

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**FYZIKÁLNÍ A MATEMATICKÉ  
MODELY V MECHANICE  
DEFORMOVATELNÝCH TĚLES**

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1988

Za modelování považujeme v této publikaci idealizaci geometrických a fyzikálních vlastností konstrukčních částí nebo celých konstrukcí tak, aby jejich chování v provozu bylo možné matematicky popsat a nakonec i předvídat. Soustřeďujeme se především na modely vhodné k numerickému řešení úloh z mechaniky poddajných těles na číslicových počítačích.

V publikaci se uvádějí příklady řešení kmitajících soustav metodou konečných prvků, diferenční metodou i metodou strukturních elementů (s použitím modálního rozkladu). Probírají se vybrané metody numerické integrace vhodné i k řešení nelineárních úloh. Vhodnost některých modelů k řešení úloh z nestacionární dynamiky a rázových dějů se posuzuje z hlediska jejich disperzních vlastností. Na nich totiž závisí zkreslení šířících se deformačních a napěťových vln. Jiným kritériem vhodnosti modelů je dobrá podmíněnost soustavy rovnic, na níž závisí dosažitelná přesnost při počítání s neúplnými čísly. Uvádějí se příklady častých chyb při formulaci úloh ze statiky a z dynamiky.

Periodicky uspořádané konstrukce lze nahradit elasticky ekvivalentním kontinuem. Tím lze poměrně snadno získat obrez o celkové deformaci konstrukce, aniž se přihlíží k detailním deformacím jednotlivých komponent.

Reologické modely bývají velice užitečné při sestavování konstitutivních rovnic popisujících chování materiálu v určitém oboru stavových veličin. Ukážeme, jak lze tyto rovnice, odvozené původně pro jednoosou napjatost, zobecnit na případ prostorového namáhání.

Poslední kapitola se zabývá fenomenologickými teoriemi poškozování materiálu v mikrostruktuře. Uvádí se příklad popisu poškozování mikrostruktury kovových materiálů vytvářením kavit účinkem dlouhodobého namáhání za působení vysoké teploty.

Výklad je doplněn devatenácti řešenými ilustrativními příklady.

## O B S A H

PŘEDMLUVA	5
1. PŘÍKLADY VYTVÁŘENÍ MODELŮ PRO PRUŽNÁ TĚLESA	9
2. METODA STRUKTURNÍCH ELEMENTŮ	19
3. MODELOVÁNÍ DIREKTIVNÍCH A TLUMICÍCH SIL	35
4. APLIKACE KONEČNÝCH DIFERENCÍ	41
5. NUMERICKÁ INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC	51
6. NÁHRADNÍ MODEL Y PRO NUMERICKÉ ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE	58
7. POSUZOVÁNÍ MODELŮ Z HLEDISKA VLNOVÉ DISPERZE	66
8. O DVOU DUÁLNÍCH MODELECH PRO OHYBOVĚ KMITAJÍCÍ NOSNÍKY	68
9. GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ OHYB ELASTICKÝCH PRUTŮ	83
10. NÁHRADA PERIODICKY USPOŘÁDANÉ KONSTRUKCE KONTINUEM	90
11. PŘÍKLADY NESPRÁVNÝCH NEBO NEVHODNĚ UTVOŘENÝCH MODELŮ	100
12. KONSTITUTIVNÍ ROVNICE A REOLOGICKÉ MODEL Y	111
13. MODEL Y FYZIKÁLNÍCH PROCESŮ V MIKROSTRUKTUŘE	122

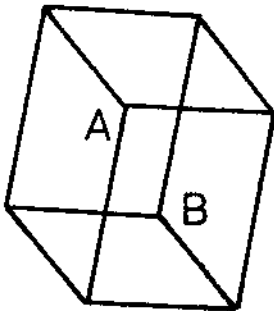
Často musí bloudit,  
kdo z podoby chce o povaze soudit.

William Shakespeare  
Perikles, II.2. Simonides

## PŘEDMLUVA

Jsme svědky bouřlivého vývoje číslicových počítačů, jejichž výkonnost závratně stoupá skoro tak, jak ceny počítačů klesají. Pro znalce exaktních věd, k nimž patří i mechanika, se tím otvírají zcela nové, dříve netušené obzory poznání a aplikačních možností. K poznávání reality je však nutné umět tuto realitu transformovat do abstraktní podoby vstupních dat a algoritmů a umět pak výstupní data interpretovat opět ve vztahu k realitě. Tomuto umění budeme říkat modelování.

Nebudeme se přít o definici tohoto slova, která ostatně nemůže být jednoznačná. Říká se, že Josef Václav Myslbek potřeboval pro práci na soše sv. Václava jako model živého koně. Byl tento kůň modelem pro sochu, nebo je socha koně modelem skutečného, živého koně? Portrét bývá malován podle živého modelu, tedy podle skutečnosti. Avšak např. Langweilův model Prahy je uměleckým, idealizovaným dílem, vytvořeným podle skutečnosti. Slovo "model" je zde tedy vztaženo nikoli k předloze, ale k uměleckému dílu. A tak otázka, zda je model idealizovaným obrazem skutečnosti, či zda je tomu právě naopak, zůstává nezodpověditelná, asi jako nelze jednoznačně z průmětu krychle na obr. 1 soudit, zda je bod A vpředu a bod B



Obr. 1

vzadu, nebo naopak. Aby však nedošlo k omylu, budeme za model skutečnosti považovat takovou její abstrakci, která zachovává její podstatné vlastnosti a zároveň umožňuje její matematické zpracování. Zpravidla je k tomu třeba idealizace geometrických a fyzikálních vlastností (fyzikální model) a jejich matematického popisu (matematický model). Zjednodušený model nemůže mít ovšem všechny znaky a vlastnosti mnohem složitější skutečnosti, a tak odpověď, kterou

nám poskytuje na kladené otázky, může být jen přibližná. Míra přibližnosti záleží na tom, zda model vystihuje správně ty vlastnosti, které jsou z hlediska právě řešeného problému podstatné. Modelování je tedy i v exaktních vědách v jistém smyslu uměním.

Modely vhodné k analytickému řešení, o něž se snaží klasická mechanika, bývají pro numerické řešení nevýhodné. Výsledky získané numerickým řešením bývají kritizovány stoupenci klasické mechaniky, protože jsou nepřesné a míra nepřesnosti nebývá vždy známa (zejména v nelineární mechanice) a protože nejsou dost obecné. Skutečně, numericky lze řešit jen konkrétní, numericky zadané úlohy, zato však mohou být velmi komplikované a rozsáhlé, pro analytické řešení nevhodné. Spor mezi zastánci analytických metod a numerických metod se dnes jeví skoro jako generační spor, který se však zakládá na nedorozumění. Analytické metody jsou nutné k pochopení logické stavby mechaniky a všech vnitřních souvislostí. Numerické metody jsou nutné k řešení složitých úloh praxe, zejména těch, pro něž se metody klasické mechaniky nehodí, nejsou dost efektivní nebo se z praktických důvodů nedají aplikovat. Analytické a numerické metody se proto doplňují a nelze zatačovat jedny na úkor druhých. Nesprávné je i tvrzení, že analytické metody jsou nástrojem základního výzkumu, kdežto numerické metody patří do sféry aplikovaného výzkumu. Vždyť právě jen numerické experimentování vedlo k objevení některých základních fyzikálních jevů, které nebylo dříve možné ani vysvětlit, ani uspokojivě popsat (fraktaly).

Pro technickou inteligenci mají ovšem numerické metody mnohem větší přitažlivost. Nevyžadují totiž tak hluboké matematické vzdělání jako špičkové metody analytické. Protože moderní počítače vybavené namnoze grafickými terminály usnadňují interpretaci výsledků, získává řešitel numerickým experimentováním obdobnou zkušenost jako experimentátor ve fyzikální laboratoři, ale získává ji většinou rychleji a laciněji. Zdá se, že naše školy, přestože v učebních plánech reforma stíhá reformu, nestačí na tento vývoj pohotově reagovat. Příčin je mnoho a nebudeme se jimi zabývat. Vedení však tímto poznatkem, zaměříme se především na tvorbu fyzikálních a matematických modelů vhodných k numerickým řešením úloh z mechaniky.

Je samozřejmé, že se umění vytvářet úspěšné matematické modely k řešení složitých úloh praxe lze naučit jen z vlastní zkušenosti. Pouhá teorie nestačí, asi jako se bez bicyklu nenaучíme z žádné příručky jezdit na kole. Proto jsme výklad doprovodili mnoha příklady, které vnímavého čtenáře, jak doufáme, povzbudí k aktivnímu promýšlení látky a k další samostatné práci. Nechť je přitom pamětliv, že se ten, kdo nechce při

poznávání reality bloudit, nemůže spokojit s vnější podobou utvářených modelů, ale musí promýšlet i jejich vnitřní, při povrchním pohledu skryté fyzikální a matematické vlastnosti.

Děkuji pracovníkům Domu techniky ČSVTS, zvláště Ing. Vladimíru Václavíkovi, za obětavou práci spojenou s uspořádáním tohoto kursu. Všem jeho účastníkům přeji při studiu a při praktickém uplatňování získaných poznatků plný úspěch.

Cyril Höschl

## 1. PŘÍKLADY VYTVÁŘENÍ MODELŮ PRO PRUŽNÁ TĚLESA

Skutečné těleso si zidealizujeme například tak, že budeme předpokládat spojitě rozdělení hmoty v objemu  $V$  uzavřeném povrchem  $S$ . Pro materiál bude platit Hookeův zákon. Poměrné deformace, tedy i parciální derivace posuvů podle souřadnic budou v absolutní hodnotě velmi malé. Tak jsme dostali fyzikální model pružného kontinua.

Zvolme v něm kartézské souřadnice  $x_1, x_2, x_3$ . Nechť má obecný bod  $P$  v čase  $t = 0$  souřadnice  $x_1, x_2, x_3$ . To vyznačíme takto:  $P(x_1, x_2, x_3, 0)$  nebo stručněji  $P(x_i, 0)$ ;  $i = 1, 2, 3$ . V čase  $t > 0$  bude tento bod v posunuté poloze  $P'(x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, t)$  nebo stručněji  $P'(x_i + u_i, t)$ . Zde  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t) = u_i(x_k, t)$  značí posuvy bodu  $P$ . Jsou funkcemi souřadnic výchozí polohy bodu  $P$  a času. Funkce  $u_i = u_i(x_k, t)$  popisují pohyb kontinua. \*)

Jsou-li tyto funkce známy, lze z nich parciálními derivacemi odvodit složky symetrického deformačního tenzoru

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \equiv \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

V matici  $[\varepsilon_{ij}]$  jsou na diagonále poměrná prodloužení a mimo diagonálu poloviční zkosení. Z Hookeova zákona pak dostaneme složky  $\sigma_{ij}$  napětového tenzoru (rovněž symetrického)

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

V rovnici (2) se sčítá podle opakováných indexů  $k, l$ , takže na pravé straně je celkem devět sčítanců. Zákon (2) vyjadřuje lineární vztah mezi složkami deformačního a napětového tenzoru. Omezujeme se tedy na lineární elasticitu.

Jsou-li složky objemových sil označeny  $p_i$ , platí - jak známo - pro elementární objem  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  materiálu soustava tří pohybových rovnic ve tvaru

$$\sigma_{ji,j} + p_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3)$$

Je-li např.  $i = 1$ , dá rovnice (3) po rozepsání součtu podle indexu  $j$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + p_1 = \rho \ddot{u}_1$$

\*) Zaslíbený čtenář poznává, že jsme volili Lagrangeův způsob tohoto popisu (viz např. /1/).

Pro neznámých patnáct funkcí (tři  $u_i$ , šest  $\varepsilon_{ij}$ , šest  $\sigma_{ij}$ ) máme tedy patnáct rovnic (šest algebraických rovnic (2), šest parciálních diferenciálních rovnic (1) a tři parciální diferenciální rovnice (3)). K nim přistupují počáteční podmínky pro posuvy a rychlosti (pruhem označujeme dané hodnoty)

$$u_i(x_k, 0) = \bar{u}_i(x_k) \quad \dot{u}_i(x_k, 0) = \dot{\bar{u}}_i(x_k) \quad (4)$$

a okrajové podmínky pro napětí

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(P, t) &= \bar{\sigma}_{ij}(P, t) & P \in S_\sigma \\ u_i(P, t) &= \bar{u}_i(P, t) & P \in S_u \\ S_u \cap S_\sigma &= \emptyset & S_u \cup S_\sigma = S \end{aligned} \quad (5)$$

Najít řešení těchto rovnic je úlohou klasické teorie lineárně elastických těles. Rovnice (1) až (5) představují matematický model pro toto řešení. Protože posuvy jsou obecně v každém bodě jiné a bodů je v tělese "nekonečně mnoho", má dané úloha nekonečně mnoho stupňů volnosti. Numerické řešení však nemůže poskytnout nekonečně mnoho výstupních hodnot, a proto je nutné pro numerické řešení počet stupňů volnosti omezit.

Může se to stát například tak, že funkce  $u_i(x_k, t)$  nahradíme přibližně lineární formou vybraných parametrů, kterou utvoříme s vhodně volenými funkcemi souřadnic jakožto koeficienty této lineární formy. Parametrů bude přitom konečný počet. Abychom získali přehlednější zápis, sestavíme nejdříve posuvy  $u_i$  do vektoru

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \{u(x_k, t)\} \quad (6)$$

a pak napíšeme v maticovém tvaru tuto aproximaci:

$$\{u(x_k, t)\} \approx [A(x_k)] \{q(t)\} \quad (7)$$

Matice  $[A]$  obsahuje zvolené báze funkce souřadnic  $x_k$  a je typu  $3 \times n$ . Vektor  $\{q\}$  obsahuje zvolené volné (dosud neznámé) parametry  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , které jsou funkcemi času. S aproximací (7) dostaneme podle (1) i aproximaci pro vektor poměrných deformací



$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{31}]^T \quad (8)$$

ve tvaru

$$\{\varepsilon(x_k, t)\} = [B(x_k)]\{q(t)\} \quad (9)$$

Z rovnice (2) vypočteme

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (10)$$

kde

$$\{\sigma\} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{31}]^T \quad (11)$$

Horní index  $T$  značí transpozici matice. Matice  $[E]$  je symetrická.

K odvození pohybových rovnic použijeme Lagrangeova variačního principu. \*) Změní-li se  $\{q(t)\}$  v zastaveném čase o  $\{\delta q(t)\}$ , změní se vektor  $\{\varepsilon(x_k, t)\}$  o  $\{\delta\varepsilon(x_k, t)\}$  a vnitřní síly vykonají virtuální práci

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta q\}^T \int_V [B]^T [E] [B] dV \{q\} \quad (12)$$

Objemové síly  $\{p\}$  vykonají virtuální práci

$$\int_V \{\delta u\}^T \{p\} dV = \{\delta p\}^T \int_V [A]^T \{p\} dV \quad (13)$$

a povrchové síly  $\{\bar{\sigma}\}$

$$\int_{S_{\bar{\sigma}}} \{\delta u\}^T \{\bar{\sigma}\} dS = \{\delta q\}^T \int_{S_{\bar{\sigma}}} [A]^T \{\bar{\sigma}\} dS \quad (14)$$

Protože posuvy jsou na části  $S_u$  povrchu předepsány, je jejich variace nulová. Napětí působící na  $S_u$  proto nekonají žádnou virtuální práci. Setrvačné síly mají povahu vnějších objemových sil (ve smyslu d'Alembertova principu), takže pro ně platí [obdobně k rovnici (13)]

$$-\int_V \{\delta u\}^T \rho \{\ddot{u}\} dV = -\{\delta q\}^T \int_V \rho [A]^T [A] dV \{\ddot{q}\} \quad (15)$$

\*) V podrobnostech odkazujeme na literaturu /2/.

Virtuální práce (12) vnitřních sil se musí rovnat součtu virtuálních prací (13) až (15) vnějších sil, takže

$$\{\delta q\}^T [K] \{q\} = \{\delta q\}^T \{f\} - \{\delta q\}^T [M] \{\ddot{q}\} \quad (16)$$

kde

$$[K] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad \text{je matice tuhosti}$$

$$[M] = \int_V \rho [A]^T [A] dV \quad \text{je matice hmotnosti}$$

$$\{f\} = \int_V [A]^T \{p\} dV + \int_{S_F} [A]^T \{\bar{G}\} dS \quad \text{je vektor vnějších zobecně-}$$

ných sil

Protože rovnice (16) musí platit pro jakékoli  $\{\delta q\}$ , musí být

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{f\} \quad (17)$$

Parametry  $q_1, q_2, \dots, q_n$  tvoří vektor  $\{q\}$  zobecněných posuvů. Jsou to nyní jediné neznámé funkce času, které určíme z rovnice (17). Máme tedy pouze  $n$  stupňů volnosti. Matematický model (17) se proto výborně hodí pro numerický výpočet. Nahrazuje matematický model kontinua (rovnice (1) až (5)). Okrajové podmínky jsou již v tomto modelu obsaženy, pokud těmto podmínkám vyhovují zvolené báze funkce. Nemusíme se tedy o ně již starat. Počáteční podmínky se týkají pouze zobecněných posuvů  $q_i(0)$  a rychlostí  $\dot{q}_i(0)$ ; uplatníme je při integraci pohybových rovnic, což ukážeme v 5. kapitole.

Vzhledem k (7) můžeme vypočítat rychlost \*)

$$\{\dot{u}\} = [A] \{\dot{q}\} \quad (18)$$

a s její pomocí i kinetickou energii tělesa

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \int_V \rho [A]^T [A] dV \{\dot{q}\} = \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\} \end{aligned} \quad (19)$$

---

\*) Za předpokladu, že matice  $[A]$  nezávisí na zobecněných posuvech. To platí, pokud jsou posuvy malé. O tom, jak postupovat, nejsou-li posuvy malé, zmíníme se v 9. kapitole a v příkladu 16.

Podobně vypočteme deformační energii

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \{q\}^T \int [B]^T [E] [B] dV \{q\} = \\
 &= \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\}
 \end{aligned} \tag{20}$$

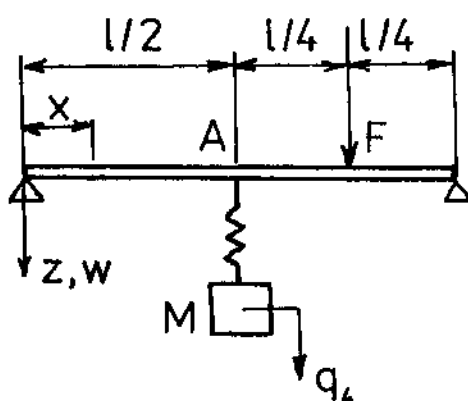
Jsou to tedy kvadratické formy s maticemi  $[M]$ , popř.  $[K]$ . To znamená, že prvky  $m_{ij}$  matice hmotnosti, resp. prvky  $k_{ij}$  matice tuhosti můžeme vypočítat také ze vztahů

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \qquad k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \tag{21}$$

Toho využijeme v následujícím příkladu.

### Příklad 1

Nahraďte soustavu pružného, prostě podepřeného nosníku s hmotou zavěšenou na pružině podle obr. 2 systémem se čtyřmi stupni volnosti. Najděte ustálené kmity tohoto systému za periodického působení síly  $F = F_0 \sin \omega t$ .



Obr. 2

## Řešení

Pro průhyb nosníku zvolíme aproximaci vyhovující okrajovým podmínkám

$$W(x) \approx q_1 \sin \frac{\pi x}{l} + q_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + q_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \quad (1.1)$$

a posuv hmoty zavěšené na pružině zvolíme za souřadnici  $q_4$ . Všechny průhyby a posuvy měříme od rovnovážné polohy.

Bázové funkce v rovnici (1.1) jsou tři vlastní tvary volného kmitání odpovídající třem nejnižším vlastním frekvencím. To znamená, že jsme volbou aproximace (1.1) potlačili vyšší frekvenční složky v nosníku (vyšší než třetí). Vlastní tvary kmitů jsou popsány rovnicemi

$$W_1 = \sin \frac{\pi x}{l} \quad W_2 = \sin \frac{2\pi x}{l} \quad W_3 = \sin \frac{3\pi x}{l} \quad (1.2)$$

takže rovnici (1.1) můžeme zapsat také ve tvaru

$$W(x) = q_1 W_1 + q_2 W_2 + q_3 W_3 \quad (1.3)$$

Funkce  $W_i$  jsou ortogonální, tj.

$$\int_0^l W_i W_j dx = 0 \quad \text{pro } i \neq j \quad (1.4)$$

V literatuře /4/ se dokazuje vztah (1.4) pro vlastní tvary kmitů libovolně uloženého nosníku. Dokážeme, že platí i pro druhé derivace podle  $x$  (označíme je čárkou)

$$\int_0^l W_i' W_j'' dx = 0 \quad (i \neq j) \quad (1.5)$$

Vztah (1.5) je velmi užitečný při výpočtu deformační energie v kmitajícím nosníku. Abychom jej dokázali, integrujeme levou stranu per partes

$$\int_0^l W_i' W_j'' dx = [W_i' W_j'']_0^l - \int_0^l W_i'' W_j''' dx = - \int_0^l W_i' W_j''' dx \quad (1.6)$$

Výraz v hranaté závorce je totiž nulový pro jakékoli okrajové podmínky na koncích nosníku (vetknutý konec, kloubově podepřený konec, volný konec). Zopakováním integrace per partes dostaneme

$$\int_0^l w_i'' w_j'' dx = -[w_i w_j'']_0^l + \int_0^l w_i w_j^{IV} dx = \int_0^l w_i w_j^{IV} dx \quad (1.7)$$

Když do (1.7) dosadíme z diferenciální rovnice pro ohyb nosníku (9.1)  $w_j^{IV} = [\omega_j^2 \rho S / (EI)] w_j$ , dostaneme nakonec

$$\int_0^l w_i'' w_j'' dx = \text{konst.} \int_0^l w_i w_j dx = 0 \quad (i \neq j) \quad (1.8)$$

Vztahy (1.4) a (1.8) tedy platí pro jakkoli uložený nosník, nejen pro prostě podepřený, u něhož je platnost těchto vztahů evidentní (vyplývá z vlastností goniometrických funkcí). Fyzikálně tyto podmínky znamenají, že mezi jednotlivými vlastními kmity neexistuje žádná interakce. Vrátime se nyní k dané úloze. Průhyb nosníku v místě  $x = l/2$ , resp.  $x = 3l/4$ , vyjde ze vztahu (1.1) takto:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = q_1 - q_3 \quad w\left(\frac{3l}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} q_1 - q_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} q_3 \quad (1.9)$$

Kinetická energie náhradního systému je \*)

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} \rho S \left( \dot{q}_1^2 \int_0^l w_1^2 dx + \dot{q}_2^2 \int_0^l w_2^2 dx + \dot{q}_3^2 \int_0^l w_3^2 dx \right) + \\ + \frac{1}{2} M \dot{q}_4^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Potenciální deformační energie vyjde

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} EJ \left[ q_1^2 \int_0^l (w_1'')^2 dx + q_2^2 \int_0^l (w_2'')^2 dx + q_3^2 \int_0^l (w_3'')^2 dx \right] + \\ + \frac{1}{2} k (q_4 - q_1 + q_3)^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

---

\*) Při výpočtu  $T$  a  $U$  využijeme ortogonalitu (1.4) a (1.8).

Matici hmotnosti, resp. tuhosti, vypočteme z rovnic (19), resp. (20).  
Bude

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= \rho S \int_0^{\ell} w_1^2 dx = \frac{1}{2} \rho S \ell = \frac{1}{2} m \\ m_{22} &= \rho S \int_0^{\ell} w_2^2 dx = \frac{1}{2} \rho S \ell = \frac{1}{2} m \\ m_{33} &= \rho S \int_0^{\ell} w_3^2 dx = \frac{1}{2} \rho S \ell = \frac{1}{2} m \\ m_{44} &= M \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Zde  $m$  značí hmotnost celého nosníku,  $M$  hmotnost zavěšeného tělesa. Mi-  
modiagonální prvky matice hmotnosti jsou nulové. Dále máme

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= EJ \int_0^{\ell} (w_1'')^2 dx + k = \frac{\pi^4}{2 \ell^3} EJ + k \\ k_{22} &= EJ \int_0^{\ell} (w_2'')^2 dx = \frac{2\pi^4}{\ell^3} EJ \\ k_{33} &= EJ \int_0^{\ell} (w_3'')^2 dx + k = \frac{9\pi^4}{2 \ell^3} EJ + k \\ k_{44} &= k & k_{14} &= k_{41} = -k \\ k_{13} &= k_{31} = -k & k_{34} &= k_{43} = k \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Ostatní (zde neuvedené) prvky jsou nulové. Zobecněné síly  $f_i$  vypočteme  
z rovnosti virtuálních prací

$$F \delta w \left( \frac{3\ell}{4} \right) = f_1 \delta q_1 + f_2 \delta q_2 + f_3 \delta q_3 + f_4 \delta q_4 \quad (1.14)$$

Variaci  $\delta w (3\ell/4)$  vypočteme z druhé z rovnic (1.9). Porovnáním koefi-  
cientů dostaneme

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} F & f_2 &= -F \\ f_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} F & f_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Rozepíšeme-li pohybové rovnice (17), dostaneme

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} + k & 0 & -k & -k \\ 0 & \frac{2\pi^4 EJ}{l^3} & 0 & 0 \\ -k & 0 & \frac{9\pi^4 EJ}{2l^3} + k & k \\ -k & 0 & k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F/\sqrt{2} \\ -F \\ F/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

Je-li nyní  $F = F_0 \sin \omega t$ , dosadíme za partikulární integrál vektor  $\{q\} = \{\bar{q}\} \sin \omega t$  a dostaneme

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} + k - \frac{1}{2}\omega^2 m & 0 & -k & -k \\ 0 & \frac{2\pi^4 EJ}{l^3} - \frac{1}{2}\omega^2 m & 0 & 0 \\ -k & 0 & \frac{9\pi^4 EJ}{2l^3} + k - \frac{1}{2}\omega^2 m & k \\ -k & 0 & k & k - \omega^2 M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{Bmatrix} F_0/\sqrt{2} \\ -F_0 \\ F_0/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

Z rovnice (1.17) můžeme vypočítat amplitudy  $\bar{q}_1$  až  $\bar{q}_4$ , není-li matice soustavy singulární. Singularita matice se vyznačuje tím, že se determinant matice rovná nule. To je pak frekvenční rovnice čtvrtého stupně pro  $\omega^2$ , která má čtyři reálné kořeny, vlastní hodnoty  $\omega_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots, 4$ ). Je-li  $\omega = \omega_i$ , je matice soustavy (1.17) singulární a výchylky  $\bar{q}_j$  rostou nade všechny meze, To je případ rezonance.

Kdyby k nosníku nebyla zavěšena žádná hmota, tj. kdyby nebyla zavedena souřadnice  $q_4$  a  $k = 0$ ,  $M = 0$ , byla by frekvenční rovnice

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi^4 EJ}{2l^3} - \frac{1}{2} \omega^2 m & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi^4 EJ}{l^3} - \frac{1}{2} \omega^2 m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9\pi^4 EJ}{2l^3} - \frac{1}{2} \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \quad (1.18)$$

Tato rovnice má tři reálné kořeny

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4 EJ}{m l^3} \quad \omega_2^2 = \frac{4\pi^4 EJ}{m l^3} \quad \omega_3^2 = \frac{9\pi^4 EJ}{m l^3}$$

To jsou však - jak se dalo očekávat - kvadráty prvních tří vlastních kruhových frekvencí prostě podepřeného nosníku. Tento výsledek potvrzuje správnost výpočtu zobecněných (modálních) hmotností, resp. tuhostí, umístěných na diagonále matice hmotnosti, resp. tuhosti.

Jak je zřejmé ze vztahu (1.16), není mezi druhým stupněm volnosti a ostatními stupni volnosti žádná vazba (mimodiagonální prvky jsou v druhém řádku a v druhém sloupci matic  $[M]$ ,  $[K]$  nulové). To znamená, že vybuzená druhá harmonická složka v nosníku nezávisí na velikosti zavěšené hmoty (na její hmotnosti). Je to pochopitelné, neboť druhá harmonická složka má v místě zavěšení hmoty uzel. Je-li  $\omega = \omega_1$ , nastane rezonance. Je-li však  $\omega = \omega_1$  nebo  $\omega = \omega_3$ , rezonance nenastává, protože  $\omega_1$ ,

$\omega_3$  nejsou vlastní kruhové frekvence soustavy na obr. 2 (jsou to vlastní kruhové frekvence prostého nosníku bez zavěšené hmoty).



## 2. METODA STRUKTURNÍCH ELEMENTŮ

Vrátíme se ještě na chvíli k příkladu, který jsme právě probrali. Absolutně tuhá hmota byla zavěšena prostřednictvím pružiny na prostě podepřeném elastickém nosníku, jehož stupně volnosti jsme omezili tím, že jsme z nekonečně mnoha možných ohybových čar vybrali jen ty, které lze získat lineární kombinací tří vlastních tvarů kmitu příslušných třem nejnižším vlastním frekvencím nosníku bez zavěšené hmoty.

Obecně lze každou ohybovou čáru nosníku získat superpozicí vlastních tvarů kmitu, jichž je sice spočetné, ale nekonečné množství. V uvedeném příkladu jsme z nich vybrali jen tři. Rozklad do vlastních tvarů se nazývá modální rozklad. Nosníky (a podobně i jiné pruty, desky či skořepiny) lze s výhodou matematicky modelovat užitím tohoto modálního rozkladu.

Rovnici (1.16) lze rozepsat takto:

$$\begin{aligned} m_{ef1} \ddot{q}_1 &= -k_{ef1} q_1 - k(q_1 - q_3 - q_4) + F/\sqrt{2} \\ m_{ef2} \ddot{q}_2 &= -k_{ef2} q_2 - F \\ m_{ef3} \ddot{q}_3 &= -k_{ef3} q_3 + k(q_1 - q_2 - q_4) + F/\sqrt{2} \\ M \ddot{q}_4 &= k(q_1 - q_3 - q_4) \end{aligned} \quad (22)$$

Tyto rovnice mají tvar

$$m_{efn} \ddot{q}_n = p_n \quad (23)$$

kde zobecněná síla  $p_n$  představuje sloučené zobecněné vnější i vnitřní (vratné) síly. V našem případě je  $n = 1, 2, \dots, 4$ . První tři rovnice obsahují modální hmotnosti <sup>\*</sup>)

$$m_{efn} = \rho S \int_0^l w_n^2(x) dx = \frac{1}{2} \rho S l = \frac{1}{2} m \quad (24)$$

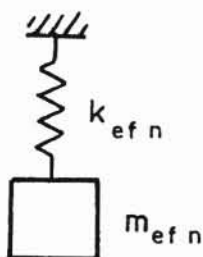
a modální tuhosti

$$k_{efn} = EJ \int_0^l (w_n'')^2 dx = \frac{n^2 \pi^4 EJ}{2l^3} \quad (25)$$

---

\* ) Ve čtvrté rovnici je  $m_{ef4} = M$  .

