

Disperze a solitonové šíření v optických vláknech

<http://www.ufe.cz/~ctyroky/fjfi/ved/disp&soliton.pdf>

Disperze optických vláken

Reálný signál: $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad U(-\omega) = U^*(\omega)$

Komplexní signál:
část obsahující pouze kladné frekvence $u_+(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$

Zřejmě platí $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(-\omega) \exp(i\omega t) d\omega = u_+^*(t)$

a tedy $u(t) = \frac{1}{2} [u_+(t) + u_+^*(t)] = \operatorname{Re} \{u_+(t)\}.$

Úzkopásmový signál:

signál, jehož spektrum je soustředěno do relativně malé oblasti kolem střední frekvence:

$$U(\omega) \approx U_+(\omega - \omega_0), \quad U_+ \neq 0 \text{ pro } |\omega - \omega_0| \ll \omega_0.$$

Pak
$$u_+(t) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U_+(\omega - \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_0^{\infty} U_+(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$
$$\doteq \frac{1}{\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} U_+(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = u_1(t) e^{-i\omega_0 t}$$

Komplexní signál úzkopásmového procesu je možno popsat **komplexní „obálkou“** $u_1(t)$ vynásobenou komplexní harmonickou funkcí $\exp(-i\omega_0 t)$:

$$u(t) = \operatorname{Re} \{u_1(t) \exp^{-i\omega_0 t}\}$$

Disperze optických vláken - 2

Komplexní *optický* signál na vstupu optického vlákna: $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \approx u_1(t) \mathbf{E}(\mathbf{r})$

(vzhledem k úzkopásmovosti zanedbáváme závislost rozložení pole vidu na vlnové délce).

Modulované vstupní záření se naváže do všech vedených vidů s komplexními amplitudami

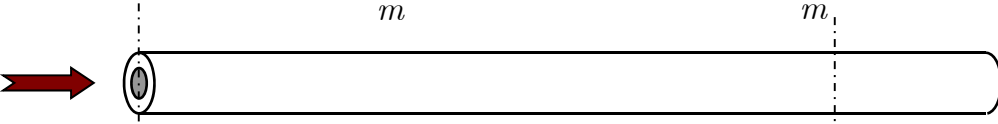
$$c_m = \iint_S \mathbf{E} \times \mathbf{h}_m \cdot d\mathbf{S} / \iint_S \mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_m \cdot d\mathbf{S}$$

Na začátku vlákna $z = 0$ vznikne tedy rozložení pole $u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp)$.

Každý vid se šíří s jinou konstantou šíření β_m .

Ve vzdálenosti z od začátku vlákna bude tedy rozložení pole

$$u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \exp[i(\beta_m z - \omega_0 t)].$$

$$u_1(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} \quad u_1(t) e^{-i\omega_0 t} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \quad u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \exp[i(\beta_m z - \omega_0 t)]$$


$z = 0$ z

Disperze optických vláken - 3

Označme spektrum *obálky* $U_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) e^{i\omega t} dt = 2U_+(\omega)$.

Spektrum signálu v místě z je pak zřejmě

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_{\perp}, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_{\perp}) e^{i\beta_m z} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_{\perp}) U_1(\omega - \omega_0) e^{i\beta_m(\omega)z}.$$

Konstanta šíření β_m rovněž závisí na frekvenci ω !

Časový průběh optického signálu v místě z je tedy možno napsat také ve tvaru

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_{\perp}, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\perp}, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_{\perp}) \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\omega - \omega_0) e^{i\beta_m(\omega)z} e^{-i\omega t} d\omega.$$

V úzkém spektrálním pásmu signálu, kde je funkce U_1 nenulová, můžeme aproximovat spektrální závislost konstanty šíření Taylorovým rozvojem:

$$\begin{aligned} \beta_m(\omega) \approx & \beta_m(\omega_0) + \left. \frac{d\beta_m}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta_m(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \\ & + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3\beta_m(\omega)}{d\omega^3} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

Disperze optických vláken - 4

Ponechme v rozvoji nejprve pouze první člen: $\beta_m(\omega) \approx \beta_m(\omega_0) + \beta'_m(\omega_0)(\omega - \omega_0)$
a dosadíme do výrazu pro pole v místě z :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\omega - \omega_0) e^{i[\beta_m(\omega_0) + \beta'_m(\omega - \omega_0)]z} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\beta_m(\omega_0)z - i\omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\omega - \omega_0) e^{i[\beta'_m(\omega - \omega_0)]z} e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega \\ &= \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\beta_m(\omega_0)z - i\omega_0 t)} u_1(t - \beta'_m z), \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}_\perp, z, t) &\approx \sum_m c_m \mathbf{h}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\beta_m(\omega_0)z - i\omega_0 t)} u_1(t - \beta'_m z), \\ P(z, t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} \times \mathcal{H}^* \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_m |c_m|^2 |u_1(t - \beta'_m z)|^2 = \sum_m P_m(t - \beta'_m z)\end{aligned}$$

Celkový přenesený výkon je tedy dán součtem výkonů přenesených jednotlivými vidy, z nichž každý má původní časovou závislost $|u_1(t)|^2$ zpožděnou v čase o **grupové (skupinové) zpoždění**

$$\tau_{g,m} = \beta'_m(\omega_0)z = z \left(d\beta_m / d\omega \right)_{\omega=\omega_0} = z / v_{g,m}.$$

Poměr
$$v_{g,m} = \frac{z}{\tau_{g,m}} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = \left(\frac{d\beta_m}{d\omega} \right)^{-1}$$

udává **grupovou rychlost šíření** m -tého vedeného vidu.

