

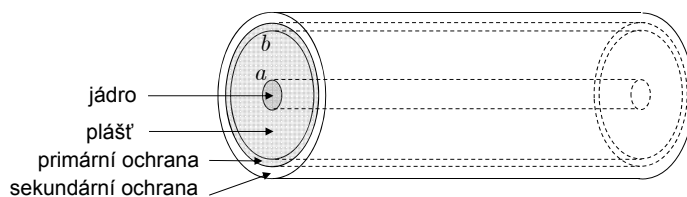
Optické vlákno jako přenosové prostředí pro optické sdělování

I. Teoretické základy

1

Základy teorie optických vláken

pro optické komunikace



Opticky funkční oblasti:

- jádro (SiO_2 dopovaný Ge, P, ...)
- plášť (SiO_2 nedopovaný nebo dopovaný B, Al, ...)
- částečně i primární ochrana (polymer)

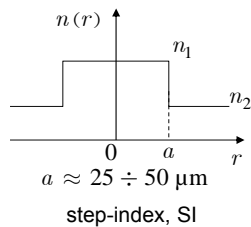
$2a$ – průměr jádra (2 – 50 μm)

$2b$ – průměr pláště (125 μm ; 250 μm , ...)

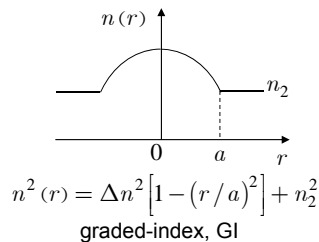
2

Základní typy optických vláken

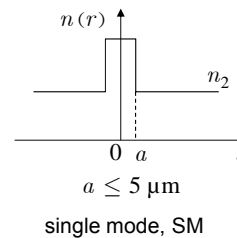
Vlákno se skokovým profilem



Vlákno s parabolickým profilem („gradientní“ vlákno)



Vlákno jednovdové



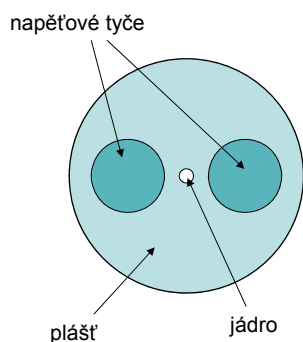
Typy vláken:

- mnohovdová (multimode), - „gradientní“
- se skokovým profilem
- jednovdová (single mode), - standardní
- zachovávající polarizaci (PM)
- PCS (polymer-coated silica),
- plastová,
- ...

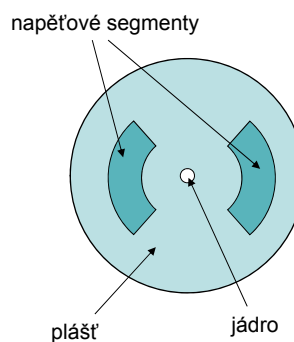
3

Vlákna zachovávající polarizaci

Vlákno typu „panda“



Vlákno typu „bow-tie“



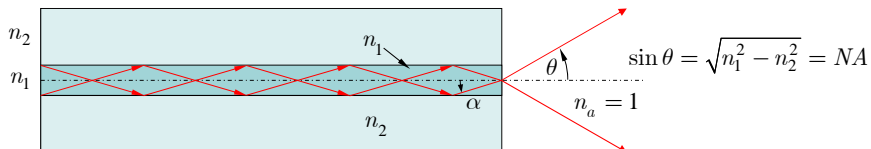
Dvojdom vyvolaný v jádře prutím vede k různým konstantám šíření pro vdy různé polarizace

4

Některé důležité pojmy

Numerická apertura vlákna NA

sinus maximálního úhlu vůči ose vlákna, pod kterým vystupují paprsky šířící se ve vlákne

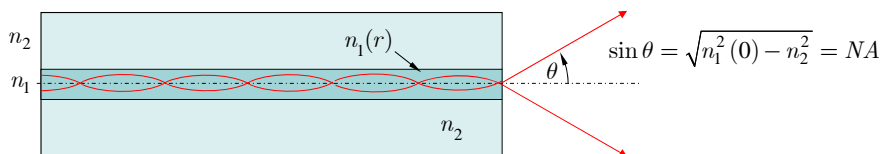


$$n_1 \sin \alpha_{\max} = 1 \cdot \sin \theta \quad \dots \text{ Snellův zákon aplikovaný na čelo vlákna}$$

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{pro větší úhly dojde k porušení totálního odrazu na rozhraní jádro-plášť}$$

$$\sin \alpha_{\max} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_{\max}} = \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2} = \frac{1}{n_1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Pro GI vlákna platí analogicky



5

„V-parametr“ („normovaná frekvence“, ...)

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} (NA) = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad \text{rozhoduje o počtu vidů ve vlákne}$$

$$\text{Pokud } n_1 - n_2 \ll n_1, \quad (NA)^2 = n_1^2 - n_2^2 = (n_1 - n_2)(n_1 + n_2) \approx 2n_1 \Delta n$$

$$NA \approx \sqrt{2n_1 \Delta n}$$

Počet vidů (jedné polarizace) v planárním vlnovodu

Disperzní rovnice symetrického planárního vlnovodu

$$k_0 d \sqrt{n_g^2 - N^2} = 2 \arctan \left[\left(\frac{n_g}{n_s} \right)^{2\nu} \sqrt{\frac{N^2 - n_s^2}{n_g^2 - N^2}} \right] + m\pi,$$

Nejvyšší vid má $N \approx n_s$; pak počet vidů je

$$M \approx \frac{1}{\pi} k_0 d \sqrt{n_g^2 - n_s^2} = \frac{2}{\pi} V,$$

kde v analogii s vlákem, $d \approx 2a$, $V = k_0 (d/2) \sqrt{n_g^2 - n_s^2}$,

$$\text{Pro čtvercový vlnovod } M \approx \left(\frac{2}{\pi} V \right)^2 = \frac{4}{\pi^2} V^2 \doteq 0.405 V^2$$