Představíme-li si modální hmotu zavěšenou na modální pružině (obr. 3),



Obr. 3

dostaneme pro ni kruhovou frekvenci  $\omega_n = \sqrt{k_{efn} / m_{efn}}$ . Proto můžeme - známe-li modální hmotnost a příslušnou vlastní kruhovou frekvenci - počítat modální tuhost ze vzorce

$$k_{efn} = \omega_n^2 m_{efn} \quad (26)$$

Tohoto vzorce často využijeme v následujících příkladech.

Nabízí se možnost sestavovat pohybové rovnice (23) s využitím modálního rozkladu pro jednotlivé konstrukční komponenty podle nějakých pevných pravidel. Rovnice (23) obsahují na levé straně derivace vždy jen jedné neznámé. Lze je proto snadno integrovat, je-li třeba, tedy i numericky, přičemž zobecněné síly na pravé straně mohou být i nelineárními funkcemi různých zobecněných posuvů. Mají-li pohybové rovnice standardní tvar, lze k jejich integraci využít standardních procedur. Na této myšlence se zakládá metoda strukturních elementů (component element method), podrobně popsaná i s výpočtovými programy v jazyce FORTRAN v publikaci /3/.

Zobecněné síly  $p_n$  mohou obecně záviset nejen na zobecněných souřadnicích  $q_j$ , ale i na jejich časových derivacích, tj. na zobecněných rychlostech  $\dot{q}_i$ . Závislost zobecněných sil na zobecněných rychlostech souvisí nejčastěji s tlumením, o kterém jsme dosud neuvažovali.

K usnadnění výpočtů soustav s nosníky pomocí modálního rozkladu uvádíme modální charakteristiky nosníků v tab. 1. Průhyb v základním, tj. nejnižším módu je normalizován tak, aby se efektivní hmotnost podle (24) rovnala hmotnosti nosníku. Např. pro prostě podepřený nosník je

$$w_1 = a \sin \frac{\pi x}{l} \quad (27)$$

a efektivní hmotnost vyjde

$$m_{ef1} = \rho S a^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \rho S l a^2 = \frac{1}{2} m a^2 \quad (28)$$

Modální charakteristiky štíhlých prizmatických nosníků při rovinném ohybu

Tab. 1

Uložení konců	Ckrajové podmínky		Frekvenční rovnice	$\beta l$		Modální průhyb (základní mód)
	$x = 0$	$x = l$		$n = 1$	$n = 2$	
volný - - volný	$W'' = 0$ $W''' = 0$	$W'' = 0$ $W''' = 0$	$\cos \beta l \cosh \beta l = 1$	0	4,730	$n=1$ : pohyb tuhého tělesa $n=2$ : $\cos \beta x + \cosh \beta x -$ $- 0,9825 (\sin \beta x + \sinh \beta x)$
vetknutý - - volný	$W = 0$ $W' = 0$	$W'' = 0$ $W''' = 0$	$\cos \beta l \cosh \beta l = -1$	1,875	4,694	$\cos \beta x - \cosh \beta x -$ $- 0,7341 (\sin \beta x - \sinh \beta x)$
prostě podepřený	$W = 0$ $W'' = 0$	$W = 0$ $W'' = 0$	$\sin \beta l = 0$	3,142	6,283	$1,414 \sin \beta x$
vetknutý- -podepřený	$W = 0$ $W' = 0$	$W = 0$ $W'' = 0$	$\operatorname{tg} \beta l - \operatorname{tgh} \beta l = 0$	3,927	7,069	$\cos \beta x - \cosh \beta x -$ $- 1,0008 (\sin \beta x - \sinh \beta x)$
vetknutý - -vetknutý	$W = 0$ $W' = 0$	$W = 0$ $W' = 0$	$\cos \beta l \cosh \beta l = 1$	4,730	7,853	$\cos \beta x - \cosh \beta x -$ $- 0,9825 (\sin \beta x - \sinh \beta x)$

Poznámka:

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EJl}{m}} \quad (\text{vlastní kruhová frekvence})$$

$$m = \rho S l \quad (\text{hmotnost nosníku - skutečná i modální pro základní mód})$$

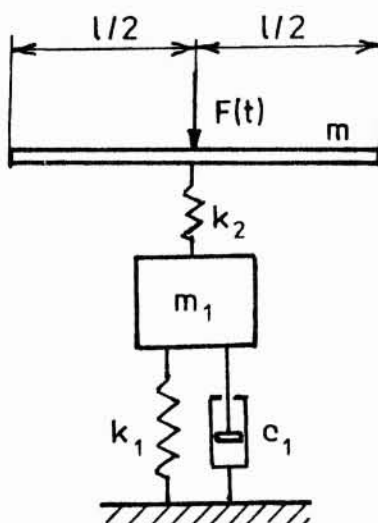
Položíme-li  $m_{ef1} = m$ , vyjde  $a = \sqrt{2} \doteq 1,414$ . Je tedy

$$W_1 \doteq 1,414 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (29)$$

(srovnej s tab. 1).

### Příklad 2

S použitím modálního rozkladu navrhnete pro soustavu znázorněnou na obr. 4 náhradní model se třemi stupni volnosti. Uvažujte pouze symetrický ohyb nosníku.



Obr. 4

### Řešení

První stupeň volnosti bude posuv tuhé hmoty o hmotnosti  $m_1$ . Druhý stupeň volnosti přisoudíme svislému posuvu nosníku jako tuhého celku. Hmotnost nosníku je  $m$ . Třetí stupeň volnosti tedy bude základní mód volného kmitání nosníku s oběma konci volnými, popsany rovnicí

$$W_1(x) = q_3 [(\cos \beta x + \cosh \beta x) - 0,9825 (\sin \beta x + \sinh \beta x)] \quad (2.1)$$

Přitom  $\beta l \doteq 4,730$  (viz tab. 1). Posuvy považujeme za kladné veličiny, směřují-li dolů. Efektivní (modální) hmotnost je  $m_{ef1} = m$ . Index 1 znamená, že jde o první mód (tvar kmitu s nejnižší nenulovou vlastní frekvencí).

Modální tuhost vypočítáme podle vzorce (23) s použitím tab. 1. Vyjde

$$k_{\text{eff}} = \omega_1^2 m_{\text{eff}} = \beta^4 \frac{EJ\ell}{m} \cdot m = \left( \frac{4,730}{\ell} \right)^4 EJ\ell \quad (2.2)$$

Modální průhyb v místě připojení nosníku vypočteme z rovnice (2.1) pro  $\beta x = \beta \ell / 2 = 4,730 / 2 = 2,365$ . Vyjde

$$W\left(\frac{\ell}{2}\right) = -1,216 q_3 \quad (2.3)$$

Kinetická energie soustavy je

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_3^2 \quad (2.4)$$

a její deformační energie

$$U = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (q_1 - q_2 + 1,216 q_3)^2 + \frac{1}{2} k_{\text{eff}} q_3^2 \quad (2.5)$$

Disipovaný výkon

$$D = \frac{1}{2} c \dot{q}_1^2 \quad (2.6)$$

Prvky matice hmotnosti tedy jsou

$$m_{11} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1^2} = m_1$$

$$m_{22} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_2^2} = m$$

$$m_{33} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_3^2} = m$$

Matice hmotnosti je diagonální. Pro matici tuhosti dostaneme

$$k_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} = k_1 + k_2$$

$$k_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} = -k_2$$

$$k_{13} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_3} = 1,216 k_2$$

a obdobně

$$k_{22} = k_2 \qquad k_{23} = -1,216 k_2$$

$$k_{33} = k_{ef1}$$

Matice tlumení  $[R]$  má jediný nenulový prvek, a to

$$r_{11} = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}_1^2} = c$$

Z principu virtuálních prací

$$F (\delta q_2 - 1,216 \delta q_3) = f_1 \delta q_1 + f_2 \delta q_2 + f_3 \delta q_3$$

dostaneme porovnáním koeficientů u  $\delta q_1$  až  $\delta q_3$  zobecněné vnější síly

$$f_1 = 0 \qquad f_2 = F \qquad f_3 = -1,216 F$$

Pohybové rovnice tedy je

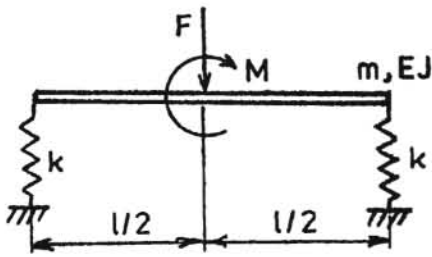
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} +$$

(2.7)

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 1,216 k_2 \\ -k_2 & k_2 & -1,216 k_2 \\ 1,216 k_2 & -1,216 k_2 & k_{ef1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1,216 \end{Bmatrix}$$

### Příklad 3

Pro pružný nosník uložený na dvou pružinách a zatížený uprostřed svislou silou a silovou dvojicí podle obr. 5 navrhnete náhradní model se čtyřmi stupni volnosti. Nosník má konstantní ohybovou tuhost.



Obr. 5

### Řešení

První stupeň volnosti bude svislý posuvnosníku jako tuhého celku směrem dolů. Druhý stupeň volnosti bude rotace nosníku jako tuhého celku kolem těžiště, kladná ve směru hodinových ručiček. Tyto dva módy lze považovat za dva módy s nulovou vlastní frekvencí. Třetí stupeň volnosti je osově symetrický ohybový mód ( $n = 2$  v tab.1), čtvrtý stupeň je střechově symetrický ohybový mód (v tab. 1 není uveden).

Průhybová čára kmitajícího volného nosníku má podle lit. /4/ rovnici

$$W(x) = C_1 (\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2 (\sin \beta x + \sinh \beta x) \quad (3.1)$$

přičemž pro první mód je  $\beta l = \beta_1 l \doteq 4,7300$ , pro druhý mód  $\beta l = \beta_2 l \doteq 7,8532$ . Tyto hodnoty můžeme libovolně zpřesnit užitím frekvenční rovnice uvedené v tab. 1. Zároveň musí být splněna soustava rovnic plynoucí z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} C_1 (-\cos \beta l + \cosh \beta l) + C_2 (-\sin \beta l + \sinh \beta l) &= 0 \\ C_1 (\sin \beta l + \sinh \beta l) + C_2 (-\cos \beta l + \cosh \beta l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Anulováním determinantu této soustavy dostaneme frekvenční rovnici uvedenou v tab. 1. Její kořeny  $\beta_1 l$  a  $\beta_2 l$  jsme již uvedli. Pro ně vypočteme z rovnic (3.2) poměr integračních konstant. Pro první kořen vyjde (shodně s údajem v tab. 1)

$$C_2 / C_1 \doteq -0,9825 \quad (3.3)$$

a pro druhý kořen (v tab. 1 neuvedeno)

$$C_2 / C_1 \doteq -1,0008 \quad (3.4)$$

Průhybová čára druhého módu tedy vyjde

$$W_2(x) = a [(\cos \beta_2 x + \cosh \beta_2 x) - 1,0008 (\sin \beta_2 x + \sinh \beta_2 x)] \quad (3.5)$$

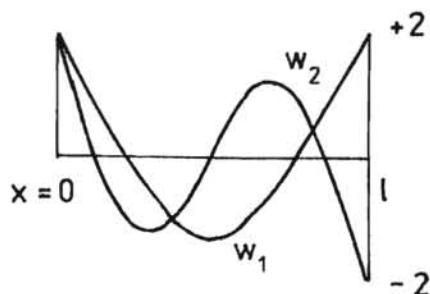
Má-li být modální hmotnost rovna hmotnosti nosníku, musí být

$$\int_0^l [W_2(x)]^2 dx = l \quad (3.6)$$

To bude splněno pro  $\alpha = 1$ . Průběh prvního módu

$$w_1(x) = \cos \beta_1 x + \cosh \beta_1 x - 0,9825 (\sin \beta_1 x + \sinh \beta_1 x) \quad (3.7)$$

a druhého podle (3.5) s hodnotou  $\alpha = 1$  je zakreslen na obr. 6.



Obr. 6

Uprostřed nosníku je

$$w_1\left(\frac{l}{2}\right) \doteq -1,216, \quad w_2'\left(\frac{l}{2}\right) \doteq 10,80 \text{ l}^{-1} \quad (3.8)$$

Vlastní kruhové frekvence jsou

$$\omega_1 = \left(\frac{4,730}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJl}{m}} \quad \omega_2 = \left(\frac{7,853}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJl}{m}} \quad (3.9)$$

Efektivní tuhosti budou

$$k_{ef1} = \omega_1^2 m = \left(\frac{4,730}{l}\right)^4 EJl \quad (3.10)$$

$$k_{ef2} = \omega_2^2 m = \left(\frac{7,853}{l}\right)^4 EJl$$

Celkové posuvy bodů střednice nosníku vyjdou takto:

$$w(x) = q_1 + q_2 \left(2 \frac{x}{l} - 1\right) \sqrt{3} + q_3 w_1(x) + q_4 w_2(x) \quad (3.11)$$

Činitel u druhého členu na pravé straně (3.11) byl zvolen tak, aby ve shodě s podmínkou (3.6) bylo



$$\int_0^l \left[ \left( 2 \frac{x}{l} - 1 \right) \sqrt{3} \right]^2 dx = l$$

Kinetická energie je pak dána vztahem

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2) \quad (3.12)$$

Využili jsme ortogonalitu mezi jednotlivými módy, takže výraz pro kinetickou energii neobsahuje součiny  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  pro  $i \neq j$ .

Deformační energie vyjde

$$U = \frac{1}{2} k_{ef1} q_3^2 + \frac{1}{2} k_{ef2} q_4^2 + \frac{1}{2} k (q_1 - q_2 \sqrt{3} + 2q_3 + 2q_4)^2 + \frac{1}{2} k (q_1 + q_2 \sqrt{3} + 2q_3 - 2q_4)^2 \quad (3.13)$$

Výrazy v oblých závorkách představují stlačení levé, popř. pravé pružiny. Jsou to hodnoty  $W(0)$ , popř.  $W(l)$ , vypočtené ze vztahu (3.11).

Matice hmotnosti je zřejmě  $m$ -násobkem jednotkové matice. Matice tuhosti vyjde pásová

$$[K] = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 4k & 0 \\ 0 & 6k & 0 & 4k\sqrt{3} \\ 4k & 0 & k_{ef1} + 8k & 0 \\ 0 & 4k\sqrt{3} & 0 & k_{ef2} + 8k \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Z rovnosti virtuálních prací

$$F (\delta q_1 - 1,216 \delta q_3) + M (2\sqrt{3} \delta q_2 + 10,80 \delta q_4) l^{-1} = f_1 \delta q_1 + f_2 \delta q_2 + f_3 \delta q_3 + f_4 \delta q_4 \quad (3.15)$$

vyjdou zobecněné síly

$$\begin{aligned} f_1 &= F & f_2 &= 2\sqrt{3} \frac{M}{l} \\ f_3 &= -1,216 F & f_4 &= 10,80 \frac{M}{l} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pohybové rovnice tedy budou

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ c & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 & 4k & 0 \\ 0 & 6k & 0 & 4k\sqrt{3} \\ 4k & 0 & k_{ef1} + 8k & 0 \\ 0 & 4k\sqrt{3} & 0 & k_{ef2} + 8k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 2\sqrt{3} M/l \\ -1,216 F \\ 10,80 M/l \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Je zřejmé, že síla  $F$  budí pouze svislý pohyb nosníku jako tuhého celku (prostou translaci) a dále symetrický ohybový mód. Moment  $M$  budí naopak jen rotační pohyb nosníku jako tuhého celku a antisymetrický ohybový mód.

Kdyby byl nosník absolutně tuhý, bylo by  $q_3 = 0$ ,  $q_4 = 0$ . Odpadly by třetí a čtvrté sloupce a řádky v maticích v rovnici (3.17) a zbylo by

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 2\sqrt{3} M/l \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Statické průhyby by odtud vyšly dosazením  $\ddot{q}_1 = 0$ ,  $\ddot{q}_2 = 0$ , a to

$$q_{1stat} = F/2k \quad q_{2stat} = M/(k\ell\sqrt{3})$$

Protože úhel otočení nosníku  $\varphi = 2\sqrt{3} q_2/\ell$ , bylo by

$$\varphi_{stat} = 2\sqrt{3} \frac{M}{k\ell\sqrt{3}} = 2 \frac{M}{k\ell}$$

Skutečně,  $M = k \cdot \varphi_{stat} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \ell$ .

Kdybychom neuvažovali podepření, tj. dosadili  $k = 0$ , vyšlo by v souladu s druhým Newtonovým zákonem z rovnice (3.18) zrychlení volného translačního pohybu

$$\ddot{q}_1 = \frac{F}{m}$$

a rotačního pohybu

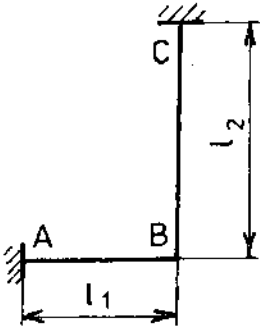
$$\ddot{\psi} = 2\sqrt{3} \frac{\ddot{q}_2}{l} = 2\sqrt{3} \frac{2\sqrt{3} M l}{m} = \frac{M}{\frac{1}{12} m l^2} = \frac{M}{I}$$

kde  $I = \frac{1}{12} m l^2$  je moment setrvačnosti nosníku k centrální ose.

Tím jsme si ověřili správnost rovnice (3.17) pro uvedené zvláštní případy.

#### Příklad 4

Odvoďte přibližný vzorec pro výpočet základní kruhové frekvence volného kmitání pravoúhlého rámu podle obr. 7 v jeho rovině. Obě ramena jsou prizmatická a mají stejný průřez i modul pružnosti, tedy i stejnou ohybovou tuhost. Přihlížejte jenom k ohybovým deformacím.



Obr. 7

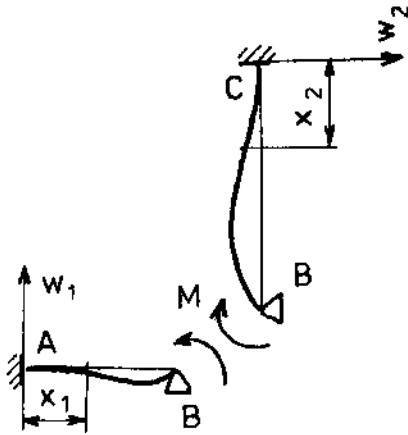
#### Řešení

Zanedbáme-li roztažení, popř. zkrácení střednice, nebude se styčnick B rámu pohybovat, pokud budou ohybové deformace malé. To budeme předpokládat. Tečny k ohybové čáře v tomto bodě se mohou sice potočit, avšak pravý úhel mezi nimi se nezmění.

Každou z částí AB, BC si zřejmě můžeme představit jako nosník na jednom konci vetknutý a na druhém otočně podepřený. V této otočné podpoře se přenáší z jedné části rámu na druhou vnitřní ohybový moment  $M$ . Když obě části uvolníme myšleným řezem, stane se z tohoto momentu vnější ohybový moment (obr. 8). Byl zaveden v souladu se zákonem akce a reakce.

Podle tab. 1 najdeme rovnici modálního průhybu první harmonické pro jednu i druhou část rámu ( $i = 1, 2$ )

$$w_i(x) = \cos \beta_i x_i - \cosh \beta_i x_i - 1,0008 (\sin \beta_i x_i - \sinh \beta_i x_i) \quad (4.1)$$



Obr. 8

Přitom

$$\beta_i l_i \doteq 3,927 \quad (4.2)$$

Otočení tečny k ohybové čáře nad podporou je dáno derivací

$$w_i'(l_i) = \beta_i [-\sin \beta_i l_i - \sinh \beta_i l_i - 1,0008 (\cos \beta_i l_i - \cosh \beta_i l_i)] \quad (4.3)$$

Když ze vztahu (4.2) dosadíme do (4.3), dostaneme v uzlu B úhel otočení tečny

$$w_i'(l_i) \doteq 1,4548 \beta_i \doteq 5,713 \frac{1}{l_i} \quad (4.4)$$

Vlastní kruhové frekvence příslušné tvarům kmitu popsaným rovnicí (4.1) jsou (viz tab. 1)

$$\omega_i = \left( \frac{3,927}{l_i} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} \quad (4.5)$$

V této rovnici značí  $S$  průřez nosníku,  $EJ$  jeho ohybovou tuhost a  $\rho$  hustotu.

Modální hmotnost obou nosníků se rovná jejich skutečné hmotnosti (tak jsou totiž průhyby uvedené v tab. 1 normalizovány), takže

$$m_{efi} = \rho S l_i \quad (4.6)$$

Modální tuhosti vypočteme ze vzorce (26). Vyjde

$$k_{efi} = \omega_i^2 m_{efi} = \left( \frac{3,927}{l_i} \right)^4 EJ l_i \quad (4.7)$$

Přisoudíme-li oběma nosníkům samostatný stupeň volnosti, bude průhyb prvního, resp. druhého nosníku

$$w(x) = q_1 w_1(x) \quad \text{resp.} \quad w(x) = q_2 w_2(x)$$

a pohybové rovnice budou

$$\left. \begin{aligned} m_{ef1} \ddot{q}_1 + k_{ef1} q_1 &= 5,713 \frac{M}{l_1} \\ m_{ef2} \ddot{q}_2 + k_{ef2} q_2 &= -5,713 \frac{M}{l_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Bude-li pohyb harmonický, bude

$$q_i = \bar{q}_i \sin \omega t \quad M = \bar{M} \sin \omega t \quad (4.9)$$

a po dosazení do (4.8)

$$\left. \begin{aligned} (k_{ef1} - \omega^2 m_{ef1}) \bar{q}_1 &= 5,713 \frac{\bar{M}}{l_1} \\ (k_{ef2} - \omega^2 m_{ef2}) \bar{q}_2 &= -5,713 \frac{\bar{M}}{l_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Vyloučením ohybového momentu  $\bar{M}$  z těchto rovnic dostaneme vztah

$$(k_{ef1} - \omega^2 m_{ef1}) \bar{q}_1 = -\frac{l_2}{l_1} (k_{ef2} - \omega^2 m_{ef2}) \bar{q}_2 \quad (4.11)$$

Protože otočení tečen k ohybové čáře v bodě B je stejné, musí být

$$\frac{\bar{q}_2}{l_2} = \frac{\bar{q}_1}{l_1} \quad (4.12)$$

Rovnice (4.11) a (4.12) mají nenulové řešení pro  $\bar{q}_1$ ,  $\bar{q}_2$  jen tehdy, je-li

$$\omega^2 = \frac{l_1^2 k_{ef1} + l_2^2 k_{ef2}}{l_1^2 m_{ef1} + l_2^2 m_{ef2}} \quad (4.13)$$

Do rovnice (4.13) dosadíme za modální hmotnosti a tuhosti ze vztahů (4.6) a (4.7) a dostaneme

$$\omega^2 = \frac{237,8 \text{ EJ}}{9 S l_1 l_2} \cdot \frac{l_1 + l_2}{l_1^3 + l_2^3} \quad (4.14)$$

#### Poznámka

Rovnici (4.13) jsme mohli odvodit kratčeji, kdybychom využili deformační podmínku (4.12) hned zpočátku a napsali výrazy pro kinetickou a de-

formační energii

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 \quad (4.15)$$

$$U = \frac{1}{2} \omega_1^2 m_1 q_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 m_2 \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^2 q_1^2 \quad (4.16)$$

Pohybová rovnice

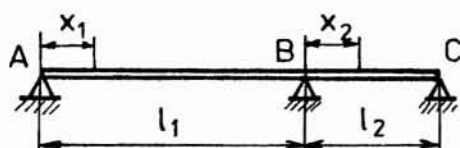
$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_1^2} \ddot{q}_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} q_1 = 0 \quad (4.17)$$

by vedla přímo k cíli.

#### Příklad 5

Odvoďte přibližný vzorec pro výpočet základní vlastní frekvence kmitajícího pružného nosníku uloženého na třech podporách podle obr. 9.

Podpory jsou tuhé a délky polí jsou v poměru  $l_1 : l_2 = 4 : 3$ .



Obr. 9

#### Řešení

V každém poli zavedeme souřadnici  $x$  samostatně, a to  $x_1$  v prvním poli od bodu A,  $x_2$  v druhém poli od bodu B. Průhyb v prvním poli bude

$$W(x_1) = q_1 W_1(x_1) \quad (5.1)$$

a v druhém

$$W(x_2) = q_2 W_2(x_2) \quad (5.2)$$

kde podle tab. 1

$$W_i(x_i) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi x_i}{l_i} \quad (5.3)$$

jsou tvary vlastních kmitů prvního módu obou navzájem oddělených (uvolněných) polí. Protože nad podporou B musí být pro obě pole společná tečna

k ohybové čáře, bude

$$q_2 = -q_1 \frac{l_2}{l_1} \quad (5.4)$$

Výrazy pro kinetickou a deformační energii jsou shodné s rovnicemi (4.15) a (4.16), takže je nebudeme znovu vypisovat. Nyní však je

$$\omega_1^2 = \left( \frac{\pi}{l_1} \right)^4 \frac{EJ}{\rho S} \quad \omega_2^2 = \left( \frac{\pi}{l_2} \right)^4 \frac{EJ}{\rho S} \quad (5.5)$$

Proto

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EJ}{\rho S l_1 l_2} \cdot \frac{l_1 + l_2}{l_1^2 + l_2^2} \quad (5.6)$$

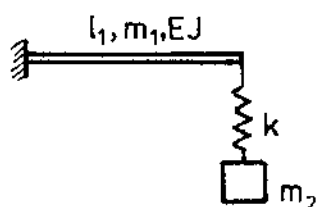
Pro  $l_2 = 3l_1/4$  vyjde kruhová frekvence

$$\omega = \frac{12,643}{l_1^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} \quad (5.7)$$

Je to hodnota asi o 8 % větší než přesné řešení (viz /4/, str. 272). Protože dovolujeme jen první modální tvary kmitů v obou polích, omezuje tím deformační volnost spojených nosníků. Je to jako bychom je jistým způsobem vyztužili. Proto jsou hodnoty vlastních frekvencí konstrukce, které dostaneme modálním rozkladem kmitů jednotlivých komponent s omezeným počtem stupňů volnosti, vždy o něco větší než hodnoty přesné (v nejlepším případě by mohly být rovny přesným hodnotám). Důkaz tohoto tvrzení nebudeme uvádět, lze jej však nalézt v literatuře, která se zabývá aplikacemi Ritzovy metody (např. /5/).

### Příklad 6

Vypočtete nejnižší frekvenci volného kmitání soustavy nosníku se zavěšenou hmotou podle obr. 10.



Obr. 10

### Řešení

Za průhyb nosníku zvolíme podle tab. 1

$$w(x) = q_1 [\cos \beta x - \cosh \beta x - 0,7341 (\sin \beta x - \sinh \beta x)] \quad (6.1)$$

s hodnotou  $\beta = 1,875/\ell_1$ . Posuv zavěšené hmoty označíme  $q_2$ . Prodloužení pružiny pak bude

$$q_2 - w(\ell) = q_2 + 2q_1 \quad (6.2)$$

Kinetická energie vyjde

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 \quad (6.3)$$

a deformační energie

$$U = \frac{1}{2} \omega_1^2 m_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k (q_2 + 2q_1)^2 \quad (6.4)$$

Soustava pohybových rovnic v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k + \omega_1^2 m_1 & 2k \\ 2k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

dává frekvenční rovnici

$$\begin{vmatrix} 4k + (\omega_1^2 - \omega^2) m_1 & 2k \\ 2k & k - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.6)$$

Přitom podle tab. 1

$$\omega_1^2 = \beta^4 \frac{EJ\ell_1}{m_1} = \left( \frac{1,875}{\ell_1} \right)^4 \frac{EJ\ell_1}{m_1} \quad (6.7)$$

Rozepsáním determinantu (6.6) dostaneme po úpravě bikvadratickou rovnici

$$\omega^4 - \left[ \frac{k}{m_2} + \frac{4k}{m_1} + \omega_1^2 \right] \omega^2 + \omega_1^2 \frac{k}{m_2} = 0 \quad (6.8)$$

Dosadíme-li ve zvláštním případě  $m_2 \rightarrow 0$ , bude  $\omega^2 = \omega_1^2$ . Pro absolutně tuhý nosník bude  $\omega_1^2 \rightarrow \infty$ , takže  $\omega^2 = k/m_2$ . Když zanedbáme hmotnost nosníku, tj. zvolíme  $m_1 \rightarrow 0$ , vyjde z rovnice (6.8)



$$\omega^2 = \frac{3,09 EJ}{3,09 EJ + k l_1^3} \cdot \frac{k}{m_2} \quad (6.9)$$

místo přesného

$$\omega^2 = \frac{3 EJ}{3 EJ + k l_1^3} \cdot \frac{k}{m_2} \quad (6.10)$$

Rozdíl je způsoben tím, že se první mód (6.1) neshoduje se statickou ohybovou čárou.

Když konečně dosadíme  $k \rightarrow \infty$  (hmota tedy bude pevně připojena ke konci nosníku), vyjde z rovnice (6.8)

$$\omega^2 = \omega_1^2 \frac{m_1}{m_1 + 4 m_2} \doteq \frac{3,09 EJ}{l_1^3} \cdot \frac{1}{m_2 + 0,15 m_1} \quad (6.11)$$

Rayleighova metoda (rovněž přibližná), popsaná v literatuře /4/, dává pro tento případ vzorec

$$\omega^2 = \frac{3 EJ}{l_1^3} \cdot \frac{1}{m_2 + 0,136 m_1} \quad (6.12)$$

Základem vzorce (6.12) je statická ohybová čára.