Disperze mnohovidových optických vláken

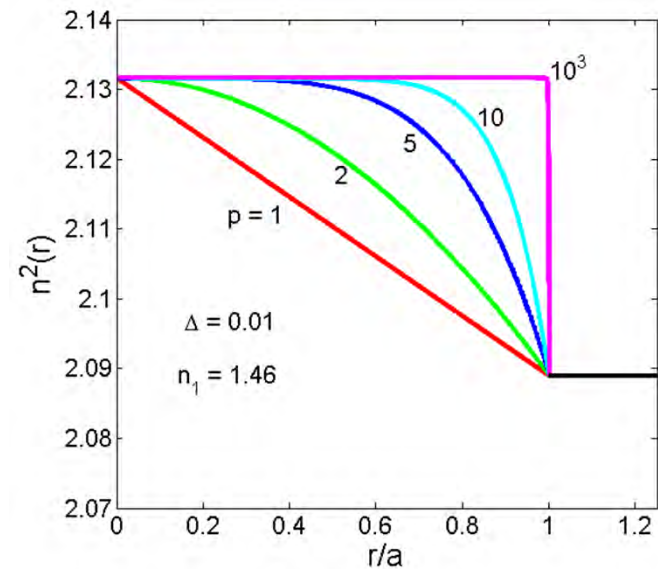
Pro určení disperze mnohovidových vláken potřebujeme znát závislost konstant šíření vidů na vidovém indexu a na frekvenci optického záření.

Tuto závislost najdeme *přibližně* v aproximaci paprskové optiky, využitím *fázového prostoru*.

Předpokládejme, že profil indexu lomu je dán obecnou parabolou p -tého stupně,

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a} \right)^p \right], & r \leq a, \quad 0 < p < \infty, \\ n_2^2, & r > a. \end{cases}$$

Zřejmě $n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta)$, $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$
 pro $n_1 - n_2 \ll n_1, n_2$



Přímý výpočet závislosti $\beta_m(\omega)$ resp. $N_m(\omega) = \beta_m(\omega)/k_0$ je obtížný, určíme ji proto nepřímou.

Nejprve určíme počet vidů $q(N)$, jejichž efektivní indexy lomu jsou větší než zvolená hodnota N .

Disperze mnohovidových optických vláken

Složky vlnových vektorů všech vidů s ef. indexem větším než N zřejmě splňují podmínku

$$\rho^2 + \sigma^2 \leq n^2(r) - N^2; \quad \text{pro větší } N \text{ se totiž poloměr kruhu } (\rho, \sigma) \text{ zmenšuje.}$$

Objem fázového prostoru všech vidů s ef. indexem lomu větším než N je tak zřejmě

$$\Phi(N) = \pi k_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^R [n^2(r) - N^2] r dr d\varphi = 2\pi^2 k_0^2 \int_0^R [n^2(r) - N^2] r dr, \quad \text{kde } n(R) = N$$

(paprsky se šíří pouze v oblasti $r \leq R$).

Poněvadž na 1 vid připadá fázový objem $4\pi^2$, počet vidů s ef. indexem větším než N je

$$q(N) = \frac{\Phi(N)}{4\pi^2} = \frac{k_0^2}{2} \int_0^R [n^2(r) - N^2] r dr.$$

$$\text{Rovnice pro } R \text{ je zřejmě } n^2(R) = n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(R/a \right)^p \right] = N^2;$$

$$\text{jejím řešením je } \frac{R}{a} = \xi_a = \left(\frac{n_1^2 - N^2}{2n_1^2 \Delta} \right)^{1/p}.$$

Disperze mnohovidových optických vláken

Pak $q(N) = \frac{k_0^2}{2} a^2 \int_0^{\xi_R} \left\{ n_1^2 \left[1 - 2\Delta \xi^p \right] - N^2 \right\} \xi d\xi$, kde $\xi = \frac{r}{a}$.

Integrál řešíme substitucí $2\xi d\xi = dt$, $\xi^2 = t$. Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} q(N) &= \frac{k_0^2 a^2}{4} \int_0^{\xi_R^2} \left(n_1^2 - N^2 - 2n_1^2 \Delta t^{p/2} \right) dt = \\ &= \frac{k_0^2 a^2}{4} \left[(n_1^2 - N^2) \xi_R^2 - 2n_1^2 \Delta \frac{1}{\frac{p}{2} + 1} \left(\xi_R^2 \right)^{\frac{p}{2} + 1} \right] = \\ &= \frac{k_0^2 a^2}{4} \left[(n_1^2 - N^2) \left(\frac{n_1^2 - N^2}{2n_1^2 \Delta} \right)^{\frac{2}{p}} - 2n_1^2 \Delta \frac{2}{p + 2} \left(\frac{n_1^2 - N^2}{2n_1^2 \Delta} \right)^{\frac{p+2}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Po dalších formálních úpravách dostaneme