6

Počet vidů v mnohovidovém vlákně

Plocha jádra čtvercového vlnovodu je $d^2 = 4a^2$

plocha jádra vlákna je $S = \pi a^2$

Prostorové úhly, do něhož jsou vyzařovány paprsky z konce vlákna a z konce vlnovodu, jsou rovněž v poměru $4/\pi$.



$$d = 2a$$

Počet vidů vlákna se skokovým profilem je pak $M_{SI} \approx \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \left(\frac{4}{\pi^2} V^2\right) = \frac{V^2}{4}$

Počet vidů „gradientního“ vlákna je poloviční: $M_{GI} \approx \frac{V^2}{8}$

Příklad: $\lambda = 1.0 \mu\text{m}$, $a = 25 \mu\text{m}$, $n_1 = 1.45$, $n_2 = 1.44$

$$NA = \sqrt{2.1025 - 2.0736} = 0.17, \quad M_{SI} \doteq 178, \quad M_{GI} \doteq 89.$$

7

Základy teorie lineárně polarizovaných vidů vlákna se skokovým profilem

Přesná vlnová rovnice $\nabla \times \nabla \times \vec{E} - k^2 n^2 \vec{E} = \vec{0}$

Úprava: $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ v homogenním jádře i plášti

Platí tedy Helmholtzova rovnice $\Delta \vec{E} + k^2 n^2 \vec{E} = \vec{0}$.

Rovnice platí „po složkách“; **zvolme** si libovolnou příčnou *kartézskou* složku
→ **lineárně polarizované záření**

Získáme standardní Helmholtzovu rovnici $\Delta E + k_0^2 n^2 E = 0$.

Poněvadž $n(r)$ nezávisí na z , můžeme rovnici řešit separací proměnných:

$$E(r, \varphi, z) = U(r, \varphi) f(z)$$

$$f(z) \Delta_{\perp} U(r, \varphi) + U(r, \varphi) \frac{d^2 f}{dz^2} + k_0^2 n^2(r) U(r, \varphi) f(z) = 0,$$

$$\Delta_{\perp} U(r, \varphi) + U(r, \varphi) \underbrace{\frac{1}{f(z)} \frac{d^2 f}{dz^2}}_{-\beta^2} + k_0^2 n^2(r) U(r, \varphi) = 0, \quad \beta^2 = k_0^2 N^2$$

8

Základy teorie lineárně polarizovaných vidů ...

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \beta^2 f(z) = 0;$$

$$\nabla_{\perp} U(r, \varphi) + k_0^2 [n^2(r) - N^2] U(r, \varphi) = 0,$$

$$\text{Tedy } f(z) = \exp(\pm i\beta z), \quad E(r, \varphi, z) = U(r, \varphi) \exp(\pm i\beta z)$$

Vlna se šíří podél vlákna s fázovou konstantou β ,

resp. s **efektivním indexem lomu** $N = \beta / k_0$.

Příčný Laplaceův operátor v kartézských a válcových souřadnicích:

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Rovnice pro U

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k_0^2 (n^2 - N^2) U(r, \varphi) = 0.$$

9

Základy teorie lineárně polarizovaných vidů ...

Separujeme proměnné r a φ : $U(r, \varphi) = R(r)F(\varphi)$

$$\text{Získáme} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{1}{F} \frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} + k_0^2 (n^2 - N^2) R(r) = 0.$$

$$\text{Tedy} \quad F(\varphi) = \begin{cases} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{cases} \quad E(r, \varphi, z) = R(r) \exp(i\beta z) \begin{cases} \cos l\varphi \\ \sin l\varphi \end{cases}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + k_0^2 (n^2 - N^2) R(r) - \frac{l^2}{r^2} R = 0$$

neboli

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + [k_0^2 r^2 (n^2 - N^2) - l^2] R(r) = 0$$

Besselova rovnice

$$z^2 \frac{d^2 Z}{dz^2} + z \frac{dZ}{dz} + (z^2 - \nu^2) Z = 0$$

10

Základy teorie lineárně polarizovaných vidů ...

Řešení Besselovy rovnice:

$$Z(z) = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z), \quad Z_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}Z_\nu(z) - Z_{\nu-1}(z)$$

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+\nu}}{m!(m+\nu)!}$$

$$Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma_e + \ln \frac{z}{2} \right) J_\nu(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{(m-\nu-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu-2m}$$

$\gamma_e = 0.5772156649$... Eulerova konstanta

Modifikovaná Besselova rovnice

Hankelovy funkce $H_\nu^{(1,2)} = J_\nu(z) \pm iY_\nu(z)$

$$z^2 \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + z \frac{dZ(z)}{dz} - (z^2 + \nu^2)Z(z) = 0$$

Řešení:

$$Z(z) = AI_\nu(z) + BK_\nu(z), \quad I_\nu(z) = (-i)^\nu J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = \frac{i^{\nu+1}\pi}{2} H_\nu^{(1)}(iz)$$

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k!(k+\nu)!}$$

11

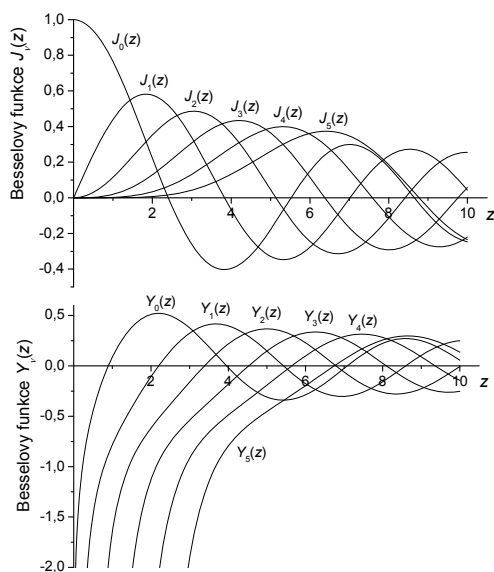
Grafy Besselových funkcí

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+\nu}}{m!(m+\nu)!}$$

$$Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma_e + \ln \frac{z}{2} \right) J_\nu(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{(m-\nu-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu-2m}$$

