

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**MATICOVÉ METODY
V PEVNOSTNÍCH VÝPOČTECH**

II. ČÁST

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1984

DŮM TECHNIKY ČVTS PRAHA

MATICOVÉ METODY V PEVNOSTNÍCH VÝPOČTECH

II. část

STAVBA STROJŮ XXV

Praha 1973

PŘEDMLUVA

Tento učební text je určen těm, kdo se chtějí seznámit s maticovými metodami řešení úloh ze statiky pružných soustav. Předpokládá se znalost základů nauky o pružnosti a pevnosti. Tento díl navazuje na první část, která obsahovala transformaci vektorů, poznámky k maticové symbolice, základní početní úkony s maticemi, dělení matice na submatice, vlastní hodnoty a vlastní vektory matice, dualitu v pojetí úloh z teorie pružnosti, příčinkové činitele, matice tuhosti a poddajnosti, pružiny spojené paralelně a sériově, řešení rovinných prutových soustav, transformaci celkové matice tuhosti, skládání substruktur, vliv nerovnoměrného rozdělení teploty, předpjaté konstrukce, prostorové prutové soustavy, prizmatický přímý nosník, transformaci souřadnic při rovinném ohybu, výpočet vnitřních statických účinků, využití souměrnosti, spojitě rozdělené zatížení, rámové konstrukce, teplotní pnutí a spojitě zatížení nosníků.

Autor je přesvědčen, že si lze metodu snáze osvojit na jednoduchých úlohách, u nichž lze bez velkých obtíží kontrolovat správnost řešení použitím jiných známých metod. Výhoda maticové metody se ovšem plně uplatní teprve při řešení rozsáhlejších úloh s použitím počítačů. Tomu, kdo zvládl aplikaci metody na jednoduchých úlohách, nečiní takové rozšíření výpočtů žádné obtíže.

Výpočet složitých konstrukcí bude zařazen do 3.části semináře v roce 1974.

Ing. Vladimír Václavík
Dům techniky ČVTS Praha

M A T I C O V É M E T O D Y
V P E V N O S T N Í C H V Ý P O Č T E C H

II. část

Prof. Ing. Cyril Höschl,
Ústav termomechaniky ČSAV, Praha

O B S A H

	Str.
1. Poznatky z první části semináře	9
2. Bilineární a kvadratická forma. Jejich derivace	14
3. Příklad výpočtu rovinné konstrukce	22
4. Sendvičový nosník	26
5. Obecná prostorová rámová konstrukce	31
6. Souřadné osy spjaté s uzly	36
7. Eliminace volných uzlů	40
8. Dělení velké konstrukce	42
9. Přeskupování matic. Incidenční matice	44
10. Úsporný způsob zahrnutí konstrukčních změn do výpočtu	46
11. Neortogonální transformace. Kosoúhlé souřadnice	52
12. Oprava nepřesně určené inverzí matice	58
13. Silová metoda. Základní vztahy	60
14. Souvislost silové a deformační metody	72
15. Souvislost s metodou konečných prvků	76
16. Ohraničení přesného výsledku při přibližném řešení	85
17. Znovu o vlastních hodnotách. Věta Hamiltonova-Cayleyho	89
18. Transformace souměrné matice do hlavních os (diagonalizace)	91
19. Několik slov závěrem	98
D o d a t e k	100
Použitá literatura	134

1. POZNATKY Z PRVNÍ ČÁSTI SEMINÁŘE

V první části semináře byly probrány některé operace s maticemi a jejich užití při řešení prutových a rámových konstrukcí deformační metodou. Omezili jsme se přitom na obor reálných čísel a na lineární soustavy. Maticová symbolika umožňuje stručný zápis soustavy lineárních rovnic, pomáhá organizovat obsáhlé výpočty a umožňuje studium obecných vlastností lineárních transformací, tj. lineárních soustav algebraických rovnic. Poněvadž diferenciální rovnice lze přibližně nahradit rovnicemi diferenčními (s přibližností, kterou můžeme volit libovolně) a poněvadž diferenční rovnice jsou algebraické, je možné s pomocí maticové algebry studovat i obecné vlastnosti lineárních diferenciálních rovnic či diferenciálních operátorů. V první části semináře jsme svůj výklad zaměřili na aplikace v oboru pevnostních výpočtů. Uvedli jsme jen takové poznatky z maticové algebry, které jsme pro další aplikace potřebovali. Nejdůležitější z nich zde připomeneme.

Definice matice. Matice je seskupení čísel do pravouhlé mříže (matrice) o n řádcích a m sloupcích. Je-li $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ můžeme jednotlivá čísla, která nazveme "prvky matice", označit obecně znakem a_{ij} . První index značí umístění prvku v řádku a druhý index umístění ve sloupci. Prvek a_{ij} je tedy umístěn v i -tém řádku a j -tém sloupci. Prvků je $n \times m$, přičemž n , m jsou přirozená čísla. Matici pak můžeme zapsat některým z těchto způsobů:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}] = A \quad (1.1)$$

Takovou matici tvoří např. koeficienty lineární soustavy m rovnic o m neznámých. Je-li $m = 1$, má matice jediný sloupec a nazýváme ji vektorem. V tom případě index $j = 1$ nevyznačujeme:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \{v_i\} = v \quad (1.2)$$

Definicí matice je třeba doplnit pravidly maticové algebry; teprve ve spojení s nimi získává definice praktický význam. Označení matic závorkami vynecháváme

jen tehdy, je-li zřejmé, že jde o vztahy mezi maticemi a že nevznikne omyl. V tištěném textu se symboly pro matice sázejí půltučně; v psaném textu se někdy tyto symboly vyznačují podtrháváním, to však nebudeme používat. Vystačíme s hranatými závorkami pro obecné matice a složenými závorkami pro vektory, popř. použijeme označení bez závorek.

Slučování matic. Pro slučování (sčítání, odčítání) matic platí pravidlo: slučovat lze jen matice stejných tvarů a operace slučování se týká všech dvojic tvořených stejně položenými prvky. Je-li tedy

$$[C] = [A] + [B] \quad (1.3)$$

platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1.4)$$

Pro slučování platí obvyklé zákony algebry, takže např.

$$A + B = B + A \quad A - (B + C) = (A - B) - C$$

Násobení matice konstantou. Z pravidel platných pro slučování matic ihned odvodíme, že

$$k[A] = k[a_{ij}] = [ka_{ij}] \quad (1.5)$$

Matice se násobí, znásobíme-li všechny její prvky.

Transpozice matice. Transponovaná matice A^T vznikne záměnou řádek a sloupců v matici A :

$$[A]^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}] \quad (1.6)$$

Pro transpozici součinu platí

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T \quad (1.7)$$

Z definice (1.6) bezprostředně plyne, že

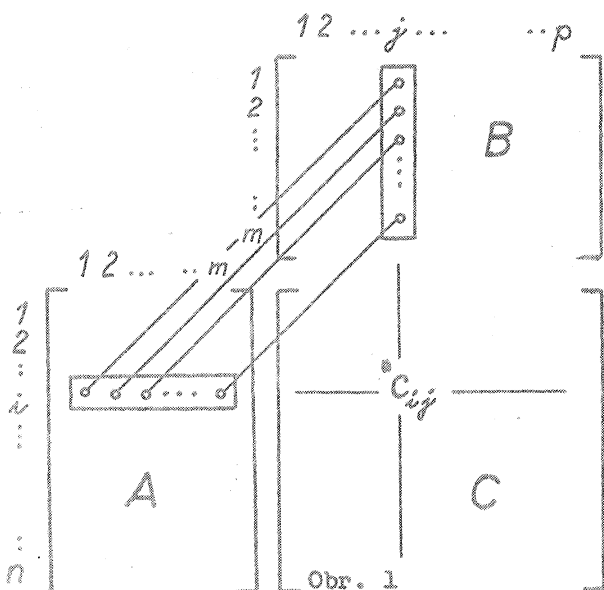
$$(A^T)^T = A \quad (1.8)$$

Násobení matic navzájem. Násobit lze pouze matice, u nichž se počet sloupců první matice rovná počtu řádek druhé matice; součin má pak stejný počet řádků jako první matice a stejný počet sloupců jako druhá matice. Má-li např. matice $[A]$ tvar $m \times n$, matice $[B]$ tvar $n \times p$, bude mít matice

$$[C] = [A][B] \quad (1.9)$$

tvar $m \times p$. Prvky matice $[C]$ jsou přitom definovány součtem

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (1.10)$$



Násobení můžeme znázornit na obr. 1. Prvek c_{ij} dostaneme, znásobíme-li postupně dvojice stejnohlých prvků z i -tého řádku matice A a z j -tého sloupce matice B a součiny sečteme (dostaneme tedy $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{im}b_{mj}$). Stejnolehlé dvojice jsou na obr. 1 spojeny tenkými čarami. Při násobení matic neplatí obecně komutativní zákon, tj. až na výjimky nelze pořadí matic v součinu zaměnit. Ostatní zákony běžné algebry však platí, takže např.

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$A(BC) = (AB)C$$

Dělení matic není definováno. Nahrazujeme je násobením inverzní maticí A^{-1} , pro kterou platí

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad (1.11)$$

I je diagonální jednotková matice, která má stejný význam jako jednotka v obyčejné algebře. Platí např., že $IA = AI = A$. Jednotková matice má na hlavní diagonále jedničky, ostatní prvky jsou nulové.

Inverzní matice A^{-1} existuje jen pro čtvercovou nesingulární matici A a má tvar

$$A^{-1} \equiv [A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} & -M_{41} & \dots \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} & M_{42} & \dots \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} & -M_{43} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

kde $|A|$ značí determinant z prvků matice $[A]$, tj. $|A| = \det[a_{ij}]$, M_{ij} je první minor příslušný k prvku a_{ij} .

Je to determinant z prvků matice $[A]$, v níž vynecháme i -tý řádek a j -tý sloupec. Všimněme si, že minor M_{ij} je v matici A^{-1} umístěn v j -tém řádku a i -tém sloupci, tedy opačně, než jsou umístěny prvky v matici A . Minory jsou tedy umístěny analogicky k prvkům v transponované matici A^T .

Z každého minoru řádu většího než jedna lze vytvořit vynecháním vždy jednoho řádku a sloupce druhé minory, jejichž řád je o jednotku menší; z nich pak lze popřípadě vytvořit minory třetí a další, až dostaneme minory řádu prvního (to jsou však jednotlivé prvky původní matice).

Definice (1.12) se týká jen čtvercových matic, jejichž determinant $|A| \neq 0$. Je-li determinant nulový, jde o matici singulární či degenerovanou. Stupeň degenerace poznáme podle hodnoty matice. Pro singulární matici platí, že hodnota matice je menší než její řád. Řád čtvercové matice je určen počtem jejích řádků či sloupců. Obdobně je definován i řád determinantu. Hodnota matice je určena největším řádem nenulového minoru, který dokážeme z prvků dané matice sestavit.

Pro inverzi součinu platí:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (1.13)$$

Podstata přímé deformační metody. Nyní ještě stručně zopakujeme hlavní myšlenky přímé deformační metody, kterou jsme v první části semináře použili k řešení prutových a rámových konstrukcí. Pro názornost si představíme, že máme řešit rovinnou rámovou konstrukci složenou z nosníků spojených tuhými styčníky. Deformaci konstrukce popíšeme posuvy jejích styčníků; v každém z nich půjde o dvě složky posuvu a o jeden úhel otočení, tedy o tři složky zobecněného posuvu $\delta_i = \{u_i, v_i, \vartheta_i\}^T$. Těmto složkám přísluší zobecněné vnější síly $P_i = \{X_i, Y_i, M_i\}^T$, jež působí v uvažovaném i -tém styčníku. Jako "sílu" zde označujeme stručně i silovou dvojici M_i , podobně úhel ϑ_i nazýváme "posuvem". Sestavíme-li všechna δ_i do celkového vektoru posuvů

$u = \{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n\}^T$ a obdobně všechna P_i do vektoru vnějších sil
 $X = \{P_1 P_2 \dots P_n\}^T$, bude mezi nimi platit lineární vztah

$$X = K u \quad (1.14)$$

přičemž K je matice tuhosti řádu $3n$.

Matici tuhosti jsme získali adicí odpovídajících prvků z matic tuhostí platných pro jednotlivé elementy (tedy v našem případě pro jednotlivé nosníky, z nichž se rámová konstrukce skládá). Postupovali jsme přitom tak, že jsme nejprve našli matici tuhosti \bar{K}^e elementu v lokálních souřadnicích \bar{x}, \bar{y} výhodně orientovaných vzhledem k elementu. Pak jsme matici transformovali do globálních souřadnic x, y platných pro celou konstrukci, a to pomocí transformační matice T :

$$K^e = T^T \bar{K}^e T \quad (1.15)$$

Transformační matice je jednoznačně definována pro každou relativní polohu lokálních a globálních souřadných os. Adicí jsme získali matici tuhosti K platnou pro celou soustavu; ta pak vstupuje do rovnice (1.14). Sečetli jsme přitom prvky k_{ij}^e příslušné stejným dvojicím posuv-síla ze všech matic K^e a umístili součet do i -tého řádku a j -tého sloupce výsledné matice tuhosti K . Přitom i -tý řádek přísluší i -tému prvku vektoru sil a j -tý sloupec přísluší j -tému prvku vektoru posuvů.

Předpětí a teplotní pnutí jsme do výpočtu zahrnuli tak, že jsme vypočetli vektor sil $X^{(1)}$ působících v uzlech konstrukce bez působení vnějších sil a při nulových deformacích styčniců (při nulových posuvech). Ten pak připojíme na pravou stranu rovnice (1.14), takže dostaneme

$$X = K u + X^{(1)} \quad (1.16)$$

Řešením maticové rovnice (1.16) - což je ovšem soustava algebraických rovnic - jsme získali posuvy ve styčnicích:

$$u = K^{-1} (X - X^{(1)}) \quad (1.17)$$

Z nich pak - pomocí napěťových matic S_{α}^e - lze určit vnitřní statické účinky v elementu α . K nim je třeba superponovat vnitřní statické účinky příslušné silám $X^{(1)}$, jež existují v konstrukci bez působení vnějších sil při nulových posuvech styčniců.

V podrobnostech odkazujeme na skripta vydaná k první části semináře o maticových metodách, kde byly uvedeny také četné příklady. Poněvadž jsou tato skripta rozebrána, budeme se snažit objasnit uvedený postup znovu

i na dalších příkladech, v nichž však již použijeme komplikovanějších prvků a některých důmyslnějších obrátů zjednodušujících řešení. Doufáme, že text bude srozumitelný i tomu, kdo se nemohl účastnit první části semináře. Než však dojdeme k aplikacím, uvedeme některé další poznatky obecného charakteru. Budeme je při dalším výkladu potřebovat.

2. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÁ FORMA. JEJICH DERIVACE

Pro stručnost a názornost se omezíme nejprve na dvě proměnné. Čtenář ovšem snadno nahlédne, že uvedené poznatky platí pro libovolný počet proměnných. Utvořme z vektorů o dvou prvcích $\{x\}$ a $\{y\}$ a z matice druhého řádu $[A]$ výraz $B = x^T A y$. Dostaneme

$$\begin{aligned} B &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = [x_1 \ x_2] \begin{Bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \{a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Je to jednoprvková matice, tedy skalár. Musí proto platit identita

$$B \equiv B^T \quad \text{čili} \quad x^T A y \equiv y^T A^T x \quad (2.2)$$

Výraz (2.1) se nazývá bilineární formou proměnných x, y . Je-li $y \equiv x$, dostáváme kvadratickou formu ^{*})

$$\begin{aligned} Q &= x^T A x = x^T A^T x = \{a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2\} = \\ &= \{a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Snadno se přesvědčíme, že každou matici tvaru $n \times n$ lze rozdělit na symetrickou a antisymetrickou část:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A^* + A^{**} = \\ &= \frac{1}{2}([a_{ij}] + [a_{ji}]) + \frac{1}{2}([a_{ij}] - [a_{ji}]) \end{aligned} \quad (2.4)$$

^{*}) Nezaměňujte s označením použitým v jiné souvislosti pro sílu. Zde jde o skalární veličinu (quadrat = čtverec).

Pro kvadratickou formu pak dostaneme

$$\begin{aligned} x^T A x &= x^T (A^* + A^{**}) x = x^T A^* x + x^T A^{**} x = \\ &= x^T A^* x + 0 = x^T A^* x \end{aligned} \quad (2.5)$$

Antisymetrická část tedy do kvadratické formy nevstupuje. Stačí proto, omezi-
me-li se ve svém výkladu na symetrické matice.

O kvadratické formě říkáme, že je pozitivně definitní, je-li pro jaká-
koli reálná nenulová x_1, x_2 vždy $Q > 0$. To platí, jak jsme již uved-
li, též o maticích obecného řádu. Poněvadž uvedenou vlastnost definujeme pro
libovolný vektor $\{x\}$ s reálnými nenulovými prvky, je zřejmé, že pozitivní
definitnost je vlastnost matice. V matematice se dokazuje věta, podle které
je matice pozitivně definitní, je-li souměrná a má kladné hlavní subdeter-
minanty, tj. je-li

$$|a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

Takové matice mají v našich aplikacích největší význam; pozitivně definitní
jsou např. matice tuhosti a matice poddajnosti. *) Pro ně pak platí důležité
věty, jež se týkají vlastních hodnot. Zmíníme se o nich v kap. 18. Postačí
však, budeme-li přepokládat jen souměrnost matice.

Je-li tedy matice A souměrná, druhého řádu, je její kvadratická forma

$$Q = x^T A x = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \quad (2.6)$$

neboť $a_{12} = a_{21}$. Napišme nyní parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_1} &= 2(a_{11} x_1 + a_{12} x_2) \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} &= 2(a_{12} x_1 + a_{22} x_2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Výsledek **můžeme** shrnout do jediné maticové rovnice. Místo (2.7) budeme psát

*) Je to důsledek Gibbsovy věty z termodynamiky; tato vlastnost souvisí s tím,
že práce vynaložená k deformaci tělesa z nezatiženého stavu je vždy poziti-
vní.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

čili

$$\frac{\partial Q}{\partial \{x\}} = 2 [A] \{x\} \quad (2.9)$$

Je-li tedy dán skalár $Q = x^T A x$, definujeme jeho derivaci podle vektoru x jako vektor

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial \{x\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = 2 [A] \{x\} \quad (2.10)$$

Nevznikne-li nebezpečí omylu, můžeme závorky v rovnici (2.9) vynechat.

Podobně lze odvodit, že pro derivaci řádkové matice $[h] = \{x\}^T [A]$ podle vektoru $\{x\}$ platí:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial [h]}{\partial \{x\}} = [A] \quad (2.11)$$

Je-li totiž

$$\begin{aligned} h &= x^T A = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \\ &= [(a_{11}x_1 + a_{21}x_2) \ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)] = [h_1 \ h_2] \end{aligned} \quad (2.12)$$

dostaneme analogicky k definici (2.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial [h]}{\partial x_1} \\ \frac{\partial [h]}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = [A] = A \end{aligned} \quad (2.13)$$

Zvláštní případ nastává, vytvoříme-li kvadratickou formu s jednotkovou maticí:

$$Q = x^T I x = x^T x = x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad (2.14)$$

Zde má Q význam kvadrátu vzdálenosti bodu o souřadnicích x_1, x_2 od počátku souřadnic, tedy kvadrátu délky vektoru x (radiusvektoru r).

Může se zdát, že zde zbytečně zavádíme příliš komplikované definice. Derivovat skalár či dokonce matici podle vektoru se zdá být nerozumné, samoúčelné, bez souvislosti s běžnými definicemi obyčejných či parciálních derivací. Jaký to může mít smysl? Navíc píšeme znak parciální derivace i tam, kde derivujeme podle vektoru $\{x\}$ výraz odvozený z jediného a téhož vektoru $\{x\}$, měli bychom tedy psát "obyčejnou" derivaci.

Abychom čelili těmto výtkám, uvedeme několik poznámek. Parciální znak derivace uvádíme proto, že např. výraz $\partial h / \partial x$ značí celou soustavu - obecně matici - složenou z parciálních derivací, jak je zřejmé z rovnice (2.13). Právě proto, že uvedené rovnice vyjadřují jediným zápisem celou soustavu rovnic, přináší uvedená definice značné zjednodušení výpočtů, jak ještě ukážeme na některých příkladech. Než k tomu přistoupíme, zobecníme definici (2.10) či (2.13) na obecný n - rozměrný prostor, v němž bude mít vektor $\{x\}$ celkem n složek. Na tvaru a řádu derivované matice $[A]$ přitom nezáleží, může to být třeba skalár jako v rovnici (2.10) nebo řádková matice jako v rovnici (2.13).*) Může to však být také obdélníková matice. Bude platit:

$$\frac{\partial [A]}{\partial \{x\}} = \begin{bmatrix} \partial [A] / \partial x_1 \\ \partial [A] / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial [A] / \partial x_{n-1} \\ \partial [A] / \partial x_n \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

přičemž derivujeme každý prvek matice. Je-li např. matice A tvaru $n \times l$, bude

$$\begin{aligned} \frac{\partial [A]}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_i} & \frac{\partial a_{12}}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial a_{1l}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial x_i} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_i} & \frac{\partial a_{n2}}{\partial x_i} & \dots & \frac{\partial a_{nl}}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad (2.16) \end{aligned}$$

*) V uvedených rovnicích jsme však užili označení Q , popř. $[h]$, místo $[A]$, které používáme nyní.

Prvním příkladem, na němž ukážeme výhodnost těchto definic pro derivace matic, bude řešení "přeuročené" soustavy lineárních rovnic. Často se stává, že konstanty v nějakém matematicky formulovaném zákonu je nutné určit z fyzikálních měření. Provedeme-li více takových měření, než kolik hledáme konstant, dostaneme "přeuročenou" soustavu rovnic, tj. budeme mít pro neznámé konstanty více rovnic, než kolik je neznámých. Kdyby zákon platil přesně a měření by byla rovněž přesná, mohli bychom z dané soustavy m rovnic pro m neznámých ($m > m$) vybrat kteroukoli skupinu m rovnic, ostatní vynechat, a dostali bychom vždy též výsledek. To znamená, že by byla soustava rovnic kompatibilní (rovnice by si navzájem neodporovaly). Měření však bývají vždy zatížena chybou, a tak rovnice nejsou kompatibilní. Co pak? Které z rovnic máme vybrat a které vynechat, abychom získali řešení, jež by vystihlo skutečnost s největší pravděpodobností? Tuto úlohu rozřešil Gauss důmyslnou a geniální metodou. *) Doporučil pojmout do výpočtu všechny rovnice (tj. nezavrhnout předem žádná měření) a hledat jejich nejpravděpodobnější řešení metodou nejmenších čtverců, tj. tak, aby součet čtverců levých stran anulovaných rovnic byl nejmenší. Mějme např. soustavu čtyř rovnic pro dvě neznámé konstanty x_1 , x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pro jednoduchost jsme zvolili celočíselné součinitele, což bychom ovšem z fyzikálních měření nedostali. Rovnice anulujeme, levé strany umocníme a sečteme. Dostaneme tak "zbytek"

$$R = (x_1 + x_2 - 2)^2 + (x_1 - x_2 - 1)^2 + (x_1 + 2x_2 - 3)^2 + (2x_1 + x_2 - 2)^2$$

Kdyby soustava (2.17) byla kompatibilní, dávala by řešení s nulovým zbytkem R . Poněvadž tomu tak není, musíme se smířit s tím, že konstanty x_1 , x_2 budou zatíženy chybou, takže $R > 0$. Budeme se však snažit, aby byl zbytek co nejmenší, aby tedy platilo, že

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = 0 \quad (2.18)$$

*) Obdobně nezávisle na Gaussovi postupoval i Legendre. Ve svých úvahách se omezíme na případ, kdy vztah mezi hledanými konstantami je lineární.

To jsou nutné podmínky pro to, aby byl zbytek R minimální. Po derivaci z rovnice (2.18) vyjde

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 &= 10 \\ 4x_1 + 7x_2 &= 9 \end{aligned} \quad (2.19)$$

a tedy

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 9 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ 9 \end{Bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{Bmatrix} 34 \\ 23 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Dostali jsme $x_1 = \frac{34}{33} \doteq 1,03$, $x_2 = \frac{23}{33} \doteq 0,70$.

Celý výpočet můžeme formálně zjednodušit, napíšeme-li soustavu (2.17) maticově:

$$Ax = b \quad (2.21)$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Zbytek R je vlastně kvadrátem délky vektoru $(Ax - b)$, tj. podle (2.14)

$$\begin{aligned} R &= (Ax - b)^T (Ax - b) = \\ &= (x^T A^T - b^T) (Ax - b) = \\ &= x^T A^T A x - b^T A x - x^T A^T b + b^T b \end{aligned} \quad (2.22)$$

Poněvadž jde o skalár, jsou skaláry i jednotlivé členy na pravé straně rovnice; podle (2.2)

$$b^T A x = x^T A^T b$$

takže

$$R = x^T A^T A x - 2 x^T A^T b + b^T b \quad (2.23)$$

Podmínku minima R nyní napíšeme ve tvaru derivace skaláru R podle vektoru x :

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2 A^T A x - 2 A^T b = 0 \quad (2.24)$$

odkud

$$A^T A x = A^T b \quad (2.25)$$

Řešení je tedy

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (2.26)$$

Dosazením vyjde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = A^T A$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = b$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} = A^T b$$

$$x = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34/33 \\ 23/33 \end{Bmatrix}$$

Je to stejný výsledek jako dříve, dostali jsme jej však běžnými - a snadno programovatelnými - algebraickými úkony s maticí A a s vektorem b . Porovnáme-li (2.26) s rovnicí (2.21) poznáváme, že matice

$$B = (A^T A)^{-1} A^T \quad (2.27)$$

má význam "přirozené" inverze obdélníkové matice A , neboť řešení rovnice

$$Ax = b \quad (2.28)$$

dává ve tvaru

$$x = Bb \quad (2.29)$$

Matice B tak nahrazuje inverzní matici v užším smyslu A^{-1} , která ovšem u obdélníkové matice neexistuje. Soustava (2.21) není proto v běžném smyslu slova řešitelná, můžeme ji však učinit řešitelnou formálním vynásobením maticí A^T zleva:

$$A^T Ax = A^T b \quad (2.30)$$

Odtud plyne přímo řešení (2.26). Není to však řešení původní soustavy rovnic, ale soustavy transformované, neboť násobit vektor maticí znamená tento vektor transformovat, a rovnice (2.28) vyjadřuje rovnost dvou vektorů. *) Řešení této transformované soustavy má tu vlastnost, že minimalizuje zbytek R pro původní soustavu, takže je to též řešení původní soustavy, avšak jen přibližné, nikoli přesné. Můžeme je též získat metodou nejmenších čtverců. Je zřejmé, že definici inverzní matice by bylo možné upravit tak, aby se vztahovala i na obdélníkové matice.

Prozatím se nám podařilo odvodit "přirozenou" inverzní matici jen pro případ matice tvaru $n \times m$, pro niž $n > m$. Dále však tyto teorie nebudeme rozvíjet. Takové úvahy, jakkoli jsou zajímavé, by nás zavedly příliš daleko; spadají spíše do teorie lineárních algebraických soustav. Vrátime se raději k aplikacím z teorie pružnosti. Probranou látku procvičíme na úlohách, jejichž řešení je uvedeno v dodatku na konci těchto skript.

Úloha 1. Vypočítejte matici B podle (2.27) pro matici A z rovnice (2.21) a určete součin BA . Určete rovněž součin AB .

Úloha 2. Dokažte, že matice $S = A^T A$, v níž A značí obdélníkovou matici tvaru $n \times m$, $n < m$, je souměrná singulární matice.

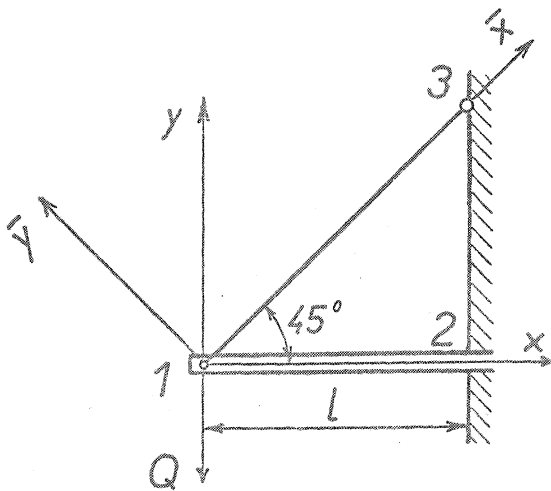
Úloha 3. Vycházejíce ze základní rovnice $X = Ku$, resp. $u = CX$, odvoďte věty Castiglianovy. Přitom u značí vektor posuvů (jsou v něm všechny složky posuvů a úhly otočení ve všech styčnicích), X vektor sil (tj. složek

*) Přitom n - rozměrné vektory transformujeme do m - rozměrného prostoru!

sil a sílevých dvojic pro všechny styčníky), K , popř. C , jsou matice tuhosti, popř. poddajnosti. Předpokládáme, že byly již vyloučeny posuvy předepsané okrajovými podmínkami, takže matice K je nesingulární (říkáme též, že je regulární) a $C = K^{-1}$.