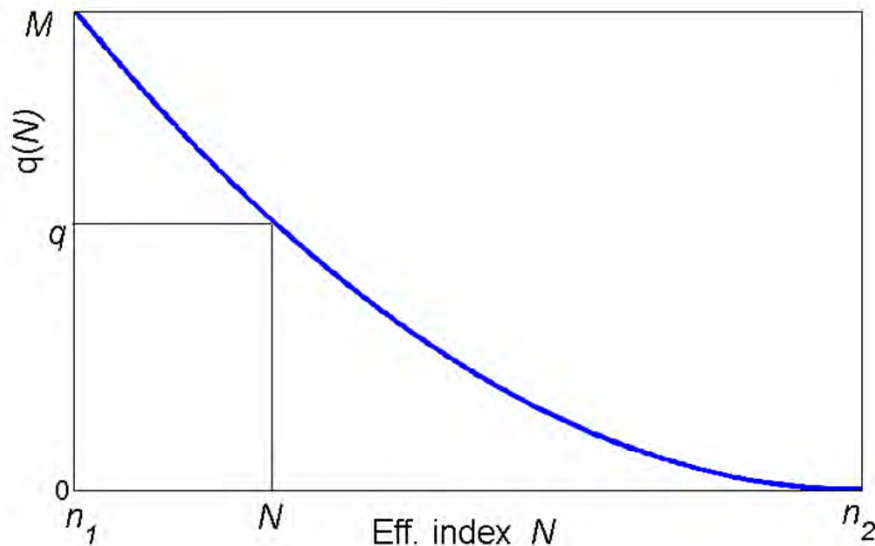
$$q(N) = \frac{k_0^2 a^2}{4} n_1^2 \Delta \frac{p}{p + 2} \left(\frac{n_1^2 - N^2}{2n_1^2 \Delta} \right)^{\frac{p+2}{p}}$$

Disperze mnohovidových optických vláken

Nyní do výrazu zavedeme celkový počet vidů M přenášený vláknem; zřejmě platí $M = q(n_2)$.

$$M = \frac{k_0^2 a^2}{2} n_1^2 \Delta \frac{p}{p+2} \underbrace{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2 \Delta} \right)^{\frac{p+2}{p}}}_1 = \frac{k_0^2 a^2}{2} n_1^2 \underbrace{\Delta}_{\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}} \frac{p}{p+2} = \frac{k_0^2 a^2}{4} (NA)^2 \frac{p}{p+2} = \frac{V^2}{4} \frac{p}{p+2}.$$

Platí $\frac{q(N)}{M} = \left(\frac{n_1^2 - N^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{\frac{p+2}{p}},$ a tedy $q(N) = M \left(\frac{n_1^2 - N^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{\frac{2+p}{p}} = M \left(\frac{1 - N^2/n_1^2}{2\Delta} \right)^{\frac{2+p}{p}}.$



To ale znamená, že ke každému (celému) q můžeme najít efektivní index lomu N_q jako funkci inverzní k funkci $q(N)$:

$$N_q = f^{-1}(q), \quad \text{kde} \quad q(N) = f(N).$$

Disperze mnohovidových optických vláken

Platí tedy $N_q^2 = n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(q/M \right)^{\frac{p+2}{p}} \right]$.

My ale potřebujeme $\beta_q = k_0 N_q$.

Poněvadž Δ je malé číslo, použijeme pro výpočet odmocniny Taylorovu větu:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \quad \text{Odtud dostaneme}$$

$$\beta_q = k_0 n_1 \left[1 - 2\Delta \left(q/M \right)^{\frac{p}{p+2}} \right]^{\frac{1}{2}} \approx k_0 n_1 \left[1 - \Delta \left(q/M \right)^{\frac{p}{p+2}} - \frac{1}{2} \Delta^2 \left(q/M \right)^{\frac{2p}{p+2}} \right] \dots$$

Grupová rychlost šíření: $\frac{1}{v_{g,q}} = \frac{d\beta_q}{d\omega}$

Musíme vzít v úvahu závislost k_0 i n_1 na frekvenci, naopak můžeme zanedbat disperzi Δ .

Položme $\frac{1}{v_{g1}} \approx \frac{d}{d\omega}(k_0 n_1) = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega}(\omega n_1) = \frac{n_1}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn_1}{d\omega} = \frac{n_{1g}}{c},$

$$n_{1g} = n_1 + \omega \frac{dn_1}{d\omega} \dots \quad \text{grupový index lomu}$$

Disperze mnohovidových optických vláken

Zachováme-li jen *lineární člen* v disperzi, dostaneme

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(k_0 n_1 \right) \left[1 - \Delta \left(q/M \right)^{\frac{p}{p+2}} \right] - k_0 n_1 \Delta \frac{p}{p+2} \left(q/M \right)^{\frac{p}{p+2}-1} \frac{q}{M} \left(-\frac{1}{M} \frac{dM}{d\omega} \right).$$

Po provedení naznačených derivací a formálních úpravách dostaneme

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n_{1g}}{c} \left[1 + \frac{p-2}{p+1} \Delta \left(q/M \right)^{\frac{p}{p+2}} \right].$$

Pro vlákno se skokovým profilem (SI) je $p \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{v_g} \approx \frac{1}{v_{g1}} \left[1 + \Delta \frac{q}{M} \right].$$

Pro parabolické vlákno ($p = 2$) je disperze v 1. řádu Taylorova rozvoje *nulová*; pro výpočet disperze musíme proto vzít v úvahu i kvadratický člen.

Po delších formálních úpravách dostaneme

$$\frac{1}{v_g} \approx \frac{1}{v_{g1}} \left[1 + \frac{\Delta^2}{2} \frac{q}{M} \right]$$

Vlákno s parabolickým profilem má mnohem menší rozptyl grupových rychlostí vidů než vlákno se skokovým profilem.

Disperze optických vláken - 5

Elektrický signál na výstupu z **kvadratického detektoru** (fotodioda, fotonásobič ap.) je úměrný okamžitému výkonu časového signálu.