$\gamma_e = 0.5772156649$

Eulerova konstanta



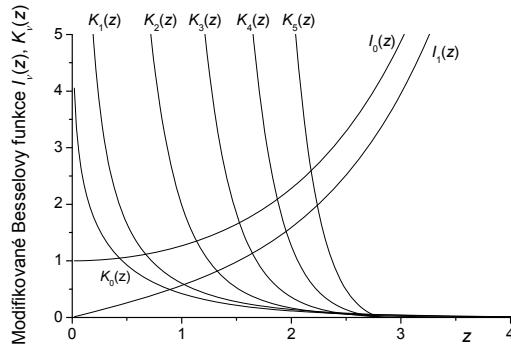
12

Grafy modifikovaných Besselových funkcí

$$K_\nu(z) = \frac{i^{\nu+1}\pi}{2} H_\nu^{(1)}(iz)$$

$$H_\nu^{(1,2)} = J_\nu(z) \pm iY_\nu(z)$$

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!(k+\nu)!}$$



13

Disperzní rovnice pro optické vlákno

$$0 < r < a: \quad R = AJ_l(k_\perp r), \quad k_\perp = k_0 \sqrt{n_1^2 - N^2}$$

$$r \geq a: \quad R = BK_l(\gamma r), \quad \gamma = k_0 \sqrt{N^2 - n_2^2}$$

Spojitost pole a jeho derivace na rozhraní jádro - plášť

$$AJ_l(k_\perp a) = BK_l(\gamma a)$$

$$k_\perp AJ_l'(k_\perp a) = \gamma BK_l'(\gamma a)$$

Dělením druhé rovnice prvou dostaneme

$$\frac{k_\perp J_l'(k_\perp a)}{J_l(k_\perp a)} = \frac{\gamma K_l'(\gamma a)}{K_l(\gamma a)}$$

$$\text{Dále platí} \quad (k_\perp a)^2 + (\gamma a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_2^2) = V^2$$

Pro Besselovy funkce platí relace

$$J_l'(x) = \pm J_{l\mp 1} \mp l \frac{J_l(x)}{x}, \quad K_l'(x) = -K_{l\mp 1} \mp l \frac{K_l(x)}{x}$$

14

Disperzní rovnice pro optické vlákno

Zavedeme označení $X = k_1 a$, $Y = \gamma a$; platí $X^2 + Y^2 = V^2$;
dostaneme tak disperzní rovnici pro lineárně polarizované vidy.

$$\frac{XJ'_l(X)}{J_l(X)} = \frac{YK'_l(Y)}{K_l(Y)}$$

s využitím relace pro derivace Besselových funkcí ji můžeme upravit také na tvar

$$\frac{XJ_{l\pm 1}(X)}{J_l(X)} = \pm \frac{YK_{l\pm 1}(Y)}{K_l(Y)}$$

Pro každé l má rovnice několik řešení, $N_{lm} \rightarrow$ LP vidy

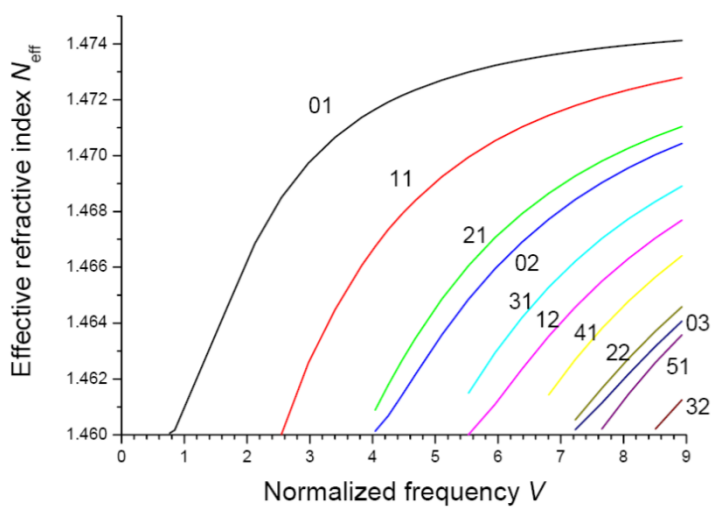
Mezní hodnoty (cut-off) získáme při $N \rightarrow n_2$, neboli $Y \rightarrow 0$; $J_{l\pm 1}(V) = 0$

Tabulka některých kořenů:

$l; m$	1	2	3
0	0	3.832	7.016
1	2.405	5.520	8.645

15

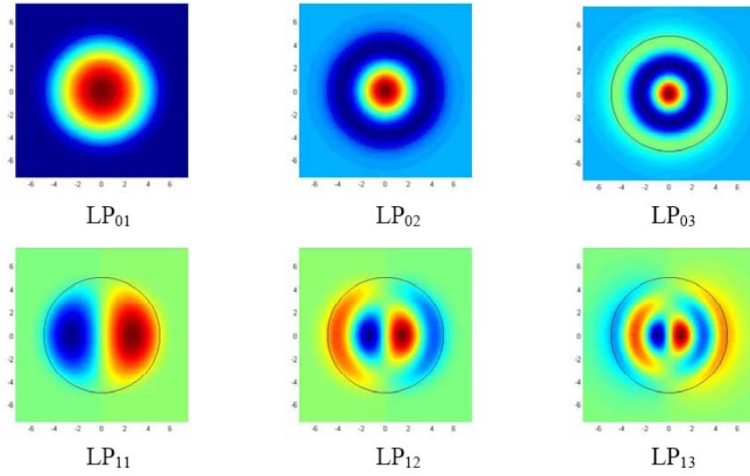
Disperzní křivky vidů LP_{lm} optického vlákna se skokovým profilem



