

## ANALYTICKÝ ROZBOR VLIVU TVARU TOKOVÉ VLNY NA SMYKOVÉ NAPĚTÍ

### Influence of Flow Waveform on Wall Shear Stress Distribution

Hana Neřebská, Jan Matěcha

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, Ústav mechaniky tekutin a energetiky, Odbor mechaniky tekutin a termodynamiky, Praha

#### Úvod:

Cílem této práce je vyhodnotit vliv tvaru závislosti průtoku na čase na smykové napětí při pulzačním proudění newtonské tekutiny v trubici konstantního kruhového průřezu s tuhou stěnou.

#### Postup a metoda:

Obecnou periodickou závislost průtoku na čase  $Q(t)$  lze popsat Fourierovou řadou

$$Q(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) + \dots + a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t),$$

kde  $\omega_i = i\omega_1$

Protože platí princip superpozice, lze výslednou závislost smykového napětí na stěně (WSS) získat jako součet řešení pro jednotlivé složky.

Pro každou složku je proudění popsáno rovnicí [1]:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

kde rychlost  $u$  je proměnná závislá na poloměru  $r$  a čase  $t$ , tlak  $p$  je závislý na axiální souřadnici  $x$  a na čase  $t$ ,  $\rho$  je hustota a  $\mu$  dynamická viskozita. Vyřešením této rovnice získáme vztah pro oscilační složky WSS(t) [1]:

$$\tau_{ai}(t) = \Re \left( -\frac{k_{ai} \cdot R}{\Lambda_i} \cdot \left( \frac{J_1(\Lambda_i)}{J_0(\Lambda_i)} \right) \cdot e^{i(\omega_i t + \varphi_i)} \right) \quad \tau_{bi}(t) = \Im \left( -\frac{k_{bi} \cdot R}{\Lambda_i} \cdot \left( \frac{J_1(\Lambda_i)}{J_0(\Lambda_i)} \right) \cdot e^{i(\omega_i t + \varphi_i)} \right).$$

Konstanty  $k_{ai}$  a  $k_{bi}$  jsou vypočteny dle vztahů:

$$k_{ai} = \frac{a_i}{\left| \frac{i\pi R^4}{\mu \Omega_i^2} \left( 1 - \frac{2J_1(\Lambda_i)}{\Lambda_i J_0(\Lambda_i)} \right) \right|} \quad \text{a} \quad k_{bi} = \frac{b_i}{\left| \frac{i\pi R^4}{\mu \Omega_i^2} \left( 1 - \frac{2J_1(\Lambda_i)}{\Lambda_i J_0(\Lambda_i)} \right) \right|},$$

kde  $a_i$  a  $b_i$  jsou amplitudy průtoku příslušných členů Fourierovy řady,  $R$  je poloměr trubice a  $J_0$  resp.  $J_1$  je Besselova funkce nultého, resp. prvního, řádu. Komplexní frekvenční parametr  $\Lambda_i$  a frekvenční parametr  $\Omega_i$  jsou vypočteny dle vztahů:

$$\Lambda_i = \left( \frac{i-1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \Omega_i \quad \Omega_i = \sqrt{\frac{\rho \cdot \omega_i}{\mu}} R,$$

kde  $\omega_i$  je úhlová rychlost a  $\varphi_i$  je fázový posun mezi tlakem a průtokem pro jednotlivé členy Fourierovy řady a  $\rho$  je hustota kapaliny.

Celkové smykové napětí je vypočteno:

$$\tau_c = \tau_0 + \sum_1^n \tau_{ai}(t) + \sum_1^n \tau_{bi}(t),$$

kde  $\tau_0$  je smykové napětí od stacionární složky průtoku

$$\tau_0 = \frac{-4\mu a_0}{\pi R^3}.$$

#### Výsledky:

Pro tento článek byly použity tři odlišné křivky závislosti průtoku na čase [2] [3] (Obr. 1). Každá z průtokových charakteristik má frekvenci  $f$ . Dle výše uvedeného postupu byly z těchto křivek vypočítány průběhy smykových napětí na stěně (Obr. 1).

Z tohoto průběhu byly dále vyhodnoceny maximální, minimální a střední hodnoty smykového napětí na stěně a jeho časový gradient.