Vezmeme-li v úvahu ortogonální vlastnosti polí vidů, dostaneme pro výstupní signál z detektoru (proud, resp. napětí)

$$s(t) \sim \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) \times \mathcal{H}^*(\mathbf{r}_\perp, z, t) \cdot d\mathbf{S} \right\} \approx \sum_m |c_m|^2 |u_1(t - \beta'_m z)|^2.$$

Označíme-li

$$\tau_{g,\min} = \frac{z}{v_{g,\max}}, \quad \tau_{g,\max} = \frac{z}{v_{g,\min}}$$

nejmenší a největší grupové (skupinové) zpoždění, k němuž dojde při šíření vláknem délky L , pak při dostatečně velké délce L zřejmě dojde k *rozšíření signálu* na pološířku

$$\sigma_\tau \approx \tau_{g,\max} - \tau_{g,\min} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_{g,\min}} - \frac{1}{v_{g,\max}} \right) L.$$

Toto rozšíření způsobuje tzv. **mezividová (vidová, modální) disperze**.

Fyzikální podstata mezividové disperze tedy spočívá v tom, že **jednotlivé vidy přenášejí signál různou (grupovou) rychlostí**.

Disperze optických vláken - 6

Rozšíření impulzu jako rozdíl mezi zpožděním nejpomalejšího a nejrychlejšího vidu:

$$\sigma_\tau \approx \frac{1}{2}L \left(\frac{1}{v_{g,\min}} - \frac{1}{v_{g,\max}} \right); \quad \frac{1}{v_{gm}} \approx \frac{1}{v_{g0}} \left(1 + \Delta \frac{m}{M} \right) \quad \text{pro SI vlákna,}$$
$$\frac{1}{v_{gm}} \approx \frac{1}{v_{g0}} \left(1 + \frac{1}{2} \Delta^2 \frac{m}{M} \right) \quad \text{pro parabolická (GI) vlákna.}$$

Přenosová šířka pásma:

$$B \approx \frac{1}{\sigma_\tau} = \frac{2v_{g0}}{L\Delta} \approx \frac{2c}{N_0 L \Delta} \quad \text{pro SI vlákna,} \quad \Delta \approx \frac{n_c - n_{cl}}{n_{cl}},$$
$$B \approx \frac{1}{\sigma_\tau} = \frac{4v_{g0}}{L\Delta^2} \approx \frac{4c}{N_0 L \Delta^2} \quad \text{pro GI vlákna,} \quad N_0 \approx n(0)$$

Součin délky a šířky pásma:

$$B \cdot L \approx \frac{2c}{N_0 \Delta} \approx 40 \text{ MHz} \cdot \text{km} \quad \text{pro SI vlákna,} \quad \Delta \approx \frac{n_c - n_{cl}}{n_{cl}} \approx 0.01,$$
$$B \cdot L \approx \frac{4c}{N_0 \Delta^2} \approx 8 \text{ GHz} \cdot \text{km} \quad \text{pro GI vlákna.}$$

Disperze jednovídných vláken

(Mezi)vidová disperze je odstraněna, uplatní se **disperze 2. řádu**.

Uvažujme pro jednoduchost gaussovský signál, $u(t, 0) = U_0 \exp\left(\frac{-t^2}{2\tau^2}\right)$

Šířka impulsu na začátku: $\Delta t(z = 0) \approx 2\tau$

Spektrální šířka na začátku:

$$U(\omega) = U_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} e^{i\omega t} dt = \sqrt{2\pi} U_0 e^{-\frac{\tau^2 \omega^2}{2}}$$

Spektrum v $z \neq 0$: $F(\omega, z) \approx \sqrt{2\pi} U_0 e^{-\frac{\tau^2}{2}(\omega - \omega_0)^2} e^{i\beta(\omega)z}$

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \frac{1}{v_g}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} D_\omega (\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad D_\omega = \left. \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Zpětná FT dává

$$u(z, t) \doteq U_0 \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - iD_\omega z}} e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2(\tau^2 - iD_\omega z)}} = \frac{U_0 e^{\frac{i}{2} \arctan \frac{D_\omega z}{\tau^2}}}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{D_\omega z}{\tau^2}\right)^2}} e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}} e^{\frac{-iD_\omega z(t-z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}}$$

To je také gaussovský signál,

$$u(z, t) = \frac{U_0 e^{\frac{i}{2} \arctan \frac{D_w z}{\tau^2}}}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{D_w z}{\tau^2} \right)^2}} e^{-\frac{(t - z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_w z/\tau)^2]}} e^{\frac{-i D_w z (t - z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_w z/\tau)^2]}}$$

rozšířený z $\Delta t(0) = 2\tau$ na $\Delta t(z) = 2\sqrt{\tau^2 + (D_w z/\tau)^2} \approx \frac{4|D_w|z}{\Delta t(0)} \doteq |D_w|z\Delta\omega$.

Z praktických důvodů zavedeme označení,

$$\Delta t_z \approx |D_w|z\Delta\omega = |D_\lambda|z\Delta\lambda, \quad D_\lambda = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} D_w, \quad \left(\frac{d}{d\omega} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d}{d\lambda} \right)$$