16

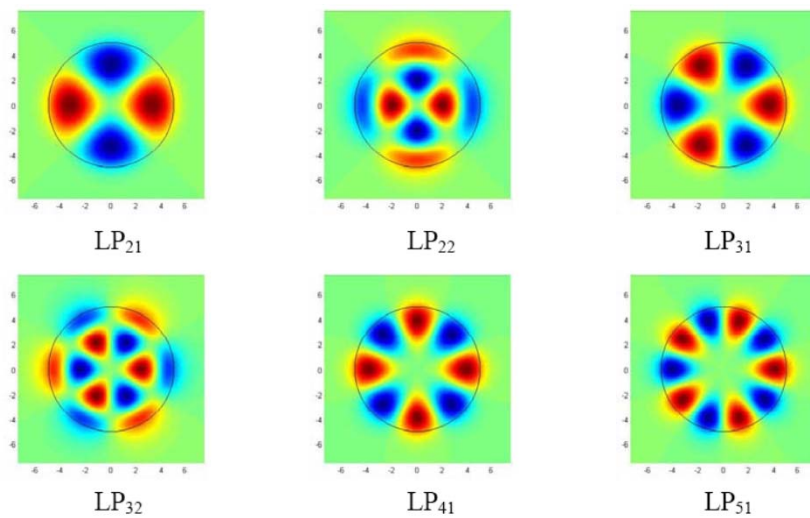
Rozložení pole některých nejnižších vidů LP_{lm}

$$n_{\text{core}} = 1.47, n_{\text{cladding}} = 1.45, a = 5 \mu\text{m}$$
$$\lambda = 0.8 \mu\text{m}, V = 9.4900$$



17

Rozložení pole některých nejnižších vidů LP_{lm}



18

Optické vlákno se skokovým profilem: přesné vektorové řešení (vidy HE, EH, TE, TM)

Přesné splnění podmínek spojitosti pro tečné složky intenzit el. a mg. polí na rozhraní jádro – plášť vede ke složitější disperzní rovnici:

$$(U_l + W_l)(n_1^2 U_l + n_2^2 W_l) = \frac{l^2 N^2}{(bX^2)^2}, \quad \text{Pro srovnání: rovnice pro LP vidy:}$$

$$U_l = \frac{J_l'(X)}{XJ_l(X)}, \quad W_l = \frac{K_l'(Y)}{YK_l(Y)}, \quad \frac{XJ_l'(X)}{J_l(X)} = \frac{YK_l'(Y)}{K_l(Y)}$$

$$X = k_0 a \sqrt{n_1^2 - N^2}, \quad Y = k_0 a \sqrt{N^2 - n_2^2},$$

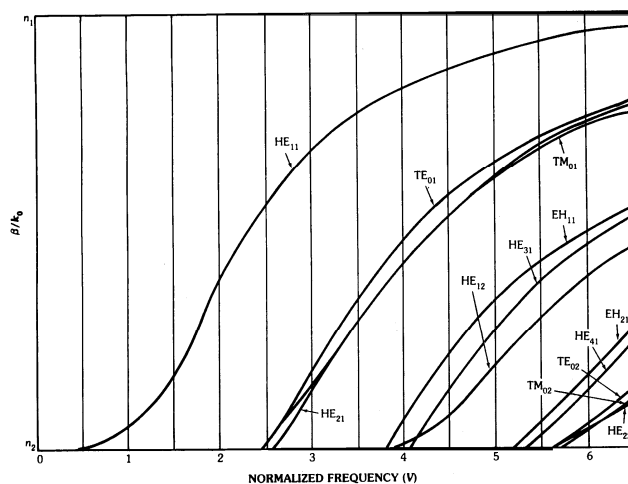
$$X^2 + Y^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_2^2) = V^2,$$

$$b = \frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}.$$

19

Disperzní křivky vlákna se skokovým profilem: přesné vektorové řešení

(H.G.Unger: Planar optical waveguide and fibres, 1977)



Efektivní indexy lomu vidů v závislosti na parametru V

$$V = k_0 a (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$$

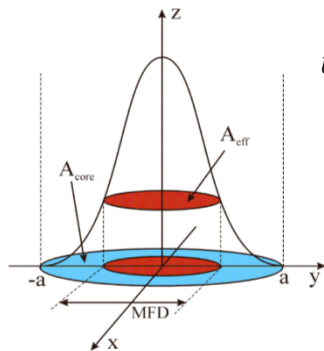
20

Relace mezi LP vidy a hybridními vidy získanými přesným vektorovým řešením

Označení	Kombinace hybridních vidů	degenerace
LP _{0,1}	2 x HE _{1,1}	2
LP _{1,1}	TE _{0,1} ; TM _{0,1} ; 2 x HE _{2,1}	4
LP _{2,1}	2 x EH _{1,1} ; 2 x HE _{3,1}	4
LP _{0,2}	2 x HE _{1,2}	2
LP _{3,1}	2 x EH _{2,1} ; 2 x HE _{4,1}	4
LP _{1,2}	TE _{0,2} ; TM _{0,2} ; 2 x HE _{2,2}	4
LP _{4,1}	2 x EH _{3,1} ; 2 x HE _{5,1}	4
LP _{2,2}	2 x EH _{1,2} ; 2 x HE _{3,2}	4

21

Gaussovská aproximace pole základního vidu LP₀₁



$$U(r) \approx A e^{-\frac{r^2}{w^2}}$$

w ... stopa pole vidu
v gaussovské aproximaci
MFD = $2w$... průměr pole vidu
(„mode field diameter“)
 A_{eff} ... efektivní plocha vidu
 a ... poloměr jádra

$$w \doteq a \left(0.65 + \frac{1.619}{V^{3/2}} + \frac{2.879}{V^6} \right), \quad 0.8 < V < 2.5$$

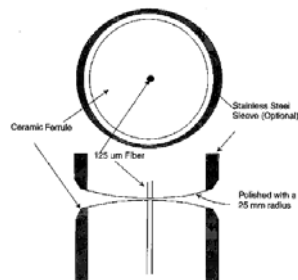
Marcuse, Bell Syst. Tech. J. **56**, p.703, 1977