### 3. MODELOVÁNÍ DIREKTIVNÍCH A TLUMICÍCH SIL

Nejjednodušším případem direktivní (vratné) síly je lineární pružina. Síla v takové pružině je přímo úměrná jejímu prodloužení

$$F = ky \quad (30)$$

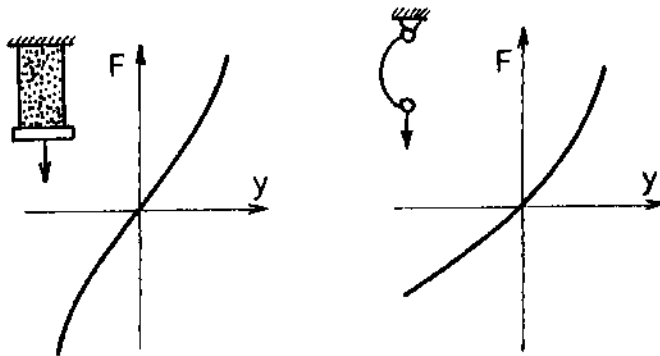
Zde  $k$  je tuhost pružiny  
 $y$  její prodloužení

Za předpokladu lineárního vazkého tlumení máme pro tlumicí sílu obdobný vztah

$$F = c \cdot \dot{y} \quad (31)$$

Konstanta úměrnosti  $c$  značí sílu, která by v tlumiči působila při rychlosti prodlužování  $\dot{y} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pružinu a tlumič tohoto druhu jsme použili v příkladu 2 (obr. 4).

V mnoha případech je idealizace vyjádřená rovnicemi (30), (31) nepřijatelná, neboť jde o nelineární závislosti. Např. pryžový blok nebo pružina ve tvaru písmena C mají deformační charakteristiky podle obr. 11. Lze je popsat polynomem



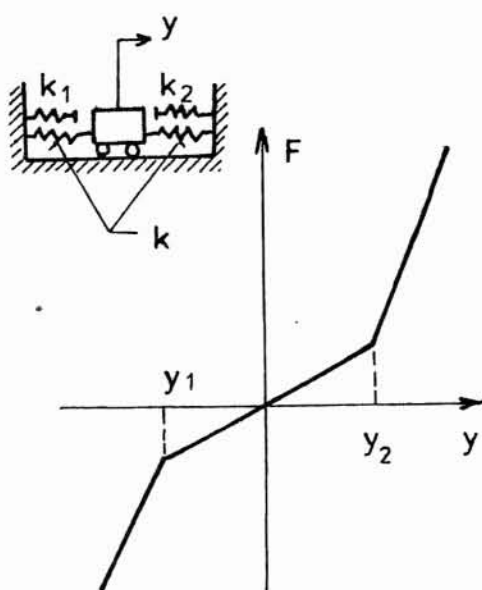
Obr. 11

$$F = k_1 y + k_2 y^2 + k_3 y^3 \quad (32)$$

Pro pryž bývá možné položit  $k_2 = 0$ , pro C-pružinu naopak  $k_3 = 0$ . Obdobně lze modelovat i nelineární tlumiče.

Deformační charakteristika může být i lomená, jak je naznačeno na obr. 12. Jde o kombinaci lineární pružiny s pružnými nárazníky s vůlemi. Pro tento případ bude

$$\begin{aligned} F &= k y & (y_1 \leq y \leq y_2) \\ F &= k y + k_2 (y - y_2) & (y > y_2) \\ F &= k y + k_1 (y - y_1) & (y < y_1) \end{aligned} \quad (33)$$



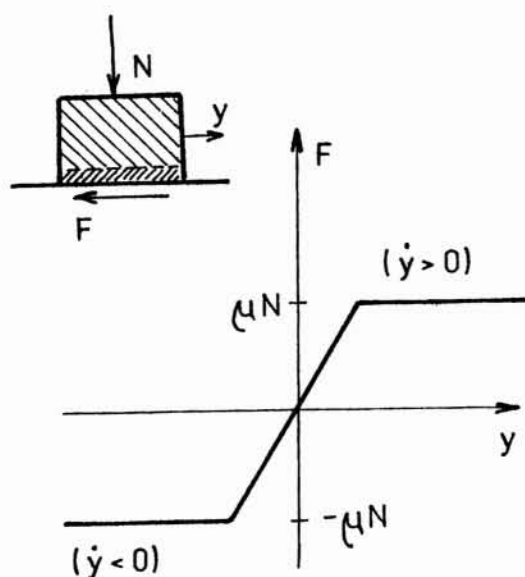
Obr. 12

Zvláštní pozornost si zaslouhuje suché tření. Přenáší-li se v dotykové ploše na obr. 13 normálová síla  $N$  (která může být jen tlaková), pak síla  $F$ , která působí proti pohybu, nemůže být podle Coulombova zákona větší než součin  $\mu N$  ( $\mu$  je součinitel tření). Pohyb může nastat jen tehdy, dosáhne-li síla  $F$  velikosti této smykové síly, tj. je-li  $F = \pm \mu N$ . Jinak vzniká adheze, těleso se nepohybuje. V průběhu vratné síly v závislosti na rychlosti relativního pohybu vzniká proto nespojitost.

Představíme-li si však, že těleso není absolutně tuhé, vznikne určitý pohyb či deformace povrchové vrstvy i za adheze povrchových vrstev. Vratnou sílu pak můžeme modelovat v souladu s obr. 13 takto:

$$\begin{aligned}
 F &= \mu N & (k_f y > \mu N) \\
 F &= k_f y & (-\mu N \leq k_f y \leq \mu N) \\
 F &= -\mu N & (k_f y \leq -\mu N)
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

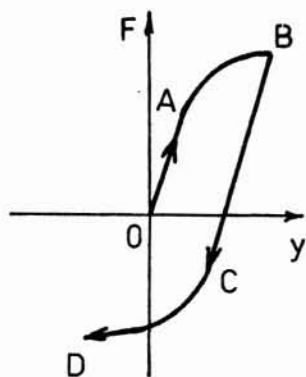
Vztahy (34) mají tu přednost, že závislost  $F(y)$  je spojitá. Souřadnice  $y$  se přitom měří od místa, kde byla hmota naposledy v relativním klidu a bez působení hnací síly (tedy při  $F = 0$ ). Tato spojitost se projevuje příznivě i ve výsledcích numerických výpočtů kmitajících soustav se třením.



Obr. 13

Suché tření má podobnou deformační charakteristiku jako ideální plasticita. Při jednoosé deformaci se elastickoplastický materiál de-

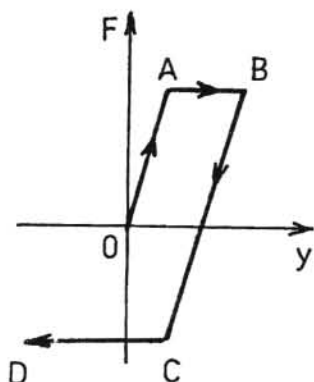
formuje nejprve elasticky (úsečka OA, obr. 14) a pak plasticky (čára AB). Při odlehčení vzniknou opět nejprve elastické deformace (úsečka BC) a pak teprve plastické (čára CD). Někdy se tento průběh idealizuje tak, že se nahrazuje lomenou čárou podle obr. 15. Úsečka AB představuje plastické deformace bez zpevnění, a tedy tzv. ideální plasticitu. Charakteristika na obr. 15 je analogická s obr. 13.



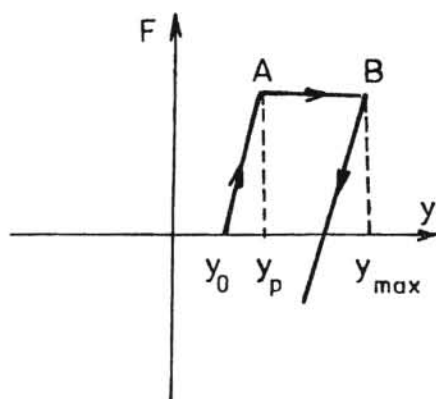
Obr. 14

Počátek zatěžování ( $F = 0$ ) může mít v čase  $t = 0$  nenulovou hodnotu  $y_0$  (obr. 16). Vzorci pro výpočet síly  $F$  se budou lišit podle toho, půjde-li o prodlužování ( $\dot{y} > 0$ ), nebo o zkracování ( $\dot{y} < 0$ ). Meze plastických deformací se dosáhne při výchylce  $y = y_p$  (obr. 16). Zřejmě

$$y_p = y_0 + \frac{P_t}{k} \quad (35)$$



Obr. 15



Obr. 16

kde  $P_t$  je síla na mezi plastických deformací při tahu. Obdobnou tlakovou sílu označíme  $P_d$ . Síly  $P_t$ , resp.  $P_d$ , jsou kladné. Naproti tomu síla  $F$  je buď kladná, je-li tahová, nebo záporná, jde-li o tlak.

Je-li  $\dot{y} > 0$ , nastává buď elastické prodlužování, nebo plastická deformace. Tedy

$$\begin{aligned} F &= P_t - (y_p - y)k & (y < y_p) \\ F &= P_t & (y \geq y_p) \end{aligned} \quad (36)$$

Změní-li se smysl  $\dot{y}$ , změní se i smysl zatěžování. Nechť se tak stane v bodě B na obr. 16. Tehdy bude  $y = y_{max}$ ,  $\dot{y} = 0$ . V následujícím okamžiku nastane odlehčení, tj.  $\dot{y} < 0$ . Pak

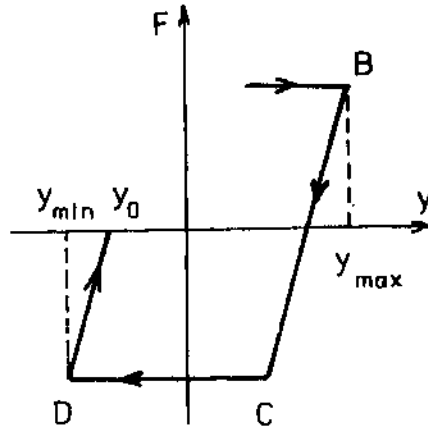
$$\begin{aligned} F &= P_t - (y_{max} - y)k & (y_{max} - (P_d + P_t)/k < y < y_{max}) \\ F &= -P_d & (y < y_{max} - (P_d + P_t)/k) \end{aligned} \quad (37)$$

Nastane-li v bodě D na obr. 17 opět změna smyslu  $\dot{y}$ , bude pro  $\dot{y} > 0$

$$F = -P_d + (y - y_{min})k \quad (y < y_{min} + P_d/k) \quad (38)$$

Když  $y \geq y_{min} + P_d/k$ , začne nový cyklus s novou hodnotou

$$y_0 = y_{min} + P_d/k \quad (39)$$



Obr. 17

Zcela obdobným způsobem lze matematicky modelovat smyčky v pracovním diagramu obecně plastického materiálu podle obr. 14. Rozdíl je jen v tom, že tvar křivek AB, resp. CD, je dán experimentálně a může být zadán třeba i jen tabulkou hodnot.

### Příklad 7

Vozidlo je při kmitání ve vertikálním směru uloženo na nelineární pružině s nárazníkem a s tlumičem, který má jinou konstantu tlumení při pohybu nahoru než při pohybu dolů. Napište vzorce pro vratnou sílu v takovém uložení.

### Řešení

Schéma uložení je zakresleno na obr. 18. Vratná síla má velikost  $F$ .

Pro  $y \leq y_0$  je

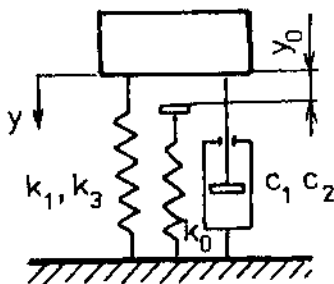
$$F = k_1 y + k_3 y^3 + c_1 \dot{y} \quad (\dot{y} \geq 0)$$

$$F = k_1 y + k_3 y^3 + c_2 \dot{y} \quad (\dot{y} < 0) \quad (7.1)$$

Pro  $y > y_0$  bude

$$F = (k_0 + k_1) y + k_3 y^3 + c_1 \dot{y} \quad (\dot{y} \geq 0)$$

$$F = (k_0 + k_1) y + k_3 y^3 + c_2 \dot{y} \quad (\dot{y} < 0) \quad (7.2)$$



Obr. 18

Přitom předpokládáme, že nelineární pružina má charakteristiku ve tvaru liché funkce zakreslené na obr. 11 vlevo, kterou lze dostatečně přesně popsat kubickou rovnicí

$$F_n = k_1 y + k_3 y^3 \quad (7.3)$$

Zde  $F_n$  je síla v nelineární pružině.

#### 4. APLIKACE KONEČNÝCH DIFERENCÍ

Spojité těleso s nekonečným počtem stupňů volnosti lze nahradit soustavou s konečným počtem stupňů volnosti také tak, že nedokončíme limitní přechod k nekonečně malým funkčním přírůstkům a ponecháme ve výpočtu konečné diference (rozdíly) místo nekonečně malých diferenciálů.

Máme-li např. funkci  $y(x)$ , která je spojitá a má potřebné derivace, můžeme vyjádřit funkční hodnotu  $y(x+h)$  extrapolací z bodu  $x$  užitím Taylorovy řady

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{1!} y'(x)h + \frac{1}{2!} y''(x)h^2 + \frac{1}{3!} y'''(x)h^3 + \dots + \frac{1}{n!} y^{(n)}(x)h^n + Z_{n+1} \quad (40)$$

Zbytek  $Z_{n+1}$  řady obsahuje členy s vyššími mocninami než  $h^n$ .

Napišme tuto řadu např. pro body

$$x_{-1} = x - h \quad x_0 = x \quad x_1 = x + h \quad (41)$$

Bude

$$\begin{aligned} y_{-1} &= y_0 - y_0' h + \frac{1}{2} y_0'' h^2 + Z_3 \\ y_0 &= y_0 \\ y_1 &= y_0 + y_0' h + \frac{1}{2} y_0'' h^2 + Z_3^* \end{aligned} \quad (42)$$

Použili jsme označení  $y_{-1} = y(x_{-1})$ ,  $y_0 = y(x_0)$ ,  $y_1 = y(x_1)$ .  
 Když první a třetí rovnici v soustavě (42) navzájem odečteme, dostaneme

$$y_1 - y_{-1} = 2y_0' h + z_3^* - z_3 = 2y_0' h + z_3^{**} \quad (43)$$

Odtud vypočteme první derivaci v bodě  $x = x_0$

$$y_0' = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + O(h^2) \quad (44)$$

Zde  $O(h^2)$  znamená člen, který při  $\lim h = 0$  vymizí s kvadrátem difference  $h$ . Zmenší-li se  $h$  např. dvakrát, zmenší se  $O(h^2)$  čtyřikrát; to platí tím přesněji, čím menší je  $h$  v absolutní hodnotě. Je zvykem definovat diferenční vzorce s krokem  $h > 0$ , takže poznámka o absolutní hodnotě je zbytečná. To budeme napříště předpokládat. Je zřejmé, že při dostatečně malém  $h$  můžeme člen  $O(h^2)$  zanedbat.

Kdybychom první derivaci vypočítali jednoduše přímo z první z rovnic (42), vyšlo by

$$y_0' = \frac{y_0 - y_{-1}}{h} + O(h) \quad (45)$$

Obdobný vzorec bychom mohli získat i z poslední z rovnic (42). Výraz  $O(h)$  znamená, že rychlost konvergence při  $h \rightarrow 0$  je o jeden řád menší než u vzorce (44) [zmenší-li se krok  $h$  např. dvakrát, zmenší se  $O(h)$  přibližně také jen dvakrát, ale  $O(h^2)$  čtyřikrát]. To však neznamená, že při daném  $h$  je chyba vzorce (44) menší než chyba vzorce (45); může být menší, ale nemusí. Proto pro symbol  $O(h^n)$  zásadně nepoužíváme pojmenování "chyba".

Ze soustavy (42) můžeme vyloučit  $y_0'$  a vypočítat druhou derivaci  $y_0''$  v bodě  $x = x_0$ . Vyjde

$$y_0'' = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} + O(h^2) \quad (46)$$

Chceme-li odvodit vzorce i pro derivace vyšších řádů, musíme vzorec (40) rozepsat pro větší počet bodů [např. ještě pro  $y_{-2} = y(x-2h)$ ,  $y_1 = y(x+2h)$  atd.]. Rozdíly argumentů nemusí být přitom nutně stejné (můžeme zvolit různé difference  $h_1, h_2$  atd.) a zvolené body nemusí být k výpočtovému bodu  $x = x_0$  souměrné.



Pro druhou derivaci bychom mohli např. odvodit také vzorec

$$y_0'' = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + O(h) \quad (47)$$

(dopředná diference) nebo

$$y_0'' = \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} + O(h) \quad (48)$$

(zpětná diference). Vzorec (46), jehož rychlost konvergence je o řád větší, využívá centrální diference (výpočtový bod je uprostřed).

Obdobně lze odvodit diferenční formule i pro funkce několika proměnných. Podrobnostmi se však nebudeme zabývat, odkazujeme např. na lit. /6/.

### Příklad 8

Odvoďte vzorec pro druhou derivaci funkce  $y(x)$  s využitím zpětných diferencí, který by měl rychlost konvergence  $O(h^2)$ .

### Řešení

Rozepíšeme vzorec (40) pro body  $x_0, x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, x_{-4}$  a vyloučíme  $y_0', y_0''$ . Pak vypočteme

$$y_0'' = \frac{13y_0 - 28y_{-1} + 14y_{-2} + 4y_{-3} - 3y_{-4}}{6h^2} + O(h^2) \quad (8.1)$$

Kontrolou může být "ladicí příklad"  $y = 1$ . Je to přímka rovnoběžná s osou  $x$ . Její druhá derivace musí vyjít nulová, takže součet koeficientů vzorce (8.1) musí dávat nulu:

$$13 - 28 + 14 + 4 - 3 = 0$$

Právě tak musí vyjít nula pro posloupnost  $y_0 = 1, y_{-1} = 2, y_{-2} = 3, y_{-3} = 4, y_{-4} = 5$ . Vskutku

$$13 \cdot 1 - 28 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 0$$

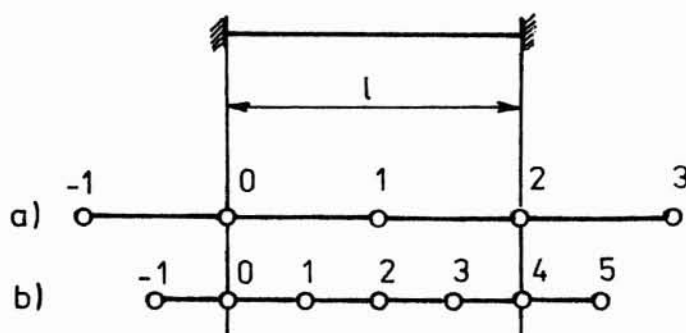
Přesně musí vyjít i druhá derivace kvadratické paraboly  $y = (x-1)^2$ , tj. musí vyjít  $y_0'' = 2$ . Bude  $y_{-k} = (-kh - 1)^2$ . Dosazením do rovnice (8.1) vyjde pro  $h = 1$

$$y_0'' = \frac{13.1 - 28.4 + 14.9 + 4.16 - 3.25}{8} = 2$$

Vzorec (8.1) nemusí být nutně lepší než vzorec (48). To závisí na velikosti kroku  $h$  a na průběhu aproximované funkce. Vzorec (8.1) získá "převahu" nad vzorcem (48) teprve při "dostatečně malém" kroku  $h$ .

### Příklad 9

S použitím konečných diferencí navrhnete matematický model pro výpočet nejnižší frekvence volného kmitání prizmatického nosníku na obou koncích vetknutého (obr. 19).



Obr. 19

### Řešení

Pro kmitání štíhlého prizmatického nosníku platí podle /4/ parciální diferenciální rovnice parabolického typu

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{qS}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (9.1)$$

Čtvrtou derivaci  $\partial^4 w / \partial x^4$  nahradíme centrálním diferenčním vzorcem

$$w_0^{(4)} = \frac{1}{h^4} (w_{-2} - 4w_{-1} + 6w_0 - 4w_1 + w_2) + O(h^2) \quad (9.2)$$

Začneme s nejhrubším možným dělením a zvolíme  $h = l/2$ . Vzorec (9.2) aplikujeme na bod 1 (obr. 19 a)

$$\frac{16}{l^4} (W_{-1} - 4W_0 + 6W_1 - 4W_2 + W_3) + \frac{\rho S}{EJ} \ddot{W}_1 = 0 \quad (9.3)$$

Parciální derivaci podle času jsme vyznačili tečkami. Rovnice (9.3) je diferencním přepisem vztahu (9.1) s rychlostí konvergence  $O(h^2)$ . Okrajové podmínky jsou

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 & W_1 - W_{-1} &= 0 \\ W_2 &= 0 & W_3 - W_1 &= 0 \end{aligned} \quad (9.4)$$

Popisují vetknutí nosníku v bodech 0 a 2; úhel otočení tečny k ohybové čáře je vyjádřen pomocí vzorce (44), který má rovněž rychlost konvergence  $O(h^2)$ . Tento úhel je ovšem v místě vetknutí nulový. Je vždy výhodné, když okrajové podmínky mají stejnou rychlost konvergence jako základní rovnice popisující daný problém.

Z rovnic (9.4) dosadíme do (9.3). Vyjde

$$W_1 + \frac{\rho S l^4}{128 EJ} \ddot{W}_1 = 0 \quad (9.5)$$

To je známá diferenciální rovnice harmonického pohybu o jednom stupni volnosti. Kvadrát kruhové frekvence tohoto pohybu je

$$\omega_1^2 = \frac{128 EJ}{\rho S l^4} \quad (9.6)$$

O přesnosti vzorce (9.6) nevíme dosud nic. Proto zvolíme jiný krok a výpočet zopakujeme. Nejjednodušší bude, rozdělíme-li dosavadní krok na polovinu, tj. zvolíme  $h = l/4$  (obr. 19 b). Vzorec (9.2) aplikujeme na body 1, 2, 3. Dostaneme soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{256}{l^4} (W_{-1} - 4W_0 + 6W_1 - 4W_2 + W_3) + \frac{\rho S}{EJ} \ddot{W}_1 &= 0 \\ \frac{256}{l^4} (W_0 - 4W_1 + 6W_2 - 4W_3 + W_4) + \frac{\rho S}{EJ} \ddot{W}_2 &= 0 \\ \frac{256}{l^4} (W_1 - 4W_2 + 6W_3 - 4W_4 + W_5) + \frac{\rho S}{EJ} \ddot{W}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9.7)$$

Okrajové podmínky jsou

$$\begin{aligned} w_0 &= 0 & w_4 - w_1 &= 0 \\ w_4 &= 0 & w_5 - w_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9.8)$$

Podmínky (9.8) dosadíme do (9.7) a budeme mít

$$\begin{aligned} 7w_1 - 4w_2 + w_3 + \frac{\rho S l^4}{256 EJ} \ddot{w}_1 &= 0 \\ -4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + \frac{\rho S l^4}{256 EJ} \ddot{w}_2 &= 0 \\ w_1 - 4w_2 + 7w_3 + \frac{\rho S l^4}{256 EJ} \ddot{w}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

Tuto soustavu zapíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} + \frac{\rho S l^4}{256 EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.10)$$

Zkráceně

$$[K] \{q\} + [M] \{\ddot{q}\} = \{0\} \quad (9.11)$$

Pro harmonické kmitání bude platit předpis

$$\{q\} = \{\bar{q}\} \sin \omega t \quad (9.12)$$

v němž  $\{\bar{q}\}$  je konstantní vektor. Dosazením (9.12) do (9.11) vyjde frekvenční rovnice jako podmínka existence netriviálního řešení ve tvaru

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (9.13)$$

Protože počítáme na papíře, a nikoli na počítači, využijeme souměrnosti modálního tvaru pro nejnižší vlastní frekvenci, tj. dosadíme  $w_2 = w_1$ . Ze vztahů (9.9) dostaneme

$$\begin{aligned}
 8W_1 - 4W_2 + \frac{\rho S \ell^4}{256 EJ} \ddot{W}_1 &= 0 \\
 -8W_1 + 6W_2 + \frac{\rho S \ell^4}{256 EJ} \ddot{W}_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.14}$$

S označením

$$c^2 = \omega^2 \frac{\rho h^4}{EJ} = \omega^2 \frac{\rho S \ell^4}{256 EJ}
 \tag{9.15}$$

odtud získáme frekvenční rovnici ve tvaru determinantu

$$\begin{vmatrix} (8-c^2) & -4 \\ -8 & (6-c^2) \end{vmatrix} = 0
 \tag{9.16}$$

čili

$$c^4 - 14c^2 + 16 = 0
 \tag{9.17}$$

Menší z obou kořenů je  $c^2 = 7 - \sqrt{33} \doteq 1,255\,437$ . Takže

$$\omega_1^2 \doteq 321,4 \frac{EJ}{\rho S \ell^4}
 \tag{9.18}$$

Vzorce (9.6) a (9.18) se značně liší, což je zřejmě způsobeno příliš hrubým dělením definičního intervalu. Zvolíme proto  $h = \ell/8$  a výpočet zopakujeme. Využijeme-li opět souměrnosti prvního tvaru kmitu, dostaneme frekvenční rovnici ve tvaru

$$\begin{vmatrix} (7 - c^2) & -4 & 1 & 0 \\ -4 & (6 - c^2) & -4 & 1 \\ 1 & -4 & (7 - c^2) & -4 \\ c & 2 & -8 & (6 - c^2) \end{vmatrix} = 0
 \tag{9.19}$$

čili

$$c^8 - 26c^6 + 186c^4 - 316c^2 + 32 = 0
 \tag{9.20}$$

Nejmenší kořen této rovnice je

$$c^2 \doteq 0,108 \ 03$$

Zvolili jsme však  $h = \ell/8$ , takže nyní bude

$$c^2 = \frac{\varrho S \ell^4}{8^4 E J} = \frac{\varrho S \ell^4}{4096 E J} \quad (9.21)$$

a kvadrát nejnižší kruhové frekvence vyjde

$$\omega_1^2 \doteq 442,5 \frac{E J}{\varrho S \ell^4} \quad (9.22)$$

Správná hodnota je (podle tab. 1)

$$\omega_1^2 \doteq 500,5 \frac{E J}{\varrho S \ell^4} \quad (9.23)$$

Chyba vzorce (9.22) je tedy stále ještě asi 11,6 %, tj. ve výpočtu kruhové frekvence  $\omega_1$  (po odmocnění) asi 6 %.

Konvergence je tedy relativně pomalá. Přestože chyba vzorce (9.2) pro výpočet čtvrté derivace konverguje s rychlostí  $O(h^2)$ , nelze to tvrdit o vypočtených hodnotách  $\omega_1^2$ . Proto zde nelze použít Richardsonova vzorce, o němž se zmíníme v dalším příkladu.

### Příklad 10

Předpokládejte, že nosník na obr. 19 je rovnoměrně zatížen liniovou silou  $q$  ( $N \cdot m^{-1}$ ) a pomocí diferenčního počtu určete jeho průhyb.

### Řešení

Pro průhyb  $w(x)$  nosníku platí známá diferenciální rovnice

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{E J} \quad (10.1)$$

kteřou aproximujeme diferenční rovnicí dosazením výrazu (9.2) za čtvrtou derivaci.

Je-li krok  $h = \ell/2$  (obr. 19 a), dostaneme obdobně k rovnici (9.5)

$$w_1 = \frac{q \ell^4}{128 EJ} = 7,8125 \frac{q \ell^4}{10^3 EJ} = w_{\max} \quad (10.2)$$

Je to průhyb uprostřed nosníku. Zvolíme-li podle obr. 19 b krok  $h = \ell/4$ , vyjde (s využitím souměrnosti)

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \frac{q \ell^4}{256 EJ} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (10.3)$$

Odtud vypočteme průhyby v bodech 1 a 2 :

$$w_1 = 2,4414 \frac{q \ell^4}{10^3 EJ} \quad w_2 = 3,9062 \frac{q \ell^4}{10^3 EJ} = w_{\max} \quad (10.4)$$

Konečně pro  $h = \ell/8$  dostaneme maticovou rovnici

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} = \frac{q \ell^4}{4096 EJ} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (10.5)$$

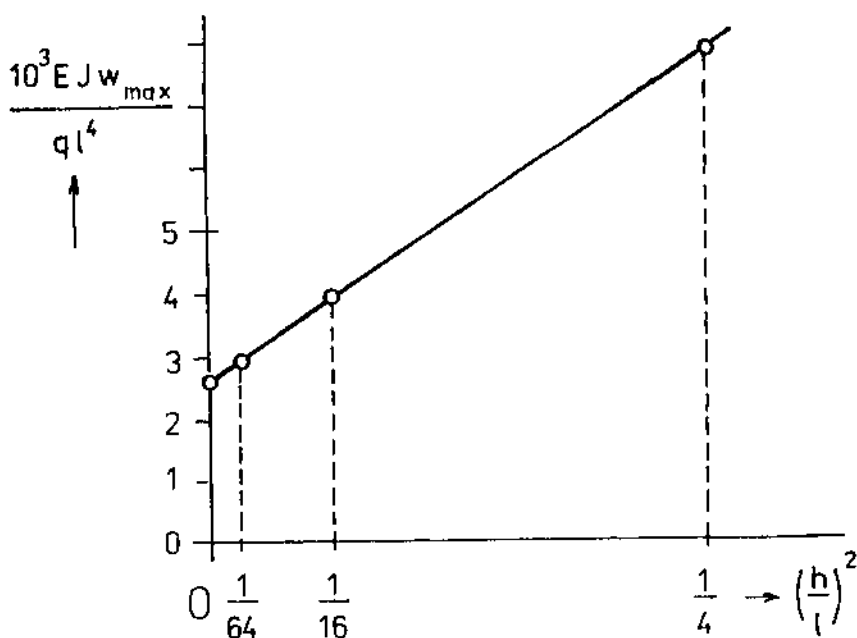
s řešením

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,6408 \\ 1,7089 \\ 2,5939 \\ 2,9296 \end{Bmatrix} \frac{q \ell^4}{10^3 EJ} \quad (10.6)$$

V tomto případě

$$w_{\max} = w_4 = 2,9296 \frac{q \ell^4}{10^3 EJ} \quad (10.7)$$

Hodnoty maximálních průhybů zde konvergují s rychlostí  $O(h^2)$ . To znamená, že závislost vypočtených průhybů  $w_{\max}$  na hodnotě  $h^2$  bude velmi přibližně lineární. Linearita bude tím přesnější, čím menší bude krok  $h$ . Uvedená zákonitost je zřejmá z obr. 20. Lze ji využít k extrapolaci výsledků do hodnoty  $w_{\max}$  pro  $h = 0$ . Tomuto nulovému kroku odpovídá "přesné" řešení, totiž řešení, které dostaneme z diferenciální rovnice. K takové extrapolaci stačí úměra.