3. PŘÍKLAD VÝPOČTU ROVINNÉ KONSTRUKCE

Pro osvěžení poznatků z první části semináře zde uvedeme detailní výpočet rovinné konstrukce. Volíme ji velmi jednoduchou, aby bylo možné snadno pochopit výpočtový postup. Určíme deformace styčníku 1 v soustavě nosníku 1-2 a prutu 1-3 podle obr. 2.



Obr. 2

Pro prut 1-3 má matice tuhosti v lokální soustavě souřadnic \bar{x} , \bar{y} tvar

$$\bar{K}_{(1-3)} = \bar{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

kde $\bar{k} = (ES_{(1-3)}) / (l\sqrt{2})$ značí tuhost ("pružinovou konstantu") prutu 1-3. Vektor posuvů je přitom $\{\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_3, \bar{v}_3\}^T$.

Transformační matice pro pruty je čtvrtého řádu a obsahuje kromě nul kosiny a siny úhlu, o který je lokální

soustava souřadnic pootočená vzhledem ke globální soustavě:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Zde $\lambda = \cos 45^\circ$, $\mu = \sin 45^\circ$. V globálních souřadnicích vyjde matice tuhosti pro vektor posuvů $\{u_1, v_1, u_3, v_3\}^T$ podle (1.15) takto:

$$K_{(1-3)} = T^T \bar{K}_{(1-3)} T = \frac{\bar{k}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

K poslední matici jsme připojili pořadová čísla, jejichž význam objasníme později. Určují orientaci prvků ve výsledné matici tuhosti.

Pro nosník, který je ke globálním souřadnicím ve výhodné poloze, není třeba lokální a globální soustavu souřadnic rozlišovat, takže transformace odpadá. Je-li vektor posuvů $\{u_1, v_1, \vartheta_1, u_2, v_2, \vartheta_2\}^T$, je matice tuhosti nosníku

$$K_{(1-2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 12\beta & -6\beta l & 0 & -12\beta & -6\beta l \\ 0 & -6\beta l & 4\beta l^2 & 0 & 6\beta l & 2\beta l^2 \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -12\beta & 6\beta l & 0 & 12\beta & 6\beta l \\ 0 & -6\beta l & 2\beta l^2 & 0 & 6\beta l & 4\beta l^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.4)$$

Zde jsme dosadili $\alpha = (ES_{(1-2)})/l$ za osovou tuhost nosníku a $\beta = (EJ)/l^3$, což je výraz úměrný ohybové tuhosti. Dále značí E modul pružnosti, $S_{(i-j)}$ průřez, J moment setrvačnosti průřezu k jeho neutrální ose. Celkový vektor posuvů sestavíme takto:

$$u = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix} & \end{matrix} \quad (3.5)$$

Nad jednotlivými prvky tohoto vektoru jsme připsali pořadová čísla. Stejná čísla pro stejné prvky jsme přiřadili i vektorům platným pro elementární matice tuhosti a v tomto pořadí jsme je také vyznačili u řádek a sloupců elementárních matic. Stejně učiníme i u výsledné matice K , která bude osmého řádu. Řád této matice je určen počtem prvků ve vektoru (3.5). Pořadová či kódová čísla umožní snadné sestavení matice K . Např. prvek k_{22} vznikne sečtením prvku $k/2$ z matice (3.3) z druhého řádku a druhého sloupce (označení řádku = 2, označení sloupce = 2, jak odpovídá indexům hledaného prvku) a prvku 12β z matice (3.4). Bude tedy celkem $k_{22} = \frac{k}{2} + 12\beta$. Podobně prvek

$k_{26} = k_{62} = -6\beta l$ podle (3.4); z matice (3.3) se nepřičte nic, neboť tam není pořadové číslo 6 obsaženo. Celkem dostaneme - se zkráceným označením $\alpha = k/2 = (ES_{(1-3)})/(2l\sqrt{2})$ - tuto výslednou matici tuhosti:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \alpha + \alpha & \alpha & 0 & -\alpha & 0 & 0 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ \alpha & \alpha + 12\beta & -6\beta l & 0 & -12\beta l & -6\beta l & -\alpha & -\alpha & 2 \\ 0 & -6\beta l & 4\beta l^2 & 0 & 6\beta l & 2\beta l^2 & 0 & 0 & 3 \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -12\beta & 6\beta l & 0 & 12\beta & 6\beta l & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -6\beta l & 2\beta l^2 & 0 & 6\beta l & 4\beta l & 0 & 0 & 6 \\ -\alpha & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha & 7 \\ -\alpha & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha & 8 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Tato matice je singulární. Je souměrná a má na hlavní diagonále kladné prvky. Z uložení konstrukce vyplývá, že $u_1 = v_1 = \bar{v}_2 = u_3 = v_3 = 0$. Z matice K tedy vynecháme čtvrtý až osmý řádek; zároveň vynecháme i čtvrtý až osmý sloupec. Vznikne tak zmenšená matice $K_{\alpha\alpha}$, která již není singulární. Je to submatice tuhosti v rovnici

$$\begin{Bmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta = 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

v níž jsme přeskupili vektor posuvů tak, aby byly zvlášť posuvy různé od nuly a zvlášť posuvy nulové (ty jsou dány okrajovými podmínkami). *) Vynásobením plyne základní rovnice

$$\{X_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}] \{u_\alpha\} \quad (3.8)$$

z níž můžeme vypočítat neznámé posuvy u_α . Postupně dostaneme matici tuhosti

$$K_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha + \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha + 12\beta & -6\beta l \\ 0 & -6\beta l & 4\beta l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad (3.9)$$

*) V daném případě jsou předepsané posuvy seskupeny všechny na konci vektoru (3.5), takže přeskupování odpadá.

s tuto základní rovnici:

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = -Q \\ M_1 = 0 \end{cases} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha + \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha + 12\beta & -6\beta l \\ 0 & -6\beta l & 4\beta l^2 \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} \end{matrix} \quad (3.10)$$

Zajímá-li nás jen svislý průhyb, můžeme matici a vektory přeskupit do pořadí 1 - 3 - 2 a pak je rozdělit:

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ M_1 = 0 \\ Y_1 = -Q \end{cases} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha + \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 4\beta l^2 & -6\beta l \\ \alpha & -6\beta l & \alpha + 12\beta \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \end{matrix} \quad (3.11)$$

Poslední rovnice se rozpadá na dvě:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \alpha & 0 \\ 0 & 4\beta l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ -6\beta l \end{bmatrix} \{v_1\}$$

$$\{-Q\} = [\alpha \quad -6\beta l] \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} + [\alpha + 12\beta] \{v_1\}$$

Z prvé rovnice vyloučíme $\begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix}$ a dosadíme do druhé. Přitom využijeme poznatku, že inverzí diagonální matice libovolného řádu je opět diagonální matice, v níž se místo původních prvků vyskytují na hlavní diagonále jejich převrácené hodnoty. Vyjde

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \alpha + \alpha & 0 \\ 0 & 4\beta l^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ -6\beta l \end{bmatrix} \{v_1\} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\alpha + \alpha} \\ \frac{3}{2l} \end{bmatrix} \{v_1\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \{-Q\} &= ([\alpha \quad -6\beta l] \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\alpha + \alpha} \\ \frac{3}{2l} \end{bmatrix} + [\alpha + 12\beta]) \{v_1\} = \\ &= \left[-\frac{\alpha^2}{\alpha + \alpha} - 9\beta + \alpha + 12\beta \right] \{v_1\} = \\ &= \left[-\frac{\alpha^2}{\alpha + \alpha} + \alpha - 3\beta \right] \{v_1\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Odtud

$$v_1 = - \frac{\alpha + \alpha}{\alpha\alpha + 3\beta(\alpha + \alpha)} Q \quad (3.14)$$

Znaménko minus značí, že průhyb směřuje dolů, tedy proti kladné ose y .
 Dosazením (3.14) do (3.12) vyjde

$$u_1 = \frac{\alpha}{\alpha\alpha + 3\beta(\alpha + \alpha)} Q \quad (3.15)$$

$$v_1^h = - \frac{\alpha + \alpha}{\alpha\alpha + 3\beta(\alpha + \alpha)} \frac{3Q}{2l} \quad (3.16)$$

Kdyby nás zajímala posouvající síla V a ohybový moment M v nosníku 1-3, použili bychom napěťové matice, která má dva řádky a čtyři sloupce. Z ní se však - vzhledem k okrajovým podmínkám - uplatní jen levá polovina:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} V \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1^h \\ v_3 = 0 \\ v_3^h = 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1^h \end{Bmatrix} = \\ &= EJ \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \left(\frac{12}{l^3}x - \frac{6}{l^2}\right) & \left(-\frac{6}{l^2}x + \frac{4}{l}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1^h \end{Bmatrix} \quad (3.17) \end{aligned}$$

Vzorce použité v tomto odstavci byly odvozeny v první části semináře.

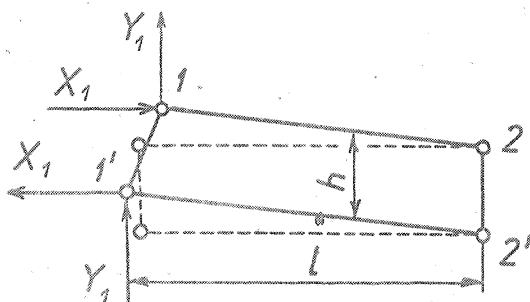
Zcela obdobně bychom postupovali i u složitých soustav. Rozdíl by byl pouze ve velikosti výsledné matice tuhosti.

4. SENDVIČOVÝ NOSNÍK

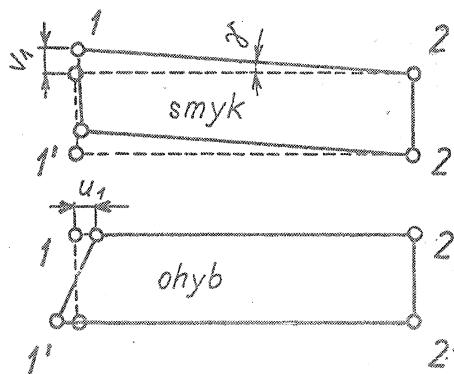
Abychom ukázali odvození matice tuhosti pro složitější typ konstrukčního prvku, uvedeme příklad výpočtu sendvičového nosníku. Je to vrstvený nosník tvořený dvěma pánsnicemi, jež mohou přenášet tahové či tlakové síly, a elastickou výplní, která je schopna zachytit jen smyková napětí. Výplň udržuje konstantní vzdálenost mezi pánsnicemi a klade odpor při zatížení smykem,

osová napětí jsou však ve výplni zanedbatelná (zanedbatelně přispívají k přenosu ohybového momentu). Skutečnost, která je ovšem složitější, si tedy idealizujeme tak, že pásnice přenášejí samy celý ohybový moment prostřednictvím tahových a tlakových sil, jež v každém řezu vytvářejí silové dvojice, kdežto posouvající sílu zachytí jen elastická výplň. Budeme předpokládat, že obě pásnice mají stejný průřez a že nosník je souměrný ke středním rovinám.

Nosník si lze znázornit obdélníkem 1-1'-2'-2 (obr. 3), přičemž strany 1-2, popř. 1'-2', představují pásnice. Na obr. 3 je vyznačen původní i deformovaný tvar nosníku vztahený k průřezu 2-2' (můžeme si představit, že nosník je v tomto průřezu vetknutý). Výsledná deformace vzniká superpozicí smyku a ohybu, jak je naznačeno na obr. 4. Při smyku je namáhána pouze výplň, při ohybu pouze pásnice. Vzájemné působení mezi výplní a pásnicemi si myslíme soustředěno do uzlových bodů, jež jsou na obr. 3 a 4 vyznačeny kroužky.



Obr. 3



Obr. 4

Vodorovná smyková síla Ql se tedy rozdělí rovným dílem do bodů 1 a 2 a tam se sloučí se silami X_1 a X_2 , jak je znázorněno na obr. 5. Obdobně se rozdělí i svislá síla Qh . Přitom Q značí smykový tok ve výplni o délce l a výšce h . V průřezu 1-1' (obr. 3) se přenáší posouvající síla V_1 a ohybový moment M_1 , pro něž platí:

$$V_1 = 2Y_1 \quad M_1 = X_1 h \quad (4.1)$$

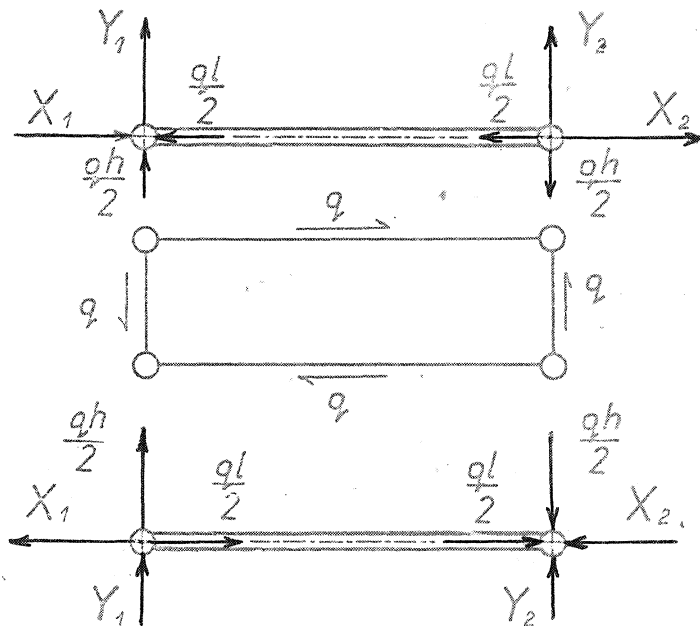
Z podmínek rovnováhy pro uvolněné pásnice dostaneme

$$\begin{aligned} X_2 &= Ql - X_1 \\ Y_2 &= -Y_1 = \frac{1}{2} Qh \end{aligned} \quad (4.2)$$

Deformace nyní vypočteme pomocí Castiglianovy věty. Nejprve určíme komplementární energii napjatosti. V dolní pásnici působí tahová síla $P = X_1 - \frac{1}{2} Ql$. Příslušná komplementární energie napjatosti je *)

*) Proti skriptům vydaným k první části semináře jsme změnili označení energie napjatosti.

$$W_1^* = \frac{P^2}{2ES_p} = \frac{1}{2ES_p} \left(X_1 - \frac{1}{2} ql \right)^2 \quad (4.3)$$



Obn. 5

Stejná je i energie napjatosti v horní pásnici, v níž působí síla $-P$.
Ve výplni

$$W_2^* = \frac{1}{2} \iiint \tau \gamma \, dx \, dy \, dz = \frac{\tau^2}{2G} S_v l \quad (4.4)$$

Zde S_v značí průřez výplně, γ zkos (poměrné posunutí). Je-li tloušťka výplně t , bude

$$\tau = \frac{q}{t} = -\frac{2Y_1}{ht} = -\frac{2Y_1}{S_{vr}} \quad (4.5)$$

takže

$$W_2^* = \frac{2Y_1^2 l}{GS_v} \quad (4.6)$$

Komplementární energie v celém nosníku je pak

$$W^* = 2W_1^* + W_2^* = \frac{\ell}{ES_n} \left(X_1 + \frac{\ell}{h} Y_1 \right)^2 + \frac{2Y_1^2 \ell}{GS_v} \quad (4.7)$$

Poněvadž k vzrůstu energie W^* přispívají při deformaci zároveň dvě síly X_1 a dvě síly Y_1 , bude deformace dána derivací poloviny energie napjatosti podle příslušné síly. Tedy

$$u_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial W^*}{\partial X_1} = \frac{\ell}{ES_n} \left(X_1 + \frac{\ell}{h} Y_1 \right)$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial W^*}{\partial Y_1} = \frac{\ell}{ES_n} \frac{\ell}{h} \left(X_1 + \frac{\ell}{h} Y_1 \right) + \frac{2\ell}{GS_v} Y_1 \quad (4.8)$$

Tyto rovnice lze napsat pomocí matic takto:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{ES_n} & \frac{\ell^2}{ES_n h} \\ \frac{\ell^2}{ES_n h} & \left(\frac{\ell^3}{ES_n h^2} + \frac{2\ell}{GS_v} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Inverzí matice druhého řádu a úpravou dostaneme řešení

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{ES_n}{\ell} + \frac{GS_v \ell}{2h^2} \right) & -\frac{GS_v}{2h} \\ -\frac{GS_v}{2h} & \frac{GS_v}{2\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Přehlednější vztah dostaneme, rozdělíme-li čtvercovou matici v poslední rovnici na dvě matice:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \left(\frac{ES_n}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{GS_v}{2\ell h^2} \begin{bmatrix} \ell^2 & -2h \\ -2h & h^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Ze Schwedlerovy věty $M_2 - M_1 = V_1 \ell$, $V_1 = V_2$, takže s použitím (4.1) $-X_2 h - X_1 h = 2Y_1 \ell$, $Y_2 = -Y_1$. Bude proto

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \frac{\ell}{h} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Týž vztah plyne i z podmínek rovnováhy celého uvolněného nosníku. Dosazením (4.11) do (4.12) vyjde

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{ES_h}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{GS_w}{2\ell h^2} \begin{bmatrix} \ell^2 & -\ell h \\ +\ell h & -h^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Rovnice (4.11) a (4.13) nyní postačí k sestavení matice tuhosti. Ve vztahu

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & | & K_{12} \\ \hline K_{21} & | & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

známe nyní K_{11} - to je součet matic v oblé závorce (4.11) - a K_{21} - součet matic v oblé závorce (4.13). Dále platí, že $K_{12} = K_{21}^T$, neboť matice tuhosti je souměrná. Přihlédneme-li k souměrnosti nosníku a ke smyslu působících sil, snadno zjistíme, že matice K_{22} se liší od K_{11} jen znaménky u členů na vedlejší diagonále. Celkem tedy bude

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{ES_h}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{GS_w}{2\ell h^2} \begin{bmatrix} \ell^2 & -\ell h & | & \ell^2 & \ell h \\ -\ell h & h^2 & | & -\ell h & -h^2 \\ \hline \ell^2 & -\ell h & | & \ell^2 & \ell h \\ \ell h & -h^2 & | & \ell h & h^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Matice tuhosti je zde složena ze dvou matic; první vystihuje "tuhost" přírub, druhá výplně.

Sestavení matice tuhosti je v tomto případě zcela obdobné jako u obyčejného nosníku. Zakládá se však na některých zjednodušujících předpokladech o vlastnostech pásnic a výplně a o způsobu přenosu sil mezi nimi. Je jasné, že užitečnost výpočtu závisí na tom, jaká zjednodušení jsme přijali pro základní element. U sendvičového nosníku jsme např. neuvažovali ohyb pásnic a vzájemné působení pásnic a výplně jsme soustředili do uzlových bodů. Kdyby se ve skutečnosti přenášel silový tok z výplně do pásnic spojitě, vyšla by matice tuhosti poněkud složitější. Vystačili bychom však i s rovnicí (4.15), kdybychom rozdělili daný nosník na větší počet elementů. Připomeňme poznatky z první části semináře, jež se týkaly přibližného řešení spojitě zatížených nosníků.

5. OBECNÁ PROSTOROVÁ RÁMOVÁ KONSTRUKCE

Prvky této konstrukce budou nosníky namáhané dvouosým ohybem, tahem či tlakem a krutem. Předpokládáme, že jde o volný (rovnoměrný) krut, který sám o sobě nevyvolá žádná normální napětí. Lokální soustavu souřadnic volíme tak, aby osa \bar{x} spadala do střednice nosníku a osy \bar{y} , \bar{z} do hlavních os průřezu nosníku v rovině $\bar{x} = 0$. Nosník má konstantní průřez. Na jeho každém konci budeme mít tyto neznámé složky posuvů:

- | | | | |
|-----|----------------------------------|-------|-------------|
| (1) | posuv ve směru osy \bar{x} | | \bar{u} |
| (2) | posuv ve směru osy \bar{y} | | \bar{v} |
| (3) | posuv ve směru osy \bar{z} | | \bar{w} |
| (4) | úhel otočení kolem osy \bar{x} | | \bar{v}_x |
| (5) | úhel otočení kolem osy \bar{y} | | \bar{v}_y |
| (6) | úhel otočení kolem osy \bar{z} | | \bar{v}_z |

Tyto veličiny jsou kladné, směřují-li jejich vektory ve směru kladných os souřadnic. Používáme přitom důsledně pravotočivého systému, takže např. úhel \bar{v}_x působí kroucení nosníku a je kladný, tvoří-li smysl otočení s vektorem ve směru osy \bar{x} pravotočivý šroub.

V úloze 3 jsme se mohli přesvědčit o tom, jak je výhodné, označíme-li složky vektorů posuvů a sil pořadovými čísly. Platí to zejména o velkých soustavách. Pořadová čísla mají podobný význam jako směrovací čísla na poště, usnadňují rychlou orientaci a správné skládání matic jednotlivých elementů do výsledné matice. Označíme proto posuvy v uzlu či styčnicku 1 čísly 1 až 6 a pro všechny druhy posuvů ponecháme znak u , takže vektor posuvů v prvním uzlu bude

$$\delta_1 = \{ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \}^T = \{ u_1 \ v_1 \ w_1 \ v_{x1} \ v_{y1} \ v_{z1} \}^T$$

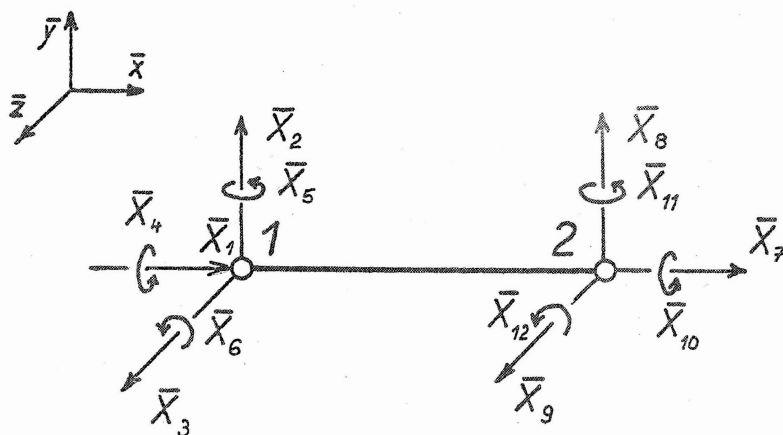
Tak např. u_3 značí posuv w_1 , u_5 značí úhel v_{y1} . Obecně v i -tém uzlu zavedeme pořadová čísla posuvů $(6i - 5)$ až $6i$:

$$\delta_i = \{ u_{6i-5} \ u_{6i-4} \ \dots \ u_{6i} \}^T \quad (5.1)$$

Složka u_{15} pak značí posuv w_3 třetího uzlu, složka u_{17} značí úhel v_{y13} třináctého uzlu. Podobně označíme i síly:

$$X_i = \{ X_{6i-5} \ X_{6i-4} \ X_{6i-3} \ \dots \ X_{6i} \}^T \quad (5.2)$$

Složka X_{15} tedy značí sílu působící ve třetím uzlu ve směru osy Z , složka X_{77} značí silovou dvojici, která působí ve třináctém uzlu kolem osy y . Pokud budou tyto veličiny vztaženy k lokálním souřadnicím, budou označeny pruhem. Síly působící na element 1 - 2 jsou zakresleny na obr. 6.



Obr. 6

Obdobně by bylo možné zakreslit i posuvy. Poněvadž jednomu prvku přísluší dva uzly a v každém z nich je šest neznámých složek posuvů, popř. sil, bude elementární matice tuhosti dvanáctého řádu. Pro větší přehlednost ji rozdělíme na čtyři submatice šestého řádu:

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_6 \\ \hline \bar{X}_7 \\ \vdots \\ \bar{X}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \hline \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_6 \\ \hline \bar{u}_7 \\ \vdots \\ \bar{u}_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

Zavedeme ještě zkrácené označení

$$\begin{aligned} \beta_{\bar{y}} &= \frac{EJ_{\bar{y}}}{l^3} & \beta_{\bar{z}} &= \frac{EJ_{\bar{z}}}{l^3} \\ \alpha &= \frac{ES}{l} & \gamma &= \frac{GJ_k}{l} \end{aligned} \quad (5.4)$$

a dostaneme tyto submatice:

$$\bar{K}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\beta_{\bar{z}} & 0 & 0 & 0 & 6\beta_{\bar{z}}l \\ 0 & 0 & 12\beta_{\bar{y}} & 0 & -6\beta_{\bar{y}}l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\beta_{\bar{y}}l & 0 & 4\beta_{\bar{y}}l^2 & 0 \\ 0 & 6\beta_{\bar{z}}l & 0 & 0 & 0 & 4\beta_{\bar{z}}l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\bar{K}_{12} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\beta_{\bar{z}} & 0 & 0 & 0 & 6\beta_{\bar{z}}l \\ 0 & 0 & -12\beta_{\bar{y}} & 0 & -6\beta_{\bar{y}}l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\beta_{\bar{y}}l & 0 & 2\beta_{\bar{y}}l^2 & 0 \\ 0 & -6\beta_{\bar{z}}l & 0 & 0 & 0 & 2\beta_{\bar{z}}l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\bar{K}_{21} = \bar{K}_{12}^T$$

$$\bar{K}_{22} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\beta_{\bar{z}} & 0 & 0 & 0 & -6\beta_{\bar{z}}l \\ 0 & 0 & 12\beta_{\bar{y}} & 0 & 6\beta_{\bar{y}}l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\beta_{\bar{y}}l & 0 & 4\beta_{\bar{y}}l^2 & 0 \\ 0 & -6\beta_{\bar{z}}l & 0 & 0 & 0 & 4\beta_{\bar{z}}l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Potřebujeme-li převést tuto matici do globálních souřadnic, použijeme k tomu transformační matici T , která je rovněž dvanáctého řádu. Rozdělíme ji na šestnáct submatic třetího řádu, z nichž jsou nenulové jen submatice na hlavní diagonále:

$$T = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} \\ \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} \\ \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Zde značí

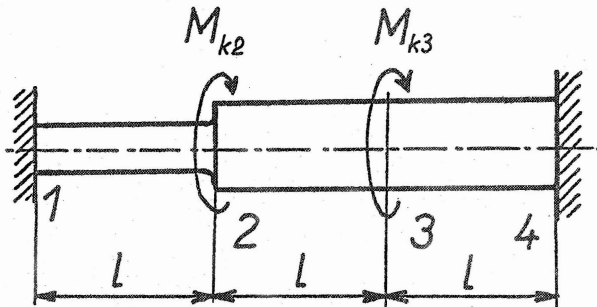
$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{x}} &= \cos(x, \bar{x}) & \mu_{\bar{x}} &= \cos(y, \bar{x}) & \nu_{\bar{x}} &= \cos(z, \bar{x}) \\ \lambda_{\bar{y}} &= \cos(x, \bar{y}) & \mu_{\bar{y}} &= \cos(y, \bar{y}) & \nu_{\bar{y}} &= \cos(z, \bar{y}) \\ \lambda_{\bar{z}} &= \cos(x, \bar{z}) & \mu_{\bar{z}} &= \cos(y, \bar{z}) & \nu_{\bar{z}} &= \cos(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

Odvození transformační matice bylo vysvětleno v první části semináře a je také zřejmé z úlohy 6. Pro transformaci platí vztahy:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= T X & \bar{u} &= T u \\ X &= T^T \bar{X} & u &= T^T \bar{u} \\ K &= T^T \bar{K} T \end{aligned} \quad (5.7)$$

Provedení těchto transformací ponecháme počítači.

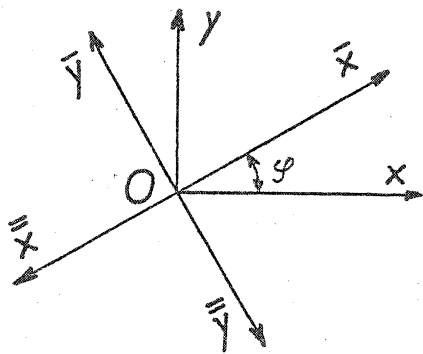
Úloha 4. Osazený hřídel, jehož průměry jsou v poměru $\sqrt[4]{2} : 1$ (tj. asi 119:100), je na obou koncích vetknutý a zatížen dvěma stejnými krouticími momenty podle obr. 7. Vypočtete úhly otočení průřezů 2 a 3.