22

Spojování vláken konektory



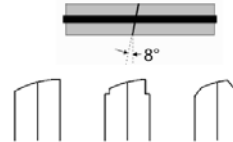
FL - flat end (3.5% odraz, ~14 dB)
PC - physical contact, podle kvality leštění
super (SPC) nebo ultra (UPC)



typ konektoru	původ	typ. vložné ztráty [dB]	typ. zpětný odraz [dB]
SMA/PC	Amphenol	≤1.0	-45
FC/FL	NTT	≤1.0	-14
FC/PC		≤0.5	≥-27
FC/SPC		≤0.5	≥-40
FC/UPC		≤0.5	≥-50
FC/APC		≤0.17	≥-67
SC/APC		≤0.5	-27...-60
HRL10/APC	Diamond	0.12	≥-32
E2000	EU	0.2	-50...-70

zdroj: P. C. Becker, N. A. Olsson, J. R. Simpson, EDFAs, Academic Press, 1999

APC - angled physical contact
nebo angle-polished connectors



23

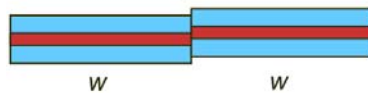
Ztráty na spoji dvou vláken (splice losses)

různé stopy pole $w_1 \neq w_2$



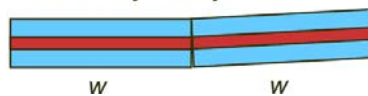
$$L = -20 \log \frac{2w_1w_2}{w_1^2 + w_2^2} \quad (\text{dB})$$

příčné vyosení jader (offset jader) u



$$L \approx 4.34 \frac{u^2}{w^2} \quad (\text{dB})$$

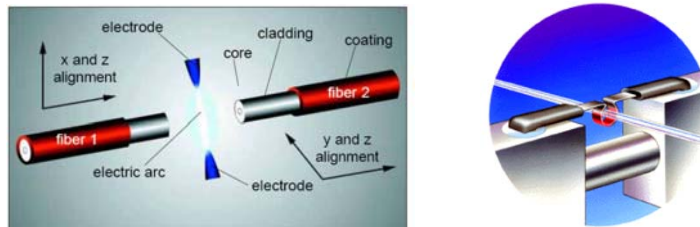
úhlové vyosení jader Θ



$$L \approx 4.34 \left(\frac{\pi w \theta}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{dB})$$

24

Spojování optických vláken svářením



Svařování spočívá v natavení konců vláken a jejich vzájemném přitisknutí k sobě.

Při sváření se využívá elektrický oblouk, rozžhavené wolframové nebo uhlíkové vlákno, plamen, ...

Ztráty spojů vytvořených svářením jsou typicky výrazně nižší než ztráty konektorů.

25

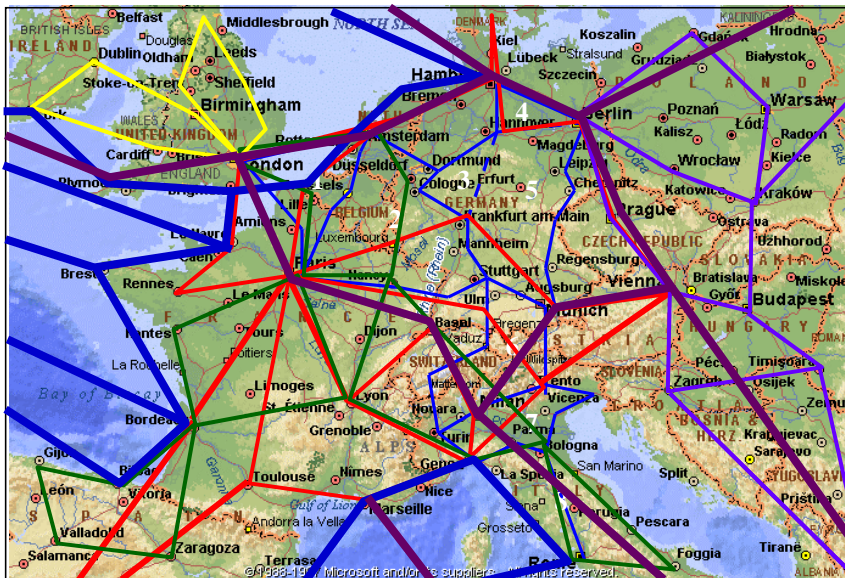
Optické vlákno jako přenosové prostředí pro optické sdělování

II. Přenosové vlastnosti

26

Optické komunikace

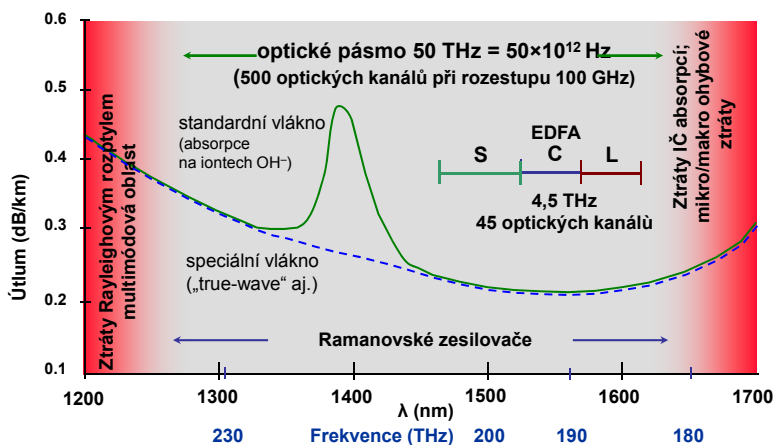
Evropská optická komunikační síť



27

Útlum konvenčních vláken

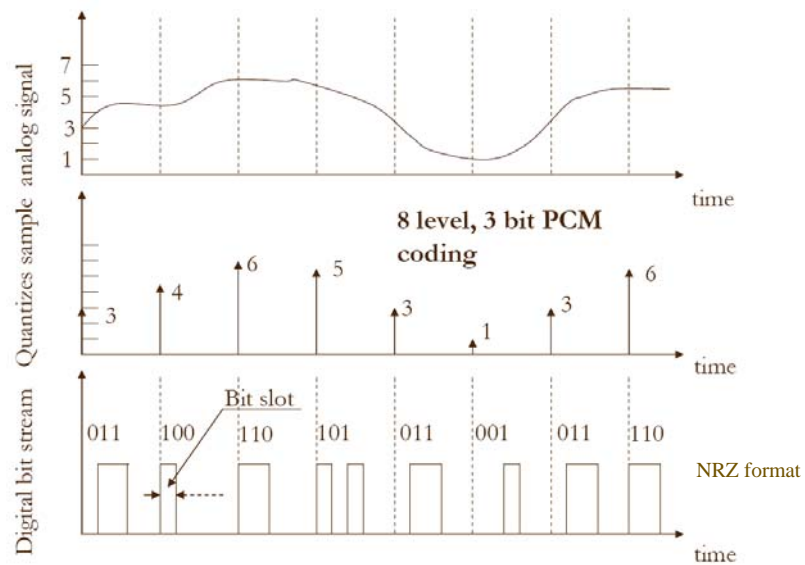
Potenciální šířka přenosového pásma optických vláken omezená útlumem



