NURBS tělesa

Teorie a programové zpracování

Jana Procházková

Seminář SIGA, Praha 2011

8. února 2011

Obsah přednášky

1. Teoretický náhled na NURBS tělesa.
2. Návrh programového zpracování.
3. Kritická místa metod.
4. Ukázky.

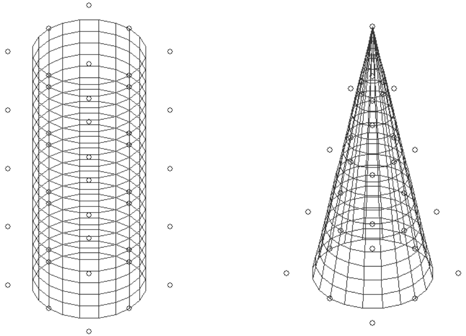
NURBS plocha

Mějme dáno:
síť $(q+1)(r+1)$ kontrolních bodů $P_{i,j}$, kde $0 \leq i \leq q, 0 \leq j \leq r$,
$(q+1)(r+1)$ kladných reálných čísel $w_{i,j}$ nazývaných váhy,
stupeň plochy pro řádky m a stupeň plochy pro sloupce n,
řádkový uzlový vektor $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots u_{m+q+1})$,
sloupcový uzlový vektor $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots v_{n+r+1})$.
Pak plochu určenou rovnicí

$$C(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{r} w_{ij} P_{ij} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{i=0}^{q} \sum_{j=0}^{r} N_i^m(u) N_j^n(v)}, \tag{1}$$

kde $(u,v) \in \langle u_0, u_{m+q+1}) \times \langle v_0, v_{n+r+1})$, nazýváme **NURBS plochou**.

Příklady základních sítí



Obrázek: Řídicí body pro kužel a válec, uzlové vektory $u = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$, $v = (0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1)$

Uživatelské zadání těles

- válec, kužel - střed podstavy, pod podstavy, výška
- hranol - 3 body
- kulová plocha – střed, poloměr
- anuloid – osa, rotační kružnice
- rotační tělesa - rotační křivka, osa rotace

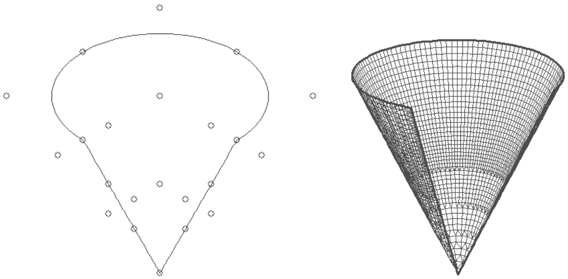
K tělesům lze také zadat počet rovnoběžek (zhuštění sítě bodů) a úhel rozevření tělesa.

Objektový návrh

- obecná NURBS plocha je v samostatné třídě
- každé těleso má samostatnou třídu jako potomek obecné NURBS plochy
- každá třída obsahuje metodu spoctiParametry, která ze vstupu vygeneruje parametry nutné k vykreslení plochy
- vykreslení – dědičností lze použít vykreslovací metodu z rodičovské třídy

Algoritmus pro výpočet kontrolních bodů pro rozevřená tělesa

1. Rozdělit kružnicový oblouk na stejné části.
2. Vypočítat trojice řídicích bodů pro jednotlivé části oblouku.
3. Určit váhu prostředního bodu z každé trojice.



Řídicí body otevřených těles

1. Rozdělit kružnicový oblouk na stejné části.

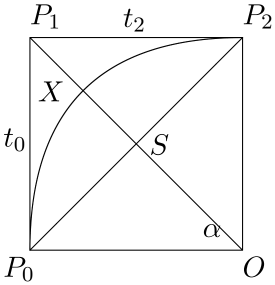
```
if (uhelRozevreni <= 90.0) pocetOblouku = 1;
  else
    if (uhelRozevreni <= 180.0) pocetOblouku = 2;
      else
if (uhelRozevreni <= 270.0) pocetOblouku = 3;
          else  pocetOblouku = 4;
```

Určení velikosti jednoho oblouku.

```
uhel = uhelRozevreni/pocetOblouku;
```

Řídicí body otevřených těles

2. Výpočet řídicích bodů kružnicového oblouku.



$r = |P_0 O|$
$P_2^x = O^x + r\cos\alpha$
$P_2^y = O^y + r\sin\alpha$

P_2 průsečík tečen t_0, t_2

Obrázek: Hledání řídicích bodů kružnicového oblouku

Určení váhy prostředního řídicího bodu

3. Určení váhy prostředního řídicího bodu.
Základní rovnice kuželosečky je dána tvarem

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0, \tag{2}$$

kde alespoň jedno z A, B, H je nenulové.

