu je nutno přiřadit matici nějaké číslo, jež by tuto velikost charakterizovalo. Budeme je nazývat normou matice A a značit $\|A\|$. Má-li mít norma požadovaný smysl, musí vyhovovat těmto požadavkům:

- $\|A\| \geq 0$.

Zápornou normu tedy nepřipouštíme, podobně jako nezavádíme zápornou hmotnost těles. Rovnost $\|A\| = 0$ bude příslušet jenom nulové matici.

- $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ (c je libovolné číslo).

To je přirozený požadavek. Chceme, aby se norma zvětšila např. dvakrát, zvětšili-li matici také dvakrát.

$$3. \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Jde o trojúhelníkovou nerovnost, zobecněnou na případ obecné normy. Délka jedné strany trojúhelníku je vždy menší než součet (nebo nanejvýš rovna součtu) druhých dvou stran.

$$4. \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

To je Schwarzova nerovnost.

Z mnoha možností, jak definovat normu matice, uveďme dvě:

$$a) \text{ euklidovská norma} \quad \|A\|_E = \sqrt{\sum \sum a_{ij}^2}$$

$$b) \text{ spektrální norma} \quad \|A\|_S = \max \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

V tomto druhém případě značí $\lambda_i(A^T A)$ vlastní hodnoty λ_i matice $A^T A$. Je-li matice A reálná, je součin $A^T A$ symetrická a pozitivně semidefinitní matice.

Pro vektor x dostaneme podle obou definic stejně

$$\|x\| = \sqrt{\{x\}^T \{x\}} = \sqrt{x^T x} = \text{délka vektoru. }^*)$$

Nyní se už můžeme vrátit k úloze (1). Místo této soustavy řešíme vlastně jinou soustavu, a to

$$(A + E)\gamma = (b + \beta). \quad (8)$$

Označení matic závorkami jsme pro stručnost vynechali. Matice E a vektor β představují rušivý "šum", který způsobí, že místo správného vektoru $x = A^{-1}b$ dostaneme jiný vektor $\gamma = (A + E)^{-1}(b + \beta)$. Chceme nyní vědět, jaká bude relativní chyba výsledku. Vyjádříme ji poměrem norem $\|x - \gamma\| / \|x\|$. Nejprve vy počteme

$$\begin{aligned} x - \gamma &= A^{-1}b - (A + E)^{-1}(b + \beta) = x - (A + E)^{-1}(Ax + \beta) = \\ &= (A + E)^{-1} \{ (A + E)x - (Ax + \beta) \} = \\ &= (A + E)^{-1} \{ Ex - \beta \} \end{aligned} \quad (9)$$

^{*)} Jde o přenesený smysl slova; o skutečné délce lze hovořit jen u vektorů druhého nebo třetího řádu. Pod odmocninou je součet čtverců prvků vektoru.

a pak s použitím Schwarzovy a trojúhelníkové nerovnosti

$$\|x - y\| \leq \|(A+E)^{-1}\| \left\{ \|E\| \|x\| + \|b\| \right\}, \quad (10)$$

$$\|x\| \geq \|A\|^{-1} \|b\|.$$

Poslední vztah dostaneme z nerovnosti $\|A\| \cdot \|x\| \geq \|b\|$, uvědomíme-li si, že norma nemůže být záporná. Dělením první z nerovností (10) normou $\|x\|$ vyjde

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|} \leq \|(A+E)^{-1}\| \left(\|E\| + \frac{\|b\|}{\|x\|} \right). \quad (11)$$

Protože $\|b\|$ je velmi malé číslo, můžeme v posledním členu bez nebezpečí velké chyby zaměnit normu $\|x\|$ normou $\|A\|^{-1} \|b\|$ podle druhé nerovnosti (10). V matematice se dokazuje Banachova věta, podle níž

$$\|(A+E)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|E\|}. \quad (12)$$

Dosažením do (11) tedy po malé úpravě dostaneme pro hledanou relativní chybu nerovnost

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|E\|} \left\{ \frac{\|E\|}{\|A\|} + \frac{\|b\|}{\|b\|} \right\}. \quad (13)$$

Uvědomíme-li si, že norma šumu $\|E\|$ je malá, můžeme druhý člen ve jmenovateli zanedbat, aniž se tím příliš zmenší pravá strana (13) (aniž se tedy znehodnotí odhad daný touto nerovností). Konečně tedy máme

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \left\{ \frac{\|E\|}{\|A\|} + \frac{\|b\|}{\|b\|} \right\}. \quad (14)$$

Ve složené závorce je relativní velikost šumu na vstupu, na levé straně je pak relativní velikost šumu na výstupu. Nerovnost (14) tedy říká, že relativní šum na výstupu může být až $K(A)$ krát větší než na vstupu, přičemž

$$K(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \quad (15)$$

je tzv. kondiční číslo matice A . Je-li $K(A) = 1$, je matice A dokonale správně podmíněná, není relativní chyba na výstupu větší než relativní chyba na vstupu. Je-li naopak $K(A) = \infty$, je matice singulární. Velikost kondičního čísla je mírou špatné podmíněnosti matice A .

Použijeme-li spektrální normu, dostaneme pro kondiční číslo vztah

$$K(A) = \sqrt{\frac{\lambda (A^T A)_{max}}{\lambda (A^T A)_{min}}}. \quad (16)$$

Je-li matice A souměrná, je $A^T A = A^2$ a vztah (16) se zjednoduší na

$$K(A) = \frac{|\lambda(A)_{\max}|}{|\lambda(A)_{\min}|} \quad (17)$$

Je to tedy poměr největší a nejmenší absolutní vlastní hodnoty.

Poznamenejme, že velké kondiční číslo znamená možnost, avšak nikoli nutnost velkého zkreslení výsledku vlivem nepřesnosti vstupních dat nebo vlivem zaokrouhlování.

Mohlo by se zdát, že dobrou mírou nepřesnosti řešení by mohla být norma $\|r\| = \sqrt{r^T r}$ zbytkového vektoru

$$r = A\gamma - b \quad (18)$$

To je však mylný názor. Dokážeme to na tomto příkladu:

$$\begin{aligned} 0,780 x_1 + 0,536 x_2 &= 0,217, \\ 0,913 x_1 + 0,659 x_2 &= 0,254. \end{aligned}$$

Porovnáme-li podle normy $\|r\|$ dvě přibližná řešení, první $\{0,341; -0,087\}^T$ a druhé $\{0,999; -1,001\}^T$, zjistíme, že první by mělo být lepší. Přesné řešení $\{1; -1\}^T$ je však mnohem blíže k druhému přibližnému řešení.

1. úloha. Dokažte nerovnost $1 \leq K(A) < \infty$.

Řešení. Aplikujte Schwarzovu nerovnost na identitu $AA^{-1} = I$.

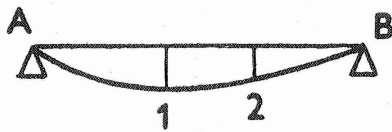
2. úloha. Dokažte, že platí

$$\frac{\|x - \gamma\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

Řešení. Nejprve dokažte, že $\gamma - x = A^{-1}r$, pak aplikujte Schwarzovu nerovnost. Výsledek naznačuje, že menšímu zbytkovému vektoru přísluší menší chyba. Nesmíme však zapomenout, že jde jen o omezení chyby shora, nikoli o její výpočet. Jak jsme viděli, může větší chybě příslušet i menší zbytkový vektor, avšak v mezích nerovnosti z této úlohy.

3. úloha. Je dán prostě podepřený nosník, při jehož zatížení vznikají v místech 1 a 2 průhyby $d_1 = 0,351$ mm, $d_2 = 0,402$ mm. V místech 1 a 2 přidáme tuhé podpory a chceme určit velikost reakcí v nich pomocí příčinkových činitelů. Abychom je zjistili, zatížíme nosník silou 1 MN nejprve v místě 1, pak v místě 2, a určíme $a_{11} = 0,800$ mm, $a_{12} = a_{21} = 0,780$ mm, $a_{22} = 0,810$ mm (a_{jk} = průhyb v místě j při zatížení silou 1 MN v místě k , přičemž $j, k = 1, 2$). Pro neznámé reakce dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}.$$



Obr. 1

Posuďte přesnost, s jakou dostaneme reakce x_1 , x_2 , jsou-li chyby našeho měření asi 2 %. Nosník je znázorněn na obr. 1.

Řešení. Matice A je souměrná. Anulováním determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

dostaneme kvadratickou rovnici $\lambda^2 - 1,610 \lambda + 0,0396 = 0$, z níž vypočteme vlastní hodnoty λ_1 , λ_2 a kondiční číslo

$$K(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1,585/0,025 = 63,4.$$

Chyba řešení bude tedy menší než asi 127 %. Jak bude skutečně velká, to však nevíme. Jisto je, že metoda, kterou jsme použili, nedává záruku, že dostaneme užitečné výsledky.

4. úloha. Dokažte, že čtverec euklidovské normy matice A je stopa součinu $A^T A$ (tj. součet prvků na hlavní diagonále této matice).

Řešení. Stačí rozepsat uvedený součin.

5. úloha. Dokažte nerovnost $\|A\|_S \leq \|A\|_E$.

Řešení. S použitím čtvrté úlohy; stopa matice se rovná součtu jejích vlastních čísel a ten musí být vždy větší než největší vlastní číslo. Rovnost vzniká jen, jde-li o jednoprvkovou matici nebo jsou-li ostatní vlastní čísla nulová.

6. úloha. Vypočtete euklidovskou a spektrální normu matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Řešení. $\|A\|_E = 4$; $\|A\|_S \doteq 3,19$.

7. úloha. Je dána souměrná a pozitivně semidefinitní matice B . Její největší vlastní číslo označme λ_1 . Dokažte, že vlastní čísla λ^* matice $(B - \lambda_1 I)$ jsou nekladná (I je jednotková matice).

Řešení. Podle definice vlastních čísel matice musí platit, že $(B - \lambda_1 I)x = \lambda^* x$, takže $Bx = (\lambda_1 + \lambda^*)x$. Součet $\lambda_1 + \lambda^*$ je tedy vlastní číslo λ_i matice B . Proto $\lambda^* = \lambda_i - \lambda_1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Avšak $\lambda_i \leq \lambda_1$, a tedy $\lambda^* \leq 0$, což jsme měli dokázat.

8. úloha. Dokažte, že spektrální normu matice A lze zapsat ve tvaru

$$\|A\|_s = \max_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_x \sqrt{\frac{x^T A^T A x}{x^T x}}$$

Řešení. Pro libovolný vektor x platí, že

$$\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} - \|A\|_s^2 = \frac{x^T A^T A x}{x^T x} - \lambda_1 = \frac{x^T (A^T A - \lambda_1 I) x}{x^T x}$$

Vzhledem k výsledku sedmé úlohy je číselník negativně semidefinitní. To znamená, že uvedený výraz je vždy menší než nula nebo nejvýš roven nule (v případě, že x je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_1). Toto tvrzení tvoří - spolu s definicí spektrální normy - hledaný důkaz.

Vždy musíš něco ztratit
a něčeho se vzdát,
je líp se nenavrátit
a jenom vzpomínat.

Jaroslav Seifert

4. O řešení lineárních soustav a o inverzi matic

V předchozí kapitole jsme viděli, že u špatně podmíněných matic mohou malé chyby koeficientů soustavy způsobit velké chyby výsledku. Tyto chyby mohou vznikat zaokrouhlováním. Zda velké chyby skutečně vzniknou a jak budou velké, to můžeme do určité míry ovlivnit volbou postupu řešení soustavy rovnic, avšak jen za předpokladu, že vstupní údaje jsou zcela přesná čísla. Pochází-li nepřesnost těchto údajů z jejich fyzikální povahy (jde-li o údaje získané měřením), nemůže žádný matematický postup odstranit nedostatek vstupních informací.

Nemá-li náš postup působit zbytečnou ztrátu přesnosti, musíme všem informacím, které vstupují do naší úlohy, přikládat zhruba stejnou váhu, tj. musíme se postarat o to, aby žádná rovnice neměla mimořádně velké koeficienty ve srovnání s jinými. Nejlépe toho dosáhneme normalizací soustavy, která spočívá v násobení či dělení rovnic tak, aby v každé rovnici měl koeficient s největší absolutní hodnotou jednotkovou velikost.

Všimněme si např. matice $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, která má kondiční číslo $K(A) = 3$. Kdybychom první řádek dělili tisícem, měli bychom

$$A^* = \begin{bmatrix} 0,002 & 0,001 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a kondiční číslo by bylo $K(A^*) = 1667$. Neopatrným zacházením se soustavou $A^* x = b^*$ - třeba nahrazením první rovnice součtem obou rovnic se zaokrouhlením na tři platná místa - by mohla vzniknout velká chyba (informace z první rovnice by se ztratila). U soustavy $Ax = b$ a u rutinních metod řešení soustav lineárních rovnic taková chyba nehrozí, neboť se proměnné eliminují systematicky a rovnice se přitom vlastně normalizují. Ukážeme to např. u Gaussovy-Jordanovy metody. Je dána soustava

$$\begin{array}{rcll} 0,0033 x_1 & + & 0,0016 x_2 & + & 0,0072 x_3 & = & 0,0359 \\ - 24 x_1 & & - 10 x_2 & & - 57 x_3 & = & - 281 \\ - 8 x_1 & & - 4 x_2 & & - 17 x_3 & = & - 85 \end{array} \quad (19)$$

V prvním řádku vybereme hlavní prvek, tj. prvek s největší absolutní hodnotou 0,0072. Jím dělíme první rovnici, takže koeficienty této rovnice budou

$$0,458 \ 333 \quad 0,222 \ 222 \quad 1 \quad 4,986 \ 11.$$

Nyní vyloučíme prvky -57 a -17 ve třetím sloupci násobením normalizovaného prvního řádku postupně 57, popř. 17 a sečtením s druhou, popř. s třetí rovnicí. Koeficienty pak budou

$$\begin{array}{rcll} 0,458 \ 333 & 0,222 \ 222 & 1 & 4,986 \ 11 \\ 2,124 \ 98 & 2,666 \ 65 & 0 & 3,208 \ 27 \\ -0,208 \ 339 & -0,222 \ 226 & 0 & -0,236 \ 13. \end{array}$$

Tím jsme vyloučili proměnnou x_3 z druhého a třetího řádku. Nyní vybereme hlavní prvek ve druhém řádku, tj. 2,666 65. Dělíme jím tento řádek, takže jeho normalizované koeficienty budou

$$0,796 \ 872 \quad 1 \quad 0 \quad 1,203 \ 108.$$

Násobíme je -0,222 222, popř. 0,222 226 a sečteme s prvním, popř. s třetím řádkem. Vyjde

0,281 250	0	1	4,718 75
0,796 872	1	0	1,203 11
-0,031 253	0	0	0,031 232

Podobně vyloučíme i zbývající proměnnou a dostaneme

0	0	1	5,000 19
0	1	0	2,000 52
1	0	0	-1,000 67.

Všimněme si, že pořadí neznámých, jak je dostáváme z jednotlivých rovnic, je dáno výběrem hlavního prvku v každém řádku a není tedy předem stanoveno.

Uvedeným postupem jsme dostali transformovanou soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x_3 &= 5,000 19 \\x_2 &= 2,000 52 \\x_1 &= -1,000 67.\end{aligned}$$

Přesné řešení je však $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, jak se snadno přesvědčíme dosazením do dané soustavy. Ačkoliv jsme počítali s přesností 10^{-6} , výsledky jsou správné s přesností jen 10^{-4} . Přesnost by byla ještě horší, kdybychom byli postupovali bez výběru hlavního prvku, tj. bez vyhledávání prvku s největší absolutní hodnotou. Výběrem hlavního prvku totiž předcházíme operaci dělení příliš malým dělitelem, která má za následek vzrůst zaokrouhlovacích chyb. Je-li totiž chyba čísla x označena δx , pak chyba čísla $\gamma = \frac{1}{x}$ je

$$\delta \gamma = \frac{d\gamma}{dx} \delta x = -\frac{1}{x^2} \delta x.$$

Rovná-li se tedy relativní chyba čísla x $\epsilon_x = \left| \frac{\delta x}{x} \right|$, rovná se relativní chyba čísla γ

$$\epsilon_\gamma = \left| \frac{\delta \gamma}{\gamma} \right| = \left| \frac{\frac{\delta x}{x^2}}{\frac{1}{x}} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| \epsilon_x. \quad (20)$$

Máme-li $|x| \ll 1$, je $\epsilon_\gamma \gg \epsilon_x$. Proto, musíme-li rovnici dělit, zvolíme dělitele s co možno největší absolutní hodnotou. Výběr hlavního prvku je tedy důležitý, zvláště u větších soustav, a to i tehdy, počítáme-li v soustavě s pohyblivou desetinnou čárkou.

Chceme-li najít k matici A její inverzi A^{-1} , stačí, napíšeme-li do soustavy koeficientů místo pravé strany jednotkovou matici. Pro matici A z příkladu (19) tak dostaneme

0,0033	0,0016	0,0072	1	0	0
-24	-10	-57	0	1	0
-8	-4	-17	0	0	1

Další postup je stejný jako dříve. Po transformaci vyjde

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 26\ 664 & 0,666\ 61 & 8,999\ 1 \\ 0 & 1 & 0 & 79\ 992 & 2,499\ 83 & 25,497\ 4 \\ 1 & 0 & 0 & -96\ 657 & -2,666\ 46 & -31,996\ 9. \end{array}$$

Poloha jednotek v levé části schématu naznačuje, že řádky v pravé části mají pořadí 3, 2, 1 a že je třeba je přeskupit. Výsledek tedy je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -96\ 657 & -2,666\ 46 & -31,996\ 9 \\ 79\ 992 & 2,499\ 83 & 25,497\ 4 \\ 26\ 664 & 0,666\ 61 & 8,999\ 1 \end{bmatrix}.$$

K doplnění našeho výkladu uvedeme ještě podrobněji, v čem spočívá podstata Gaussovy-Jordanovy metody. Danou matici postupně transformujeme na jednotkovou matici. To můžeme vyjádřit pomocí transformačních matic. K matici hledáme transformační matice T_i takové, že

$$T_n T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_2 T_1 A = I. \quad (21)$$

Pak

$$A^{-1} = T_n T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_2 T_1.$$

Jak tyto transformační matice sestavujeme, ukážeme na příkladu matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nejprve vezmeme první sloupec a v něm prvek $a_{11} = 4$. Jeho převrácená hodnota $t_{11} = 1/4$ zaujme stejné - tj. první - místo v matici T_1 . Ostatní prvky v prvním sloupci matice T_1 budou záporně vzaté stejnohlavé prvky z matice A , dělené a_{11} . První řádek pak doplníme nulami a ve zbývajícím čtvercovém poli 2×2 napíšeme jednotkovou matici, takže

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Násobením dostáváme

$$B = T_1 A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{4} \end{bmatrix} .$$

Matici T_2 vytvoříme z matice B obdobně jako jsme předtím vytvořili matici T_1 z matice A . Po vyplnění druhého řádku (prvkem $t_{22} = a_{22}^{-1} = 1/2$ a na zbývajících místech nulami) vyplníme i druhý sloupec. Opět bereme stejnoohlé prvky v matici A , změnímme znaménko a dělíme činitelem a_{22} . Zbudou dvě čtvercové matice velikosti 1×1 , kam zapíšeme jednotkové matice (v tomto případě to jsou prostě jednotky, protože jde o matice prvního řádu). Do zbývajících polí zapíšeme nuly (vpravo nahoře a vlevo dole). Vyjde

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} .$$

Násobením získáme

$$C = T_2 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} \end{bmatrix} .$$

Dále zcela obdobně

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{13} \\ 0 & 0 & \frac{8}{13} \end{bmatrix} , \quad D = T_3 C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Pak

$$A^{-1} = T_3 T_2 T_1 = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 11 & -6 \\ 1 & -6 & 8 \end{bmatrix} .$$

Výpočet si zjednodušíme, budeme-li násobit maticemi T_i nikoli maticí A , ale rozšířenou obdélníkovou maticí $[A \mid I]$. Dostaneme

$$T_n T_{n-1} \cdots T_2 T_1 [A \mid I] = [I \mid A^{-1}] \quad (22)$$

Nehledáme-li inverzní matici, ale řešíme-li soustavu $Ax = b$, dostaneme řešení výpočtem ze vzorce

$$T_n T_{n-1} \cdots T_2 T_1 [A \mid b] = [I \mid x] \quad (23)$$

Pořadí sloupců lze podřídít výběru hlavního prvku, zachová-li se číslování sloupců i při změně jejich pořadí. Ukážeme to na ještě jednom příkladu.

Pro matici

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (24)$$

dostaneme

$$T_1 = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

a po vynásobení matice (24)

$$T_1 [A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

V druhém řádku částečně transformované matice je hlavní prvek 3 ve čtvrtém sloupci. Vyměníme proto druhý a čtvrtý sloupec, aby se hlavní prvek dostal na hlavní diagonálu, takže pořadí sloupců 1, 2, 3, 4 se změní na 1, 4, 3, 2. Dále dostaneme

$$\begin{aligned}
T_2(T_1[A|b]) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -\frac{1}{2} & -6 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \\
T_3(T_2 T_1[A|b]) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \\
T_4(T_3 T_2 T_1[A|b]) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \\
&= [I | \kappa] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

S přihlédnutím k pořadí řádků 1, 4, 3, 2 je tedy

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = 2, \quad \kappa_3 = -2, \quad \kappa_4 = -1.$$

Programy k řešení lineárních soustav algebraických rovnic na malých počítačích bývají většinou zpracovány na základě Gaussovy nebo Gaussovy-Jordanovy metody s výběrem hlavního prvku. Mimoto bývají v knihovnách těchto počítačů také tzv. úsporné programy, které umožňují řešit větší soustavy, avšak bez výběru hlavního prvku. Zabírají méně místa v paměti počítače a vedou rychleji k cíli. Lze je však použít jen u dobře podmíněných matic, u nichž jsou prvky s největšími absolutními hodnotami na hlavní diagonále a prvky vzdálené od této diagonály jsou absolutně malé. V jiných případech mohou tyto úsporné programy dávat falešné výsledky; příčinu takového nezdaru jsme se snažili objasnit.

Ukážeme ještě, jak lze snadno invertovat trojúhelníkovou matici, která má nad hlavní diagonálou nulové prvky. Nazveme ji $[P] = [p_{ij}]$. Je tedy $p_{ij} = 0$ pro $i < j$. Inverzní matice bude opět trojúhelníková a označíme ji $[Q]$.

Nejprve si připravíme pole pro matici Q a do něho zapíšeme na hlavní diagonálu převrácené prvky z hlavní diagonály matice P , takže budeme mít $q_{ii} = p_{ii}^{-1}$. Pak do pravého horního trojúhelníku doplníme transpozicí prvky z matice P . Budeme tedy mít tuto matici:

$$\begin{bmatrix} \underline{q_{11}} & p_{21} & p_{31} & \cdots & p_{n1} \\ & \underline{q_{22}} & p_{32} & \cdots & p_{n2} \\ & & \underline{q_{33}} & \cdots & p_{n3} \\ & & & \ddots & \\ & & & & \underline{q_{nn}} \end{bmatrix}$$

Nyní vypočteme prvky matice Q v levém dolním trojúhelníku. Začneme s hlavním (podtrženým) prvkem q_{ii} a postupujeme vlevo k prvkům $q_{i,i-1}$, $q_{i,i-2}$ atd. Začínáme s hodnotou $i = 2$ a končíme $i = n$. Přitom prvek q_{ik} ($i > k$) dostaneme tak, že mezi sebou násobíme k -tý a i -tý řádek počínaje prvkem q_{ii} , sečítáme a postupujeme vlevo tak dlouho, až "narazíme" na prázdné místo, nad nímž je v k -tém řádku prvek q_{kk} . Vzniklý součet násobíme $-q_{kk}$ a zapíšeme na místo q_{ik} .

Ukážeme to na příkladu. Je dána matice

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 6 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Dostaneme schéma

$i \backslash k$	1	2	3	4
1	<u>0,5</u>	3	0	6
2	-0,3	<u>0,2</u>	-7	1
3	-0,21	0,14	<u>0,1</u>	8
4	-1,02	-1,32	-0,8	<u>1</u>

Vyšlo

$$q_{21} = -(q_{22} p_{21}) q_{11} = -(0,2 \cdot 3) \cdot 0,5 = -0,3,$$

$$q_{32} = -(q_{33} p_{32}) q_{22} = -0,1 \cdot (-7) \cdot 0,2 = 0,14,$$

$$q_{31} = -(q_{33} p_{31} + q_{32} p_{21}) q_{11} = -(0,1 \cdot 0 + 0,14 \cdot 3) \cdot 0,5 = -0,21$$

atd., až nakonec dostaneme

$$q_{41} = -[1 \cdot 6 + (-0,8) \cdot 0 + (-1,32) \cdot 3] \cdot 0,5 = -1,02.$$

Výsledek tedy je

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3 & 0,2 & 0 & 0 \\ -0,21 & 0,14 & 0,1 & 0 \\ -1,02 & -1,32 & -0,8 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. úloha. Určete inverzní matici A^{-1} , je-li

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Řešení. Protože jde o matici pouze třetího řádu, je možno napsat inverzní matici pomocí doplňkových subdeterminantů přímo. Použijeme však Gaussovu-Jordanovu metodu a vzorec (22). Vyjde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,45 & 0,05 & -0,2 \\ 0,3 & -0,3 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

10. úloha. Uveďte, jak byste invertovali horní trojúhelníkovou matici.

Řešení. Převedli bychom ji transpozicí na dolní matici, abychom mohli použít již dříve odvozený postup.

Oblázky vlna je nejkřidnější sochař
Egyptané to věděli.

Vítězslav Nezval

5. O harmonické analýze

Není jistě bez zajímavosti, že rozvoj periodické funkce ve Fourierovu řadu znal už Lagrange (1736 až 1813). Domníval se, že superpozicí analytických (t.j. do nekonečna derivovatelných) funkcí musíme dostat zase jen analytickou funkci. Proto omezil použití harmonické analýzy jen na funkce, které lze libovolně derivovat. Fourier (1768 až 1830) však dokázal v knize vydané roku 1822, že takové omezení není nutné a že řadou goniometrických funkcí lze vyjádřit funkce značně libovolné. Dirichlet (1805 až 1895) později zpřesnil podmínky, kterým musí tyto funkce vyhovovat. Jinou Fourierovou zásluhou je, že rozšířil užití harmonické analýzy i na neperiodické funkce, které lze považovat za limitní případ periodických funkcí s nekonečnou periodou. To jsou všechno dobře známé poznatky, najdeme je v každé učebnici matematiky a nebudeme je tedy opakovat.

Budeme se zabývat spíše numerickou stránkou věci. Často je dán průběh zatěžující síly jako výsledek nějakého měření. Chceme-li při periodickém námáhání stanovit odezvu konstrukce na toto silové buzení, potřebujeme určit jednotlivé harmonické složky daného průběhu. Také tehdy, analyzujeme-li experimentálně zjištěný tvar kmitu či závislost posuvu na čase při obecném lineárním periodickém kmitání, potřebujeme řešit stejnou úlohu. Starší pracovníci si jistě vzpomenou, že se v teorii pístových strojů probírala grafická metoda harmonické analýzy krouticího momentu na klice.