Obr. 20

Je-li např. pro  $h = h_1$  vypočten průhyb  $w_{max1}$  a pro  $h = h_2$  průhyb  $w_{max2}$ , bude hodnotě  $h = 0$  příslušet průhyb

$$w_{max0} = \frac{w_{max1} h_2^2 - w_{max2} h_1^2}{h_2^2 - h_1^2} \quad (10.7)$$

Extrapoláční vzorec (10.7) je známá Richardsonova formule.

V našem případě je

$$\frac{10^3 E J}{q l^4} w_{max1} = 3,9062 \quad (h_1 = l/4)$$

$$\frac{10^3 E J}{q l^4} w_{max2} = 2,9296 \quad (h_2 = l/8)$$

takže

$$\frac{10^3 E J}{q l^4} w_{max0} = \frac{3,9062 / 8^2 - 2,9296 / 4^2}{1 / 8^2 - 1 / 4^2} = 2,60407$$



Přesná hodnota je ve skutečnosti 2,604 17, takže chyba extrapolované hodnoty je jen asi 0,004 %.

#### Poznámka

Je-li rychlost konvergence  $O(h^n)$ , dosadíme do Richardsonovy formule  $h_1^n$ , resp.  $h_2^n$ , místo  $h_1^2$ , resp.  $h_2^2$ . Rigorózně lze této formule použít jen tehdy, je-li rychlost konvergence všech diferencních výrazů použitých ve výpočtu stejná (v definiční oblasti i v okrajových podmínkách).

### 5. NUMERICKÁ INTEGRACE POHYBOVÝCH ROVNIC

Až dosud jsme použili diferencních vzorců jen pro aproximaci derivací podle prostorových souřadnic. Integraci v časové oblasti jsme uskutečňovali analyticky, což je snadné, jde-li o harmonický pohyb. Avšak kmity mohou být mnohem složitější a pohybové rovnice mohou být i nelineární. Pak je často výhodnější numerický postup.

Numerickou integraci v čase ukážeme na soustavě pohybových rovnic ve tvaru

$$[M]\{\ddot{q}\} = \{p\} \quad (49)$$

kde  $\{p\}$  je vektor vzniklý sloučením vnějších sil, tlumicích sil a vratných sil. Změníme na okamžik způsob označení a napíšeme rovnici (49) užitím zdvojených symbolů ve tvaru

$$M\ddot{q} = p(q, \dot{q}) \quad (50)$$

Lépe by bylo použít půltučných písmen, jak je to v tištěných textech obvyklé. Se zřetelem na rozmnožovací techniku jsme dali přednost zdvojeným typům písma. Nový způsob označení nám umožnil naznačit, že vektor sil je obecně nelineární funkcí zobecněných posuvů a rychlostí (srovnej s kapitolou 3).

Použijeme-li centrálních diferencí k výpočtu druhé derivace na levé straně rovnice (50), bude podle (46)

$$\ddot{q}_k \approx \frac{q_{k-1} - 2q_k + q_{k+1}}{(\Delta t)^2} \quad (51)$$

První derivace  $\dot{q}$  v čase  $t = t_k$ , která vstupuje do pravé strany rovnice (50), musí být vyjádřena zpětnými diferencemi, přinejmenším v tom případě, je-li zastoupena v citované rovnici nelineárně. Použijeme-li vzorce (45), dostaneme

$$\dot{q}_k \approx \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t} \quad (52)$$

Když výrazy (51), (52) dosadíme do (50), můžeme vypočítat

$$q_{k+1} = 2q_k - q_{k-1} + (\Delta t)^2 M^{-1} p^*(q_k, \dot{q}_{k-1}) \quad (53)$$

To znamená, že pro  $k = 0, 1, 2, \dots$  dostaneme posloupnost řešení  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , jsou-li známy počáteční hodnoty  $q_0, \dot{q}_0$ . Má-li být řešení věrohodné, musí být časový krok  $h$  přiměřeně malý. Zvolíme-li  $h$  příliš velké, pak nejen že vzrostou chyby řešení, ale může se přihodit i to, že se výsledky výpočtu budou od správných hodnot téměř exponenciálně vzdalovat (řešení ztratí numerickou stabilitu). Při příliš malých hodnotách  $h$  budeme např. v rovnici (52) odečítat dvě skoro stejně velké veličiny, takže mohou vzrůst zaokrouhlovací chyby; mimoto naroste výpočtový čas.

Metoda centrálních diferencí, kterou jsme právě vysvětlili, je zvláště výhodná, je-li matice hmotnosti diagonální. K výpočtu inverzní matice totiž stačí vypočítat inverzní hodnoty prvků na diagonále matice.

Poněkud jinou metodu navrhl Newmark. Abychom se vyhnuli psaní zdvojených písmen, vyložíme ji na případu s jedním stupněm volnosti. Zobecnění na libovolný počet stupňů volnosti je evidentní. Řešme tedy rovnici

$$\ddot{q} = m^{-1} p(q, \dot{q}) \quad (54)$$

Předpokládejme, že v čase  $t = t_0$  známe  $q_0, \dot{q}_0, \ddot{q}_0$ . Kdyby bylo zrychlení  $\ddot{q}_0$  v intervalu  $(t_0, t_1)$  konstantní, rovné aritmetickému průměru  $0,5 (\ddot{q}_0 + \ddot{q}_1^*)$ , v němž  $\ddot{q}_1^*$  je předpokládaná (odhadnutá) hodnota zrychlení v čase  $t = t_1$ , bylo by možné získat integrací v uvedeném intervalu rychlost i výchylku. S označením  $\Delta t = t_1 - t_0$  by vyšlo

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \dot{q}_0 + \frac{1}{2} (\ddot{q}_0 + \ddot{q}_1^*) (\Delta t) \\ q_1 &= q_0 + \dot{q}_0 (\Delta t) + \frac{1}{4} (\ddot{q}_0 + \ddot{q}_1^*) (\Delta t)^2\end{aligned}\quad (55)$$

Z rovnice (54) vypočteme

$$\ddot{q}_1 = m^{-1} p(q_1, \dot{q}_1) = m^{-1} p^*(\ddot{q}_1^*) \quad (56)$$

Výraz na pravé straně (56) vznikl dosazením (55), takže zobecněná síla  $p^*$  je funkcí zrychlení  $\ddot{q}_1^*$ . Obě tyto hodnoty jsou zatíženy chybou plynoucí z odhadu hodnoty  $\ddot{q}_1^*$ . Když nově vypočtenou hodnotu  $\ddot{q}_1$  dosadíme z rovnice (56) za dosavadní odhadnutou hodnotu  $\ddot{q}_1^*$  a výpočet zopakujeme, dostaneme přesnější hodnotu  $\ddot{q}_1$ . Pokračujeme tak dlouho, až se tato nová hodnota zrychlení od předchozí hodnoty téměř neliší (liší se nanejvýš o zvolenou velmi malou toleranci). Pak zaměníme index 0 za 1 a index 1 za 2 a počítáme stejným iteračním postupem  $\ddot{q}_2$ . Jako vedlejší výstupy přitom získáme z rovnic (55) i hodnoty  $\dot{q}_2, q_2$ . Výpočet pak pokračuje další změnou indexů krok za krokem.

Místo předpokladu konstantního průměrného zrychlení v každém kroku můžeme předpokládat jeho lineární průběh \*)

$$\ddot{q}(t) = \ddot{q}_0 + \frac{\ddot{q}_1 - \ddot{q}_0}{\Delta t} (t - t_0) \quad (57)$$

a vypočítat

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \dot{q}_0 + \frac{1}{2} (\ddot{q}_0 + \ddot{q}_1) (\Delta t) \\ q_1 &= q_0 + \dot{q}_0 (\Delta t) + \frac{1}{6} (2\ddot{q}_0 + \ddot{q}_1) (\Delta t)^2\end{aligned}\quad (58)$$

Rovnice (58) nastoupí místo (55). Další postup je stejný.

Newmark navrhl cosi mezi oběma dosud probranými případy, totiž

---

\*) Hvězdičku nad symbolem  $\ddot{q}_1$  jsme již pro větší přehlednost vynechali.

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_0 + \frac{1}{2} (\ddot{q}_0 + \ddot{q}_1)(\Delta t)$$

$$q_1 = q_0 + \dot{q}_0(\Delta t) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{q}_0 (\Delta t)^2 + \beta \ddot{q}_1 (\Delta t)^2 \quad (59)$$

Pro  $\beta = \frac{1}{4}$  vyjde z rovnic (59) soustava (55). Pro  $\beta = \frac{1}{6}$  dostaneme (58). Je-li  $\beta \geq \frac{1}{4}$ , je řešení lineárních rovnic mechaniky popsanou Newmarkovou metodou vždy stabilní. Je-li  $\beta < \frac{1}{4}$ , je řešení stabilní pouze za podmínky, že  $\Delta t$  je dostatečně malé. Jde-li o nelineární úlohy, je obecný důkaz numerické stability obtížný a hranici stability lze často určit jen numerickým experimentem. \*)

Existují i jiné integrační metody, je jich dokonce velmi mnoho. Nebudeme je však probírat. Mnohé z nich jsou uvedeny v literatuře /7/.

### Příklad 11

Metodou centrálních diferencí řešte pohybovou rovnici

$$\ddot{y} + y = 0$$

s počátečními podmínkami  $y_0 = 0$ ,  $\dot{y}_0 = 1$ . Stanovte velikost časového kroku na mezi numerické stability.

### Řešení

Metoda centrálních diferencí dává integrační schéma

$$y_{k+1} = [2 - (\Delta t)^2] y_k - y_{k-1} \quad (11.1)$$

Dostali jsme je aplikací vzorce (46) pro  $h = \Delta t$ . Pro začátek  $k = 0$  potřebujeme znát hodnoty  $y_0$ ,  $y_{-1}$ . Jedna z těchto hodnot je přímo dána. Druhou vypočteme za předpokladu, že se rychlost  $\dot{y}_0$  v průběhu předchozího kroku nezměnila. Tento předpoklad dává totéž co zpětná diference (45), totiž

$$y_{-1} = y_0 - \dot{y}_0 (\Delta t) = -\Delta t \quad (11.2)$$

Zvolíme postupně  $\Delta t = 0,5$ ,  $\Delta t = 0,25$ ,  $\Delta t = 0,125$  a dostaneme hodnoty uvedené v tab. 2. Jsou tam porovnány s exaktním řešením

$$y = \sin t \quad (11.3)$$

---

\*) Různé způsoby určení meze stability integračních metod, a to i pro nelineární úlohy, lze najít např. v práci /33/.

Výpočet  $y(t)$  s integračním krokem  $\Delta t$  (příklad 11)

Tab. 2

$t$	$\Delta t = 0,5$	$\Delta t = 0,25$	$\Delta t = 0,125$	$\sin t$
0,0	0	0	0	0
0,125			0,125	0,124 7
0,25		0,25	0,248 0	0,247 4
0,375			0,367 2	0,366 3
0,5	0,5	0,484 4	0,480 7	0,479 4
0,625			0,586 6	0,585 1
0,75		0,688 5	0,683 3	0,681 6
0,875			0,769 4	0,767 5
1,0	0,875 0	0,849 5	0,843 5	0,841 5
1,125			0,904 4	0,902 3
1,25		0,957 5	0,951 1	0,949 0
1,375			0,983 0	0,980 9
1,5	1,031 3	1,005 7	0,999 5	0,997 5
1,625			1,000 4	0,998 5
1,75		0,990 9	0,985 7	0,984 0
1,875			0,955 6	0,954 1
2,0	0,929 7	0,914 3	0,910 5	0,909 3

Chyba hodnoty  $y(2)$  vypočítané s krokem  $\Delta t = 0,125$  je pouze 1,3 promile.

Nyní se pokusíme určit mez numerické stability. Diferenční rovnici (11.1) řešme substitucí

$$y_k = y_0 \beta^k \quad (11.4)$$

kde  $\beta$  a  $y_0$  jsou konstanty. Posloupnost  $y_k$  zřejmě tvoří podle (11.4) geometrickou řadu s kvocientem  $\beta$ . Po dosazení do (11.1) dostaneme

$$y_0 \beta^{k+1} = [2 - (\Delta t)^2] y_0 \beta^k - y_0 \beta^{k-1} \quad (11.5)$$

a tedy

$$\beta^2 - [2 - (\Delta t)^2] \beta + 1 = 0 \quad (11.6)$$

Tato kvadratická rovnice má řešení

$$\beta = 1 - \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \pm \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{1}{4} (\Delta t)^4} \quad (11.7)$$

Nemá-li řešení (11.4) růst nade všechny meze, musí být  $|\beta| \leq 1$ . Odtud vyplývá požadavek, aby

$$\Delta t \leq 2 \quad (11.8)$$

Má-li se dosáhnout dostatečné přesnosti, je radno vzít časový krok  $\Delta t$  asi dvacetkrát menší, než je mez stability, tj. zvolit  $\Delta t \leq 0,1$ .

V obecnějším případě lineární soustavy popsané rovnicemi

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{f(t)\} \quad (11.9)$$

se doporučuje volit

$$\Delta t \leq \frac{1}{10 \omega_{\max}} \quad (11.10)$$

kde  $\omega_{\max}$  je nejvyšší vlastní kruhová frekvence soustavy (11.9) s konečným počtem stupňů volnosti, kterou získáme řešením frekvenční rovnice

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (11.11)$$

Pro časový krok na mezi numerické stability zde totiž platí Courantův vztah

$$\omega_{\max} \Delta t = 2 \quad (11.12)$$

### Příklad 12

Řešte úlohu z příkladu 11 Newmarkovou integrační metodou s parametrem  $\beta = \frac{1}{4}$ .

## Řešení

Jde o aplikaci rovnic (55). Počáteční hodnoty jsou

$$y_0 = 0 \quad \dot{y}_0 = 1 \quad \ddot{y}_0 = 0 \quad (12.1)$$

Poslední z těchto hodnot vyplynula z dané pohybové rovnice

$$\ddot{y} + y = 0 \quad (12.2)$$

Ostatní dvě hodnoty jsou dány jako počáteční podmínky. Odhadneme

$$\ddot{y}_1^* = -y_1^* \cong -\dot{y}_0 (\Delta t) = -\Delta t$$

a dostaneme

$$\dot{y}_1 = 1 - \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \quad (12.3)$$

$$y_1 = \Delta t - \frac{1}{4} (\Delta t)^3 \quad (12.4)$$

V druhé iteraci zvolíme

$$\ddot{y}_1^* = -y_1 = -\Delta t + \frac{1}{4} (\Delta t)^3$$

a vypočteme

$$\dot{y}_1 = 1 - \frac{1}{2} (\Delta t)^2 + \frac{1}{8} (\Delta t)^4 \quad (12.5)$$

$$y_1 = \Delta t - \frac{1}{4} (\Delta t)^3 + \frac{1}{16} (\Delta t)^5 \quad (12.6)$$

atd., až nakonec bude

$$\dot{y}_1 = 1 - \frac{1}{2} (\Delta t)^2 + \frac{1}{8} (\Delta t)^4 - \frac{1}{32} (\Delta t)^6 + \dots \quad (12.7)$$

$$y_1 = 1 - \frac{1}{4} (\Delta t)^3 + \frac{1}{16} (\Delta t)^5 - \frac{1}{64} (\Delta t)^7 + \dots \quad (12.8)$$

Tyto geometrické řady lze sečíst. Dostaneme

$$\dot{y}_1 = \frac{4 - (\Delta t)^2}{4 + (\Delta t)^2} \quad (12.9)$$

$$y_1 = \frac{4 \Delta t}{4 + (\Delta t)^2} \quad (12.10)$$

Je-li  $\Delta t = 0,5$ , vyjde  $\dot{y}_1 = 0,8824$ ,  $y_1 = 0,4706$ . Správné hodnoty jsou  $\dot{y}_1 = 0,8776$ ,  $y_1 = 0,4794$ .\*) Přestože integrační krok je relativně velký, jsou chyby těchto prvních hodnot jen asi 0,5 %, resp. 2 %.

Nyní přistoupíme k výpočtu dalšího kroku, což nebudeme rozepisovat. Celý výpočet lze snadno naprogramovat.

## 6. NÁHRADNÍ MODELY PRO NUMERICKÉ ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE

Začneme s nejjednodušším případem vlnové rovnice pro jednorozměrný prostor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (60)$$

Jde-li o tenkou pružnou tyč s posuvem  $u(x,t)$  je

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (61)$$

přičemž  $E$  je modul pružnosti v tahu - tlaku a  $\rho$  je hustota. Jde-li o průhyb  $u(x,t)$  předepjaté struny, je

$$c^2 = \frac{F}{\rho S} \quad (62)$$

kde  $F$  je předpětí struny a  $S$  její průřez.

---

\*) Srovnej s tab. 2.



Jde-li o šíření podélné vlny v pružném kontinuu (za podmínek jednoosé deformace), je

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (63)$$

kde  $\nu$  je Poissonovo číslo.

Zaměníme-li v rovnici (61) modul pružnosti v tahu - tlaku za modul pružnosti ve smyku, dostaneme rovnici smykové vlny v kontinuu. To již nebudeme rozepisovat.

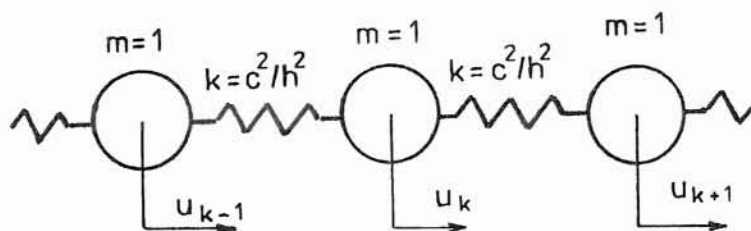
Rovnice (60) tedy může popisovat různé fyzikální vlnové procesy. Můžeme ji nahradit přibližným diferenčním vztahem, když do pravé strany dosadíme výraz (46). Bude

$$\ddot{u}_k = c^2 \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2} \quad (64)$$

Mohli bychom stejným právem nahradit konečnými diferenciemi i levou stranu rovnice (60). Takový postup bychom volili, kdybychom chtěli vlnovou rovnici integrovat v časové oblasti numericky. Protože jsme tento postup orobali v předchozí kapitole, nebudeme se k němu vracet. Takový dvoustranně numerický postup je ostatně podrobně popsán v literatuře /6/.

Nabízí se též možnost nahradit kontinuum popsané parciální diferenční rovnicí (60) soustavou oddělených (tj. "diskrétních") hmot o jednotkové hmotnosti spojených nehmotnými pružinami, z nichž každá má tuhost číselně rovnou  $(c/h)^2$  (obr. 21). Síla v druhé pružině je totiž

$$\left(\frac{c}{h}\right)^2 (u_{k+1} - u_k)$$



Obr. 21

a síla v první pružině

$$\left(\frac{c}{h}\right)^2 (u_k - u_{k-1})$$

Jejich rozdíl

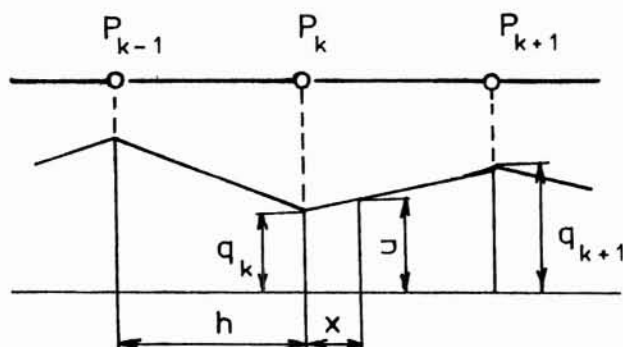
$$\left(\frac{c}{h}\right)^2 (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$$

urychluje pohyb  $k$ -té jednotkové hmoty, takže

$$\ddot{u}_k = \left(\frac{c}{h}\right)^2 (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \quad (65)$$

To však je rovnice (64).

Jinou náhradu získáme metodou konečných prvků. Zvolíme posuvy v ekvidistantních bodech  $\dots, P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, \dots$  za zobecněné souřadnice a mezi nimi zvolíme lineární interpolaci. Např. pro element mezi uzly  $P_k, P_{k+1}$  bude (obr. 22)



Obr. 22

$$u = \left(1 - \frac{x}{h}\right) q_k + \frac{x}{h} q_{k+1} \quad (66)$$

Zde  $h$  je délka elementu (prvku),  $x$  souřadnice měřená od jeho levého konce. Poměrné prodloužení je

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{h} q_k + \frac{1}{h} q_{k+1} \quad (67)$$

Tyto dvě rovnice zapíšeme maticově:

$$\{u\} = \left[ \left(1 - \frac{x}{h}\right) \left(\frac{x}{h}\right) \right] \begin{Bmatrix} q_k \\ q_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (68)$$

$$\{\varepsilon\} = \left[ -\frac{1}{h} \quad \frac{1}{h} \right] \begin{Bmatrix} q_k \\ q_{k+1} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

V nich poznáváme vztahy (7) a (9), takže můžeme využít výsledků odvozených v kapitole 1 a napsat ihned vzorce pro matici hmotnosti a tuhosti, které vstupují do pohybové rovnice (17). V našem případě bude

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{f\} \quad (70)$$

Představíme-li si, že jde o tenkou elastickou tyč, bude matice hmotnosti

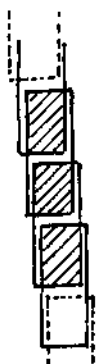
$$\begin{aligned} [M] &= \rho S \int_0^h [A]^T [A] dx = \rho S \int_0^h \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 & \frac{x}{h} \left(1 - \frac{x}{h}\right) \\ \frac{x}{h} \left(1 - \frac{x}{h}\right) & \left(\frac{x}{h}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \\ &= \rho S h \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\rho S = \text{konst.}) \end{aligned} \quad (71)$$

Dosadili jsme  $m = \rho S h$  (hmotnost jednoho elementu). Matice tuhosti vyjde

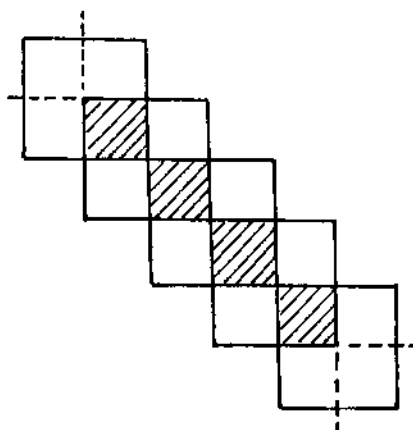
$$\begin{aligned} [K] &= ES \int_0^h [B]^T [B] dx = \frac{ES}{h^2} \int_0^h \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \\ &= \frac{ES}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(72)

Elementární matice (71), resp. (72), platí pro jeden konečný prvek (element). Síly z ostatních prvků se na něho přenášejí v koncových uzlech a vstoupí do vektoru sil  $\{f\}$ . Pro každý z prvků můžeme proto napsat samostatně rovnici (70). Prvky jsou však mezi sebou vázány tak, že posuvy v uzlech, v nichž se prvky stýkají, jsou společné, a vnější síla v daném uzlu se rozdělí mezi oba prvky, které se v uzlu stýkají. A tak se akce působící na pravý konec levého prvku spolu s akcí působící na levý konec pravého prvku v součtu rovnají vnější síle v uzlu (ta je v našem případě volného kmitání nulová). Přeložíme-li tedy jednotlivé elementární vektory řetězovitě přes sebe, jak je znázorněno na obr. 23, budou se položky v překrývajících se místech sčítat a rovnat nule.



Obr. 23



Obr. 24

Vektory  $\{f\}$  však máme dány vzorcem (70), tedy součtem dvou členů, z nichž každý má tvar součinu čtvercové matice s vektorem. To pak znamená, že - nechceme-li součiny předem roznásobit - musíme čtvercové matice uspořádat podle obr. 24 a tam, kde se matice překrývají, položky na stejných místech sečíst. Tak dostaneme pro tyč reprezentovanou dvěma prvky rovnici

$$\frac{ESh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \frac{ES}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (73)$$

a pro tyč rozdělenou na tři prvky

$$\frac{ESh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{Bmatrix} + \frac{ES}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Podobně bychom mohli napsat pohybovou rovnici pro libovolný, ale konečný počet prvků.

Je-li tyč nekonečně dlouhá, budou matice v pohybové rovnici také nekonečně velké, což je ovšem nemožné. Všechny řádky však budou stejné, budou-li i prvky stejné; pouze indexy se budou vždy o jedničku lišit, pokročíme-li od jednoho řádku k následujícímu. Tak pro  $k$ -tý řádek bude

$$\frac{QSh}{6} (\ddot{q}_{k-1} + 4\ddot{q}_k + \ddot{q}_{k+1}) + \frac{ES}{h} (-q_{k-1} + 2q_k - q_{k+1}) = 0 \quad (75)$$

a  $k$  se bude měnit od  $-\infty$  do  $+\infty$  v celočíselných hodnotách. Rovnice (75) představuje další matematický model nekonečně dlouhé tenké pružné tyče. Po úpravě s použitím (61) bude tento model s diskrétními parametry platit pro obecný případ vlnění jako ekvivalent k diferenciální rovnici (60); bude

$$\ddot{q}_{k-1} + 4\ddot{q}_k + \ddot{q}_{k+1} + 6 \frac{c^2}{h^2} (-q_{k-1} + 2q_k - q_{k+1}) = 0 \quad (76)$$

Nevýhodou lineární interpolace (66), znázorněné na obr. 22, je, že nedává spojitý průběh posuvů. To znamená, že se poměrně prodloužení, a tedy i napětí mění v uzlech nespojitě (v rozporu s fyzikální realitou). Spojitosti dosáhneme kubickou interpolací (platnou pro interval  $0 \leq x \leq h$ )

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (77)$$

Koeficienty  $a_0$  až  $a_3$  určíme tak, aby funkce  $u(x)$  nabývala v uzlech na koncích prvku hodnot

$$\begin{aligned} q_1 &= u(0) & q_3 &= u(h) \\ q_2 &= u'(0) & q_4 &= u'(h) \end{aligned} \quad (78)$$

Čárkou jsme označili derivaci podle  $x$ . Vyjde (viz /8/)

$$u(x) = [h_1(x) \quad h_2(x) \quad h_3(x) \quad h_4(x)] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (79)$$

kde

$$\begin{aligned}
 h_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\
 h_2(x) &= x - 2h\left(\frac{x}{h}\right)^2 + h\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\
 h_3(x) &= 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\
 h_4(x) &= -h\left(\frac{x}{h}\right)^2 + h\left(\frac{x}{h}\right)^3
 \end{aligned} \tag{80}$$

jsou Hermiteovy interpolační polynomy. Elementární matice hmotnosti a tuhosti pak vyjdou takto:

$$[M] = \frac{\rho Sh}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \tag{81}$$

$$[K] = \frac{ES}{30h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & -36 & 3h \\ 3h & 4h^2 & -3h & -h^2 \\ -36 & -3h & 36 & -3h \\ 3h & -h^2 & -3h & 4h^2 \end{bmatrix} \tag{82}$$

Při spojování prvků v model celé tyče se matice načítají podle obr. 23 a 24, přičemž vektor posuvů je uspořádán tak, že posuv  $k$ -tého uzlu má lichý index  $2k-1$  a derivace posuvu v témže uzlu sudý index  $2k$ . Pro  $k$ -tý uzel nekonečné tyče pak budou platit tyto dvě pohybové rovnice:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\rho Sh}{420} (54 \ddot{q}_{2k-3} + 13h \ddot{q}_{2k-2} + 312 \ddot{q}_{2k-1} + 54 \ddot{q}_{2k+1} - 13h \ddot{q}_{2k+2}) + \\
 &+ \frac{ES}{30h} (-36 q_{2k-3} - 3h q_{2k-2} + 72 q_{2k-1} - 36 q_{2k+1} + 3h q_{2k+2}) = 0
 \end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\rho Sh}{420} (-13 \ddot{q}_{2k-3} - 3h \ddot{q}_{2k-2} + 16h \ddot{q}_{2k} + 13 \ddot{q}_{2k+1} - 3h \ddot{q}_{2k+2}) + \\
 &+ \frac{ES}{30h} (3q_{2k-3} - h q_{2k-2} + 16h q_{2k} - 3q_{2k+1} - h q_{2k+2}) = 0
 \end{aligned} \tag{84}$$

Po úpravě s použitím (61) bude

$$54 \ddot{q}_{2k-3} + 13 h \ddot{q}_{2k-2} + 312 \ddot{q}_{2k-1} + 574 \ddot{q}_{2k+1} - 13 h \ddot{q}_{2k+2} + \\ + 42 \frac{c^2}{h^2} (-12 q_{2k-3} - h q_{2k-2} + 24 q_{2k-1} - 12 q_{2k+1} + h q_{2k+2}) = 0 \quad (85)$$

$$-13 \ddot{q}_{2k-3} - 3 h \ddot{q}_{2k-2} + 16 h \ddot{q}_{2k} + 13 \ddot{q}_{2k+1} - 3 h \ddot{q}_{2k+2} + \\ + 14 \frac{c^2}{h^2} (3 q_{2k-3} - h q_{2k-2} + 16 h q_{2k} - 3 q_{2k+1} - h q_{2k+2}) = 0 \quad (86)$$

Pro vlnový proces v kontinuu, popsáný vlnovou rovnicí (60), tedy máme několik různých modelů vhodných k numerickému řešení; je to diferenční rovnice (64), která se shoduje s rovnicemi popisujícími pohyb osamělých hmot spojených v řetězec nehmotnými pružinami (obr. 21), dále máme rovnici (76) odvozenou metodou konečných prvků s lineárním interpolačním polynomem, a konečně soustavu dvou rovnic (85) a (86) odvozenou s kubickým interpolačním polynomem. Bude nás zajímat, jaká je kvalita těchto modelů a jak se projeví při numerickém řešení úloh. O tom pojednáme v příští kapitole.

Obdobně bychom mohli vytvořit matematické modely i pro případ vlnění v třírozměrném prostoru. Rozdíl by byl jen v tom, že na pravé straně rovnice (60) bychom měli součet druhých derivací

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

místo pouhého  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

## 7. POSUZOVÁNÍ MODELU Z HLEDISKA VLNOVÉ DISPERZE

Protože každou vlnu lze rozložit na jednotlivé harmonické složky, bude o vlastnostech (o kvalitě) modelu rozhodovat jeho odezva při průchodu harmonické vlny. Zmíněný rozklad umožňuje Fourierova řada nebo Fourierův integrál. Pozornost zaměříme na jednu harmonickou složku.