S pásmo: 1460 – 1525 nm C pásmo: 1525 – 1565 nm L pásmo: 1565 – 1625 nm

28

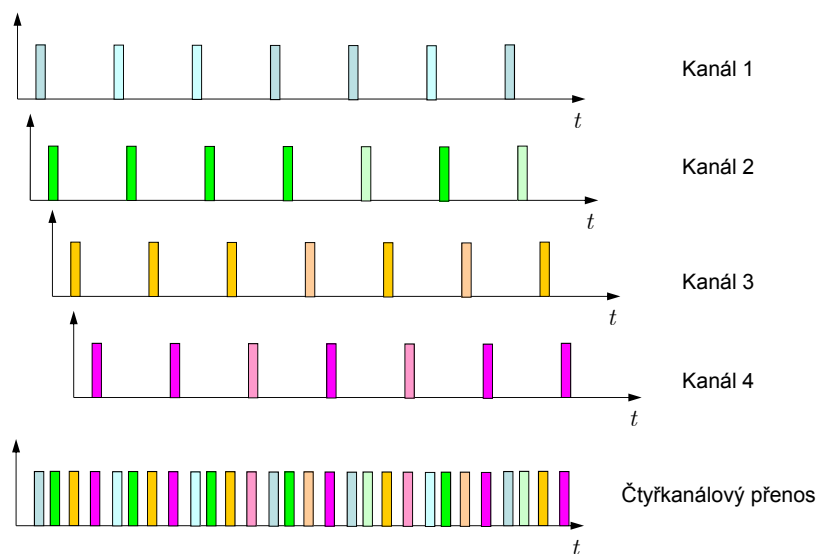
Přenos signálů po optickém vlákně: pulzní kódová modulace



29

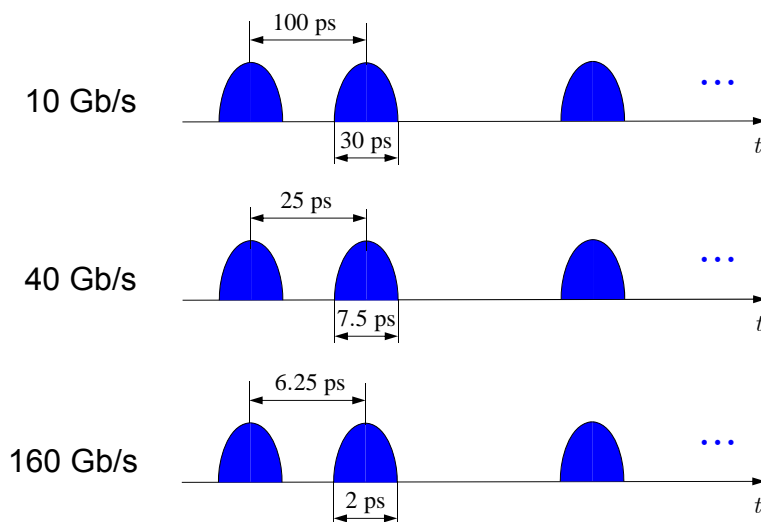
Časový a vlnový (spektrální) multiplex

Časový multiplex:



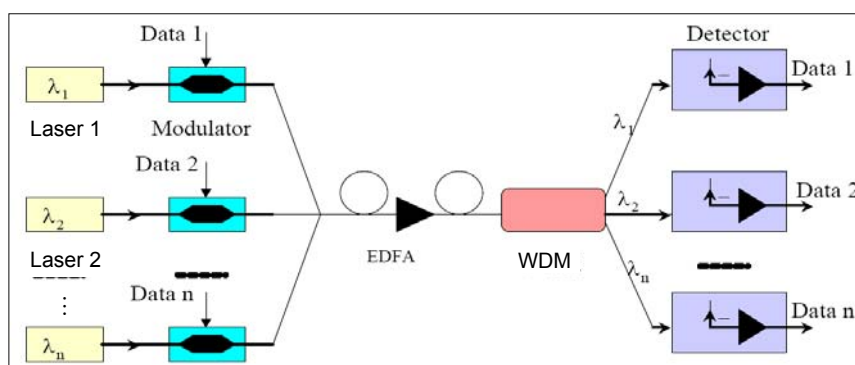
30

Rychlost optického přenosu signálů – NRZ formát



31

Vlnový (spektrální) multiplex



Po téměř vlákne se současně přenáší několik kanálů modulovaných na různých vlnových délkách. Typický počet současně přenášených kanálů: 4, 8, 16, 32, 64, (128, ...)

32

Disperze optických vláken

Reálný signál: $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad U(-\omega) = U^*(\omega)$

Komplexní signál:
část obsahující
pouze kladné frekvence $u_+(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$

Zřejmě platí $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(-\omega) \exp(i\omega t) d\omega = u_+^*(t)$

a tedy $u(t) = \frac{1}{2} [u_+(t) + u_+^*(t)] = \text{Re} \{u_+(t)\}$.

Úzkopásmový signál:
signál, jehož spektrum je soustředěno do relativně malé oblasti kolem střední frekvence:

$$U(\omega) \approx U_+(\omega - \omega_0), \quad U_+ \neq 0 \text{ pro } |\omega - \omega_0| \ll \omega_0.$$

Pak
$$u_+(t) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U_+(\omega - \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_0^{\infty} U_+(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\doteq \frac{1}{\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} U_+(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = u_1(t) e^{-i\omega_0 t}$$

Komplexní signál úzkopásmového procesu je možno popsat komplexní „obálkou“ $u_1(t)$ vynásobenou komplexní harmonickou funkcí $\exp(-i\omega_0 t)$:

$$u(t) = \text{Re} \{u_1(t) \exp^{-i\omega_0 t}\}$$

33

Disperze optických vláken - 2

Komplexní *optický* signál na vstupu optického vlákna: $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \approx u_1(t) \mathbf{E}(\mathbf{r})$

(vzhledem k úzkopásmovosti zanedbáváme závislost rozložení pole vidu na vlnové délce).