Chceme-li řešit tuto úlohu s větší přesností a pohodlněji a nemáme-li k dispozici harmonický analyzátor nebo již vydaný program pro náš počítač, je nejlépe postupovat tak, že interval dané periody rozdělíme na dostatečně velký, lichý počet stejných dílů a odečteme v dělicích bodech funkční hodnoty. Dostaneme tak tabulku údajů pro liché n

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n = \gamma_0,$$

kde $\gamma_i = \gamma(x_i)$.

Interval $l = x_n - x_0$ transformujeme na 2π , takže budeme mít

$$x_i = \frac{2\pi i}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (25)$$

hledaná řada trigonometrických funkcí bude mít tvar

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx), \quad m < \frac{n}{2} \quad (26)$$

Koeficienty a_0, a_j, b_j řady (26) nyní určíme tak, aby součet čtverců

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} [\gamma_i - f(x_i)]^2 \quad (27)$$

byl minimální. Budeme tedy hledat aproximaci funkce trigonometrickým polynomem (26).

Je zřejmé, že při dostatečně velkém počtu členů v řadě (26) bude aproximující funkce procházet všemi zadanými body $\gamma_i = \gamma(x_i)$. V tom případě dostaneme trigonometrickou interpolaci. Teprve tehdy, zvolíme-li nekonečně velkou "hustotu" bodů x_i , tj. spojitou funkci $\gamma = \gamma(x)$, dostaneme z rovnice (26) a z podmínky (27), která získá integrální tvar

$$S = \int_0^{2\pi} [\gamma(x) - f(x)]^2 dx = \min, \quad (28)$$

Fourierovu řadu. Mezi Fourierovu řadou a trigonometrickou aproximací či interpolací je ten rozdíl, že zvětšením počtu členů v řadě (26) se dosud vypočtené koeficienty Fourierovy řady nemění, kdežto u trigonometrické aproximace či interpolace ano. Rozdíl je tím menší, čím větší počet bodů γ_i vezmeme za základ naší aproximace (interpolace).

Algoritmus, který použijeme, uvedeme zde bez odvození. Z rekurentního vztahu

$$U_{k,j} = \gamma_k + 2 \cos x_j U_{k+1,j} - U_{k+2,j} \quad (29)$$

a z počátečních hodnot

$$U_{n,j} = 0, \quad U_{n+1,j} = 0 \quad (30)$$

vypočteme hodnoty $U_{k,j}$ tím, že začneme u $k=n-1$ a postupně vypočteme hodnoty $U_{n-1,j}, U_{n-2,j}, \dots, U_{2,j}, U_{1,j}$. Koeficienty řady (26) dostaneme pak ze vztahů

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{n} \left(\gamma_0 + U_{1,j} \cos \frac{2\pi j}{n} - U_{2,j} \right), \\ b_j &= \frac{2}{n} U_{1,j} \sin \frac{2\pi j}{n}. \end{aligned} \quad (31)$$

Přitom $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

Výpočet lze snadno programovat pro jakýkoli lichý počet n bodů (pro sudý počet by bylo nutno vzorce jinak upravit).

Uvedeme příklad. Nechť je dána funkce $\gamma_i = \gamma(x_i)$ touto tabulkou:

j	0	1	2	3	4	($n = 5$)
x_j	0°	72°	144°	216°	288°	(360°)
γ_j	1,000	1,951	1,588	0,412	0,049	(1,000)

Podle (29) a (30) postupně vypočteme pro $j = 0$, $x_j = 0$

$$U_{4,0} = 0,049$$

$$U_{3,0} = 0,412 + 2 \cdot 0,049 = 0,510,$$

$$U_{2,0} = 1,588 + 2 \cdot 0,510 - 0,049 = 2,559,$$

$$U_{1,0} = 1,951 + 2 \cdot 2,559 - 0,510 = 6,559.$$

Podle první z rovnic (31)

$$a_0 = \frac{2}{5} (1 + 6,559 - 2,559) = 2.$$

Dále vyjde pro $j = 1$, $x_j = 72^\circ$ (okrouhle)

$$U_{4,1} = 0,49,$$

$$U_{3,1} = 0,412 + 2 \cdot 0,309 \cdot 0,442 - 0,049 = 0,442,$$

$$U_{2,1} = 1,588 + 2 \cdot 0,309 \cdot 0,442 - 0,049 = 1,812,$$

$$U_{1,1} = 1,951 + 2 \cdot 0,309 \cdot 1,812 - 0,442 = 2,629.$$

Podle (31)

$$a_1 = \frac{2}{5} (1 + 2,629 \cdot 0,309 - 1,812) \doteq 0,$$

$$b_1 = \frac{2}{5} \cdot 2,629 \cdot 0,951 \doteq 1.$$

Podobně vyjdou a_2 , b_2 nulové ($m = 2 < 2,5 = n/2$). Skutečně, zadaná funkce byla - až na chyby zaokrouhlováním -

$$\psi(x) = 1 + \sin x.$$

Uvedená metoda má velkou výhodu při analýze experimentálních výsledků zatížených rušivým šumem vysoké frekvence. Zvolíme-li počet členů v řadě (26) tak velký, aby byl daný průběh dostatečně věrně popsán, avšak zase tak malý, aby frekvence posledních členů řady byla menší než frekvence rušivého šumu, můžeme rušivý šum "odfiltrout" nahrazením funkce $\psi(x)$ její aproximací $f(x)$, která přitom bude nestranně určena metodou nejmenších čtverců s použitím všech registrovaných hodnot $\psi_i = \psi(x_i)$.

Uvedeme ještě způsob, jak zlepšit konvergenci derivace Fourierovy řady. Napišeme Fourierovu řadu v komplexním tvaru:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (32)$$

Abychom našli činitele c_k , musíme tuto řadu násobit e^{-ijx} a integrovat v mezích jedné periody

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x} dx = 2\pi c_j \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Zaměníme-li v poslední rovnici indexy j , k , dostaneme

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (33)$$

Z rovnice (32) můžeme prakticky vzít do výpočtu jen omezený počet členů; dostaneme tak

$$f_m(x) = \sum_{k=-(m-1)}^{m-1} c_k e^{ikx}. \quad (34)$$

Zbytek řady $\eta_m(x) = f(x) - f_m(x)$ pak bude

$$\eta_m(x) = \sum_{k=m}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}). \quad (35)$$

Tento zbytek lze upravit "posunutím indexů" takto:

$$\eta_m(x) = e^{imx} \rho_m(x) + e^{-imx} \rho_{-m}(x), \quad (36)$$

kde

$$\rho_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} e^{ikx},$$

$$\rho_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-(m+k)} e^{-ikx}.$$

Rovnice (36) je totožná s rovnicí (35). Z jejího tvaru je zřejmé, že při velkém m dostáváme zbytek $\eta_m(x)$ jako modulovanou nosnou vlnu. "Nosná vlna" e^{imx} , popř. e^{-imx} má velkou frekvenci, kdežto její modulace - amplituda $\rho_m(x)$, popř. $\rho_{-m}(x)$ - se mění v závislosti na x jen zvolna. Derivujeme-li tedy Fourierovu řadu, dostaneme zbytek

$$\eta_m'(x) = im e^{imx} \rho_m(x) + e^{imx} \rho_m'(x) - im e^{-imx} \rho_{-m}(x) + e^{-imx} \rho_{-m}'(x). \quad (37)$$

Vidíme, že první a třetí člen na pravé straně (37) jsou násobeny velkým číslem m a že tedy především tyto členy způsobují zhoršení (nebo i ztrátu) konvergence Fourierovy řady. Derivovali jsme modulaci i nosnou vlnu; lepší výsledky bychom asi dostali, kdybychom derivovali jen modulaci bez nosné vlny.

Toho dosáhneme, nahradíme-li derivování konečnými diferencemi. Použijeme operátor

$$\mathcal{D}_m f = \frac{f\left(x + \frac{\pi}{m}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{m}\right)}{\frac{2\pi}{m}}, \quad (38)$$

pro který platí, že

$$\frac{d}{dx} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{D}_m.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m \eta_m(x) &= \frac{m}{2\pi} \left[e^{i(mx+\pi)} \beta_m\left(x + \frac{\pi}{m}\right) - e^{i(mx-\pi)} \beta_m\left(x - \frac{\pi}{m}\right) \right] + \\ &+ \frac{m}{2\pi} \left[e^{-i(mx+\pi)} \beta_{-m}\left(x + \frac{\pi}{m}\right) - e^{-i(mx-\pi)} \beta_{-m}\left(x - \frac{\pi}{m}\right) \right]. \end{aligned}$$

Protože $\beta_m(x)$, popř. $\beta_{-m}(x)$ se při velkém m v intervalu $x - \frac{\pi}{m} < x < x + \frac{\pi}{m}$ značně nezmění a protože $e^{i(mx+\pi)} = -e^{imx}$, bude

$$\mathcal{D}_m \eta_m(x) = -e^{imx} \mathcal{D}_m \beta_m(x) - e^{-imx} \mathcal{D}_m \beta_{-m}(x). \quad (39)$$

V rovnici (39) již nejsou obsaženy nežádoucí derivace nosné vlny. Tento způsob "nedokonalého" derivování Fourierovy řady je formálně ekvivalentní s modifikací původní Fourierovy řady, kterou dostaneme, přisoudíme-li k -tému členu řady "váhu"

$$\tilde{G}_k = \frac{\sin \frac{\pi k}{m}}{\frac{\pi k}{m}}. \quad (40)$$

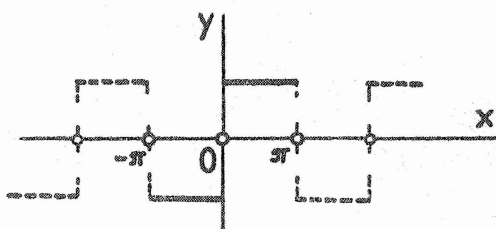
To nahlédneme, uvědomíme-li si, že

$$\mathcal{D}_m e^{ikx} = i \frac{\sin \frac{\pi k}{m}}{\frac{\pi k}{m}} e^{ikx} = \frac{\sin \frac{\pi k}{m}}{\frac{\pi k}{m}} i k e^{ikx} = \tilde{G}_k \frac{d}{dx} e^{ikx}. \quad (41)$$

Váha (40) se nezmění ani tehdy, použijeme-li Fourierovu řadu v reálném tvaru.

Jako příklad uvedeme funkci $f(x)$, pro kterou

$$\begin{aligned} \gamma(-x) &= -\gamma(x), \\ \gamma(x) &= 0,5 \\ \gamma(0) &= \gamma(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (0 < x < \pi),$$



Obr. 2

Funkce je znázorněna na obr. 2. Odpovídá jí Fourierova řada

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right),$$

která konverguje na celém intervalu $-\pi, \pi$ k funkci $\psi(x)$. Konvergence je však pomalá. Derivace

$$\psi'(x) = \frac{d\psi}{dx} = 0$$

existuje všude na intervalu $-\pi < x < 0$, popř. $0 < x < \pi$. V bodě $x = 0$ neexistuje. Avšak derivace

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots \right)$$

nekonverguje v žádném bodě (s výjimkou $x = \pm \frac{\pi}{2}$). Nahradíme nyní $f'(x)$ modifikovanou řadou

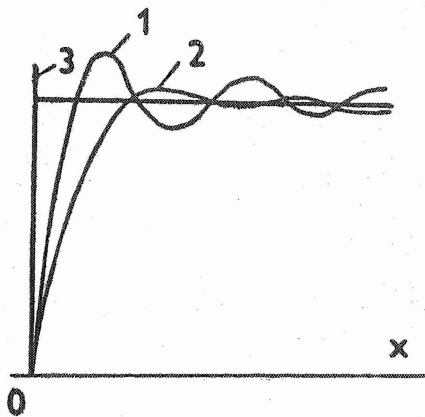
$$f'_{2m}(x) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}} \cos x + \frac{\sin \frac{3\pi}{2m}}{\frac{3\pi}{2m}} \cos 3x + \dots \right. \\ \left. + \frac{\sin \frac{(2m-1)\pi}{2m}}{\frac{(2m-1)\pi}{2m}} \cos (2m-1)x \right].$$

Ta bude konvergovat s rostoucím m k nule pro každé x z intervalu $-\pi < x < \pi$ s výjimkou bodu $x = 0$, kde bude divergovat.

Aplikace činitelů G_k na původní řadu $f(x)$ podstatně zmenšuje Gibbsův jev v místě nespojitosti $x = 0$ (srov. obr. 3). Modifikovaná funkce však není "nejlepší aproximací" dané funkce ve smyslu metody nejmenších čtverců, neboť neminimalizuje součet \int podle (27).

11. úloha. Odvoďte obyčejnou i modifikovanou Fourierovu řadu pro Diracovu "delta-funkci" $f(x)$, která je všude nulová s výjimkou bodu $x = 0$. Platí pro ni, že $f(0) = \infty$, zároveň však, že

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x) dx = 1.$$



- 1 - Fourierova řada s konečným počtem členů
- 2 - modifikovaná Fourierova řada
- 3 - Fourierova řada s nekonečným počtem členů

Obr. 3

Řešení. Vyjádříme ji na intervalu $-\pi < x < \pi$ Fourierovou řadou

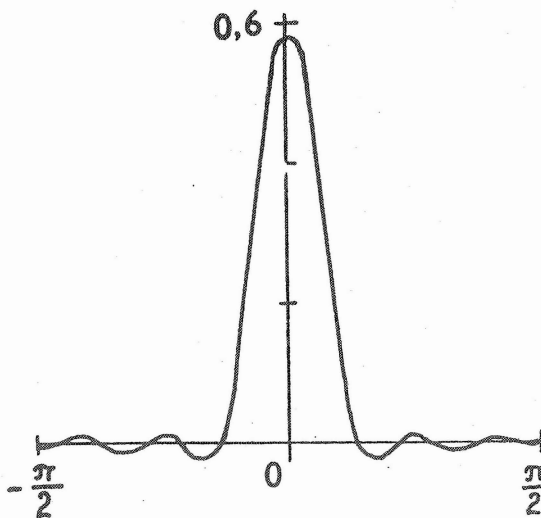
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots \right).$$

Omezíme-li se na dvanáct harmonických složek, bude $m = 12$,

$$b_k = \frac{\sin \frac{\pi k}{12}}{\frac{\pi k}{12}} = \frac{12}{\pi k} \sin \left(\frac{\pi k}{12} \right),$$

takže

$$f_m(x) = \frac{1}{\pi} (0,5 + 0,9886 \cos x + 1,5549 \cos 2x + \\ + 0,9001 \cos 3x + 0,8270 \cos 4x + \dots + 0,0899 \cos 11x).$$



Obr. 4

Výsledek je zakreslen na obr. 4. Přesvědčte se, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_m(x) dx = 1.$$

Všimněte si, že modifikovaná řada ve srovnání s původní řadou poměrně rychle konverguje, dvanáctá harmonická dokonce vymizí.

Chci hladit vaši ručičku.

Snad byste mi pak patřila vy celá.

Vítězslav Nezval

6. O Taylorově řadě a o diferenčních vzorcích

Mocninná řada, kterou objevil Taylor v roce 1715, umožňuje popsat průběh funkce $f(x)$, známe-li její hodnotu a hodnoty jejích derivací v jediném bodě x_0 . Z podrobných znalostí funkce v jediném bodě a v jeho infinitezimálním okolí se tedy snažíme předvídat průběh funkce v ostatních bodech definičního intervalu.

Průběh funkce $f(x)$ je popsán mocninnou řadou

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \quad (42)$$

kteřá je konvergentní uvnitř konvergenčního kruhu. Střed tohoto kruhu je v bodě x_0 a poloměr kruhu je dán vzdáleností tohoto bodu od nejbližšího singulárního bodu z_1 funkce $f(z)$ v komplexní Gaussově rovině.

Protože - jak známo - koeficienty

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0), \dots, \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \dots$$

závisí na hodnotách funkce $f(x)$ v nekonečně blízkém okolí bodu x_0 , kdežto řada (42) platí pro všechna x uvnitř konvergenčního kruhu, znamená Taylorova řada extrapolaci z bodu $x = x_0$. Extrapolace je pravidelně méně přesná než interpolace, proto se můžeme domnívat, že existují vhodnější způsoby náhrady funkce mocninnou řadou, založené na interpolaci. To je skutečně pravda, pokud jde o obor reálných funkcí. Tím se budeme později ještě podrobně zabývat. V oboru komplexní proměnné však bude

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_k(z - z_0)^k + \dots \quad (43)$$

Dosadíme-li sem $z - z_0 = r e^{i\varphi}$ ($r = \text{konst}$), bude nyní

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\varphi} \quad (44)$$

znamenat Fourierovu řadu. Funkce $f(z)$ se skutečně jeví na kružnici $|z - z_0| = r$ jako periodická funkce úhlu φ a může tedy být rozvinuta ve Fourierovu řadu (44). Tato řada však představuje "nejlepší aproximaci" podle kritéria nejmenších čtverců. Nemůžeme proto doufat, že bychom našli vhodnější mocninnou řadu než Taylorovu, která by popisovala komplexní funkci $f(z)$ uvnitř konvergenčního kruhu.

V dalším výkladu se omezíme na obor reálné proměnné. Zvolíme-li uvnitř konvergenčního intervalu bod ve vzdálenosti h od bodu x , bude v něm funkce f nabývat hodnoty

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 + \frac{1}{6} f'''(\xi_1)h^3, \quad (45)$$

kde $x \leq \xi_1 \leq x+h$. Podobně

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 - \frac{1}{6} f'''(\xi_2)h^3, \quad (46)$$

kde $x-h \leq \xi_2 \leq x$. Odečtením obou posledních rovnic

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{1}{6} h^3 [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]. \quad (47)$$

Je-li $f(x)$ dostatečně hladká, jsou třetí derivace malé, takže první derivace $f'(x)$ je s dobrou přibližností vystižena vzorcem

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2). \quad (48)$$

$O(h^n)$ znamená zbytkový člen, který má tu vlastnost, že limita výrazu $h^{-n}O(h^n)$ zůstává při $h \rightarrow 0$ konečná. Zmenšíme-li tedy krok na polovinu - a je-li přitom h dost malé, takže $f'''(\xi_1) \approx f'''(\xi_2) \approx f'''(x)$ - zmenší se zbytkový člen na čtvrtinu. O absolutní chybě, která vznikne nahrazením první derivace zlomkem na pravé straně (48), tím však nic neříkáme. Je např. možné, že vzorec s řádem chyby $O(h^4)$ dá větší chybu než vzorec s řádem chyby $O(h^2)$. Při polovičním kroku se však chyba prvního vzorce zmenší 16krát, druhého jen čtyřikrát.

Pojmeme-li do řad (45) a (46) na pravé straně ještě o jeden člen více, zruší se sečtením obou rovnic na pravé straně členy obsahující liché mocniny h a bude

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \frac{1}{24} [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)] h^4.$$

Odtud

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + O(h^2). \quad (49)$$

Takto můžeme vyjadřovat derivace funkce $f(x)$ v bodě x pomocí funkčních hodnot v oddělených (tj. diskrétních) nepřilíh vzdálených bodech. Volili jsme jen tři tyto body, a to $x-h$; x ; $x+h$. Mohli bychom jich však volit

více a nemusely by být ani ve stejné vzdálenosti. Dostáváme tak diferenční vzorce, které nám prokáží výbornou službu při numerickém výpočtu derivací tabelovaných funkcí i při numerickém řešení diferenciálních rovnic. Řád chyby $O(h^n)$ (či "rychlost konvergence") diferenčního vzorce dostaneme přitom ze zbytkových členů příslušných Taylorových řad.

12. úloha. Určete přibližný vzorec pro výpočet první derivace $f'(x)$ pomocí funkčních hodnot $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$.

Řešení. Z Taylorových řad pro $f(x+h)$, $f(x+2h)$ vyloučíme druhou derivaci a dostaneme

$$f'(x) = \left[-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h) \right] / 2h + O(h^2).$$

13. úloha. Jaké chyby se dopustíme, vezmeme-li hodnotu druhé derivace f'' v bodě $x+h$ tak, že ji prostě nahradíme hodnotou $f''(x)$ podle (49)?

Řešení. Rychlost konvergence bude jen $O(h)$ místo $O(h^2)$; při malém h se tedy chyba zvětší záměnou uvedených hodnot h^{-1} krát.

14. úloha. Přepište do diferenčního tvaru diferenciální rovnici ohybové čáry pružného nosníku uloženého na Winklerově pružném podkladu $\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta w = f(x)$.

Řešení. Čtvrtou derivaci vyjádříme pomocí funkčních hodnot v bodech $x-2h$, $x-h$, x , $x+h$, $x+2h$ a dostaneme

$$w(x-2h) - 4w(x-h) + (6 + \beta h^4)w(x) - 4w(x+h) + w(x+2h) = h^4 f(x) + O(h^6).$$

K řešení této rovnice se vrátíme později v 21. úloze.

15. úloha. Vyjádřete první derivaci $f'(x)$ pomocí funkčních hodnot $f(x-2h)$, $f(x-h)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$.

Řešení. Vyloučením druhé a třetí derivace z Taylorových řad vyjde

$$f'(x) = \frac{1}{12h} \left[-f(x-2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x+2h) \right] + O(h^4).$$

Netrap se bezútěšně,
 já vím, co mi chceš říct,
 za ouško dám ti třešně
 na místo náušnic.

Jaroslav Seifert

7. Aproximace funkce Čebyševovými polynomy

Aproximace funkce $f(x)$ Taylorovou řadou s konečným počtem členů má tu nevýhodu, že chyba aproximace je nejmenší kolem bodu, k němuž Taylorovu řadu vztahujeme, avšak se vzdáleností od tohoto bodu rychle vzrůstá. Je to, jak jsme již uvedli, extrapolační vzorec, při němž funkci $f(x)$ v bodě $x = x_0$ derivujeme. Místo toho můžeme požadovat, aby chyba byla rovnoměrně rozdělena po celém intervalu. To nás přivede spíše k tomu, abychom danou funkci integrovali. Nebudeme tedy předem zvýhodňovat žádný bod definičního intervalu.

Nejprve naši funkci upravíme lineární transformací tak, aby definiční interval byl $-1 \leq x \leq 1$. Toho můžeme vždy dosáhnout. Potom položíme $x = \cos \varphi$, takže daná funkce bude mít tvar

$$f(x) = f(\cos \varphi) = g(\varphi). \quad (50)$$

Stane se tedy sudou periodickou funkcí, rozvinutelnou ve Fourierovu řadu; ta je, jak jsme už vyložili, nejlepší aproximací podle metody nejmenších čtverců. Dostaneme

$$g(\varphi) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots \quad (51)$$

kde

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi. \quad (52)$$

Vrátíme-li se k původní proměnné $x = \cos \varphi$, dostaneme

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots \quad (53)$$

kde

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (54)$$

S použitím identity

$$\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2 \cos \varphi \cos k\varphi \quad (55)$$

dostaneme rekurentní vzorec

$$T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x) \quad (56)$$

s počátečními hodnotami

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \quad (57)$$

V rovnicích (53) až (57) znamenají $T_k(x)$ proslulé Čebyševovy polynomy,*) jimiž zobecňujeme výborné vlastnosti Fourierovy řady do oboru mocninných řad. Z rovnic (56) a (57) dostaneme

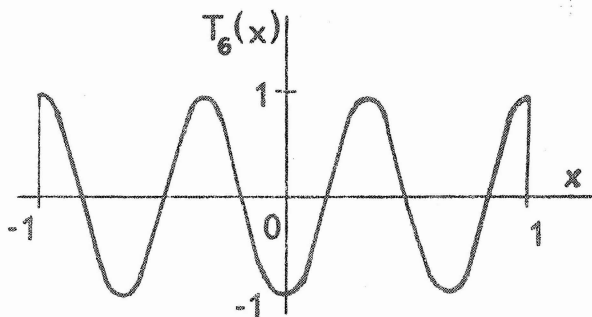
$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \end{aligned} \quad (58)$$

atd.

Čebyševovy polynomy vyhovují podmínkám ortogonality

$$\int_{-1}^1 T_r(x) T_\Delta(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{pro } r \neq \Delta \\ \pi & \text{pro } r = \Delta = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } r = \Delta \neq 0 \end{cases} \quad (59)$$

Oscilují mezi hodnotami ± 1 . Tak např. $T_6(x)$ osciluje podle obr. 5.



Obr. 5

*) Panfutiij Lvovič Čebyšev (1821 až 1894), petrohradský matematik.

Z rovnic (58) můžeme určit tyto inverzní vztahy:

$$\begin{aligned}
 1 &= T_0 \\
 x &= T_1 \\
 x^2 &= \frac{1}{2} (T_0 + T_1) \\
 x^3 &= \frac{1}{4} (3T_1 + T_3) \\
 x^4 &= \frac{1}{8} (3T_0 + 4T_2 + T_4) \\
 x^5 &= \frac{1}{16} (10T_1 + 5T_3 + T_5) \\
 x^6 &= \frac{1}{32} (10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6) .
 \end{aligned} \tag{60}$$

Řadu

$$\gamma = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \tag{61}$$

můžeme tedy na intervalu $\langle -1, +1 \rangle$ přepsat takto:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 2,1875 T_0 - 2,375 T_1 + 1,46875 T_2 - 0,5625 T_3 + \\
 &+ 0,3125 T_4 - 0,0625 T_5 + 0,03125 T_6 .
 \end{aligned} \tag{62}$$

V čem se liší řady (61) a (62)? Obsahově v ničem, obě jsou totožné. Formálně je však mezi nimi velký rozdíl. První z nich má součinitele $+1, -1, +1, -1, \dots$, tedy v absolutní hodnotě stejné, druhá klesající. U druhé víme, že vynecháním posledního členu dostaneme polynom pátého stupně, který bude na daném intervalu aproximovat funkci γ s chybou nejvýše $\pm 0,03125$. Nenašli bychom polynom pátého stupně, který by dával na celém intervalu menší absolutní chybu. Vynecháme-li dva poslední členy, dostaneme polynom čtvrtého stupně, který se bude od $\gamma(x)$ lišit na celém intervalu nejvýše o

$$\pm (0,0625 + 0,03125) = \pm 0,09375 .$$

Zde vidíme dalekosáhlou výhodu řady (62) proti řadě (61). Umožňuje s nejmenší absolutní chybou snížit stupeň polynomu, tj. "teleskopicky zkrátit" mocninnou řadu.

16. úloha. Nahraďte funkci $\gamma = x^3$ v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ kvadratickou funkcí $\bar{\gamma} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ s nejmenší absolutní chybou.