V rovnici 2 vystupuje šest neznámých. Je-li $C \neq 0$, pak lze celou rovnici vydělit C a počet neznámých se sníží o jednu. Pro $C = 0$ je předchozí úvaha splněna. Základní rovnici lze přepsat do tvaru:

$$f : ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + 1 = 0 \tag{3}$$

Je nutné najít pět podmínek, které by jednoznačně určily parametry této rovnice.

Určení váhy prostředního řídicího bodu

Podmínka 1+2

Oblouk prochází krajními body $P_0 = [x_0, y_0], P_2 = [x_2, y_2]$, z čehož vyplývá tvar prvních dvou podmínek:

$$f(P_0) = ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + 1 = 0 \qquad (4)$$

$$f(P_2) = ax_2^2 + 2hx_2y_2 + by_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + 1 = 0 \qquad (5)$$

Určení váhy prostředního řídicího bodu

Podmínka 3+4 Podmínky dostáváme porovnáním dvou vyjádření směrnice tečen. Jedno získáme z rovnice 3 jako podíl parciálních derivací, druhé z podmínky, že spojnice bodů P_0P_1 a P_2P_1 jsou tečnami v krajních bodech P_0, P_2.

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{ax_0 + hy_0 + g}{by_0 + hx_0 + f}, \tag{6}$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{ax_2 + hy_2 + g}{by_2 + hx_2 + f}. \tag{7}$$

Podmínka 5 Poslední podmínka je určena parametrickou rovnici vzhledem k zadaným hodnotám obecného oblouku:

$$c(t) = \frac{(1-t^2)P_0 + 2t(1-t)w_1P_1 + t^2P_2}{(1-t)^2 + 2t(1-t)w_1 + t^2} \tag{8}$$

Určení váhy prostředního řídicího bodu

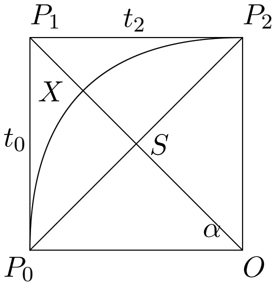
Bez újmy na obecnosti vezměme případ, kdy krajní body leží na ose x souměrně podle počátku, tedy $P_0 = -P_2$. Bod S je středem soustavy souřadnic.

Po úpravách dostáváme vyjádření poměru:

$$\frac{|SX|}{|SP_1|} = \frac{w_1}{1 + w_1}. \tag{9}$$

Řídicí body otevřených těles

Výpočet řídicích bodů kružnicového oblouku.



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{|OS|}{r} \rightarrow |OS| = r\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{|OP_1|} \rightarrow |OP_1| = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Obrázek: Odvození váhy prostředního bodu

Určení váhy prostředního řídicího bodu

$$
\begin{aligned}
|SX| &= |OX| - |OS| = r - r\cos\frac{\alpha}{2} &(10)\\
|SP_1| &= |OP_1| - |OS| = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}} - r\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r(1-\cos^2\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}} &(11)
\end{aligned}
$$

Hledaný poměr je

$$
\frac{|SX|}{|SP_1|} = \frac{r(1-\cos\frac{\alpha}{2})}{r(1-\cos^2\frac{\alpha}{2})/\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{w_1}{1+w_1}. \tag{12}
$$