Modulované vstupní záření se naváže do všech vedených vidů s komplexními amplitudami

$$c_m = \iint_S \mathbf{E} \times \mathbf{h}_m \cdot d\mathbf{S} / \iint_S \mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_m \cdot d\mathbf{S}$$

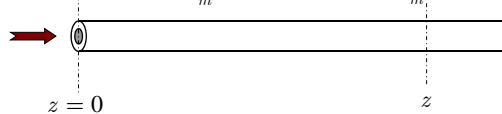
Na začátku vlákna $z = 0$ vznikne tedy rozložení pole $u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp)$.

Každý vid se šíří s jinou konstantou šíření β_m .

Ve vzdálenosti z od začátku vlákna bude tedy rozložení pole

$$u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \exp[i(\beta_m z - \omega_0 t)].$$

$$u_1(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} \quad u_1(t) e^{-i\omega_0 t} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \quad u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \exp[i(\beta_m z - \omega_0 t)]$$



34

Disperze optických vláken - 3

Označme spektrum *obálky* $U_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) e^{i\omega t} dt = 2U_+(\omega)$.

Spektrum signálu v místě z je pak zřejmě

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i\beta_m z} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) U_1(\omega - \omega_0) e^{i\beta_m z}.$$

Konstanta šíření β_m rovněž závisí na frekvenci ω .

Časový průběh optického signálu v místě z je tedy možno napsat také ve tvaru

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\omega - \omega_0) e^{i\beta_m(\omega)z} e^{-i\omega t} d\omega.$$

V úzkém spektrálním pásmu signálu, kde je funkce U_1 nenulová, můžeme aproximovat spektrální závislost konstanty šíření Taylorovým rozvojem:

$$\begin{aligned} \beta_m(\omega) \approx \beta_m(\omega_0) + \left. \frac{d\beta_m}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta_m(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \\ + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3\beta_m(\omega)}{d\omega^3} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

35

Disperze optických vláken - 4

Ponechme v rozvoji nejprve pouze první člen: $\beta_m(\omega) \approx \beta_m(\omega_0) + \beta'_m(\omega_0)(\omega - \omega_0)$

a dosadíme do výrazu pro pole v místě z :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\omega - \omega_0) e^{i[\beta_m(\omega_0) + \beta'_m(\omega_0)(\omega - \omega_0)]z} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\beta_m(\omega_0)z - i\omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\omega - \omega_0) e^{i\beta'_m(\omega_0)z} e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega \\ &= \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\beta_m(\omega_0)z - i\omega_0 t)} u_1(t - \beta'_m z) \end{aligned}$$

Pole je tedy dáno superpozicí vidů, z nichž každý má původní časovou závislost $u_1(t)$, ale zpožděnou v čase o **grupové (skupinové) zpoždění**

$$\tau_{g,m} = \beta'_m(\omega_0)z = z \left. \frac{d\beta_m}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{z}{v_{g,m}}$$

Poměr
$$v_{g,m} = \frac{z}{\tau_{g,m}} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = \left(\frac{d\beta_m}{d\omega} \right)^{-1}$$

určuje **grupovou rychlost šíření** m -tého vedeného vidu.

36

Disperze optických vláken - 5

Elektrický signál na výstupu z **kvadratického detektoru** (fotodioda, fotonásobič ap.) pak bude úměrný okamžitému výkonu časového signálu. Vezmeme-li v úvahu ortogonální vlastnosti polí vidů, dostaneme pro výstupní signál z detektoru (proud, resp. napětí)

$$s(t) \sim \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) \times \mathcal{H}^*(\mathbf{r}_\perp, z, t) \cdot d\mathbf{S} \right\} \approx \sum_m |c_m|^2 |u_1(t - \beta'_m z)|^2.$$

Označíme-li $\tau_{g,\min} = \frac{z}{v_{g,\max}}, \tau_{g,\max} = \frac{z}{v_{g,\min}}$

nejmenší a největší grupové (skupinové) zpoždění, k němuž dojde při šíření vláknem délky L , pak při dostatečně velké délce L zřejmě dojde k **rozšíření signálu** na pološifku

$$\sigma_\tau \approx \tau_{g,\max} - \tau_{g,\min} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_{g,\min}} - \frac{1}{v_{g,\max}} \right) L.$$

Toto rozšíření způsobuje tzv. **mezividová (vidová, modální) disperze**.

Fyzikální podstata mezividové disperze spočívá v tom, že **jednotlivé vidy přenášejí signál různou (grupovou) rychlostí**.

37

Disperze optických vláken - 6

Rozšíření impulzu jako rozdíl mezi zpožděním nejpomalejšího a nejrychlejšího vidu:

$$\sigma_\tau \approx \frac{1}{2} L \left(\frac{1}{v_{g,\min}} - \frac{1}{v_{g,\max}} \right); \quad \frac{1}{v_{gm}} \approx \frac{1}{v_{g0}} \left(1 + \Delta \frac{m}{M} \right) \quad \text{pro SI vlákna,}$$

$$\frac{1}{v_{gm}} \approx \frac{1}{v_{g0}} \left(1 + \frac{1}{2} \Delta^2 \frac{m}{M} \right) \quad \text{pro parabolická (GI) vlákna.}$$

Přenosová šířka pásma:

$$B \approx \frac{1}{\sigma_\tau} = \frac{2v_{g0}}{L\Delta} \approx \frac{2c}{N_0 L \Delta} \quad \text{pro SI vlákna,} \quad \Delta \approx \frac{n_c - n_{cl}}{n_{cl}},$$

$$B \approx \frac{1}{\sigma_\tau} = \frac{4v_{g0}}{L\Delta^2} \approx \frac{4c}{N_0 L \Delta^2} \quad \text{pro GI vlákna,} \quad N_0 \approx n(0)$$

Součin délky a šířky pásma:

$$B \cdot L \approx \frac{2c}{N_0 \Delta} \approx 40 \text{ MHz} \cdot \text{km} \quad \text{pro SI vlákna,} \quad \Delta \approx \frac{n_c - n_{cl}}{n_{cl}} \approx 0.01,$$

$$B \cdot L \approx \frac{4c}{N_0 \Delta^2} \approx 8 \text{ GHz} \cdot \text{km} \quad \text{pro GI vlákna.}$$

38

Disperze jednovíkových vláken

(Mezi)vidová disperze je odstraněna, uplatní se **disperze 2. řádu**.

