SIGA 2011 Splines and IsoGeometric Analysis
February 9, 2011, Prague

# Shape modification of interpolation NURBS curves

Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, ČVUT v Praze
Karlovo nám. 13, 121 35 Praha 2 - Nové Město

ivana.linkeova@fs.cvut.cz

Většina aplikací NURBS křivek obecného tvaru je založena na použití aproximačních křivek. Tyto metody jsou velmi úspěšné, pokud jsou zpracovávaná data zatížena určitou chybou a je žádoucí je vyhladit a zmíněnou chybu odfiltrovat. Pokud však pracujeme s přesnými daty, není účelné navrhovat aproximační křivku, která zadanými body (řídicími body) neprochází, ale křivku interpolační, která zadanými body (označované v tomto případě jako definiční body uspořádané do definičního polygonu) prochází. Je zřejmé, že řídicí body, které se vyskytují v analytické reprezentaci NURBS křivky jsou v případě interpolace neznámé. Je tedy třeba nejprve sestavit soustavu rovnic, jejímž řešením jsou souřadnice neznámých řídicích bodů, a teprve poté lze přistoupit k návrhu interpolační křivky.

Lze rozlišit dva základní přístupy k problému interpolace. V prvním případě vycházíme z podmínky, že počet neznámých řídicích bodů má být stejný jako je počet definičních bodů [1]. Tento způsob interpolace označujeme jako prostou interpolaci a výslednou interpolační křivku jako prostou interpolační křivku. Druhý přístup vychází z logického požadavku, aby výsledná interpolační křivka měla právě tolik segmentů, kolik je ramen řídicího polygonu, a aby uzly oddělující jednotlivé segmenty ležely přímo v definičních bodech [2]. Tento způsob interpolace označujeme jako uzlovou interpolaci a výslednou interpolační křivku jako uzlovou interpolační křivku. Počet řídicích bodů je v tomto případě větší než počet bodů definičních, proto je nutné při návrhu uzlové interpolační křivky stanovit další (zpravidla okrajové) podmínky.

Příspěvek se zabývá shrnutím přímých metod stanovení nejdůležitějších tvarovacích nástrojů interpolačních NURBS křivek. Kromě samotné polohy definičních bodů ovlivňují výsledný tvar prosté interpolační křivky stupeň, vektor parametrizace, uzlový vektor a váhy řídicích bodů. Tvar uzlové interpolační křivky je dán polohou definičních bodů, stupněm, vektorem parametrizace, váhami řídicích bodů a okrajovými podmínkami.

Stupeň prosté interpolační křivky může být teoreticky libovolný, ale obecně platí, že čím vyšší stupeň, tím výraznější nežádoucí překmity křivka obsahuje, především v okolí krajních bodů. Pro uzlové interpolační křivky se volí lichý stupeň (potom je třeba stanovit sudý počet okrajových podmínek). Pro většinu technických aplikací vyhovují kvadratické nebo kubické interpolační NURBS křivky.

Vektor parametrizace a uzlový vektor zásadním způsobem ovlivňují tvar výsledné interpolační křivky. Metody konstrukce vektoru parametrizace jsou stejné pro prostou i uzlovou interpolační křivku. V případě prosté interpolační křivky může být uzlový vektor nezávislý na vektoru parametrizace, ale v případě uzlové interpolační křivky je vektorem parametrizace již uzlový vektor určen jednoznačně (uzlový vektor je vybranou částí vektoru parametrizace).

Okrajové podmínky pro uzlovou interpolaci představují nejčastěji geometrické požadavky, které lze rozdělit do dvou skupin: podmínka uzavřenosti křivky a zadané vektory derivací interpolační křivky v jejích krajních bodech. Nejjednodušší je uvažovat nulové tečné vektory v krajních bodech interpolační křivky [2]. Návrh takových uzlových interpolačních křivek je velmi jednoduchý a jejich tvar je překvapivě vyhovující. Podobně se konstruují interpolační křivky označované jako přirozené spline křivky, kdy se uvažují nulové vektory druhých derivací v krajních bodech.

Mezi nejrozšířenější metody stanovení nenulových tečných vektorů v krajních bodech interpolační křivky patří Lagrangeova interpolace, kdy se tečné vektory určí jako vektory prvních derivací v počátečním, resp. v koncovém bodě Lagrangeovy interpolační křivky konstruované pro tři počáteční, resp. tři poslední body definičního polygonu. Délku takto získaných tečných vektorů lze dále modifikovat na základě geometrické konfigurace definičního polygonu [3]. V článku [4] je popsána geometrická metoda stanovení nenulových tečných vektorů v krajních bodech, založená na osově souměrné těžnici trojúhelníka určeného prvními, resp. posledními třemi body definičního polygonu. Těžnice je spuštěna z prvního, resp. posledního bodu definičního polygonu a osou souměrnosti je první, resp. poslední rameno definičního polygonu.

Tvar interpolační křivky může být ovlivněn i váhami řídicích bodů, které mají poněkud jiný význam než váhy řídicích bodů aproximační křivky. U aproximační křivky má vyšší váha řídicího bodu za následek přiblížení křivky k tomuto řídicímu bodu. V případě interpolační křivky, kdy je poloha řídicího bodu neznámá, je třeba efekt vah chápat opačně: zvýší-li se váha řídicího bodu interpolační křivky, přiblíží se řídicí bod více k definičnímu polygonu. To vede ve svém důsledku k plynulejšímu průběhu interpolační křivky a vhodně stanovené váhy omezí nežádoucí překmity a zvlnění výsledné křivky.

Návrh vah řídicích bodů interpolační křivky nemůže probíhat interaktivně. Neznámým řídicím bodům musíme předem přiřadit vhodné váhy, abychom mohli určit racionální bázové funkce a sestavit soustavu rovnic pro výpočet řídicích bodů. Jakmile bychom dodatečně změnili váhu, změní se i příslušná racionální bázová funkce, a tím pádem by část interpolační křivky, která odpovídá uzlovým roztečím, na kterých je změněná racionální bázová funkce nenulová, již neprocházela zadanými definičními body.

# Reference


[1] Piegl, L. - Tiller, W. *The NURBS Book (Monographs in Visual Communication).* Second Edition, Springer-Verlag, 1997.

[2] Linkeová, I. *NURBS křivky (NeUniformní Racionální B - Spline křivky)*, 1. vyd. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007, 208 s., ISBN 978-80-01-03893-2.

[3] Linkeová, I. Determination of Tangent Vectors in Construction of Ferguson Interpolation Curves and Surfaces. *Acta Polytechnica*, vol. 40 (2000), no. 5-6,

s. 27-32, ISSN 1210-2709.

[4] Linkeová, I. Interpolační NURBS křivky s okrajovými podmínkami, In: *G - Slovak Journal for Geometry and Graphics*, vol. 3 (2006), no. 6, pp. 7-20, ISSN 1336-524X.