Řešení. Nejprve upravíme interval $\langle 0; 1 \rangle$ pro x na interval $\langle -1; +1 \rangle$ pro $t = \mathcal{L}x + \beta$. Musí platit, že krajní body si odpovídají, takže

$$\begin{aligned}
 -1 &= \beta \\
 +1 &= \mathcal{L} + \beta .
 \end{aligned}$$

Odtud $t = 2x - 1$ čili $x = 0,5(t + 1)$. Dosazením dostaneme

$$\gamma = 0,125 (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) = 0,125 P(t).$$

Polynom $P(t)$ lze rozepsat pomocí Čebyševových polynomů

$$\begin{aligned} t^3 &= 0,75 T_1 && + 0,25 T_3 \\ 3t^2 &= 1,5 T_0 && + 1,5 T_2 \\ 3t &= 3 T_1 \\ 1 &= T_0 \end{aligned}$$

$$P(t) = 2,5 T_0 + 3,75 T_1 + 1,5 T_2 + 0,25 T_3$$

Zanedbáním posledního členu dostaneme hledanou aproximaci

$$\bar{P}(t) = 2,5 T_0 + 3,75 T_1 + 1,5 T_2 = 3t^2 + 3,75t + 1$$

s chybou

$$|P - \bar{P}| \leq 0,25.$$

Zpětným dosazením máme

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= 0,125 [3(2x-1)^2 + 3,75(2x-1) + 1] = \\ &= 0,03125 - 0,5625x + 1,5x^2. \end{aligned}$$

Chyba této aproximace vyhovuje nerovnosti

$$|\gamma - \bar{\gamma}| \leq 0,125 |P - \bar{P}| = 0,03125.$$

Postup by se poněkud zkrátil, kdybychom použili tzv. posunutá Čebyševova polynomy, definované na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Platí pro ně vztahy

$$\begin{aligned} T_k^*(x) &= \cos k\varphi, \\ \cos \varphi &= 2x - 1 \\ T_k^*(x) &= T_k(2x - 1). \end{aligned}$$

Speciálně

$$\begin{aligned} T_0^*(x) &= 1 && 1 = T_0^* \\ T_1^*(x) &= -1 + 2x && x = \frac{1}{2}(T_0^* + T_1^*) \\ T_2^*(x) &= 1 - 8x + 8x^2 && x^2 = \frac{1}{8}(3T_0^* + 4T_1^* + T_2^*) \\ T_3^*(x) &= -1 + 18x - 48x^2 + 32x^3 && x^3 = \frac{1}{32}(10T_0^* + 15T_1^* + 6T_2^* + T_3^*) \end{aligned}$$

Odtud dostaneme přímo

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \frac{1}{32} (10 T_0^* + 15 T_1^* + 6 T_2^*) = \\ &= 0,03125 - 0,5625x + 1,5x^2 \end{aligned}$$

stejně jako dříve.

Bude-li každý z nás z křemene,
je celý národ z kvádrů.

Jan Neruda

8. O Gaussově kvadratuře

Gaussova metoda numerického výpočtu integrálu se až do nedávna užívala jen zřídka, neboť tato metoda vyžaduje výpočet funkce pro neekvidistantní argumenty, dané nulovými body Legendreových polynomů, což jsou - až na výjimky - iracionální čísla. Proto se mnohem více uplatňovala integrace pomocí lichoběžníkového nebo Simpsonova pravidla. Elektronické počítače však odstraňují nevýhody Gaussovy metody, jež se nyní běžně uvádí v knihovných programech i pro malé počítače.

Budeme předpokládat, že jsme danou funkci transformovali do intervalu

$$-1 \leq x \leq 1$$

způsobem, který jsme použili v 16. úloze. Funkční hodnoty v bodech x_1, x_2, \dots, x_n označíme y_1, y_2, \dots, y_n . Volíme konečný počet n bodů, avšak o jejich rozmístění rozhodneme definitivně teprve později. Zatím ponecháváme hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n jako obecné veličiny.

Zvolenými body proložíme interpolační Lagrangeův polynom $(n-1)$ -ního stupně, který je danými body jednoznačně určen. K tomu nejprve sestrojíme polynomy

$$Q_i(x) = \frac{1}{F'_n(x_i)} \frac{F_n(x)}{x - x_i} \quad (63)$$

kde $F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$. Např. pro $n = 4$ bude $F_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ a

$$Q_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \quad (64)$$

V čitateli (64) "chybí" činitel $(x - x_3)$ a ve jmenovateli je totéž co v čitateli, avšak s hodnotou x_3 místo x . Čítenel ve zlomku v rovnici (64) je přitom $\frac{F_n(x)}{x - x_3}$, jmenovatel $F'_n(x_3)$. Čárka značí derivaci podle x . Zřejmě $Q_3(x_3) = 1$, $Q_3(x_i) = 0$ pro $i \neq 3$. Obdobně tvrzení platí o všech polynomech (63). S použitím Kroneckerova symbolu δ_{jk} , který se rovná jedné pro $j = k$ a nule pro $j \neq k$, můžeme tedy psát, že

$$Q_j(x_k) = \delta_{jk} \quad (65)$$

Hledaný Lagrangeův polynom pak je

$$P_{n-1}(x) = y_1 Q_1(x) + y_2 Q_2(x) + \cdots + y_n Q_n(x) \quad (66)$$

Funkce $\bar{y} = P_{n-1}(x)$ prochází všemi zadanými body. Nahradíme-li jí danou funkci $y = f(x)$, dostaneme místo přesného integrálu

$$A = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (67)$$

jeho přibližnou hodnotu

$$\bar{A} = \int_{-1}^1 P_{n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n \gamma_k \int_{-1}^1 Q_k(x) dx. \quad (68)$$

Integrál

$$w_k = \int_{-1}^1 Q_k(x) dx \quad (69)$$

můžeme považovat za váhu, kterou připisujeme hodnotě γ_k , takže \bar{A} dostáváme jako "vážený součet" funkčních hodnot

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^n w_k \gamma_k. \quad (70)$$

Váha w_k závisí jen na volbě úseček x_i , nikoli na průběhu funkce γ_i .

Vzorec (70) nahrazuje integrál váženým součtem jistého počtu pořadnic, což je podstata kterékoli numerické integrační metody. Gauss však měl geniální nápad: zkoumat změnu, která nastane, přidáme-li ještě jeden bod x_{n+1} s funkční hodnotou γ_{n+1} . Z definice je zřejmé, že Q_{n+1} bude úměrné $F_n(x)$. Např. pro $n = 3$ vyjde

$$Q_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \text{konst.} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \text{konst.} F_3(x).$$

Proto váha

$$w_{n+1} = \text{konst.} \int_{-1}^1 F_n(x) dx. \quad (71)$$

Nový bod x_{n+1} můžeme zvolit tak, aby se součet (70) nezměnil. Stačí totiž, aby vyšlo $w_{n+1} = 0$. V takovém případě jsme sice přidali jeden bod x_{n+1} , ale funkční hodnotu γ_{n+1} v tomto bodě ani nepotřebujeme znát, neboť její váha je nulová. Výpočet se tedy nijak nekomplikuje ani neprodlouží. Podmínka $w_{n+1} = 0$ znamená jednu vazbu mezi souřadnicemi x_1, x_2, \dots, x_n ; tomu lze vyhovět vhodnou volbou těchto veličin. Pak zvolíme ještě jeden bod, a to x_{n+2} . Opět budeme požadovat, aby $w_{n+2} = 0$. Tak můžeme postupovat dále, až budeme mít celkem $2n$ bodů. Z podmínek nulových vah dostaneme n rovnic

$$\int_{-1}^1 x^l F_n(x) dx = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (72)$$

jinž lze vyhovět jen zcela určitou volbou hodnot x_1, x_2, \dots, x_n . Zvolíme-li tedy souřadnice x_i až x_n shodně s požadavkem (72), dostaneme z rovnice (70) hodnotu \bar{A} s takovou přesností, jako kdybychom zvolili $2n$ bodů, ačkoli jich ve skutečnosti volíme jenom n .*)

Podmínka (72) vyžaduje, aby $F_n(x)$ bylo ortogonální (s vahou 1) k mocnínám x^k ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Takovou vlastnost mají známé Legendreovy polynomy. Funkce $F_n(x)$ je násobkem n -tého Legendreova polynomu a činitele ve funkci $F_n(x)$ musí být - má-li (72) opravdu platit - kořenovými činiteli Legendreových polynomů. Kořeny těchto polynomů jsou tedy hledanými souřadnicemi x_i . Najdeme je spolu s vahami w_i v tab. 1.

Tabulka 1 Hodnoty x_i a váhy w_i pro Gaussovu kvadraturu

n	$\pm x_i$	w_i
2	0,577 350 269 2	1
3	0	0,888 888 888 9
	0,774 596 669 2	0,555 555 555 6
4	0,339 981 043 5	0,652 145 154 9
	0,861 136 311 6	0,347 854 845 1
5	0	0,568 888 888 9
	0,538 469 310 1	0,478 628 670 5
	0,906 179 845 9	0,236 926 885 1
6	0,238 619 186 1	0,467 913 934 6
	0,661 209 386 5	0,360 761 573 0
	0,932 469 514 2	0,171 324 492 4
7	0	0,417 959 183 7
	0,405 845 151 4	0,381 830 050 5
	0,741 531 185 6	0,279 705 391 5
	0,949 107 912 3	0,129 484 966 2
8	0,183 434 642 5	0,362 683 783 4
	0,525 532 409 9	0,313 706 645 9
	0,796 666 477 4	0,223 810 344 5
	0,960 289 856 5	0,101 228 536 3
9	0	0,330 239 355 0
	0,324 253 423 4	0,312 347 077 0
	0,613 371 432 7	0,260 610 696 4
	0,836 031 107 3	0,180 648 160 7
	0,968 160 239 5	0,081 274 388 4

*) Volíme tedy "dvojitě" body, tj. n bodů s n tečnami v nich.

V matematické literatuře se udává pro odhad chyby Gaussovy kvadratury vzorec

$$\eta = \left[\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad (73)$$

kde ξ je nějaká hodnota mezi ± 1 a $f^{(2n)}(\xi)$ značí $2n$ -tou derivaci $\frac{d^{2n}f}{dx^{2n}}$. Tento vzorec není příliš užitečný, neboť vyžaduje znalost $2n$ -té derivace, kterou integrovaná funkce ani nemusí mít. Lanczos uvádí jiný odhad, totiž

$$\eta = \frac{1}{2n+1} \left[f(1) + f(-1) - \bar{A} - \sum_{k=1}^n w_k x_k f'(x_k) \right], \quad (74)$$

vyžadující znalost už jen prvních derivací ve zvolených bodech.

17. úloha. Vypočítejte hodnoty x_i a w_i pro $n = 3$.

Řešení. Z rovnice (72) dostaneme

$$\begin{aligned} d = 0 : \quad & \int_{-1}^1 (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) dx = 0, \\ d = 1 : \quad & \int_{-1}^1 x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) dx = 0, \\ d = 2 : \quad & \int_{-1}^1 x^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) dx = 0. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} (x_1 + x_2 + x_3) - 2x_1x_2x_3 &= 0, \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{3} (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) &= 0, \\ -\frac{2}{5} (x_1 + x_2 + x_3) - \frac{2}{3} x_1x_2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Srovnáním první a třetí rovnice dostaneme $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = 0$.

Zvolíme $x_2 = 0$, $x_1 = -x_3$. Z druhé rovnice vyjde

$$x_1 = -x_3 = \pm \sqrt{0,6} \approx \pm 0,774\,596\,669\,2.$$

Váha w_i vyjde ze vzorců (63) a (69); výsledek můžeme kontrolovat porovnáním s údaji v tab. 1.

18. úloha. S použitím Gaussova vzorce pro $n = 5$ určete integrál

$$A = \int_0^4 e^x dx.$$

Řešení. Nejprve transformujeme proměnnou x z oboru $\langle 0; 1 \rangle$ na proměnnou t z oboru $\langle -1; +1 \rangle$. Vyjde $x = 2(t+1)$. S touto substitucí dostaneme

$$A = 2 \int_{-1}^1 e^{2(t+1)} dt.$$

Podle (70) vypočteme

$$\bar{A} = 2 \sum_{k=1}^5 w_k y_k,$$

kde

$$y_k = e^{x_k}, \quad x_k = 2(t_k + 1).$$

Z tabulky 1 odečteme t_k , w_k a dostaneme

$$t_1 = -0,906\ 179\ 845\ 9, \quad w_1 = 0,236\ 926\ 885\ 1,$$

$$t_2 = -0,538\ 469\ 310\ 1, \quad w_2 = 0,478\ 628\ 670\ 5$$

atd. Nakonec vyjde

$$\bar{A} = 53,598\ 136\ 63$$

místo přesné hodnoty

$$A = e^4 - 1 = 53,598\ 150\ 03.$$

Chyba je tedy jenom

$$A - \bar{A} = 0,000\ 013\ 40.$$

Dolíčky, zbylé po loktech noci,
vyplni ohně pasáček.

František Halas

9. Interpolace pomocí spline-funkcí

Interpolace pomocí Lagrangeových polynomů je vhodná jen tehdy, používáme-li ji pro nejbližší okolí nějakého bodu a je-li toto okolí dostatečně hladké. Kdybychom ji však chtěli použít pro velký rozsah a použili bychom přitom ekvidistantní argumenty, zjistili bychom, že metoda má některá omezení. S růstem počtu bodů, které bereme za základ naší interpolace, získáváme polynomy stále vyšších stupňů, které mají "divočejší" průběhy, což má nepříjemné důsledky na jakost interpolace. V některém intervalu nemusí dokonce polynom vůbec konvergovat k dané funkci, ačkoli to může být funkce zcela "rozumná". Je proto záhodno omezit z praktických i z teoretických důvodů

počet bodů, které tvoří základ pro interpolaci, a používat v různých intervalech různé interpolační polynomy.

V poslední době se k interpolaci používají tzv. spline-funkce, což jsou polynomy nízkého stupně (zpravidla třetího). Pro každý "krok" argumentu platí obecně jiný takový polynom. Jeho koeficienty jsou voleny tak, aby celá aproximace byla "co nejhladší".

Podstatu metody snáze pochopíme, uvědomíme-li si, co "spline" (splajn) znamená: je to anglický název pro elastické pravítko (zpruhu), které se dříve používalo ke kreslení dlouhých křivek (např. na výkresech lodních boků) v konstrukčních kancelářích pro stavbu lodí. Tvar průhybovky byl přitom určen několika body. Diferenciální rovnice takové průhybovky má při malých průhybech tvar

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0. \quad (75)$$

Tomu vyhovuje polynom třetího stupně

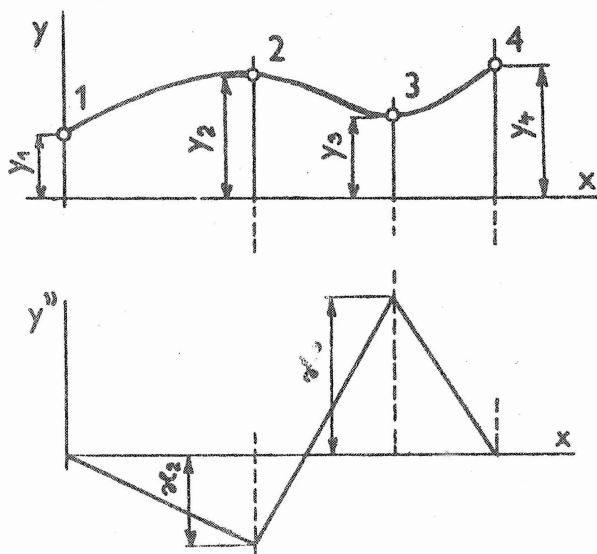
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \quad (76)$$

Máme-li nyní zadány funkční hodnoty

$$y_0 = y(x_0), \quad y_1 = y(x_1), \quad \dots, \quad y_n = y(x_n), \quad (77)$$

zvolíme integrační konstanty pro každý interval $(x_{i-1}; x_i)$ jinak a tak, aby polynomy (76) měly v hraničních bodech nejen společnou hodnotu y_i , ale i první a druhou derivaci (zleva a zprava). Délka i -tého intervalu je

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (78)$$



Obr. 6

Hledaná funkce definovaná polynomy (76) představuje tedy elastickou průhybovku nosníku proloženého zadanými body, na který se nepřenesají žádná vnější zatížení (s výjimkou osamělých reakcí v zadaných bodech). Druhé derivace mají přitom význam ohybových momentů, úměrných křivosti. Zavedeme pro ně pomocné označení (obr. 6)

$$x_i'' = y''(x_i). \quad (79)$$

Spline-funkce (76) však představují elastickou průhybovku jen tehdy, platí-li pro průhyb lineární diferenciální rovnice (75), je-li tedy průhyb relativně

malý, takže $|\psi|^2 \ll 1$. Při větších "průhybech" se obě křivky (spline-funkce a elastika) navzájem liší.

Snadno se přesvědčíme, že v intervalu $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ vyhovuje uvedeným požadavkům polynom

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{h_i} (x_i - x) \psi_{i-1} + \frac{1}{h_i} (x - x_{i-1}) \psi_i + \\ &+ \frac{1}{6 h_i} \left[(x_i - x)^3 - h_i^2 (x_i - x) \right] \kappa_{i-1} + \\ &+ \frac{1}{6 h_i} \left[(x - x_{i-1})^3 - h_i^2 (x - x_{i-1}) \right] \kappa_i . \end{aligned} \quad (80)$$

Ten lze zapsat v maticovém tvaru

$$\psi(x) = \{ N(x) \}^T \{ \mathcal{L} \} , \quad (81)$$

zvolíme-li

$$\{ N(x) \} = \frac{1}{6 h_i} \begin{Bmatrix} 6(x_i - x) \\ 6(x - x_{i-1}) \\ (x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x) \\ (x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1}) \end{Bmatrix} , \quad \{ \mathcal{L} \} = \begin{Bmatrix} \psi_{i-1} \\ \psi_i \\ \kappa_{i-1} \\ \kappa_i \end{Bmatrix}$$

Protože rovnice (81) platí jen pro i -tý interval, označíme ji příslušným indexem

$$\psi_i(x) = \{ N_i \}^T \{ \mathcal{L}_i \} . \quad (82)$$

Podmínka hladkosti $\psi_i'(x_i) = \psi_{i+1}'(x_i)$ dává

$$\{ N_i'(x_i) \} \{ \mathcal{L}_i \} = \{ N_{i+1}'(x_i) \} \{ \mathcal{L}_{i+1} \} , \quad (83)$$

což je celkem $n-1$ podmínek pro $n-1$ neznámých hodnot $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$. Za κ_0 a κ_n volíme nějaké hodnoty, např. nuly (tím zvolíme křivost v počátečním a v koncovém bodě). Rovnice (83) dává

$$\begin{aligned} h_i \kappa_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) \kappa_i + h_{i+1} \kappa_{i+1} &= \\ &= \frac{6(\psi_{i+1} - \psi_i)}{h_{i+1}} - \frac{6(\psi_i - \psi_{i-1})}{h_i} , \end{aligned} \quad (84)$$

což není nic jiného než známá Clapeyronova "třímomentová" rovnice. Soustavu rovnic (84) můžeme rovněž zapsat v maticovém tvaru

$$[A] \{ \kappa \} = \{ b \} . \quad (85)$$

Zde A značí třídiagonální matici

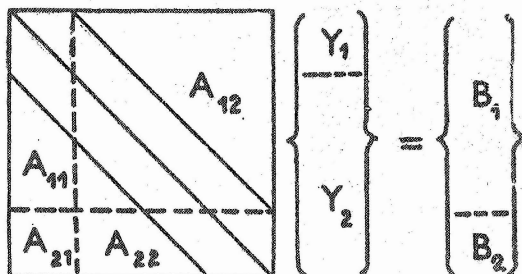
$$[A] = \begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & & & & & & \\ & h_2 & & & & & \\ & & 2(h_2 + h_3) & & & & \\ & & & h_3 & & & \\ & & & & 2(h_3 + h_4) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & h_{n-1} \\ & & & & & & & 2(h_{n-1} + h_n) \end{bmatrix} \quad (86)$$

a dále

$$\{x\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{Bmatrix} \quad (87)$$

Vyřešíme-li soustavu (85), máme celý vektor q_i a tím i polynomy $y_i(x)$.

Třídiagonální matici (78) můžeme invertovat jako trojúhelníkovou, rozdělíme-li ji předem na čtyři submatice podle schématu na obr. 7. Matice A_{12} je trojúhelníková.



Obr. 7

Dostaneme

$$A_{11} Y_1 + A_{12} Y_2 = B_1, \quad (88)$$

$$A_{21} Y_1 + A_{22} Y_2 = B_2.$$

Odtud vypočteme

$$Y_2 = A_{12}^{-1} (B_1 - A_{11} Y_1) \quad (89)$$

a dosadíme do druhé z rovnic (88)

$$A_{21} Y_1 + A_{22} A_{12}^{-1} (B_1 - A_{11} Y_1) = B_2. \quad (90)$$

Po úpravě vyjde

$$Y_1 = (A_{21} - A_{22} A_{12}^{-1} A_{11})^{-1} (B_2 - A_{22} A_{12}^{-1} B_1). \quad (91)$$

Inverze matice $(A_{21} - A_{22} A_{12}^{-1} A_{11})$ nečiní obtíže, neboť je to jednoprvková matice (skalár).

Rovnice (84) je diferenční; jsou pro ni předepsány okrajové podmínky $x_0 = 0$, $x_n = 0$. Na počítači se však snáze řeší diferenční rovnice s počátečními podmínkami $x_0 = 0$, $x_1 = c$. Rovnici (84) upravíme na rekurentní vzorec

$$x_{i+1} = \frac{1}{h_{i+1}} [b_i - 2(h_i + h_{i+1})x_i - h_i x_{i-1}], \quad (92)$$

kde b_i značí podle (87) prvek vektoru b , totiž

$$b_i = \frac{6}{h_{i+1}} (y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_i} (y_i - y_{i-1}). \quad (93)$$

Nyní nepotřebujeme invertovat žádnou matici (a nepotřebujeme tedy ani místo v paměti počítače, kterého je k inverzi třeba). V jednom cyklu vypočteme pro zadané hodnoty $x_0 = 0$, $x_1 = c$ (= reálné číslo) z rovnice (92) všechna x_j pro $j = 2$ až n ; postupně volíme $i = 1, 2, \dots, n-1$. Nyní ovšem $x \neq 0$. Chceme-li vyhovět druhé okrajové podmínce $x_n = 0$, nemůžeme volit hodnotu c libovolně. Uvědomíme-li si, že x_n závisí lineárně na volbě x_1 , že tedy

$$x_n = \alpha + \beta x_1, \quad (94)$$

snadno vypočteme x_1 , pro které vyjde $x_n = 0$

$$x_1 = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (95)$$

Zvolíme-li v prvním cyklu $c = 0$, vyjde $x_n = x_{n0}$. V druhém cyklu volíme $c = 1$ a vyjde $x_n = x_{n1}$. Pak podle (94)

$$\begin{aligned} x_{n0} &= \alpha \\ x_{n1} &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

a tedy

$$x_1 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x_{n0}}{x_{n0} - x_{n1}}. \quad (96)$$

První dva cykly mohou v počítači proběhnout, aniž hodnoty x_i pro $i < n$ registrujeme - nepotřebujeme je. Teprve při třetím cyklu, kdy už známe správnou hodnotu x_1 podle (96), použijeme jednotlivé hodnoty x_i k doplnění prvků do vektoru $\{q_i\}$. S ním ihned dostáváme polynom $y_i(x)$, který ponecháváme v paměti počítače jen tak dlouho, pokud počítáme interpolované hodnoty nebo na zapisovači kreslíme křivku $y_i(x)$ pro i -tý interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Pak postoupíme k indexu o jednotku většímu. Jakmile známe polynom $y_{i+1}(x)$, můžeme $y_i(x)$ "přemazat". Potřeba paměti počítače je tak velmi malá.

Spline-funkce lze použít nejen k interpolaci (k tomu máme ostatně i jiné interpolační vzorce), ale i k analytickému popisu experimentálně získaných křivek (různých charakteristik apod.). V jednotlivých intervalech je pak máme popsány polynomy třetího stupně, které na sebe hladce navazují (v dělicích bodech máme společnou funkční hodnotu, tečnu i oskulační kružnici). Spline-funkce mohou být velkou pomocí také v technickém kreslení (ve spojení se souřadnicovým zapisovačem), odkud ostatně - jak jsme již uvedli - získaly svůj název.

19. úloha. Proložte spline-křivku body $\psi(0) = 1, \psi(1) = 3, \psi(2) = 2,$
 $\psi(3) = 1, \psi(4) = 1, \psi(5) = 2.$

Řešení. Máme $n = 5$, intervaly jsou jednotkové. Prvky vektoru b vyjdou podle (93) takto:

$$\begin{aligned} b_1 &= 6(2 - 3) - 6(3 - 1) = -18, \\ b_2 &= 6(1 - 2) - 6(2 - 3) = 0, \\ b_3 &= 6(1 - 1) - 6(1 - 2) = 6, \\ b_4 &= 6(2 - 1) - 6(1 - 1) = 6. \end{aligned}$$

Rovnice (85) je

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & & & 1 & 0 & 0 \\ & 4 & & & 1 & 0 \\ & & 4 & & & 1 \\ \hline & & & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Inverzí matice A_{12} dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 15 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

a dále

$$A_{22} A_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 15 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & -15 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} = \begin{bmatrix} 56 & -15 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 209,$$

$$A_{22} A_{12}^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} 56 & -15 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -18 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix} = -984,$$

$$Y_1 = - \frac{6 + 984}{209} = - \frac{90}{19},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 15 & -4 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} -18 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix} + \frac{90}{19} \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 18 \\ 18 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Celkem tedy máme

$$\{x\}^T = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} -90 & 18 & 18 & 24 \end{bmatrix}.$$

Matici A jsme mohli invertovat přímo, protože je jen čtvrtého řádu. Ověřili jsme si však platnost vzorců (90) a (91).

Kdybychom postupovali podle vzorce (92), totiž

$$x_{i+1} = b_i - 4x_i - x_{i-1}, \quad (a)$$

vyšlo by pro $x_0 = x_1 = 0$

$$x_{20} = -18 - 0 = -18,$$

$$x_{30} = 0 + 72 - 0 = 72,$$

$$x_{40} = 6 - 288 + 18 = -264,$$

$$x_{50} = 6 + 1056 - 72 = 990.$$

Pro $x_0 = 0$, avšak $x_1 = 1$, bychom dostali

$$x_{21} = -18 - 4 - 0 = -22,$$

$$x_{31} = 0 + 88 - 1 = 87,$$

$$x_{41} = 6 - 348 + 22 = -320,$$

$$x_{51} = 6 + 1280 - 87 = 1199.$$

Podle (96)

$$x_1 = \frac{x_{50}}{x_{50} - x_{51}} = \frac{990}{990 - 1199} = - \frac{90}{19}.$$

S touto počáteční hodnotou vyjde ze vzorce (a)

$$x_2 = -18 + 4 \frac{90}{19} - 0 = \frac{18}{19},$$

$$x_3 = 0 - 4 \frac{18}{19} + \frac{90}{19} = \frac{18}{19},$$

$$x_4 = 6 - 4 \frac{18}{19} - \frac{18}{19} = \frac{24}{19},$$

$$x_5 = 6 - 4 \frac{24}{19} - \frac{18}{19} = 0.$$

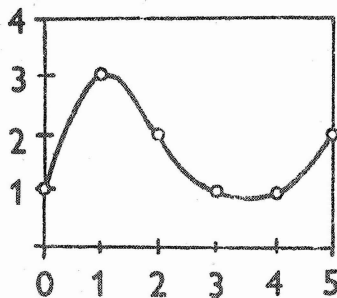
Vidíme, že tento druhý způsob výpočtu je rychlejší a lze ho snadno programovat. Tuto zkušenost využijeme ještě v příští kapitole.