Šíří-li se harmonická vlna o délce  $L$  ve směru osy  $x$  rychlostí  $c$ , platí pro ni rovnice

$$u(x, t) = a \sin \left[ \frac{2\pi}{L} (x - ct) \right] \quad (87)$$

Tato funkce splňuje vlnovou rovnici (60) identicky, což znamená, že rychlost  $c$  vlny nezávisí na její vlnové délce  $L$ . Říkáme, že jde o bezdisperzní prostředí. Šíří-li se bezdisperzním prostředím obecná vlna, zachovává si svůj tvar, neboť se všechny její harmonické složky pohybují touž rychlostí.

Zkoumejme nyní, jak bude harmonická vlna procházet modelem (64). Zde může  $x$  nabývat pouze hodnot  $0, h, 2h, \dots, kh, \dots$ , takže vlna bude popsána rovnicí

$$q_k(t) = a \sin \left[ \frac{2\pi}{L} (kh - \bar{c}t) \right] \quad (88)$$

Na levé straně máme posuv  $k$ -tého uzlu v čase  $t$ . Pruh nad symbolem  $\bar{c}$  znamená, že předpokládáme jinou postupnou rychlost vlny než  $c$ . Výraz (88) dosadíme do rovnice (64). Po úpravě dostaneme

$$\frac{\bar{c}}{c} = \frac{L}{\pi h} \sin \frac{\pi h}{L} \quad (89)$$

To znamená, že model na obr. 21 není bezdisperzní, že rychlost šíření harmonické vlny  $\bar{c}$  je u krátkých vln menší než u dlouhých vln. Zatímco vlna libovolného tvaru projde kontinuem modelovaným rovnicí (60) bez změny, změní se tvar vlny při průchodu řetězcem podle obr. 21 tak, že se vyšší harmonické složky opozdí za nižšími. Tím se čelo vlny stane hladším, za to se za vlnou budou tvořit krátkovlnné poruchy, které v kontinuu ve skutečnosti nejsou. Aby se toto zkreslení tvaru vlny udrželo v rozumné toleranci, musí být krok  $h$  dostatečně malý. Pro  $h/L \rightarrow 0$  je  $\bar{c} = c = \text{konst.}$



Protože k vykreslení tvaru harmonické vlny potřebujeme alespoň tři body, musí být  $L/h > 2$ . Pro  $L/h = 2$  bychom dostali  $\bar{c} = 0,6366 c$ . Kratší vlna než  $L = 2h$  se řetězcem nemůže vůbec šířit (důkaz viz např. /9/).

Zkoumejme nyní vlastnosti modelu (76). Když sem dosadíme z rovnice (88), vyjde

$$\frac{\bar{c}}{c} = \frac{L}{\pi h} \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \cos(2\pi h/L)}{2 + \cos(2\pi h/L)}} \quad (90)$$

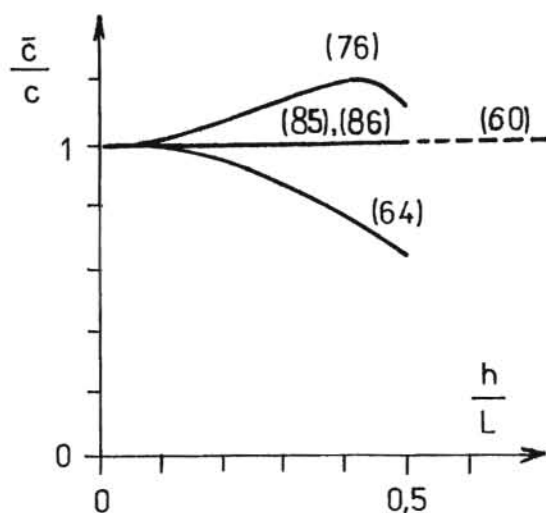
Pro mezní délku vlny  $L = 2h$  odtud dostaneme  $\bar{c} = 1,1027 c$ . Naopak pro  $h/L \rightarrow 0$  vyjde  $\bar{c} = c$ . U tohoto modelu předbíhají krátkovlnné složky čelo vlny.

U hermiteovského modelu (85), (86) je třeba uvážit, že v rovnicích jsou zastoupeny dva druhy uzlových proměnných - posuvy a derivace posuvů. Protože tvar vlny je po částech vykreslen kubickými polynomy (80), a nikoli sinusovkou (87), je tvar vlny poněkud zkreslen, takže derivace  $\partial u / \partial x$  nelze získat derivováním vztahu (87). Je nutné předpokládat, že poměr po sobě jdoucích lichých a sudých zobecněných posuvů  $q_{2k-1} / q_{2k}$  může být poněkud jiný, než by vyšlo z rovnice (87). Dosadíme proto

$$q_{2k-1}(t) = a \sin \left[ \frac{2\pi}{L} (kh - \bar{c}t) \right] \quad (91)$$

$$q_{2k}(t) = b \cos \left[ \frac{2\pi}{L} (kh - \bar{c}t) \right] \quad (92)$$

Z rovnic (85), (86) pak dostaneme homogenní lineární soustavu rovnic pro amplitudy  $a, b$ , která má nenulové řešení jen tehdy, vymizí-li determinant. Tato podmínka poskytuje hledancu disperzní závislost poměru  $\bar{c}/c$  na poměru  $h/L$ . Ukáže se, že až do mezní hodnoty  $h/L = 1/2$  je velmi přibližně  $\bar{c}/c = 1 = \text{konst.}$  To znamená, že hermiteovské konečné prvky vytvářejí bezdisperzní matematický model pro vlnové procesy v jednorozměrném kontinuu, který však propouští pouze harmonické vlny od určité vlnové délky ( $L > 2h$  /8/). Příslušné disperzní křivky jsou zakresleny na obr. 25.



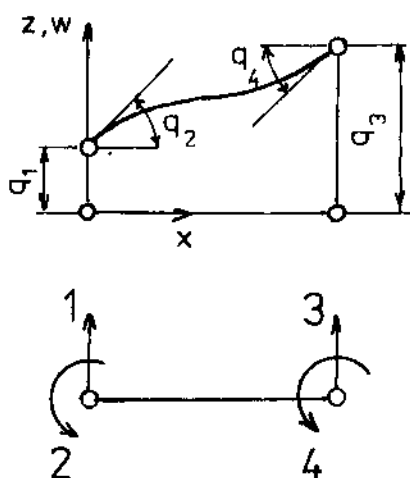
Obr. 25

### 8. O DVOU DUÁLNÍCH MODELECH PRO OHYBOVĚ KMITAJÍCÍ NOSNÍKY

Nosník lze rozdělit na konečné prvky stejné délky  $h = l/n$ , kde  $l$  je délka nosníku a  $n$  počet prvků. Prvky by sice nemusily být stejně dlouhé, ale pokud nemáme zvláštní důvod, volíme je stejné.

Nejprve budeme postupovat shodně s deformační variantou metody konečných prvků. Pro průhyb nosníku  $W(x)$  zavedeme podle obr. 26 aproximaci

$$W(x) = [h_1(x) \quad h_2(x) \quad h_3(x) \quad h_4(x)] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (93)$$



Obr. 26

kde

$$q_1 = w(0) \quad q_3 = w(l) \quad (94)$$

jsou posuvy uzlových bodů,

$$q_2 = w'(0) \quad q_4 = w'(l) \quad (95)$$

jsou derivace posuvů podle \$x\$ v uzlových bodech a \$h\_1(x)\$ až \$h\_4(x)\$ jsou hermiteovské interpolační polynomy (80). Za předpokladu, že platí (93), dostaneme pro kinetickou, popř. deformační energii tyto výrazy:

$$T = \frac{1}{2} \frac{m}{h} \{\dot{q}\}^T \int_0^h [A]^T [A] dx \{q\} \quad (96)$$

$$U = \frac{1}{2} EJ \{q\}^T \int_0^h [A'']^T [A''] dx \{q\} \quad (97)$$

kde

$$[A] = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4] \quad (98)$$

je řádková matice ze vztahu (93). Při odvození výrazu pro kinetickou energii jsme nepřihlíželi k rotacím elementů nosníku, ale jen k translačním pohybům, a při výpočtu deformační energie jsme počítali jen s ohybovými deformacemi, zanedbali jsme tedy vliv smykových deformací. Tyto předpoklady jsou dobře splněny u štíhlých nosníků.

Na pravé straně rovnice (96), resp. (97), je kvadratická forma utvořená s maticí hmotnosti, resp. tuhosti. Takže

$$[M] = \frac{m}{h} \int_0^h [A]^T [A] dx \quad (99)$$

$$[K] = EJ \int_0^h [A']^T [A'] dx \quad (100)$$

Po integraci vyjde

$$[M] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (101)$$

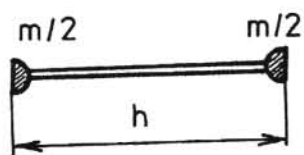
$$[K] = \frac{EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad (102)$$

Malou nevýhodou takto utvořeného modelu je, že matice hmotnosti i matice tuhosti kompletního nosníku jsou pásové.

Matice hmotnosti (101) se nazývá konzistentní, neboť byla odvozena pro aproximaci (93) ohybové čáry zcela rigorózně, v souladu s Lagrangeovým variačním principem /2/. Jestliže však ignorujeme rotační stupně volnosti (tj. dosadíme do sudých sloupců a řádků matice (101) nuly), mimodiagonální prvky přičteme k diagonálním a na jejich místo dosadíme nuly, dostaneme diagonální matici hmotnosti

$$[M] = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

kteřá ovšem není konzistentní. Zřejmě odpovídá fyzikální představě osamělých hmotných bodů spojených nehmotným pružným nosníkem (obr. 27), pro které vyjde kinetická energie



$$T = \frac{1}{4} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) \quad (104)$$

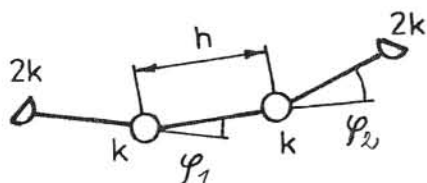
Obr. 27

Deformační energie, a tedy ani matice tuhosti se nezmění.

Model podle obr. 27 dává diagonální matici hmotnosti a pásovou matici tuhosti. Napadá nás, zda by nebylo možné (a za určitých okolností výhodné) navrhnout duální model, který by ponechával matici hmotnosti pásovou, ale vedl k diagonální matici tuhosti. Skutečně je to možné, jak nyní ukážeme.

Model podle obr. 27 soustřeďuje hmotnost do oddělených uzlových bodů, kdežto tuhost je rozdělena spojitě. Vytvořme tedy model, v němž tomu bude naopak: tuhost bude soustředěna do oddělených bodů, kdežto hmotnost zůstane rozdělena spojitě.

Slovo "tuhost" zde není zcela na místě. Použili jsme je proto, že je zavedla norma ČSN 01 1302, č. 3.21, místo dříve obvyklého pojmu "pružinová konstanta". Ve skutečnosti jde nikoli o tuhost, ale o míru poddajnosti či pružnosti daného prvku. Nový model se bude skládat z absolutně tuhých hmotných tyčí spojených poddajnými, popř. pružnými klouby (obr. 28). Poddajné klouby mohou být nejen pružné, ale také např. elasticoplastické. Poddajnost je tedy širší pojem než pružnost.



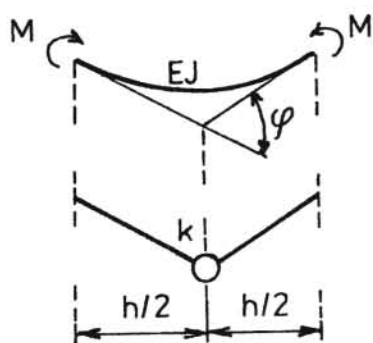
Obr. 28

Tuhost (či pružinovou konstantu) kloubu vypočteme z představy, že prvky volíme tak krátké, abychom v nich mohli zanedbat změnu ohybového momentu  $M$  (obr. 29). Úhel  $\varphi$  tečen k ohybové čáře v bodech o vzájemné vzdálenosti  $h$  je

$$\varphi = \frac{Mh}{EJ} \quad (105)$$

Tuhost  $k$  je definována jako poměr  $M/\varphi$ , tedy

$$k = \frac{M}{\varphi} = \frac{EJ}{h} \quad (106)$$



Obr. 29

Na obr. 29 je nahoře zakreslena deformace pružného nosníku, dole pak odezva náhradního modelu při témže ohybovém momentu.

Porovnejme uvedené modely na příkladu výpočtu vlastních kruhových frekvencí volného kmitání nosníku na jednom konci vetknutého a na druhém volného. Nosník rozdělíme na dva prvky, takže  $h = l/2$ . Hmotnost jednoho prvku  $m = \rho S h = \rho S l/2$  je polovinou hmotnosti celého nosníku.

Nosník jsme rozdělili pouze na dva prvky, abychom omezili rozsah numerických výpočtů a mohli je i bez počítače snadno realizovat.

Budeme-li postupovat metodou konečných prvků s konzistentní maticí hmotnosti, dostaneme složením a načtením matic (101), (102) tuto pohybovou rovnici (pro čtyři stupně volnosti):

$$\frac{m}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13h \\ 0 & 8h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{Bmatrix} + \frac{EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6h \\ 0 & 8h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (107)$$

S označením

$$\lambda = \frac{\omega^2 m h^3}{840 EJ} \quad (108)$$

odtud vyjde frekvenční rovnice

$$\begin{vmatrix} 12 - 312\lambda & 0 & -6-54\lambda & 3h + 13h\lambda \\ 0 & 4h^2 - 8h^2\lambda & -3h - 13h\lambda & h^2 + 3h^2\lambda \\ -6-54\lambda & -3h - 13h\lambda & 6 - 156\lambda & -3h + 22h\lambda \\ 3h + 13h\lambda & h^2 + 3h^2\lambda & -3h + 22h\lambda & 2h^2 - 4h^2\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (109)$$

Vidíme, že se činitel  $h$  v sudých řádcích a sloupcích dá zkrátit, takže zůstane (po roznásobení determinantu)

$$178\ 801\ \lambda^4 - 714\ 924\ \lambda^3 + 292\ 734\ \lambda^2 - 10\ 044\ \lambda + 9 = 0 \quad (110)$$

Poznamenejme, že výpočet vlastních frekvencí pomocí determinantu není právě nejvhodnější, jde-li o soustavu s větším počtem stupňů volnosti. Při vyčíslování determinantů vysokých řádů nejenže roste rozsah výpočtů, ale zhoršuje se i přesnost vlivem zaokrouhlovacích chyb. Vhodnější postupy najdeme např. v literatuře /7/, /10/.

Omezíme se na výpočet nejmenší vlastní kruhové frekvence. Nejmenší kořen rovnice (110) je

$$\lambda_1 = 9,207\ 08 \cdot 10^{-4}$$

a tedy - podle (108) -

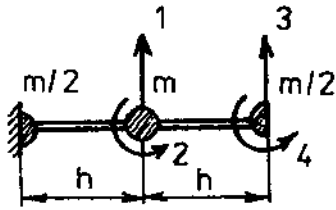
$$\omega_1 = 0,879\ 43 \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} = 3,518 \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} \quad (111)$$

Podle tab. 1 má správně být

$$\omega_1 = 3,516 \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} \quad (112)$$

Chyba je tedy asi půl promile. Vysoká přesnost výpočtu je vykoupena větší numerickou náročností při práci s pásovými maticemi, což může poněkud vadit při řešení složitých soustav s mnoha sty stupni volnosti.

Všimneme si proto modelu se soustředěnými hmotnostmi podle obr. 30. Matice tuhosti zůstane stejná jako v rovnici (107), ale matice hmotností se podstatně zjednoduší. Bude



Obr. 30

$$[M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (113)$$

Frekvenční rovnici dostaneme po snadné úpravě ve tvaru

$$\begin{vmatrix} 24-2\lambda & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 8 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12-\lambda & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad (114)$$

kde

$$\lambda = \frac{\omega^2 m h^3}{2EJ} \quad (115)$$

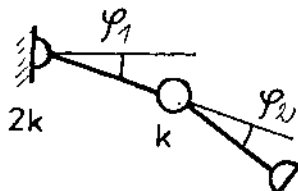
Rovnice (114) je kvadratická; po rozepsání dává

$$7 \lambda^2 - 60 \lambda + 18 = 0 \quad (116)$$

První kořen je  $\lambda_1 \doteq 0,311\ 306$ . S touto hodnotou vyjde z rovnice (115)

$$\omega_1 \doteq 3,156 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} \quad (117)$$

s chybou asi 10 %. Chyba by byla jistě menší, kdybychom zvolili větší počet prvků. Už při třech prvcích by byla méně než poloviční.



Obr. 31

Přejděme k duálnímu modelu podle obr. 31. Zde je kinetická energie každého prvku dána součtem energie příslušné posuvnému pohybu těžiště a energie příslušné rotaci kolem těžiště. Tedy



$$T = \frac{1}{2} m \cdot \frac{h^2}{4} [\dot{\varphi}_1^2 + (3\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2] + \frac{1}{2} \frac{mh^2}{12} [\dot{\varphi}_1^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2] \quad (118)$$

Deformační energie vyjde

$$U = \frac{1}{2} (2k) \varphi_1^2 + \frac{1}{2} k \varphi_2^2 \quad (119)$$

Dostáváme tedy tuto pohybovou rovnici

$$\frac{mh^2}{6} \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + \frac{EJ}{h} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (120)$$

Frekvenční determinant je pouze druhého řádu a matice tuhosti, jak vidíme, je diagonální. Označíme-li tentokrát

$$\lambda = \frac{6EJ}{\omega^2 m h^3} \quad (121)$$

bude

$$\begin{vmatrix} 16 - 2\lambda & 5 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (122)$$

čili

$$2\lambda^2 - 20\lambda + 7 = 0$$

Větší z obou kořenů je  $\lambda_1 \doteq 9,63681$ , takže podle (121)

$$\omega_1 \doteq 3,156 \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} \quad (123)$$

Výsledek je pro oba modely (podle obr. 30 a obr. 31) stejný. Skutečně, lze dokázat, že oba modely jsou co se týče přesnosti, s jakou aproximují pružný štíhlý nosník s rovnoměrným rozdělením hmotnosti i tuhosti, navzájem rovnocenné.

### Příklad 13

Vyšetřete disperzní vlastnosti modelů použitých v 8. kapitole k výpočtu ohybového kmitání nosníků.

### Řešení

Pro volné ohybové kmitání nosníku platí parciální diferenciální rovnice parabolického typu (/4/, viz též (9.1))

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13.1)$$

Šířila-li se vlna v pružném prostředí ve směru souřadnicové osy  $x$  rychlostí  $c$ , má obecně rovnici

$$w = f(x - ct) \quad (13.2)$$

kde  $f$  je libovolná "rozumná" funkce. Řešení (13.2) vyhovuje vlnové rovnici, která je hyperbolického typu, nevyhovuje však rovnici (13.1). To znamená, že se ohybová vlna nemůže nosníkem šířit, aniž nastane disperze (vlna změni tvar). Rozpor vzniká tím, že rovnice (13.1) nepopisuje volné elastické kontinuum, ale předepisuje v něm předem určitou vazbu, tj. popisuje deformační model Bernoulliho-Navierův.

Zkoumejme, zda se tímto modelem může šířit alespoň harmonická vlna, která má rovnici

$$w(x,t) = w_0 \sin \left[ \frac{2\pi}{L} (x - ct) \right] \quad (13.3)$$

Zde  $L$  značí délku vlny. Dosadíme-li (13.3) do (13.1), dostaneme postupnou rychlost vlny

$$c = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} \quad (13.4)$$

nepřímo úměrnou vlnové délce. Zkoumejme, jak tuto vlastnost reprodukuje modely uvedené v 8. kapitole.

Je-li elementární matice hmotnosti

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \quad (13.5)$$

a tuhosti

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \quad (13.6)$$

pak po jejich složení podle obr. 24 bude pro prvky vzdálené od obou konců nosníku platit tato pohybová rovnice (viz též /8/)

$$\begin{aligned} [M_{ba}] \{ \ddot{w}_{k-1} \} + ([M_{aa}] + [M_{bb}]) \{ \ddot{w}_k \} + [M_{ab}] \{ \ddot{w}_{k+1} \} + \\ + [K_{ba}] \{ w_{k-1} \} + ([K_{aa}] + [K_{bb}]) \{ w_k \} + \\ + [K_{ab}] \{ w_{k+1} \} = \{ 0 \} \end{aligned} \quad (13.7)$$

Zde  $\{ w_k \}$  sdružuje stupně volnosti připadající na  $k$ -tý uzel. Přitom

$$[M_{ba}] = [M_{ab}]^T \quad [K_{ba}] = [K_{ab}]^T \quad (13.8)$$

neboť matice hmotnosti i tuhosti jsou symetrické. Vektor  $\{ w_k \}$  obsahuje buď jeden stupeň volnosti jako v rovnici (88), nebo dva stupně volnosti, jako byly (91), (92). Dosaďme obecně

$$\{ w_k \} = \{ \bar{w} \} e^{i \frac{2\pi}{L} (kh - \bar{c}t)} \quad (13.9)$$

Vektor  $\{ \bar{w} \}$  je konstantní, obecně komplexní. Symbolem  $i$  jsme označili imaginární jednotku. Označíme-li

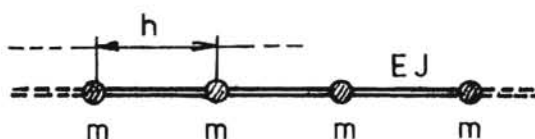
$$\beta = \frac{2\pi h}{L} \quad (13.10)$$

dostaneme z rovnic (13.7) a (13.9) podmínku

$$\begin{aligned} & \left| -\left(\frac{2\pi\bar{c}}{L}\right)^2 ([M_{ba}] e^{-i\beta} + ([M_{aa}] + [M_{bb}]) + [M_{ab}] e^{i\beta}) + \right. \\ & \left. + [K_{ba}] e^{-i\beta} + ([K_{aa}] + [K_{bb}]) + [K_{ab}] e^{i\beta} \right| = 0 \end{aligned} \quad (13.11)$$

Je to nutná a postačující podmínka k tomu, aby byl vektor  $\{\bar{w}\}$  nenulový.

Dosaďme sem např. matice (102), (103) platné pro model podle obr. 32. Bude



Obr. 32

$$\begin{aligned} & \left| -\left(\frac{2\pi\bar{c}}{L}\right)^2 \left(\frac{\rho S h}{2}\right) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EJ}{h^3} \left( \begin{bmatrix} -12 & -6h \\ 6h & 2h^2 \end{bmatrix} e^{-i\beta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8h^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 6h \\ -6h & 2h^2 \end{bmatrix} e^{i\beta} \right) \right| = 0 \end{aligned} \quad (13.12)$$

S označením

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\bar{c}}{L}\right)^2 \left(\frac{\rho S h^4}{EJ}\right) \quad (13.13)$$

získá rovnice (13.12) přehlednější tvar

$$\begin{vmatrix} 24(1-\cos\beta) - \lambda & 12ih\sin\beta \\ -12ih\sin\beta & 4h^2(2+\cos\beta) \end{vmatrix} = 0 \quad (13.14)$$

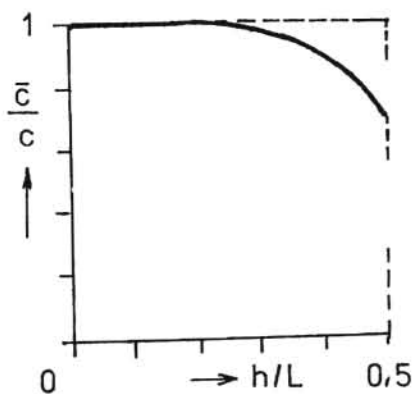
Odtud vypočteme

$$\lambda = 12 \frac{(1-\cos\beta)^2}{2+\cos\beta} \quad (13.15)$$

Vzhledem k (13.10) je  $\lambda$  funkcí poměru  $h/L$ , tedy poměru délky prvku k délce vlny. Zkreslení, které způsobuje model podle obr. 30 ve srovnání s nosníkem, je dáno poměrem rychlostí  $\bar{c}/c$ . Kdyby byl tento poměr konstantní a roven jedné, šířila by se harmonická vlna dané délky stejně rychle v původním nosníku jako v jeho modelu. Z rovnic (13.13), (13.15) a (13.4) však vyjde

$$\frac{\bar{c}}{c} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\beta^2} = \frac{2\sqrt{3}(1-\cos\beta)}{\beta^2\sqrt{2+\cos\beta}} \quad (13.16)$$

kde  $\beta = 2\pi \frac{h}{L}$ . Tato závislost je zakreslena na obr. 33.



Obr. 33

Podobně postupujeme i u ostatních modelů. Ukáže se, že modely podle obr. 28 i 32 mají stejnou disperzní závislost. To si již čtenář může ověřit sám. U modelu podle obr. 28 však není důkaz přímočarý; vyžaduje zavedení jiných zobecněných souřadnic, aby bylo možné uplatnit schéma na obr. 24.

Z obr. 33 je zřejmé, že se harmonické vlny kratší než asi  $4h$  šíří modelem nosníku podle obr. 28 nebo obr. 32 pomaleji než skutečným nosníkem.

Znovu zdůrazňujeme, že jde o šíření harmonické vlny. O šíření obecné ohybové vlny v nosníku nemůže být řeč, protože se každá její harmonická složka šíří jinou rychlostí a tvar vlny se nemůže ani přibližně zachovat. Je to způsobeno tím, že rovnice (13.1) není hyperbolického typu. Má-li ostatně tato rovnice vůbec platit, musí být i u harmonické vlny

(13.3) splněna podmínka, že délka vlny je mnohem větší než příčné rozměry nosníku.

#### Příklad 14

Odvoďte matici tuhosti pro nosník, které by zahrnovala i smykové deformace.

#### Řešení

Celkový průhyb nosníku  $W(x)$  se skládá z části  $W_b$  vzniklé ohybem a z části  $W_s$  vzniklé smykem. Bude tedy

$$W(x) = W_b(x) + W_s(x) \quad (14.1)$$

Pro ohyb platí diferenciální rovnice Bernoulliho-Navierova

$$EJ \frac{d^2 W_b}{dx^2} = M_b(x) \quad (14.2)$$

Zavedeme-li stupně volnosti podle obr. 26, bude ohybový moment

$$M_b(x) = f_1 x - f_2 \quad (14.3)$$

a integrace (14.2) dá

$$W_b(x) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{6} f_1 x^3 - \frac{1}{2} f_2 x^2 + C_1 x + C_2 \right) \quad (14.4)$$

Pro smykové deformace máme vztah

$$\frac{dW_s}{dx} = - \frac{f_1}{\alpha GS} \quad (14.5)$$

kde  $\alpha$  závisí na tvaru průřezu (viz /11/)

$G$  je modul pružnosti ve smyku a

$S$  značí plošný obsah průřezu

Po integraci

$$W_s = - \frac{f_1}{\alpha GS} x + C_3 \quad (14.6)$$

Integrační konstanty  $C_1$  až  $C_3$  se určí z okrajových podmínek. Reakce v uzlech musí splňovat podmínky rovnováhy

$$\begin{aligned} f_1 + f_3 &= 0 \\ f_1 h - f_2 - f_4 &= 0 \end{aligned} \quad (14.7)$$

Matice tuhosti je definována vztahem

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (14.8)$$

Zvolíme-li všechny zobecněné posuvy nulové až na jeden, můžeme určit reakce  $f_1$  až  $f_4$  z rovnic (14.1) až (14.7), a tím i jeden sloupec matice tuhosti. Ukážeme to např. pro  $q_1 \neq 0$ ,  $q_2 = 0$ ,  $q_3 = 0$ ,  $q_4 = 0$ . Okrajové podmínky budou

$x = 0$	$x = h$
$\frac{dw_b}{dx} = 0$	$\frac{dw_b}{dx} = 0$
$w = q_1$	$w_b = 0, \quad w_s = 0$

Vzhledem k (14.1) zřejmě platí na obou koncích nosníku, že

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw_s}{dx} = -\frac{f_1}{\alpha GS}$$

Samo vetknutí totiž nezabraňuje zkosu, který působí smyk. Z okrajových podmínek vyjde

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 &= 0 \\
 \frac{1}{2} f_1 h^2 - f_2 h + C_1 &= 0 \\
 \frac{C_2}{EJ} + C_3 &= q_1 \\
 \frac{1}{6} f_1 h^3 - \frac{1}{2} f_2 h^2 + C_1 h + C_2 &= 0 \\
 -\frac{f_1 h}{\alpha GS} + C_3 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (14.9)$$

Odtud vyloučíme integrační konstanty  $C_1$  až  $C_3$ . S označením

$$\Phi = \frac{12 EJ}{\alpha GS h^2} \quad (14.10)$$

pak dostaneme

$$\left. \begin{aligned}
 f_1 &= \frac{12 EJ}{(1+\Phi) h^3} q_1 = k_{11} q_1 \\
 f_2 &= \frac{6 EJ}{(1+\Phi) h^2} q_1 = k_{21} q_1
 \end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

Síly  $f_3 = k_{31} q_1$ ,  $f_4 = k_{41} q_1$  vypočteme z rovnic (14.7) a (14.11).  
Dostaneme tak prvky matice tuhosti

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \frac{12 EJ}{(1+\Phi) h^3} & k_{12} = k_{21} &= \frac{6 EJ}{(1+\Phi) h^2} \\
 k_{13} = k_{31} &= \frac{-12 EJ}{(1+\Phi) h^3} & k_{14} = k_{41} &= \frac{6 EJ}{(1+\Phi) h^2}
 \end{aligned}$$

Podobně vypočteme i ostatní sloupce matice tuhosti. Bude

$$k_{22} = \frac{4+\Phi}{1+\Phi} \cdot \frac{EJ}{h} \quad k_{23} = k_{32} = \frac{-6 EJ}{(1+\Phi) h^2}$$



$$k_{24} = k_{42} = \frac{2 - \bar{\Phi}}{1 + \bar{\Phi}} \cdot \frac{EJ}{h}$$

$$k_{33} = \frac{12EJ}{(1 + \bar{\Phi})h^3}$$

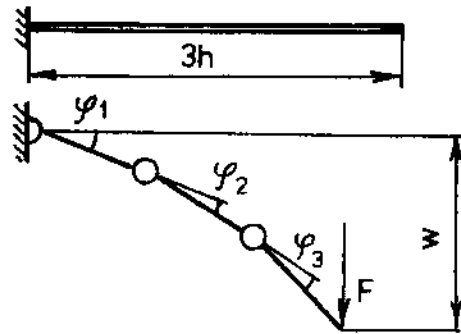
$$k_{34} = k_{43} = \frac{-6EJ}{(1 + \bar{\Phi})h^2}$$

$$k_{44} = \frac{4 + \bar{\Phi}}{2 + \bar{\Phi}} \frac{EJ}{h}$$

Pro  $\bar{\Phi} = 0$  vyjde odtud matice (102).