Odvození dává

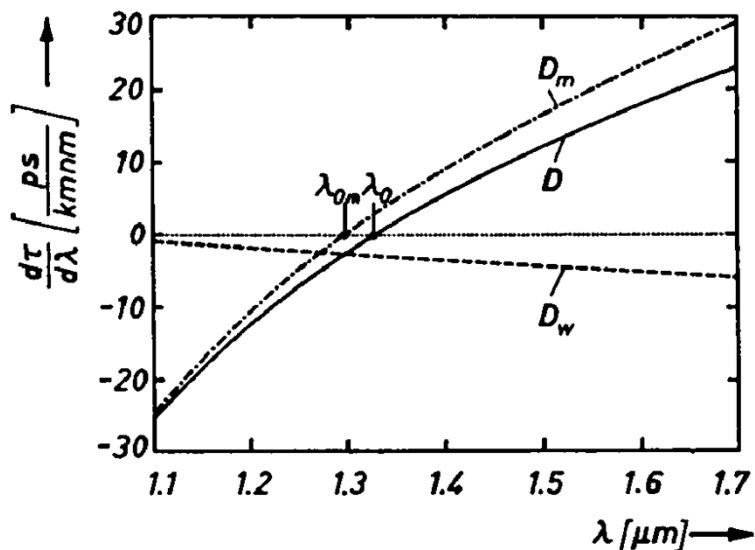
$$D_\lambda = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 N}{d\lambda^2} = \frac{1}{c} \frac{dN_g}{d\lambda} \text{ [ps/(nm} \cdot \text{km)]} \quad \left(N_g = N - \lambda \frac{dN}{d\lambda} \right)$$

“Okamžitá frekvence”:

$$\omega(t) \approx \omega_0 - \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \frac{D_w z}{2[\tau^2 + (D_w z/\tau)^2]} (t - z/v_g)$$

Po šíření na určitou vzdálenost vykazuje impuls lineární frekvenční modulaci, jejíž znaménko závisí na znaménku disperzního koeficientu.

Disperzní koeficienty jednovídrových vláken

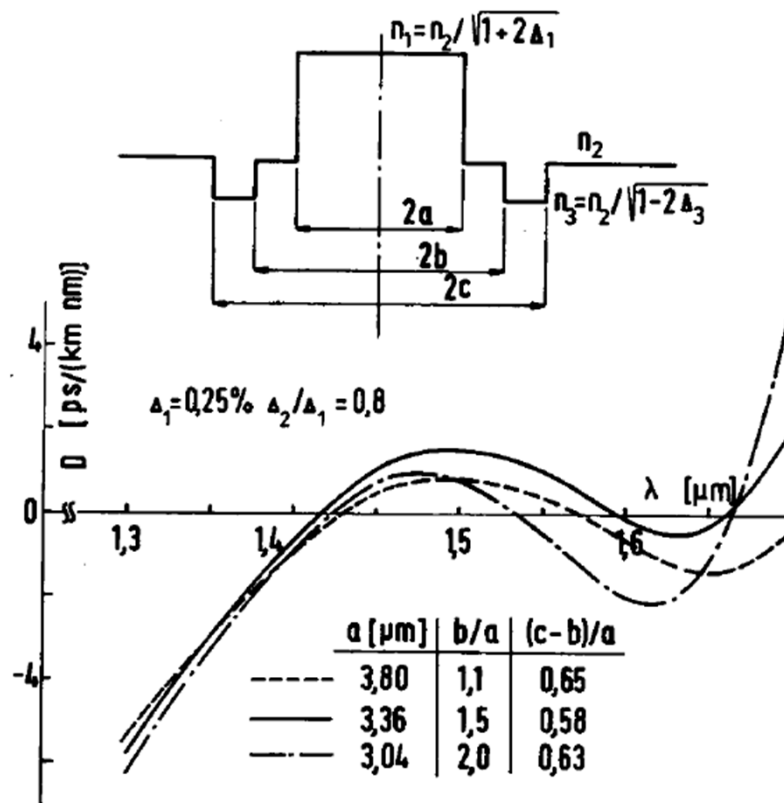
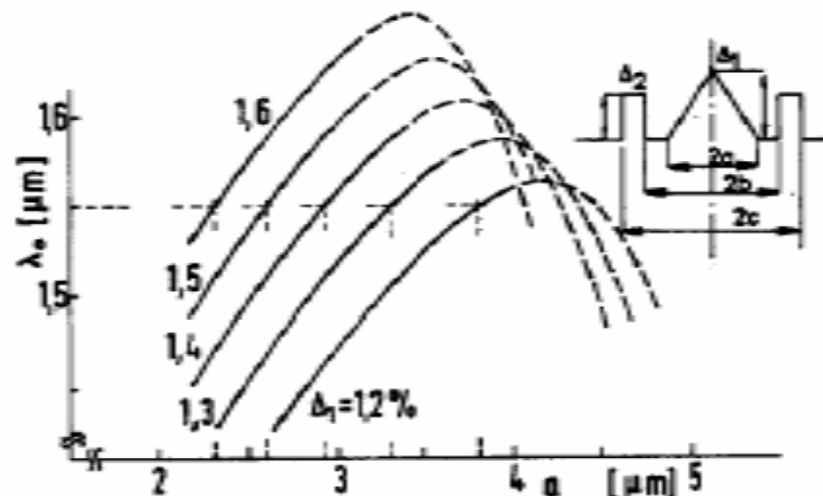


Disperzní koeficient standardního vlákna

$$D_{\lambda} \approx D_{\text{material}} + D_{\text{waveguide}}$$

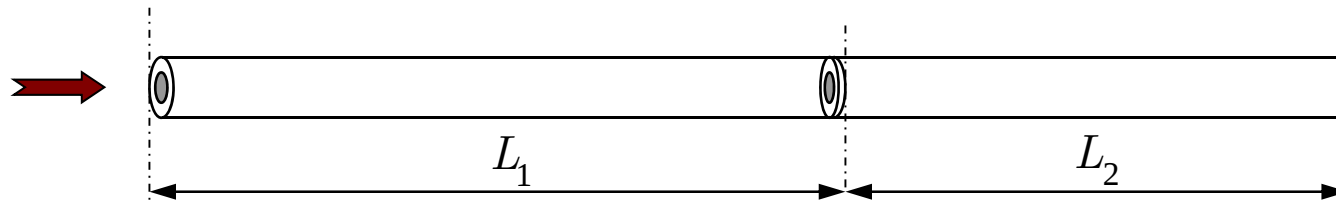
Vlákna s plochou disperzní křivkou (DFF)

Vlákna s „posunutou disperzí“ (DSF)



„Řízení disperze“ v optické přenosové trase

Malé rozšíření impulsu, tj. vysoká přenosová rychlost, požaduje co nejmenší $|D_\lambda|$



$$\Delta t_{tot} \approx |D_{\lambda,1}L_1 + D_{\lambda,2}L_2 + \dots| \Delta \lambda;$$

Celkové rozšíření impulsu na konci trasy je dáno absolutní hodnotou *algebraického součtu* příspěvků různých úseků.