Nyní už můžeme sestavit spline-funkce pro kterýkoli interval, např.

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6(1-x) & 6x & (1-x)^3 - (1-x) & (x^3 - x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -\frac{90}{19} \end{Bmatrix} = y_1(x),$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6(2-x) & 6(x-1) & (2-x)^3 - (2-x) & (x-1)^3 - (x-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{90}{19} \\ \frac{18}{19} \end{Bmatrix} = y_2(x).$$

Průběh těchto funkcí je zakreslen na obr. 8.



Obr. 8

Každého dne se něco počíná,
něco překrásného se počíná.

Jaroslav Seifert

10. Průhyb nosníku jako úloha s počátečními podmínkami

V předchozí kapitole jsme ukázali, jak výhodné bylo řešení rovnice (85), jestliže jsme ji považovali za diferenciální rovnici s danými počátečními podmínkami.

Obdobnou výhodu můžeme získat i při hledání průhybovky neprizmatického nosníku řešením diferenciální rovnice

$$w''(x) = - \frac{M(x)}{EJ(x)} = - f(x), \quad (97)$$

nebudeme-li ji považovat za okrajovou, ale za počáteční úlohu. Typ rovnice se však nemění; nemění se ani funkční prostor, v němž hledáme řešení. Oba způsoby jsou rovnocenné a vedou - až na možný různý vliv zaokrouhlovacích chyb - ke stejným výsledkům. Formální rozdíl v pojetí úlohy však vede k podstatně rozdílné metodě řešení. To jsme již ukázali v předešlé kapitole.

Předpokládejme, že nosník je prostě podepřen a že jeho délka je zvolena za jednotku, čehož lze vždy dosáhnout transformací nezávisle proměnné. Okrajové podmínky pro rovnici (97) tedy jsou

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 0. \quad (98)$$

Budeme postupovat tak, že derivaci $w''(x)$ nahradíme diferenčním vzorcem (49). K tomu rozdělíme interval $\langle 0; 1 \rangle$ na n stejných dílů (nemusily by být stejné, diferenční vzorce by však byly složitější). Každý díl má délku $h = \frac{1}{n}$. Průhyby v dělicích bodech označíme w_0, w_1, \dots, w_n , takže okrajové podmínky (98) jsou nyní

$$w_0 = 0, \quad w_n = 0. \quad (99)$$

Rovnici (97) prepíšeme do diferenčního tvaru pomocí (49)

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = -h^2 f_i + O(h^4), \quad (100)$$

kde f_i je hodnota funkce $f(x)$ v i -tém dělicím bodu. Dělení volíme tak husté, aby funkce $f(x)$ byla dostatečně podrobně vystižena posloupností f_0, f_1, \dots, f_n .

U osazovaného hřídele je funkce $f(x)$ spojitá jenom po částech (nastávají tam skokové změny velikosti momentu setrvačnosti průřezu). Padne-li dělicí bod do místa nespojitosti, volíme za f_i aritmetický průměr hodnot určených limitou zleva a zprava.

Vynecháme-li v rovnici (100) člen $O(h^4)$, nedostaneme už správné hodnoty $w_0 = w(0)$, $w_1 = w(h)$ atd., ale jen jejich aproximace $\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n$, které budou vyhovovat diferenční rovnici

$$\tilde{w}_{i-1} - 2\tilde{w}_i + \tilde{w}_{i+1} = -h^2 f_i. \quad (101)$$

Tu bychom mohli přepsat s použitím (99) do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \vdots \\ \tilde{w}_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{Bmatrix} \quad (102)$$

a řešit inverzí třídiagonální matice $(n-1)$ ního řádu. Tomu se však můžeme vyhnout, převedeme-li naši úlohu na problém s počátečními podmínkami. Nejprve budeme řešit pomocnou úlohu, v níž proměnnou veličinu označíme pruhem. Zvolíme počáteční podmínky

$$\bar{w}_0 = 0, \quad \bar{w}_1 = 0 \quad (103)$$

a z rovnice (101) dostaneme pro ostatní hodnoty v pomocné úloze vztah

$$\bar{w}_{i+1} = 2\bar{w}_i - \bar{w}_{i-1} - h^2 f_i \quad (104)$$

($i = 1, 2, \dots, n-1$). Tak vypočteme všechny hodnoty \bar{w}_i . V rozporu s požadavkem (99) však nyní nebude \bar{w}_n obecně nulové.

Rovnice (104) má naštěstí takový tvar, že k řešení lze připočítat $i\Delta h$, aniž se tím poruší platnost diferenční rovnice (104), popř. (101). Dostaneme tedy

$$\tilde{w}_i = \bar{w}_i + i\Delta h. \quad (105)$$

Řešení (105) nespĺňuje druhou z počátečních podmínek pomocné úlohy (103). Zavedení konstanty Δ do výpočtu umožňuje, abychom místo toho splnili druhou okrajovou podmínku (99) původní úlohy, totiž $\tilde{w}_n = 0$. Dostaneme

$$0 = \bar{w}_n + n\Delta h.$$

Odtud vypočteme Δh a z rovnice (105) dostaneme hledanou aproximaci průhybu

$$\tilde{w}_i = \bar{w}_i - \frac{i}{n} \bar{w}_n. \quad (106)$$

Protože hodnotu \bar{w}_n známe teprve po proběhnutí celého cyklu (104) pro $i = 1, 2, \dots, n-1$, musili bychom všechny hodnoty \bar{w}_i uchovávat

v paměti počítače, abychom s nimi dodatečně vypočítali \tilde{w}_i pomocí (106). To by mohlo vadit při velkém n . Proto bude lépe, necháme-li celý cyklus proběhnout, aniž registrujeme průběžné hodnoty, a potom - s vypočtenou hodnotou \bar{w}_n - spustíme celý cyklus znovu, tentokrát spolu s výpočtem \tilde{w}_i podle (106) v každém kroku. Zapisovač může přitom zakreslit průhybovku v potřebném zvětšení. Zapisovač spojí body $\tilde{w}_0 = \tilde{w}(0)$, $\tilde{w}_1 = \tilde{w}(h)$, ..., $\tilde{w}_i = \tilde{w}(ih)$, ..., $\tilde{w}_n = \tilde{w}(1)$ úsečkami. Měřítka pro pořadnice může počítač zvolit sám podle vypočtené hodnoty \bar{w}_n , určíme-li to v programu. Takový program se pak hodí pro výpočty a popř. kreslení nejružnějších průhybovek, aniž musíme předem zadávat rozsahy souřadnic. Zároveň si můžeme předepsat, aby počítač uchovával v paměti extrémní hodnotu průhybu (nebo velikost průhybu v předem zvoleném místě, máme-li na tom zájem) a nakonec ji vytiskl. Samozřejmě by nebylo účelné ani rozumné, kdybychom předepisovali tisk všech hodnot \tilde{w}_i .

Zbývá ještě rozhodnout, jak velký počet n dílků musíme zvolit, abychom získali velikost průhybu s potřebnou přesností. Podle (100) by se mohlo zdát, že chyba ve výpočtu maximálního průhybu w_{max} bude řádu $O(h^4)$. To by však byl zcela nesprávný názor. Taková totiž bude chyba součtu $\tilde{w}_{i-1} - 2\tilde{w}_i + \tilde{w}_{i+1}$, nahradíme-li jím výraz $h^2 w''(x_i)$; není to tedy chyba jednotlivé hodnoty \tilde{w}_i .

Budeme se snažit odhadnout největší chybu vypočteného průhybu, která vzniká diskretizací

$$\eta = \max |w(x_i) - \tilde{w}_i| \quad (107)$$

Nazývá se globální diskretizační chyba. Průhyb \tilde{w}_i jsme získali z diferenciální rovnice (100) se zanedbaným členem $O(h^4)$, tedy z rovnice (101), popř. (102). Proti tomu $w(x_i)$ značí hodnotu w v bodě x_i , získanou řešením diferenciální rovnice (97), takže např. $w(x_{i+1}) = w(x_i + h)$.

Budeme předpokládat, že funkce $w(x)$ má alespoň čtyři derivace. Z Taylorových řad pro $w(x+h)$, resp. $w(x-h)$ dostaneme sečtením a úpravou

$$\frac{1}{h^2} [w(x-h) - 2w(x) + w(x+h)] = \quad (108)$$

$$= w''(x) + \frac{h^2}{24} [w^{(4)}(\xi_1) + w^{(4)}(\xi_2)] ,$$

kde

$$x-h \leq \xi_1 \leq x, \quad x \leq \xi_2 \leq x+h.$$

Rozdíl

$$\left| \frac{1}{h^2} [w(x-h) - 2w(x) + w(x+h)] - w''(x) \right| = \tau(x, h) \quad (109)$$

značí lokální diskretizační chybu. Je to chyba, která vzniká, nahradíme-li derivaci $w''(x)$ diferenčním vzorcem aplikovaným na přesnou funkci $w(x)$. Lze dokázat, že $\tau(x, h)$ podle (109) limituje k nule pro $h \rightarrow 0$.

Srovnáním rovnic (108) a (109) vyjde ohraničení

$$\tau(x, h) \leq \frac{1}{12} M_4 h^2, \quad (110)$$

je-li M_4 největší z absolutních hodnot čtvrtých derivací w podle x

$$M_4 = \max_{0 < x < 1} |w^{(4)}(x)|. \quad (111)$$

Nejvíce nás bude zajímat globální diskretizační chyba (107). Abychom ji mohli posoudit, zavedeme lokální chybu hodnot

$$e_i = w(x_i) - \tilde{w}_i, \quad (112)$$

takže $\eta = \max |e_i|$. Z rovnice (97) dosadíme do rovnice (109) a dostaneme

$$|w(x_{i-1}) - 2w(x_i) + w(x_{i+1}) + h^2 f(x_i)| = h^2 \tau(x_i, h). \quad (113)$$

Hodnoty \tilde{w}_i vyhovují rovnici (101)

$$\tilde{w}_{i-1} - 2\tilde{w}_i + \tilde{w}_{i+1} + h^2 f(x_i) = 0. \quad (114)$$

Odečtením posledních dvou rovnic vyjde s použitím (112)

$$|e_{i-1} - 2e_i + e_{i+1}| = h^2 \tau(x_i, h). \quad (115)$$

Rovnice (115) je zřejmě obdobou rovnice (101). Je to tedy diferenční přepis pro diferenciální rovnici

$$e''(x) = \tau(x, h). \quad (116)$$

Protože na koncích intervalu jsou hodnoty \tilde{w} přesné (totiž nulové podle okrajových podmínek), platí podmínky $e(0) = 0$, $e(1) = 0$. Rovnice (116) je tedy diferenciální rovnicí pro průhyb e prostě podepřeného nosníku s ohybovými momenty $\tau(x, h)$. Nahradíme-li τ mezní hodnotou (110), dostaneme nosník s konstantním ohybovým momentem $m_0 = \frac{1}{12} M_4 h^2$, pro jehož největší průhyb vyjde z elementární teorie hodnota $\frac{m_0 l^3}{8} = \frac{m_0}{8} = \frac{M_4 h^2}{64}$. Je tedy

$$\max |e(x)| \leq \frac{1}{96} M_4 h^2 \quad (117)$$

a globální diskretizační chyba

$$\eta = \max |e(x)| \leq \frac{1}{96} M_4 h^2. \quad (118)$$

Hodnoty \tilde{w}_i budou záviset na velikosti kroku h , proto můžeme napsat (107) s použitím (118) také takto:

$$|w(x_i) - \tilde{w}_i(h)| = O(h^2). \quad (119)$$

To je odpověď na naši otázku: chyba ve výpočtu průhybu diferenční metodou bude při dostatečně malém h konvergovat k nule rychlostí $O(h^2)$. Zmenšíme-li krok např. na polovinu, zmenší se chyba čtyřikrát.

Taková je tedy inherentní chyba metody při výpočtu průhybu prostě podepřeného nosníku z diferenční rovnice. K ní přistoupí ještě chyba zaokrouhlováním, jejíž odhad je obtížnější. Při výpočtech na malých elektronických počítačích v soustavě s pohyblivou desetinnou čárkou bývá přesnost numerického výpočtu dostatečná, nevolíme-li extrémně velké n . To znamená, že chyba metody převládá nad chybou zaokrouhlováním. Volíme-li však n velké, bude chyba zaokrouhlováním rozhodující; vznikne tím, že v diferenčním vzorci budeme odečítat velmi malou veličinu od velkého čísla. Velikost zaokrouhlovací chyby zkontrolujeme nejnáze tak, že výpočet opakujeme pro různě velké kroky a porovnáme odhady exaktních řešení pomocí Richardsonovy metody, o které se zmíníme později. Začnou-li se tyto odhady při malých krocích lišit, je to zpravidla způsobeno vzrůstem zaokrouhlovací chyby.

Kdybychom stejnou metodou počítali nosník na jednom konci vetknutý a na druhém volný, nahradili bychom okrajové podmínky $w(0)=0$, $w'(0)=0$ podmínkami

$$\tilde{w}_0 = 0, \quad \tilde{w}_1 = 0, \quad (120)$$

tj. nahradili bychom derivaci diferenčním vzorcem. Ze vztahu

$$w'(0) = \frac{1}{h} [w(h) - w(0)] = O(h) \quad (121)$$

bychom totiž vypočetli

$$\tilde{w}'(0) = \frac{1}{h} [\tilde{w}_1 - \tilde{w}_0] = \frac{1}{h} \tilde{w}_1 \quad (122)$$

a položili rovným nule. Základní přímka, od které odečítáme průhyby, je pak od osy nezatíženého nosníku odkloněna o úhel φ (obr. 9)

$$\varphi = w'(0) - \tilde{w}'(0) = O(h). \quad (123)$$

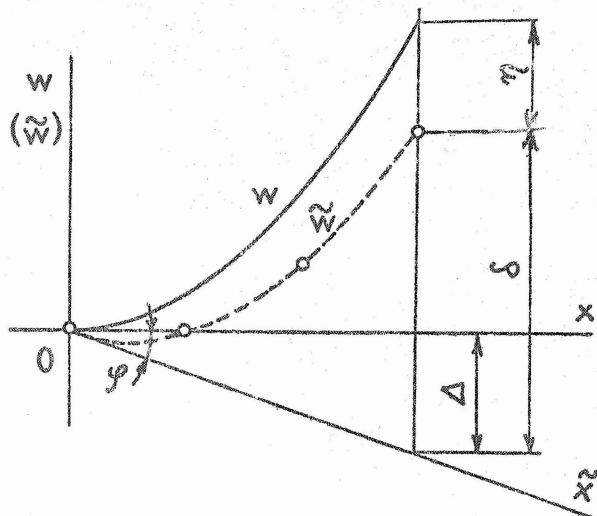
Chyba ve výpočtu maximálního průhybu tím vzroste o

$$\Delta = \varphi \cdot 1 = O(h). \quad (124)$$

Protože δ je určeno s chybou $O(h^2)$, bude chyba v určení maximálního průhybu

$$\eta = \Delta + O(h^2) = O(h) + O(h^2) = O(h). \quad (125)$$

Chyba bude o jeden řád větší než u nosníku prostě podepřeného. Globální diskretizační chyba tedy závisí nejenom na lokální diskretizační chybě, ale také na chybě, s jakou aproximujeme okrajové podmínky. Musíme se proto snažit, aby řád diskretizační chyby byl stejný uvnitř definičního oboru i na jeho okrajích.



Obr. 9

Známe-li rychlost konvergence $O(h^m)$, můžeme odhadnout přesné řešení $w(x)$ ze dvou aproximací $\tilde{w}(x, h_1)$, $\tilde{w}(x, h_2)$. Platí totiž, že

$$w(x) = \tilde{w}(x, h_1) + c \cdot h_1^m \quad (126)$$

$$w(x) = \tilde{w}(x, h_2) + c \cdot h_2^m .$$

Odtud můžeme vyloučit neznámou konstantu c a dostaneme

$$w(x) = \frac{h_1^m \tilde{w}(x, h_2) - h_2^m \tilde{w}(x, h_1)}{h_1^m - h_2^m} . \quad (127)$$

Uvedený způsob odhadu přesného řešení je znám jako Richardsonova extrapolace. Pro většinou nosník je $m = 1$, pro prostě podepřený $m = 2$.

Jak uvidíme v příští kapitole, existuje u diferenčních metod nebezpečí vzrůstu zaokrouhlovacích chyb způsobené nestabilitou řešení. Proto se k případu řešení chybu nosníku ještě vrátíme ve 24. úloze.

20. úloha. Řešte numericky diferenciální rovnici $w''(x) = 16$ s okrajovými podmínkami (a) $w(0) = 0$, $w(1) = 0$, (b) $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$.

Řešení. Nejprve zvolíme hrubé dělení intervalu, např. $n = 4$, $h = 0,25$. Rovnice (104) pak je

$$\bar{w}_{i+1} = 2 \bar{w}_i - \bar{w}_{i-1} + 1 .$$

S počátečními hodnotami $\bar{w}_0 = 0$, $\tilde{w}_1 = 0$ vyjdou hodnoty uvedené v tab. 2. Tyto hodnoty představují aproximaci hledané funkce pro okrajové podmínky (b). Podle (106) pak vypočteme hodnoty \tilde{w}_i , které platí pro okrajové podmínky (a). Jsou rovněž uvedeny v tab. 2.

Tab. 2 Výpočet hodnot \bar{w}_i , \tilde{w}_i pro $h = 0,25$

i	0	1	2	3	4
\bar{w}_i	0	0	1	3	6
\tilde{w}_i	0	-1,5	-2	-1,5	0

Nyní zvolíme poloviční krok, tj. $n = 8$, $h = 0,125$. Dostaneme diferenční rovnici

$$\bar{w}_{i+1} = 2\bar{w}_i - \bar{w}_{i-1} + 0,25$$

a její řešení podle tab. 3.

Tab. 3 Výpočet hodnot \bar{w}_i , \tilde{w}_i pro $h = 0,125$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
\bar{w}_i	0	0	0,25	0,75	1,50	2,50	3,75	5,25	7,00
\tilde{w}_i	0	-0,875	-1,5	-1,875	-2	-1,875	-1,5	-0,875	0

Tab. 4 Srovnání vypočtených maximálních hodnot

Úloha	$n = 4$	$n = 8$	Richardsonova extrapolace	Přesná hodnota
(a)	2	2	2	2
(b)	6	7	8	8

V tabulce 4 je pak porovnána maximální hodnota $|w|_{max} = |w(0,5)|$ pro okrajové podmínky (a), resp. $w_{max} = w(1)$ pro okrajové podmínky (b) pro různé způsoby výpočtu. Pro Richardsonovu extrapolaci vyšlo podle (127) pro případ (b) ($m = 1$)

$$w_{max} = \frac{0,25 \cdot 7 - 0,125 \cdot 6}{0,25 - 0,125} = 8.$$

Výsledky jsou překvapivě přesné, neboť daná úloha je velmi jednoduchá.

21. úloha. Odvoďte diferenční vzorec pro numerické řešení diferenciální rovnice

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta w = 1 \quad (a)$$

s okrajovými podmínkami

$$\text{ato} \quad \begin{aligned} w(0) &= 0, & w(1) &= 0, \\ w'''(0) &= 0, & w'''(1) &= 0. \end{aligned} \quad (b)$$

Tato rovnice popisuje průhyb rovnoměrně zatíženého, prostě podepřeného nosníku na pružném podkladu. Určete také řád chyby metody.

Řešení. Diferenční vzorec pro čtvrtou derivaci nejnázne odvodíme dvojitou aplikací vzorce (49) pro druhou derivaci. Označíme ji $p = w''(x)$; ze schématu na obr. 10 dostaneme pro ekvidistantní argumenty

$$\tilde{w}_{i-2} - 4\tilde{w}_{i-1} + 6\tilde{w}_i - 4\tilde{w}_{i+1} + \tilde{w}_{i+2} + \beta h^4 \tilde{w}_i = h^4. \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{i-1} &= \frac{1}{h^2} \begin{array}{c} i-1 \quad i \quad i+1 \\ \textcircled{1} - \textcircled{-2} - \textcircled{1} \end{array} + O(h^2) \\ -2\tilde{p}_i &= \frac{1}{h^2} \begin{array}{c} \textcircled{-2} - \textcircled{4} - \textcircled{-2} \end{array} + O(h^2) \\ \tilde{p}_{i+1} &= \frac{1}{h^2} \begin{array}{c} \textcircled{1} - \textcircled{-2} - \textcircled{1} \end{array} + O(h^2) \\ \hline \tilde{w}_i^{(4)} = \tilde{p}_i &= \frac{1}{h^4} \begin{array}{c} \textcircled{1} - \textcircled{-4} - \textcircled{6} - \textcircled{-4} - \textcircled{1} \end{array} + O(h^2) \end{aligned}$$

Obr. 10

Okrajové podmínky jsou

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0 &= 0, & \tilde{w}_n &= 0, \\ \tilde{w}_{-1} - 2\tilde{w}_0 + \tilde{w}_1 &= 0, & \tilde{w}_{n-1} - 2\tilde{w}_n + \tilde{w}_{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (d)$$

Definiční obor jsme rozšířili o $2h$ přidáním fiktivních uzlů $i=-1$, $n+1$, abychom mohli vyjádřit okrajové podmínky, obsahující druhou derivaci, pomocí (49). Diferenční rovnici můžeme tedy napsat pro $i=1$ až $i=n-1$, tj. $n-1$ krát. Neznámých je celkem $n+3$. Připočteme-li

k $n - 1$ rovnicím čtyři okrajové podmínky, dostaneme $n + 3$ rovnic, tj. právě tolik, kolik je neznámých. Řešení této soustavy by tedy vyžadovalo inverzi matice - po vyloučení okrajových podmínek - řádu $n - 1$.

Prozkoumáme nyní, zda by bylo možno řešit diferenční rovnici pomocí počátečních podmínek rekurentním způsobem. Vypočítali bychom

$$\tilde{w}_{i+2} = 4\tilde{w}_{i+1} - (6 + \beta h^4)\tilde{w}_i + 4\tilde{w}_{i-1} - \tilde{w}_{i-2} + h^4 \quad (e)$$

pro $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Shodně s okrajovými podmínkami (d) bychom volili na počátku definičního intervalu

$$\tilde{w}_0 = 0, \quad \tilde{w}_{-1} = -\tilde{w}_1. \quad (f)$$

Protože musíme volit čtyři hodnoty, zvolíme ještě

$$\tilde{w}_1 = \xi, \quad \tilde{w}_2 = \eta. \quad (g)$$

Výsledkem řešení pak bude vztah ^{*})

$$\begin{Bmatrix} \tilde{w}_{n+1} \\ \tilde{w}_n \\ \tilde{w}_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}. \quad (h)$$

Prvky c_1 až c_3 dostaneme řešením případu $\xi = 0$, $\eta = 0$. Prvky a_{11} , a_{21} , a_{31} dostaneme pro $\xi = 1$, $\eta = 0$. Konečně a_{12} , a_{22} , a_{32} plyne z počátečních podmínek $\xi = 0$, $\eta = 1$. Řešení tedy musíme třikrát opakovat, abychom určili všechny prvky matic $[A]$ a $\{c\}$. Podle okrajových podmínek (d) má být

$$\tilde{w}_n = 0 \quad \tilde{w}_{n+1} + \tilde{w}_{n-1} = 0, \quad (i)$$

proto musí platit rovnice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}_{n+1} \\ \tilde{w}_n \\ \tilde{w}_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (j)$$

^{*}) Vzhledem k linearitě výchozí rovnice musí být hodnoty \tilde{w}_i lineárními funkcemi ξ , η .

Odtud vypočteme

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} + a_{31} & a_{12} + a_{32} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_1 + c_3 \end{Bmatrix}. \quad (k)$$

S těmito hodnotami pak proběhne celý cyklus počtvrté; tentokrát už budou splněny všechny okrajové podmínky.

Zdálo by se, že čtyřnásobné probíhání výpočtového cyklu není výhodné. Nezapomeňme však, že jde o poměrně malý počet kroků - zpravidla volíme n řádově desítky - a že jde o nejjednodušší algebraické operace. Ve skutečnosti je jedinou nevýhodou metody možná ztráta numerické přesnosti vlivem zaokrouhlovacích chyb při volbě příliš malého kroku. Přesné řešení naší úlohy není sice obtížné, vyžaduje však generování hyperbolických a goniometrických funkcí. Stalo by se však obtížným a nevýhodným, kdyby na pravé straně (a) byla obecná, po částech nespojitá funkce x . Obtížnost numerického řešení by se tím však prakticky nezměnila.

Nyní ještě odhadneme řád chyby metody. Lokální diskretizační chyba

$$\tau(x, h) = \left| \frac{1}{h^4} \left[w(x-2h) - 4w(x-h) + 6w(x) - 4w(x+h) + w(x+2h) \right] - w^{(4)}(x) \right| \quad (l)$$

splňuje nerovnost

$$\tau(x, h) \leq \frac{1}{6} h^2 M_6, \quad (m)$$

kde

$$M_6 = \max_{0 < x < 1} \left| \frac{d^6 w}{dx^6} \right|.$$

Do vzorce pro lokální diskretizační chybu dosadíme čtvrtou derivaci $w^{(4)}(x)$ z dané diferenciální rovnice. Pak od tohoto vzorce odečteme diferenční rovnici pro \tilde{w}_i . Za rozdíl $w(x_i) - \tilde{w}_i$ dosadíme e_i a dostaneme

$$\begin{aligned} \left| e_{i-2} - 4e_{i-1} + 6e_i - 4e_{i+1} + e_{i+2} + \beta h^4 e_i \right| &= \\ &= h^4 \tau(x, h) \leq \frac{1}{6} M_6 h^6. \end{aligned} \quad (n)$$

Tuto rovnici máme řešit spolu s okrajovými podmínkami, z nichž první dvě platí přesně, druhé dvě jsou zatíženy lokální diskretizační chybou

$$\begin{aligned} e_0 &= 0, & e_n &= 0, \\ \left| e_{-1} - 2e_0 + e_1 \right| &= h^2 \bar{c}(0, h) \leq \frac{1}{12} \bar{M}_4 h^4, \\ \left| e_{n-1} - 2e_n + e_{n+1} \right| &= h^2 \bar{c}(1, h) \leq \frac{1}{12} \bar{M}_4 h^4. \end{aligned} \quad (o)$$

Zde \bar{M}_4 značí $\max_{-h < x < h} |w^{IV}(x)|$, $\bar{M}_4 = \max_{1-h < x < 1+h} |w^{IV}(x)|$.