## 9. GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ OHYB ELASTICKÝCH PRUTŮ

Model nosníku podle obr. 28 se zvláště dobře hodí k řešení geometricky nelineárního ohybu, kdy se vlivem velkých posuvů podstatně mění geometrická konfigurace, ale poměrné deformace zůstávají malé (v mezích pružnosti). Ukážeme to na příkladu elastického nosníku vlevo vetknutého, vpravo volného a na volném konci zatíženého svislou silou  $F$  (obr. 34). Zvolíme tři prvky se zobecněnými posuvy  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ . Budeme předpokládat platnost Bernoulliho-Navierovy teorie ohybu, avšak přihlédneme k vlivu posuvu působící síly při velkých průhybech.



Obr. 34

Deformační energie v nosníku vyjde obdobně jako v rovnici (119)

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} (2k) \varphi_1^2 + \frac{1}{2} k \varphi_2^2 + \frac{1}{2} k \varphi_3^2 = \\
 &= \frac{EJ}{h} \left[ \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \varphi_2^2 + \frac{1}{2} \varphi_3^2 \right]
 \end{aligned} \tag{124}$$

Průhyb  $W$  na konci nosníku vyjde podle obr. 34

$$W = h \sin \varphi_1 + h \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + h \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \tag{125}$$

a jeho variace bude

$$\begin{aligned}
 \delta W &= h \left[ \cos \varphi_1 + \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \right] \delta \varphi_1 + \\
 &+ h \left[ \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \right] \delta \varphi_2 + \\
 &+ h \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \delta \varphi_3
 \end{aligned} \tag{126}$$

Zobecněné síly vyjdou z rovnosti virtuálních prací

$$F \delta W = f_1 \delta \varphi_1 + f_2 \delta \varphi_2 + f_3 \delta \varphi_3 \tag{127}$$

Za  $\delta W$  dosadíme z rovnice (126) a porovnáme koeficienty u variací  $\delta \varphi_1$  až  $\delta \varphi_3$ . Dostaneme

$$\begin{aligned}
 f_1 &= Fh [\cos \varphi_1 + \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)] \\
 f_2 &= Fh [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)] \\
 f_3 &= Fh \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)
 \end{aligned}
 \tag{128}$$

Užitím (21) a (124) vypočteme matici tuhosti

$$[K] = \frac{EJ}{h} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \tag{129}$$

Zobecněné posuvy označíme symbolem  $\{q\}$  :

$$\{q\} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T
 \tag{130}$$

Z rovnice (17) dostaneme pro případ statického zatížení

$$[K] \{q\} = \{f\}
 \tag{131}$$

a odtud vypočteme vektor  $\{q\}$ . Po úpravě bude

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \frac{Fh^2}{EJ} \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \psi_1 + \cos \psi_2 + \cos \psi_3 \\ \cos \psi_2 + \cos \psi_3 \\ \cos \psi_3 \end{Bmatrix}
 \tag{132}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= \varphi_1 \\
 \psi_2 &= \varphi_1 + \varphi_2 \\
 \psi_3 &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3
 \end{aligned}$$

Rovnici (132) řešíme iteracemi. Nemůžeme zde probírat různé metody řešení soustav nelineárních rovnic. V tomto případě však dojdeme k výsledku poměrně snadno tak, že pro zvolené  $Fh^2/EJ$  a odhadnuté  $\psi_1$  až  $\psi_3$  vypočteme  $\varphi_1$  až  $\varphi_3$ . Vypočtené hodnoty pak dosadíme na pravou stranu (132) a výpočet opakujeme tak dlouho, dokud se nové a staré výsledky významně liší. Nakonec dostaneme závislost průhybu  $W$  na síle  $F$ , která bude ovšem nelineární.

Než přistoupíme k tomuto řešení, přesvědčíme se o tom, že pro malé průhyby dostaneme přibližně správnou hodnotu, jakou známe z lineární

teorie ohybu, totiž

$$W = \frac{F(3h)^3}{3EJ} = \frac{9Fh^3}{EJ}$$

Při malých průhybech bude

$$\cos \psi_1 \cong \cos \psi_2 \cong \cos \psi_3 \cong 1$$

a rovnice (132) dá

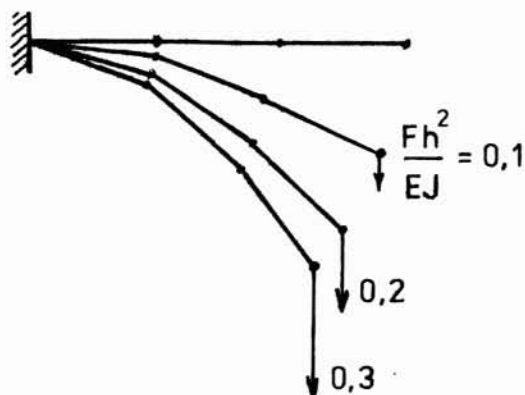
$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \cong \frac{Fh^2}{EJ} \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (133)$$

Takže

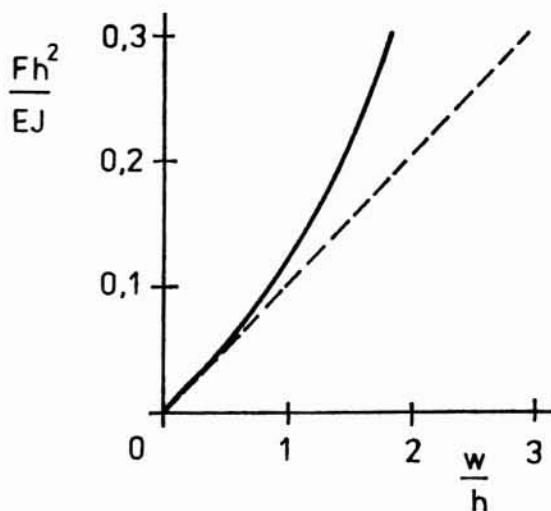
$$W \cong h(3\psi_1 + 2\psi_2 + \psi_3) = \frac{9,5 Fh^3}{EJ} \doteq \frac{Fl^3}{2,842EJ}$$

Vyšla hodnota asi o 5 % větší než správná, což je přijatelné. Při posuzování této odchylky musíme vzít v úvahu, že jsme nosník rozdělili pouze na tři prvky.

Výsledek řešení je zakreslen na obr. 35 a 36. Obr. 35 znázorňuje polohy modelu pro síly



Obr. 35



Obr. 36

$$F = 0,1 \frac{EJ}{h^2} \quad \text{popř. } 0,2 \frac{EJ}{h^2} \quad \text{a } 0,3 \frac{EJ}{h^2}$$

Na obr. 36 je zakreslena deformační charakteristika nosníku a je porovnána s lineární teorií (133).

#### Příklad 15

Odhadněte chybu, kterou bychom získali při řešení průhybu nosníku podle obr. 34, kdybychom použili deseti prvků místo tří.

#### Řešení

Chybu odhadneme podle výsledků řešení linearizované teorie (pro malé průhyby). Vyjde

$$W \doteq \frac{Fl^3}{1,985 EJ} \quad (15.1)$$

tedy chyba asi půl procenta.

#### Příklad 16

Navrhněte model vhodný k výpočtu vlastní frekvence a vlastních tvarů kmitu volně zavěšeného lana se zanedbatelnou ohybovou tuhostí.

#### Řešení

Zvolíme např. model podle obr. 27 se soustředěnými hmotnostmi. Protože chybová tuhost je nulová, budou jednotlivé hmoty spojeny úsečkami (obr. 37). Pro lepší přehlednost jsme zakreslili pouze tři prvky, řešení však naznačíme pro libovolný počet prvků.

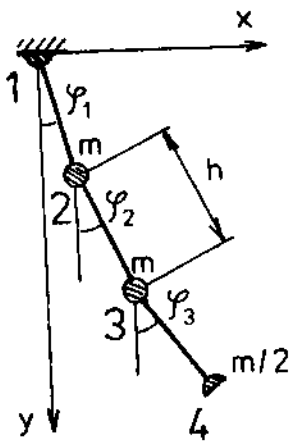
Horizontální výchylka  $k$ -té hmoty je

$$x_k = h (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \dots + \sin \varphi_k) \quad (16.1)$$

a její vzdálenost od vodorovné roviny procházející závěsem je

$$y_k = h (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \dots + \cos \varphi_k) \quad (16.2)$$

(  $k = 1, 2, \dots, n$  ). Hmotnost jednoho prvku jsme označili  $m$ , takže



Obr. 37

$$m = \rho S h = \rho S l / n \quad (16.3)$$

Kinetická energie vyjde

$$T = \frac{1}{2} m h^2 \sum_{k=1}^{n-1} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) + \frac{1}{4} m h^2 (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) \quad (16.4)$$

a potenciální polohová energie

$$U = -m g \sum_{k=1}^{n-1} y_k - \frac{1}{2} m g y_n \quad (16.5)$$

Protože kinetická energie závisí nejen na rychlostech  $\dot{\psi}_k$ , ale i na zobecněných souřadnicích  $\psi_k$ , nemůžeme použít vztahů (21) k výpočtu matice hmotnosti. Místo toho dosadíme výrazy (16.4) a (16.5) do Lagrangeovy rovnice /2/

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi_k} + \frac{\partial U}{\partial \psi_k} = 0 \quad (16.6)$$

Dostaneme soustavu nelineárních pohybových rovnic.

Výpočet se značně zjednoduší, omezíme-li se na malé výchylky. Tehdy bude

$$\cos \psi_k \approx 1 - \frac{1}{2} \psi_k^2 \quad \sin \psi_k \approx \psi_k$$

a  $\dot{\psi}_k$  bude zanedbatelné ve srovnání s rychlostí  $\dot{x}_k$ . Pro tři prvky znázorněné na obr. 37 vyjde

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m h^2 \dot{\psi}_1^2 + \frac{1}{2} m h^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2)^2 + \frac{1}{4} m h^2 (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_3)^2 = \\ &= \frac{1}{4} m h^2 (5 \dot{\psi}_1^2 + 3 \dot{\psi}_2^2 + \dot{\psi}_3^2 + 6 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_2 + 2 \dot{\psi}_1 \dot{\psi}_3 + 2 \dot{\psi}_2 \dot{\psi}_3) \end{aligned} \quad (16.7)$$

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} mgh \varphi_1^2 + \frac{1}{2} mgh (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{4} mgh (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) - 3mgh = \\
 &= \frac{1}{4} mgh (5\varphi_1^2 + 3\varphi_2^2 + \varphi_3^2) - 3mgh \quad (16.8)
 \end{aligned}$$

Aditivní konstanta v rovnici (16.8) je ovšem nepodstatná, protože při derivování odpadne. Z rovnic (21), (16.7) a (16.8) dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{Bmatrix} + \frac{g}{h} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16.9)$$

Označíme-li

$$\lambda = \frac{g}{\omega^2 h} = \frac{3g}{\omega^2 l} \quad (16.10)$$

vyjde z rovnice (16.9) frekvenční rovnice ve tvaru

$$\begin{vmatrix} 5(1-\lambda) & 3 & 1 \\ 3 & 3(1-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (16.11)$$

čili

$$15\lambda^3 - 45\lambda^2 + 28\lambda - 4 = 0 \quad (16.12)$$

Největší kořen této rovnice je  $\lambda \doteq 2,20993$  a s ním dává rovnice (16.10) nejmenší kruhovou frekvenci volného kmitání zavěšeného lana

$$\omega_1 \doteq 1,165 \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (16.13)$$

Správná hodnota je  $\omega_1 \doteq 1,202 \sqrt{\frac{g}{l}}$  (viz /12/).

Mohli jsme ovšem použít i model se spojitě rozdělenou hmotností podle obr. 28. Tuhost kloubů by byla nulová.

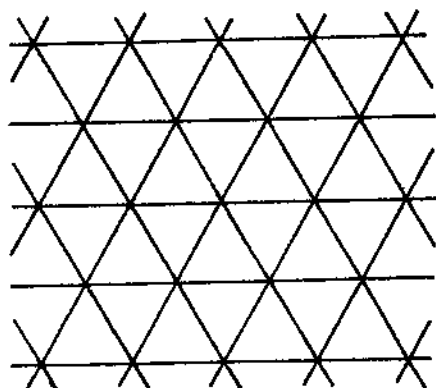
Poznamenejme, že vratné síly zde nejsou dány pružností lana, ale jen gravitační silou podobně jako u kyvadla. První vlastní frekvence kmitání

volně zavěšeného dokonale ohebného lana je asi o 20 % vyšší než frekvence kmitání stejně dlouhého matematického kyvadla. Analytické řešení vede na Besselovu diferenciální rovnici.

## 10. NÁHRADA PERIODICKY USPOŘÁDANÉ KONSTRUKCE KONTINUEM

Je-li nějaká konstrukce pravidelně uspořádána, lze ji nahradit modelem spojitého tělesa, které má vcelku stejné deformační vlastnosti. Výpočet deformací se tím často značně zjednoduší. Tak lze nahradit mříže nebo rošty deskou, žebrovanou skořepinu hladkou anizotropní skořepinou atd. Viz /31/.

Uvažujme např. o pravidelně uspořádané soustavě kloubově spojených pružin či pružných prutů tvořících v rovině síť ve tvaru rovnostranných



Obr. 38

trojúhelníků (obr. 28). Jak se tato struktura chová jako celek při deformaci ve své rovině? Bylo by ji možné nahradit modelem pružné roviny, tedy kontinuem?

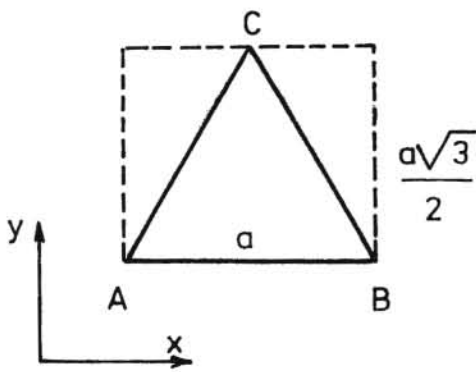
Všechny pružiny nechť mají délku  $a$  a pružinovou konstantu  $k$ , takže síla v nich je úměrná prodloužení  $\Delta a$

$$F = k \Delta a \quad (134)$$

Vyšetříme deformace jedné strukturální "buňky", tj. části, která se ve struktuře pravidelně opakuje, přičemž celou strukturu lze těmito

buňkami pokrýt bezzbytku (obr. 39). Zkusíme, zda tuto buňku (tento element) o rozměrech  $a \times a\sqrt{3}/2$  lze nahradit modelem elastického izotropního obdélníku o týchž rozměrech tak, aby se původní struktura i náhradní deska deformovala při stejném celkovém zatížení vcelku stejně.





Obr. 39

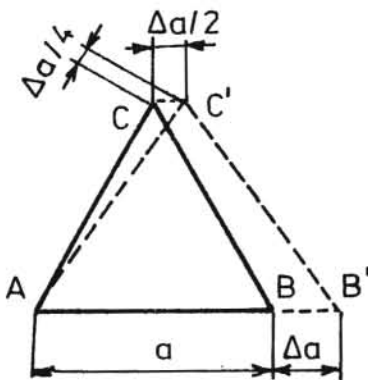
Za podmínek rovinné napjatosti bude pro tento model platit Hookeův zákon ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (135)$$

Nejprve zvolíme  $\epsilon_y = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ ,  $\epsilon_x = \Delta a/a$ . V prutu AB vznikne osová síla

$$F_{AB} = k \Delta a = k \epsilon_x a \quad (136)$$

a v prutech AC, BC síla (obr. 40)



Obr. 40

$$F_{AC} = F_{BC} = k \frac{\Delta a}{4} = \frac{1}{4} k \epsilon_x a \quad (137)$$

Tyto vnitřní síly musí být v rovnováze s vnějšími silami přenášenými z okolní konstrukce. Bude to vodorovná síla v bodech A, popř. B, o velikosti

$$F_x = F_{AB} + \frac{1}{2} F_{AC} = \frac{9}{8} k \epsilon_x a \quad (138)$$

a svislá síla v bodě C, popř. v bodech A, B, o velikosti

$$F_y = F_{AC} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} k \epsilon_x a \quad (139)$$

Tyto síly musíme nahradit staticky ekvivalentním napětím  $\sigma_x$ , popř.  $\sigma_y$

$$\begin{aligned} F_x &= \sigma_x a \sqrt{3} / 2 \\ F_y &= \sigma_y a \end{aligned} \quad (140)$$

Eliminací sil  $F_x$ ,  $F_y$  dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{3\sqrt{3}}{4} k \varepsilon_x \\ G_y &= \frac{\sqrt{3}}{4} k \varepsilon_x \end{aligned} \quad (141)$$

Když je porovnáme s rovnicemi (135) pro  $\varepsilon_y = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ , vidíme, že

$$\frac{E}{1-\nu^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} k \quad \nu = \frac{1}{3} \quad (142)$$

Lze snadno dokázat, že stejné hodnoty vyjdou i při deformaci  $\varepsilon_y \neq 0$ ,  $\varepsilon_x = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ . Elastické vlastnosti jsou tedy ve směrech  $x$ ,  $y$  stejné. To však ještě neznamená, že je náhradní model vskutku izotropní. Jestliže ano, musí být splněna i třetí z rovnic (135).

Abychom se o tom přesvědčili, zvolíme  $\varepsilon_x = 0$ ,  $\varepsilon_y = 0$ ,  $\gamma_{xy} \neq 0$ . Posune-li se bod  $C$  vpravo o  $\Delta X$  (přičemž se poloha bodů  $A$ ,  $B$  nezmění), vznikne zkos

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta X}{a\sqrt{3}} \quad (143)$$

Prut  $AC$  se prodlouží a prut  $BC$  zkrátí o  $\Delta X/2$ , takže v bodě  $C$  bude nutné připojit vpravo sílu

$$F_C = 2k \frac{\Delta X}{2} \cdot \frac{1}{2} = \tau_{xy} a \quad (144)$$

Je tedy

$$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{4} k \gamma_{xy} \quad (145)$$

Vidíme, že modul pružnosti ve smyku je  $(\sqrt{3}/4)k$ . Porovnáme vztah (145) s poslední rovnicí (135)

$$\frac{\sqrt{3}}{4} k = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (146)$$

Když sem dosadíme z rovnic (142), dostaneme identitu. To znamená, že náhradní model je ve skutečnosti izotropní a má tyto moduly pružnosti  $E$ ,  $G$  a Poissonovo číslo  $\nu$

$$E = \frac{2\sqrt{3}}{3} k \quad G = \frac{\sqrt{3}}{4} k \quad \nu = \frac{1}{3} \quad (147)$$

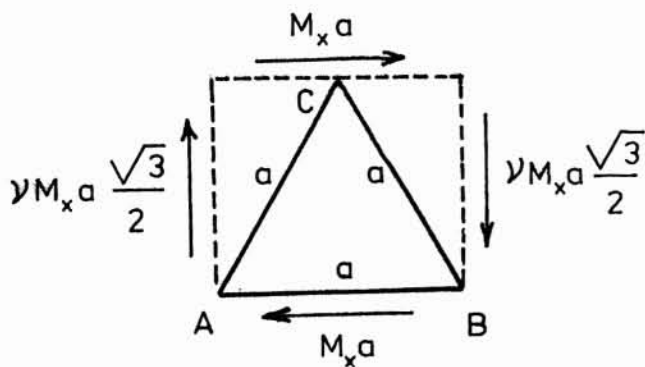
Mezi nimi platí známý vztah  $E = 2(1+\nu)G$ .

Izotropie náhradního modelu (pružné roviny) je důsledkem vysokého stupně symetrie dané struktury, jejíž elastické vlastnosti závisí na malém počtu parametrů (v tomto případě dokonce na jediné pružinové konstantě  $k$ ). Otočíme-li souřadnicemi na obr. 39 o  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  atd., dostane se síť na obr. 38 relativně k souřadnicím vždy do stejného základního postavení, takže při stejné homogenní deformaci náhradní pružné roviny musí být i napěťová odezva stejná. Odtud vyplývá nejen izotropie pružné roviny, ale i to, že z veličin  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  (147) je jen jedna nezávislá (buď  $E$ , nebo  $G$  lze volit, ostatní vyjdou).

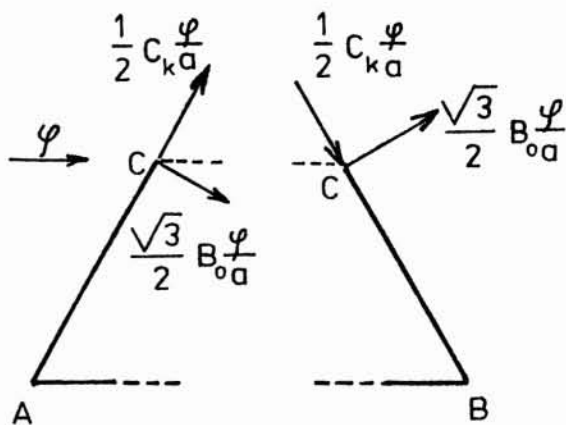
Obtížnější situace nastane, bude-li obr. 38 znázorňovat rošt složený z prutů, které se ohýbají a zkrucují, a budeme-li chtít tento rošt nahradit ohýbanou pružnou deskou. Tentokrát budou vlastnosti náhradní desky záviset na ohybové tuhosti  $B_0 = EJ_0$  a na tuhosti v krutu  $C_k = GJ_k$  jednotlivých příček roštu. \*) Jsou-li tyto hodnoty u všech příček stejné, mohou být vlastnosti náhradní desky popsány také jen dvěma nezávislými elastickými konstantami. Vzhledem k mnohonásobné symetrii roštu lze očekávat, že náhradní deska bude izotropní. Důkaz izotropie je poněkud zdlouhavý a nebudeme jej uvádět; je obdobný tomu, jak se určuje stupeň anizotropie u krystalů /18/.

Začneme tím, že element náhradní desky o rozměrech  $a \times a\sqrt{3}/2$  ohneme do válcové plochy kolem osy rovnoběžné se stranou  $AB$  (obr. 41). K tomu musíme desku zatížit ohybovým momentem  $M_x$  ( $N.m/m = N$ ) na přímých stranách a ohybovým momentem  $\nu M_x$  na stranách, jež se přetvoří do oblouku. Na obr. 41 jsou tyto momenty zakresleny až po vynásobení příslušnou délkou strany (mají proto fyzikální rozměr  $N.m$ ). Momenty i úhly budeme znázorňovat vektory, jež tvoří s příslušným smyslem otáčení pravotočivý šroub. Momenty znázorněné na obr. 41 tedy působí tlak v horní a tah ve spodní lící ploše desky. Příčka  $AB$  roštu se nebude deformovat (bude to povrchová přímka válcové plochy, do které se rošt i deska přetvoří). Příčky  $AC$ ,  $BC$  se budou ohýbat i zkrucovat, jak je znázorněno na obr. 42.

\*) Předpokládáme, že hlavní osy průřezů příček roštu jsou rovnoběžné s rovinou  $x$ ,  $y$  roštu, anebo k ní kolmé.



Obr. 41



Obr. 42

Např. příčka AC se zkroutí o úhel  $\frac{1}{2}\varphi$  (je to složka vektoru  $\varphi$  spadající do směru AC), a krouticí moment je proto

$$M_{kAC} = \frac{1}{2} C_k \frac{\varphi}{a} \quad (148)$$

Obdobně vypočteme ostatní momentové veličiny znázorněné vektory připojenými v bodě C. Úhel  $\varphi$  přitom představuje sklon tečné roviny v bodě C k tečné rovině procházející body A, B (tedy k nákresně).\*) Pro deformaci náhradní desky s ohybovou tuhostí  $D_0$  ohýbané do válcové plochy momenty  $M_x$  a  $\nu M_x$  podle obr. 41 platí podle /13/ vztah

$$\varphi = \frac{M_x}{D_0} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (149)$$

Porovnáme deformační energii v roštu a v náhradní desce. Musí být

$$2 \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} B_0 \frac{\varphi}{a} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi \right) + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} C_k \frac{\varphi}{a} \right) \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right] = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{2 D_0 \varphi}{\sqrt{3}} \right) (\varphi) \quad (150)$$

Připomeňme, že deformační práce nějakého momentu je rovna polovičnímu součinu momentu a úhlu, na němž moment působí. Polovičnímu proto, že mo-

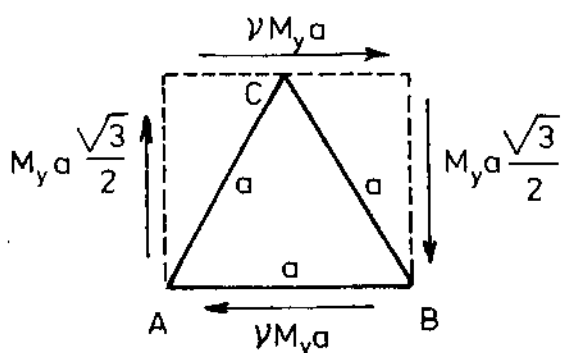
\*) Nezaměňuj označení bodu C s torzní tuhostí  $C_k$  v rovnici (148).  
Obdobně upozornění se týká i symbolů B a D.

ment roste úměrně k úhlu, takže jeho průměrná velikost je polovinou maximální hodnoty. Ohybové momenty  $\nu M_x$  práci nekonají, neboť k nim přísluší nulový úhel otočení jejich působistě. Z rovnice (150) vypočteme ohybovou tuhost  $D_0$  našeho modelu

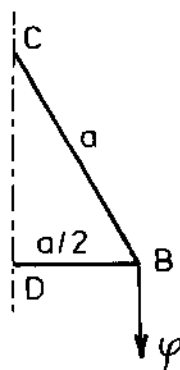
$$D_0 = \frac{\sqrt{3}}{4a} (3B_0 + C_k) \quad (151)$$

Připomeňme, že  $B_0$ ,  $C_k$  mají fyzikální rozměr  $N.m^2$ , kdežto  $D_0$  má rozměr  $N.m$ .

Byl-li náš předpoklad o izotropii správný, musí vyjít stejná ohybová tuhost  $D_0$  náhradní desky i pro případ zatížení ohybovými momenty  $M_y$  podél kratších stran a  $\nu M_y$  podél delších stran elementu zakresleného na obr. 43.



Obr. 43

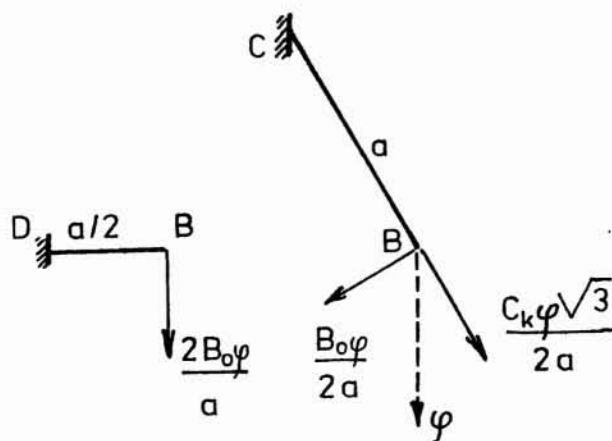


Obr. 44

Zřejmě stačí řešit jen polovinu strukturního elementu zakreslenou na obr. 44. Ohybová plocha bude opět válcová, tentokrát s osou rovnoběžnou se symetralou  $CD$ . Strana  $AD$  se ohne o úhel  $\varphi$ , takže v ní vznikne ohybový moment  $2B_0\varphi/a$ . Strana  $AC$  se ohne o úhel  $\varphi/2$  a zkroutí o úhel  $\varphi\sqrt{3}/2$ , takže v ní vznikne ohybový moment  $B_0\varphi/(2a)$  a krouticí moment  $C_k\varphi\sqrt{3}/(2a)$ . Tyto momenty jsou zakresleny na obr. 45. Pro úhel  $\varphi$  máme tentokrát vztah

$$\varphi = \frac{M_y}{D_0} \cdot \frac{a}{2} \quad (152)$$

a rovnost deformačních energií v dané struktuře a v náhradní desce vyžaduje, aby

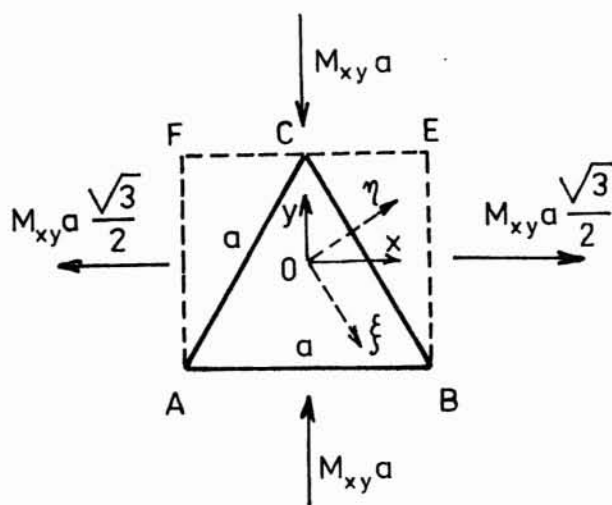


Obr. 45

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2B_0\varphi}{a}\right)(\varphi) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{B_0\varphi}{2a}\right)\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{C_k\varphi\sqrt{3}}{2a}\right)\left(\frac{\varphi\sqrt{3}}{2}\right) = \\
 & = \left(\frac{1}{2}\right)\left(M_y \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)(\varphi)
 \end{aligned} \tag{153}$$

Z rovnice (152) a (153) vyloučíme  $M_y$  a dostaneme stejnou ohybovou tuhost  $D_0$ , jakou jsme vypočetli dříve, totiž (151). Kdyby tomu tak nebylo, musili bychom hledat chybu.