Z toho vyplývá řešení:

$$
w_1 = \cos\frac{\alpha}{2}. \tag{13}
$$

Modelování hranolu

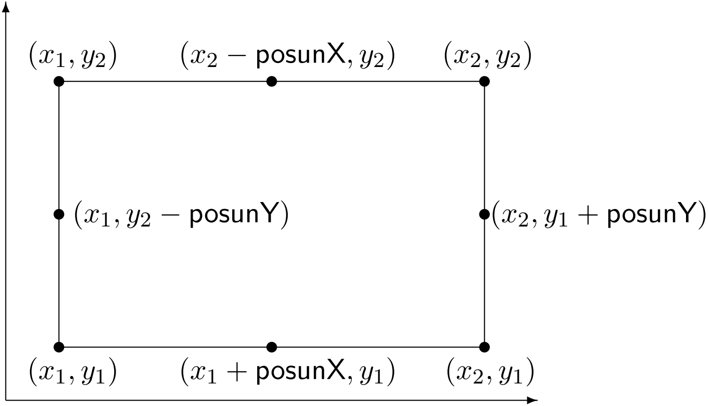
Zadání: 3 body, počet rovnoběžek, počet poledníků

- určit řídicí body,
- vypočítat uzlové vektory v závislosti na počtu rovnoběžek a poledníků

Výpočet řídicích bodů:

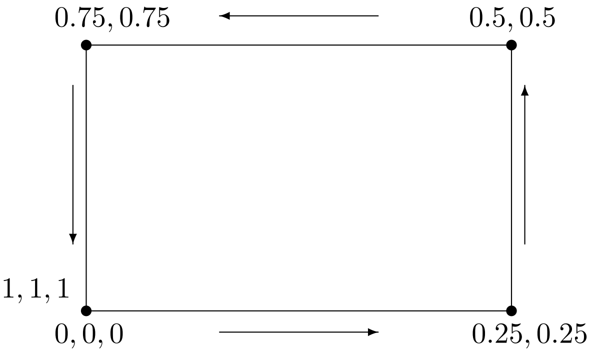
```
posunX = (P[1].x - P[0].x) / (pocetPoledniku-1);
posunY = (P[2].y - P[0].y) / (pocetPoledniku-1);
```

Výpočet řídicích bodů



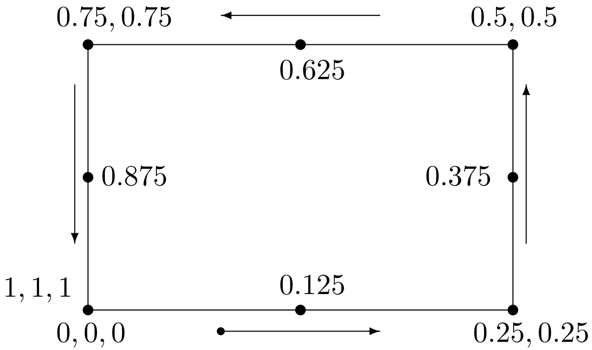
Obrázek: Výpočet řídicích bodů pro tři poledníky

Určení uzlových vektorů



Obrázek: Základní uzlový vektor pro hranol

Určení uzlových vektorů



Obrázek: Generování uzlového vektoru pro tři poledníky

Určení uzlových vektorů

Obecně dostáváme řádkový uzlový vektor:

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{\texttt{degree1+1}} \overbrace{\ldots\ldots}^{\texttt{pocetVnitrnichUzlu}} \underbrace{0.25, \ldots, 0.25,}_{\texttt{degree1}} \overbrace{\ldots\ldots}^{\texttt{pocetVnitrnichUzlu}}$$

$$\underbrace{0.5, \ldots, 0.5,}_{\texttt{degree1}} \overbrace{\ldots\ldots}^{\texttt{pocetVnitrnichUzlu}} \underbrace{0.75, \ldots, 0.75,}_{\texttt{degree1}} \overbrace{\ldots\ldots}^{\texttt{pocetVnitrnichUzlu}} \underbrace{1.0, \ldots, 1.0}_{\texttt{degree1}+1}$$