Obr. 7

Úloha 5. Odvoďte napěťovou matici pro nosník ramáhaný rovinným ohybem a krutem.

Úloha 6. Pro síly \bar{X} , \bar{Y} působící v počátku lokální soustavy souřadnic a pro příslušné posuvy \bar{u} , \bar{v} platí rovnice

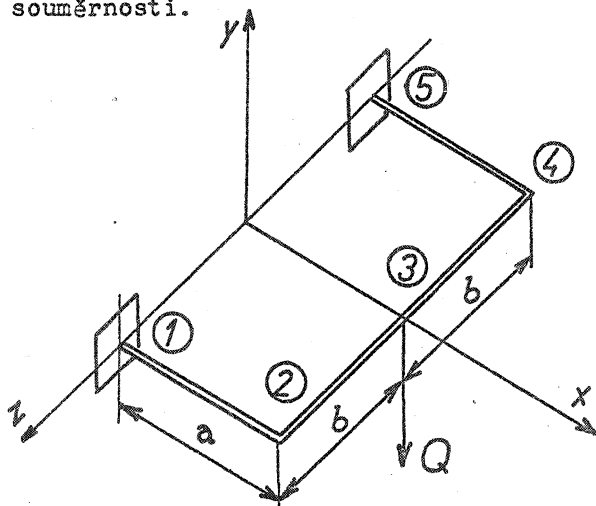


$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix}$$

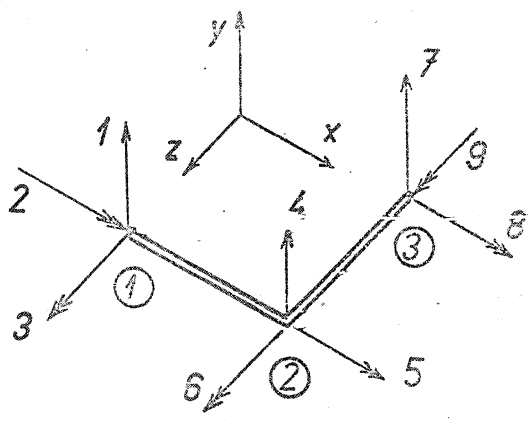
Transformujte matici tuhosti nejprve do os x , y a pak do os \bar{x} , \bar{y} vzniklých změnou smyslu os v původním systému, souřadnic (obr. 8). Jak by se změnila matice tuhosti, kdyby se změnil smysl jen u jedné osy (např. osa \bar{y} by přešla do osy \bar{y} , osa \bar{x} by se nezměnila)?

Obr. 8

Úloha 7. Určete průhyb působíště síly Q u balkónové konstrukce podle obr. 9. Ohybová i torzní tuhost všech částí je táž. Posuvy, popř. síly, označte průběžnými pořadovými čísly, jež jsou pro polovinu konstrukce zakreslena na obr. 10. Jednoduchá šipka značí posuv, popř. sílu, v užším smyslu slova, dvojitá šipka značí úhel, popř. silovou dvojici. Při řešení využijte souměrnosti.



Obr. 9



Obr. 10

Úloha 8. Jaké kontrolní vztahy musí platit pro elementární matice tuhosti $K_{(1-2)}$ a $K_{(2-3)}$ z úlohy 7? Návod: hledané vztahy pro prvky matice tuhosti vyplynou z podmínek rovnováhy elementu.

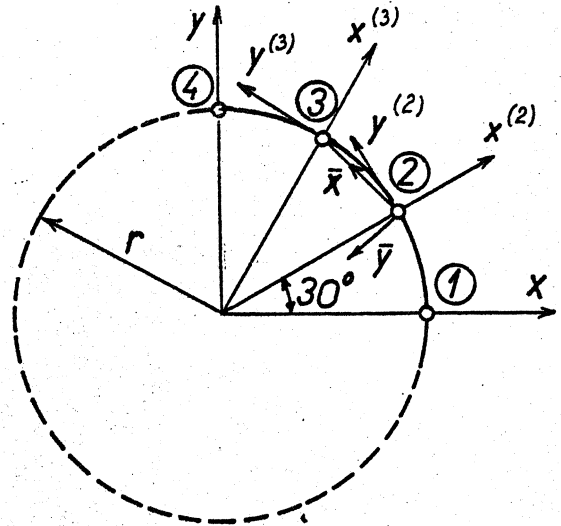
Úloha 9. Odvoďte matici tuhosti $K_{(2-3)}$ v úloze 7 pomocí transformační matice, znáte-li $K_{(1-2)}$.

6. SOUŘADNICOVÉ OSY SPJATÉ S UZLY

Budeme jim krátce říkat "uzlové souřadnice". Používáme je jen ve zvláštních případech. Kdybychom např. vyšetřovali deformace a napjatost volného rotujícího prstence, mohli bychom jej přibližně nahradit soustavou relativně krátkých přímých prutů podle obr. 11.

Pruty by přenášely pouze tah, nikoli ohyb. Tím bychom přibližně vystihli jednoosou napjatost ve skutečném prstenci. Je zřejmé, že pro danou soustavu je význačný radiální a tangenciální směr, který však není typický ani pro lokální, ani pro globální soustavu souřadnic.

Zavedením uzlových (nodálních) souřadnic se výpočet prutové soustavy podle obr. 11 zjednoduší obdobně, jako když pro rotačně souměrné případy zavedeme polární souřadnice místo souřadnic kartézských. Uzlové souřadnice $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ platí pro uzel ① a jsou zvoleny v radiálním a tangenciálním směru. Uzlové souřadnice jsou tedy v každém uzlu jiné. Pro element ② - ③ jsou zakresleny též lokální souřadnice \bar{x} , \bar{y} .



Obr. 11

Pro naši konstrukci je typické, že tangenciální posuvy a tangenciální vnější síly jsou ve všech uzlech nulové. To lze - jak ještě uvidíme - snadno vyjádřit v uzlových souřadnicích, kdežto v globálních souřadnicích by to bylo mnohem obtížnější.

Elementární matici \bar{K} definujeme ovšem v lokálních souřadnicích \bar{x} , \bar{y} , které jsou pro každý prvek jiné. Tato matice bude čtvrtého řádu, neboť v každém uzlu máme dvě složky posuvu. Pak budeme matici transformovat do globálních souřadnic. Bude jako obvykle platit, že

$$\bar{X} = T X \quad \bar{u} = T u \quad (6.1)$$

Z rovnice $\bar{X} = \bar{K} \bar{u}$ vyjde $T X = \bar{K} T u$ a po vynásobení maticí T^T zleva

$$X = T^T \bar{K} T u \quad (6.2)$$

Transformační matice je přitom čtvrtého řádu. Lze ji rozdělit na submatice druhého řádu:

$$T = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & \Lambda \end{array} \right] \quad (6.3)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} \\ \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Zde

$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{x}} &= \cos(x, \bar{x}) & \mu_{\bar{x}} &= \cos(y, \bar{x}) \\ \lambda_{\bar{y}} &= \cos(x, \bar{y}) & \mu_{\bar{y}} &= \cos(y, \bar{y}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Symbol (x, \bar{x}) značí úhel, který svírá osa x s osou \bar{x} .

Obdobně můžeme řešit i přechod ze soustavy uzlových souřadnic ke globální soustavě. Transformační matici označíme H , abychom ji rozlišili od matice T . Bude

$$H = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda^{(i)} & 0 \\ \hline 0 & \Lambda^{(i+1)} \end{array} \right] \quad (6.6)$$

$$\Lambda^{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_x^{(i)} & \mu_x^{(i)} \\ \lambda_y^{(i)} & \mu_y^{(i)} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Vektor sil v uzlových souřadnicích např. pro element ② - ③ bude

$$X^{(i)} = X^{(2)} = \{ X^{(2)} \ Y^{(2)} \ X^{(3)} \ Y^{(3)} \}^T$$

Obdobný vztah bude platit i pro vektor posuvů.

Pak

$$X^{(i)} = H X \quad u^{(i)} = H u \quad (6.8)$$

Do rovnice (6.2) dosadíme z (6.8):

$$\begin{aligned} H^T X^{(i)} &= T^T \bar{K} T H^T u^{(i)} \\ X^{(i)} &= H T^T \bar{K} T H^T u^{(i)} \end{aligned}$$

čili

$$X^{(i)} = K u^{(i)} \quad (6.9)$$

kde

$$K = H(T^T \bar{K} T) H^T = H K H^T \quad (6.10)$$

Při těchto transformacích je třeba dbát, aby osy souřadnic tvořily důsledně pravotočivý systém; např. na obr. 11 je třeba si představit, že osy z , \bar{z} , popř. $z^{(i)}$, směřují všechny před nákresnu.

V našem případě budou matice K u všech elementů stejné, je tedy lhostejné, s jakou maticí \bar{K} , popř. K , provedeme transformaci (6.10). Začneme třeba s elementem ② - ③, pro který

$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{z}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \mu_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \lambda_{\bar{y}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \mu_{\bar{y}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

S označením $\bar{K} = ES/\ell$ vyjde pro vektor $u = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,

$$K = \frac{\bar{K}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Dále vyjde

$$\Lambda^{(2)} = \begin{bmatrix} \lambda_x^{(2)} & \mu_x^{(2)} \\ \lambda_y^{(2)} & \mu_y^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{(3)} = \begin{bmatrix} \lambda_x^{(3)} & \mu_x^{(3)} \\ \lambda_y^{(3)} & \mu_y^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

takže

$$H = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda^{(2)} & 0 \\ \hline 0 & \Lambda^{(3)} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{array} \right] \quad (6.12)$$

Vynásobením (6.11) maticí H (6.12) zleva a maticí H^T zprava vyjde podle (6.10)

$$\mathcal{K} = \frac{k}{8} \begin{bmatrix} 4 - 2\sqrt{3} & -2 & 4 - 2\sqrt{3} & 2 \\ -2 & 4 + 2\sqrt{3} & -2 & -4 - 2\sqrt{3} \\ 4 - 2\sqrt{3} & -2 & 4 - 2\sqrt{3} & 2 \\ 2 & -4 - 2\sqrt{3} & 2 & 4 + 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Tato matice je singulární a vztahuje se k vektoru

$$u^{(1)} = \{ u^{(2)} \quad v^{(2)} \quad u^{(3)} \quad v^{(3)} \}$$

Poněvadž $v^{(2)} = 0$, $v^{(3)} = 0$, můžeme druhý a čtvrtý sloupec a druhý a čtvrtý řádek škrtnout. Pak

$$\begin{Bmatrix} \chi^{(2)} \\ \chi^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{k}{8} \begin{bmatrix} 4 - 2\sqrt{3} & 4 - 2\sqrt{3} \\ 4 - 2\sqrt{3} & 4 - 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

Překvapí nás, že zmenšená matice \mathcal{K} v rovnici (6.14) je stále ještě singulární. Je to tím, že jsme předepsáním nulových obvodových posuvů ještě nevyloučili pohyb úsečky ② - ③. Může se pohybovat koncovými body po radiálních paprscích. Jednotlivé body na této úsečce by konaly eliptický pohyb. Předepíšeme proto ještě podmínku $u^{(2)} = u^{(3)}$ (radiální posuvy uzlů jsou stejné) a dostaneme

$$\begin{Bmatrix} \chi^{(2)} \\ \chi^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix} \{ u^{(2)} \} \quad (6.15)$$

odkud

$$\chi^{(2)} = \chi^{(3)} = \frac{k}{2} (2 - \sqrt{3}) u^{(2)} \quad (6.16)$$

Odstředivou sílu působící na část věnce o průřezu S a měrné hmotnosti ρ vymezenou dvěma radiálními řezy svírajícími úhel 30° určíme takto:

$$F = \omega^2 r S \frac{\pi}{6} r \rho = \frac{\pi}{6} S \rho \omega^2 r^2 \quad (6.17)$$

Rozdělíme ji stejným dílem do obou uzlů; dostaneme

$$\chi^{(2)} = \chi^{(3)} = \frac{\pi}{12} S \rho \omega^2 r^2 \quad (6.18)$$

Potom z rovnice (6.16)

$$u^{(2)} = \frac{\pi}{6(2-\sqrt{3})} \frac{1}{l} S \varrho \omega^2 r^2 = \frac{\pi}{6(2-\sqrt{3})} \frac{2r \sin 15^\circ}{ES} S \varrho \omega^2 r^2 =$$

$$= 1,0115 \frac{\varrho \omega^2 r^3}{E} \quad (6.19)$$

Chyba výpočtu radiálního posuvu tedy činí pouhých 1,15 %. Při výpočtu napětí můžeme postupovat buď tak, že určíme nejprve prodloužení

$$\Delta l_{(2-3)} = 2 u^{(2)} \sin 15^\circ = 0,523 \frac{\varrho \omega^2 r^3}{E} \quad (6.20)$$

a odtud sílu

$$P_{(2-3)} = \frac{ES}{l} \Delta l_{(2-3)} = 1,01 \varrho \omega^2 r^2 S \quad (6.21)$$

nebo se můžeme vrátit k lokálním souřadnicím a použít napěťové matice. Tento druhý způsob bychom použili jen při řešení úlohy na počítači. Pro ruční výpočty se nehodí.

Na uvedeném příkladu jsme poznali, že křivé pruty lze přibližně nahradit soustavou prutů přímých. Platí to i o prutech ohybově namáhaných, které lze nahradit soustavou relativně krátkých přímých nosníků. Mohli bychom ovšem odvodit matice tuhosti i pro zakřivené pruty - elementy, nebudeme se tím však zabývat.

7. ELIMINACE VOLNÝCH UZLŮ

Jako "volné" budeme označovat uzly, v nichž není předepsán ani posuv, ani zatížení. Zpravidla nás posuvy těchto uzlů v první fázi řešení nezajímají, takže je z řešení eliminujeme. Tím dosáhneme zmenšení řádu matice tuhosti, pro kterou je třeba najít inverzi. To může být u velkých soustav velmi výhodné.

Volné uzly označíme indexem β , ostatní pak indexem α . Seřadíme je ve vektoru posuvů za sebou (je-li třeba, přeskupíme pořadí prvků ve vektorech i v matici); budeme tedy mít

$$\left\{ \begin{array}{c} X_\alpha \\ X_\beta = 0 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ \hline K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_\alpha \\ u_\beta \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

Tuto rovnici rozepíšeme na dvě; z druhé vyjde

$$u_{\beta} = -K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha} u_{\alpha} \quad (7.2)$$

a z prvé

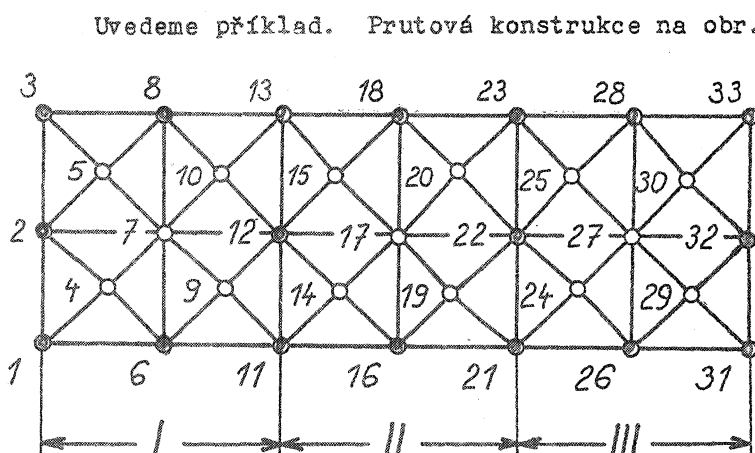
$$X_{\alpha} = (K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta} K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha}) u_{\alpha} \quad (7.3)$$

Přítom ovšem $K_{\beta\alpha} = K_{\alpha\beta}^T$. Použijeme-li v rovnici (7.3) označení

$$K^* = K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta} K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha} \quad (7.4)$$

dostaneme základní rovnici bez volných uzlů:

$$X_{\alpha} = K^* u_{\alpha} \quad (7.5)$$



Obr. 12

je složena ze tří stejných substruktur I až III, přičemž v každé z nich je pět vnitřních uzlů volných. Např. v substruktuře I jsou to uzly 4, 5, 7, 9 a 10. Nejsou společné ani několika substrukturám, ani v nich nejsou předepsány síly či posuvy. Proto jsou v počáteční fázi řešení tyto uzly "zbytečné" a můžeme je eliminovat. Výsledná matice tuhosti

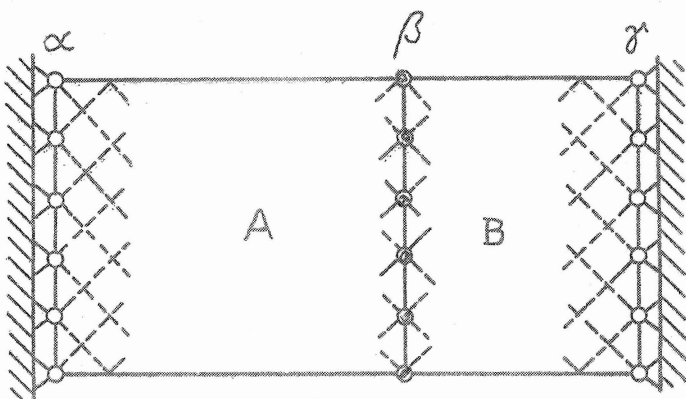
by měla velikost 66 x 66. Vynecháme-li však volné uzly (k tomu je třeba invertovat matici $K_{\beta\beta}$ o velikosti 10 x 10), bude mít výsledná matice tuhosti K^* pro celou konstrukci velikost jen 36 x 36. Uzly 12 a 22 ovšem nemůžeme eliminovat, poněvadž bez znalosti posuvů v těchto uzlech bychom nemohli vyjádřit souvislost sousedních substruktur, nemohli bychom adicí složit příslušné matice tuhosti.

Poznamenejme, že prvky matice K^* jsou odvozeny ze všech elementárních matic, takže je v nich zahrnut i vliv volných uzlů, což vyjadřuje druhý člen v rovnici (7.3). Nejde tedy o žádnou přibližnost; řešení je právě tak přesné, jako kdybychom vyšli z úplné matice tuhosti K (neuvažujeme-li ovšem možný

rozdíl v numerických chybách vlivem zaokrouhlování). Záleží-li nám i na posuvech volných uzlů, vypočteme je podle (7.2). Eliminací volných uzlů jeme tedy nic neztratili.

8. DĚLENÍ VELKÉ KONSTRUKCE

Je-li konstrukce příliš velká, takže bychom ani nemohli invertovat matici tuhosti na počítači, který máme k dispozici, můžeme konstrukci rozdělit na dvě části (popř. i na více částí). Na obr. 13 je schematicky zakreslena



Obr. 13

takové konstrukce. Uzly α a γ jsou zakotveny na rámu, jsou v nich tedy nulové posuvy. V celkové matici tuhosti vyneseme sloupce a řádky příslušné těmto uzlům, a tím vyhovíme podmínkám uložení konstrukce. Uzly β spojují části A a B, s nimi tedy musíme počítat. Posuvy u_{β} jsou společné oběma substrukturám. Vnitřní uzly s posuvy u_i^A a u_i^B nejsou na obr. 13 kresleny. Kdyby to

byly volné uzly, mohli bychom je eliminovat metodou, kterou jsme ukázali v předchozí kapitole. Obecně však na tyto uzly působí vnější síly X_A , popř. X_B . Musíme proto postupovat jinak. Nejprve si myslíme, že uzly β jsou pevně vetknuté, tj. ${}^1u_{\beta} = 0$. Levým horním indexem vyznačíme první fázi řešení. Pro substrukturu A dostaneme

$$\begin{Bmatrix} X_A \\ R_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A \\ K_{21}^A & K_{22}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^1u_i^A \\ {}^1u_{\beta}=0 \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

V této rovnici značí X_A vnější síly, R_A reakce v uzlech β . Obdobné rovnice platí i o části B. Tyto rovnice rozepíšeme a vypočteme

$$\begin{aligned} \{ {}^1u_i^A \} &= [K_{11}^A]^{-1} \{ X_A \} \\ \{ R_A \} &= [K_{21}^A] [K_{11}^A]^{-1} \{ X_A \} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Další takové dvě rovnice vyjdou pro substrukturu B. Stačí jen zaměnit index A za B. Rovnice (8.2) tedy představují posuvy vnitřních uzlů a reakce ve vetknutých hraničních uzlech β . Ty však ve skutečnosti nejsou vetknuté. Musíme je proto uvolnit. K tomu využijeme principu superpozice. K řešení (8.2) budeme superponovat posuvy v celé konstrukci, jež nebude zatížena žádnými vnějšími silami s výjimkou sil $X_\rho^A + X_\rho^B = F_\rho = -R_A - R_B$ v uzlech β . Bude tedy v této druhé fázi řešení $X_A = 0$, $X_B = 0$, takže vnitřní uzly se stanou volnými. Rovnice (8.1) bude mít nyní tvar

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ X_\beta^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A \\ K_{21}^A & K_{22}^A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^2u_i^A \\ {}^2u_\beta \end{Bmatrix} \quad (8.3)$$

Rozepsáním vyjde z první části rovnice

$$\begin{Bmatrix} {}^2u_i^A \end{Bmatrix} = - [K_{11}^A]^{-1} [K_{12}^A] \begin{Bmatrix} {}^2u_\beta \end{Bmatrix} \quad (8.4)$$

a dosazením do druhé části

$$\begin{Bmatrix} X_\beta^A \end{Bmatrix} = ([K_{22}^A] - [K_{21}^A][K_{11}^A]^{-1}[K_{12}^A]) \begin{Bmatrix} {}^2u_\beta \end{Bmatrix} \quad (8.5)$$

Poslední rovnice má tvar

$$\begin{Bmatrix} X_\beta^A \end{Bmatrix} = [K_A^*] \begin{Bmatrix} {}^2u_\beta \end{Bmatrix} \quad (8.6)$$

kde (stejně jako v kapitole 7)

$$[K_A^*] = [K_{22}^A] - [K_{21}^A][K_{11}^A]^{-1}[K_{12}^A]$$

Obdobně dostaneme

$$\begin{Bmatrix} X_\beta^B \end{Bmatrix} = [K_B^*] \begin{Bmatrix} {}^2u_\beta \end{Bmatrix} \quad (8.7)$$

Adicí matic tuhosti K_A^* a K_B^* a sloučením sil v uzlech β dostaneme

$$\begin{Bmatrix} F_\beta \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} R_A \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} R_B \end{Bmatrix} = [K^*] \begin{Bmatrix} {}^2u_\beta \end{Bmatrix} \quad (8.8)$$

Odtud určíme ${}^2u_\beta$ a z rovnice (8.4) též ${}^2u_i^A$. Výsledné posuvy pak jsou

$$\begin{aligned}
u_i^A &= {}^1u_i^A + {}^2u_i^A \\
u_i^B &= {}^1u_i^B + {}^2u_i^B \\
u_\beta &= {}^2u_\beta
\end{aligned}
\tag{8.9}$$

Využili jsme tedy principu superpozice. Jednou jsme řešili konstrukci s vnějšími silami a s vetknutou hranicí mezi částmi A, B ($u_\beta = 0$). Podruhé jsme vynechali vnější síly a uvolnili (relaxovali) uzly β připojením záporně vzatých reakcí v těchto uzlech z předchozího řešení. V prvním případě se řeší každá část konstrukce samostatně, v druhém případě lze eliminovat vnitřní uzly, neboť vynecháním vnějších sil se stanou volnými. Lze je proto eliminovat metodou vyloženou v kapitole 7. Výsledné řešení je pak dáno součtem posuvů z obou dílčích úloh. Při těchto dílčích úlohách vystačíme s inverzí podstatně menších matic, než kdybychom řešili konstrukci vcelku.

9. PŘESKUPOVÁNÍ MATIC. INCIDENČNÍ MATICE

Metody, které jsme právě probrali, často vyžadují, aby prvky ve vektorech byly seřazeny určitým způsobem (např. zvlášť pro vnitřní a zvlášť pro okrajové uzly apod.). Někdy jsme proto nuceni pořadí prvků ve vektorech změnit. Tomu pak ovšem odpovídá i změněné uspořádání prvků v matici tuhosti a ve vektoru sil. U matic malého řádu je takové přeskupení snadné, ale u velkých matic je taková operace málo přehledná. K zapsání potřebného algoritmu můžeme použít maticové transformace pomocí tzv. incidenční matice. Daný vektor posuvů označíme u , přeskupený vektor \tilde{u} . Mezi nimi bude lineární vztah

$$\tilde{u} = N u \tag{9.1}$$

Zde N značí čtvercovou incidenční matici. Má tu vlastnost, že určuje prvkům ze starého vektoru místo ve vektoru novém. Potřebujeme-li přesunout např. prvek u_i z i -tého řádku vektoru u na místo \tilde{u}_k , tedy do k -tého řádku nového vektoru \tilde{u} , musí mít incidenční matice zřejmě v k -tém řádku a i -tém sloupci jedničku, kdežto ostatní prvky v témže řádku jsou nulové. Uvedeme příklad pro přeskupení pořadí prvků ve vektoru:

$$\{\tilde{u}\} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \tag{9.2}$$

Obdobně jako pořadí posuvů se mění i pořadí sil:

$$\tilde{X} = NX \quad (9.3)$$

Jak se mění matice tuhostí K ? Dosaďme-li z rovnic (9.1) a (9.3) do rovnice $X = Ku$, vyjde

$$\begin{aligned} N^{-1}\tilde{X} &= KN^{-1}\tilde{u} \\ \tilde{X} &= NKN^{-1}\tilde{u} \end{aligned}$$

takže

$$\tilde{K} = NKN^{-1} \quad (9.4)$$

Provedeme-li tuto transformaci s maticí N podle (9.2), vyjde

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} & k_{32} & k_{31} \\ k_{43} & k_{44} & k_{42} & k_{41} \\ k_{23} & k_{24} & k_{22} & k_{21} \\ k_{13} & k_{14} & k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} = \tilde{K} \quad (9.5)$$

Jak jsme již uvedli, má incidenční matice v každém řádku jen jednu jedničku a pak už jen nuly. Inverzní matici najdeme proto velmi snadno zkusmo. Je-li např. v matici N ve třetím řádku jednička na druhém místě (tj. ve druhém sloupci), musí mít inverzní matice N^{-1} jedničku ve třetím sloupci rovněž na druhém místě (tj. ve druhém řádku). Jedině tak vznikne v součinu - tedy v jednotkové matici - jednička ve třetím řádku na třetím místě (tj. na hlavní diagonále), kdežto ostatní prvky budou v tomto řádku nulové. To však znamená, že musí platit vztah $N^{-1} = N^T$, matice N je tedy ortogonální. Proto

$$\tilde{K} = NKN^T \quad K = N^T\tilde{K}N \quad (9.6)$$

Nemusíme tedy hledat inverzní matici ve vzorci (9.4), stačí incidenční matici transponovat. Součiny matic podle (9.6) můžeme ponechat počítači.

Někdy se stává, že potřebujeme, aby se starý vektor v novém vektoru několikrát opakoval, a to pokaždé v jiném pořadí. V takovém případě je incidenční matice obdélníková. Uvedeme zase příklad:

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ \hline u_2 \\ u_1 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

Stejně bychom postupovali, kdyby se v novém vektoru opakovaly jen některé části z vektoru starého. U obdélníkové incidenční matice nelze ovšem hledat inverzi. *)

Úloha 10. Najděte incidenční matici, která z daného vektoru o pěti prvcích $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}^T$ vytvoří vektor $\{a_5, a_1, a_2, a_3, a_4\}^T$, a přesvědčte se, že vskutku $N^T N = I$.