Uvažujme pro jednoduchost gaussovský signál, $u(t, 0) = U_0 \exp\left(\frac{-t^2}{2\tau^2}\right)$

Šířka impulsu na začátku: $\Delta t(z=0) \approx 2\tau$

Spektrální šířka na začátku:

$$U(\omega) = U_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} e^{i\omega t} dt = \sqrt{2\pi} U_0 e^{-\frac{\tau^2 \omega^2}{2}}$$

Spektrum v $z \neq 0$: $F(\omega, z) \approx \sqrt{2\pi} U_0 e^{-\frac{\tau^2 (\omega - \omega_0)^2}{2}} e^{i\beta(\omega)z}$

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \frac{1}{v_g} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} D_\omega (\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad D_\omega = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Zpětná FT dává

$$u(z, t) \doteq U_0 \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - iD_\omega z}} e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2(\tau^2 - iD_\omega z)}} = \frac{U_0 e^{\frac{i}{2} \arctan \frac{D_\omega z}{\tau^2}}}{\sqrt{4 + \left(\frac{D_\omega z}{\tau^2}\right)^2}} e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}} e^{-\frac{iD_\omega z(t-z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}}$$

39

To je také gaussovský signál, $u(z, t) = \frac{U_0 e^{\frac{i}{2} \arctan \frac{D_\omega z}{\tau^2}}}{\sqrt{4 + \left(\frac{D_\omega z}{\tau^2}\right)^2}} e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}} e^{-\frac{iD_\omega z(t-z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}}$

rozšířený z $\Delta t(0) = 2\tau$ na $\Delta t(z) = 2\sqrt{\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2} \approx \frac{4|D_\omega|z}{\Delta t(0)} \doteq |D_\omega|z\Delta\omega$.

Z praktických důvodů zavedeme označení,

$$\Delta t_z \approx |D_\omega|z\Delta\omega = |D_\lambda|z\Delta\lambda, \quad D_\lambda = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} D_\omega, \quad \left(\frac{d}{d\omega} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d}{d\lambda}\right)$$

Odvození dává

$$D_\lambda = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 N}{d\lambda^2} = \frac{1}{c} \frac{dN_g}{d\lambda} \quad [\text{ps}/(\text{ns} \cdot \text{km})] \quad \left(N_g = N - \lambda \frac{dN}{d\lambda}\right)$$

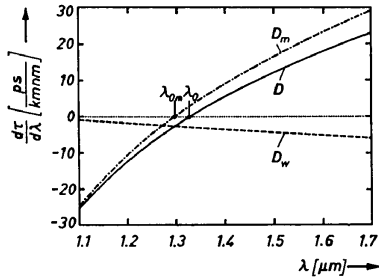
“Okamžitá frekvence”:

$$\omega(t) \approx \omega_0 - \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \frac{D_\omega z}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]} (t - z/v_g)$$

Po šíření na určitou vzdálenost vykazuje impuls lineární frekvenční modulaci, jejíž znaménko závisí na znaménku disperzního koeficientu.

40

Disperzní koeficienty jednovíkových vláken

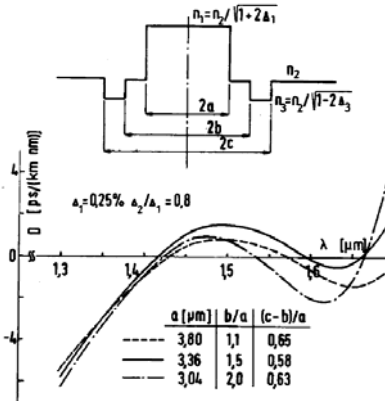
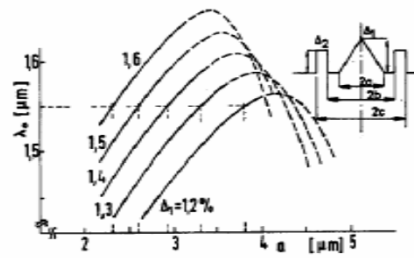


Disperzní koeficient standardního vlákna

$$D_{\lambda} \approx D_{material} + D_{waveguide}$$

Vlákna s plochou disperzní křivkou (DFF)

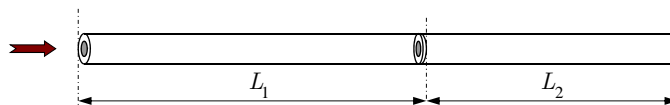
Vlákna s „posunutou disperzí“ (DSF)



41

„Řízení disperze“ v optické přenosové trase

Malé rozšíření impulsu, tj. vysoká přenosová rychlost, požaduje co nejmenší $|D_{\lambda}|$



$$\Delta t_{tot} \approx |D_{\lambda,1}L_1 + D_{\lambda,2}L_2 + \dots| \Delta \lambda;$$

Celkové rozšíření impulsu na konci trasy je dáno absolutní hodnotou *algebraického součtu* příspěvků různých úseků.

Kombinací úseků vláken s různými znaménky disperzních koeficientů je možno **disperzi vykompenzovat**:

$$D_{\lambda,1}L_1 + D_{\lambda,2}L_2 + \dots = 0 \rightarrow \Delta t_{tot} \approx 0$$

To je princip velmi výhodný pro systémy s vlnovým multiplexováním, v nichž se vlákem přenáší více kanálů s různými nosnými vlnovými délkami současně.

42