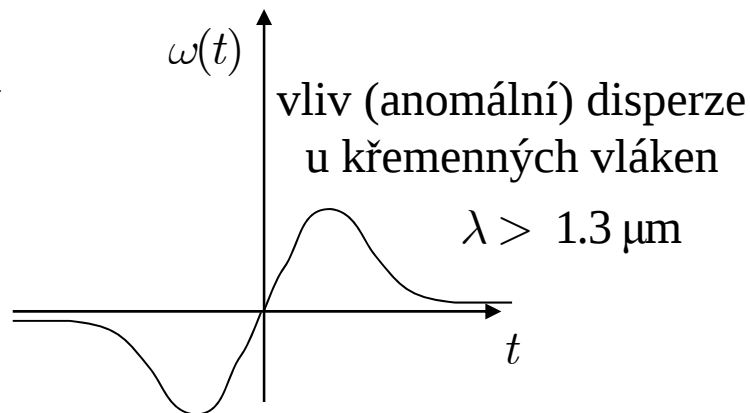
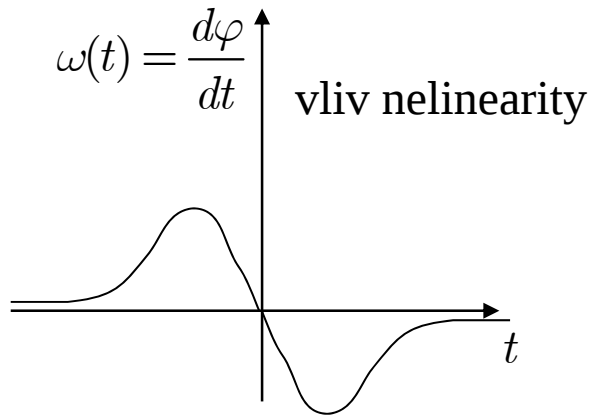
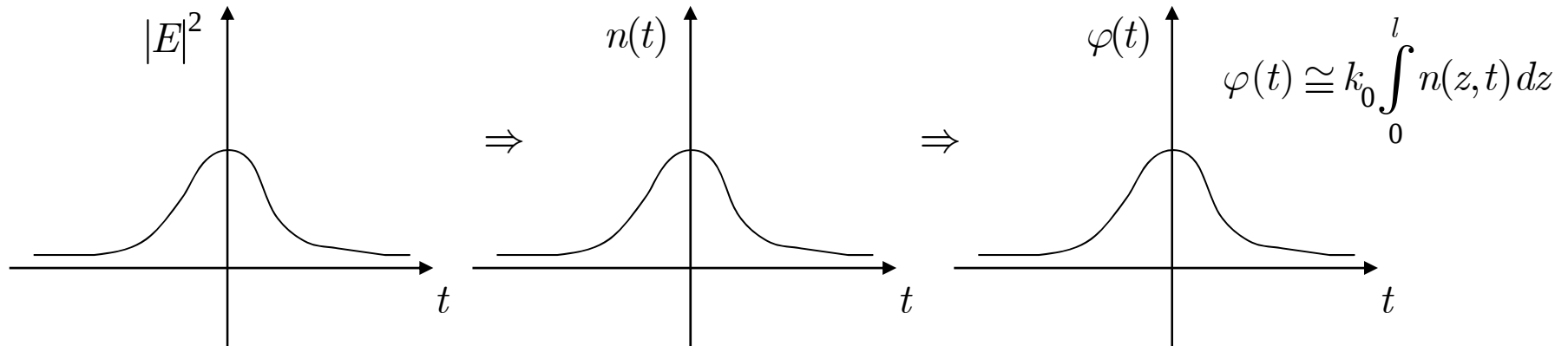
Kombinací úseků vláken s různými znaménky disperzních koeficientů je možno **disperzi vykompenzovat**:

$$D_{\lambda,1}L_1 + D_{\lambda,2}L_2 + \dots = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta t_{tot} \approx 0$$

To je princip velmi výhodný pro systémy s vlnovým multiplexováním, v nichž se vláknem přenáší více kanálů s různými nosnými vlnovými délkami současně.