10. ÚSPORNÝ ZPŮSOB ZAHRNUTÍ KONSTRUKČNÍCH ZMĚN DO VÝPOČTU

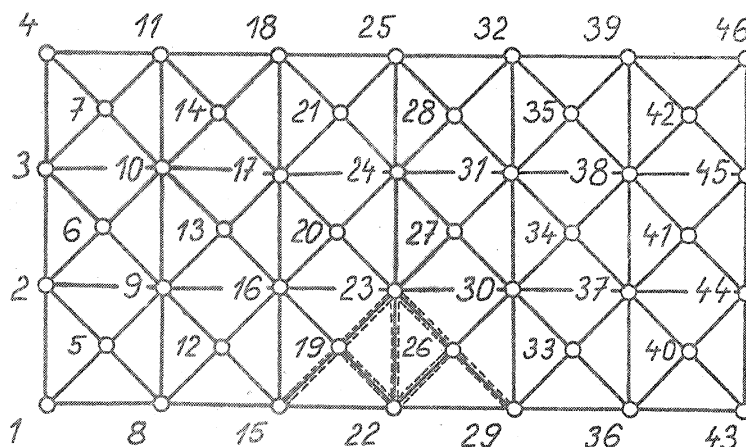
V první části semináře jsme probrali způsob opravy matice tuhosti při konstrukčních změnách využitím principu superpozice. Nyní tuto metodu formálně zdokonalíme. Postup výpočtu upravíme tak, aby se hodil i pro velké a složité konstrukce. Důležitým požadavkem je zde přehlednost, snadná algoritmizace a úspora na početních operacích, zejména při inverzi matic. Pokusíme se tedy upravit metodu tak, abychom nemusili znovu invertovat celou matici tuhosti, jak jsme to činili v první části semináře. Později uvidíme, že skutečně stačí invertovat matici podstatně menší; její velikost závisí na rozsahu konstrukčních změn.

*) Poněvadž tato matice určuje umístění prvků jedné matice v matici druhé, používá se též označení "lokalizační matice". V programech pro samočinné počítače se však této matici užívá jen zřídka, neboť zabírá příliš velké místo v paměti. Nahrazujeme ji soustavou přímých příkazů pro přemístění prvků.

Vydáme ze základních rovnic

$$X = K u \quad u = C X \quad (10.1)$$

kde K je matice tuhosti,
 $C = K^{-1}$ matice poddajnosti.



Obr. 14

Představme si třeba prutovou soustavu podle obr. 14 a předpokládejme, že se změní průřezy prutů vyznačených dvojitými čarami. Je zřejmé, že se změní jenom ty prvky matice tuhosti K , které se vztahují na uzly $i = 15, 19, 22, 23, 26$ a 29 , tj. na posuvy

$$\{u_a\} = \{u_{29} \ u_{30} \ u_{37} \ u_{36} \ u_{43} \ u_{44} \ u_{45} \ u_{46} \ u_{51} \ u_{52} \ u_{57} \ u_{15}\}^T$$

Vektor posuvů přeskupíme tak, abychom tyto posuvy měli zvlášť; základní rovnice pro původní konstrukci bude

$$\begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{aa} & c_{ab} \\ c_{ba} & c_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_a \\ X_b \end{Bmatrix} \quad (10.2)$$

K přeskupení prvků v matici poddajnosti můžeme použít incidenční matice; transformační vzorce jsou zcela obdobné ke vzorcům (9.6) odvozeným pro matici tuhosti.

Po konstrukčních změnách se mění všechny posuvy; nové posuvy označíme hvězdičkou (a stejně i nové prvky v matici poddajnosti), takže

$$\begin{Bmatrix} u_a^* \\ u_b^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{aa}^* & | & c_{ab}^* \\ \hline c_{ba}^* & | & c_{bb}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_a \\ X_b \end{Bmatrix} \quad (10.3)$$

Na druhé straně platí, že

$$\begin{Bmatrix} X_a \\ X_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & | & K_{ab} \\ \hline K_{ba} & | & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} \quad (10.4)$$

a po konstrukční změně

$$\begin{Bmatrix} X_a \\ X_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} + \Delta K & | & K_{ab} \\ \hline K_{ba} & | & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a^* \\ u_b^* \end{Bmatrix} \quad (10.5)$$

neboť v matici tuhosti se změnil jen prvky přiřazené k submatici u_a .
Rovnici (10.5) rozepíšeme na dvě:

$$\begin{aligned} X_a &= K_{aa} u_a^* + \Delta K u_a^* + K_{ab} u_b^* \\ X_b &= K_{ba} u_a^* + K_{bb} u_b^* \end{aligned} \quad (10.6)$$

Do první z těchto rovnic dosadíme $\Delta X_a = \Delta K u_a^*$ (jde jen o pomocné označení, které později opět opustíme) a dostaneme - opět v maticovém zápisu -

$$\begin{Bmatrix} X_a - \Delta X_a \\ X_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & | & K_{ab} \\ \hline K_{ba} & | & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a^* \\ u_b^* \end{Bmatrix} \quad (10.7)$$

To však je tvar velmi podobný rovnici (10.4). Srovnáme-li (10.4) s ekvivalentní rovnicí (10.7), vidíme, že

$$\begin{Bmatrix} u_a^* \\ u_b^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{aa} & | & c_{ab} \\ \hline c_{ba} & | & c_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_a - \Delta X_a \\ X_b \end{Bmatrix} \quad (10.8)$$

Nové posuvy budeme tedy znát, budeme-li umět určit ΔX_a . Určíme je pomocí téže matice poddajnosti, jakou jsme získali pro původní konstrukci.

Po roznásobení rovnice (10.8) dostaneme

$$u_a^* = C_{aa} (X_a - \Delta K u_a^*) + C_{ab} X_b \quad (10.9)$$

odkud

$$(I + C_{aa} \Delta K) u_a^* = C_{aa} X_a + C_{ab} X_b \quad (10.10)$$

Řád matice I je stejný jako řád matic C_{aa} a ΔK a je určen počtem prvků v submatici u_a . Z rovnice (10.10)

$$u_a^* = (I + C_{aa} \Delta K)^{-1} (C_{aa} X_a + C_{ab} X_b) \quad (10.11)$$

Podle (10.3) však

$$u_a^* = C_{aa}^* X_a + C_{ab}^* X_b \quad (10.12)$$

takže

$$C_{aa}^* = (I + C_{aa} \Delta K)^{-1} C_{aa} \quad (10.13)$$

$$C_{ab}^* = (C_{ba}^*)^T = (I + C_{aa} \Delta K)^{-1} C_{ab} \quad (10.14)$$

Z druhého řádku rovnice (10.8)

$$u_b^* = C_{ba} (X_a - \Delta K u_a^*) + C_{bb} X_b \quad (10.15)$$

odkud

$$\begin{aligned} u_b^* &= C_{ba} X_a - C_{ba} \Delta K (C_{aa}^* X_a + C_{ab}^* X_b) + C_{bb} X_b = \\ &= C_{ba} (I - \Delta K C_{aa}^*) X_a + (C_{bb} - C_{ba} \Delta K C_{ab}^*) X_b \end{aligned} \quad (10.16)$$

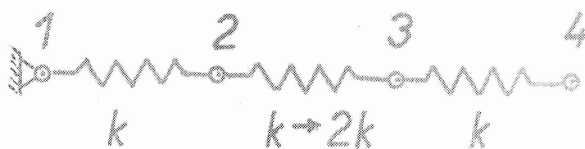
Poněvadž podle (10.3)

$$u_b^* = C_{ba}^* X_a + C_{bb}^* X_b \quad (10.17)$$

plyne srovnáním (10.16) s (10.17) jednak potvrzení rovnice (10.14) - ovšem po dosazení za C_{aa}^* , viz úlohu 11 - , jednak

$$C_{\text{eff}}^* = C_{\text{eff}} - C_{in} \Delta K C_{ao}^* \quad (10.18)$$

Rovnice (10.13), (10.14) a (10.18) umožňují sestavit celou změněnou matici poddajnosti v rovnici (10.3), a tím i výpočet změněného vektoru posuvů $u^* = \{u_a^* ; u_b^*\}^T$. Přitom jsme potřebovali invertovat matici poměrně malého řádu (řád je určen počtem prvků ve vektoru u_a) a plně jsme využili dříve již vypočtené matice poddajnosti $\hat{C} = K^{-1}$ platné pro původní konstrukci. Je lhostejné, jakým způsobem jsme předtím matici K^{-1} získali; po druhé již celkovou matici tuhosti nepotřebujeme invertovat. Tím si ušetříme numerickou práci, jež by jinak zabrala velkou část strojového času počítače.



Obr. 15

Uvedený postup ukážeme na příkladu tří pružin spojených sériově (obr. 15). Původně měly všechny tři pružiny stejnou tuhost k , platila pro ně tedy základní rovnice

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (10.19)$$

Matici tuhosti v této rovnici jsme získali adicí elementárních matic

$$K_{(1-2)} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_{(2-3)} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_{(3-4)} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a vynecháním prvního řádku a prvního sloupce, neboť $u_1 = 0$. Řešením rovnice (10.19)

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} \quad (10.20)$$

Nyní změňme tuhost druhé pružiny na dvojnásobek. To se projeví jen při posu-
vech uzlů 2 a 3. Bude tedy $u_a = \{u_2 \ u_3\}^T$ a dělená matice pod-
dajnosti bude mít podle (10.20) tvar

$$\left[\begin{array}{c|c} C_{au} & C_{ab} \\ \hline C_{au} & C_{bu} \end{array} \right] = \frac{1}{k} \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \quad (10.21)$$

Změna matice tuhosti se dotýká jen uzlů 2 a 3, takže

$$\Delta K = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

Dále vypočteme

$$\begin{aligned} I + C_{au} \Delta K &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a z rovnic (10.13), (10.14) a (10.18)

$$C_{aa}^* = \frac{1}{2k} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$C_{ab}^* = (C_{au}^*)^T = \frac{1}{2k} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$C_{bb}^* = \frac{3}{k} - \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tedy - pro změněnou konstrukci -

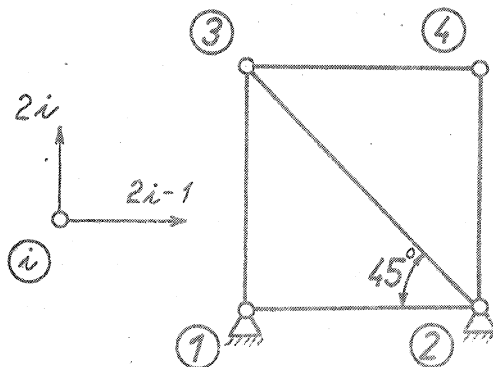
$$\begin{Bmatrix} u_2^* \\ u_3^* \\ u_4^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} \quad (10.23)$$

Tuto rovnici lze snadno zkontrolovat přímým odvozením. Zvolíme dvě z působí-
cích sil nulové a kontrolujeme správnost sloupce v matici poddajnosti, který

přísluší třetí síle. Můžeme se tak přesvědčit, že řešení (10.23) je správné. Nepotřebovali jsme k tomu znovu invertovat celou matici K^* , která by byla třetího řádu. Stačí, známe-li inverzi původní matice tuhosti K . Je samozřejmé, že v tomto jednoduchém příkladu jsme mnoho neušetřili, poněvadž inverze matice třetího řádu je snadná. U velkých a složitých konstrukcích by však vznikla podstatná úspora. Metody, které zde uvádíme, mohou se plně uplatnit teprve při řešení úloh na počítači. K procvičení látky ovšem volíme jednoduché příklady, jež můžeme bez velkých obtíží řešit jen s tužkou a papírem.

Úloha 11. Z rovnic (10.16) a (10.17) plyne, že $C_{ba}^* = C_{ba} (I - \Delta K C_{aa}^*)$, kdežto z rovnice (10.14) vychází $C_{ba}^* = [(I + C_{aa} \Delta K)^{-1} C_{ba}]^T$. Dokažte, že oba výrazy jsou totožné.

Úloha 12. Pro prutovou konstrukci na obr. 16 odvoďte matici tuhosti a vypočítejte posuvy, znáte-li složky sil působících na uzly 3 a 4. Pak proveďte změnu konstrukce připojením dalšího prutu 1-4. Všechny pruty mají též průřez S i modul pružnosti v tahu či tlaku E .



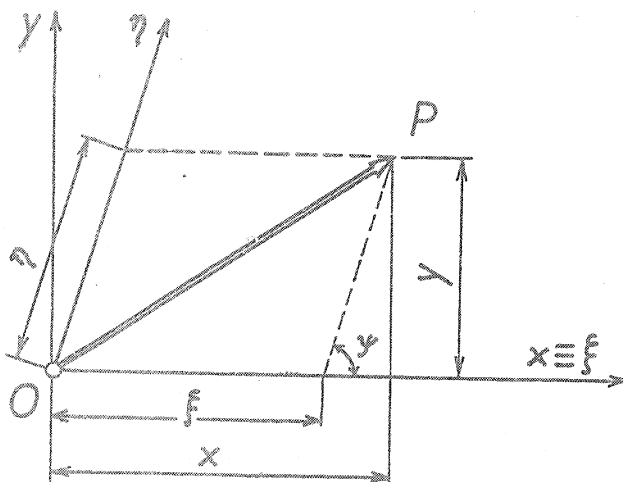
Obr. 16

11. NEORTOGONÁLNÍ TRANSFORMACE. KOSOÚHLÉ SOUŘADNICE

Až dosud jsme pracovali s pravouhlou soustavou souřadnic a s ortogonálními transformacemi, takže se libovolný daný vektor rozkládal do směrů os souřadnic vždy ve vzájemně pravouhlé složky. To přinášelo značné výhody. Transformační matice byly ortogonální, takže místo inverze bylo možné matici transponovat, a délka vektoru plynula jednoduše z Pythagorovy věty. Matice tuhosti a matice poddajnosti byly vždy souměrné a navíc pozitivně definitní. Je jisté, že se bez zvláštních důvodů těchto výhod nevzdáme. Někdy však může být vedení speciálním tvarem konstrukce k zavedení kosoúhlých souřadnic. Ptáme se, jaký to bude mít vliv na metody výpočtu, které jsme až dosud poznali.

Na obr. 17 je uvedena pravouhlá soustava souřadnic x, y a kosoúhlá soustava souřadnic ξ, η . Pravouhlé souřadnice bodu P jsou

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta \cos \psi \\ y &= \eta \sin \psi \end{aligned} \quad (11.1)$$



Obr. 17

a lze je vyjádřit touto maticovou rovnicí:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\psi \\ 0 & \sin\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (11.2)$$

Ve zkráceném zápisu

$$\{x\} = [T] \{\xi\} \quad (11.3)$$

Z rovnice (11.2) můžeme naopak vypočítat kosohlé souřadnice, známe-li pravohlé. S označením podle (11.3)

$$\{\xi\} = [T]^{-1} \{x\} \quad (11.4)$$

čili

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\cot\psi \\ 0 & \csc\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (11.5)$$

Zde jsme použili dnes již méně obvyklého označení $\csc\psi = (\sin\psi)^{-1}$. Překvapí nás, že se matice T^{-1} již nerovná transponované matici T^T , tj. transformační matice není ortogonální.

Matici T jsme odvodili pro transformaci vektoru \vec{OP} (obr. 17). Platí i pro vektory sil a posuvů:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\psi \\ 0 & \sin\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_\xi \\ Y_\eta \end{Bmatrix} \quad (11.6)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\psi \\ 0 & \sin\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\xi \\ v_\eta \end{Bmatrix}$$

Zde se pro větší názornost vracíme ke způsobu značení sil a posuvů, jež jsme používali zpočátku. Složky v kosohých souřadnicích se odlišují indexy ξ , η . Pro prut 1-2 bychom vypočetli

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & \sin\psi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \cos\psi \\ 0 & 0 & 0 & \sin\psi \end{array} \right] \begin{Bmatrix} X_{\xi 1} \\ Y_{\eta 1} \\ X_{\xi 2} \\ Y_{\eta 2} \end{Bmatrix} \quad (11.7)$$

Obecně tedy bude pro jednotlivé pruty v nějaké prutové konstrukci platit:

$$\{X\} = [T]\{X_{\xi}\} \quad (11.8)$$

$$\{u\} = [T]\{u_{\xi}\}$$

kde $[T]$ je čtvercová matice v rovnici (11.7). Dosadíme-li (11.8) do základní rovnice $X = Ku$, dostaneme

$$[T]\{X_{\xi}\} = [K][T]\{u_{\xi}\} \quad (11.9)$$

a po úpravě

$$\{X_{\xi}\} = [T]^{-1}[K][T]\{u_{\xi}\} \quad (11.9 a)$$

V kosodílných souřadnicích tedy bude matice tuhosti dána vzorcem

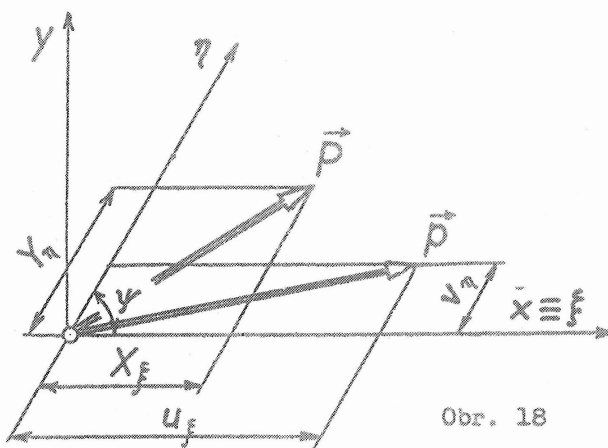
$$[K_{\xi\eta}] = [T]^{-1}[K][T] \quad (11.10)$$

Dosadíme-li sem matici tuhosti prutu, který svírá s osou x úhel φ , totiž matici

$$K = k \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

kde $k = ES/l$, $\lambda = \cos\varphi$, $\mu = \sin\varphi$, vyjde $K_{\xi\eta}$ podle (11.12). *) Zde nás čeká další překvapení: matice tuhosti není souměrná.

Položme si nyní otázku, jak bychom vypočítali deformační práci síly $\vec{P} = \{X_{\xi}, Y_{\eta}\}^T$ při posuvu působišť $\vec{r} = \{u_{\xi}, v_{\eta}\}^T$ (obr. 18).



Obr. 18

*) Viz str. 55

$$K_{xy} = k$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda\mu \cot\theta\psi & (\lambda^2 - \mu^2) \cos\psi - \lambda\mu \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} & -\lambda^2 + \lambda\mu \cot\theta\psi & -(\lambda^2 - \mu^2) \cos\psi + \lambda\mu \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} \\ \lambda\mu \frac{1}{\sin\psi} & \mu^2 + \lambda\mu \cot\theta\psi & -\lambda\mu \frac{1}{\sin\psi} & -\mu^2 - \lambda\mu \cot\theta\psi \\ -\lambda^2 + \lambda\mu \cot\theta\psi & -(\lambda^2 - \mu^2) \cos\psi + \lambda\mu \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} & \lambda^2 - \lambda\mu \cot\theta\psi & (\lambda^2 - \mu^2) \cos\psi - \lambda\mu \frac{\cos 2\psi}{\sin\psi} \\ -\lambda\mu \frac{1}{\sin\psi} & -\mu^2 - \lambda\mu \cot\theta\psi & \lambda\mu \frac{1}{\sin\psi} & \mu^2 + \lambda\mu \cot\theta\psi \end{bmatrix}$$

(11.12)

Zřejmě bude platit, že

$$A = \frac{1}{2} (X_{\xi} + Y_{\eta} \cos \psi) (u_{\xi} + v_{\eta} \cos \psi) + \frac{1}{2} (Y_{\eta} \sin \psi) (v_{\eta} \sin \psi) \quad (11.13)$$

Poněvadž se síla mění úměrně s posuvem, je její práce dána skalárním součinem poloviny síly (je to její "průměrná" velikost) a posuvu jejího působíště, tedy

$$\frac{1}{2} \vec{P} \vec{u} = \frac{1}{2} (P_x r_x + P_y r_y) \equiv \frac{1}{2} (X u + Y v)$$

což je právě rovnice (11.13). Abychom oddělili práci jednotlivých složek síly \vec{P} v kosoháhlých souřadnicích, uspořádáme rovnici (11.13) takto:

$$A = \frac{1}{2} [(u_{\xi} + v_{\eta} \cos \psi) X_{\xi} + (u_{\xi} \cos \psi + v_{\eta}) Y_{\eta}] \quad (11.14)$$

Při úpravě jsme použili identity $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$. Je zřejmé, že se v kosoháhlých souřadnicích práce A nerovná součtu

$$\frac{1}{2} (X_{\xi} u_{\xi} + Y_{\eta} v_{\eta})$$

výraz (11.14) je složitější. Rovnici (11.14) jsme odvodili elementárním způsobem, abychom získali jistotu o její správnosti. Nyní se pokusíme o totéž pomocí maticové symboliky. V pravoháhlých souřadnicích jednoduše platí, že práce

$$A = \frac{1}{2} \{X\}^T \{u\} = \frac{1}{2} \{u\}^T \{X\} \quad (11.15)$$

To je na první pohled jasné každému, kdo ovládá pravidlo o násobení matic. Jde o maticový tvar skalárního součinu dvou obecně n -rozměrných vektorů. Nyní přejdeme pomocí (11.8) ke kosoháhlým souřadnicím. Bude

$$A = \frac{1}{2} \{X_{\xi}\}^T [T]^T [T] \{u_{\xi}\} = \frac{1}{2} \{u_{\xi}^T\} [T]^T [T] \{X_{\xi}\} \quad (11.16)$$

Po dosazení

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} [X_{\xi} \ Y_{\eta}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos \psi \\ 0 & \sin \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\xi} \\ v_{\eta} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} [X_{\xi} \ Y_{\eta}] \begin{bmatrix} 1 & \cos \psi \\ \cos \psi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\xi} \\ v_{\eta} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} [(u_{\xi} + v_{\eta} \cos \psi) X_{\xi} + (u_{\xi} \cos \psi + v_{\eta}) Y_{\eta}] \end{aligned}$$

To je skutečně (11.14).

V pravouhlých souřadnicích jsme měli energii napjatosti

$$A = \frac{1}{2} \{u\}^T \{X\} = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} \quad (11.17)$$

v kosouhlých souřadnicích máme podle (11.9) a (11.15)

$$A = \frac{1}{2} \{u_\xi\}^T [T]^T [T] \{X_\xi\} = \frac{1}{2} \{u_\xi\}^T [T]^T [K] [T] \{u_\xi\} \quad (11.18)$$

Stejný výsledek dostaneme kratčeji dosazením z druhé z rovnic (11.8) do pravé strany (11.17). Obě rovnice budou mít obdobný tvar, dosadíme-li

$$[T]^T [K] [T] = [K_{\xi\eta}^*] \quad (11.19)$$

Pak totiž

$$A = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} = \frac{1}{2} \{u_\xi\}^T [K_{\xi\eta}^*] \{u_\xi\} \quad (11.20)$$

Matice $K_{\xi\eta}^*$ je kupodivu souměrná. Je-li totiž K souměrná matice, dává součin (11.19) vždy též souměrnou matici.

Jak to, že matice $K_{\xi\eta}$ podle (11.10) je nesouměrná a matice $K_{\xi\eta}^*$ podle (11.19) souměrná? Rozdíl v dovození obou matic je v tom, že v prvním případě jsme transformovali jak vektor $\{u\}$, tak $\{X\}$ do kosouhlých souřadnic. V druhém případě jsme v podstatě transformovali jen vektor $\{u\}$, zato ovšem dvakrát. Proto se výsledky liší. První z těchto matic je skutečnou maticí tuhosti, druhá nikoli, je to matice kvadratické formy, která dává energii napjatosti. V pravouhlých souřadnicích se obě tyto matice ztotožňují.

Rovnici (11.13) můžeme přepsat do tohoto tvaru:

$$A = \frac{1}{2} [(X_\xi + Y_\eta \cos \psi) u_\xi + (X_\xi \cos \psi + Y_\eta) v_\eta] \quad (11.21)$$

Zavedeme-li sem nové proměnné

$$\begin{aligned} X_\xi^* &= X_\xi + Y_\eta \cos \psi \\ Y_\eta^* &= X_\xi \cos \psi + Y_\eta \end{aligned} \quad (11.22)$$

dostaneme formálně stejnou rovnici jako v pravouhlých souřadnicích:

$$A = \frac{1}{2} (X_\xi^* u_\xi + Y_\eta^* v_\eta) = \frac{1}{2} \{X_\xi^*\}^T \{u_\xi\} \quad (11.23)$$

Jaký význam mají proměnné (11.22)? Jsou to zřejmě kolmé průměty vektoru \vec{P} do os ξ , η . Poněvadž

$$A = \frac{1}{2} \{u\}^T \{X\} = \frac{1}{2} \{u_{\xi}\}^T [T]^T \{X\} \quad (11.24)$$

je

$$\{X_{\xi}^*\} = [T]^T \{X\} \quad (11.25)$$

Při odvození (11.24) jsme použili druhé z rovnic (11.8). V našem případě

$$\begin{Bmatrix} X_{\xi}^* \\ Y_{\eta}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (11.26)$$

Platí tedy, že složky síly $\vec{P} \equiv \{X\}$ jsou v kosoúhlých souřadnicích

$$\{X_{\xi}\} = [T]^{-1} \{X\} \quad (11.27)$$

kdežto kolmé průměty síly \vec{P} do těchto souřadných os jsou

$$\{X_{\xi}^*\} = [T]^T \{X\} \quad (11.28)$$

Těchto průmětů lze použít k výpočtu deformační práce. To se může hodit při aplikaci principu virtuálních prací.

Poznáváme, že výpočet v neortogonálních soustavách souřadnic je značně složitější a vyžaduje zvýšenou opatrnost. Snadno se můžeme dopustit chyby, zvláště když jsme si dříve zvykli na ortogonální souřadnice.

12. OPRAVA NEPŘESNĚ URČENÉ INVERZNÍ MATICE

V desáté kapitole jsme ukázali, jak lze do výpočtu zahrnout malé konstrukční změny, aniž je třeba celý výpočet opakovat. Této zkušenosti nyní využijeme k opravě inverzní matice K^{-1} , kterou jsme získali nějakou metodou s malou přesností. *) To se může přihodit, jde-li o inverzi velké matice s malou numerickou stabilitou. O nepřesnosti inverzní matice se přesvědčíme jednoduše tím, že ji znásobíme původní maticí; v takovém případě nedostaneme

*) Nemusí to být ovšem jen matice tuhosti, stejného postupu lze použít pro jakoukoli i nesouměrnou regulární matici.

přesně jednotkovou maticí. Není-li vůbec celá procedura chybná, budou odchylky od jednotkové matice malé, ale přesto by znehodnocovaly další výpočet. Pokusíme se chyby výpočtu odstranit, aniž budeme matici znovu invertovat (to by ovšem byla také jedna z možných cest, pokud bychom použili nějaké jiné metody s lepší stabilitou).

K matici K budeme mít tedy místo správné inverzní matice K^{-1} nějakou jinou, byť málo odchýlnou matici K_1^{-1} . Ptáme se, jak bychom mohli získat korekci ΔK , aby platilo:

$$K^{-1} = K_1^{-1} + \Delta K \quad (12.1)$$

Tuto rovnici znásobíme zleva maticí K , takže dostaneme

$$I = K K_1^{-1} + K \Delta K$$

odkud

$$\Delta K = K^{-1} (I - K K_1^{-1}) \quad (12.2)$$

Na pravé straně je neznámá inverzní matice K^{-1} . Kdybychom ji znali, nepotřebovali bychom ji ovšem opravovat. Místo ní známe $K_1^{-1} \approx K^{-1}$. V prvním přiblížení můžeme obě tyto matice zaměnit, takže dostaneme

$$\Delta K \approx K_1^{-1} (I - K K_1^{-1}) \quad (12.3)$$

Dosazením do (12.1) vyjde

$$K^{-1} \approx K_1^{-1} (2I - K K_1^{-1}) = K_{(1)}^{-1} \quad (12.4)$$

Index v závorce značí iterační krok. Kdybychom tuto opravenou matici znovu korigovali stejnou metodou, vyšlo by

$$K_{(2)}^{-1} = K_{(1)}^{-1} (2I - K K_{(1)}^{-1}) \quad (12.5)$$

Obecně dostaneme po n krocích

$$K_{(n)}^{-1} = K_{(n-1)}^{-1} (2I - K K_{(n-1)}^{-1}) \quad (12.6)$$

Úloha 13. K matici K je určena nepřesná inverzní matice K_1^{-1} .
 Vypočtete opravenou inverzní matici s použitím jednoho iteračního kroku.
 Je dáno:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad K_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,8 \\ -0,8 & 1,9 \end{bmatrix}$$

13. SILOVÁ METODA. ZÁKLADNÍ VZTAHY

Až dosud jsme používali deformační metody, která řeší stejným postupem úlohy staticky určité i neurčité. Proto je tato metoda na první pohled jednodušší. Je mnohem více rozšířena než duální metoda silová, pokud jde o výpočty na samočinných počítačích. Silová metoda je však bližší běžným metodám používaným při "ručních" výpočtech. Je jistým paradoxem, že se ve výuce na školách probírá téměř výhradně metoda silová (staticky neurčité případy se řeší vyhledáním staticky neurčitých sil z podmínek geometrické kompatibility deformací, ať už v jakékoli formě), kdežto v praxi - pokud se k výpočtům používá počítače - se aplikuje téměř výhradně metoda deformační. Cílem našeho výkladu až dosud bylo doplnit znalosti získané na školách. Proto jsme se zabývali především deformační metodou. Nepřáli bychom si však upadnout do opačné jednostrannosti, a proto probereme i postup řešení silovou metodou. Zatím se omezíme na rovinné prutové soustavy s kloubovými styčnicí, u nichž je výklad nejjednodušší. Budeme-li při studiu dost pozorní, získáme hlubší názor na problému výpočtu staticky neurčitých konstrukcí, než jaký jsme mohli získat studiem běžných příruček či učebnic. Oceníme přitom i výhody maticové algebry.