Zbývá určit účinek krouticího momentu  $M_{xy}$  (obr. 46). Jak známo,



Obr. 46

přetvoří se deska jeho účinkem do tvaru hyperbolického paraboloidu /13/. Zvolíme souřadnice  $x, y$  s počátkem ve středu obdélníku zakresleného na obr. 46 a průhyb  $W$  desky vyjádříme jako funkci těchto souřadnic. Bude

$$W = cxy \quad (154)$$

kde

$$c = \frac{M_{xy}}{(1-\nu)D_0} \quad (155)$$

Zde  $\nu$  je Poissonovo číslo náhradního modelu (desky).

Strana  $AB$  trojúhelníku na obr. 45 zůstane přímá a pouze se zkroutí o úhel

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_B - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_C = ca \quad (156)$$

Abychom vyšetřili deformaci strany  $BC$ , otočíme souřadnice  $x, y$  o  $60^\circ$  do směrů  $\xi, \eta$  (obr. 45). Vyjde

$$x = \frac{1}{2}\xi + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta \quad (157)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta \quad (158)$$

takže ohybová plocha (155) bude mít v nových souřadnicích rovnici (po úpravě)

$$W = c\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi\eta + \frac{\sqrt{3}}{4}\eta^2\right) \quad (159)$$

Křivost prutu  $BC$  působená jeho ohybem bude (při malých průhybech)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}c \quad (160)$$

a zkrut téhož prutu bude

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{2} C \quad (161)$$

Těmto hodnotám přísluší deformační energie v prutu AB

$$U_{AB} = \frac{1}{2a} C_k (ca)^2 \quad (162)$$

a v prutu BC

$$U_{BC} = \frac{a}{2} \left[ B_0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} c\right)^2 + C_k \left(-\frac{1}{2} c\right)^2 \right] \quad (163)$$

Celková deformační energie bude

$$U = U_{AB} + 2 U_{BC} = \frac{3}{4} c^2 a (C_k + B_0) \quad (164)$$

Tato energie se musí rovnat práci vykonané momentem  $M_{xy} (= M_{yx})$  v elastické desce o ploše  $a^2 \sqrt{3}/2$

$$\begin{aligned} U &= D_0 (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \\ &= D_0 (1-\nu) c^2 a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (165)$$

Je to práce momentů zakreslených na obr. 45 při otočení stran čárkováného obdélníku. Porovnáním výrazů (164) a (165) dostáváme

$$D_0 (1-\nu) = \frac{\sqrt{3}}{2a} (C_k + B_0) \quad (166)$$

a odtud s pomocí (151) vyjde Poissonovo číslo

$$\nu = \frac{B_0 - C_k}{3 B_0 + C_k} \quad (167)$$



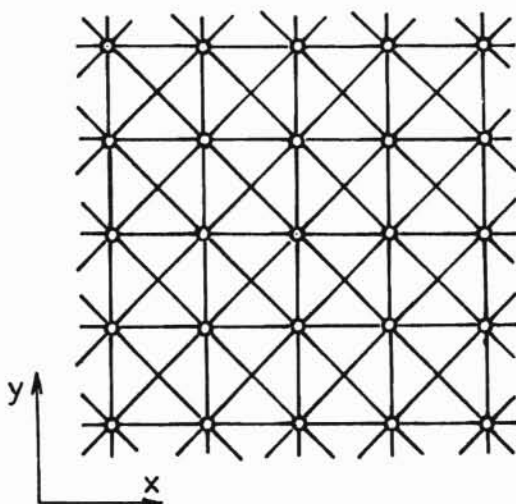
Je zřejmé, že toto číslo může vyjít nulové, kladné i záporné. Omezení, které pro toto číslo platí v reálném kontinuu, zde neplatí, neboť nejde o reálné kontinuum. \*) Vypočtená hodnota (167) se obecně liší od skutečného Poissonova čísla materiálu použitého k výrobě roštu.

Náhradní kontinuum umožňuje, abychom snadno posoudili deformaci celé struktury v globálním pohledu. Napjatost je ovšem dána detailní deformací jednotlivých elementů skutečné struktury.

Uvedeným způsobem byla např. řešena elastická deformace trubkovnice výměníku tepla, jež byla nahrazena homogenní deskou uloženou na trubkách jako na pružném podkladu /14/, /15/. Ve sborníku /16/ jsme podobnou metodou řešili průhyb roštů složených ze soustavy vzájemně kolmých podélníků a příčníků. Ve sborníku /17/ jsme vytvořili náhradní homogenní model pro porézní materiál. V práci /13/ lze najít řešení deformací vlnitého plechu a žebrovaných desek rovněž s použitím náhradní homogenní anizotropní desky.

#### Příklad 17

Je dána soustava hmotných bodů uspořádaných do čtvercové sítě podle obr. 47. Tyto body jsou spojeny nehmotnými pružinami. Podélné a příčné



Obr. 47

---

\*) Tato omezení vyplývají z druhé věty termodynamiky (viz /17/). Neplatnost těchto omezení pochopíme, uvědomíme-li si různost vzorců pro změnu objemu u dané struktury a u náhradního kontinua.

pružiny mají tuhost  $k_1$ , diagonální pružiny  $k_2$ . Jaký musí být poměr těchto konstant, aby vznikl model izotropní elastické roviny? jaké budou moduly pružnosti a Poissonovo číslo této roviny jednak za předpokladu rovinné napjatosti, jednak za předpokladu rovinné deformace?

#### Návod k řešení a kontrolní výsledek

Vyšetřete čistý smyk jednak při zkosení úhlu mezi osami  $x$ ,  $y$ , jednak v souřadnicích o  $45^\circ$  otočených. Mají-li být oba moduly pružnosti ve smyku stejné, musí být  $k_1 = 2k_2$  (podmínka izotropie). Modul pružnosti ve smyku je pak

$$G = k_2 = k_1/2$$

Dále vyšetřte prodloužení modelu ve směru osy  $x$ , resp.  $y$ . Za podmínek rovinné napjatosti ( $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ) vyjde

$$E = \frac{4}{3} k_1 \quad \nu = \frac{1}{3} \quad (17.1)$$

Za podmínek rovinné deformace ( $\epsilon_z = 0$ ,  $\gamma_{xz} = 0$ ,  $\gamma_{yz} = 0$ ) bude

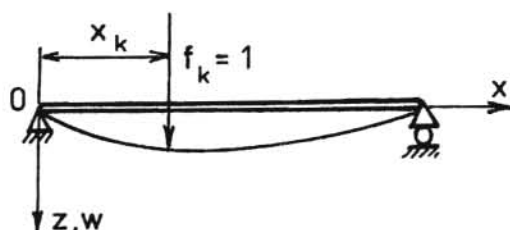
$$E = \frac{5}{4} k_1 \quad \nu = \frac{1}{4} \quad (17.2)$$

Poznamenejme, že jak ze vztahů (140), tak z rovnic (142), (17.1), (17.2) je zřejmé, že tloušťku náhradní roviny bereme jako jednotkovou.

#### 11. PŘÍKLADY NESPRÁVNÝCH NEBO NEVHODNĚ UTVOŘENÝCH MODELŮ

Je-li prostě podepřený prizmatický nosník staticky zatížen jednotkovou osamělou silou  $f_k = 1 \text{ N}$  v místě  $x = x_k$  (obr. 48), je ohybová čára  $w_k(x)$  dána rovnicí

$$W_k(x) = \begin{cases} \frac{l-x_k}{6lEJ} x(2lx_k - x_k^2 - x^2) & (x \leq x_k) \\ \frac{l-x_k}{6lEJ} x(2lx_k - x_k^2 - x^2) + \frac{1}{6EJ} (x-x_k)^3 & (x > x_k) \end{cases} \quad (168)$$



Obr. 48

Máme-li po ruce tyto vzorce, můžeme být v pokušení dosadit funkce  $W_k(x)$  pro různá  $k$  do aproximace obecné ohybové čáry  $W(x,t)$  a po vzoru (7) napsat

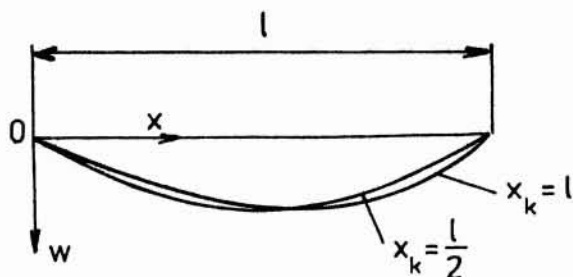
$$W(x,t) = q_1(t)W_1(x) + \dots + q_k(t)W_k(x) + \dots + q_n(t)W_n(x) \quad (169)$$

Teoreticky proti tomu nelze nic namítnout. Bázové funkce  $W_k(x)$  splňují všechny okrajové podmínky a součet (169) může jistě velmi dobře vystihnout přinejmenším první harmonickou složku jakéhokoli kmitavého pohybu, tím spíše pak statický průhyb při obecném zatížení.

Při praktické realizaci se však ukáže, že při větším počtu  $n$  stupňů volnosti vzrostou zaokrouhlovací chyby, které mohou výpočet úplně znehodnotit. A tak i dobře připravený výpočtový program, který správně počítal vzorové ladicí příklady o malém počtu stupňů volnosti, vydává při větším počtu těchto stupňů už jen nesmyslná čísla. Je to způsobeno tím, že se "konkurenční" funkce  $W_k(x)$  tvarově navzájem jen málo liší.

Přesněji řečeno, jsou navzájem téměř afinní. K porovnání průběhů funkcí

$W_k(x)$  je vhodné násobit je takovou konstantou, aby byl maximální průhyb stejný. Největší možné difference je vidět na obr. 49. Kdyby se tyto funkce nelišily tvarem vůbec, ztratila by úloha určit zobecněné souřadnice jakýkoli smysl.



Obr. 49

Matematický model nosníku vytvořený s aproximací (169) je tedy z praktického hlediska nevhodný.

Připomeňme, že veličina

$$\alpha_{ij} = w_j(x_i) \quad (170)$$

značí průhyb v místě  $x = x_i$  způsobený jednotkovou silou  $f_j = 1 \text{ N}$  působící v místě  $x = x_j$ . Veličiny  $\alpha_{ij}$  jsou tedy příčinkové činitele. Jimi lze vyjádřit průhyb např. v místě  $x = x_k$

$$w(x_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} f_j \quad (171)$$

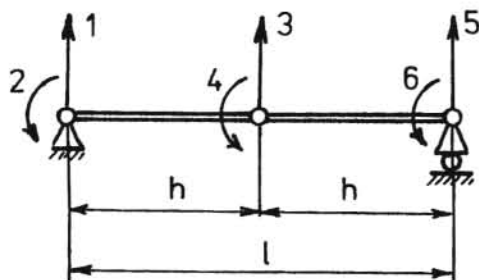
Jde-li o soustavu podpor (nosník na mnoha podporách), lze deformační podmínky upravit pomocí příčinkových činitelů do tvaru

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad (172)$$

Zde  $\delta_1$  až  $\delta_n$  jsou průhyby v místech "nadbytečných" podpor, které vzniknou, jestliže tyto podpory odstraníme, a  $f_1$  až  $f_n$  jsou reakce v těchto podporách.

Tento postup je formálně jednoduchý. Matice  $[\alpha_{ij}]$  v rovnici (172) představuje matici poddajnosti. Výsledky řešení soustavy (172) však bývají při velkém počtu rovnic vlivem zaokrouhlovacích chyb nespolehlivé.

Pomineme chyby, jichž se lze dopustit při odvozování matic tuhosti v metodě konečných prvků. Vznikají nejčastěji tím, že interpolační funkce nemají na hranicích prvků potřebnou spojitost; takovou, aby se součet deformačních energií uvnitř jednotlivých prvků rovnal deformační energii v celé definiční oblasti. O požadavcích, kterým musí konečné prvky vyhověvat, jsme pojednali na jiném místě /19/.



Obr. 50

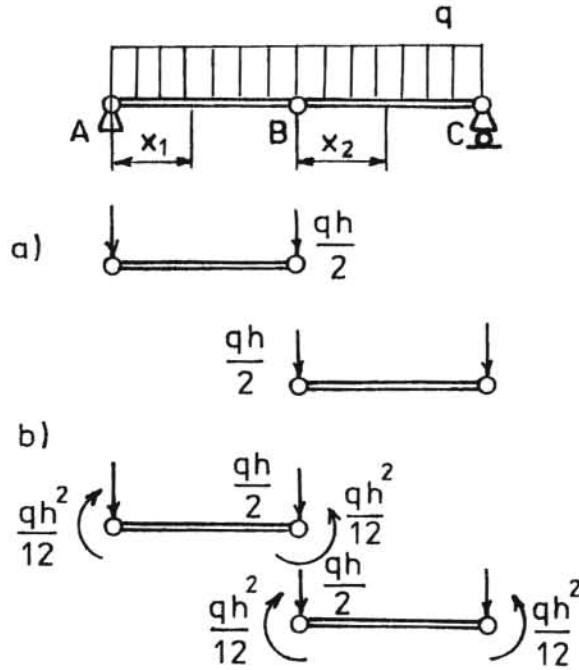
me matici tuhosti (102). Složením dvou takových matic podle schématu na obr. 24 dostaneme pásovou matici pro stupně volnosti  $q_1$  až  $q_6$  (obr. 50). Okrajové podmínky vyžadují, aby bylo  $q_1 = 0$ ,  $q_5 = 0$ . Vynecháme tedy první a pátý sloupec (násobí se nulami) i první a pátý řádek (reakce v podporách nás prozatím nezajímají). Dostaneme tak zmenšenou matici tuhosti  $[K]$  typu  $4 \times 4$  a s ní i základní rovnici pro statickou úlohu

$$\frac{EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 4h^2 & -6h & 2h^2 & 0 \\ -6h & 24 & 0 & 6h \\ 2h^2 & 0 & 8h^2 & 2h^2 \\ 0 & 6h & 2h^2 & 4h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (173)$$

Dané spojité zatížení  $q$  vstoupí do hry prostřednictvím zobecněných sil  $f_2, f_3, f_4, f_6$ . Intuitivně můžeme usoudit, že se celkové zatížení  $qh$  na každém z obou prvků dá nahradit soustavou dvou rovnoběžných sil v uzlových bodech o velikosti  $qh/2$  (obr. 51 a). Dosadíme tedy

$$\begin{aligned} f_3 &= -\frac{qh}{2} - \frac{qh}{2} = -qh \\ f_2 &= f_4 = f_6 = 0 \end{aligned} \quad (174)$$

\* ) Nezaměňuj liniovou sílu  $q$  se zobecněnými souřadnicemi  $q_1$  až  $q_6$ .



Obr. 51

Bude

$$\frac{EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 4h^2 & -6h & 2h^2 & 0 \\ -6h & 24 & 0 & 6h \\ 2h^2 & 0 & 8h^2 & 2h^2 \\ 0 & 6h & 2h^2 & 4h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = -qh \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (175)$$

Odtud vypočteme

$$q_2 = -\frac{qh^3}{4EJ}, \quad q_3 = -\frac{qh^4}{6EJ}, \quad q_4 = 0, \quad q_6 = \frac{qh^3}{4EJ} \quad (176)$$

místo přesného

$$q_2 = -\frac{qh^3}{3EJ}, \quad q_3 = -\frac{qh^4}{48EJ}, \quad q_4 = 0, \quad q_6 = \frac{qh^3}{3EJ} \quad (177)$$

Chyba ve výpočtu maximálního průhybu je 20 %. Mohli bychom se s tím spokojit, vždyť jsme zvolili pouze dva prvky!

Ve skutečnosti jsme zvolili chybný vektor zobecněných sil. Aproximace (93) pro průhyb nosníkového prvku požaduje, aby virtuální práce

$$\int_0^h (-\delta w) q dx$$

elementárních sil  $q dx$  byla rovna virtuální práci

$$f_1 \delta q_1 + f_2 \delta q_2 + f_3 \delta q_3 + f_4 \delta q_4$$

zobecněných sil. S označením zavedeným v rovnici (98) tedy musí být

$$-\{\delta q\}^T \int_0^h [A(x)]^T q dx = \{\delta q\}^T \{f\} \quad (178)$$

a odtud - vzhledem k libovolnosti  $\{\delta q\}$  -

$$\{f\} = -q \int_0^h [A]^T dx \quad (179)$$

Pro jeden prvek o čtyřech stupních volnosti odtud vyjde

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{qh}{2} & f_2 &= -\frac{qh^2}{12} \\ f_3 &= -\frac{qh}{2} & f_4 &= +\frac{qh^2}{12} \end{aligned} \quad (180)$$

Správné je tedy náhradní zatížení znázorněné na obr. 51b. Po složení silových vektorů (180) pro oba prvky nosníku podle schématu na obr. 23 dostaneme

$$\begin{aligned} f_2 &= -\frac{qh^2}{12} & f_3 &= -qh \\ f_4 &= 0 & f_6 &= \frac{qh^2}{12} \end{aligned} \quad (181)$$

S hodnotami (181) dá rovnice (173)

$$\frac{EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 4h^2 & -6h & 2h^2 & 0 \\ -6h & 24 & 0 & 6h \\ 2h^2 & 0 & 8h^2 & 2h^2 \\ 0 & 6h & 2h^2 & 4h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = -\frac{qh}{12} \begin{Bmatrix} h \\ 12 \\ 0 \\ h \end{Bmatrix} \quad (182)$$

Odtud vyjde

$$\begin{aligned} q_2 &= -\frac{qh^3}{3EJ} & q_3 &= -\frac{qh^4}{48EJ} \\ q_4 &= 0 & q_6 &= \frac{qh^3}{3EJ} \end{aligned} \quad (183)$$

S jistým úžasem zjišťujeme, že toto řešení je přesné! Jak je to možné? Vždyť skutečná průhybka je parabolou čtvrtého stupně a my jsme ji aproximovali dvěma parabolami stupně třetího! Můžeme však být klidní; věci opravdu nejsou tak dobré, jak vypadají. Dostali jsme přesné hodnoty zobecněných souřadnic, to znamená průhyby a sklony v uzlových bodech. Mezi uzlovými body však jsou průhyby vypočtené z aproximace

$$w(x_1) = [h_2(x_1) \quad h_3(x_1)] \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (184)$$

pro  $0 < x_1 < h$ ,  $x_1$  měřeno od bodu A (obr. 51), resp.

$$w(x_2) = [h_1(x_2) \quad h_4(x_2)] \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (185)$$

pro  $0 < x_2 < h$ ,  $x_2$  měřeno od bodu B, o něco málo menší než průhyby přesné, vypočtené z Bernoulliho-Navierovy teorie. Rozdíly však jsou nepatrné.

Tento příklad nás poučil o tom, že se často nevyplácí spoléhat na "selský rozum"; v prostém principu virtuálních prací je rozumu obsaženo mnohem víc.

Nevhodnost některých modelů bývá způsobena nesprávným odhadem tuhosti či poddajnosti podpory, zanedbáním vůlí i tam, kde mají rozhodující vliv atd. (viz /20/). Jiným zdrojem chyb bývá nerespektování singulárních silových působení, která jsou důsledkem idealizace skutečnosti. To se týká zejména kontaktních úloh (/21/, /22/).

Některé omyly při náhradě pravidelné struktury homogenním kontinuem vstoupily do historie. O náhradu trubkového čela s pravidelně uspořádaným polem otvorů ekvivalentní deskou bez otvorů se nezávisle pokusili v USA



roku 1952 profesori Malkin a Horvay. Perforované čelo si představili jako rošt, jehož příčky tvoří pravidelné šestiúhelníky, a tento rošt pak nahradili deskou bez otvorů. Dospěli přitom k různým výsledkům. Na stránkách časopisu Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, pak bylo možné sledovat jejich velmi ostrou polemiku, kterou lapidárními argumenty ukončil ve svůj prospěch Horvay. Práce /14/ je zobecněním jeho výsledků pro rošt s neprizmatickými příčkami.

Zvláštní skupinu problémů, jimiž jsme se pro nedostatek času nemohli zabývat, je interakce mezi tekutinou a pevnou konstrukcí. Ve strojnictví jde nejčastěji o pohyb trubek tekutinou obtékaných nebo protékajících. Protéká-li tekutina pružnou trubkou, která je na obou koncích buď kloubově podepřená, nebo vetknutá, je systém konzervativní /2/. Při určité rychlosti tekutiny ztratí trubka stabilitu, tj. je-li prohnuta nějakou vnější silou, průhyb se po odstranění této síly nezmění nebo dokonce dále vzroste (nestabilita typu divergence). Zcela jinak se chová trubka, která je vetknutá jen na jednom konci, zatímco druhý konec má volný. Tento systém je nekonzervativní. Proudí-li takovou trubkou tekutina směrem od volného konce dovnitř (případ sání), může nastat nestabilní kmitavý pohyb už při velmi malých rychlostech proudu; při opačném smyslu proudění se volný konec trubky rozkmitá teprve při překročení určité kritické rychlosti (flutter, tj. nestabilita typu negativního tlumení). Jev tohoto druhu, totiž hadovitý pohyb hadice při velké rychlosti proudu, když její konec hasiči neudrží a pustí, byl popsán již roku 1885 /28/. Jestliže pružnou hadici nahradíme systémem tuhých trubek spojených pružnými klouby podle obr. 28, ukáže se, že tento model může ve vertikální poloze (za působení gravitačních sil) ztratit stabilitu vlivem divergence, kdežto skutečná hadice se spojitě rozdělenou ohybovou tuhostí ji tímto způsobem ztratit nemůže /29/. Jinými slovy, studovat chování nekonzervativního systému diskretizovanými modely může být pochybné /30/.

#### Poznámka

Hybnost elementu hmotnosti tekutiny  $\rho S u dt$ , který za časový interval  $dt$  opustí volný konec trubice, má do směru proudu složku  $dp_x = u \rho S u dt$  a do směru příčného  $dp_z = (\partial w / \partial t)_{x=l} \rho S u dt$ . Protože se časová změna hybnosti rovná působící síle, jsou vektorové složky sil působících na konec hadice

$$F_x = -\rho S u^2 \quad F_z = -\rho S u \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{x=l} \quad (a)$$

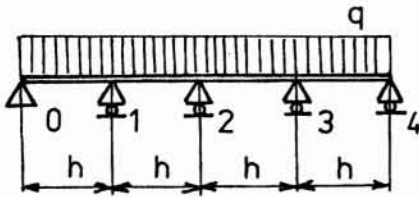
Příčná složka síly  $F_z$  je  $F_z (\partial w / \partial x)_{x=l}$ , takže práce příčných sil při průhybu konce trubky  $(\partial w / \partial t)_{x=l}$  je za jeden kmit o periodě  $T$

$$A = \int_0^T \left[ -\rho S u^2 \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial t} - \rho S u \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right]_{x=l} dt \quad (b)$$

a může být, jak vidno, kladná i záporná. Kladná práce vede k narůstání amplitudy kmitů, záporná k jejich zmenšování (tlumení). Je-li konec  $x = l$  trubky podepřen nebo vetknut, je  $A = 0$ , tzn. systém se stane konzervativním.

### Příklad 18

Vypočtete reakce u spojitého, prizmatického, rovnoměrně zatíženého nosníku na pěti nepoddajných podporech podle obr. 52.



### Řešení

Použijeme-li příčinkových činitelů, uvolníme podpory 1 až 3 a vypočteme s použitím (168) a (170)

Obr. 52

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \alpha_{33} &= \frac{q}{768} \frac{\ell^3}{EJ} \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{23} = \alpha_{32} &= \frac{11}{768} \frac{\ell^3}{EJ} \\ \alpha_{13} = \alpha_{31} &= \frac{7}{768} \frac{\ell^3}{EJ} \end{aligned} \quad (18.1)$$

V těchto vztazích  $\ell = 4h$ . Průhyby rovnoměrně zatíženého nosníku, prostě podepřeného v bodech 0, 4, budou

$$\begin{aligned} \delta_1 = \delta_3 &= -\frac{57}{6144} \frac{q\ell^4}{EJ} \\ \delta_2 &= -\frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EJ} \end{aligned} \quad (18.2)$$

Soustava (172) bude mít tvar

$$\frac{1}{768} \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{6144} \begin{Bmatrix} 57 \\ 80 \\ 57 \end{Bmatrix} \quad (18.3)$$

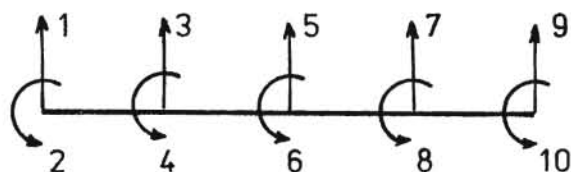
Odtud vyjde

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \frac{q\ell}{56} \begin{Bmatrix} 16 \\ 13 \\ 16 \end{Bmatrix} = \frac{qh}{14} \begin{Bmatrix} 16 \\ 13 \\ 16 \end{Bmatrix} \quad (18.4)$$

Pro reakce  $f_0$ ,  $f_4$  zbývá

$$f_0 = f_4 = \frac{1}{2} (4qh - f_1 - f_2 - f_3) = \frac{11}{28} qh \quad (18.5)$$

Kdyby šlo o velký počet podpěr, vzrostly by zaokrouhlovací chyby. V tom případě by byla vhodnější metoda konečných prvků, která dává pro soustavu čtyř nosíkových prvků, znázorněnou na obr. 53, matici tuhosti desátého



Obr. 53

řádu. Protože všechny liché zobecněné posuvy vymizí, lze škrtnout všechny liché sloupce i řádky. Zbude matice tuhosti pátého řádu a s ní vyjde základní rovnice ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_6 \\ q_8 \\ q_{10} \end{Bmatrix} = \frac{qh^3}{12EJ} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (18.6)$$

Silový vektor na pravé straně (18.6) byl sestaven z elementárních vektorů, z nichž každý obsahuje prvky  $f_2, f_4$  vypočtené podle (180), a to složením podle schématu na obr. 23. \*) K řešení soustavy (18.6) můžeme - pokud nevyužijeme počítače - dosadit

$$q_2 = -q_{10} \quad q_4 = -q_8 \quad q_6 = 0 \quad (18.7)$$

Tyto vztahy plynou ze symetrie. Dostaneme

$$q_2 = -\frac{qh^3}{42EJ} \quad q_4 = \frac{qh^3}{168EJ} \quad (18.8)$$

Když takto vypočtené hodnoty zobecněných souřadnic dosadíme do dříve škrtnutých lichých řádků původní soustavy, vyjdou na pravé straně výsledné uzlové síly, které se skládají z vnějšího zatížení ( $-qh/2$  z každého pole přiléhajícího k uzlu) a z reakce v daném uzlu, tj. v podpoře. Např. první a třetí řádek dají po rozepsání

$$\frac{EJ}{h^3} (6hq_2 + 6hq_4) = -\frac{qh}{2} + r_1 \quad (18.9)$$

$$\frac{EJ}{h^3} (-6hq_2 + 6hq_6) = -qh + r_3 \quad (18.10)$$

atd. Celkem vyjde

$$r_1 = r_9 = \frac{11}{28} qh \quad r_3 = r_7 = \frac{8}{7} qh \quad r_5 = \frac{13}{14} qh \quad (18.11)$$

\*) Indexy v rovnicích (180) odpovídají lokálnímu číslování, v rovnici (18.6) globálnímu číslování stupňů volnosti.

Až na označení, které je nyní odvozeno z obr. 53, a nikoli z obr. 52, jsou výsledky řešení oběma způsoby stejné. Avšak tento druhý postup je necitlivý k zaokrouhlovacím chybám i při velkém počtu staticky neurčitých podpor. Rozdíl obou přístupů poznáváme již z letmého srovnání čtvercových matic v rovnicích (18.3), popř. (18.6). V prvním případě jde o plnou matici, která má i mimo diagonálu prvky srovnatelné velikosti jako na diagonále. V druhém případě jde o pásovou matici, v níž jsou všechny diagonální prvky absolutně větší než mimodiagonální. Taková matice je z hlediska dosažitelné numerické přesnosti při počítání s neúplnými čísly vždy výhodnější.

## 12. KONSTITUTIVNÍ ROVNICE A REOLOGICKÉ MODELY

Aplikace nových materiálů klade i nové nároky na znalost jejich termomechanických vlastností. Vyžadují to nejen nové výrobní způsoby a technologické procesy, ale i potřeba správně dimenzovat hotové součásti pro dané provozní podmínky. V praxi se nejvíce uplatňují fenomenologické teorie, které pracují pouze s makroskopicky měřitelnými fyzikálními veličinami, jež tedy vycházejí z teorie kontinua. Jiné teorie, které se zakládají na modelech mikrostruktury, blíží se sice více kauzálnímu výkladu pozorovaných jevů, avšak nejsou tak rozvinuté, aby mohly být pro praxi - za dnešní úrovně znalostí - srovnatelným přínosem.

Čistě empirické odvozování fenomenologických teorií ustupuje v poslední době do pozadí před matematickým modelováním vycházejícím z mechaniky a z termodynamiky kontinua. Vztahy, které se přitom odvozují nebo vytvářejí, lze rozdělit do dvou skupin. V první jsou bilanční rovnice (pohybové rovnice, zákony zachování), které platí nezávisle na tom, o jaký materiál jde. V druhé jsou konstitutivní (konstituční, materiállové) rovnice, které charakterizují vlastnosti použitého materiálu.

Konstitutivní rovnice popisují vztahy mezi časovými průběhy fenomenologických veličin (namáhání, deformace, teplota, tepelná kapacita, teplotní gradient, tepelný tok). Takové jsou např. Fourierův zákon vedení tepla, Hookeův zákon, Newtonův zákon pro viskózní tekutiny atd. S těmito jednoduchými teoriemi zpravidla nevystačíme, jde-li o složité fyzikální

procesy, a musíme vytvářet teorie nové. Jde např. o velké deformace umělých hmot, o viskoplastické vlastnosti materiálů za vysokých teplot, o vliv normálových napětí na polymerní tekutiny, o chování granulárních prostředí atd. Nové teorie nemohou být příliš složité, mají-li sloužit praxi, a proto nemohou vystihnout chování daného materiálu v celé šíři, ale jen v určitém oboru stavových proměnných. Např. tečení materiálu se zpravidla vůbec neuplatní za nízké teploty; za vysoké teploty lze naopak zanedbat pružné deformace.

Nemají-li nové teorie ztrácet fyzikální opodstatnění, musí vyhovovat určitým axiomům, o nichž pojednává racionální mechanika (viz např. /24/, /25/). Touto problematikou se nebudeme detailně zabývat. Ukážeme pouze, jak se sestavují reologické modely a jak se s jejich pomocí vytvářejí obecnější konstitutivní zákony.