Kompenzace disperze v optickém vlákně automodulací fáze – princip solitonového šíření

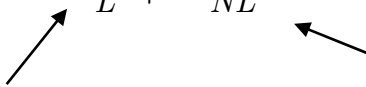
Kubická nelinearita: $n(|E|^2) \cong n + n_2 |E|^2$, $n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{2n} \approx 1.2 \times 10^{-22} \text{ m}^2 / \text{V}^2$ (SiO_2)



Kubická nelinearita kompenzuje vliv disperze – nedisperzní **solitonové šíření** optického impulsu podél vlákna

Základy skalární teorie solitonu v optickém vlákně

$$\Delta E = \mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}, \quad D = D_L + P_{NL}$$



disperzní závislost! nelineární polarizace

$$D_L(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \left[1 + \chi^{(1)}(\tau') \right] E(\mathbf{r}, t - \tau') d\tau'$$

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \chi^{(3)}(\tau', \tau'', \tau''') E(\mathbf{r}, t - \tau') E(\mathbf{r}, t - \tau'') E(\mathbf{r}, t - \tau''') d\tau' d\tau'' d\tau'''$$

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + u^*(z, t) e^{-i(\beta_0 z - \omega_0 t)} \right] e(x, y)$$

rozložení pole vidu

Nelineární polarizaci můžeme v případě okamžité lokální odezvy zapsat ve tvaru

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \chi^{(3)} |u(z, t)|^2 \left[u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + u^*(z, t) e^{-i(\beta_0 z - \omega_0 t)} \right] e^3(x, y).$$

U lineárního členu musíme vzít v úvahu disperzi.

Spektrum signálu je

$$U(z, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z, t) e^{i\Omega t} dt$$

„pomalu“ proměnná obálka $\Rightarrow$ úzké spektrum

Spektrum optického záření je pak

$$E(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega t)} e^{i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} u^*(z, t) e^{-i(\beta_0 z - \omega t)} e^{i\omega t} dt \right] e(x, y)$$

$$= \frac{1}{2} [U(\omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} + U^*(\omega - \omega_0) e^{-i\beta_0 z}] e(x, y).$$

Pro lineární člen indukce platí

$$D_L(\mathbf{r}, \omega) \approx \varepsilon_0 n^2(\omega) E(z, \omega) e(x, y).$$

Z Fourierovy transformace plyne

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}_L(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\omega^2 D_L(\mathbf{r}, \omega) = -\varepsilon_0 n^2(\omega) E(z, \omega) e(x, y).$$

Vlnová rovnice pro $E(z, \omega)$ pak dává po úpravách

$$\Delta E(\mathbf{r}, \omega) \approx \frac{1}{2} [U(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} + U(z, \omega + \omega_0) e^{-i\beta_0 z}] \Delta_{\perp} e(x, y)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(2i\beta_0 \frac{\partial U}{\partial z} - \beta_0^2 U \right) e^{i\beta_0 z} + \left(-2i\beta_0 \frac{\partial U}{\partial z} - \beta_0^2 U \right) e^{-i\beta_0 z} \right] e(x, y)$$

$$\approx -\mu_0 \varepsilon_0 n^2(\omega) \omega^2 \frac{1}{2} [U(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} + U^*(z, \omega - \omega_0) e^{-i\beta_0 z}] e(x, y) - \mu_0 \omega^2 \mathbf{P}_{NL}$$

Pro rozložení pole vidu $e(x, y)$ platí v přiblížení slabého vedení rovnice

$$\Delta_{\perp} e(x, y) - k_0^2 n^2(x, y) e(x, y) = \beta^2 e(x, y).$$

Násobme ji $e(x, y)$ a integrujme po průřezu vlákna s využitím normování

$$\iint_S e^2(x, y) dx dy = 1. \quad \text{Dostaneme}$$

$$\frac{1}{2} \left[(\beta^2 - \beta_0^2) U e^{i\beta_0 z} + 2i\beta_0 \frac{\partial U}{\partial z} e^{i\beta_0 z} + \dots \right] = -\mu_0 \omega^2 \iint_S P_{NL}(z, \omega) e(x, y) dS.$$

Nyní zavedeme aproximaci

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \beta'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta''(\omega - \omega_0)^2 = \beta_0 + \frac{1}{v_g}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} D_{\omega}(\omega - \omega_0)^2$$

Z aproximace plyne

$$\beta^2 - \beta_0^2 \approx \beta_0 \beta''(\omega - \omega_0)^2 + 2\beta_0 \beta'(\omega - \omega_0), \quad \text{předchozí rovnice pak získá tvar}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\beta_0 \beta''(\omega - \omega_0)^2 + 2\beta_0 \beta'(\omega - \omega_0) \right] U e^{i\beta_0 z} + 2i\beta_0 \frac{\partial U}{\partial z} e^{i\beta_0 z} + \dots \\ & = -\mu_0 \omega^2 \iint_S P_{NL}(z, \omega) e(x, y) dS. \end{aligned}$$

Poněvadž $u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(z, \Omega) e^{-i\Omega t} dt,$

$$(\omega - \omega_0) U(z, \omega - \omega_0) \leftrightarrow i \frac{\partial u(z, t)}{\partial t},$$

$$(\omega - \omega_0)^2 U(z, \omega - \omega_0) \leftrightarrow -\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(z, t).$$

Aplikujme zpětnou FT na vlnovou rovnici s uvážením těchto vazeb. Získáme

$$\frac{1}{2} \left[\beta_0 \beta'' \left(-\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} \right) + 2i\beta_0 \beta' \frac{\partial u}{\partial t} + 2i\beta_0 \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \mu_0 \omega^2 \iint_S \mathbf{P}_{NL}^+ e(x, y) dS \quad \text{neboli}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(z, t) + \frac{i\beta''}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = i \frac{\mu_0 \omega^2}{\beta_0} \iint_S \mathbf{P}_{NL}^+ e(x, y) dS,$$

kde horní index + značí kladné frekvence $(e^{i\beta_0 z})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}^+ &= \frac{3}{2} \varepsilon_0 \chi^{(3)} |u(z, t)|^2 e^2(x, y) u(z, t) e(x, y) \\ &= \varepsilon_0 n n_2 |u(z, t)|^2 u(z, t) e^3(x, y) \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě

$$n_2 = \frac{3}{2n} \chi^{(3)}, \quad \gamma = k_0 n_2 \alpha, \quad \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^4(x, y) dx dy \approx 0.5,$$

získáme výslednou rovnici

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(z, t) + \frac{i}{2} D_\omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = i\gamma |u(z, t)|^2 u(z, t)$$