V uzlech (styčnicích) dané prutové soustavy působí vnější síly $\{Q\}$. Uzly, jež jsou zakotveny na rámu, nebudeme uvažovat, neboť kdyby v nich působila vnější síla, přenesla by se přímo do rámu. Z rámu se naopak do těchto zakotvených uzlů přenáší reakce, jichž si prozatím nebudeme všímat. V prutech soustavy působí síly $\{P\}$. Jsou to vnitřní síly. Počet prvků v těchto vektorech bývá různý. Uvolníme-li jednotlivé uzly a napíšeme pro ně podmínky rovnováhy (vektorový součet sil působících na daný uzel je nulový), dostaneme soustavu lineárních rovnic mezi silami $\{P\}$ a $\{Q\}$, kterou můžeme obecně zapsat pomocí matice $[B]$ takto:

$$[B]\{P\} + \{Q\} = \{0\} \quad (13.1)$$

Je-li počet neznámých sil P_i právě takový, jaký je počet rovnic (tedy počet prvků Q_i), je matice $[B]$ čtvercová, a nejde-li o staticky výjimečný případ, je dokonce regulární, takže síly $\{P\}$ můžeme z rovnice (13.1) vypočítat. Taková prutová soustava je pak staticky určitá. Je-li však počet

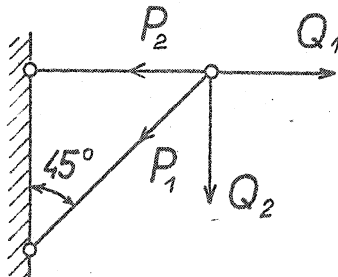
neznámých větší než počet rovnic, tj. má-li vektor $\{P\}$ více prvků než vektor $\{Q\}$, je matice $[B]$ obdélníková a nelze ji invertovat.

Uvedeme jednoduchý příklad. Pro soustavu dvou prutů na obr. 19 vyjde ^{*})

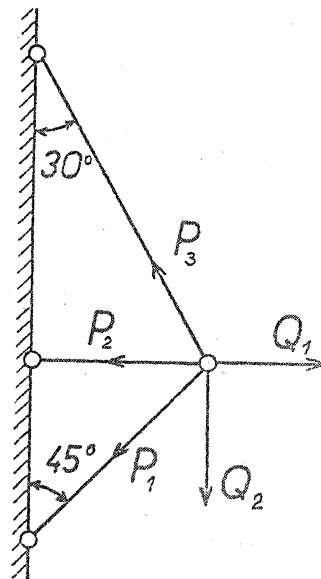
$$\begin{bmatrix} -0,707 & -1 \\ 0,707 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13.2)$$

Odtud vypočteme

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 1,414 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (13.3)$$



Obr. 19



Obr. 20

Půjde-li však o staticky neurčitou soustavu, kterou získáme přidáním třetího prutu (obr. 20), vyjde

$$\begin{bmatrix} -0,707 & -1 & -0,5 \\ 0,707 & 0 & -0,866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13.4)$$

^{*}) Pro stručnost a větší přehlednost uvádíme ve výpočtu jen tři desetinná místa. Číselné hodnoty jsou tedy zaokrouhleny.

Tentokrát je matice $[B]$ obdélníková. Poznáváme, že její submaticí je čtvercová matice z rovnice (13.2). Můžeme ji rozdělit:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -0,707 & -1 & -0,5 \\ 0,707 & 0 & -0,866 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13.5)$$

Tato rovnice má tvar

$$[m; n] \begin{Bmatrix} P^* \\ X \end{Bmatrix} + \{Q\} = \{0\} \quad (13.6)$$

Počet prvků ve vektoru $\{P\}^*$ je dán počtem rovnic rovnováhy. Od sil $\{P\}$ jsme tedy oddělili staticky neurčitě síly $\{X\}$. V našem případě má tento vektor jediný prvek, a to sílu P_3 . Obecně by ovšem mohl obsahovat více prvků (takový příklad probereme v úloze 16). Výběr prvků $\{X\}$ z vektoru $\{P\}$ je do jisté míry libovolný, pořadí prvků v soustavě (13.5) by se mohlo změnit. Počet těchto prvků souhlasí s počtem stupňů statické neurčitosti. Nyní již můžeme síly $\{P^*\}$ vypočítat. Rozepíšeme (13.6)

$$m P^* + n X + Q = 0$$

a dostaneme

$$P^* = -m^{-1} (Q + n X) \quad (13.7)$$

V daném případě

$$m^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1,414 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad m = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,866 \end{bmatrix}$$

takže

$$P^* = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1,414 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,225 \\ -1,366 \end{bmatrix} \{X\} \quad (13.8)$$

kde ovšem $X \equiv P_3$. Celkem

$$P = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1,414 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,225 \\ -1,366 \\ 1 \end{bmatrix} \{X\} \quad (13.9)$$

čili - ve zkráceném zápisu -

$$\{P\} = [Q_0] \{Q\} + [Q_1] \{X\} \quad (13.10)$$

To je obecný tvar rovnice rovnováhy. Lze jej přepsat do tvaru

$$\{P\} = [Q_0 | Q_1] \left\{ \begin{matrix} Q \\ X \end{matrix} \right\} \quad (13.11)$$

Matice $[Q_0]$ a $[Q_1]$ jsme mohli získat přímo. Ukážeme to na příkladu (13.9) a obr. 20. Dosadíme-li $Q_1 = 1$, $Q_2 = 0$, $X = 0$ (přerušovaný třetí prut), dostaneme první sloupec v matici $[Q_0]$, totiž $[0 \ 1 \ 0]^T$.

Je zřejmé, že se za těchto předpokladů síla $Q_1 = 1$ zachytí jen druhým prutem. Pak volíme $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1$, $X = 0$ a opět vyšetříme síly v prutech; dostaneme tak druhý sloupec v matici $[Q_0]$. Síla $Q_2 = 1$ se přitom zachytí jen prvním a druhým prutem. Nakonec zvolíme $Q_1 = 0$,

$Q_2 = 0$, $X = 1$ a vyjde matice $[Q_1]$. Prvky této matice jsou síly v prutech vyvolané "předpětím" $X = 1$ bez působení vnějších sil. V tomto posledním případě tedy předepisujeme "vlastní pnutí" v prutové konstrukci.

Na rovnici (13.10) se můžeme dívat také tak, že síly v prutech vznikají superpozicí dvou silových soustav. První soustava je v rovnováze s vnějšími silami, kdežto druhá představuje vlastní pnutí, které v soustavě působí bez vnějších sil. To, že jsme v první soustavě volili $P_3 = 0$ a v druhé $P_3 = X$, je nepodstatné. Uvidíme později, že lze postupovat obecněji.

Jde-li o staticky neurčitou úlohu, nestačí rovnice rovnováhy k určení neznámých sil. Je třeba použít ještě rovnice kompatibility vyjadřujících geometrickou souvislost přetvořené konstrukce. Obecně je lze odvodit z principu minima komplementární energie napjatosti, tedy z věty Ménabréovy. Tuto energii je třeba vyjádřit jako funkci působících sil. Abychom to mohli učinit, potřebujeme znát závislost mezi silami v prutech a prodloužením prutů.

Z Hookeova zákona

$$\Delta l_i = \frac{l_i}{E_i S_i} P_i = f_i P_i \quad (13.12)$$

Zde f_i značí převrácenou hodnotu tuhosti (pružinové konstanty) i -tého prutu, což je elementární poddajnost prutu. Poznamenejme, že u prutů je f_i vlastně jednorvkovou maticí; u nosníku by to byla souměrná čtvercová matice, inverzní k elementární matici tuhosti. Energii napjatosti v i -tém prutu vypočteme za předpokladu platnosti Hookeova zákona (síla se mění úměrně s prodloužením, takže práci vypočteme jako prodloužení krát poloviční velikost síly):

$$W_i = \frac{1}{2} P_i \Delta l_i = \frac{1}{2} P_i f_i P_i \quad (13.13)$$

Sečtením prací ve všech prutech dostaneme

$$W = \sum_{i=1}^3 W_i = \frac{1}{2} [P_1 \ P_2 \ P_3] \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (13.14)$$

Zápis (13.14) bychom snadno zobecnili i pro větší počet prutů. V rovnici (13.13) jsme úmyslně nevynásobili $P_i P_i = P_i^2$, abychom zdůraznili souvislost s maticovým zápisem (13.14). Ten můžeme zkráceně napsat také takto:

$$W = \frac{1}{2} \{P\}^T [F] \{P\} \quad (13.15)$$

Zde $[F]$ značí matici elementárních poddajností. Pořadí prvků v této matici musí odpovídat pořadí sil ve vektoru $\{P\}$. Nyní dosadíme z rovnice (13.11) do (13.15). Vyjde

$$W = \frac{1}{2} [Q^T; X^T] \begin{Bmatrix} \xi_0^T \\ \xi_1^T \end{Bmatrix} [F] [\xi_0; \xi_1] \begin{Bmatrix} Q \\ X \end{Bmatrix} \quad (13.16)$$

Pro zkrácení zápisu a pro větší přehlednost zavedeme označení

$$[H] = \begin{Bmatrix} \xi_0^T \\ \xi_1^T \end{Bmatrix} [F] [\xi_0; \xi_1] \quad (13.17)$$

takže

$$W = \frac{1}{2} [Q^T; X^T] [H] \begin{Bmatrix} Q \\ X \end{Bmatrix} \quad (13.18)$$

Rozdělením matice H na příslušné submatice vyjde

$$W = \frac{1}{2} [Q^T; X^T] \begin{bmatrix} H_{QQ} & H_{QX} \\ H_{XQ} & H_{XX} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ X \end{Bmatrix} \quad (13.19)$$

odkud

$$W = \frac{1}{2} (Q^T H_{QQ} Q + Q^T H_{QX} X + X^T H_{XQ} Q + X^T H_{XX} X) \quad (13.20)$$

Poněvadž F je souměrná matice, je podle (13.17) souměrná i matice H , jak se snadno přesvědčíme; transponováním této matice vyjde totiž $H^T = H$. Poněvadž dále každý člen v závorce (13.20) je skalárem, musí platit, že

$$Q^T H_{QX} X = (Q^T H_{QX} X)^T = X^T H_{XQ} Q$$

takže

$$W = \frac{1}{2} (Q^T H_{QQ} Q + 2 X^T H_{XQ} Q + X^T H_{XX} X) \quad (13.21)$$

Nyní použijeme vzorců (2.10) a (2.11) a vypočteme derivaci komplementární energie napjatosti podle vektoru staticky neurčitých sil $\{X\}$:

$$\frac{\partial W}{\partial \{X\}} = 2 H_{XQ} Q + 2 H_{XX} X \quad (13.22)$$

Podle Ménabréovy věty musí být tato derivace nulová :

$$H_{XQ} Q + H_{XX} X = 0 \quad (13.23)$$

To je tedy hledaná rovnice kompatibility. Odtud

$$X = - H_{XX}^{-1} H_{XQ} Q \quad (13.24)$$

Klíčem k výpočtu staticky neurčité síly (nebo soustavy sil) je tedy matice H . Tu lze odvodit ze submatic \mathcal{E}_0 , \mathcal{E}_1 (tedy z rovnic rovnováhy) a z matice elementárních poddajností F . Jakmile známe tyto matice, známe i H podle (13.17), X podle (13.24) a konečně i P podle (13.11). Úloha je tedy tím řešena.

K označení matice F jsme použili názvu "matice elementárních poddajností". Není to tedy matice poddajnosti C , která transformuje vektor vnějších sil na vektor odpovídajících posuvů. Tyto dva typy matic je třeba rozlišovat.

Chceme-li určit matici poddajnosti, můžeme ji odvodit pomocí Castiglioviny věty. Pomocí (2.2) upravíme (13.20) tak, abychom dostali *)

$$W = \frac{1}{2} (Q^T H_{QQ} Q + 2 Q^T H_{QX} X + X^T H_{XX} X) \quad (13.25)$$

a s použitím (13.24) vyloučíme $\{X\}$:

*) Tuto úpravu volíme se zřetelem k tomu, že později chceme derivovat komplementární energii napjatosti podle vektoru vnějších sil $\{Q\}$.

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} [Q^T H_{QQ} Q + 2 Q^T H_{QX} (-H_{XX}^{-1} H_{XQ} Q) + \\
 &\quad + Q^T H_{QX} H_{XX}^{-1} H_{XX} H_{XX}^{-1} H_{XQ} Q] = \\
 &= \frac{1}{2} (Q^T H_{QQ} Q - Q^T H_{QX} H_{XX}^{-1} H_{XQ} Q)
 \end{aligned} \tag{13.26}$$

Derivací

$$\{u\} = \frac{\partial W}{\partial \{Q\}} = H_{QQ} Q - H_{QX} H_{XX}^{-1} H_{XQ} Q \tag{13.27}$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$\{u\} = [C] \{Q\} \tag{13.28}$$

kde

$$[C] = [H_{QQ}] - [H_{QX}] [H_{XX}]^{-1} [H_{XQ}] \tag{13.29}$$

značí matici poddajnosti. Jde-li o staticky určitý případ, odpadne na pravé straně poslední rovnice druhý člen, takže se matice poddajnosti ztotožní s maticí $[H_{QQ}]$.

V našem případě

$$F = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1,414 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{13.30}$$

Použili jsme označení $k = E_2 S_2 / l_2$. Z rovnice (13.17)

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1,414 & 1 & 0 \\ 1,225 & -1,366 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,414 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1,414 & 1,225 \\ 1 & 1 & -1,366 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{k} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1,366 \\ 1 & 3,828 & -3,816 \\ -1,366 & -3,816 & 5,989 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} H_{QQ} & H_{QX} \\ \hline H_{XQ} & H_{XX} \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{13.31}$$

Podle (13.24)

$$\begin{aligned} X &= - \begin{bmatrix} -1,366 & -3,816 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{5,989} \right] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \\ &= 0,228 Q_1 + 0,638 Q_2 \end{aligned} \quad (13.32)$$

Z rovnic (13.28) a (13.29) pak vyjde vektor posuvů společného styčnicku

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0,688 & 0,128 \\ 0,128 & 1,398 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (13.33)$$

Čtvercová matice v této rovnici je maticí poddajnosti. Z rovnic (13.9) a (13.32) dostaneme síly v prutech:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,28 & -0,63 \\ 0,69 & 0,13 \\ 0,23 & 0,64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (13.34)$$

V čem je rozdíl našeho postupu proti klasické metodě výpočtu staticky neurčité konstrukce pomocí věty o minimu komplementární energie napjatosti? Jedině v tom, že jsme pomocí maticové symboliky získali předem hotové "deformační podmínky" ve tvaru (13.23), z nichž lze staticky neurčité veličiny $\{X\}$ přímo vypočítat. V uvedeném příkladu jsme měli jen jednu staticky neurčitou veličinu, ale obecně by jich mohlo být více. Nepotřebovali jsme tedy sestavovat vzorec pro energii napjatosti, ani jsme nemusili tuto energii derivovat. Získali jsme předpis pro přímý výpočet neznámých staticky neurčitých veličin. K výpočtu stačilo, jestliže jsme znali rovnice rovnováhy a matici elementárních poddajností.

Uvedli jsme, že rovnice (13.10) neznámé nic jiného než superpozici dvou silových soustav, z nichž první udržuje v rovnováze vnější síly, druhá je soustavou vlastních pnutí v konstrukci. Tato druhá soustava by nemohla existovat ve staticky určité konstrukci. Je-li konstrukce staticky neurčitá, lze v ní vytvořit tolik lineárně nezávislých soustav vlastního pnutí, kolik je stupňů statické neurčitosti. *)

*) Za prvou soustavou sil jsme mohli např. volit síly

*) Zde máme na mysli ovšem jen takové vlastní pnutí, která neodporují idealizaci úlohy.

$$P_1 = 6,29 Q_2 \quad P_2 = Q_1 - 7,6 Q_2 \quad P_3 = 6,29 Q_2$$

o nichž se lze přesvědčit, že udržují síly Q_1 a Q_2 v rovnováze (až ovšem na chyby vzniklé zaokrouhlením). A za vlastní pnutí zvolíme třeba dvojnásobné síly proti těm, které jsme uvažovali v rovnici (13.9). Dostaneme

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6,29 \\ 1 & -7,60 \\ 0 & 6,29 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,45 \\ -2,73 \\ 2,0 \end{bmatrix} \{X\} \quad (13.34)$$

Žádnou ze sil v prutech nelze nyní označit za "staticky neurčitou". Obě soustavy sil na pravé straně rovnice (13.34) byly zvoleny se značnou libovольností. Z rovnice (13.17) vyjde s těmito maticemi

$$H = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6,29 & -7,60 & 6,29 \\ 2,45 & -2,73 & 2,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,414 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6,29 & 2,45 \\ 1 & -7,60 & -2,73 \\ 0 & 6,29 & 2,00 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1,0 & -7,6 & -2,7 \\ -7,6 & 192,4 & 67,6 \\ -2,7 & 67,6 & 23,9 \end{bmatrix} \quad (13.35)$$

$$X = - \begin{bmatrix} -2,7 & 67,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{23,9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = 0,114 Q_1 - 2,83 Q_2 \quad (13.36)$$

a síly v prutech vyjdou opět

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 6,29 \\ 1 & -7,60 \\ 0 & 6,29 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,45 \\ -2,73 \\ 2,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,114 & -2,83 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,28 & -0,63 \\ 0,69 & 0,13 \\ 0,23 & 0,64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (13.37)$$

Skutečně jsme tedy dostali totéž. Nepotřebovali jsme přitom ze soustavy uvolňovat žádný "přebytečný" prut a žádná síla nemusila být označována jako "staticky neurčitá".

Může se zdát podivné (nebo přinejmenším zajímavé), že podmínky rovnováhy spolu s maticí elementárních poddajností stačí k řešení staticky neurčité úlohy. Kde zůstaly známé "deformační podmínky"? Abychom to ukázali, začneme s nimi. Pro konstrukci na obr. 20 platí mezi posuvy u , v a prodlouženími jednotlivých prutů rovnice

$$\begin{aligned}\Delta \ell_1 &= u \sin 45^\circ - v \cos 45^\circ \\ \Delta \ell_2 &= u \\ \Delta \ell_3 &= u \sin 30^\circ + v \cos 30^\circ\end{aligned}\quad (13.38)$$

Máme tedy tři prodloužení vyjádřena pomocí dvou posuvů, takže po vyloučení těchto posuvů vznikne jedna závislost mezi $\Delta \ell_1$, $\Delta \ell_2$, $\Delta \ell_3$ (a tedy též mezi P_1 , P_2 , P_3) a to je právě známá "deformační podmínka". Rovnice (13.38) anulujeme a upravíme:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \ell_1 \\ \Delta \ell_2 \\ \Delta \ell_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,707 & 0,707 \\ -1,0 & 0 \\ -0,5 & -0,866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \{0\}\quad (13.39)$$

čili

$$\{\Delta \ell\} + [a]\{u\} = \{0\}\quad (13.40)$$

Zjišťujeme, že matice $[a]$ je transponovanou maticí $[B]$ z rovnice rovnováhy (13.4), takže platí

$$\{\Delta \ell\} + [B]^T\{u\} = \{0\}\quad (13.41)$$

Rovnice rovnováhy tedy obsahují touž "informaci" jako deformační podmínka; tato informace je skryta v matici $[B]$, resp. $[B]^T$. Vzpomeneme-li na princip virtuálních prací, dostaneme - s vynecháním závorek -

$$P^T \Delta \ell = Q^T u\quad (13.42)$$

Avšak podle (13.41) $\Delta \ell = -B^T u$, takže

$$-P^T B^T u = Q^T u\quad (13.43)$$

Poněvadž vektor virtuálních posuvů u je možno volit libovolně, musí být

$$-P^T B^T = Q^T \quad \text{čili} \quad B P = -Q\quad (13.44)$$

což je rovnice (13.1). Souvislost je tedy zřejmá. Virtuální přetvoření splňuje na jedné straně podmínky geometrické kompatibility, na druhé straně dává - prostřednictvím principu virtuálních prací - rovnice rovnováhy.

Nyní se pokusíme ze soustavy (13.39) vyloučit vektor $\{u\}$, abychom dostali hledanou deformační podmínku. Matice v této rovnici rozdělíme takto:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \ell_1 \\ \Delta \ell_2 \\ \Delta \ell_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,707 & 0,707 \\ -1 & 0 \\ -0,5 & -0,866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (13.45)$$

Tato rovnice se rozpadá na dvě, jak je naznačeno. Z první vyloučíme vektor $\{u \ v\}^T$. Vyjde

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1,414 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ell_1 \\ \Delta \ell_2 \end{Bmatrix} \quad (13.46)$$

To nyní dosadíme do druhé z rovnic (13.45) a dostaneme

$$\Delta \ell_3 = [-0,5 \quad -0,866] \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1,414 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ell_1 \\ \Delta \ell_2 \end{Bmatrix} = [-1,225 \quad 1,366] \begin{Bmatrix} \Delta \ell_1 \\ \Delta \ell_2 \end{Bmatrix} \quad (13.47)$$

Tuto rovnici anulujeme a upravíme na tvar

$$\begin{bmatrix} 1,225 & -1,366 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ell_1 \\ \Delta \ell_2 \\ \Delta \ell_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (13.48)$$

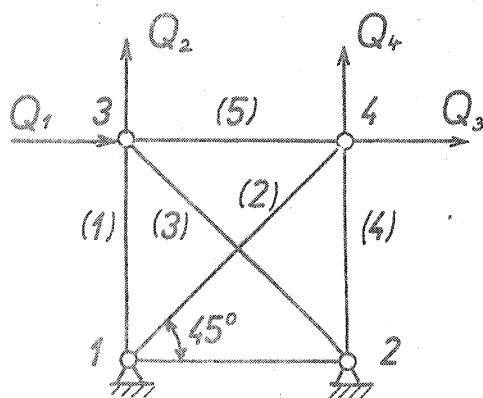
Porovnáme-li (13.48) s rovnicí (13.9), shledáme, že řádková matice v rovnici (13.48) je transponovanou maticí $[\ell_1]^T$. Platí tedy, že

$$[\ell_1]^T \{\Delta \ell\} = \{0\} \quad (13.49)$$

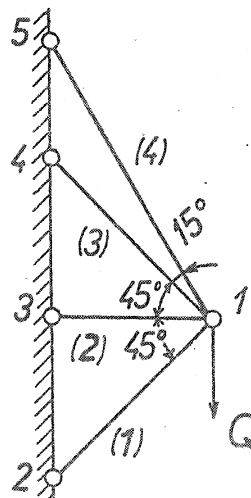
To je tedy konečný tvar známé deformační podmínky. Matice $[\ell_1]$ je přitom submaticí v rovnicích rovnováhy podle (13.11). Znovu se tedy potvrzuje, že rovnice rovnováhy v sobě "ukrývají" i deformační podmínku. Klíčem k této záhadě je tedy submatice $[\ell_1]$, která vyjadřuje rovnováhu sil příslušných vlastním pnutí v soustavě. Mohli bychom tedy říci: rovnice rovnováhy obsahují v sobě podmínku geometrické kompatibility jen tehdy, zahrnují-li všechny lineárně nezávislé soustavy vlastních pnutí v konstrukci.

Úloha 14. Při odvození matice poddajnosti jsme z rovnice (13.25) vyloučili vektor $\{X\}$ a pak teprve derivovali podle $\{Q\}$. Dokažte, že týž výsledek dostaneme, budeme-li (13.25) nejprve derivovat podle $\{Q\}$ a teprve pak vektor $\{X\}$ vyloučíme pomocí (13.24).

Úloha 15. Pro soustavu složenou z prutů stejných průřezů a elastických vlastností, zakreslenou na obr. 21, vypočtete síly v prutech. Za staticky neurčitou veličinu zvolte sílu v prutu 3 - 4. Předpokládejte, že $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = Q$, $Q_4 = 0$.



Obr. 21



Obr. 22

Úloha 16. Je dána prutová soustava podle obr. 22. Pruty mají stejný průřez $k = ES/l_{(2)}$. Najděte síly v prutech a vodorovný a svislý posuv působící síly Q .

Úloha 17. Dokažte, že rovnici pro neznámý vektor X bychom mohli odvodit přímo z matic b_0 , b_1 , F ve tvaru

$$X = (b_1^T F b_1)^{-1} (b_1^T F b_0) Q$$

14. SOUVISLOST SILOVÉ A DEFORMAČNÍ METODY

Základními rovnicemi pro řešení jakékoli úlohy teorie pružnosti jsou:

- (1) rovnice rovnováhy sil (popř. napětí)
- (2) rovnice kompatibility posuvů (popř. přetvoření)
- (3) vztah mezi silami a posuvy (Hookeův zákon)

Jde přitom o maticové rovnice, tedy o soustavy rovnic. První z nich vyjadřuje nejen rovnováhu mezi vnějšími silami a vnějšími reakcemi, ale také rovnováhu v soustavě vnitřních sil. Vychází se přitom z poznatku, že je-li nějaké těleso nebo soustava těles v rovnováze, je v rovnováze i každá část uvolněná myšlenými řezy. Rovnice kompatibility vyjadřují podmínky spojitosti deformovaného tělesa nebo deformované soustavy (jsou to tedy geometrické, deformační podmínky). Konečné třetí rovnice vyjadřují fyzikální vlastnosti materiálu, jež se uplatňují při výpočtu deformací z působících sil (popř. napětí). Tvar jednotlivých soustav rovnic si znovu ukážeme na příkladu prutové konstrukce z obr. 20.

Rovnováha sil se zapíše ve tvaru (13.1), popř. (13.5):

$$[B]\{P\} + \{Q\} = \{0\} \quad (14.1)$$

Rovnice kompatibility lze napsat různým způsobem. Nejjednodušší je, vyjádříme-li skutečnost, že prodloužení ve všech prutech jsou jednoznačně určena posuvy uzlů. V našem případě jde o prodloužení tří prutů, jež lze odvodit ze dvou složek posuvů jediného uzlu. Prodloužení prutů nemohou být proto nezávislá, neboť tři funkce závisí jen na dvou proměnných. Dostaneme rovnici (13.40), popř. (13.39):

$$\{\Delta l\} + [a]\{u\} = \{0\} \quad (14.2)$$

Jak jsme dříve dokázali, je $[a] = [B]^T$.

Vztah mezi silami a posuvy je dán rovnicemi (13.12), které shrneme do jediné maticové rovnice

$$\{\Delta l\} = [F]\{P\} \quad (14.3)$$

Zde - stejně jako dříve - je $[F]$ diagonální maticí, což můžeme naznačit zápisem $F = \begin{bmatrix} f_1 & & \\ & f_2 & \\ & & \dots & f_n \end{bmatrix}$. Rozepíšeme-li (14.3) pro konstrukci na obr. 20, dostaneme

$$\begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} = \frac{l_2}{E_2 S_2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (14.4)$$

Matematická formulace úlohy je tedy dána rovnicemi (14.1) až (14.3).
Neznámými jsou:

- (a) vnitřní síly v prutech (P_1 , P_2 , P_3)
- (b) prodloužení prutů (Δl_1 , Δl_2 , Δl_3)
- (c) posuvy uzlů (u , v)

V dané úloze je tedy osm neznámých. Silová a deformační metoda se liší v tom, které z těchto neznámých považuje za hlavní a které za vedlejší. Řešení se začíná eliminací vedlejších neznámých. Deformační metoda považuje za hlavní neznámé posuvy uzlů $\{u\}$, kdežto silová metoda považuje za hlavní vektor vnitřních sil $\{P\}$. Uvedeme nyní schéma postupu obou těchto metod.