Existují tři základní druhy reologických modelů:

(1) Lineární pružina, Hookeův model (obr. 54a)

Síla  $f$  v něm je úměrná prodloužení, tj.

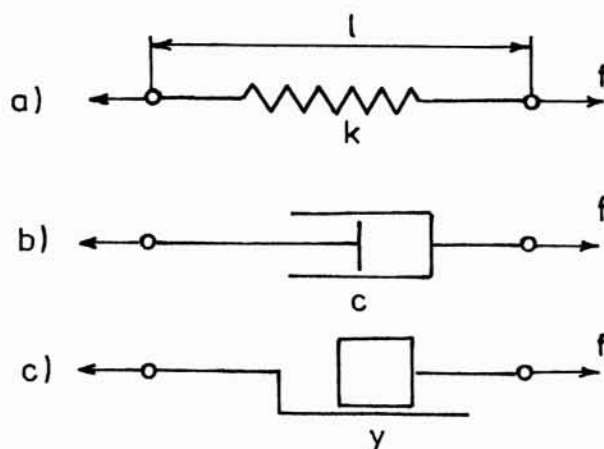
$$f = k(l - l_0) \quad (186)$$

Zde  $l_0$  je původní a  $l$  aktuální délka pružiny o tuhosti  $k$ .

(2) Lineární tlumič, Newtonův model (obr. 54b)

Síla  $f$  je úměrná relativní rychlosti pístu ve válci, tj. časové derivaci délky modelu (derivaci podle času značíme tečkou):

$$f = c \dot{l} \quad (187)$$



Obr. 54

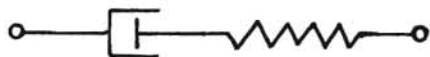
(3) Dvojice se suchým třením, Saint-Venantův model (obr. 54c)

Síla  $f$  je za pohybu konstantní, rovná smykovému tření  $\pm y$ , kdežto za klidu je v absolutní hodnotě menší nebo rovna  $y$  :

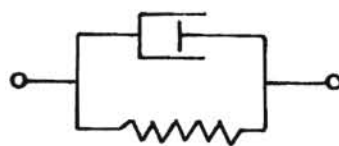
$$\begin{aligned} |f| &\leq y & (\dot{\ell} = 0) \\ f &= y \operatorname{sign}(\dot{\ell}) & (\dot{\ell} \neq 0) \end{aligned} \tag{188}$$

Chování těchto tří modelů je pružné, popř. vazké (viskózní) a tuhoplastické. Modely se považují za nehmotné, takže u Hookeova modelu mohou být funkce  $f(t)$ ,  $\ell(t)$  nespojité. Ostatní dva modely vyžadují nejen spojitost funkce  $\ell(t)$ , ale i existenci její derivace.

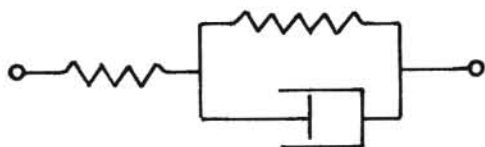
Z těchto tří základních typů lze sestavit paralelním či sériovým řazením složené modely pro různé typy materiálů vystihující jejich chování při jednoosé deformaci. Pro viskoelastické látky jsou nejběžnější modely Maxwellův (obr. 55), Kelvinův (Voigtův) (obr. 56), Pointingův-Thomsonův (obr. 57) a Burgersův (obr. 58).



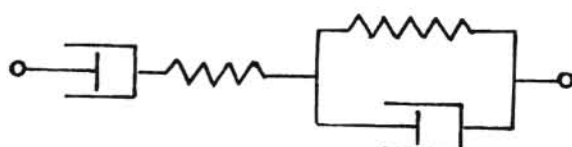
Obr. 55



Obr. 56



Obr. 57



Obr. 58

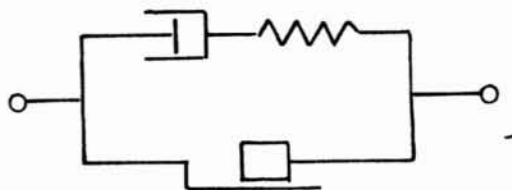
Pro plastické materiály byl vytvořen Prandtlův model (obr. 59), pro viskoplastické látky Schwedoffův model (obr. 60), popř. Binghamův model (obr. 61).

Tím samozřejmě nejsou vyčerpány všechny možnosti. Uvažme např. chování Prandtlova modelu (obr. 59). Závislost mezi silou  $f$  a prodlouže-

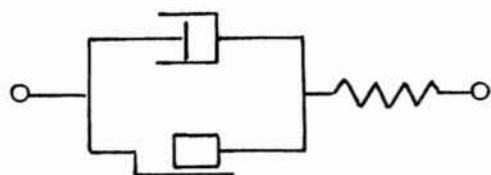
ním  $l - l_0$  snadno uhádneme. Deformační charakteristika tohoto modelu je zakreslena na obr. 62. Abychom ji matematicky popsali, zavedeme ve-



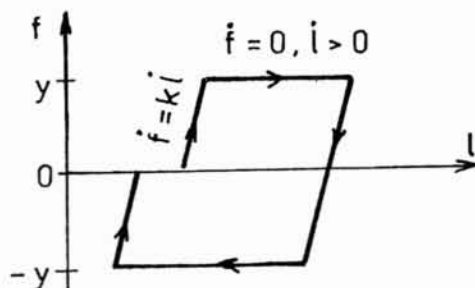
Obr. 59



Obr. 60



Obr. 61



Obr. 62

ličinu  $\alpha(t)$  jakožto délku modelu v čase  $t > 0$  při odlehčené pružině (při jejím nulovém napětí). Pak bude  $f = k(l - \alpha)$  a také  $\dot{\alpha} = 0$  pro  $|f| < y$ .

Zavedeme operátor  $\xi[\cdot]$  definicí

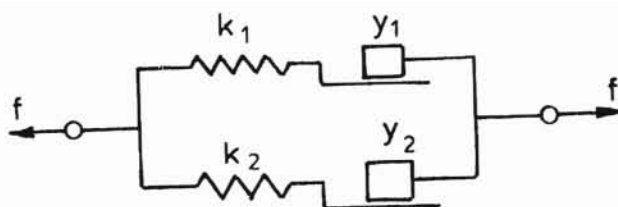
$$\xi[x] = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (x \neq 1) \end{cases} \quad (189)$$

Vztah mezi  $\alpha(t)$  a  $l(t)$  pak můžeme popsat jedinou rovnicí:

$$\dot{\alpha} = \xi\left[\frac{k}{y}(l - \alpha) \operatorname{sign}(\dot{l})\right] \dot{l} \quad (190)$$

Uvažme, co se stane, spojíme-li paralelně dva různé Prandtlovy modely (obr. 63). Tehdy bude (pro  $j = 1, 2$ ):





Obr. 63

$$\begin{aligned}
 f &= k_1 (l - \alpha_1) + k_2 (l - \alpha_2) \\
 |f| &\leq y_1 + y_2 \\
 \alpha_j &= \xi \left[ \frac{k_j}{y_j} (l - \alpha_j) \operatorname{sign}(\dot{l}) \right] \dot{l}
 \end{aligned}
 \tag{191}$$

Jsou-li pružiny v nezatíženém modelu bez napětí, začne první kluz při síle

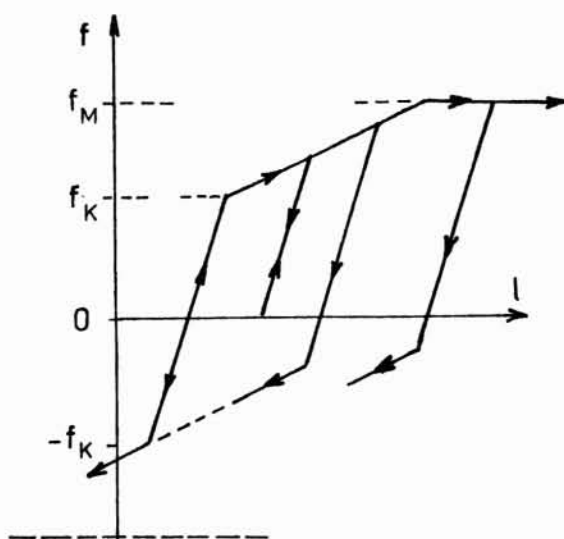
$$f_k = \left( \min_j \frac{y_j}{k_j} \right) (k_1 + k_2)
 \tag{192}$$

Neomezený kluz nastane při mezní síle

$$f_M = y_1 + y_2
 \tag{193}$$

Chování tohoto složeného modelu je znázorněno na obr. 64. Paralelním řazením mnoha (teoreticky až nekonečně mnoha) Prandtlových modelů dostaneme model s obecnou deformační charakteristikou (viz příklad na obr. 14).

Dalšího zobecnění dosáhneme zavedením vůlí mezi některé části modelu. Rozbor takových případů ponecháváme čtenáři. Všechny popsané modely popisují chování zkušební tyče při jednoosé napjatosti nebo jednoosé deformaci. Ukážeme, jak lze takto odvozené zákony zobecnit na prostorové případy. Vrátime se k Binghamovu modelu viskoplastického materiálu (obr. 61). Nedojde-li ke kluzu, chová se model jako jednoduchá pružina, tj. platí vztah



Obr. 64

$$f = k(l - \alpha) \quad (f \leq y) \quad (194)$$

Je to Hookeův zákon. Dostoupí-li síla  $f$  velikosti smykového tření  $y$ , začne se pohybovat i píst ve válci, takže bude

$$f = k(l - \alpha) = c\alpha + y \quad (f \geq y) \quad (195)$$

Síla  $f$  je úměrná napětí  $\sigma$ , tuhost  $k$  zastupuje modul pružnosti v tahu,  $l - \alpha$  znamená elastické poměrné prodloužení  $\epsilon_e$ , kdežto  $\alpha$  představuje plastické poměrné prodloužení  $\epsilon_p$ . Konečně  $y$  odpovídá statické mezi kluzu  $\sigma_k$ . Rovnice (194) dává tedy Hookeův zákon ve tvaru

$$\sigma = E \epsilon_e \quad (\sigma \leq \sigma_k) \quad (196)$$

Rovnice (195) můžeme přepsat do tvaru

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E \epsilon_e \\ \sigma &= c \epsilon_p + \sigma_k \end{aligned} \right\} \quad (\sigma > \sigma_k) \quad (197)$$

Protože  $\epsilon = \epsilon_p + \epsilon_e$  (celková poměrná deformace je dána součtem plastické a elastické části, což platí při malých deformacích), bude podle (197) zákon viskoplastického tečení materiálu

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{C} (\sigma - \sigma_k) \quad (\sigma > \sigma_k) \quad (198)$$

Tento zákon nyní zobecníme na trojrozměrnou deformaci či napjatost. Protože víme, že plastické deformace nebyvají ovlivněny hydrostatickou složkou napjatosti (kulovým či izotropním tenzorem napjatosti), dosadíme do (198) za napětí  $\sigma$  deviator napjatosti o složkách

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (199)$$

Podle indexů, které se dvakrát opakují, se sčítá (Einsteinovo pravidlo), takže např.  $s_{11} = \sigma_{11} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})$ . Dále víme, že kluz nastane, když druhý invariant

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (200)$$

dosáhne mezní hodnoty, kterou označíme  $\tau_k^2$ . \*) Zavedeme ještě deviator přetvoření o složkách

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (201)$$

a dostaneme tento ekvivalent k rovnici (196):

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_{ij} &= \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} \\ \dot{\epsilon}_{kk} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (\sqrt{J_2} \leq \tau_k) \quad (202)$$

Elastické deformace jsme popsali pomocí časových derivací složek příslušných deviatorů, abychom eliminovali člen popisující možné počáteční (konstantní) plastické přetvoření.  $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $K$  modul objemové pružnosti.

---

\*) Jak se snadno přesvědčíme, je  $\tau_k$  mez kluzu při čistém smyku.

Ekvivalent k rovnici (198) je

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{c} \left(1 - \frac{\tau_k}{\sqrt{J_2}}\right) s_{ij} \quad (\sqrt{J_2} > \tau_k) \quad (203)$$

Když se vztahy (202), (203) porovnaly s experimentálními výsledky získanými na různých, převážně kovových materiálech, vyvstala potřeba dalšího zobecnění. Konečný tvar konstitutivních rovnic, z něhož se v současnosti vychází, lze zjednodušit zavedením operátoru  $\langle \rangle$  podle definice

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & (F \leq 0) \\ \Phi(F) & (F > 0) \end{cases} \quad (204)$$

Zde  $F$  je bezrozměrová funkce

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{\tau_k} - 1 \quad (205)$$

kteřá má při statickém (velmi pomalém) zatěžování význam Misesova plastického potenciálu. Funkce  $\Phi$  je empirická. Např. zvolíme

$$\Phi(F) = F^\delta = \left(\frac{\sqrt{J_2}}{\tau_k} - 1\right)^\delta \quad (206)$$

kde  $\delta$  je materiálová konstanta. Konstitutivní rovnice nyní jsou

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \\ \dot{\epsilon}_{ii} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii} \end{aligned} \quad (207)$$

Zde  $\gamma$  je další materiálová konstanta, která má fyzikální rozměr  $s^{-1}$ .

Plastická složka přetvoření je tedy dána deformační rychlostí

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \quad (208)$$

Je nenulová pouze pro  $F > 0$  nezávisle na tom, jaká je derivace  $\dot{F}$  (v tom je zásadní rozdíl proti elastickoplastickému materiálu).

Utvořme z deformačních rychlostí (208) druhý invariant

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2} \dot{e}_{ij}^{(p)} \dot{e}_{ij}^{(p)} \quad (209)$$

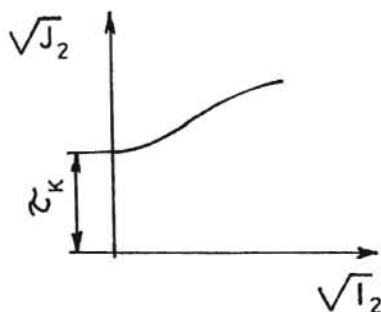
S použitím (208) a (200) vyjde

$$\sqrt{\bar{I}_2} = \gamma \Phi(F) \quad (210)$$

Dosadíme-li sem z rovnice (205), bude po úpravě

$$\sqrt{J_2} = \tau_k \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{\bar{I}_2}}{\gamma} \right) \right] \quad (211)$$

Je to vztah mezi invarianty deviátoru rychlosti plastické deformace a deviátoru napětí, zakreslený schematicky na obr. 65. Symbol  $\Phi^{-1}$  znamená funkci inverzní k  $\Phi(F)$ .

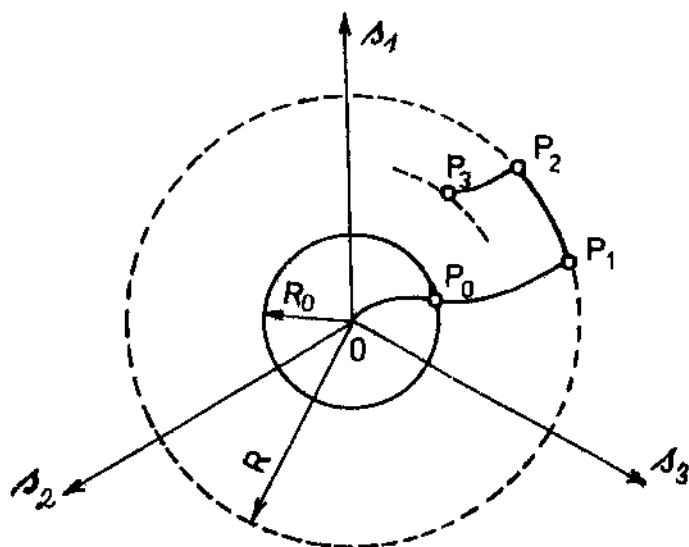


Obr. 65

Z tvaru rovnice (211), resp. z obr. 65, lze usuzovat, že efektivní napětí ve smyku  $\sqrt{J_2}$  při plastických deformacích závisí na rychlosti deformace. Je-li mezní čára v diagramu hlavních složek deviátoru napětí  $s_1, s_2, s_3$  dána při statickém přetváření kružnicí o poloměru  $R_0$  (obr. 66), je u viskoplastického materiálu dána kružnicí o poloměru

$$R = R_0 \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\sqrt{\bar{I}_2}}{\gamma} \right) \right] \quad (212)$$

To je znázorněno na obr. 66. Materiál je elastický na trajektorii  $OP_0$ , elastickoviskoplastický na čáře  $P_0P_1P_2P_3$ . Z toho část  $P_1P_2$  odpovídá konstantní hodnotě invariantu  $I_2$  časové derivace tenzoru plastic-  
kých deformací.



Obr. 66

### Příklad 19

Odvoďte diferenciální rovnici popisující deformaci Burgersova modelu podle obr. 58 a zakreslete průběh deformací při creepové zkoušce, při které je zkušební tyč zatížena v časovém intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1$  konstantní silou  $f$ .

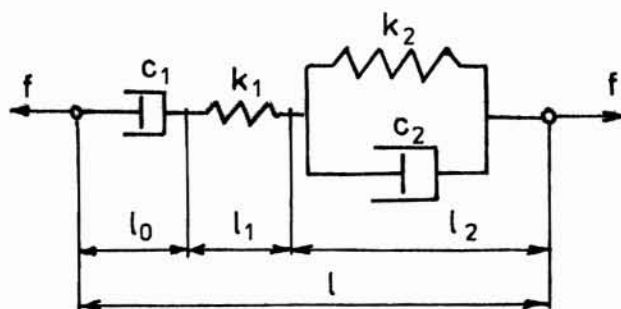
### Řešení

Burgersův model vznikl sériovým zařazením Maxwellova modelu (obr. 55) a Kelvinova modelu (obr. 56). Zavedeme označení podle obr. 67. Zřejmě budou platit tyto vztahy:

$$l = l_0 + l_1 + l_2 \quad (19.1)$$

$$\dot{f} = k_1 \dot{l}_1 = k_2 \dot{l}_2 + c_2 \ddot{l}_2 \quad (19.2)$$

$$f = c_1 \dot{l}_0 \quad (19.3)$$



Obr. 67

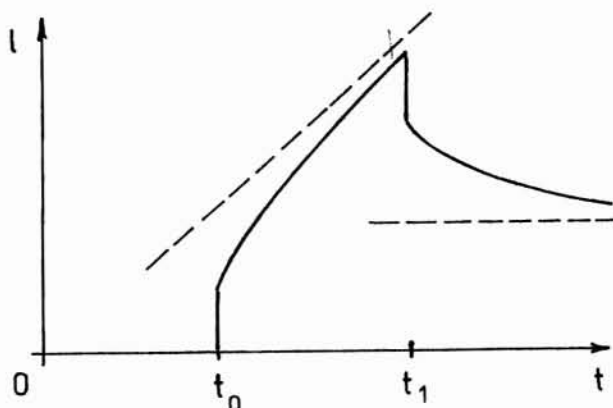
Z rovnice (19.1) vypočteme nejprve  $\dot{l}_1$  a pak i časové derivace  $\dot{l}_2$ ,  $\ddot{l}_2$ . Ty dosadíme na pravou stranu (19.2). Kromě toho bude

$$\dot{l}_1 = \frac{\dot{f}}{k_1} \quad \dot{l}_0 = \frac{\dot{f}}{c_1} \quad (19.4)$$

Když výslednou rovnici upravíme s použitím (19.4), bude nakonec platit, že

$$\frac{c_2}{k_1} \ddot{f} + \left( \frac{c_2}{c_1} + \frac{k_2}{k_1} \right) \dot{f} + \frac{k_2}{c_1} f = c_2 \ddot{l} + k_2 \dot{l} \quad (19.5)$$

Průběh creepové zkoušky, během níž je  $f = \text{konst.}$ ,  $\dot{f} = \ddot{f} = 0$ , je naznačen na obr. 68. Po zatížení vzroste délka tyče ihned o pružné prodloužení  $f/k_1$ . Pak následuje primární creep, během něhož se po-



Obr. 68

čáteční, poměrně velká deformační rychlost  $\dot{\epsilon}$  postupně zmenšuje a blíží ustálené hodnotě  $f/c_1$  (sekundární creep). Při odlehčení následuje okamžité elastické zkrácení o  $f/k_1$  a pak zotavení (dopružování), až nakonec zůstane trvalá deformace  $(f/c_1)(t_1 - t_0)$ .

#### Poznámka

Řešení rovnice (19.5) pro  $f = \text{konst.}$  má tvar

$$\epsilon = a + \frac{f}{c_1} t + b e^{-\frac{k_2}{c_2} t} \quad (19.6)$$

kde  $a$ ,  $b$  jsou integrační konstanty. Určíme je zvlášť pro interval  $t_0 < t < t_1$  a pro  $t > t_1$  (z počátečních podmínek).

### 13. MODELY FYZIKÁLNÍCH PROCESŮ V MIKROSTRUKTUŘE

Typickým příkladem fenomenologického přístupu k popisu nevratných procesů probíhajících v mikrostruktuře materiálu jsou teorie popisující únavu materiálu při časově proměnném namáhání. To je však problematika příliš široká, takže se jí zde nemůžeme zabývat. Uvedeme jiný, snad i vhodnější příklad, který bezprostředně naváže na předchozí kapitulu.

V semináři /27/ jsme se podrobně zabývali tečením kovů za vysokých teplot. Uvedli jsme Hoffovu teorii creepu, která vychází ze známého Nortonova zákona (pro jednoosou napjatost)

$$\dot{\epsilon} = k \sigma^n \quad (213)$$

Zde  $k$ ,  $n$  jsou materiálové konstanty

$\epsilon$  - logaritmická deformace

$\sigma$  - tahové napětí

Tečkou označujeme časovou derivaci.



Při creepu je zatěžující síla  $F$  konstantní. Je-li  $S_0$  počáteční průřez tyče a  $S$  jeho aktuální velikost, bude  $\sigma = F/S$ , takže

$$\dot{\epsilon} = k \frac{F^n}{S^n} \quad (214)$$

Z podmínky nestlačitelnosti materiálu  $S\ell = \text{konst.}$  dostaneme

$$d\epsilon = \frac{d\ell}{\ell} = -\frac{dS}{S} \quad (215)$$

Když z rovnic (214) a (215) vyloučíme  $\epsilon$ , dostaneme diferenciální rovnici pro funkci  $S(t)$  ve tvaru

$$-S^{n-1} \frac{dS}{dt} = k F^n \quad (216)$$

Mění-li se čas  $t$  v mezích  $0 \leq t \leq t_{\text{krit}}$ , zatímco se plocha průřezu  $S$  z počáteční hodnoty  $S_0$  při  $t = 0$  postupně zmenšuje až k hodnotě  $S = 0$  při  $t = t_{\text{krit}}$ , bude

$$-\int_{S_0}^0 S^{n-1} dS = k F^n \int_0^{t_{\text{krit}}} dt \quad (217)$$

a odtud

$$t_{\text{krit}} = \frac{1}{k F^n} \cdot \frac{1}{n} \cdot S_0^n = \frac{1}{kn} \frac{1}{\sigma_0^n} \quad (218)$$

Tento vzorec upravíme s použitím vztahu (213), podle něhož je počáteční creepová rychlost  $\dot{\epsilon}_0 = k \sigma_0^n$ . Vyjde Hoffův vzorec pro životnost tyče za creepu

$$t_{\text{krit}} = \frac{1}{n \dot{\epsilon}_0} \quad (219)$$

Tento vzorec byl odvozen za předpokladu, že se tyč bez omezení ztenčuje, přičemž materiál si zachovává plastické vlastnosti beze změny po celou dobu pokusu. U kovových materiálů za vysokých teplot souhlasí Hoffova teorie uspokojivě s experimenty, avšak jen při poměrně velkém zatížení tyče. Je-li zatížení malé, vyjde ze vzorce (219) mnohem delší doba než pozorovaná životnost. To znamená, že ve skutečnosti dochází během creepu k vnitřnímu poškození materiálu, který ztrácí původní vlastnosti. Skutečně, zjistilo se, že v materiálu vznikají drobné dutinky - kavity -, které způsobují, že skutečný průřez tyče není  $S$ , jak se nám v čase  $t$  makroskopicky jeví, ale  $\psi S_0$ . Funkce  $\psi(t)$  se mění od jedné k nule a fenomenologicky popisuje znehodnocení materiálu v průřezu vznikem dutinek v mikrostruktuře, kdežto makroskopicky se průřez nemění nebo mění jen velmi málo. Je tedy

$$S(t) = \psi(t) S_0 \quad (220)$$

Pro funkci poškození  $\psi(t)$  zvolil Kačanov vztah podobný Nortonovu zákonu, totiž rovnici

$$\frac{d\psi}{dt} = -c \sigma^\nu \quad (221)$$

kde  $c$ ,  $\nu$  jsou konstanty závislé na materiálu a jeho teplotě. Protože  $\sigma = \sigma_0 S_0 / S$ , vyjde z rovnice (221)

$$\frac{d\psi}{dt} = -c \sigma_0^\nu \left( \frac{S_0}{S} \right)^\nu = -c \sigma_0^\nu \frac{1}{\psi^\nu} \quad (222)$$

To je diferenciální rovnice pro funkci  $\psi(t)$ , kterou Rabotnov upravil na obecnější a vhodnější tvar. Především zavedl jako míru poškození jakýsi doplněk k funkci  $\psi$ , totiž funkci  $\omega$ :

$$\omega(t) = 1 - \psi(t) \quad (223)$$

Tato veličina je vhodnější, neboť během poškození roste od nuly k jedné (kdežto funkce  $\psi$  klesá). Kromě toho napětí  $\sigma = \sigma_0 S_0 / S$  představuje průměrnou hodnotu, avšak průběh poškození bude záviset na jeho lokálních hodnotách. Napětí bude - zvláště po vytvoření kavit - rozděleno v mikrostruktuře nerovnoměrně. To můžeme respektovat tak, že místo nepřímé úměry mezi  $\sigma$  a  $S$  zavedeme obecnou mocninnou funkci s novým materiálovým parametrem  $\phi$ . Místo (222) pak budeme mít rovnici

$$\frac{d\omega}{dt} = c \frac{G_0^\nu}{(1-\omega)^\Phi} \quad (224)$$

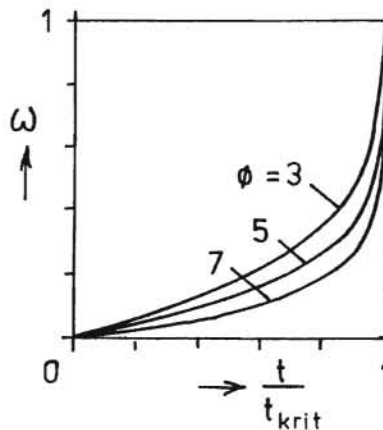
s počáteční podmínkou  $\omega(0) = 0$  . Integrací dostaneme

$$(\Phi + 1) c G_0^\nu t = 1 - (1-\omega)^{\Phi+1} \quad (225)$$

Protože  $\omega = 1$  pro  $t = t_{krit}$  , vyjde z rovnice (225) poměrný čas

$$\frac{t}{t_{krit}} = 1 - (1-\omega)^{\Phi+1} \quad (226)$$

Tento vztah popisuje průběh poškozování  $\omega$  jako funkci času. Čas je zde vztažen k celkové životnosti  $t_{krit}$  tyče při creepu (viz obr. 69). Poškozování probíhá nejprve pomalu, ale později se zrychluje.



Obr. 69

Podstatou metody je tedy to, že nespojitě probíhající proces vzniku dutinek v mikrostruktuře materiálu popisujeme spojitou funkcí  $\omega(t)$  . Je to obdobný obrat, jakého jsme použili v 10. kapitole.

## LITERATURA

- /1/ FUNG, Y.C.: Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall 1965.
- /2/ HÖSCHL, C.: Užití malých počítačů v dynamice soustav. Praha, publikace č. 60-643-83 (DT 2420) DT ČSVTS Praha 1983.
- /3/ LEVY, S. - WILKINSON, J.P.D.: The component element method in dynamics. New York, McGraw-Hill 1976.
- /4/ TIMOŠENKO, Š.: Kmitání ve strojnictví. Praha, SNTL 1960.
- /5/ REKTOŘYS, K.: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. Praha, SNTL 1974.
- /6/ CRANDALL, S.H.: Engineering analysis. (A survey of numerical procedures.) New York, McGraw-Hill 1956.
- /7/ BATHE, K.J. - WILSON, E.L.: Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall 1976.
- /8/ HÖSCHL, C. - OKROUHLÍK, M.: Vlastnosti hermiteovských konečných prvků v úlohách o šíření napěťových vln. Výzkumná zpráva č. Z 894/84, Praha, ÚT-ČSAV 1984.
- /9/ BREPTA, R.: Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech. Praha, ČVUT 1977.
- /10/ PARLETT, B.N.: The symmetric eigenvalue problem. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall 1978.
- /11/ COWPER, G.R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. - Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Series E, sv. 33 (1966), s. 335-340.
- /12/ KCŽEŠNÍK, J.: Teorie podobnosti a modelování. Praha, Academia 1983.
- /13/ TIMČENKO, Š.P. - WOJNOWSKI-KRIEGER, S.: Plastinky i oboločki (překlad z angl.). Moskva, Nauka 1966.
- /14/ HÖSCHL, C.: Ohyb desky s pravidelným polem otvorů. - Strojírenství, sv. 8 (1958), č. 4, s. 243-249.
- /15/ HÖSCHL, C.: Tenká kruhová deska na pružném podkladu. - Aplikace matematiky, sv. 3 (1958), č. 2, s. 115-123.
- /16/ HÖSCHL, C.: Chyb a krut ve složitých soustavách. Publikace č. 60-603-85, Praha, DT ČSVTS Praha 1985.
- /17/ HÖSCHL, C.: Principy a zákony mechaniky poddajných těles, I. část. Publikace č. 60-537-78, Praha, DT ČSVTS Praha 1978.
- /18/ HEARMON, R.F.S.: Úvod do teorie pružnosti anizotropních látek. (Překlad z angl.) Praha, SNTL 1965.

Název publikace:	FYZIKÁLNÍ A MATEMATICKÉ MODELY V MECHANICE DEFORMOVATELNÝCH TĚLES
Autor:	Prof. Ing. Cyril Höschl
Počet stran:	128
Náklad:	90 výtisků
Formát:	A4
Číslo publikace:	DT 3655 (248C)
Vydal a rozmnožil:	Dům techniky ČSVTS Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23
Datum vydání:	1988 DT 01 - 138/88
Cena publikace	315 Kčs (CV č.2/88)