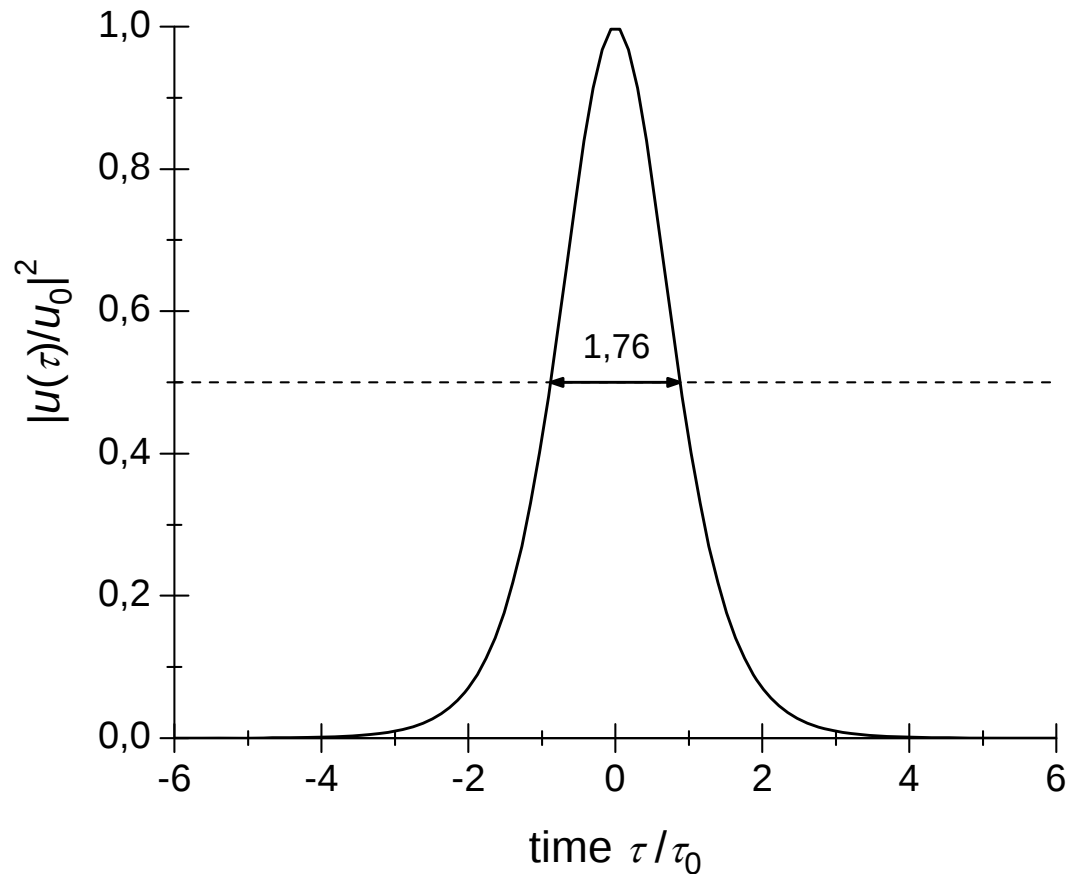
pro *obálku* optického impulsu šířícího se podél vlákna.

Pokud $D_\omega < 0$ a $\gamma > 0$, existuje ***solitonové řešení***.

Šíření solitonu v optickém vlákně

$$u(z, t) = u_0 \operatorname{sech} \left(\frac{t - z/v_g}{\tau_0} \right) e^{iz/4z_0}, \quad u_0 = \frac{\sqrt{|D_\omega|/\gamma}}{\tau_0}, \quad z_0 = \frac{1}{2} \frac{\tau_0^2}{|D_\omega|},$$

$$\operatorname{sech} \tau = \frac{1}{\cosh \tau}. \quad \text{„Pološířka“ solitonu: FWHM} = 1.76 \tau_0$$



Normované parametry solitonu:

$$\zeta = \frac{z}{2z_0} = \frac{|D_\omega|}{\tau_0^2} z, \quad z_0 = \frac{\tau_0^2}{2|D_\omega|}, \quad \tau = \frac{t - z/v_g}{\tau_0}$$
$$u_0 = \frac{\sqrt{|D_\omega|/\gamma}}{\tau_0} \quad \text{normovaná amplituda}$$

Rovnice získá tvar

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 \tau} = i|\psi|^2 \psi, \quad \text{resp.}$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 \tau} + |\psi|^2 \psi = 0 \quad \dots \text{ nelineární Schrodingerova rovnice.}$$

Platí

$$\tau_0 \cdot u_0 = \sqrt{|D_\omega|/\gamma} = \sqrt{\frac{|D_\omega|}{k_0 n_2 \alpha}}$$

Solitony vyšších řádů

$$\psi(\tau, \zeta) = \sum_{l=1}^N \eta_l \operatorname{sech}(\eta_l \tau) \exp\left(\frac{i}{2} \eta_l^2 \zeta\right), \quad \eta_l = 2(N - l) + 1.$$

Pro $\zeta = 0$ je $\psi = N \operatorname{sech} \tau$... N - násobná amplituda

Perioda N – solitonového šíření je $L = \pi z_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_0^2}{|D_\omega|}$.

Energie N - solitonu v pulsu je N^2 - násobkem energie „jednosolitonu“.