Protože daná diferenciální rovnice platí pro jednotkové spojité zatížení, poznáváme srovnáním diferenčních rovnic (c), (d) a (n), (o), že e_i znamená průhyb sdruženého nosníku uloženého na témže pružném podkladu a zatíženého spojitou silou řádu h^2 (neboť $h^6 = h^2 \cdot h^4$). Okrajové podmínky pro e_i znamenají, že náš nosník je na okrajích zatížen ohybovými momenty. Pro ohybové momenty totiž platí, že jsou úměrné druhé derivaci, tedy

$$\begin{aligned} \bar{m} \sim w''(0) &= \frac{1}{h^2} [w(-h) - 2w(0) + w(h)] , \\ \bar{m} \sim w''(1) &= \frac{1}{h^2} [w(1-h) - 2w(1) + w(1+h)] \end{aligned} \quad (p)$$

Okrajové momenty sdruženého nosníku jsou rovněž úměrné h^2 . K tomu dojdeme srovnáním (o) a (p). Průhyb nosníku bude proto také úměrný h^2 , takže globální diskretizační chyba (chyba metody) bude

$$|w(x_i) - \tilde{w}_i| = O(h^2). \quad (q)$$

Zatím jsme se spokojili s určením řádu m chyby $O(h^m)$. Kdybychom však použili hodnoty získané numerickým řešením k odhadu M_6 , \bar{M}_4 , \bar{M}_4 , resp. přímo k výpočtu $\tau(x, h)$, mohli bychom přibližně vypočítat z diferenčních rovnic (n) a (o) horní mez, popř. i skutečnou velikost globální diskretizační chyby. K tomuto cíli však rychleji vede Richardsonova extrapolace.

Ať chci co chci, za krátký čas se všechno jinak zvrtně zas.

Jan Neruda

11. O stabilitě řešení diferenciálních a diferenčních rovnic

Diferenciální rovnice pro průhyb nosníku, jejíž numerické řešení jsme v minulé kapitole naznačili, se prakticky vždy řeší na uzavřeném konečném intervalu, a tedy s omezeným počtem kroků u diferenční metody. Najít průhyb nosníku je typická okrajová úloha. Jestliže jsme zvolili jiný způsob řešení pomocí počátečních podmínek, byl to jen formální obrat, neboť nakonec jsme splnili okrajové podmínky na obou koncích nosníku. Popisuje-li však některá diferenciální rovnice děj, který se rozvíjí na polonekonečném intervalu (obvykle v čase), jsou zadány jenom počáteční podmínky a počet kroků o velikosti $h > 0$ není omezen. Pak se může stát, že malá nepřesnost v počátečních podmínkách způsobí velkou chybu výsledku. Chyba bez omezení vzrůstá, když se vzdalujeme od počátečního bodu, a může být velká, i když se při řešení úlohy omezíme jen na konečný interval (sledujeme děj jen po určité době od jeho

počátku). Chyba však může vzrůst i u okrajových úloh, zmenšíme-li krok nad určitou míru nebo řešíme-li některou úlohu na relativně dlouhém intervalu. Některý typ úloh je velmi citlivý k takovým chybám a řešení se snadno "zvrtné" k falešným výsledkům, kdežto jiný typ úloh je "imunní". Budeme nyní sledovat příčiny těchto jevů.

Uvedeme nejprve příklad řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 \end{aligned} \quad (128)$$

s počátečními podmínkami

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1.$$

Přesné řešení je

$$y_1(t) = e^{-t}, \quad y_2(t) = -e^{-t} \quad (129)$$

Nyní nepatrně pozměníme jednu z počátečních podmínek a pozměněné řešení označíme stříškou. Bude

$$\hat{y}_1(0) = 1 + \varepsilon, \quad \hat{y}_2(0) = -1.$$

Přesné řešení nyní je

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(t) &= \frac{1}{2}(2 + \varepsilon)e^{-t} + \frac{1}{2}\varepsilon e^t, \\ \hat{y}_2(t) &= -\frac{1}{2}(2 + \varepsilon)e^{-t}. \end{aligned} \quad (130)$$

Je zřejmé, že pro jakkoli malé nenulové $|\varepsilon|$ poroste absolutní hodnota členu $\frac{1}{2}\varepsilon e^t$ s časem t exponenciálně do nekonečna, takže pro chybu řešení máme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(i) - \hat{y}_i(t)| \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2. \quad (131)$$

Řešení je tedy nestabilní, neboť počáteční chyba bude neomezeně narůstat. Chyba může být dána buď nepřesností počátečních podmínek (a rostla by i při absolutně přesném numerickém počítání), nebo zaokrouhlováním v průběhu výpočtu (v dalším výpočtu působí taková chyba stejně jako chyba počátečních podmínek).

Soustavu (128) můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (132)$$

čili

$$\{\gamma\}' = f(\{\gamma\}),$$

Je-li $\{\gamma\} = [\gamma_1 \ \gamma_2]^T$. Pravá strana by mohla explicitně záviset na t , takže obecněji by bylo

$$\{\gamma\}' = f(\{\gamma\}, t). \quad (133)$$

Porovnáme-li řešení $\{\gamma\}$ s pozmeněným řešením $\{\hat{\gamma}\}$ (při změněných počátečních podmínkách), můžeme definovat tři případy stability. Existuje-li k danému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ takové, že pro počáteční podmínky vyhovující nerovnosti

$$\|\{\gamma(0)\} - \{\hat{\gamma}(0)\}\| \leq \delta \quad (134)$$

splňuje řešení nerovnost

$$\|\{\gamma(t)\} - \{\hat{\gamma}(t)\}\| \leq \varepsilon, \quad t \in (0, \infty), \quad (135 \text{ a})$$

je řešení $\{\gamma(t)\}$ stabilní. Platí-li, že

$$\|\{\gamma(t)\} - \{\hat{\gamma}(t)\}\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty \quad (135 \text{ b})$$

je řešení asymptoticky stabilní. Konečně pro

$$\|\{\gamma(t)\} - \{\hat{\gamma}(t)\}\| \leq \varepsilon \|\{\gamma(t)\}\|, \quad t \in (0, \infty) \quad (135 \text{ c})$$

je řešení relativně stabilní.

Obdobně definice platí i pro diferenční rovnice; ty lze zapsat ve tvaru obdobném (133)

$$\{\gamma\}_{k+1} = f(\{\gamma\}_k, k). \quad (136)$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ hledáme $\delta > 0$ tak, aby pro počáteční podmínky

$$\|\{\gamma\}_0 - \{\hat{\gamma}\}_0\| \leq \delta \quad (137)$$

bylo buď

$$\|\{\gamma\}_k - \{\hat{\gamma}\}_k\| \leq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (138 \text{ a})$$

(pak je řešení stabilní), nebo

$$\|\{\gamma\}_k - \{\hat{\gamma}\}_k\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } k \rightarrow \infty \quad (138 \text{ b})$$

(asymptoticky stabilní), nebo

$$\|\{\gamma\}_k - \{\hat{\gamma}\}_k\| \leq \varepsilon \|\{\gamma\}_k\| \quad k = 1, 2, \dots \quad (138 \text{ c})$$

(relativně stabilní).

Jde-li o diferenční rovnici, která je konzistentní s danou diferenciální rovnicí, vymizí na celém intervalu pro $\lim h \rightarrow \infty$ lokální diskretizační chyba.*) Má-li diferenční rovnice stabilní řešení a je-li zároveň konzistentní s danou diferenciální rovnicí, konverguje řešení diferenční rovnice pro $\lim h \rightarrow 0$ k řešení diferenciální rovnice. To znamená, že v limitě vymizí také globální diskretizační chyba.

22. úloha. Posuďte stabilitu řešení diferenciální rovnice $\gamma'' + 3\gamma' + 2\gamma = 0$ s počátečními podmínkami $\gamma(0) = \gamma_0$, $\gamma'(0) = \gamma_1$.

Řešení. Řešení má tvar

$$\gamma = (2\gamma_0 + \gamma_1)e^{-t} - (\gamma_0 + \gamma_1)e^{-2t}$$

Změníme-li okrajové podmínky na $\hat{\gamma} = \gamma_0 + \varepsilon_0$, $\hat{\gamma}' = \gamma_1 + \varepsilon_1$, bude pozměněné řešení $\hat{\gamma}(t)$ a rozdíl

$$\hat{\gamma}(t) - \gamma(t) = (2\varepsilon_0 + \varepsilon_1)e^{-t} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)e^{-2t}$$

Protože se oba členy s rostoucím t zmenšují k nule, je řešení nejen stabilní, ale i asymptoticky stabilní.

23. úloha. Posuďte stabilitu řešení diferenční rovnice

$$\gamma_k + 3\gamma_{k-1} + 2\gamma_{k-2} = 0$$

s počátečními hodnotami γ_0 , γ_1 .

Předpokládáme řešení ve tvaru geometrické řady, takže $\gamma_k = \lambda \gamma_{k-1}$. Dosazením do dané rovnice získáme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

jehož kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Je tedy

$$\gamma_k = C_0(-1)^k + C_1(-2)^k.$$

Integrační konstanty vyjdou z počátečních podmínek

$$\gamma_0 = C_0 + C_1$$

$$\gamma_1 = -C_0 - 2C_1.$$

*) Konzistentní = důsledný, shodný, pevný, důsledně "zapadající" do dané struktury.

Odtud vypočteme C_0 , C_1 a dostaneme

$$y_k = (2y_0 + y_1)(-1)^k - (y_0 + y_1)(-2)^k.$$

Pro změněné počáteční podmínky $\hat{y}_0 = y_0 + \varepsilon_0$, $\hat{y}_1 = y_1 + \varepsilon_1$ vyjde rozdíl

$$\hat{y}_k - y_k = (2\varepsilon_0 + \varepsilon_1)(-1)^k - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)(-2)^k.$$

Řešení není stabilní, je však relativně stabilní, pokud $y_0 + y_1 \neq 0$. Pro dané $\varepsilon > 0$ lze totiž vždy najít $\delta > 0$ takové, aby pro

$$\left\| \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_0 \end{Bmatrix} \right\| = \left\| \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_0 \end{Bmatrix} \right\| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_0^2} \leq \delta$$

byla pro vektor $\{y\}_k = \{y_k\}$ splněna nerovnost (138 c). Chyba sice roste geometrickou řadou s počtem kroků k , avšak zůstává řádově ε -krát menší než norma správného řešení, která rovněž roste.

24. úloha. Posuďte stabilitu řešení rovnice (101) pro $f_i = q = \text{konst.}$ s počátečními podmínkami $w_0 = a$, $w_1 = b$.

Řešení. Jde o rovnici

$$w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1} = -h^2 q. \quad (\text{a})$$

Budeme předpokládat řešení zkrácené homogenní rovnice ($q = 0$) ve tvaru geometrické řady $w_k = \lambda^k w_0$. Dosazením do zkrácené rovnice dostaneme charakteristický polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad (\text{b})$$

který má dvojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Obecný integrál proto bude

$$w_k = C_0 \cdot 1^k + C_1 k \cdot 1^k = C_0 + C_1 k. \quad (\text{c})$$

Partikulární integrál úplné rovnice

$$w_{pk} = -\frac{1}{2} h^2 q k^2 \quad (\text{d})$$

dává s obecným integrálem úplný integrál dané diferenční rovnice (a)

$$w_k = C_0 + C_1 k - \frac{1}{2} h^2 q k^2. \quad (\text{e})$$

Z počátečních podmínek máme

$$a = C_0, \quad (\text{f})$$

$$b = C_0 + C_1 - \frac{1}{2} h^2 q$$

a tedy

$$w_k = a + (b - a)k - \frac{1}{2} h^2 q (k - 1) k . \quad (g)$$

Změní-li se počáteční podmínky na $\hat{w}_0 = a + \delta a$, $\hat{w}_1 = b + \delta b$, bude

$$|\delta w_k| = |\hat{w}_k - w_k| = |\delta a + (\delta b - \delta a)k| . \quad (h)$$

Řešení je tedy nestabilní, protože chyba $|\delta w_k|$ poroste s počtem kroků k . Je však relativně stabilní, neboť zároveň roste i hodnota $|w_k|$ a relativní chyba $\frac{|\delta w_k|}{|w_k|}$ zůstane omezená.

A novou zemi hledá,
by starou světa bídu přenes tam.

Jaroslav Vrchlický

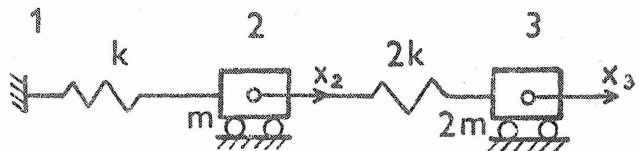
12. O maticích přenosu

Soubor veličin, které nás mohou zajímat v některém řezu konstrukce, tvoří stavový vektor $\{z\}$. Jde-li o závěs šroubovitě pružiny namáhané tahem či tlakem, tvoří takový vektor dva prvky. Jsou to posuv závěsu z rovnovážné polohy a síla přenášená závěsem. Jde-li o kroucený hřídel, tvoří stavový vektor úhel otočení řezu a krouticí moment, který v něm působí. Jde-li o rovinný ohyb nosníku, má stavový vektor čtyři prvky: průhyb, úhel otočení tečny, ohybový moment a posouvající sílu. U obecného prostorového ohybu křivého prutu má stavový vektor dvanáct prvků: tři složky posuvů, tři složky úhlu otočení, tři složky výsledné silové dvojice (dva ohybové a jeden krouticí moment) a tři složky síly (dvě posouvající a jednu normálovou).

Nyní jde o to, stanovit vzájemnou souvislost mezi stavovými vektory v různých řezech. Omezíme-li se na obor lineární mechaniky, musí být stavové vektory ve dvou řezech vázány nějakou lineární transformací, kterou můžeme zapsat v maticovém tvaru pomocí čtvercové matice; ta se nazývá matice přenosu. V literatuře najdeme též názvy "přenosová matice", "přechodová matice", popř. "kaskádní matice".

Matice přenosu určuje, jak bude vypadat stavový vektor $\{z_i\}$ "na výstupu", bude-li dán vektor $\{z_{i-1}\}$ "na vstupu" do pole $(i - 1, i)$.

Působí-li v některém řezu osamělá síla, liší se stavový vektor vlevo od této síly od stavového vektoru vpravo. Proto k stavovým vektorům připisujeme vpravo nahoře index L (levá strana) nebo P (pravá strana).



Obr. 11

Uvedeme nyní několik příkladů. Pro volně kmitající netlumenou soustavu dvou hmot na pružině podle obr. 11 budeme potřebovat pět stavových vektorů; vynecháme-li závorky, budou to z_1^P , z_2^L , z_2^P , z_3^L , z_3^P . Mezi posuvy x a silami N v řezech 1P a 2L bude platit, že

$$\begin{aligned} x_2^L &= x_1^P + \frac{N_1^P}{k} \\ N_2^L &= N_1^P \end{aligned} \quad (139)$$

V maticovém tvaru to bude

$$\begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_2^L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_1^P \quad (140)$$

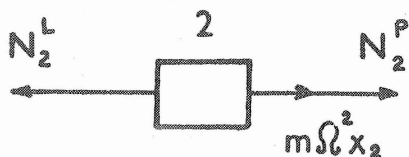
čili zkráceně

$$z_2^L = A_2 z_1^P \quad (141)$$

Přitom

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad z_i = \begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_i$$

A_2 značí matici přenosu pro pole 1 - 2 (field transfer matrix), z_2^L , z_2^P jsou stavové vektory.



Obr. 12

Vazba mezi stavovými vektory z_2^L , z_2^P bude vyjadřovat skokovou změnu síly N o setrvačnou sílu $-m\ddot{x}_2$. Jde o volné harmonické kmitání s kruhovou frekvencí Ω , takže amplituda této síly bude $m\Omega^2 x_2$. Pro amplitudy sil a pro posuvy budou tedy platit tyto rovnice (viz obr. 12):

$$\begin{aligned} N_2^P &= N_2^L - m\Omega^2 x_2^L \\ x_2^P &= x_2^L \end{aligned} \quad (142)$$

V maticovém tvaru budeme mít

$$\begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_2^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ N \end{Bmatrix}_2^L \quad (143)$$

a ve zkráceném zápisu

$$z_2^P = B_2 z_2^L, \quad (144)$$

kde

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\Omega & 1 \end{bmatrix}$$

značí matici přenosu pro bod 2 (point transfer matrix). Obdobně dostaneme

$$z_3^L = A_3 z_2^P, \quad z_3^P = B_3 z_3^L, \quad (145)$$

kde

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\Omega^2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rovnice (141), (144) a (145) umožňují výpočet vazby mezi kterýmikoli dvěma vektory. Mezi prvním a posledním vektorem např. platí, že

$$z_3^P = B_3 A_3 B_2 A_2 z_1^P = U z_1^P, \quad (146)$$

kde

$$U = B_3 A_3 B_2 A_2 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}. \quad (147)$$

U značí matici přenosu mezi řezy z_1^P a z_3^P . Prvky této matice závisejí na kruhové frekvenci Ω . Z okrajových podmínek dostaneme, že

$$x_1^P = 0, \quad N_3^P = 0.$$

Proto

$$\begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ N_1 \end{Bmatrix} \quad (148)$$

a po rozepsání

$$\begin{aligned} x_3 &= u_{12} N_1, \\ 0 &= u_{22} N_1. \end{aligned}$$

Prvky u_{11} , u_{21} ani nepotřebujeme znát, neboť se násobí nulou. Proto můžeme vektor z_1^P zkrátit a v matici přenosu A_2 vynechat první sloupec. S označením $p^2 = \frac{m\Omega^2}{k}$ dostaneme matici U tímto postupným násobením

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \\ 1 \end{bmatrix} \{N\}_1^P = z_2^L, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -m\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \\ 1-p^2 \end{bmatrix} \{N\}_1^P = z_2^P, \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{k} \\ 1-p^2 \end{bmatrix} \{N\}_1^P = z_3^L, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2m\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3-p^2}{2k} \\ 1-p^2 \end{bmatrix} \{N\}_1^P = z_3^P = \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (149)$$

V tomto schématu zapisujeme součin dvou matic P , Q takto:

$$\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ PQ \end{bmatrix}$$

Součin tří matic P , Q , R píšeme obdobně

$$\begin{bmatrix} R \\ Q \\ P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ QR \\ PQR \end{bmatrix}$$

Výsledkem našeho řešení je maticová rovnice

$$\begin{bmatrix} \frac{3-p^2}{2k} \\ p^4 - 4p^2 + 1 \end{bmatrix} \{N\}_1^P = \begin{Bmatrix} x_3 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (150)$$

Druhá z těchto rovnic vyžaduje, aby

$$p^4 - 4p^2 + 1 = 0, \quad (151)$$

tedy

$$(p^2)_{1,2} = 2 \mp \sqrt{3}.$$

Odtud

$$\Omega_1^2 = \frac{k}{m} (2 - \sqrt{3}), \quad \Omega_2^2 = \frac{k}{m} (2 + \sqrt{3}). \quad (152)$$

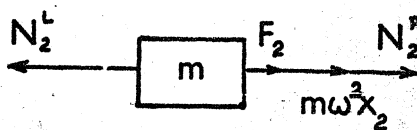
To jsou vlastní kruhové frekvence volně kmitající netlumené soustavy, znázorněné na obr. 11. Řešení lze zobecnit i pro lineárně tlumené soustavy zavedením komplexních čísel, tím se však nebudeme zabývat.

Splněním podmínky (151) vyhovíme druhé z rovnic (150) při jakékoli hodnotě N_1^P (avšak konečné). Volíme ji třeba tak, aby vyšlo $x_3 = 1$. Tím normalizujeme velikost vlastního kmitu. Dostaneme

$$N_1^P = \frac{2k}{3 - (p^2)_{1,2}} = \frac{2k}{1 \pm \sqrt{3}} \quad (153)$$

Máme dvojí možnost volby, pro každou vlastní frekvenci jednu, takže existují dva tvary vlastních kmitů. Nyní už můžeme za $\{N\}_1^P = N_1^P$ dosadit do rovnic (149) a vypočítat vektory z_2^L , z_2^P , z_3^L . Tím dostaneme tvary vlastních kmitů (výhyšky x_2 , x_3) a velikosti sil N_{1-2} , N_{2-3} při normovaných velikostech vlastních kmitů ($x_3 = 1$).

Jak bychom řešili vynucené kmitání? Předpokládáme, že např. na hmotu 2 působí síla $F_2 \cos \omega t$ a na hmotu 3 síla $F_3 \cos \omega t$. Jde-li o ustálené kmity se zanedbatelným tlumením, budou výhyšky x_2 , x_3 v téže (nebo v opačné) fázi jako působící síly a budou mít stejnou frekvenci. Abychom dostali síly F_2 , F_3 do výpočtu, rozšíříme stavové vektory o třetí (jednotkový) prvek. Tak budeme postupovat vždy, přijde-li o nehomogenní soustavu rovnic. Podle obr. 13 je



Obr. 13

$$\begin{aligned} N_2^P &= N_2^L - m\omega^2 x_2^L - F_2 \\ x_2^P &= x_2^L \end{aligned} \quad (154)$$

čili v maticovém tvaru

$$\begin{Bmatrix} x \\ N \\ 1 \end{Bmatrix}_2^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ -m\omega^2 & 1 & | & -F_2 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ N \\ 1 \end{Bmatrix}_2^L \quad (155)$$

To označíme zkráceně (stejně jako dříve)

$$z_2^P = B_2 z_2^L \quad (156)$$

Rovnice (139) se nezmění, jen se doplní identitou $1 = 1$, jak si žádá zavedení tříprvkových vektorů. Místo (140) nyní bude

$$\begin{Bmatrix} x \\ N \\ 1 \end{Bmatrix}_2^L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ N \\ 1 \end{Bmatrix}_1^P, \quad (157)$$

zkráceně

$$z_2^L = A_2 z_1^P \quad (158)$$

Obdobně rozšíříme i matice A_3 , B_3 . Výsledkem řešení je rovnice (146), avšak matice U má nyní velikost 3×3 . Její první sloupec můžeme vynechat, neboť $x_1^P = 0$, takže bude

$$\begin{bmatrix} x \\ N \\ 1 \end{bmatrix}_3^P = \begin{bmatrix} x_3^P \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{22} & | & u_{23} \\ u_{32} & | & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ 1 \end{bmatrix}_1^P \quad (159)$$

Vyjde $u_{32} = 0$, $u_{33} = 1$; poslední řádek je identitou $1 = 1$, kterou jsme původně z formálních důvodů přidali. Soustava (159) je nehomogenní. Pokud $\omega \neq \Omega$, dá

$$\begin{aligned} N_1^P &= -\frac{u_{23}}{u_{22}}, \\ x_3^P &= -\frac{u_{12} u_{23}}{u_{22}} + u_{13}. \end{aligned} \quad (160)$$

Je-li $u_{22} = 0$, tj. platí-li (151), nastává rezonance a kmity rostou bez omezení (pokud předpokládáme platnost lineární teorie).

Rovnice pro ustálené vynucené kmitání platí ve zvláštním případě i pro staticky zatíženou konstrukci (stačí dosadit $\omega = 0$).

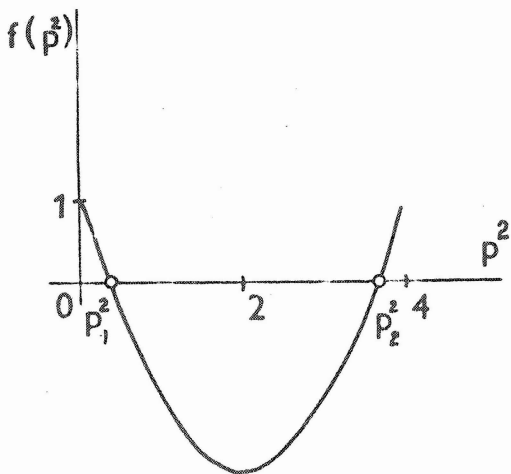
Při řešení praktických úloh nenásobíme matice přenosu v jejich obecném tvaru, jak jsme je násobili v soustavě (149), ale numericky, tj. dosadíme do nich hned zvláštní čísla a násobení ponecháme počítači. Protože však při výpočtu vlastních frekvencí hodnotu Ω předem neznáme, zvolíme ji. Okrajové podmínky na výstupu pak nebudou splněny, leda že by naše volba padla právě na některou vlastní kruhovou frekvenci, což je velmi nepravděpodobné. Proto

musíme výpočet opakovat s jinou hodnotou Ω a sledovat změny, které nastanou v okrajových hodnotách stavových vektorů. V naší úloze bychom např. zvolili p^2 a dostali

$$u_{22} = p^4 - 4p^2 + 1 = f(p^2).$$

Tuto funkci si můžeme znázornit - pomocí vypočtených bodů - v pravouhlych souřadnicích (obr. 14).

V tomto případě jde o kvadratickou parabolu, avšak u soustav s větším počtem stupňů volnosti by tato funkce byla polynomem vyššího stupně a obecně by mohla být - jak později uvidíme - i transcendentní. Nulové



Obr. 14

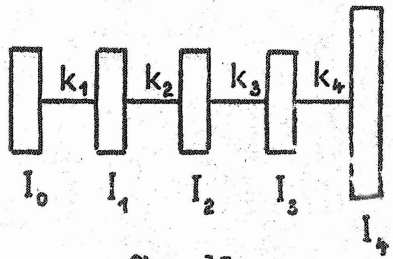
hodnoty této funkce určují vlastní kruhové frekvence.

Než přistoupíme k rozboru složitějších případů, ukážeme aplikaci matic přenosu ještě na některých dalších příkladech.

25. úloha. Najděte vlastní frekvence pro torzní kmity pěti kotoučů se nehmotným hřídeli podle obr. 15. Js dáno:

$$\Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 10 \text{ kg m}^2, \\ \Theta_4 = 20 \text{ kg m}^2,$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Nm}, \\ k_4 = 2 \cdot 10^6 \text{ Nm}.$$



Obr. 15

Řešení. Stavové vektory budou obsahovat úhel otočení průřezu φ a kroučící moment M_k . Matice přenosu pro pole $i-1$, i vyjde z rovnic

$$\varphi_i^L = \varphi_{i-1}^P + \frac{1}{k_i} M_{k,i-1}^P, \\ M_{k,i}^L = M_{k,i-1}^P. \quad (a)$$

Bude tedy

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ M_k \end{bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varphi \\ M_k \end{bmatrix}_{i-1}^P. \quad (b)$$

Čtvercová matice v této rovnici je hledaná matice přenosu A_i . Pro i -tý bod (kotouč) budou platit rovnice

$$M_{k,i}^P = M_{k,i}^L - \Omega^2 \Theta_i \varphi_i^L, \\ \varphi_i^P = \varphi_i^L. \quad (c)$$

a tedy

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ M_k \end{bmatrix}_i^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\Omega^2 \Theta & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varphi \\ M_k \end{bmatrix}_i^L. \quad (d)$$

Čtvercová matice v této rovnici je B_i . Zvolíme-li Ω^2 , můžeme matice A_i , B_i vyčíslit. Pak dostaneme

$$z_4^P = B_4 A_4 B_3 A_3 B_2 A_2 B_1 A_1 B_0 z_0^L. \quad (e)$$

čili

$$z_4^P = U z_0^L. \quad (f)$$

Rozepíšeme-li poslední rovnici, dostaneme

$$\begin{Bmatrix} \varphi_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

Je zřejmé, že druhý sloupec u_{12} u_{22} nepotřebujeme znát, takže druhý sloupec v matici přenosu B_0 můžeme vynechat. Vyjde

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= u_{11} \varphi_0 \\ 0 &= u_{21} \varphi_0 \end{aligned} \quad (h)$$

Druhá z rovnic (h) vyžaduje, aby

$$u_{21} = f(\Omega^2) = 0. \quad (i)$$

To je frekvenční rovnice. Je to polynom pátého stupně pro Ω^2 , a to bez absolutního členu, takže jeden kořen je nulový. Pro funkci $f(\Omega^2)$ dostaneme opakovaným výpočtem tyto hodnoty:

Ω^2	0	100	200	300	400	500	600	700	800
$10^{-5} f(\Omega^2)$	0	-4,27	-2,07	18,6	19,4	-35,9	-44,6	285	-931

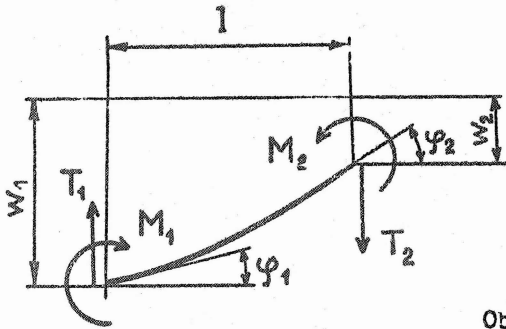
Můžeme je použít ke grafickému znázornění funkce $f(\Omega^2)$. Nulové body odečtené z výkresu pak můžeme zpřesnit pomocí interpolace. Nakonec dostaneme tyto vlastní frekvence:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 215 \text{ s}^{-1}, & \Omega_2 &= 440 \text{ s}^{-1}, \\ \Omega_3 &= 625 \text{ s}^{-1}, & \Omega_4 &= 750 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Hodnota $\Omega_0 = 0$ znamená rovnoměrnou rotaci hřídele (kmit s nekonečnou periodou).