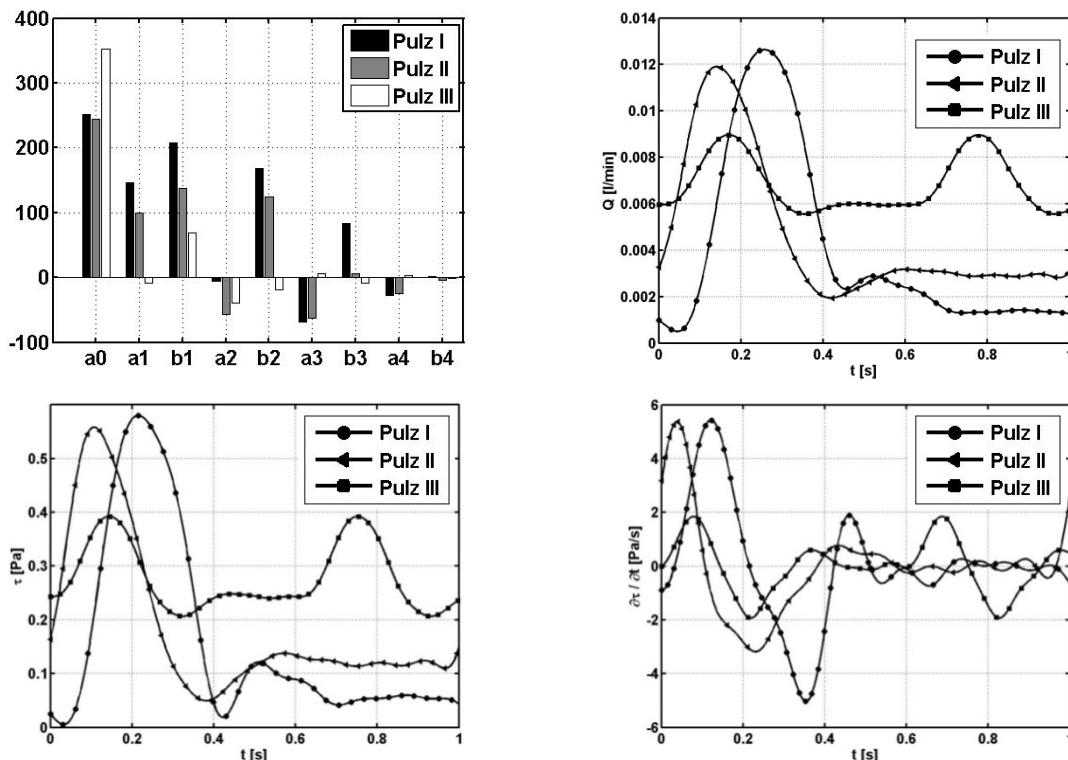
	$Q \cdot 10^{-3}$ [l/min]			$\tau$ [Pa]			$d\tau/dt$ [Pa/s]		
	Max	Min	Mean	Max	Min	Mean	Max	Min	Mean
Pulz I	12,6	0,503	3,95	0,58	0,0054	0,161	5,43	-5,02	$-9 \cdot 10^{-4}$
Pulz II	11,9	1,94	4,62	0,558	0,0495	0,188	5,374	-3,185	$3,1 \cdot 10^{-3}$
Pulz III	8,93	5,56	6,66	0,392	0,207	0,271	1,84	-1,93	$-5 \cdot 10^{-6}$

### Poděkování:

Tento výzkum byl podporován výzkumným záměrem MSM 6840770035 Rozvoj ekologicky šetrné decentralizované energetiky.

### Literatura:

- [1] Zamir, M.: The Physics of Pulsatile Flow. Springer-Verlag, New York, 2000. PP.220, ISBN 0-387-98925-0.
- [2] Lei M., Archie J.P., Kleinstreuer C. "Computational design of a bypass graft that minimizes wall shear stress gradients in the region of the distal anastomosis. Journal of Vascular Surgery, April 1997. PP.637-646.
- [3] Cave F.D., Walker A., Naylor G.P., Charlesworth D.: The hydraulic impedance of the lower limb: its relevance to the success of bypass operation for occlusion of the superficial femoral artery. Journal of Surgery, Vol 63(1976), PP. 408-412.



Obr. 1: Vlevo nahoře: Znárodnění prvních devíti koeficientů Fourierovy řady pro porovnané pulzy. Vpravo nahoře: Závislost průtoku na čase. Vlevo dole: Závislost smykového napětí na čase. Vpravo dole: Průběh gradientu smykového napětí na stěně.