Deformační metoda

Začneme s vyloučením vektorů $\{\Delta l\}$ a $\{P\}$. Z rovnic (14.3) vyjde

$$\{P\} = [F]^{-1} \{\Delta l\} = [k] \{\Delta l\} \quad (14.5)$$

Matici $[F]^{-1}$ jsme pro stručnost označili $[k]$. Nezaměňujme ji s maticí tuhosti $[K]$. Matici $[k]$ nazveme maticí elementárních tuhostí. Pro náš případ konstrukce podle obr. 20 vyjde

$$[k] = \frac{E_1 S_2}{l_2} \begin{bmatrix} 0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (14.6)$$

kde $k_i = \frac{E_i S_i}{l_i}$ ($i = 1, 2, 3$) značí elementární tuhost i -tého prutu (konstrukčního prvku). Rovnici (14.5) můžeme upravit tak, že za $\{\Delta l\}$ dosadíme z rovnice (14.2):

$$\{P\} = -[k][a]\{u\} \quad (14.7)$$

Nyní dosadíme z rovnice (14.7) do (14.1) a dostaneme

$$-[B][k][a]\{u\} + \{Q\} = \{0\} \quad (14.8)$$

Odtud

$$\{Q\} = [K]\{u\} \quad (14.9)$$

kde

$$[K] = [B][k][a] \quad (14.10)$$

To je známá matice tuhosti. Poněvadž $[a] = [B]^T$, můžeme také psát, že

$$[K] = [K]^T = [B][k][B]^T \quad (14.11)$$

Řešení úlohy pak dostáváme z rovnice (14.9) ve tvaru

$$\{u\} = [K]^{-1}\{Q\} \quad (14.12)$$

Až na označení vektoru vnějších sil (dříve jsme psali X místo Q) je tento výsledek známý z předchozího výkladu.

Silová metoda

Je-li soustava staticky neurčitá, je matice $[B]$ obdélníková. Rozdělíme ji proto na čtvercovou matici $[m]$ a zbytek $[n]$, tedy $[B] = [m;n]$. Místo (14.1) pak píšeme

$$[m;n] \left\{ \frac{P^*}{X} \right\} + \{Q\} = \{0\} \quad (14.13)$$

Vektor sil jsme přitom rozdělili na část P^* staticky určitou a na část X staticky neurčitou. Odtud

$$P^* = -m^{-1}(Q + nX) \quad (14.14)$$

Připojíme ještě identitu $X \equiv X$ a spojíme v jeden maticový zápis:

$$\left\{ \frac{P^*}{X} \right\} = \{P\} = \begin{bmatrix} -m^{-1} & -m^{-1}n \\ 0 & I \end{bmatrix} \left\{ \frac{Q}{X} \right\} \quad (14.15)$$

To však je rovnice (13.11), v níž

$$b_0 = \begin{bmatrix} -m^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} -m^{-1}n \\ I \end{bmatrix} \quad (14.16)$$

Z Ménabréovy věty odvodíme známý výsledek (srov. s úlohou 17):

$$X = (b_1^T F b_1)^{-1} (b_1^T F b_0) Q \quad (14.17)$$

Z Castiglianovy věty pak podle (13.29)

$$[C] = (b_0^T F b_0) - (b_0^T F b_1)(b_1^T F b_1)^{-1}(b_1^T F b_0) \quad (14.18)$$

Zde nelze použít vzorce (1.13) pro inverzi součinu, poněvadž matice $\{c_i\}$ není čtvercová. Kdybychom na to zapomněli, dostali bychom formální úpravou vztahu (14.18) nesmyslný výsledek $[C]^{-1} = [0]$. Základní rovnicí pro silovou metodu je (13.28), tedy vztah

$$\{u\} = [C]\{Q\} \quad (14.19)$$

Je duální k rovnici (14.9). Z poslední rovnice plyne řešení

$$\{Q\} = [C]^{-1}\{u\} \quad (14.20)$$

Je zřejmé, že matice poddajnosti $[C]$ je inverzní k matici tuhosti $[K]$, což plyne ze srovnání (14.12) a (14.20). Obě tyto matice lze odvodit z matic $[B]$ a $[F]$. U vzorce (14.18) je to evidentní. Vzorec (14.11) lze podle (14.5) přepsat do tvaru

$$[K] = [B][F]^{-1}[B]^T \quad (14.21)$$

takže souvislost obou metod je zřejmá. Základními kameny obou metod jsou tedy matice B a F , jež jsou společné pro obě metody. První z těchto matic plyne z úplné soustavy rovnic rovnováhy, druhá v podstatě z Hookeova zákona. Tento společný základ obou metod souvisí s dualitou obou řešení.

Lze namítnout, že jsme při sestavování matice tuhosti postupovali dříve jinak, odvozovali jsme ji přímo z deformačních vlastností jednotlivých prvků. Skutečně, nepotřebovali jsme násobit matice podle (14.21) ani podle (14.11). Použili jsme totiž modifikace deformační metody, která se nazývá "přímou". Sestavili jsme matici tuhosti přímo na základě její definice, a tak jsme zjednodušili a zkrátili potřebný výpočet. Na podstatě metody se však nic nezměnilo. To konečně vyplývá i z úlohy 19, kterou uvédíme dále.

Úloha 18. Dokažte, že rovnici kompatibility lze napsat ve tvaru

$$[k]\{\Delta\epsilon\} = \{0\}$$

a že matice $[k]$ je totožná s maticí $[k_1]^T$ z rovnice (14.16). S použitím rovnice rovnováhy ve tvaru (13.11) odvoďte vzorec pro výpočet vektoru staticky neurčitých sil $\{X\}$.

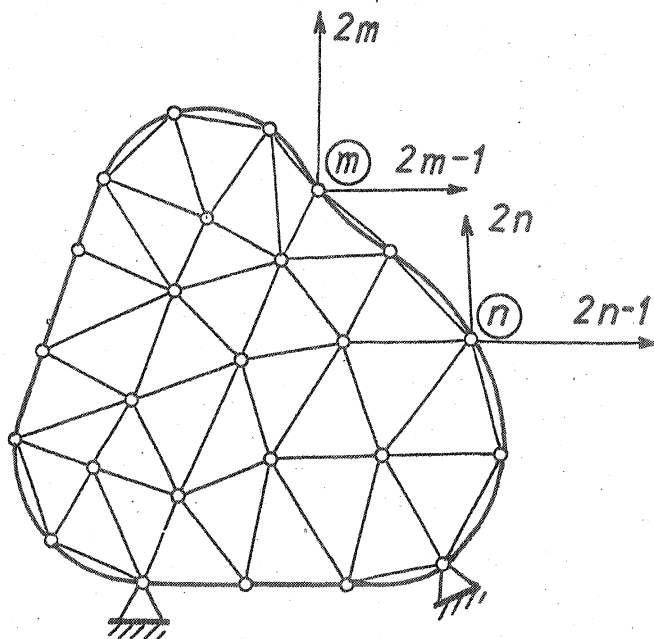
Úloha 19. Vyčíslíte matici tuhosti podle vzorce (14.11) pro konstrukci podle obr. 20 a dokažte, že se shoduje s maticí odvozenou přímou deformační metodou.

15. SOUVISLOST S METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

Zatím jsme se zabývali rozbořem sil a deformací v konstrukcích složených z prutů nebo nosníků. Pokud šlo o soustavu zatíženou a podepřenou jen ve styčných bodech (uzlech), mohli jsme poměrně snadno odvodit ze základních rovnic teorie pružnosti buď matici tuhosti, nebo matici poddajnosti. Pro tyto případy dovedeme totiž stanovit průběh deformací uvnitř prvku (např. průhyb nosníku), udělíme-li uzlům nějaký virtuální posuv. Proto také víme, jaké síly přitom v uzlech působí. Zjistili jsme dále, že nosník můžeme rozdělit na soustavu kratších nosníků. To je zvláště výhodné, potřebujeme-li řešit nosník proměnného průřezu; můžeme jej nahradit soustavou prizmatických krátkých nosníků s odstupňovaným průřezem. V jednom případě, a to u sendvičového nosníku, jsme přesnou souvislost deformací a napětí neznali. Pomohli jsme si tím, že jsme průběhy deformací volili podle odhadu. Předpokládali jsme, že se jádro zkosí účinkem posouvající síly a bude této síle klást odpor, avšak prodlužovat se bude bez odporu. Příruby zase budou vzdorovat pouze prodloužení nebo zkrácení a nebudou se ohýbat. Zkušenost pak ukáže, zda jsou tyto předpoklady přijatelné. Není to ovšem příliš korektní postup, ale je to běžná inženýrská metoda. Vzpomeňme třeba na řešení ohybu nosníků. Známa Bernoulliho-Navierova hypotéza o zachování rovinnosti řezů byla původně také takovou domněnkou z nouze a skvěle se osvědčila.

Napadá nás, zda bychom nemohli využít svých zkušeností a postupovat obdobně při řešení obecných úloh z teorie pružnosti spojitěho tělesa. Ovšemže mohli, je jen třeba překonat některá úskalí. Pro jednoduchost výkladu se omezíme na těleso podle obr. 23 ve stavu rovinné napjatosti.

Těleso, v němž neznáme ještě ani průběh napětí, ani průběh deformací, rozdělíme na elementy spojené klouby. Vytvoříme tak zobecněnou "prutovou" soustavu; místo prutů však zde budeme mít dvourozměrné elementy. Nejjednodušší bude, zvolíme-li trojúhelníky. Pokud není hranice vyšetřované oblasti polygonální, nepokryjeme celou oblast beze zbytku. Musíme proto volit dělení tak "husté", aby vznikla jen malá chyba. Síly a posuvy v kloubech elementů označíme čísly podle schématu na obr. 24. Klouby elementu α jsou i , j , k . Obdobně jako dříve



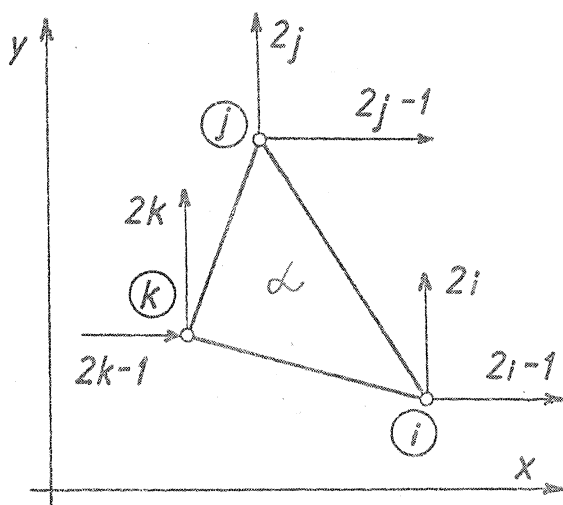
Obr. 23

budeme nyní předpokládat, že se veškeré silové působení mezi elementy děje jen prostřednictvím uzlů (a že i vnější síly a reakce lze soustředit - alespoň přibližně - do uzlů). Prvku α přísluší posuvy v uzlech

$$u_{(\alpha)} = \{ u_{2i-1}, u_{2i}, u_{2j-1}, u_{2j}, u_{2k-1}, u_{2k} \}^T$$

a síly přenášené v kloubech na daný prvek

$$X_{(\alpha)} = \{ X_{2i-1}, X_{2i}, X_{2j-1}, X_{2j}, X_{2k-1}, X_{2k} \}^T$$



Obr. 24

Poněvadž předpokládáme ideální pružnost tělesa, musí mezi těmito veličinami platit lineární vztah

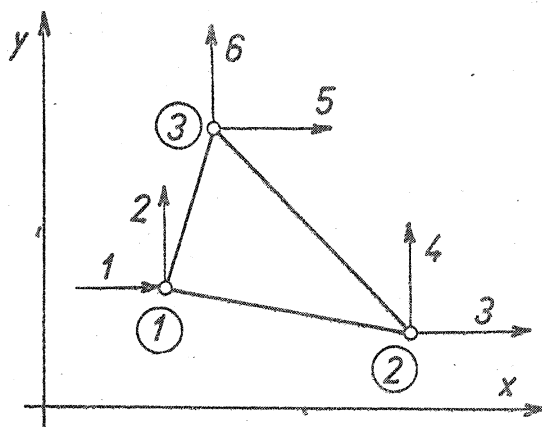
$$X_{(\alpha)} = K_{(\alpha)} u_{(\alpha)} \quad (15.1)$$

který je základem deformační metody. Elementární matice tuhosti je v tomto případě šestého řádu. Kdybychom ji znali, mohli bychom postupovat stejně jako při analýze konstrukcí, o nichž jsme až dosud pojednávali. Problém je v tom, jak tuto matici stanovit. Ponechme tento problém na okamžik stranou. I kdybychom matici znali, zůstaly by některé významné rozdíly proti klasickému řešení, jež se používá pro spojitou oblast.

To souvisí s tím, že jsme oblast rozdělili, jak bylo popsáno. Napjatost je nyní reprezentována vnitřními osamělými silami působícími v uzlech. Kromě těchto osamělých sil, jež ve skutečnosti ve spojitém tělese neexistují, působí ještě napětí uvnitř každého prvku (obdobně jako v prutové konstrukci působí kromě sil v uzlech ještě síly uvnitř prutů). Nemáme nijak zaručeno, že se tato napětí budou na hranicích prvků měnit spojitě, jak by to odpovídalo napjatosti ve spojitém tělese, a to ani tehdy, zajistíme-li nějak spojitost posuvů. Zvolili jsme skutečně velmi nezvyklý způsob diskretizace spojitého tělesa, a tím i matematického řešení úloh z teorie pružnosti. Může se zdát, že důsledky této idealizace vedou k velkým rozporům se skutečností a že se nemůžeme dopracovat k ničemu rozumnému. Naše zkušenosti s maticovými metodami výpočtu jsou však tak znamenité, že se nemíníme ihned vzdát. Pro začátek zvolíme metodu, kterou lépe ovládáme, tj. metodu deformační. Základními neznámými jsou pak posuvy uzlů. S posuvy uzlů musí nějak souviset i posuvy uvnitř prvků. Jsou-li známy, je známo také pole přetvoření uvnitř každého prvku a z Hookova zákona pak musí vyplynout i napětí.

Princip deformační metody konečných prvků spočívá tedy, zhruba řečeno, v nahrazení spojitého tělesa soustavou samostatných elementů spojených klouby. Pro tyto elementy najdeme na základě některých zjednodušujících předpokladů závislost přetvoření a napětí na posuvech uzlů. Posuvy uzlů pak najdeme známou maticovou metodou pomocí inverze matice tuhosti. Z daného tělesa tedy vytváříme jakousi zobecněnou prutovou soustavu, místo prutů však zde máme dvourozměrné (a obecně i třírozměrné) prvky konečných rozměrů. Odtud tedy i název metody.

Potíž je však v tom, že neznáme závislost posuvů uvnitř prvků na posuvech uzlů. Vymyslíme si ji tedy. Již jednou jsme se odvážili takového kroku, a to u sendvičových nosníků. Zkusíme něco podobného i zde. Budeme předpokládat, že se v rozsahu jednoho prvku bude jak posuv u , tak posuv v měnit se souřadnicemi x , y lineárně. Abychom zjednodušili zápis, začneme s prvkem, jehož uzly jsou $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ (obr. 25). Budeme tedy předpokládat, že platí rovnice:



Obr. 25

$$u = c_1 x + c_2 y + c_3 \quad (15.2)$$

$$v = c_4 x + c_5 y + c_6$$

Poněvadž těmto rovnicím musí vyhovovat také uzlové body, tj. vrcholy trojúhelníka, musí platit tato soustava šesti rovnic pro neznámé konstanty c_1 až c_6 :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} \quad (15.3)$$

Odtud tyto konstanty vypočteme a dosadíme do (15.2). K tomu je nejlépe změnit pořadí prvků na 1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 6 a matici rozdělit. Vyjde nakonec

$$u = \frac{1}{D} \left\{ [y_{32}(x-x_2) - x_{32}(y-y_2)] u_1 + \right. \\ \left. + [-y_{31}(x-x_3) + x_{31}(y-y_3)] u_3 + \right. \\ \left. + [y_{21}(x-x_1) - x_{21}(y-y_1)] u_5 \right\}$$

(15.4)

$$v = \frac{1}{D} \left\{ [y_{32}(x-x_2) - x_{32}(y-y_2)] u_2 + \right. \\ \left. + [-y_{31}(x-x_3) + x_{31}(y-y_3)] u_4 + \right. \\ \left. + [y_{21}(x-x_1) - x_{21}(y-y_1)] u_6 \right\}$$

V těchto rovnicích značí $y_{32} = y_3 - y_2$, $x_{31} = x_3 - x_1$ atd.

Dále $D = x_{32} y_{21} - x_{21} y_{32}$ je dvojnásobek plochy trojúhelníka o vrcholech
 ① - ② - ③.

Lze jistě protestovat proti hrubému zjednodušení, kterého jsme se dopustili volbou lineárních funkcí (15.2). Na tuto námitku odpovíme, že skutečnost bude zajisté jiná. Sporné však není otázka linearizace vztahu pro vnitřní posuvy, ale sama podstata rozdělení tělesa na prvky spojené myšlenými klouby. Tuto představu nelze fyzikálně interpretovat bez jistého "logického násilí" při zavádění osamělých sil v uzlech. To byl mnohem odvážnější krok než zavedení lineárních funkcí ve vztahu (15.2). S tím si skutečně nemusíme lámat hlavu. Vždyť je známo, že v malém okolí nějakého bodu lze každou nelineární spojitou funkci linearizovat: malou část hladké křivky lze nahradit krátkou rovnou úsečkou a křivost hladiny vody v umyvadle lze považovat za nulovou, ač jde o plochu s křivostí asi $1,57 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$. Každý pochopí, že volbou menších elementů zmenšíme i chybu vzniklou linearizací, a poněvadž velikost elementů volíme libovolně (ovšem s přihlédnutím k našim výpočtovým možnostem), můžeme uvedenou chybu učinit libovolně malou. Volba posuvů podle (15.2) zaručuje mimoto i splnění podmínek kompatibility, neboť přímé hranice prvku zůstanou po lineární transformaci příjmy, a poněvadž posuv každého uzlu je společný pro prvky, jež se v uzlu stýkají, nevznikne deformací ani mezera mezi prvky, ani jejich překrytí. Pro vektor přetvoření pak vyjde

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} y_{32} & 0 & -y_{31} & 0 & y_{21} & 0 \\ 0 & -x_{32} & 0 & x_{31} & 0 & -x_{21} \\ -x_{32} & y_{32} & x_{31} & -y_{31} & -x_{21} & y_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (15.5)$$

Tuto rovnici zapíšeme krátce takto:

$$\{\varepsilon\} = [c] \{u\} \quad (15.6)$$

Obecně by mohly prvky této matice záviset na souřadnicích x , y . Vzhledem k linearitě rovnic (15.2) jsou však tyto prvky v rozsahu celého elementu konstantní. Proto bude konstantní i napětí, které vypočteme z Hookeova zákona:

$$\{\sigma\} = [\alpha] \{\varepsilon\} \quad (15.7)$$

kde

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$$

$$[\alpha] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}$$

μ je Poissonovo číslo, E modul pružnosti v tahu či tlaku.

Energie napjatosti v trojúhelníkovém prvku je pak

$$W = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} A t \quad (15.8)$$

kde

$$A = \frac{1}{2} D = \frac{1}{2} (x_{32} y_{21} - x_{21} y_{32})$$

značí plochu trojúhelníka. Tloušťku desky, v níž napjatost vyšetřujeme, jsme označili t . Z rovnice (15.7) dosadíme do (15.8) a dostaneme

$$W = \frac{1}{2} A t \{\varepsilon\}^T [\alpha] \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} A t \{u\}^T [c]^T [\alpha] [c] \{u\} \quad (15.9)$$

Práce vnějších sil $\{X\}$ při virtuálních posuvech $\{\delta u\}$ bude $\{X\}^T \{\delta u\}$ a bude se rovnat změně energie napjatosti při týchž posuvech:

$$\{X\}^T \{\delta u\} = \{\delta u\}^T \{X\} - \{\delta u\}^T \frac{\partial W}{\partial \{u\}} \quad (15.10)$$

Poslední rovnice vyjadřuje známý princip virtuálních prací. Někoho by mohlo překvapit, že na pravé straně rovnice (15.10) násobíme zleva transponovaným vektorem $\{\delta u\}^T$, ačkoli bychom mohli pro virtuální změnu energie napjatosti psát

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \{u\}} \{\delta u\}$$

Tento výraz by však byl chybný, neboť derivací $\frac{\partial W}{\partial \{u\}}$ dostáváme vektor sil, tedy sloupcovou matici. Máme-li dostat skalární veličinu δW , musíme vektor těchto sil násobit zleva transponovaným vektorem posuvů:

$$\delta W = \{\delta u\}^T \frac{\partial W}{\partial \{u\}} \quad (15.11)$$

To je teprve správný vzorec, jehož jsme použili v rovnici (15.10). Derivaci na pravé straně (15.10) rozepíšeme a dostaneme

$$\{\delta u\}^T \{X\} = A^t \{\delta u\}^T [t]^T [x] [t] \{u\} \quad (15.12)$$

Poněvadž vektor virtuálních posuvů $\{\delta u\}$ lze volit libovolně, musí platit rovnice

$$\{X\} = A^t [t]^T [x] [t] \{u\} \quad (15.13)$$

Všechny veličiny, které se v této rovnici vyskytují, týkají se jediného elementu. K rozlišení jednotlivých elementů jsme zpočátku použili indexu α . Později jsme tento index pro zkrácení zápisů vynechali, nyní jej opět připojíme. Pro element α bude podle (15.13) platit:

$$\{X_{(\alpha)}\} = [K_{(\alpha)}] \{u_{(\alpha)}\} \quad (15.14)$$

kde

$$[K_{(\alpha)}] = A^t [t]^T [x] [t] \quad (15.15)$$

Vynásobením matic v rovnici (15.15) dostaneme tento výsledek:

$$[K_{(\alpha)}] = [K_{(\alpha_1)}] + [K_{(\alpha_2)}] \quad (15.16)$$

kde

$$K_{(\alpha)} = \frac{Et}{4A(1-\mu^2)} = \begin{bmatrix} y_{32}^2 & -\mu y_{32} x_{32} & -y_{32} y_{31} & \mu y_{32} x_{31} & y_{32} y_{21} & -\mu y_{32} x_{21} \\ -\mu y_{32} x_{32} & x_{32}^2 & \mu x_{32} y_{31} & -x_{32} x_{31} & -\mu x_{32} y_{21} & x_{32} x_{21} \\ -y_{32} y_{31} & \mu x_{32} y_{31} & y_{31}^2 & -\mu y_{31} x_{31} & -y_{31} y_{21} & \mu y_{31} x_{21} \\ \mu y_{32} x_{31} & -x_{32} x_{31} & -\mu y_{31} x_{31} & x_{31}^2 & \mu x_{31} y_{21} & -x_{31} x_{21} \\ y_{32} y_{21} & -\mu x_{32} y_{21} & -y_{31} y_{21} & \mu x_{31} y_{21} & y_{21}^2 & -\mu y_{21} x_{21} \\ -\mu y_{32} x_{21} & x_{32} x_{21} & \mu y_{31} x_{21} & -x_{31} x_{21} & -\mu y_{21} x_{21} & x_{21}^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{(\alpha)} = \frac{Et}{8A(1+\mu)} = \begin{bmatrix} x_{32}^2 & -x_{32} y_{32} & -x_{32} x_{31} & x_{32} y_{31} & x_{32} x_{21} & -x_{32} y_{21} \\ -x_{32} y_{32} & y_{32}^2 & y_{32} x_{31} & -y_{32} y_{31} & -y_{32} x_{21} & y_{32} y_{21} \\ -x_{32} x_{31} & y_{32} x_{31} & x_{31}^2 & -x_{31} y_{31} & -x_{31} x_{21} & x_{31} y_{21} \\ x_{32} y_{31} & -y_{32} y_{31} & -x_{31} y_{31} & y_{31}^2 & y_{31} x_{21} & -y_{31} y_{21} \\ x_{32} x_{21} & -y_{32} x_{21} & -x_{31} x_{21} & y_{31} x_{21} & x_{21}^2 & -x_{21} y_{21} \\ -x_{32} y_{21} & y_{32} y_{21} & x_{31} y_{21} & -y_{31} y_{21} & -x_{21} y_{21} & y_{21}^2 \end{bmatrix}$$

V rovnici (15.14) poznáváme základní vztah pro deformační metodu, v němž $K_{(\alpha)}$ je elementární maticí (v globálních souřadnicích). Další postup je již snadný. Z elementárních matic $K_{(\alpha)}$ sestavíme adicí celkovou matici tuhosti K . Využitím okrajových podmínek můžeme tuto matici regularizovat. Pak lze již vypočítat všechny posuvy uzlů $u = K^{-1}X$. Tím známe i posuvy $u_{(\alpha)}$ vrcholů jednotlivých trojúhelníků, z rovnice (15.6) přetvoření a z rovnice (15.7) napětí v jednotlivých elementech. Výsledkem je pak obraz o napjatosti celého tělesa zकreslený ovšem tím, že místo spojitě napjatosti dostáváme napětí po částech konstantní. To však není nic, co by nám mohlo příliš vadit. Náhrada spojitě funkce funkcí odstupňovanou není v numerické analýze nic neobvyklého. Ostatně volbou nelineárních rovnic místo (15.2) bychom mohli dosáhnout i spojitosti napětí, ovšem za cenu komplikace výpočtu. Rozdělíme-li oblast na velký počet prvků, dostaneme i bez toho velmi užitečné výsledky. O možnosti poměrně dokonalé náhrady spojitých funkcí funkcemi nespojitými svědčí mimo jiné i způsob vytváření plynulých obrazů ve filmu, v televizi a v síťotisku.

Kdybychom plochu každého elementu pokryli šedou barvou konstantního odstínu, a to tím tmavšího, čím větší je ekvivalentní (redukované) napětí vypočtené metodou konečných prvků, dostali bychom místo plynule se měnících

šedých odstínů plochu mozaikovitě pokrytou po částech konstantními odstíny. Při dostatečně jemném dělení bychom nespojitost ani nepostřehli. Co však znamenají osamělé síly v uzlech naší náhradní soustavy? Tím, že jsme napětí v každém prvku nahradili "průměrnou" konstantní hodnotou, porušili jsme na hranicích prvků Newtonův zákon o akci a reakci, který bychom mohli též nazvat zákonem o vzájemném silovém působení těles. Napětí po obou stranách hranice jsou nyní určena nezávisle a jsou odvozena z posuvu uzlů; jsou na hranicích obecně nespojitá. Podél každé hranice bychom si mohli představit řez mezi prvky; spojitost deformací je sice zabezpečena předpisem (15.2), avšak k zachycení napětí na hranici prvku si musíme představit, že prvek je na okraji vyztužen nekonečně tenkým absolutně ohybově tuhým "drátem".*) Ten rozvádí síly z uzlů do celé hranice prvku. Vzájemné silové působení mezi prvky je pak představováno výhradně silami přenášenými v uzlech, jež vyhovují třetímu Newtonovu zákonu. V našem obraze napjatosti by tedy bylo třeba ohraničit každý prvek nekonečně tenkou černou čarou, mezi prvky ponechat nekonečně tenké bílé mezery představující hranice a v uzlech připojit černé tečky, jež by znázorňovaly koncentrované působení sil v uzlech. Avšak tyto nekonečně tenké čáry a malé tečky by zanikly ve srovnání s ploškami trojúhelníkových elementů a nenarušily by výsledný obraz.

Nakonec ještě trochu historie. Podstatný rys deformační metody znal již Navier. Roku 1827 uveřejnil pojednání o řešení prutových soustav, v němž za neznámé byly voleny posuvy uzlů místo sil v prutech. Dokázal, že počet rovnic, které takto dostaneme, je vždy stejný jako počet neznámých, bez zřetele na stupeň statické neurčitosti.

Důležitým krokem při řešení staticky neurčitých konstrukcí byla formulace věty o minimu energie napjatosti, kterou uveřejnil roku 1858 francouzský generál Ménabréa. O málo později, v letech 1873 až 1876, uveřejnil italský konstruktér železnic Castigliano své proslavené věty, jejichž význam však zůstal po mnoho let techniky nedocenen. Tyto věty se staly základem aplikací silové metody.

Dualitu obou metod rozpoznal Engesser. Bylo mu nápadné, že princip virtuálních prací, z něhož vychází metoda deformační, platí i pro tělesa s nelineárním vztahem mezi silami a příslušnými posuvy, kdežto platnost Castiglianových vět - a ovšem i věty Ménabréovy -, z nichž se vychází při silové metodě, je omezena na tělesa, u nichž platí lineární Hookeův zákon. A tak roku 1889 Castiglianovu práci doplnil zavedením pojmu komplementární energie napjatosti W^* a dokázal, že vztah $\partial W^* / \partial \{X\} = \{u\}$ platí i pro nelineární závislost sil na posuvech. Engesser tak postavil působnost Castiglianových vět naroveň obecnému Lagrangeovu principu virtuálních prací. To byl jistě významný úspěch.

*) V osovém směru se tento "drát" ovšem roztahuje; platí-li (15.2), roztahuje se rovnoměrně.