Má-li frekvenční rovnice tvar polynomu, můžeme její kořeny samozřejmě vypočítat také pomocí speciálních programů pro výpočet kořenů algebraických rovnic, které bývají uvedeny v knihovnách počítačů, dodaných výrobcem.

26. úloha. Odvoďte matici přenosu pro pole 1 - 2 tenkého nosníku při rovinném ohybu podle obr. 16. Uvažujte jen deformace vzniklé ohybovými momenty. Ohybová tuhost je EJ .



Obr. 16

Řešení. Máme stanovit prvky čtvercové matice přenosu ve vztahu

$$\begin{Bmatrix} -w_2 \\ \varphi_2 \\ M_2 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_1 \\ \varphi_1 \\ M_1 \\ T_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

Záporné znaménko u průhybu w_2 jsme volili z formálních důvodů, které vysvětlíme později. Jak známo, platí pro pole nosníku dvě podmínky rovnováhy

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 \\ M_2 &= M_1 + T_1 l \end{aligned} \quad (\text{b})$$

a dvě deformační rovnice

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + \frac{M_1}{EJ} l + \frac{T_1}{2EJ} l^2, \\ -w_2 &= -w_1 + \varphi_1 l + \frac{M_1}{2EJ} l^2 + \frac{T_1}{6EJ} l^3. \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Rovnice (c) dostaneme např. tak, že řešíme diferenciální rovnice

$$w'(x) = -\varphi(x); \quad \varphi'(x) = \frac{1}{EJ} (M_1 + T_1 x)$$

v intervalu $0 \leq x \leq l$ s okrajovými podmínkami

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad w(0) = w_1.$$

Přitom

$$\varphi(l) = \varphi_2, \quad w(l) = w_2.$$

Z rovnic (b) a (c) nyní sestavíme maticovou rovnici (a). Čtvercová matice v ní bude mít tvar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{\ell^2}{2EJ} & \frac{\ell^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{\ell}{EJ} & \frac{\ell^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Je to trojúhelníková matice s prvky souměrnými k vedlejší diagonále (tuto souměrnost bychom ztratili, kdybychom nezvolili u prvního prvku stavových vektorů záporné znaménko).

27. úloha. Najděte vlastní frekvenci kmitání u soustavy zakreslené na obr. 17. Hmotu nosníku a pružiny zanedbejte.

Řešení. Vektor z_1^P bude

$$z_1^P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ T_1 \end{Bmatrix}$$

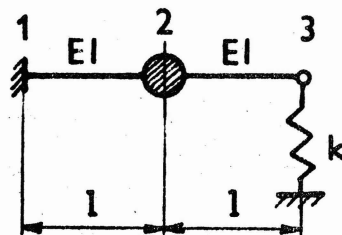
a vektor

$$z_3^P = \begin{Bmatrix} -w_3 \\ \varphi_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dále budeme mít

$$z_3^P = B_3 A_3 B_2 A_2 z_1^P \quad (a)$$

Pro matice A_3 , popř. A_2 máme rovnici (d) z předešlé úlohy. Zbývá tedy určit B_2 , B_3 .



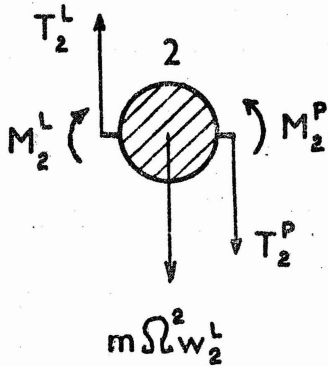
Obr. 17

Podle obr. 18 máme

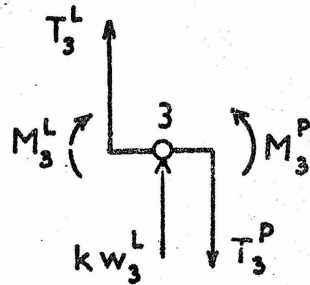
$$\begin{aligned} -w_2^P &= -w_2^L \\ \varphi_2^P &= \varphi_2^L \\ M_2^P &= M_2^L \\ T_2^P &= T_2^L - m\Omega^2 w_2^L, \end{aligned} \quad (b)$$

takže

$$\begin{Bmatrix} -w_2^P \\ \varphi_2^P \\ M_2^P \\ T_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\Omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_2^L \\ \varphi_2^L \\ M_2^L \\ T_2^L \end{Bmatrix} \quad (c)$$



Obr. 18



Obr. 19

Čtvercová matice v rovnici (c) je právě B_2 . Pro bod 3 bude matice přenosu B_3 stejná jako B_2 , nahradíme-li prvek $m\Omega^2$ prvkem $-k$. Bude tedy - viz obr. 19 -

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Protože vektor z_1^P obsahuje shora dvě nuly, můžeme v matici A_2 první dva sloupce vynechat. Po vynásobení matic dostaneme

$$\begin{Bmatrix} -w_3 \\ \varphi_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \\ u_{33} & u_{34} \\ u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ T_1 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

S pomocným označením

$$\mathcal{L} = \frac{k\ell^3}{EJ}, \quad \beta = \frac{\Omega^2 m \ell^3}{36 EJ} \quad (f)$$

vyjde

$$\begin{aligned} u_{13} &= \frac{\ell^2}{EJ} (2 + 3\beta) & ; & & u_{14} &= \frac{\ell^3}{EJ} \left(\frac{4}{3} + \beta\right) ; \\ u_{23} &= \frac{\ell}{EJ} (2 + 9\beta) & ; & & u_{24} &= \frac{\ell^2}{EJ} (2 + 3\beta) ; \\ u_{33} &= 1 + 18\beta & ; & & u_{34} &= \ell (2 + 6\beta) ; \\ u_{43} &= \frac{1}{\ell} [18\beta - \mathcal{L} (2 + 3\beta)] & ; & & u_{44} &= [1 + 6\beta - \mathcal{L} \left(\frac{4}{3} + \beta\right)] . \end{aligned}$$

Poslední dva řádky v soustavě (e) mohou platit jen pro $M_1 = 0$, $T_1 = 0$ nebo pro

$$\begin{vmatrix} u_{33} & u_{34} \\ u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (g)$$

Odtud vypočteme vlastní frekvenci. Vyjde

$$\Omega^2 = \frac{12 EJ}{m \ell^3} \frac{3 + 8\mathcal{L}}{12 + 7\mathcal{L}} .$$

Dále dostaneme

$$M_1 = -\frac{u_{34}}{u_{33}} T_1$$

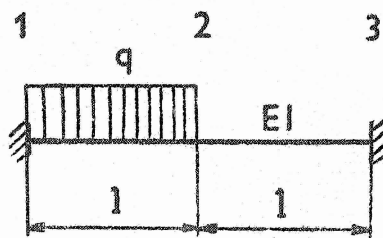
a z prvního řádku (e) pro $w_3 = 1$

$$T_1 = -\frac{u_{33}}{u_{14} u_{33} - u_{13} u_{34}} ; \quad M_1 = \frac{u_{34}}{u_{14} u_{33} - u_{13} u_{34}} .$$

Tím je vektor z_1^p určen a s jeho pomocí najdeme i ostatní stavové vektory pro normalizovaný vlastní kmit ($w_3 = 1$).

28. úloha. Najděte stavové vektory v bodech 1, 2 a 3 u staticky zatíženého nosníku podle obr. 20.

Řešení. Protože je nosník zatížen vnější (spojitě rozdělenou) silou, je průhyb popsán nehomogenní rovnicí. Proto do stavových vektorů přidáme jednotku a matice přenosu rozšíříme. Z elementární teorie ohybu tenkých nosníků snadno odvodíme, že



Obr. 20

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \varphi \\ M \\ T \\ \hline 1 \end{Bmatrix}_2^L = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & -\frac{ql^4}{24EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & -\frac{ql^3}{6EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l & -\frac{ql^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w \\ \varphi \\ M \\ T \\ \hline 1 \end{Bmatrix}_1^P \quad (a)$$

čili ve zkráceném zápisu

$$z_2^L = A_2 z_1^P \quad (b)$$

Vektor

$$z_2^P = z_2^L \quad (c)$$

a matice

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

dají nakonec

$$z_3^L = A_3 A_2 z_1^P = U z_1^P \quad (e)$$

Rozepíšeme-li poslední rovnici, dostaneme

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ u_{43} & u_{44} & u_{45} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

Využili jsme to, že $w_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, a vynechali jsme také identitu $1 = 1$ (poslední řádek). Z rovnice (f) vyjde

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ T_1 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_{15} \\ u_{25} \end{Bmatrix} \quad (g)$$

Tím je určen vektor z_1^P (a tedy i ostatní vektory). Nakonec vyjde

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{13}{16} q l ; & T_2 &= -\frac{3}{16} q l ; & T_3 &= -\frac{3}{16} q l ; \\ M_1 &= -\frac{11}{48} q l^2 ; & M_3 &= -\frac{5}{48} q l^2 . \end{aligned}$$

29. úloha. Najděte matici přenosu pro krouživé kmitání hřídele s rovnoměrně rozdělenou hmotou.

Řešení. Na obr. 21 je zakreslena část hřídele mezi řezy ve vzdálenosti x , popř. $x + dx$. Působí na ni kroučivý moment

$$M_k + dM_k - M_k = dM_k$$

a setrvačný moment

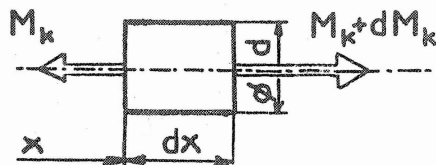
$$-\Theta \ddot{\varphi} = -J_p \rho dx \ddot{\varphi} .$$

Oba momenty jsou podle d'Alembertova principu v rovnováze, takže

$$dM_k = J_p \rho dx \ddot{\varphi} \quad (a)$$

Zde $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ a ρ je měrná hmotnost. Poměrné zkroucení hřídele

$$\varphi' = \frac{M_k}{G J_p} \quad (b)$$



Obr. 21

Derivací (b) a vyloučením M_k dostaneme z posledních dvou rovnic

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} . \quad (c)$$

Řešení předpokládáme ve tvaru

$$\varphi = \varphi(x, t) = \Phi(x) e^{j\omega t} \quad (j = \sqrt{-1}) \quad (d)$$

(harmonické kmitání). Buďe

$$\Phi'' + \beta^2 \Phi = 0, \quad (e)$$

kde $\beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}$; $\Phi = \Phi(x)$ značí amplitudu kmitání v místě x . Funkce $\Phi(x)$ popisuje tvar výkmitové čáry. Řešením (e) dostaneme

$$\Phi = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x . \quad (f)$$

Okrajové podmínky jsou:

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad \Phi = \Phi(0) = \Phi_0, \\ x = \ell, & \quad \Phi = \Phi(\ell) = \Phi_1. \end{aligned} \quad (g)$$

Dostaneme

$$\Phi = \Phi_0 \frac{\sin \beta(\ell-x)}{\sin \beta \ell} + \Phi_1 \frac{\sin \beta x}{\sin \beta \ell} , \quad (h)$$

$$M_k = \omega J_p \sqrt{\rho G} \frac{-\Phi_0 \cos \beta(\ell-x) + \Phi_1 \cos \beta x}{\sin \beta \ell} .$$

Poslední rovnici jsme odvodili pomocí (b). Stavový vektor zvolíme $[\Phi, M_k]^T$. Hledáme čtvercovou matici přenosu A , pro kterou bude platit rovnice

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ M_k \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ M_k \end{bmatrix}_0 . \quad (i)$$

Druhá z rovnic (h) dává pro $x = 0$, popř. $x = \ell$

$$\begin{aligned} M_{k0} &= C [-\Phi_0 \cos \beta \ell + \Phi_1] , \\ M_{k1} &= C [-\Phi_0 + \Phi_1 \cos \beta \ell] , \end{aligned} \quad (j)$$

kde

$$C = \frac{\omega J_p \sqrt{\rho G}}{\sin \beta \ell} .$$

První z těchto rovnic můžeme srovnat s prvním řádkem (i); tak dostaneme

$$a_{11} = \cos \beta l ; \quad a_{12} = \frac{1}{C} = \frac{\sin \beta l}{\omega J_p \sqrt{\rho G}} .$$

Ze soustavy (j) pak vyloučíme ϕ_1 a dostaneme srovnáním s druhým řádkem (i)

$$a_{21} = -\omega J_p \sqrt{\rho G} \sin \beta l ; \quad a_{22} = \cos \beta l .$$

Matice přenosu bude

$$A = \begin{bmatrix} \cos \beta l & \frac{\sin \beta l}{\omega J_p \sqrt{\rho G}} \\ -\omega J_p \sqrt{\rho G} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} . \quad (k)$$

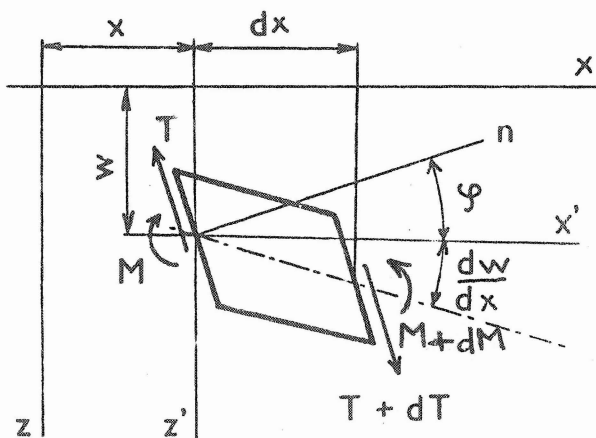
Pro velmi malé ω (statické zatížení) nebo pro velmi malé ρ (nehmotný hřídel) dostaneme v limitě

$$A^* = \lim_{\omega \sqrt{\rho} \rightarrow 0} A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{GJ_p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (l)$$

Tuto matici jsme použili v úloze 25; platí, že $k = \frac{GJ_p}{l}$.

30. úloha. Odvoďte matici přenosu pro ohybově kmitající nosník na pružném podkladu (rovinný ohyb) s uvažováním vlivu posouvající síly.

Řešení. V rovině ohybu zvolíme souřadné osy x , z , a posuv ve směru osy z - tj. průhyb - označíme w (obr. 22).



Obr. 22

Působením ohybového momentu M se element nosníku zakříví, takže úhel normál souměrných řezů se změní z nuly na $d\varphi$

$$d\varphi = \frac{M}{EJ_Y} dx. \quad (a)$$

Působením posouvající síly T se souměrné řezy rovnoběžně posunou o $(\varphi + \frac{dw}{dx})dx$, takže

$$T = \frac{GA}{\beta} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right). \quad (b)$$

V této rovnici závisí β na tvaru průřezu ($\beta = 6/5$ pro obdélník, $32/27$ pro kruh), A je plocha průřezu, G modul pružnosti ve smyku.

Kromě momentu M a posouvající síly T působí na element nosníku reakce podkladu $-k_1 w dx$ a setrvačná síla o amplitudě $\omega^2 \rho A w dx$. Do výpočtu zahrneme též otáčivé účinky pružného podkladu $-k_2 \varphi dx$ a setrvačný moment vzniklý nerovnoměrným natáčením průřezu, jehož amplituda je $\omega^2 \rho J_Y \varphi dx$. Z rovnováhy elementu nosníku dostaneme

$$\begin{aligned} dM &= T dx + k_2 \varphi dx - \omega^2 \rho J_Y \varphi dx, \\ dT &= k_1 w dx - \omega^2 \rho A w dx. \end{aligned} \quad (c)$$

Zde $J_Y = \int_A (z^2) dA$ značí plošný moment setrvačnosti k ose φ , která prochází těžištěm průřezu. Z posledních dvou rovnic vyloučíme T a dostaneme - s použitím (a) -

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = (k_1 - \omega^2 \rho A) w + (k_2 - \omega^2 \rho J_Y) \frac{M}{EJ_Y}. \quad (d)$$

Potom z rovnic (a), (b) vyloučíme φ a za $\frac{dT}{dx}$ dosadíme z druhé z rovnic (c); vyjde

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{M}{EJ_Y} = \frac{\beta}{GA} (k_1 - \omega^2 \rho A) w. \quad (e)$$

Z posledních dvou rovnic vyloučíme M . Po úpravě bude mít diferenciální rovnice tvar

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{\sigma + \tau}{\ell^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{\beta^4 - \sigma \tau}{\ell^4} w = 0. \quad (f)$$

kam jsme zavedli bezrozměrové veličiny

$$\sigma = \frac{\beta \ell^2}{GA} (\omega^2 \rho A - k_1),$$

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho A - k_1}{EJ_Y} \ell^4,$$

$$\tau = \frac{\ell^2}{EJ_Y} (\omega^2 \rho J_Y - k_2).$$

Budeme předpokládat řešení rovnice (f) ve tvaru $w = C e^{\frac{\lambda x}{l}}$ (λ bezrozměrové), takže charakteristická rovnice bude

$$\lambda^4 + (\sigma + \tau) \lambda^2 - (\beta^4 - \sigma\tau) = 0. \quad (g)$$

Kořeny této rovnice jsou $\pm \lambda_1$, $\pm j \lambda_2$, kde $j = \sqrt{-1}$ a

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\sqrt{\beta^4 + \frac{1}{4}(\sigma - \tau)^2} \mp \frac{1}{2}(\sigma + \tau)}$$

Řešení (f) je pak

$$w = C_1 \cosh \lambda_1 \xi + C_2 \sinh \lambda_1 \xi + C_3 \cos \lambda_2 \xi + C_4 \sin \lambda_2 \xi, \quad (h)$$

značí-li $\xi = \frac{x}{l}$ bezrozměrovou souřadnicí.

Označíme-li veličiny v průřezu $\xi = 0$ indexem "0", v průřezu $\xi = 1$ indexem "1", bude matice přenosu popisovat transformaci

$$z_0 = A z_1,$$

kterou můžeme rozepsat takto:

$$\begin{Bmatrix} -w_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_1 \\ \varphi_1 \\ M_1 \\ T_1 \end{Bmatrix}. \quad (i)$$

Abychom získali prvky a_{ij} , musíme nejprve vypočítat podle druhé z rovnic (c) posouvající sílu $\Gamma = \Gamma(x)$, z rovnice (e) ohybový moment $M = M(x)$ a z rovnice (a) nebo (b) úhel $\varphi = \varphi(x)$. Dostaneme ^{*}

$$\{z(x)\} = [H(x)] \{C\}, \quad (j)$$

kde $\{C\}$ je vektor integračních konstant C_1 až C_4 , $[H(x)]$ je čtvercová matice složená z funkcí proměnné x . Složené a hranaté závorky pro stručnost budeme v dalším textu vynechávat. Z okrajových podmínek

$$z_0 = H(0) C,$$

^{*}) Při integraci druhé z rovnic (c), tj. při výpočtu posouvající síly, odpadne integrační konstanta. To je zřejmé ze srovnání se vztahy (a), (b). Ve výpočtu tedy zůstanou jen čtyři integrační konstanty.

a tedy ^{*})

$$z(x) = H(x) H^{-1}(0) z_0 \quad . \quad (k)$$

Pro $x = l$ odtud dostaneme

$$z_1 = H(l) H^{-1}(0) z_0 , \quad (l)$$

takže

$$A = H(l) H^{-1}(0) . \quad (m)$$

Nakonec vyjde

$$a_{11} = \gamma_0 - \sigma \gamma_2 ,$$

$$a_{12} = l [\gamma_1 - (\sigma + \tau) \gamma_3] ,$$

$$a_{13} = d \gamma_2 ,$$

$$a_{14} = \frac{dl}{\beta^4} [-\sigma \gamma_1 + (\beta^4 + \sigma^2) \gamma_3] ,$$

$$a_{21} = \frac{\beta^4 \gamma_2}{l} ,$$

$$a_{22} = \gamma_0 - \tau \gamma_2 ,$$

$$a_{23} = \frac{d(\gamma_1 - \tau \gamma_3)}{l}$$

$$a_{24} = d \gamma_2 ,$$

$$a_{31} = \frac{\beta^4 \gamma_2}{d}$$

$$a_{32} = \frac{l}{2} [-\tau \gamma_1 + (\beta^4 + \tau^2) \gamma_3] ,$$

$$a_{33} = \gamma_0 - \tau \gamma_2 ,$$

$$a_{34} = l [\gamma_1 - (\sigma + \tau) \gamma_3] ,$$

^{*}) Inverzi $H^{-1}(0)$ vypočteme nejnázne tak, že přeskupíme matici $H(0)$, která obsahuje z poloviny nuly, a rozdělíme na submatice druhého řádu.

$$a_{41} = \frac{\beta^4}{2l} (y_1 - \sigma y_3),$$

$$a_{42} = \frac{\beta^4 y_2}{l},$$

$$a_{43} = \frac{\beta^4 y_3}{l},$$

$$a_{44} = y_0 - \sigma y_2,$$

kde

$$L = \frac{\rho^2}{E J_Y}, \quad \Lambda = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2},$$

$$y_0 = \Lambda (\lambda_2^2 \cosh \lambda_1 + \lambda_1^2 \cos \lambda_2),$$

$$y_1 = \Lambda \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right),$$

$$y_2 = \Lambda (\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2),$$

$$y_3 = \Lambda \left(\frac{1}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right).$$

Zvolíme-li ve zvláštním případě $k_2 = 0$ (tj. zanedbáme otáčivé účinky podkladu) a zanedbáme-li vliv posouvajících sil ($G = \infty$, tedy $\sigma = 0$), bude

$$A = \begin{bmatrix} y_0 & l y_1 & l y_2 & \alpha l y_3 \\ \frac{\beta^4}{l} y_3 & y_0 & \frac{l}{l} y_1 & l y_2 \\ \frac{\beta^4}{l} y_2 & \frac{\beta^4 l}{l} y_3 & y_0 & l y_1 \\ \frac{\beta^4}{2l} y_1 & \frac{\beta^4}{l} y_2 & \frac{\beta^4}{l} y_3 & y_0 \end{bmatrix} \quad (n)$$

kde

$$y_0 = \frac{1}{2} (\cosh \beta + \cos \beta),$$

$$y_1 = \frac{1}{2\beta} (\sinh \beta + \sin \beta),$$

$$y_2 = \frac{1}{2\beta^2} (\cosh \beta - \cos \beta),$$

$$y_3 = \frac{1}{2\beta^3} (\sinh \beta - \sin \beta),$$

$$\alpha = \frac{\rho^2}{EJ} ;$$

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho A - k_1}{EJ^2} \ell^4 .$$

V tom případě $\varphi = -\frac{dw}{dx}$. Matice (n) lze užít u štíhlých nosníků na Winklerově pružném podkladu.

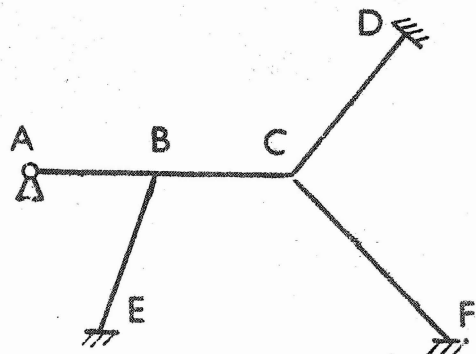
Strom za stromem mnou procházel
s pavoučím světla ve větvích.

František Hrubín

13. Rozvětvené konstrukce

Nyní ukážeme, jak se pomocí matic přenosu řeší složitější případy.

Na obr. 23 je zakreslena rozvětvená rovinná rámová konstrukce s tuhými styčníky B, C. Kdyby šlo o jednoduchý rám ABCD bez větví EB, FC, dovedli bychom určit transformační vztahy mezi vektory z_A^P , z_B^L , z_B^P , z_C^L , z_C^P a z_D^L způsobem uvedeným v předchozí kapitole. V daném případě však musíme do výpočtu začlenit i vliv postranních větví, což se neobejde bez uvažování normálových sil. Proto stavový vektor rozšíříme přidáním osového posuvu u a normálové síly N . Stavový vektor bude mít šest složek:



Obr. 23

$$z = \begin{Bmatrix} u \\ -w \\ \varphi \\ M \\ T \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ Q \end{Bmatrix} . \quad (161)$$

Skládá se ze dvou subvektorů, a to z deformací $q = [u \ -w \ \varphi]^T$ a ze silových veličin $Q = [M \ T \ N]^T$.

Začneme s vektorem \hat{z}_E^P a stanovíme pomocí transformační matice \hat{A}_{EB} vektor \hat{z}_B^L (štríškou vyznačujeme, že jde o vedlejší větev). Vektor \hat{z}_B^L se vztahuje obecně k jinému souřadnému systému než z_B^L a z_B^P , neboť mezi větvemi AB, EB je úhel α .

Vektor z_E^P je zpoloviny známý; je tam totiž předepsáno $u=0$, $w=0$, $\varphi=0$ (kdyby byl konec E kloubově uložený, platilo by $u=0$, $w=0$,

$M = 0$). Vynecháme-li v něm nulové prvky, dostaneme zmenšený stavový vektor \hat{v}_E . Transformační vztah pro větve EB bude možno zapsat takto:

$$\begin{Bmatrix} \hat{q}_L \\ -\hat{Q} \end{Bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ -\hat{R}_2 \end{bmatrix} \{ \hat{v}_E \}, \quad (162)$$

kde pro deformace máme $\hat{q}_L = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ -\hat{w} \\ \hat{y} \end{Bmatrix}_B$, pro silové veličiny $Q = \begin{Bmatrix} \hat{M} \\ \hat{T} \\ \hat{N} \end{Bmatrix}_B$

Dále $\hat{v}_E = \begin{Bmatrix} \hat{H} \\ \hat{T} \\ \hat{N} \end{Bmatrix}_E$ (na vetknutém konci). Matice $\begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ -\hat{R}_2 \end{bmatrix}$ je složena ze tří sloup-

ců matice přenosu \hat{A}_{EB} , odpovídajících nenulovým prvkům vektoru \hat{z}_E^P (ty pak tvoří vektor \hat{v}_E).