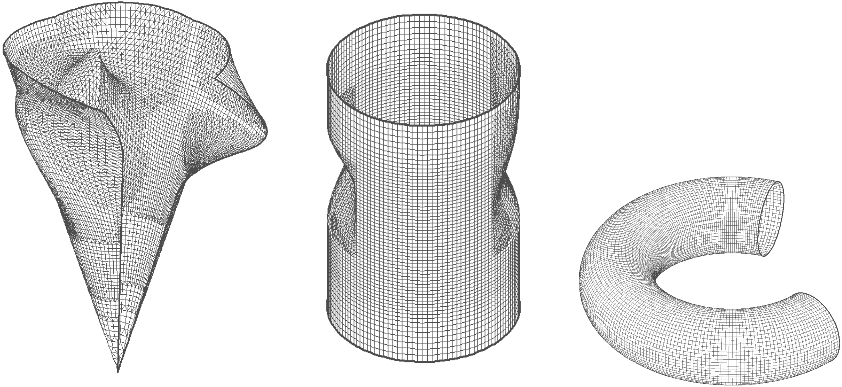
Sloupcový uzlový vektor:

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{\texttt{degree2+1}} \overbrace{\ldots\ldots}^{\texttt{sloupec-degree2}} \underbrace{1.0, \ldots, 1.0,}_{\texttt{degree2+1}}$$

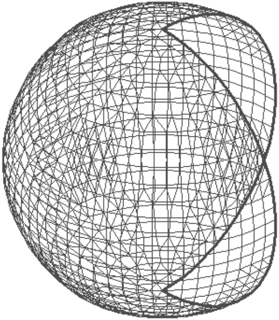
Kritická místa programu

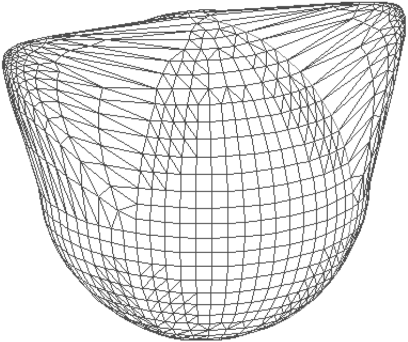
- Testování vstupu
  - správné rozsahy vstupních hodnot
  - omezení pro počet rovnoběžek a poledníků, úhlu rozevření tělesa
  - správné umístění bodů (jsou různé, nevzniknou degenerovaná tělesa)
- Geometrické výpočetní metody – průsečík přímky s rovinou, průsečík dvou přímek v prostoru

Základní tělesa a jejich modifikace

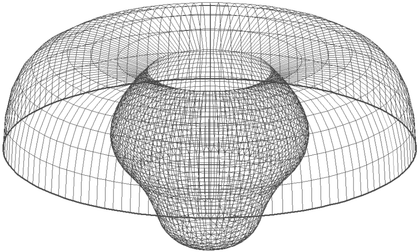


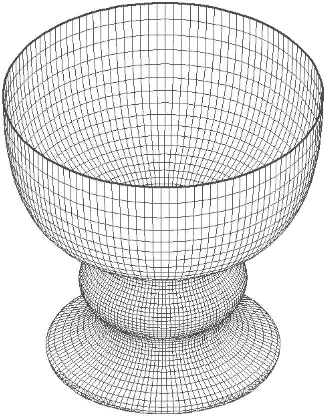
Základní tělesa a jejich modifikace



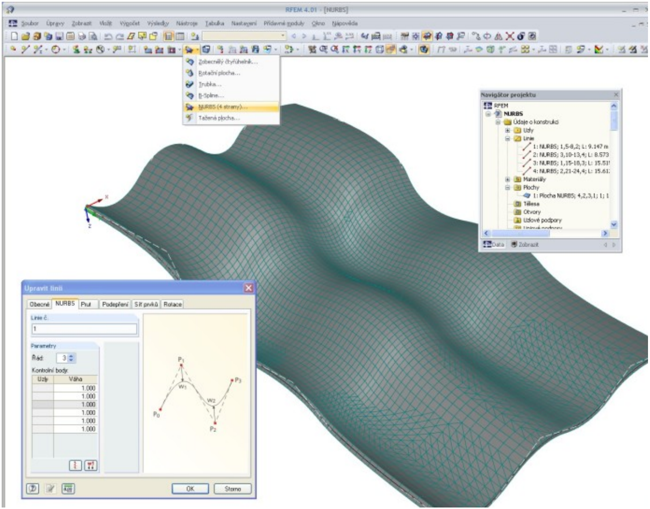


Základní tělesa a jejich modifikace





Software RFEM 4.0



Děkuji za pozornost