Engesserova práce však zůstala dlouho nepovšimnuta. Prakticky se řešily především lineární problémy, takže nebylo třeba rozlišovat energii napjatosti od komplementární energie napjatosti. Teprve roku 1941 znovu oživil Engesserovy myšlenky Westergaard. Rozvedl je a ukázal jejich praktickou důležitost. S větším uplatněním počítačů a s rostoucím významem řešení nelineárních úloh byly oba principy znovu zhodnoceny a nově formulovány. Argyris roku 1954 dokázal, že všechny známé větvy využívající energie napjatosti a deformační práce, popř. i metody z nich nejruznějším způsobem odvozené, lze odvodit z jediných dvou principů; těmito obecnými a vzájemně duálními principy jsou:

- (1) princip virtuálních posuvů
- (2) princip virtuálních sil

První z těchto principů je v podstatě Lagrangeovým principem virtuálních prací, druhý bychom mohli nazvat též principem komplementárních virtuálních prací. Jejich aplikaci ukážeme ještě v příští kapitole.

Analýza deformací a napjatosti pevných těles a konstrukcí tak byla postavena na pevný základ. Kromě analytických metod se stále více používá metod numerických, jež se zabývají buď numerickým řešením příslušných diferenciálních rovnic či integrálních rovnic (např. metodou sítí nebo numerickou integrací), nebo řešením náhradních fyzikálních modelů - diskrétních soustav skládajících se z konstrukčních elementů konečné velikosti. Tyto soustavy lze řešit buď silovou metodou, nebo deformační metodou. Existují však i metody smíšené.

Maticové metody, jež jsme až dosud probírali, patří tedy z širšího hlediska k metodě konečných prvků. Při výkladu v tomto odstavci jsme intuitivně rozšířili deformační metodu i na řešení napjatosti ve spojitém tělese. Tak postupovali první badatelé v oboru této metody v druhé polovině čtyřicátých let. Asi o deset let později byla metoda konečných prvků formulována i pro spojitá tělesa exaktněji, avšak zůstávala stále na úrovni inženýrských aplikací. Teprve v druhé polovině šedesátých let byla náležitě teoreticky zdůvodněna a začleněna do velké skupiny přibližných variačních metod jako zvláštní případ zobecněné Ritzovy metody. Lze ji tedy použít i k řešení úloh z jiných oborů, než je teorie pružnosti.

Také metoda konečných prvků, jež se stala tak populární v posledních létech, má dvě varianty, totiž deformační a silovou. Podrobnostmi se však nyní nemůžeme zabývat; ponecháme si je na některý z příštích seminářů.

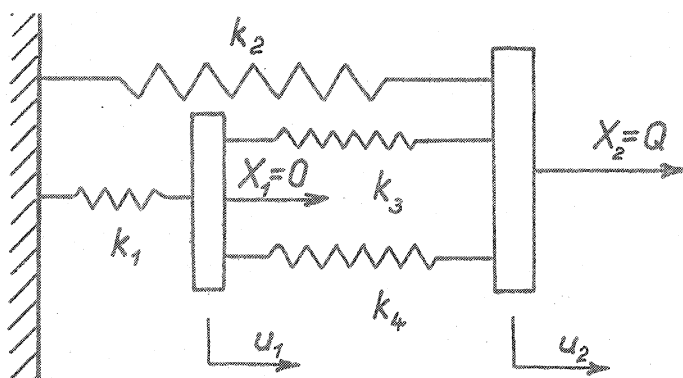
Žádná z těchto metod by nebyla našla tak velké uplatnění, kdyby nebylo samočinných počítačů. Jejich aplikací si nelze představit bez maticové algebry. Tím zajímavější je, že nauka o maticích vznikala v době, kdy si nebylo možné představit výkonnost dnešních počítačů. Matematika zde předběhla techniku o celé století. Jak jsme uvedli v prvním semináři, tvůrci nauky o maticích byli Angličan Artur Cayley a Ir Sir William Rowan Hamilton.

Prvým z nich, A. Cayley, se narodil roku 1821 v Richmondu (Surrey). Dětství prožil v Petrohradě, kde byl jeho otec kupcem. Když mu bylo sedmáct let, začal v Cambridgi studovat matematiku. Po třech letech ukončil toto studium s vyznamenáním. Odešel do Londýna, kde se stal právním zástupcem; toto povolání zastával až do roku 1863. Matematice se věnoval jen jako zálibě, avšak s mimořádným úsilím a úspěchem. V době, kdy pracoval jako právník, uveřejnil 200 až 300 prací z matematiky, jež jej proslavily. Roku 1863 byl jmenován profesorem čisté matematiky na universitě v Cambridgi, kde roku 1895 zemřel.

W.R. Hamilton se narodil roku 1805 v Dublinu. Od svých devatenácti let studoval v Dublinu matematiku a astronomii; když mu bylo dvaadvacet let, stal se "Andrews Professor" pro tyto obory na universitě v Dublinu a zároveň ředitelem hvězdárny s titulem "Royal Astronomer of Ireland". Roku 1835 mu byl udělen šlechtický titul "Sir". Roku 1843 objevil kvaterniony. *) Bydlel na hvězdárně v Dunsinku u Dublinu, kde roku 1865 zemřel. Byl to předčasně zralý, všestranně nadaný člověk. Měl mimořádnou paměť, ve svých deseti letech uměl zpaněti Homéra a dále ovládal třináct jazyků, mezi nimi arabštinu a sanskrt.

16. OHRANIČENÍ PŘESNÉHO VÝSLEDKU PŘI PŘIBLIŽNÉM ŘEŠENÍ

Variačních principů, o nichž jsme se zmínili v kapitole 15, můžeme využít k ohraničení správného výsledku při přibližném řešení, a tím i k odhadu chyby přibližného řešení. To může být velmi důležité v případech, že přesné řešení nelze získat. Tak tomu může být při řešení složitých úloh metodou konečných elementů. Existuje však mnoho různých metod, kterými získáváme jen přibližná řešení.



Obr. 26

Při svém výkladu se však omezíme na případ, kdy lze snadno získat i přesné řešení. Zvolili jsme konstrukci skládající se ze čtyř pružin o tuhostech $k_1 = 3k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = k$, $k_4 = k$. Pružiny jsou spojeny tuhými příčnickami, jež se mohou rovnoběžně posouvat, a jsou zatíženy silami (obr. 26)

*) Jde o zobecněnou teorii komplexních čísel; každé takové číslo se skládá ze čtyř částí. Pro operace s nimi platí zvláštní pravidla.

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix}$$

Nejprve uvedeme řešení deformační metodou. Potenciální energie napjatosti je

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{2} k_1 u_1^2 + \frac{1}{2} k_2 u_2^2 + \frac{1}{2} k_3 (u_1 - u_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 (u_2 - u_1)^2 = \\ &= \frac{5}{2} k u_1^2 - 2 k u_1 u_2 + 2 k u_2^2 \end{aligned} \quad (16.1)$$

a potenciál vnějších sil

$$\bar{\Phi} = -Q u_2 \quad (16.2)$$

Celková potenciální energie

$$W = W_p + \bar{\Phi} = \frac{5}{2} k u_1^2 - 2 k u_1 u_2 + 2 k u_2^2 - Q u_2 \quad (16.3)$$

Podle Lagrangeova principu virtuálních prací jsou posuvy u_1 , u_2 takové, že W je minimální. Bude tedy

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial u_2} = 0 \quad (16.4)$$

odkud

$$k \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix} \quad (16.5)$$

Maticí tuhosti

$$K = k \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

jsme zde odvodili z principu virtuálních prací. Mohli jsme ji ovšem sestavit přímo adicí elementárních matic tuhosti. Řešením rovnice (16.5) vyjde

$$u_1 = \frac{2}{16} \frac{Q}{k} \quad u_2 = \frac{5}{16} \frac{Q}{k} \quad (16.6)$$

Výslednou tuhost konstrukce budeme definovat jako poměr síly Q a posuvu jejího působíště u_2 :

$$k^* = \frac{Q}{u_2} = \frac{16}{5} k = 3,2 k \quad (16.7)$$

Dosazením (16.6) do rovnice (16.3) dostaneme

$$W_{\min} = - \frac{40}{16^2} \frac{Q^2}{k} = - \frac{Q^2}{2k^*} \quad (16.8)$$

Kdybychom místo správných hodnot u_1, u_2 dosadili do (16.3) hodnoty přibližné, ať jakkoli získané, vždy by vyšlo W větší než podle (16.8), tedy $W \geq W_{\min}$, a

$$k^* \leq - \frac{Q^2}{2W} \quad (16.9)$$

Správná hodnota výsledné tuhosti k^* by tedy byla vždy menší než přibližná. Např. pro

$$u_1 \approx \frac{2}{15} \frac{Q}{k} \quad u_2 \approx \frac{5}{15} \frac{Q}{k} = \frac{1}{3} \frac{Q}{k}$$

by vyšlo

$$W = - \frac{35}{15^2} \frac{Q^2}{k}$$

a tedy

$$k^* \leq \frac{Q^2}{\frac{70}{15^2} \frac{Q^2}{k}} = \frac{45}{14} k \doteq 3,22 k \quad (16.10)$$

Kdybychom použili silové metody, vyšli bychom z komplementární energie napjatosti

$$\begin{aligned} W_p^* &= \frac{(Q - P_2)^2}{2k_1} + \frac{P_2^2}{2k_2} + \frac{P_3^2}{2k_3} + \frac{(Q - P_2 - P_3)^2}{2k_4} = \\ &= \frac{(Q - P_2)^2}{6k_1} + \frac{P_2^2}{4k_2} + \frac{P_3^2}{2k_3} + \frac{(Q - P_2 - P_3)^2}{2k_4} \end{aligned} \quad (16.11)$$

Komplementární potenciál předepsaných posuvů $\bar{\Phi}^* = 0$, neboť posuvy nejsou předepsány. *) Proto celková komplementární potenciální energie $W^* = W_p^*$, takže princip komplementárních virtuálních prací (virtuálních sil) přejde ve větu Ménabréovu o minimu komplementární energie napjatosti:

) Kdyby v působišti síly Q_i byl předepsán posuv u_i , byl by tento potenciál $\bar{\Phi}^ = -u_i Q_i$ a $W^* = W_p^* + \bar{\Phi}^*$.

$$\frac{\partial W^*}{\partial P_2} = \frac{\partial W_N^*}{\partial P_2} = 0 \qquad \frac{\partial W^*}{\partial P_3} = \frac{\partial W_N^*}{\partial P_3} = 0 \qquad (16.12)$$

čili

$$\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 1 \end{Bmatrix} Q \qquad (16.13)$$

Odtud plyne přesné řešení

$$P_2 = \frac{5}{8} Q \qquad P_3 = \frac{3}{16} Q \qquad (16.14)$$

Posuvy jsou dány prodloužením první a druhé pružiny:

$$u_1 = \frac{Q - P_2}{3k} = \frac{2}{16} \frac{Q}{k} \qquad u_2 = \frac{P_2}{2k} = \frac{5}{16} \frac{Q}{k} \qquad (16.15)$$

Jsou tedy stejné jako prve. Dosazením (16.14) do (16.11) vyjde

$$W_{min}^* = \frac{40}{16} \frac{Q^2}{k} = \frac{Q^2}{2k^*} \qquad (16.16)$$

Pro přibližná řešení pak platí nerovnost

$$k^* \geq \frac{Q^2}{2W^*} \qquad (16.17)$$

Např. pro přibližné hodnoty

$$P_2 \approx \frac{2}{3} Q \qquad P_3 \approx \frac{1}{5} Q$$

vyjde ze vzorce (16.11)

$$W^* = \frac{5}{27} \frac{Q^2}{k}$$

takže

$$k^* \geq \frac{Q}{\frac{10}{27} \frac{Q^2}{k}} = \frac{27}{10} k = 2,7 k \qquad (16.18)$$

Skutečně, správná hodnota $k^* = 3,2 k$ vyhovuje ohraničení

$$2,7 k \leq k^* \leq 3,22 k \quad (16.19)$$

Poněvadž k^* je nepřímo úměrné posuvu u_2 , mohli bychom nerovnost (16.19) zapsat také takto:

$$u_{2\text{dř}} \leq u_2 \leq u_{2\text{AKC}} \quad (16.20)$$

Indexy vyznačujeme, zda jde o řešení získané přibližnou deformační či silovou metodou. Přesné řešení je u_2 .

Vidíme tedy, že přibližná řešení získaná jednak deformační, jednak silovou metodou ohraničují interval, v němž je přesné řešení. Toto tvrzení jsme dokázali za předpokladu, že použité metody lze odvodit z variačních principů virtuálních posuvů a virtuálních sil.

Úloha 20. Vzorce (16.14) odvoďte přímo silovou metodou vyloženou v kapitole 13.

Úloha 21. Napište odvození rovnice (16.5) deformační metodou pomocí maticové symboliky.

17. ZNOVU O VLASTNÍCH HODNOTÁCH. VĚTA HAMILTONOVA - CAYLEYHO

Abychom si vytvořili lepší předpoklady pro pozdější řešení úloh o stabilitě konstrukcí a úloh z dynamiky, vrátíme se opět k teorii. V první části semináře jsme řešili úlohu o vlastních hodnotách

$$A x = \lambda x \quad (17.1)$$

vztaženou k čtvercové matici n -tého řádu A . Vlastní hodnoty jsou skaláry (čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, pro která má uvedená rovnice netriviální (tj. nenulové) řešení). Příslušná řešení tvoří vlastní vektory $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Někdy se též nazývají "hlavními osami" matice A . Význam tohoto druhého názvu ozřejmíme později. Soustava (17.1) je řešitelná, je-li její determinant roven nule:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (17.2)$$

To je algebraická rovnice n -tého stupně a má obecně n komplexních kořenů. Jsou-li navzájem různé, existuje i n různých vlastních vektorů, které jsou určeny až na multiplikační konstantu. *) Můžeme je normovat podmínkou

$$\{x\}^T \{x\} = 1 \quad (17.3)$$

Jsou-li některé kořeny rovnice (17.2) několikanásobné, pak rovnice (17.1) může, ale nemusí mít n lineárně nezávislých řešení. Je-li jejich počet menší než n , je matice "defektní"; obrazně řečeno, něco jí "chybí".

Pro čtvercové matice platí věta Hamiltonova - Cayleyho: každá čtvercová matice splňuje svou charakteristickou rovnici. Tuto rovnici lze psát ve tvaru součinu kořenových činitelů:

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0 \quad (17.4)$$

Oprávněnost posledního tvrzení je zřejmá z toho, že řešením algebraické rovnice (17.4) jsou zřejmě hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Pak podle citované věty platí:

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0 \quad (17.5)$$

V této rovnici značí I jednotkovou matici n -tého řádu. Abychom tuto důležitou a zajímavou větu dokázali, napíšeme rovnici (17.4) zkráceně pomocí algebraického operátoru Δ takto:

$$\Delta(\lambda) = 0 \quad (17.6)$$

Jsou-li $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ vlastní vektory, je

$$A X_{(i)} = \lambda_i X_{(i)}$$

*) Je-li $\{x\}$ vlastním vektorem, je jím též $k\{x\}$, kde k je libovolná konstanta. Abychom tuto mnohoznačnost vyloučili, vlastní vektory normujeme.

Matice A tedy transformuje vektor $x_{(i)}$ na $\lambda_i x_{(i)}$. Proto matice $\Delta(A)$ bude transformovat vektor $x_{(i)}$ na $\Delta(\lambda_i)x_{(i)}$:

$$\Delta(A)x_i = \Delta(\lambda_i)x_i \quad (17.7)$$

Avšak λ_i je kořenem rovnice (17.6), takže $\Delta(\lambda_i) = 0$. Je to vlastně identita. Jsou-li všechna λ_i navzájem různá, je rovnice (17.5) zároveň identitou nejnižšího řádu, která pro matici A platí. Vyjde-li pouze k různých vlastních hodnot, $k < n$, platí u nedefektní matice identita k -tého řádu

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_k I) = 0 \quad (17.8)$$

kdežto u defektní matice musí být některý z činitelů (nebo několik činitelů) ve vyšší než první mocnině, takže rovnice (17.8) je doplněně exponenty u těchto činitelů a je stupně vyššího než k -tého.

Úloha 22. Dokažte platnost věty Hamiltonovy-Cayleyho pro matici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Určete též příslušné vlastní vektory a normujte je.

Úloha 23. Je-li λ vlastní hodnotou úlohy (17.1), je též vlastní hodnotou "adjungované" úlohy

$$A^T y = \lambda y$$

Dokažte správnost tohoto tvrzení.

18. TRANSFORMACE SOUMĚRNÉ MATICE DO HLAVNÍCH OS (DIAGONALIZACE)

Při studiu lineárních diferenciálních a integrálních operátorů si pomáme transformací matice do hlavních os, jimiž jsou ovšem vlastní vektory matice. Je to jeden z nejdůležitějších obrátů matematické analýzy. Matice jsou především algebraickým "nástrojem", avšak k usnadnění výkladu a k lepšímu pochopení připojíme k algebraickým operacím ještě jejich geometrické znázornění. Domníváme se, že takový postup je pro techniky přijatelnější než ryze abstraktní matematické odvození. Tak jsme začínali svůj výklad o maticích v první části semináře a nyní se k tomuto způsobu výkladu opět vracíme.

V druhé části semináře jsme poznali velmi užitečnou skalární veličinu, kvadratickou formu

$$Q = x^T A x \quad (18.1)$$

Naučili jsme se tuto formu derivovat a používat k řešení praktických úloh. (Vzpomeňme třeba na odvození Castiglianových vět v úloze 3). Nyní přisoudíme této kvadratické formě nový význam. Napíšeme skalární rovnici

$$x^T A x = 1 \quad (18.2)$$

Jaký má geometrický význam? Jde-li o tři proměnné, je matice A třetího řádu a rovnice (18.2) značí kvadratickou plochu (elipsoid, hyperboloid, paraboloid) v souřadnicích x_1 , x_2 , x_3 . Je-li matice A obecně n -tého řádu, bude (18.2) vyjadřovat obdobně kvadratickou plochu v n -rozměrném prostoru. Jaký význam má nyní úloha o vlastních hodnotách? Z rovnice

$$A x = \lambda x \quad (18.3)$$

je zřejmé, že vlastní vektor X značí bod na kvadratické ploše, v němž je radiusvektor rovnoběžný s vektorem normály. Při důkazu této věty se pro stručnost omezíme na případ s dvěma proměnnými, pro něj lze rovnici (18.2) napsat formálně ve tvaru

$$f(x_1, x_2) = 1 \quad (18.4)$$

Je to rovnice kuželosečky. Pak

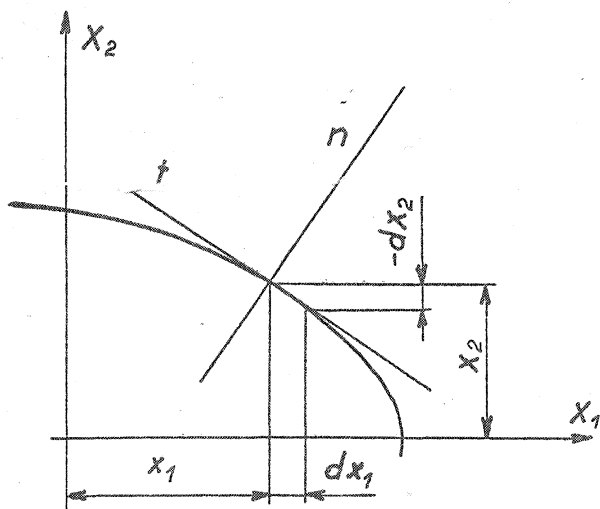
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (18.5)$$

Odtud plyne směrnice tečny (podle obr. 27)

$$k_1 = \frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2} \quad (18.6)$$

Směrnice normály je pak záporně vzatou převrácenou hodnotou směrnice tečny (podle pravidla o směrnících vzájemně kolmých přímk):

$$k_2 = - \frac{1}{k_1} = - \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial f / \partial x_1} \quad (18.7)$$



Obr. 27.

Nyní ještě napíšeme, čemu se rovná směrnice radiusvektoru:

$$k_3 = \frac{x_2}{x_1} \quad (18.8)$$

Má-li být normála rovnoběžná s radiusvektorem, musí platit, že $k_2 = k_3$, a tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda x_1 \quad (18.9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda x_2$$

Zde λ je konstantou úměrnosti. Shrneme-li pak obě poslední rovnice do jediného zápisu, dostaneme

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (18.10)$$

Na levé straně je však parciální derivace kvadratické formy $f(x_1, x_2) = x^T A x$ podle vektoru x , tedy vektor Ax . Proto lze rovnici (18.10) psát jako

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Ax = \lambda x \quad (18.11)$$

což je rovnice (18.3).

Nyní se pokusíme vysvětlit geometrický význam vlastní hodnoty λ_i . Dosadíme-li (18.3) do (18.2), dostaneme

$$x^T \lambda x = 1 \quad \text{či} \quad \lambda = \frac{1}{x^T x} \quad (18.12)$$

Poněvadž $x^T x$ znamená čtverec r^2 vzdálenosti bodu x od počátku souřadnic (tj. čtverec délky radiusvektoru), je vlastní hodnota λ_i převrácenou hodnotou čtverce radiusvektoru takového bodu na ploše (18.2), v němž je normála s radiusvektorem rovnoběžná. Poněvadž počátek spadá do středu kvadratické plochy, vyhovují uvedené podmínce vrcholy kvadratické plochy. Vlastní hodnoty lze pak získat jako převrácené hodnoty čtverců polooos; jsou to tedy hodnoty nezávislé na volbě souřadné soustavy. Patří k inherentním vlastnostem kvadratické plochy. Platí tedy věta: vlastní hodnoty jsou invariantní

vzhledem k libovolné ortogonální transformaci (tj. k takové transformaci, jež ponechává součin $r^2 = x^T x$ beze změny). ^{*})

Volnost ve výběru soustavy souřadnic je velmi důležitá. Mnoho úloh lze řešit snáze, zvolíme-li vhodnou souřadnou soustavu. Transformační zákon známe; odvodili jsme jej pro matici tuhosti, platí ovšem obecně. Je-li libovolná ortogonální matice n -tého řádu, je transformovaná matice

$$\bar{A} = U^T A U \quad (18.12)$$

Připomeňme, že matice je ortogonální, je-li inverzní matice rovna matici transponované; pak $U^T U = U U^T = I$. Transformace (18.12) má tu vlastnost, že ponechává beze změny vztahy mezi maticemi, které se skládají ze slučování (sečítání a odčítání), z násobení a z transpozice.

Řešením rovnice (18.3) získáme vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a k nim příslušné vlastní vektory $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Všechna tato řešení shrneme do jednoho zápisu:

$$[A] \left[\begin{array}{c} \{x_{(1)}\} \\ \{x_{(2)}\} \\ \dots \\ \{x_{(n)}\} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \{x_{(1)}\} \\ \{x_{(2)}\} \\ \dots \\ \{x_{(n)}\} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (18.13)$$

Zkráceně

$$[A][U] = [U][\Lambda] \quad (18.14)$$

kde U je složena z vlastních vektorů tvořících sloupce této matice, Λ je diagonální maticí, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Kdyby matice A byla zcela obecná, vyšly by vlastní hodnoty λ_i obecně komplexní a o vlastních vektorech bychom toho nemohli mnoho říci. Nemohli bychom ani zaručit existenci n nezávislých vlastních vektorů (mohly by splynout v jeden vektor). Je-li však matice A souměrná, vyjdou všechny vlastní hodnoty reálné a vlastních vektorů bude vždy plný počet n . Budou-li vlastní hodnoty vesměs různé, budou vlastní vektory vzájemně ortogonální, a bude-li mezi vlastními hodnotami některá několikanásobná nebo bude-li i více takových několikanásobných hodnot, bude možné vlastní hodnoty

^{*}) Jsou-li všechny poloosy reálné a konečné, jsou vlastní hodnoty kladné. Jak později uvidíme z rovnice (18.19), je pak matice pozitivně definitní.

ortogonalizovat. *) Jestliže vlastní vektory normujeme podmínkou $X_{(i)}^T X_{(i)} = 1$, je matice U v rovnici (18.14) ortogonální. Pak ale můžeme zavést transformaci

$$x = U \bar{x} \quad (18.15)$$

Dosazením do (18.3)

$$AU \bar{x} = \lambda U \bar{x}$$

a násobením maticí U^T zleva vyjde

$$(U^T A U) \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad (18.16)$$

čili

$$\bar{A} \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad (18.17)$$

kde

$$\bar{A} = U^T A U$$

Stejným násobením vyjde však z rovnice (18.14)

$$\bar{A} = U^T A U = \Lambda \quad (18.18)$$

To znamená, že v nové soustavě souřadnic tvořené vlastními vektory $X_{(i)}$ je matice \bar{A} diagonální! Rovnice kvadratické plochy (18.2) pak po rozepsání nabývá tvaru

$$\lambda_1 \bar{x}_1^2 + \lambda_2 \bar{x}_2^2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n^2 = 1 \quad (18.19)$$

Transformaci (18.18) nazýváme diagonalizací matice A.

Nyní můžeme použít poznatku, že λ_i je invariantní vzhledem k ortogonální transformaci. Charakteristickou rovnicí psanou ve tvaru determinantu

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (18.20)$$

*) Je-li vlastní hodnota μ -násobná, dosáhneme ortogonalizace jí příslušných vlastních vektorů vhodným otočením v μ -rozměrném podprostoru. Představme si třeba, jak bychom dosáhli ortogonalitě průměrů u rovníkové kružnice při výběru ortogonálních os rotačního elipsoidu.

můžeme - jako každou algebraickou rovnici - napsat ve tvaru součinu kořenových činitelů *)

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0 \quad (18.21)$$

Invariantní je celá rovnice (18.20). Proto součinitel u λ^k ($0 \leq k < n$) v rovnici (18.20) musí být týž jako v rovnici (18.21). Tak dostaneme n invariantů, z nichž dva nejdůležitější náležejí k mocninám $k = 0$ a $k = n-1$. První značí rovnost absolutních členů, což vyjde také tak, že porovnáme levé strany (18.20) a (18.21) pro $\lambda = 0$. Vyjde

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \quad (18.22)$$

Pro $k = n-1$ dostaneme, že stopa matice

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n \quad (18.23)$$

Tyto vztahy jsme bez důkazu uvedli již ve skriptech k první části semináře. Nyní jsme je dokázali a přitom podrobně vysvětlili význam vlastních hodnot a vlastních vektorů v geometrickém znázornění. Při důkazu jsme se sice omezili na souměrné matice, avšak mohli bychom dokázat, že rovnice (18.22) a (18.23) platí pro jakoukoli čtvercovou matici.

Věty o maticích, které jsme zde odvodili a které ještě odvodíme v některých úlohách, jež následují, používají se často při důkazech existence a konvergence řešení úloh maticovými metodami. Budeme je moci při dalším studiu často upotřebit.

Úloha 24. Dokažte, že opakovaná transformace vektoru $\{x\}$ maticí $[A]$, tj. součin $A^{mv}x$, limituje k nulovému vektoru, platí-li o vlastních hodnotách nerovnost $|\lambda_i| < 1$.

Úloha 25. Dokažte, že souměrnost, ortogonalita a skalární součin vektorů $x^T y$ jsou k ortogonální transformaci invariantní.

Úloha 26. Dokažte, že matice, která je zároveň souměrná a ortogonální, může mít vlastní hodnoty jen $+1$ nebo -1 .

Úloha 27. K matici A najděte vlastní hodnoty a sestavte matici U složenou z vlastních vektorů. Dokažte pro ni platnost transformace (18.18).

*) Na levé straně rovnice (18.21) poznáváme determinant $|\Lambda - \lambda I| \cdot (-1)^n$

Je dáno

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Úloha 28. Dokažte, že lze každou souměrnou matici vyjádřit jako součin ortogonální matice U , diagonální matice Λ a transponované matice U^T .

Úloha 29. Pro součin souměrných čtvercových matic jsou definovány problémy o vlastních hodnotách

$$ABx = \lambda^{AB} x \qquad BAy = \lambda^{BA} y$$

Dokažte, že vlastní hodnoty jsou v obou případech stejné, tj. že platí

$$\lambda^{AB} = \lambda^{BA}$$

Poznámka: v poslední rovnici nejde o exponenty, ale o pravé horní indexy AB, popř. BA.