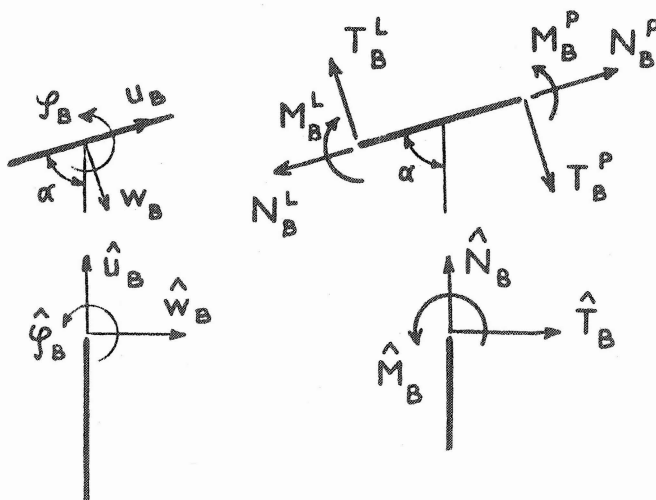
Rovnici (162) rozepíšeme a vyloučíme neznámý vektor \hat{v}_E . Vyjde

$$\{ \hat{Q}_B \} = [\hat{R}_2] [\hat{R}_1]^{-1} \{ \hat{q}_L \}. \quad (163)$$

Tato rovnice tedy vyjadřuje vazbu mezi deformacemi konce větve EB a silovými veličinami působícími na témže konci. Mezi vedlejší a hlavní větví existují transformační vztahy

$$\{ \hat{q}_B \} = [G_1] \{ q_B \}, \quad (164)$$

$$\{ Q_B^P \} - \{ Q_B^L \} = \{ \Delta Q_B \} = [G_2] \{ \hat{Q}_B \}.$$



Obr. 24

Pro náš případ (obr. 24) zřejmě platí, že

$$\begin{aligned} \hat{u}_B &= u_B \sin \alpha - w_B \cos \alpha, \\ -\hat{w}_B &= -u_B \cos \alpha - w_B \sin \alpha, \\ \hat{\psi}_B &= \psi_B, \end{aligned}$$

takže v maticovém tvaru dostaneme

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_B \\ -\hat{w}_B \\ \hat{\psi}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ -w_B \\ \psi_B \end{Bmatrix}. \quad (165)$$

To je první z rovnic (164). Dále platí

$$\begin{aligned} M_B^L + \hat{M}_B &= M_B^P \\ T_B^L + \hat{T}_B \cos \alpha - \hat{N}_B \sin \alpha &= T_B^P, \\ N_B^L + \hat{N}_B \cos \alpha + \hat{T}_B \sin \alpha &= N_B^P. \end{aligned}$$

Tyto vztahy převedeme opět do maticového tvaru

$$\begin{Bmatrix} M_B^P - M_B^L \\ T_B^P - T_B^L \\ N_B^P - N_B^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{M}_B \\ \hat{T}_B \\ \hat{N}_B \end{Bmatrix}. \quad (166)$$

To je druhá z rovnic (164). Z nich a z rovnice (163) dostaneme

$$\{\Delta Q_B\} = [G_2][\hat{R}_2][\hat{R}_1]^{-1}\{\hat{Q}_B\} = [G_2][\hat{R}_2][\hat{R}_1]^{-1}[G_1]\{Q_B\}.$$

Poslední rovnici zapíšeme stručně jako

$$\{\Delta Q_B\} = [S]\{Q_B\}, \quad (167)$$

kde

$$[S] = [G_2][\hat{R}_2][\hat{R}_1]^{-1}[G_1] \quad (168)$$

je pružinová matice. Název je analogický pojmu "pružinová konstanta", což je zatížení vyvolané jednotkovou deformací (u šroubovité válcové pružiny je to síla působící jednotkové prodloužení pružiny).

Nyní už můžeme napsat vztah mezi vektory z_B^L a z_B^P . Podle definice je $\{\Delta Q_B\} = \{Q_B^P\} - \{Q_B^L\}$. Pomocí (167) sestavíme maticovou rovnici

$$\begin{Bmatrix} \hat{q} \\ \hat{Q} \end{Bmatrix}_B^P = \begin{bmatrix} -I & | & 0 \\ -S & | & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{q} \\ \hat{Q} \end{Bmatrix}_B^L, \quad (169)$$

což je vlastně hledaný vztah

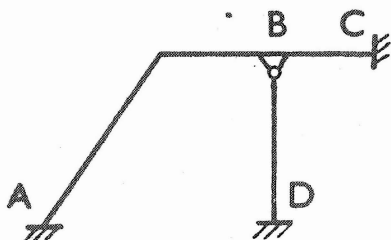
$$z_B^P = B_B z_B^L. \quad (170)$$

Matice přenosu pro styčník B je tedy dána čtvercovou maticí v rovnici (169)

$$B_B = \begin{bmatrix} -I & | & 0 \\ -S & | & I \end{bmatrix}. \quad (171)$$

Má velikost 6×6 , submatice jsou 3×3 .

S použitím vztahu (169), popř. (170) se dostaneme v hlavní větvi rámové konstrukce přes bod B a můžeme ve výpočtu pokračovat.



Obr. 25

Někdy není styčník obou větví tuhý; spoj může mít jeden nebo několik stupňů volnosti (u rovinných rámových konstrukcí jeden nebo dva stupně). Pak je třeba výpočet poněkud upravit. Jako příklad uvedeme konstrukci podle obr. 25, kde vedlejší prut BD je připojen kloubem.

Podle dřívějšího výkladu budeme mít - obdobně rovnici (162) -

$$\begin{Bmatrix} \hat{q} \\ \hat{Q} \end{Bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{R}_2 \end{bmatrix} \{ \hat{v}_D \}, \quad (172)$$

odkud

$$\{\hat{Q}_B\} = [\hat{R}_2][\hat{R}_1]^{-1} \{\hat{q}_B\} = [N] \{\hat{q}_B\}. \quad (173)$$

V rozepsaném tvaru

$$\begin{Bmatrix} \hat{M} \\ \hat{T} \\ \hat{N} \end{Bmatrix}_B = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ -\hat{w} \\ \hat{\varphi} \end{Bmatrix}_B. \quad (174)$$

Protože nyní musí být $\hat{M}_B = 0$ (kloubem se moment nepřenáší), nejsou deformace nezávislé. Z prvního řádku (174) dostaneme

$$n_{11} \hat{u}_B - n_{12} \hat{w}_B + n_{13} \hat{\varphi}_B = 0. \quad (175)$$

Oddělíme-li nulové prvky ve vektoru \hat{Q}_B (v našem případě oddělíme první prvek \hat{H}_B , někdy však musíme matice nejprve přeskupit), můžeme matice v rovnici (174) rozdělit na submatice

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{Q}_B \end{Bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -N_{dd} & | & N_{dB} \\ N_{\beta d} & | & N_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{q}_d \\ \hat{q}_\beta \end{Bmatrix}_B. \quad (176)$$

Rozepsáním dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= N_{dd} \hat{q}_d + N_{dB} \hat{q}_\beta, \\ \hat{Q}_\beta &= N_{\beta d} \hat{q}_d + N_{\beta\beta} \hat{q}_\beta. \end{aligned} \quad (177)$$

První z rovnic (177) je totožná s rovnicí (175). Vypočteme z ní \hat{q}_d (v našem případě \hat{u}_B) a dosadíme do druhé rovnice. Dostaneme

$$\hat{Q}_\beta = (N_{\beta\beta} - N_{\beta d} N_{dd}^{-1} N_{dB}) \hat{q}_\beta. \quad (178)$$

Označíme-li matici druhého řádu

$$\hat{N} = N_{\beta\beta} - N_{\beta d} N_{dd}^{-1} N_{dB}, \quad (179)$$

získá (178) tvar

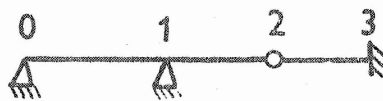
$$\hat{Q}_\beta = \hat{N} \hat{q}_\beta. \quad (180)$$

To je vztah, na který se zredukuje rovnice (173), popř. (174). Abychom pro další výpočet zachovali původní velikost matic a pořadí prvků v nich, přidáme identitu $0 = 0$ v prvním řádku a dostaneme

$$\begin{Bmatrix} \hat{M} \\ \hat{T} \\ \hat{N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \hat{N} \\ 0 & | & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ -\hat{w} \\ \hat{\varphi} \end{Bmatrix}_B. \quad (181)$$

Tato rovnice tedy nastoupí místo (163). Další výpočet je stejný jako dříve.

Nyní se ještě zmíníme o případě tuhé podpory nebo naopak kloubu v některé větvi rámové konstrukce. Takový případ je zakreslen na obr. 26. Podle výkladu v předchozí kapitole jsme



Obr. 26

schopni napsat matice přenosu pro jednotlivá pole a sestavit tyto transformační vztahy:

$$\begin{aligned} z_1^L &= A_1 z_0^P, \\ z_2^L &= A_2 z_1^P, \\ z_3^L &= A_3 z_2^P. \end{aligned} \quad (182)$$

Potřebujeme ještě matice B_1 , popř. B_2 pro bod 1, resp. 2. Protože v podpoře 1 je $w_1^L = 0$, bude první z rovnic (182) vypadat takto:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ T \end{Bmatrix}_0^P. \quad (183)$$

První řádek v této rovnici váže mezi sebou oba neznámé prvky vektoru z_0^P . Jeden z nich můžeme proto vyloučit

$$T_0 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \varphi_0. \quad (184)$$

Po dosazení (184) do (183) dostaneme

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_{12}} (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) \\ \frac{1}{a_{12}} (a_{12} a_{31} - a_{11} a_{32}) \\ \frac{1}{a_{12}} (a_{12} a_{41} - a_{11} a_{42}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ T \end{Bmatrix}_0^P. \quad (185)$$

Prvky matice v hranaté závorce jsou zřejmě determinanty druhého řádu, dělené a_{12} . Zavedeme pro ně speciální označení. Podle schématu

	Sloupec q	Sloupec r
Řádek j	----- a _{jq} 	----- a _{jr}
Řádek k	----- a _{kq} 	----- a _{kr}

budeme značit

$$|jk \quad qr| = \frac{1}{a_{jq}} (a_{jq} a_{kr} - a_{jr} a_{kq}). \quad (186)$$

Determinant sestavený z prvků vyznačených ve schématu dělíme levým horním prvkem. Potom (185) bude mít jednoduchý tvar

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} | 11 & 21 | \\ | 12 & 21 | \\ | 13 & 21 | \\ | 14 & 21 | \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ R_1 \\ 0 \end{Bmatrix}^P, \quad (187)$$

neboť $| 11 \quad 21 | = 0$.

Místo neznámé T_0 , kterou jsme vyloučili, vstoupí nyní do výpočtu neznámá reakce R_1 v podpoře 1. Bude totiž platit, že

$$T_1^P = T_1^L + R_1. \quad (188)$$

Protože ji zavádíme jako vnější sílu, musíme matici přenosu rozšířit o jeden sloupec; budeme mít

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix}_1^P = \begin{bmatrix} | 11 & 21 | & 0 \\ | 12 & 21 | & 0 \\ | 13 & 21 | & 0 \\ | 14 & 21 | & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \\ R_1 \end{Bmatrix}. \quad (189)$$

Tím jsme se dostali za bod 1. Po vynásobení zleva maticí A_2 dostaneme

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix}_2^L = [A_2] \begin{Bmatrix} -w \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix}_1^P = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \\ R_1 \end{Bmatrix} = \quad (190)$$

Nyní však $M_2^L = 0$, takže $d_{31} \varphi_0 + d_{32} R_1 = 0$. Vyloučíme reakci R_1 a místo ní zavedeme do výpočtu úhel α_2 , který budou svírat tečny k ohybové čáře zleva a zprava v bodě 2 (v ohybové čáře zde bude zlom). Vyjde

$$R_1 = -\frac{b_{31}}{b_{32}} \varphi_0, \quad (191)$$

takže

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix}_2^L = \begin{bmatrix} | 31 & 21 | & 0 \\ | 32 & 21 | & 1 \\ | 33 & 21 | & 0 \\ | 34 & 21 | & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}. \quad (192)$$

Determinanty $| jk \quad qr |$ zde počítáme pomocí prvků b_{ij} z rovnice (190). Násobením zleva maticí A_3 konečně vyjde

$$\begin{Bmatrix} -w = 0 \\ \varphi = 0 \\ M \\ T \end{Bmatrix}_3^L = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (193)$$

Odtud získáme frekvenční rovnici

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (194)$$

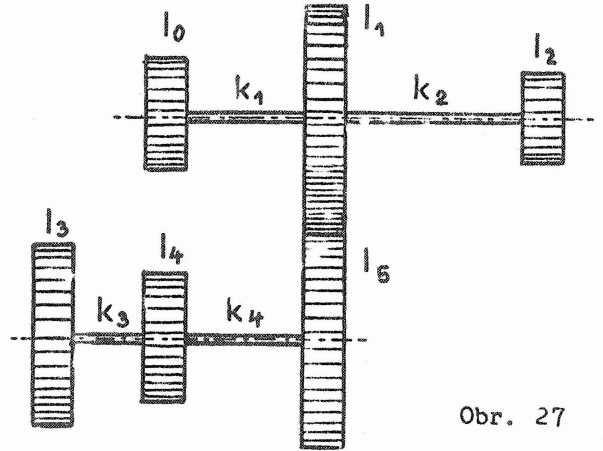
a vztah mezi oběma neznámými úhly

$$\alpha_2 = -\frac{c_{21}}{c_{22}} \varphi_0 \quad (195)$$

S normalizační podmínkou $\varphi_0 = 1$ dostaneme $\alpha_2 = -\frac{c_{21}}{c_{22}}$ a tím i všechny stavové vektory.

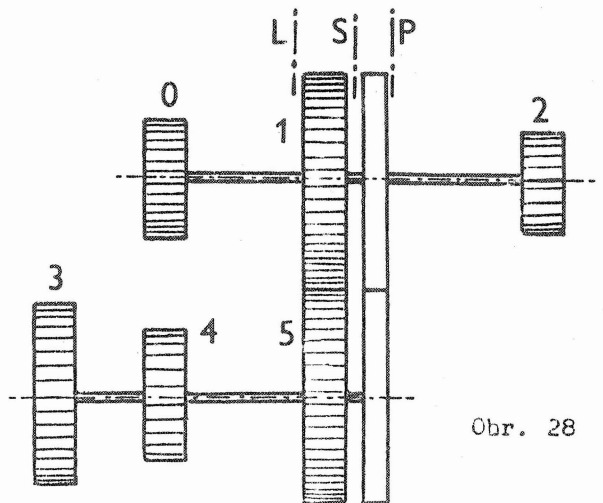
Jde-li o vynucené kmitání, popř. o statický případ, dostaneme vnější zatížení do výpočtu rozšířením vektorů a matic jako u ostatních dříve probraných nehomogenních úloh.

31. úloha. S použitím matic přenosu najděte vlastní frekvenci torzní soustavy zakreslené na obr. 27.



Obr. 27

Řešení. Za hlavní větev budeme považovat 012, za vedlejší 345. Abychom mohli případ lépe popsat, oddělíme funkci převodu mezi koly 1 a 5 od jejich setrvačných účinků tak, že schéma překreslíme (obr. 28). U kotouče 1 pak budeme mít tři řezy: levý (L), střední (S), a pravý (P). Přidané fiktivní kotouče jsou nehmotné a zabezpečují převod spojení obou větví. Vektor z_3^L zpoloviny známe



Obr. 28

$$z_3^L = \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_3 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (a)$$

Rovnici

$$z_5^P = B_5 A_5 B_4 A_4 B_3 z_3^L = U z_3^L \quad (b)$$

přepíšeme do tvaru

$$\begin{Bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{M} \end{Bmatrix}_5^P = \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{R}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_3 \end{Bmatrix}, \quad (c)$$

odkud

$$\hat{M}_5^P = \hat{R}_2 \hat{R}_1^{-1} \hat{\phi}_3. \quad (d)$$

Z rovnice pro převod odvodíme vztahy

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{r_5}{r_1} \phi_5 = -\varkappa \hat{\phi}_5 & (\varkappa = \frac{r_5}{r_1}), \\ M_1^P &= M_1^S - \frac{1}{\varkappa} \hat{M}_5^P. \end{aligned} \quad (e)$$

Z rovnic (d) a (e) vyloučíme $\hat{\phi}_5$ a \hat{M}_5^P ; dostaneme

$$M_1^P = M_1^S + \frac{1}{\varkappa^2} \hat{R}_2 \hat{R}_1^{-1} \phi_1^S, \quad (f)$$

v maticovém tvaru

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ M \end{Bmatrix}_1^P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varkappa^2} \hat{R}_2 \hat{R}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ M \end{Bmatrix}_1^S. \quad (g)$$

Vztah (g) umožňuje výpočet hlavní větve dříve popsaným způsobem. Můžeme jej napsat ve zkráceném označení takto:

$$z_1^P = C_1 z_1^S. \quad (h)$$

Pak platí, že

$$z_2^P = B_2 A_2 C_1 B_1 A_1 B_1 z_1^L \quad (i)$$

čili

$$\begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \end{Bmatrix}. \quad (j)$$

Odtud

$$u_{21} = 0 \quad (\text{frekvenční rovnice}),$$

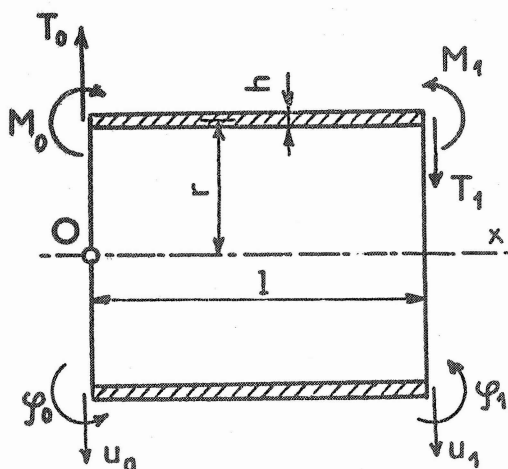
$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= u_{11} \varphi_0 \\ \varphi_0 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{tvar kmitu}).$$

Ach, kéž ještě chvíli mohu
dívatí se na oblohu.

Jiří Orten

14. Matice přenosu (pokračování)

V konstrukci strojů se velmi často setkáváme s rotačně souměrnou válcovou skořepinou, a to nejen u tlakových nádob a potrubí, ale i u nejrůznějších přírubových spojů, dutých hřídelů apod.



Obr. 29

Jak známo, vede řešení rotačně souměrné válcové skořepiny na obdobnou diferenciální rovnici, jaká popisuje průhyb nosníku na pružném podkladu. Mohli bychom tedy využít výsledky odvozené ve 30. úloze. Bude však jednodušší, probereme-li případ rotačně souměrné válcové skořepiny zvlášť.

Smysl kladných posuvů, úhlů otočení, ohybových momentů a posouvajících sil zavedeme shodně s obr. 29. Budeme předpokládat, že skořepina je staticky zatížena jen na okrajích $x = 0$ a $x = l$ posouvající silou T_i a ohybovým momentem M_i ($i = 0, 1$). Pro průhyb

tenké rotačně souměrné válcové skořepiny platí diferenciální rovnice

ce

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{4}{s^4} u = 0, \quad (196)$$

kde

$$\Delta^4 = \frac{r^2 h^2}{3(1-\mu^2)},$$

μ - Poissonovo číslo,

h - tloušťka stěny,

r - střední poloměr.

Pro $\mu = 0,3$ vyjde charakteristická délka $\Delta \approx 0,78 \sqrt{r h}$. Řešení (196) napíšeme ve tvaru

$$u = C_1 V_1(\xi) + C_2 V_2(\xi) + C_3 V_3(\xi) + C_4 V_4(\xi), \quad (197)$$

kde $\xi = \frac{x}{\Delta}$ značí bezrozměrovou souřadnici a $V_i(\xi)$ Krylovovy funkce, definované takto:

$$\begin{aligned} V_1(\xi) &= \cosh \xi \cos \xi, \\ V_2(\xi) &= (\cosh \xi \sin \xi + \sinh \xi \cos \xi) / 2, \\ V_3(\xi) &= \sinh \xi \sin \xi / 2, \\ V_4(\xi) &= (\cosh \xi \sin \xi - \sinh \xi \cos \xi) / 4. \end{aligned}$$

Z teorie skořepin dostaneme tyto vztahy:

$$\varphi = -\frac{du}{dx} = -\frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{4C_1 V_4 - C_2 V_1 - C_3 V_2 - C_4 V_3}{\Delta},$$

$$M = D \frac{d^2 u}{dx^2} = D \frac{-4C_1 V_3 - 4C_2 V_4 + C_3 V_1 + C_4 V_2}{\Delta^2},$$

$$T = D \frac{d^3 u}{dx^3} = D \frac{4C_1 V_2 - 4C_2 V_3 - 4C_3 V_4 + C_4 V_1}{\Delta^3},$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = \text{ohybová tuhost skořepiny.}$$

Pomocí okrajových podmínek

$$\begin{aligned} M(0) &= M_0, & M\left(\frac{\ell}{\Delta}\right) &= M_1, \\ T(0) &= T_0, & T\left(\frac{\ell}{\Delta}\right) &= T_1 \end{aligned} \quad (198)$$

vypočteme integrační konstanty C_1 až C_4 a sestavíme vztah mezi stavovými vektory

$$\begin{Bmatrix} -u_1 \\ \varphi_1 \\ M_1 \\ T_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 & \delta \bar{V}_2 & -\frac{\delta^2}{D} \bar{V}_3 & -\frac{\delta^3}{D} \bar{V}_4 \\ -\frac{4}{\delta} \bar{V}_4 & \bar{V}_1 & -\frac{\delta}{D} \bar{V}_2 & -\frac{\delta^2}{D} \bar{V}_3 \\ \frac{4D}{\delta^2} \bar{V}_3 & \frac{4D}{\delta} \bar{V}_4 & \bar{V}_1 & \delta \bar{V}_2 \\ \frac{4D}{\delta^3} \bar{V}_2 & \frac{4D}{\delta^2} \bar{V}_3 & -\frac{4}{\delta} \bar{V}_4 & \bar{V}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -u_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} \quad (199)$$

Zde jsme zkráceně označili $\bar{V}_i = V_i \left(\frac{\ell}{\delta} \right)$. Čtvercová matice v poslední rovnici je maticí přenosu A_1 . Rovnici (199) tedy můžeme zapsat takto:

$$z_1^L = A_1 z_0^P \quad (200)$$

Prozkoumáme nyní vlastnosti matice přenosu A_1 . Je-li skořepina velmi krátká, je ℓ velmi malé, takže $\bar{V}_1 \doteq 1$, $\bar{V}_2 \doteq \frac{\ell}{\delta}$, $\bar{V}_3 \doteq \frac{\ell^2}{2\delta^2}$, $\bar{V}_4 \doteq \frac{\ell^3}{6\delta^3}$.

Pak

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \ell & -\frac{\ell^2}{2D} & -\frac{\ell^3}{6D} \\ 0 & 1 & -\frac{\ell}{D} & -\frac{\ell^2}{2D} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{pro } \ell \ll \delta). \quad (201)$$

Odtud a z rovnice (200)

$$u_1 = u_0 - \varphi_0 \ell + \frac{M_0 \ell^2}{2D} + \frac{T_0 \ell^3}{6D} ,$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{M_0 \ell}{D} - \frac{T_0 \ell^2}{2D} ,$$

$$M_1 = M_0 + T_0 \ell ,$$

$$T_1 = T_0 .$$

Pro velmi krátkou skořepinu tedy platí stejné vztahy jako pro nosník. Až na některá znaménka je totiž matice (201) totožná s maticí z úlohy 26. Odlišnost ve znaménkách souvisí s jinou definicí smyslu kladného průhybu a úhlu otočení.

Pro velmi dlouhou skořepinu je $\cosh \frac{\ell}{\delta} \doteq \sinh \frac{\ell}{\delta} \doteq \exp \frac{\ell}{\delta}$, takže matice přenosu se zjednoduší na tvar

$$A_1 = e^{\frac{\ell}{\delta}} \begin{bmatrix} c & \frac{a\delta}{2} & -\frac{\delta^2 d}{2D} & -\frac{\delta^3 b}{4D} \\ -\frac{b}{\delta} & c & -\frac{a\delta}{2D} & -\frac{\delta^2 d}{2D} \\ \frac{2Dd}{\delta^2} & \frac{Db}{\delta} & c & \frac{a\delta}{2} \\ \frac{2Da}{\delta^3} & \frac{2Dd}{\delta^2} & -\frac{b}{\delta} & c \end{bmatrix} \quad (\text{pro } \ell \gg \delta), \quad (202)$$

Zde jsme pro stručnost zavedli tato označení:

$$\begin{aligned} c &= \cos \frac{\ell}{\delta}, \\ a &= \sin \frac{\ell}{\delta} + \cos \frac{\ell}{\delta} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\ell}{\delta} + \frac{\pi}{4} \right), \\ d &= \sin \frac{\ell}{\delta}, \\ b &= \sin \frac{\ell}{\delta} - \cos \frac{\ell}{\delta} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\ell}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Čtvercová matice v rovnici (200) má zvláštní strukturu. Můžeme ji rozdělit na submatice a napsat v tomto tvaru:

$$A_1 = e^{\frac{\ell}{\delta}} \left[\begin{array}{c|c} K & -\frac{\delta^2}{2D} N \\ \hline \frac{2D}{\delta^2} N & K \end{array} \right] \quad (\text{pro } \ell \gg \delta), \quad (203)$$

kde

$$K = \begin{bmatrix} c & \frac{a\delta}{2} \\ -\frac{b}{\delta} & c \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} d & \frac{b\delta}{2} \\ \frac{a}{\delta} & d \end{bmatrix}.$$

Snadno se (dosazením) přesvědčíme, že platí zajímavý vztah

$$K^{-1} N = -N^{-1} K. \quad (204)$$

Fyzikální důsledek poslední rovnice je, že deformace $Q_0 = [-\mu_0 \quad \varphi_0]^T$ jsou se silami $Q_1 = [M_0 \quad I_0]^T$ u dlouhé skořepiny vázány stejným vztahem, ať je konec $x = \ell$ vešknutý ($Q_1 = 0$) nebo volný ($Q_0 = 0$). Rozepíšeme-li totiž rovnici

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ -Q_0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K & -\frac{\delta^2}{2D} N \\ \hline \frac{2D}{\delta^2} N & K \end{array} \right] \begin{bmatrix} Q_0 \\ -Q_1 \end{bmatrix} e^{\frac{\ell}{\delta}}, \quad (205)$$

dostaneme v obou případech stejný výsledek

$$Q_0 = \frac{\delta^2}{2D} K^{-1} N Q_1 = -\frac{\delta^2}{2D} N^{-1} K Q_1. \quad (206)$$

Z této rovnice plyne výpočtem

$$\begin{Bmatrix} -u_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \frac{\delta^2}{2D} \begin{bmatrix} -1 & -\delta \\ \frac{2}{\delta} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} .$$

Tento výraz lze upravit (dosazením za D a použitím vztahu pro δ). Vyjde

$$\begin{Bmatrix} -u_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} , \quad (207)$$

kde ^{*)}

$$\alpha = \frac{2r^2}{h\delta^2} , \quad \beta = \frac{2r^2}{h\delta} , \quad \gamma = \frac{4r^2}{h\delta^3} .$$

Matematický důsledek vztahu (204) je, že matice přenosu A_1 je singulární. Pro inverzní matici $X = A_1^{-1}$ by totiž musilo platit, že

$$\left[\begin{array}{c|c} K & -kN \\ \hline \frac{1}{k}N & K \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] , \quad (208)$$

kde $k = \frac{\delta^2}{2D}$. Rozepsáním dostaneme

$$\begin{aligned} KX_{11} - kNX_{21} &= I , & KX_{12} - kNX_{22} &= 0 , \\ \frac{1}{k}NX_{11} + KX_{21} &= 0 , & \frac{1}{k}NX_{12} + KX_{22} &= I . \end{aligned}$$

Vyloučíme-li např. X_{11} , dostaneme pro X_{21} rovnici

$$-k(N + KN^{-1}K)X_{21} = I ,$$

kterou nelze řešit, neboť

$$N + KN^{-1}K = N - KK^{-1}N = N - N = 0 .$$

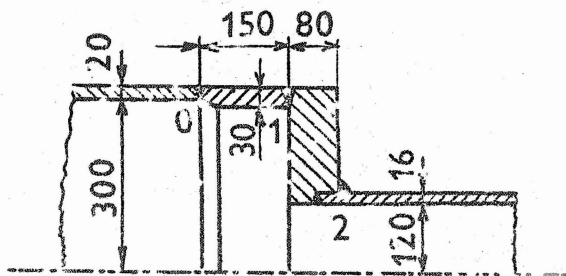
To znamená, že "doznívání" silových účinků v dlouhé skořepině porušuje vazbu mezi stavovými vektory ve vzdálených řezech. Místo ní vzniká pouze jednoduchá vazba (207) mezi prvky téhož stavového vektoru.

Praktický důsledek toho je, že při aplikaci matice přenosu z rovnice (199) na skořepinu o délce větší než asi $l = 6\delta$ se projeví špatná podmíněnost soustavy rovnic pro výpočet neznámých vzrůstem zaokrouhlovacích chyb. Pak je třeba zakončit výpočet okrajovou podmínkou (207) platnou pro počáteční vektor v dlouhé skořepině.

^{*)} Jde o Pasternakovy příčinkové činitele. Srov. HÖSCHL, C.:

Fružnost a pevnost ve strojnictví. Praha, SNTL/ALFA 1971, s. 230.

32. úloha. Určete napjatost v okolí rovného mezikruhového dna spojujícího plášť tlakové nádoby s hrdlem podle obr. 30. Všechny části jsou z téhož materiálu, teplota je konstantní. Nádoba je zatížena vnitřním přetlakem p . Plášť nádoby i hrdlo jsou relativně dlouhé ($l \gg \lambda$). Axiální posuvy nejsou omezeny.



Obr. 30

Řešení. Kdybychom zrušili myšlenými řezy ohybové momenty a posouvající síly v místech 0, 1 a 2, kde se skořepiny stýkají, popř. kde jsou připojeny k desce, vznikly by vlivem nestejných membránových dilatací rozdíly radiálních posuvů vlevo a vpravo od každého řezu. Např. poloměr pláště nádoby by se zvětšil o

$$\delta_0 = \frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = \frac{p}{E} \frac{31^2}{2} (1 - 0,15) = 408,425 \frac{p}{E},$$

kdežto poloměr skořepiny 01 by se zvětšil o

$$\delta_1 = \frac{p}{E} \frac{30,5^2}{3} (1 - 0,15) = 263,571 \frac{p}{E}.$$

Podobně vypočteme zvětšení poloměru uvolněného hrdla

$$\delta_2 = \frac{p}{E} \frac{12,8^2}{1,6} (1 - 0,15) = 87,040 \frac{p}{E}.$$

Pomineme-li ohyb desky, bude v uvolněné desce existovat rovněž "membránová" napjatost; vzniká roztažením desky účinkem tlaku p , působícího na vnitřní okraj desky. (Ohyb desky zahrneme do výpočtu později společně s ohybem skořepiny. Uvažujeme tedy jen radiální posuvy). Je-li vnější poloměr desky $r_1 = 32$ cm, vnitřní $r_2 = 12$ cm, vzniká na okrajích desky posunutí f_1 , f_2 , které vypočteme z teorie tlustostěnných nádob

$$f_1 = \frac{p}{E} \frac{2r_1 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{p}{E} \frac{2 \cdot 32 \cdot 12^2}{32^2 - 12^2} = 10,472 \frac{p}{E},$$

$$f_2 = \frac{p}{E} r_2 \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} + \mu \right) = \frac{p}{E} \cdot 12 \left(\frac{1168}{880} + 0,3 \right) = 19,527 \frac{p}{E}.$$

Na tento "membránový" stav napjatosti a deformace se pak superponuje ohybový stav, obnovující souvislost tělesa. Při ohybu vznikají další radiální posuvy, úhly otočení, ohybové momenty a posouvající síly.

Protože řešíme nehomogenní úlohu, rozšíříme stavové vektory o jednotku, takže $z = [-u \ \varphi \ M \ T \ 1]^T$. Osová síla vyjde z podmínky rovnováhy a je přede-
dem známa, proto do stavového vektoru nevstoupí. Vynecháme rovněž osový po-
suv, neboť nás nezajímá a k výpočtu staticky neurčitých sil a momentů jej
nepotřebujeme.

Pro vektor z_0^L bude platit rozšířený vztah (207) *)

$$\begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ M \\ T \\ 1 \end{Bmatrix}_0^L = \frac{1}{E} \left[\begin{array}{cc|c} -\alpha & +\beta & 0 \\ -\gamma & +\delta & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} M \\ T \\ 1 \end{Bmatrix}_0^L \quad (a)$$

v němž $\alpha = 25,610 \ 22$, $\beta = 156,880 \ 29$, $\gamma = 8,361 \ 58$ (míry v cm, tedy
 $r = 31$ cm, $h = 2$ cm, $\delta = 6,125 \ 69$ cm). Mezi vektory z_0^L a z_0^P bude
vazba

$$z_0^P = B_0 z_0^L, \quad (b)$$

vyjadřující deformační podmínku v bodě O , totiž rovnost celkových posuvů.
Každý posuv vzniká jednak membránovou, jednak ohybovou deformací

$$\delta_0 + u_0^L = \delta_1 + u_0^P. \quad (c)$$

Ohybová čára musí být v místě O hladká a ohybový moment ani posouvající
síla se tam nezmění. Proto bude platit

$$\begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ M \\ T \\ 1 \end{Bmatrix}_0^P = \begin{bmatrix} & & & \Delta_0 \\ & I & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ M \\ T \\ 1 \end{Bmatrix}_0^L \quad (d)$$

kde $\Delta_0 = \delta_1 - \delta_0 = -144,854 \frac{P}{E}$. Vztahy (b) a (d) jsou totožné. Pro sko-
řepinu $O1$ bude platit přenos

$$\begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ M \\ T \\ 1 \end{Bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ M \\ T \\ 1 \end{Bmatrix}_0^P, \quad (e)$$

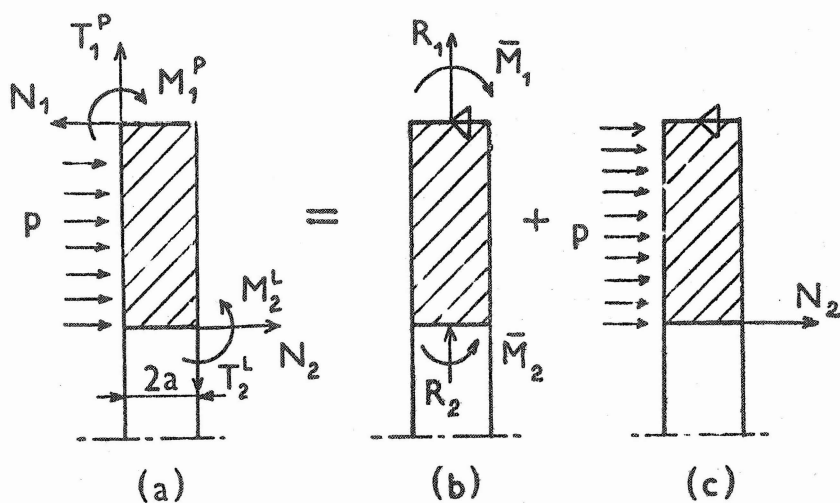
*) Změna znamének souvisí s tím, že jde o pravý konec skořepiny, kdežto
rovnice (207) se vztahovala na levý konec.

kde A je čtvercová matice ze vztahu (199), vyčíslená pro $r = 30,5$ cm,
 $h = 3$ cm, $l = 15$ cm, tedy $\delta = 7,441\ 66$ cm, $\frac{e}{\delta} = 2,015\ 68$,
 $D = 2,472\ 53 E$. Vyjde

$$A = \begin{bmatrix} -1,643\ 746 & 6,925\ 693 & -37,263\ 468 E^{-1} & -209,765\ 417 E^{-1} \\ -0,676\ 482 & -1,643\ 746 & -2,801\ 055 E^{-1} & -37,263\ 468 E^{-1} \\ 0,297\ 130 E & 1,672\ 622 E & -1,643\ 746 & 6,925\ 693 \\ 0,022\ 335 E & 0,297\ 130 E & -0,676\ 482 & -1,643\ 746 \end{bmatrix}$$

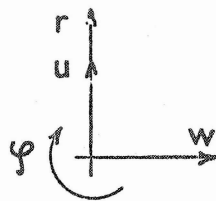
Rovnici (e) zapíšeme zkráceně

$$z_1^L = A_0 z_0^P = A_0 B_0 z_0^L \quad (f)$$



Obr. 31

Nyní přistoupíme k rozboru ohybových deformací desky. Budou na ni působit momenty a síly podle obr. 31 a. Smysl posuvu a úhlu otočení zavedeme podle obr. 32. Zatížení (a) rozložíme na prvotní (c), vyvolané vnějším tlakem, a druhotné (b), které souvisí se vzájemným působením desky a skořepin. Zřejmě



Obr. 32

$$N_2 = p \frac{\pi 12^2}{2 \pi 12} = 6 p,$$

$$a = 4 \text{ cm (srovnej s obr. 29),}$$

$$R_2 = -T_2^L,$$

$$R_1 = T_1^P,$$

$$\bar{M}_2 = M_2^L - a T_2^L$$

$$\bar{M}_1 = M_1^P + a T_1^P.$$

Ohybové deformace desky jsou popsány rovnicí ($\mu = 0,3$)

$$\begin{Bmatrix} -w \\ \varphi \\ M_r \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} r^2 & \ln r & -1 & -\frac{pr^4}{64D} \\ r & \frac{1}{r} & 0 & -\frac{pr^3}{16D} \\ 1,3\bar{D} & -0,7\bar{D} \frac{1}{r^2} & 0 & -\frac{3,3}{16} pr^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} pr \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

Vektor na pravé straně obsahuje integrační konstanty. Rovnice se odvodí z Kirchhoffovy teorie desek a platí pro desku podle obr. 31 c s posouvající silou $\frac{pr}{2}$ (je v ní zahrnut i účinek síly N_2).

Z okrajových podmínek

$$w(r_1) = 0, \quad M_r(r_1) = -\bar{M}_1, \quad M_r(r_2) = -\bar{M}_2$$

vyjde

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -\bar{M}_1 \\ -\bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} r_1^2 & \ln r_1 & -1 & -\frac{pr_1^4}{64D} \\ 1,3\bar{D} & -0,7\bar{D} \frac{1}{r_1^2} & 0 & -\frac{3,3}{16} pr_1^2 \\ 1,3\bar{D} & -0,7\bar{D} \frac{1}{r_2^2} & 0 & -\frac{3,3}{16} pr_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (h)$$

čili ve zkráceném zápisu

$$\{\bar{Q}\} = [H_1 \mid H_2] \left\{ -\frac{C}{1} \right\}.$$

Odtud

$$\{C\} = [H_1]^{-1} (\{\bar{Q}\} - \{H_2\}).$$

Zde $D = E \frac{b^3}{12(1 - 0,09)} = 46,886 45 E$ je ohybová tuhost desky,

$r_1 = 32$ cm, $r_2 = 12$ cm. Vyjde

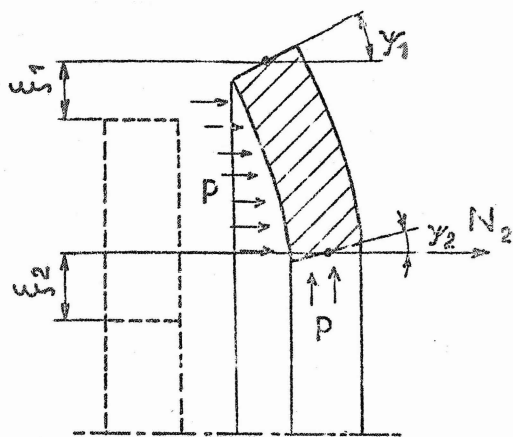
$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 3,952 698 & -0,019 091 & 0,002 684 \\ 926,640 & -5,105 456 & 5,105 456 \\ 4885,615 & -27,519 475 & 19,068 732 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

S použitím (g) a (i) vypočteme úhly otočení vzniklé působením tlaku p a síly N_2 (obr. 33)

$$\psi_1 = 111,749 \frac{p}{E}, \quad \psi_2 = 122,343 \frac{p}{E}.$$

Deformace zakreslené na obr. 33 jsou vyvolány vnějším zatížením, tj. tlakem p . K nim přistoupí deformace (u, φ) , působené silami R_1, R_2 a ohybovými momenty \bar{M}_1, \bar{M}_2 (obr. 31 b).

Nyní napíšeme podmínky spojitosti v bodě 1. Celkový radiální posuv vlevo $\delta_1 + u_1^L$ musí být též jako celkový radiální posuv vpravo. Ten se skládá z posuvu u_1^P vzniklého působením sil R_1, R_2 , z posuvu $f_1 - a\psi_1$ působeného tlakem p a silou N_2 (obr. 31 c, popř. obr. 33) a z posuvu $a\varphi_1^P$, je-li ψ_1 otočení působené momenty \bar{M}_1, \bar{M}_2 . Celkem



Obr. 33

$$u_1^L + \delta_1 = u_1^P + f_1 - a\psi_1 + a\varphi_1^P.$$

Také úhly musí být stejné, takže

$$\varphi_1^L = \varphi_1^P - \psi_1.$$

Dále máme statické podmínky

$$M_1^L = M_1^P = \bar{M}_1 - aT_1^P, \quad T_1^L = T_1^P = R_1.$$

Tyto vztahy lze shrnout do jediné maticové rovnice

$$\begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ \bar{M} \\ R \\ \hline 1 \end{Bmatrix}_1^P = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & \Delta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \psi_1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ M \\ T \\ \hline 1 \end{Bmatrix}_1^L. \quad (j)$$

Přitom $\Delta_1 = f_1 - \delta_1 = -253,099 \frac{p}{E}$. Rovnice (j) popisuje přenos

$$z_1^P = B_1 z_1^L. \quad (k)$$

Pro zatížení desky silami a momenty podle obr. 31 b dostaneme z teorie tlustostěnných nádob a z rovnic (h), (i) vztah

$$z_2^L = A_2 z_1^P. \quad (l)$$

čili v rozepsaném tvaru

$$\begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ \bar{M} \\ R \\ \hline 1 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & | & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 & | & 0 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 & | & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & a_8 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ \bar{M} \\ \hline \Gamma \\ 1 \end{Bmatrix}_1$$

v němž

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,864\ 55, & a_2 &= 4,170\ 74\ E^{-1}, \\ a_3 &= 1,861\ 3, & a_4 &= -0,782\ 12\ E^{-1}, \\ a_5 &= -4,059\ 4\ E, & a_6 &= 3,133\ 3, \\ a_7 &= -0,763\ 87\ E, & a_8 &= -3,138\ 84. \end{aligned}$$

Obdobně rovnici (j) odvodíme pro bod 2 vztah

$$\begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ M \\ \hline \Gamma \\ 1 \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & | & \Delta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -\psi_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \\ \bar{M} \\ \hline R \\ 1 \end{Bmatrix}_2 \quad (m)$$

v němž $\Delta_2 = -\int_2 + \delta_2 - a\psi_2 = -421,859 \frac{P}{E}$. Tedy

$$z_2^P = B_2 z_2^L \quad (n)$$

Konečně pro vektor z_2^P máme okrajovou podmínku podle (207)

$$\begin{Bmatrix} -u \\ \varphi \end{Bmatrix}_2^P = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\hat{\mathcal{L}} & -\hat{\beta} & | & 0 \\ \hat{\gamma} & \hat{\alpha} & | & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ \hline \Gamma \\ 1 \end{Bmatrix}_2^P \quad (o)$$

Pro $r = 12,8\text{ cm}$, $h = 1,6\text{ cm}$ vyjde $\hat{\mathcal{L}} = 26,298\ 49$, $\hat{\beta} = 73,388\ 90$,
 $\hat{\gamma} = 18,847\ 82$.

Postupným dosazením z rovnic (b), (f), (k), (l) a (n) dostaneme

$$z_2^P = B_2 A_2 B_1 A_0 B_0 z_0^L \quad (p)$$

čili = v pozmeněném zápisu =

$$\left\{ \begin{array}{c} z_2 \\ 1 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} U & b \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} z_0 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (a)$$

Rovnice (p) a (q) jsou totožné. Stavový vektor z_0 , popř. z_2 není rozšířen o jednotku, takže

$$z_0 = \left\{ \begin{array}{c} q_0 \\ Q_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -u_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ r_0 \end{array} \right\}$$

a podobně z_2 . Rovnice (a) a (c) lze pak zapsat ve tvaru

$$\{q_0\} = [W_0] \{Q_0\}, \quad \{q_2\} = [W_2] \{Q_2\}, \quad (r)$$

jestliže označíme

$$[W_0] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad [W_2] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\hat{\alpha} & -\hat{\beta} \\ \hat{\gamma} & \hat{\delta} \end{bmatrix} \quad (s)$$

Rovnice (r) jsou ekvivalentní se vztahem

$$[K_0 \mid K_2] \left\{ \begin{array}{c} z_0 \\ z_2 \end{array} \right\} = \{0\}, \quad (t)$$

v němž

$$K_0 = \left[\begin{array}{c|c} -I & -W_0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad K_2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I & -W_2 \end{array} \right]. \quad (u)$$

Submatice mají velikost 2×2 . Z rovnic (q) a (t) odvodíme

$$z_0 = -(K_0 + K_2 U)^{-1} K_2 b. \quad (v)$$

Invertujeme tedy matici v oblé závorce, která má velikost 4×4 . Máme-li počáteční vektor $z_0^L = [z_0 \mid 1]^T$, máme i ostatní stavové vektory.

Při numerickém výpočtu můžeme využít princip superpozice. Zvolíme např. $p = 1$, $E = 1$. Napětí pak vyjdou v bezrozměrových hodnotách $\frac{\sigma_{ij}}{p}$ a posuvy a úhly v $\frac{\epsilon}{p}$ -násobcích.

Počítáme-li napětí ve skořepině o poloměru r a tloušťce h , bude axiální, popř. obvodové membránové napětí

$$\sigma_{am} = \frac{pr}{2h}, \quad \sigma_{tm} = E \frac{u}{r} + \frac{pr}{h}. \quad (w)$$

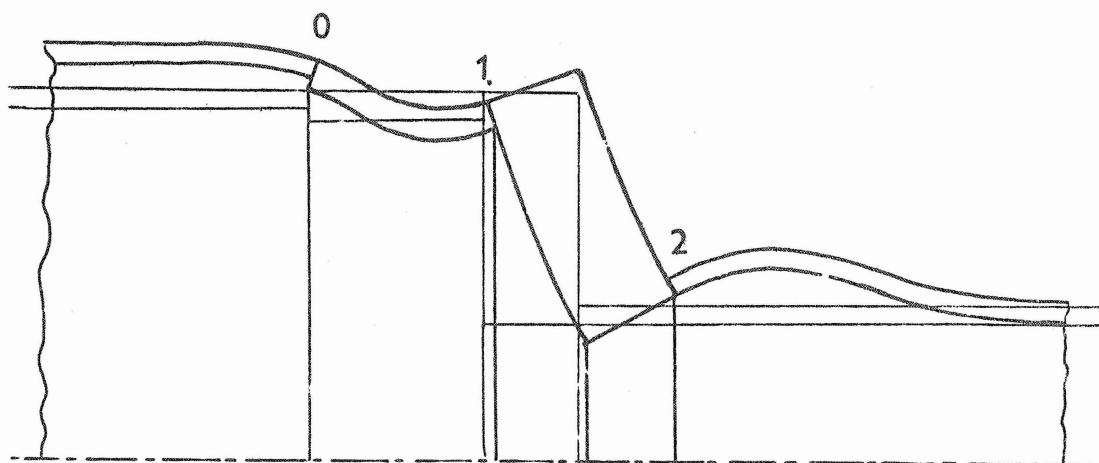
Ohybová napětí v povrchových vláknech budou

$$\sigma_{a\sigma} = \pm \frac{6 M_r}{h^2}, \quad \sigma_{t\sigma} = \mu \sigma_{a\sigma} \quad (x)$$

Numericky vyjdou tyto stavové vektory (pro $p = 1, E = 1$)

Řez	0L	1L	2P
-u	114,862	342,699	-140,411
φ	31,948	-31,464	-46,134
M	-3,157	51,216	-10,235
T	0,217	10,602	5,581

Deformace jsou zakresleny na obr. 34 v relativním zvětšení.



Obr. 34

Těší mne, jestli čtenářové moji
ještě něčeho očekávají.
Já jsem hotov.

Karel Hynek Mácha

15. Několik poznámek k práci s maticemi

Matice A je souborem dvouindexových veličin a_{jk} ($j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$; n je počet řádků, m počet sloupců). Do paměti počítače je však můžeme ukládat jen jako jednoindexové veličiny a_i

($i = 1, 2, \dots, nm$), tedy vektory. Prvky a_i ukládáme např. do registrů

$$b + 1, \quad b + 2, \quad \dots, \quad b + nm, \quad (209)$$

kde b je číslo registru, který předchází první uložený prvek.

Matici ukládáme buď po řádcích, nebo po sloupcích. Zvolíme-li ukládání po řádcích, případně prvek a_{jk} do registru s číslem

$$r = b + i = b + (j - 1)m + k. \quad (210)$$

Pro ukládání matice do paměti potřebujeme tedy tyto vstupní údaje: číslo registru b , za nímž má být matice ukládána, počet řádků n , počet sloupců m . Program pro vkládání matice by měl obsahovat i kontrolní tisk ukládaných dat v přehledném uspořádání.

Potřebujeme-li uložit diagonální matici, popř. jinou matici s malým počtem nenulových prvků, bylo by vkládání všech dat včetně nul u větších matic zbytečně zdlouhavé. Pak je jednodušší použít pomocný program pro vynulování pole (209) a vkládat nenulové prvky jednotlivě. Ke vkládání jednotlivých prvků si připravíme program, do něhož budeme podle (210) potřebovat vstupní údaje b , m ; ty se uloží do pomocných registrů. Každý prvek matice pak vkládáme pomocí tří údajů, a to j , k , a_{jk} . Z prvních dvou údajů určí počítač adresu registru r , do něhož pak uloží třetí údaj, totiž prvek matice a_{jk} .

Programy pro početní úkony s maticemi můžeme upravit také tak, abychom popřípadě využili pásovost nebo souměrnost matice. U souměrné matice stačí pak ukládat jen prvky na hlavní diagonále a nad ní (popř. na hlavní diagonále a pod ní), u pásové matice pak jen prvky uvnitř pásu. Tyto úpravy se pravidelně vyplatí u velkých počítačů. U malých počítačů je třeba vážit rozsah operací v celé úloze, neboť komplikace programu nemusí být vyvážena úsporou v počtu vložených dat. Spíše nám pomůže vhodné využívání vnější paměti počítače.

Závěrem je nutno poznamenat, že počítač znamená úsporu práce jenom pro toho, kdo pracuje starými metodami a počítač používá jen jako zdokonalený kalkulační stroj. Tím však dostatečně nevyužívá jeho možnosti. Jestliže jsme se rozhodli pro co nejlepší využití počítače, musíme k tomu vynaložit nemalou námahu, zejména v počátečním stadiu při vytváření a ladění programů, při sestavování katalogu nejčastěji užívaných vzorců apod. Odměnou je pak dobrá služba počítače, který nás zbavuje zdlouhavé a namáhavé numerické práce a poskytuje v neuvěřitelně krátkém čase velké množství informací. Je schopen opakovat řešení téže úlohy s různými vstupními daty, takže konstruktér může snadno určit nebo alespoň odhadnout optimální řešení svého problému. Počítač však nemůže nahradit vzdělání. Slovy geniálního Norberta Wienera, počítač nám dá jenom takovou odpověď, jakou otázku mu umíme položit.

Literatura

- /1/ ALBERG, DŽ., NILSON, E., UOLŠ, DŽ.: Teorija splajnov i jijo priloženija. (Překlad z angl. orig.) Moskva, Mir 1972.
- /2/ FRAZER, R. A., DUNCAN, W. J., COLLAR, A. R.: Základy maticového počtu, jeho aplikace v dynamice a v diferenciálních rovnicích. (Překlad z angl. orig.) Praha, SNTL 1958.
- /3/ LANCZOS, C.: Applied analysis. London, Sir Isaac Pitman 1957.
- /4/ LIVESLEY, R. K.: Matrix methods of structural analysis. New York, Pergamon Press, The MacMillan Co. 1964.
- /5/ ORTEGA, J. M.: Numerical analysis. New York, Academic Press 1972.
- /6/ PESTEL, E. C., LECKIE, F. A.: Matrix methods in elastomechanics. New York, McGraw-Hill 1963.
- /7/ FONOMARJEV, K. K.: Rasčet elementov konstrukcij s primeněnijem električeskich cifrovych vyčislitel'nyh mašin. Moskva, Mašinostrojenije 1972.
- /8/ RALSTON, A.: Základy numerické matematiky. (Překlad z angl. orig.) Praha, Academia 1973.
- /9/ ROARK, R. J.: Formulas for stress and strain. 4. vyd. New York, McGraw-Hill 1965.
- /10/ UHRIG, R.: Elastostatik und Elastokinetik in Matrizenschreibweise. Das Verfahren der Übertragungsmatrizen. Berlin, Springer-Verlag 1973.
- /11/ HÖSCHL, C.: Maticové metody v pevnostních výpočtech, část I až III. Dům techniky ČVTS Praha, 1973, 1974.

Název: MODIFIKACE PEVNOSTNÍCH VÝPOČTŮ
PRO MALÉ DIGITÁLNÍ POČÍTAČE

Autor: Prof. Ing. Cyril Höschl

Počet stran: 110

Náklad: 180 výtisků

Formát: A 4

Číslo publikace: 60 - 783 - 76 (1184)

Vydal a rozmnožil: Dům techniky ČVTS Praha
Gorkého nám. 23, Praha 1

Datum vydání: Srpen 1976