Úloha 30. Je dána úloha o vlastních hodnotách $Ax = \lambda x$ pro souměrnou matici A n -tého řádu. Dokažte, že lze libovolný daný vektor y v n -rozměrném prostoru vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů ve tvaru

$$y = c_1 x_{(1)} + c_2 x_{(2)} + \dots + c_k x_{(k)} + \dots + c_n x_{(n)}$$

platí-li, že

$$c_k = \frac{x_{(k)}^T A y}{x_{(k)}^T A x_{(k)}}$$

Úloha 31. Dokažte, že pro souměrnou matici A platí:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + \dots + a_{nm}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$$

Na levé straně je součet čtverců všech prvků matice, na pravé součet čtverců všech vlastních hodnot. K důkazu použijte matice A^2 a transformace (18.18).

Úloha 32. Dokažte, že nevzájem různým vlastním hodnotám přísluší lineárně nezávislé vlastní vektory.

Úloha 33. Je dána matice A , jejíž vlastní hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou nenulové a navzájem různé. Dokažte, že matice

$$B = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_k I)$$

má k -násobnou nulovou vlastní hodnotu.

Úloha 34. Pro matici

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

nakreslete příslušnou kuželosečku $x^T A x = 1$ a přesvědčte se, že její hlavní osy splývají s vlastními vektory a že vlastní hodnoty jsou reciprokými hodnotami kvadrátů poloos kuželosečky.

19. NĚKOLIK SLOV ZÁVĚREM

V tomto semináři jsme ukázali na mnoha příkladech, jak matice umožňují účelnou organizaci výpočtů formou úsporných a snadno přehledných vzorců. Nejlepším dokladem toho bylo odvození postupu při výpočtu staticky neurčitých veličin silovou metodou. Podařilo se najít vzorec pro jejich výpočet, k jehož vyčíslení nepotřebujeme ani sestavovat deformační podmínky, ani počítat energii napjatosti. Výpočet může tedy probíhat téměř "mechanicky", nepotřebujeme příliš mnoho přemýšlet, trocha rutiny postačí. Nebezpečí všech takových metod je ovšem v tom, že na tuto rutinu můžeme příliš spoléhat. Nejsme-li nuceni úlohu detailně promýšlet, můžeme se dopustit velmi snadno zásadních chyb. Proto jsme při svém výkladu hledali hlubší souvislosti a věnovali se více teorii než výpočetní rutině. Mohli jsme předložit čtenářům pouze hotová schémata výpočtů sestavená do různých formulářů a předepsaných postupů, avšak takový způsob výkladu by byl patrně málo zajímavý. Autor se ostatně ani necítí povolán k tomu, aby udílel lekce z numerické analýzy, proto volil zaměření semináře poněkud jinak. Cílem výkladu bylo především ukázat základní myšlenky, obraty a souvislosti mezi deformační a silovou metodou. Ačkoli jsme k tomu využívali maticové symboliky, neusilovali jsme o vytvoření nejvýhodnějších algoritmů, ani jsme nevykládali nic o způsobech řešení velkých soustav lineárních rovnic, přestože právě tato řešení podstatně ovlivňují výši celkových nákladů na výpočet. Kdo něco podobného očekával, byl jistě zklamán. Autor tyto otázky sice nepodceňuje, zdají se mu však příliš speciální, než aby se mohly s úspěchem probírat v těchto prvních dvou seminářích.

Prozatím jsme se omezili na obor reálných čísel. Zobecnění na obor čísel komplexních je snadné; většinou vystačíme s tím, když označení "souměrná

matice" zaměníme za "hermiteovská matice". Zatímco pro souměrnou matici platí, že $a_{ij} = a_{ji}$, platí pro hermiteovskou matici, že $a_{ij} = \tilde{a}_{ji}$. Vlnovkou zde vyznačujeme číslo komplexně sdružené. Pro transpozici takové matice platí, že

$$[a_{ij}]^T = [\tilde{a}_{ji}] = [a_{ij}] \quad (19.1)$$

čili opět

$$A^T = A \quad (19.2)$$

Pravidlo (19.1) zaručuje, že skalární součin $X^T X$ je reálné číslo, i když prvky vektoru X jsou čísla komplexní.

Hermiteovskou je např. matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i & -2i \\ -i & 0 & 2i \\ 2i & -2i & 0 \end{bmatrix} \quad (19.3)$$

Má proto tři reálné vlastní hodnoty ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$). Patří k nim tyto vlastní normované vektory sestavené do matice U :

$$U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} - \frac{i}{6} & \frac{1}{2} + \frac{i}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} - \frac{i}{6} & -\frac{1}{2} + \frac{i}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}i & -\frac{2}{3}i \end{bmatrix} \quad (19.4)$$

Ponecháváme na čtenáři, aby se přesvědčil, že matice (19.3) a (19.4) splňují transformační zákon (18.18).

Aplikace matic s komplexními čísly probereme později. Právě tak jsme ponechali vědomě stranou teorii "přenosových matic", ačkoli je jednoduchá a mohli bychom ji snadno vyložit. Nezabývali jsme se ani žádnou úlohou z dynamiky. Tyto problémy ponecháváme na některý z příštích seminářů. Nechtěli jsme výklad příliš roztříštit, neboť seminář měl být určen především těm, kteří si potřebují doplnit základní poznatky o maticích a získat zkušenosti s jejich aplikacemi. Proto - obdobně jako v první části - byly k textu připojeny četné příklady. Kromě úloh z teorie pružnosti jsme připojili v závěrečných kapitolách úlohy čistě matematické. Doufáme, že uspokojí i náročnější čtenáře, kteří již základy maticové algebry dobře ovládají. Proniknutí do způsobu řešení těchto úloh je nezbytné, chceme-li porozumět různým odvozením, existenčním větám, důkazům konvergence, hodnocení chyb přibližných řešení atd., jak je nalézáme v odborné literatuře.

Autor doufá, že čtenáři shovívavě posoudí eventuální nedostatky textu, zejména drobná přehlédnutí při dvojitěm opisování rukopisu-po druhé bez možnosti autorské korektury. Věří, že takových nedostatků bude co nejméně. Nemalou zásluhu na tom mají pracovníci Domu techniky, kteří se starají o vzornou úpravu a včasné rozmnožení skript. Autor jim co nejupřímněji děkuje za jejich mimořádnou pečlivost a svědomitost.

Autor rád přijme jakékoli připomínky k obsahu semináře i ke způsobu výkladu a rád i dodatečně zodpoví eventuální dotazy, které lze poslat písemně buď prostřednictvím Domu techniky ČVTS v Praze, Gorkého nám. 23, nebo přímo na adresu autorova pracoviště (Ústav termomechaniky ČSAV, Puškinovo nám. 9, 160 00 PRAHA 6).

D O D A T E K

Řešení úloh uvádíme podle jejich pořadových čísel

1. Vyjde

$$B = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 3 & 11 & -1 & 10 \\ 3 & -11 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Matice B je tvaru 2×4 , matice A tvaru 4×2 . Součin BA má proto tvar 2×2 . Součin AB bude mít tvar 4×4 a nebude dávat jednotkovou matici:

$$AB = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 22 & -11 & 11 \\ 9 & -11 & 19 & 8 \\ 9 & 11 & 8 & 19 \end{bmatrix}$$

2. Snadno dokážeme, že matice S je souměrná, tj. že $S^T = S$. Z rovnic (1.7) a (1.8) totiž vyjde, že

$$S^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = S$$

Dokázat singularitu je poněkud obtížnější. Doplňme matici $(m - n)$ řádky s nulovými prvky na čtvercový tvar a pak ji rozdělíme na submatice:

$$C = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & | & B_2 \\ \hline B_3 & | & B_4 \end{bmatrix}$$

Je zřejmé, že B_1 má tvar $n \times n$, B_4 má tvar $(m - n) \times (m - n)$. Přitom

$$A = [B_1 \mid B_2] \quad B_3 = 0 \quad B_4 = 0$$

Vytvoříme nyní součin $C^T C$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_1^T & | & B_2^T \\ \hline B_3^T & | & B_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & | & B_2 \\ \hline B_3 & | & B_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_1^T B_1 + B_3^T B_3 & | & B_1^T B_2 + B_3^T B_4 \\ \hline B_2^T B_1 + B_4^T B_3 & | & B_2^T B_2 + B_4^T B_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} B_1^T B_1 & | & B_1^T B_2 \\ \hline B_2^T B_1 & | & B_2^T B_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1^T \\ \hline B_2^T \end{Bmatrix} [B_1 \mid B_2] = A^T A \end{aligned}$$

Platí tedy, že

$$S = A^T A = C^T C$$

Pak platí pro determinanty

$$|S| = |C^T| |C| = 0$$

neboť $|C| = 0$ (nejméně jeden sloupec je nulový). Je proto matice S singularní (má nulový determinant).

3. Energie napjatosti W je dána prací vnějších sil X vykonanou na posuvech u . Poněvadž síly X rostou úměrně s posuvy u , musíme do výpočtu zahrnout jen "průměrnou" velikost sil $\frac{1}{2} X$, takže

$$W = \frac{1}{2} (u_1 X_1 + u_2 X_2 + \dots + u_n X_n) = \frac{1}{2} u^T X \quad (a)$$

Dosadíme sem ze základní rovnice pro X a dostaneme

$$W = \frac{1}{2} u^T K u \quad (b)$$

To je však kvadratická forma se souměrnou maticí K , takže podle (2.7) vyjde

$$\frac{\partial W}{\partial u} = K u = X \quad (c)$$

Rovnice $X = \frac{\partial W}{\partial u}$ vyjadřuje větu, jež bývá označována jako první Castiglianova věta. Shoduje se s Lagrangeovým principem virtuálních prací. Podle tohoto principu totiž platí:

$$X_1 \delta u_1 + X_2 \delta u_2 + \dots + X_n \delta u_n = \frac{\partial W}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial W}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial W}{\partial u_n} \delta u_n$$

Poněvadž přírůstky δu_i jsou libovolné, musí být

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial W / \partial u_1 \\ \partial W / \partial u_2 \\ \vdots \\ \partial W / \partial u_n \end{Bmatrix} \quad \text{čili} \quad X = \frac{\partial W}{\partial u} \quad (d)$$

Jestliže do rovnice (a) dosadíme $u = CX$, vyjde komplementární energie napjatosti

$$W^* = \frac{1}{2} X^T C^T X = \frac{1}{2} X^T C X = W \quad (e)$$

Je to rovněž skalár, a to kvadratická forma se souměrnou maticí C . Bude tedy

$$\frac{\partial W^*}{\partial X} = C X = u \quad (f)$$

což bývá označováno jako druhá Castiglianova věta. Připomeňme ještě, že vztah $u = \frac{\partial W^*}{\partial X}$, ač je napsán jako jediná rovnice, značí ve skutečnosti soustavu n rovnic určujících všechny složky posuvů ve všech styčnicích, jež jsme do výpočtu zavedli:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial W^* / \partial X_1 \\ \partial W^* / \partial X_2 \\ \vdots \\ \partial W^* / \partial X_n \end{Bmatrix} \quad (g)$$

V této úloze jsme pro větší přehlednost označili jednotlivé prvky ve vektorech u a X jejich pořadovými čísly a ponechali jsme jednotné označení prvků těchto vektorů. Rovnice (g) zahrnuje jak složky skutečných posuvů, tak úhly otočení.

Rovnici (f) lze rozepsat po řádcích. Pro i -tý řádek dostaneme

$$\frac{\partial W^*}{\partial X_i} = c_{i1}X_1 + c_{i2}X_2 + \dots + c_{ij}X_j + \dots + c_{in}X_n \quad (h)$$

Ihned je zřejmé, že

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial X_i \partial X_j} = c_{ij} \quad (i)$$

Poněvadž jde o spojitou funkci, lze zaměnit pořadí derivací, takže

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^2 W^*}{\partial X_j \partial X_i} \quad \text{čili} \quad c_{ij} = c_{ji} \quad (j)$$

Tato rovnice vyjadřuje věty Maxwellovy, známé z teorie pružnosti (věty o vzájemnosti posuvů). Matice poddajnosti je tedy souměrná. Totéž platí i o matici tuhosti:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} = k_{ij} = k_{ji} = \frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_i} \quad (k)$$

Obě matice jsou kromě toho pozitivně definitní. Ať jakkoli sestavíme vektor sil X , tedy ať pružné těleso zatížíme jakoukoli silovou soustavou, vždy musíme vynakládat práci, abychom těleso zdeformovali. Je proto $W^* > 0$ pro jakékoli X , takže matice poddajnosti C v rovnici (e) je pozitivně definitní. Obdobně to platí i o matici tuhosti K .

4. Nenulové posuvy budou pouze úhly \tilde{v}_x . Je proto možné ve vektorech (5.1) a (5.2) vynechat všechny prvky až na čtvrtý a v příslušné matici tuhosti vynechat všechny řádky a sloupce až na čtvrtý a desátý. Pro jeden prvek tak dostaneme základní rovnici

$$\begin{Bmatrix} M_{k1} \\ M_{k2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \\ -\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Označíme-li torzní tuhost elementu 1-2 znakem γ , bude torzní tuhost elementů 2-3 a 3-4 dvojnásobná:

$$K_{(1-2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \\ -\gamma & \gamma \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$K_{(2-3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2\gamma & -2\gamma \\ -2\gamma & 2\gamma \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$K_{(3-4)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2\gamma & -2\gamma \\ -2\gamma & 2\gamma \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Adicí vznikne výsledná matice tuhosti

$$K = \gamma \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (b)$$

Poněvadž $v_1^0 = 0$, $v_4^0 = 0$, škrtneme první a čtvrtý řádek a první a čtvrtý sloupec. Dostaneme tak základní rovnici pro celý hřídel:

$$\begin{cases} M_{k2} = M_k \\ M_{k3} = M_k \end{cases} = \gamma \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{cases} v_1^1 \\ v_2^1 \end{cases} \quad (c)$$

Řešením

$$\begin{cases} v_1^1 \\ v_2^1 \end{cases} = \frac{M_k}{8\gamma} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} = \frac{M_k}{8\gamma} \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases} \quad (d)$$

Bude tedy

$$v_1^1 = \frac{3}{4} \frac{M_k l}{G J_{p(1-2)}} \quad v_2^1 = \frac{5}{8} \frac{M_k l}{G J_{p(1-2)}} \quad (e)$$

5. Ze známé teorie ohybu a krutu odvodíme vztah

$$\begin{cases} V \\ M_0 \\ M_k \end{cases} = \begin{bmatrix} 12\beta & -6\beta l & 0 & -12\beta & -6\beta l & 0 \\ 12\beta(x - \frac{l}{2}) & -6\beta l(x - \frac{2l}{3}) & 0 & -12\beta(x - \frac{l}{2}) & -6\beta l(x - \frac{l}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{cases} v_1 \\ v_1^1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ v_2^1 \\ \phi_2 \end{cases}$$

$$\text{kde } \beta = \frac{E\bar{J}}{l^3} \quad \gamma = \frac{GJ_k}{l}$$

v je příčný posuv

\bar{v} - sklon ohybové čáry

ϕ - otočení průřezu kolem osy nosníku

Obdélníková matice v této rovnici je hledanou napěťovou maticí. Jednotlivé prvky této matice odvodíme tak, že pět ze šesti prvků vektoru posuvů volíme nulových. Pak najdeme vnitřní statické účinky vyvozené šestým (nenulovým) posuvem. Použijeme k tomu obvyklých metod teorie pružnosti, např. diferenciální rovnice ohybové čáry nebo vět o momentových plochách aj.

6. Má-li obecný vektor u složky \bar{u}_1, \bar{u}_2 v soustavě \bar{x}, \bar{y} , dostaneme jeho složky v soustavě x, y promítnutím složek \bar{u}_1, \bar{u}_2 do os x, y :

$$u_1 = \bar{u}_1 \cos(x, \bar{x}) + \bar{u}_2 \cos(x, \bar{y}) = \bar{u}_1 \cos \varphi - \bar{u}_2 \sin \varphi$$

$$u_2 = \bar{u}_1 \cos(y, \bar{x}) + \bar{u}_2 \cos(y, \bar{y}) = \bar{u}_1 \sin \varphi + \bar{u}_2 \cos \varphi$$

Dosadíme $\lambda = \cos \varphi, \mu = \sin \varphi$, abychom zkrátili zápis, a dostaneme:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

čili

$$u = T^T \bar{u} \quad (\text{b})$$

Poněvadž transformace je ortogonální, platí, že

$$T^T T = T T^T = I \quad (\text{c})$$

O tom se lze snadno přesvědčit. Pak též

$$\bar{u} = T u \quad (\text{d})$$

Obdobná rovnice jako pro vektor posuvu platí i pro vektor síly, takže

$$\bar{X} = T X \quad X = T^T \bar{X} \quad (\text{e})$$

Dosazením (d) a (e) do základní rovnice $\bar{X} = \bar{K} \bar{u}$ plyne

$$T X = \bar{K} T u \quad (\text{f})$$

Rovnici (f) násobíme zleva maticí T^T . S použitím (c) vyjde

$$X = T^T \bar{K} T u \quad (g)$$

čili

$$K = T^T \bar{K} T \quad (h)$$

Vynásobením matic dostaneme

$$K = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

kde

$$k_{11} = \bar{k}_{11} \lambda^2 - 2 \bar{k}_{12} \lambda \mu + \bar{k}_{22} \mu^2$$

$$k_{12} = k_{21} = \bar{k}_{11} \lambda \mu + \bar{k}_{12} (\lambda^2 - \mu^2) - \bar{k}_{22} \lambda \mu$$

$$k_{22} = \bar{k}_{11} \mu^2 + 2 \bar{k}_{12} \lambda \mu + \bar{k}_{22} \lambda^2$$

Pro soustavu \bar{x} , \bar{y} je $\varphi = 180^\circ$, $\lambda = -1$, $\mu = 0$. Bude tedy

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} \end{bmatrix} = \bar{K} \quad (i)$$

Změnou smyslu obou os se matice tuhosti nezmění. Jak by se změnila, kdybychom volili opačně jen smysl jedné osy, tj. přešli z pravotočivé soustavy na levotočivou? Předpokládejme např., že přejdeme do soustavy \bar{x} , \bar{y} . Transformační matice by byla

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (j)$$

a matice tuhosti - označíme ji vlnovkou - by vyšla takto:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & -\bar{k}_{12} \\ -\bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} \end{bmatrix} \quad (k)$$

Změna smyslu ještě i u osy \bar{x} by způsobila další změnu znamének u prvků na vedlejší diagonále, takže by vznikla matice $\bar{K} = \tilde{K}$.

7. Stačí uvažovat polovinu konstrukce. S označením

$$\beta_a = \frac{EJ}{a^3} \quad \beta_b = \frac{EJ}{b^3} \quad \gamma_a = \frac{GJ_k}{a^3} \quad \gamma_b = \frac{GJ_k}{b^3}$$

odvodíme pro elementární matice tuhosti v globálních souřadnicích x , y , z vztahy

$$K_{(1-2)} = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 12\beta_a & 0 & 6\beta_a a & -12\beta_a & 0 & 6\beta_a a \\ 0 & \gamma_a & 0 & 0 & -\gamma_a & 0 \\ 6\beta_a a & 0 & 4\beta_a a^2 & -6\beta_a a & 0 & 2\beta_a a^2 \\ -12\beta_a & 0 & -6\beta_a a & 12\beta_a & 0 & -6\beta_a a \\ 0 & -\gamma_a & 0 & 0 & \gamma_a & 0 \\ 6\beta_a a & 0 & 2\beta_a a^2 & -6\beta_a a & 0 & 4\beta_a a^2 \end{array} \right] & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

$$K_{(2-3)} = \begin{array}{cccccc} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\ \left[\begin{array}{cccccc} 12\beta_b & 6\beta_b b & 0 & -12\beta_b & 6\beta_b b & 0 \\ 6\beta_b b & 4\beta_b b^2 & 0 & -6\beta_b b & 2\beta_b b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_b & 0 & 0 & -\gamma_b \\ -12\beta_b & -6\beta_b b & 0 & 12\beta_b & -6\beta_b b & 0 \\ 6\beta_b b & 2\beta_b b^2 & 0 & -6\beta_b b & 4\beta_b b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_b & 0 & 0 & \gamma_b \end{array} \right] & \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Tyto matice sestavíme raději přímo, poněvadž nosníky jsou vzhledem ke globální soustavě souřadnic ve výhodné poloze. Přitom respektujeme skutečnost, že existují jen svislé průhyby a chyb se děje vždy ve svislé rovině. Dostaneme proto matice 6×6 místo 12×12 . Matice musí vyjít souměrné a s kladnými prvky na hlavní diagonále. Musí mít ještě další vlastnosti, které odvodíme v úloze 8. Okrajové podmínky $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ a podmínku plynoucí se souměrnosti $u_2 = 0$ zahrneme do výpočtu vynečáním příslušných sloupců a řádků. Adicí zbývajících prvků vznikne výsledná matice tuhosti a s její pomocí tato základní rovnice:

$$\begin{cases} X_4 = 0 \\ X_5 = 0 \\ X_6 = 0 \\ X_9 = 0 \\ X_7 = -\frac{Q}{2} \end{cases} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 9 & 7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12(\beta_a + \beta_b) & 6\beta_b b & -6\beta_a a & 0 & -12\beta_b \\ 6\beta_b b & 4\beta_b b^2 + \gamma_a & 0 & 0 & -6\beta_b b \\ -6\beta_a a & 0 & 4\beta_a a^2 + \gamma_b & -\gamma_b & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_b & \gamma_b & 0 \\ -12\beta_b & -6\beta_b b & 0 & 0 & 12\beta_b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_9 \\ u_7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tuto rovnici můžeme ještě zjednodušit, uvědomíme-li si, že nosník ② - ③ není zkroucen, což plyne ze souměrnosti a z podmínky $X_9 = 0$. Bude proto $u_6 = u_9$. Tím se řád matice sníží o jedničku:

$$\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{Q}{2} \end{cases} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 12(\beta_a + \beta_b) & 6\beta_b b & -6\beta_a a & -12\beta_b \\ 6\beta_b b & 4\beta_b b^2 + \gamma_a & 0 & -6\beta_b b \\ -6\beta_a a & 0 & 4\beta_a a^2 & 0 \\ -12\beta_b & -6\beta_b b & 0 & 12\beta_b \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tato rovnice má tvar

$$\begin{cases} 0 \\ -\frac{Q}{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{4-6} \\ u_7 \end{cases}$$

odkud vypočteme

$$\{u_7\} = -[K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}]^{-1} \left\{ \frac{Q}{2} \right\}$$

8. Se zřetelem k rovnicím rovnováhy uvolněného prvku ① - ②

$$\begin{aligned} X_1 + X_4 &= 0 \\ X_1 a - X_3 - X_6 &= 0 \\ X_2 + X_5 &= 0 \end{aligned}$$

musí platit tyto vztahy (pro $j = 1, 2, \dots, 6$):

$$\begin{aligned} k_{1j} + k_{4j} &= 0 \\ a_1 k_{1j} - k_{3j} - k_{6j} &= 0 \\ k_{2j} + k_{5j} &= 0 \end{aligned}$$

Samozřejmě též platí, že $k_{ii} > 0$, $k_{ij} = k_{ji}$. Pro prvek ② - ③ obdobně odvodíme vztahy

$$\begin{aligned} k_{4j} + k_{7j} &= 0 \\ k_{4j} - k_{5j} - k_{8j} &= 0 \\ k_{6j} + k_{9j} &= 0 \end{aligned}$$

9. Transformační matice musí být šestého řádu. Bude mít tedy tvar

$$T = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & \Lambda \end{array} \right]$$

kde Λ je submatice třetího řádu. Poněvadž číslování 1 až 6 u prvků v matici $K_{(1-2)}$ odpovídá pořadí $y - x - z$ (obr. 10), je třeba obdobně změnit i pořadí prvků v submatici Λ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mu_{\bar{y}} & \lambda_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} \\ \mu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} \\ \mu_{\bar{z}} & \lambda_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{y} \\ \bar{x} \\ \bar{z} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Přitom jsme osu \bar{x} ztotožnili se směrem ② - ③, kdežto $\bar{y} \equiv y$, $\bar{z} \equiv x$. V matici $K_{(1-2)}$ napíšeme všude "2" místo "a" a provedeme transformaci podle vzorce (5.7). Vyjde skutečně matice $K_{(2-3)}$, jak je uvedena v úloze 7.

10. Incidenční matice vyjde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zřejmě

$$N^T N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = I$$

11. Máme dokázat, že platí

$$C_{ba} [I - \Delta K (I + C_{aa} \Delta K)^{-1} C_{aa}] = [(I + C_{aa} \Delta K)^{-1} C_{ae}]^T$$

Na pravé straně provedeme transpozici; přitom se mění pořadí činitelů a vzhledem k souměrnosti $C_{ae}^T = C_{ba}$, $\Delta K^T = \Delta K$, $C_{aa}^T = C_{aa}$. Pravá strana "P" tedy bude

$$P = C_{ba} (I + \Delta K C_{aa})^{-1}$$

Nyní uvedeme v původní rovnici oba členy na levou stranu a vytkneme C_{ba} :

$$C_{ba} [I - \Delta K (I + C_{aa} \Delta K)^{-1} C_{aa} - (I + \Delta K C_{aa})^{-1}] = 0$$

Tato rovnice bude splněna zcela určitě, podaří-li se dokázat, že matice v hranaté závorce vymizí. (Je-li $AB = 0$, neplatí odtud, že nutně buď $A = 0$ nebo $B = 0$; je-li však $B = 0$, je vždy $AB = 0$). Pokusme se tedy o to. Výraz v hranaté závorce vynásobíme činitelem $(I + \Delta K C_{aa})$ zprava. Vyjde

$$I + \Delta K C_{aa} - \Delta K (I + C_{aa} \Delta K)^{-1} C_{aa} (I + \Delta K C_{aa}) - I = 0$$

$$\Delta K C_{aa} - \Delta K (I + C_{aa} \Delta K)^{-1} C_{aa} (I + \Delta K C_{aa}) = 0$$

Dále násobíme maticí ΔK^{-1} zleva:

$$C_{aa} - (I + C_{aa} \Delta K)^{-1} C_{aa} (I + \Delta K C_{aa}) = 0$$

Konečně násobíme maticí $(I + C_{aa} \Delta K)$ zleva a součin rozepíšeme:

$$(I + C_{aa} \Delta K) C_{aa} - C_{aa} (I + \Delta K C_{aa}) = 0$$

$$C_{aa} + C_{aa} \Delta K C_{aa} - C_{aa} - C_{aa} \Delta K C_{aa} = 0$$

quod erat demonstrandum.

12. Zavedeme označení posuvů pořadovými čísly. V uzlu i bude vodorovný posuv $2i - 1$, svislý $2i$. Z okrajových podmínek $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$, nenulové budou tedy jen posuvy u_1 až u_2 . Okrajové podmínky můžeme - pro úsporu místa - respektovat již při sestavování elementárních matic, a to vynecháním sloupců a řádků příslušných nulovým posuvům. Bude tedy - pro $\hat{r} = ES/\hat{r}$ -

$$K_{(1-2)} = [0], \quad K_{(1-3)} = k \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_{(1-3)} = k \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$K_{(3-4)} = k \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{(2-4)} = k \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tyto matice odvodíme snadno přímo. Je-li např. jediný nenulový posuv u_5 (je to vodorovný posuv kloubu 3), nevznikne žádná síla v prutu 1 - 3 (neboť předpokládáme malé deformace), zato prut 2 - 3 se zkrátí o $u_5/\sqrt{2}$ a tlaková síla v něm $(k/\sqrt{2})(u_5/\sqrt{2}) = k u_5/2$ bude v rovnováze se silami $X_5 = (k u_5)/(2\sqrt{2})$, $X_6 = -(k u_5)/(2\sqrt{2})$. Odtud však dostaneme první sloupec v elementární matici $K_{(2-3)}$. Dále se zkrátí prut 3 - 4 o u_5 ; ten vyvolá reakci $X_5 = k u_5$, odkud plyne prvek v prvním řádku a sloupci matice $K_{(3-4)}$. Tak lze postupovat dále. Můžeme však také volit nejprve lokální souřadnice a použít transformačních matic. Adicí elementárních matic tuhosti získáme celkovou matici tuhosti a pak i tuto základní rovnici:

$$\begin{Bmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1+c & -c & -1 & 0 \\ -c & 1+c & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix}$$

kde $c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Po inverzi matice tuhosti odtud odvodíme, že platí:

$$\begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \left[\begin{array}{cc|cc} 1+2\sqrt{2} & 1 & 1+2\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1+2\sqrt{2} & 1 & 2+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{Bmatrix}$$

Konstrukční změna se týká jen posuvů $u_a = \{u_7, u_8\}^T$. Poslední rovnice má již žádaný tvar, tj. posuvy u_7, u_8 jsou psány za sebou; jsou však tentokrát umístěny na konci vektoru posuvů, takže pro poslední rovnici platí schéma

$$\begin{Bmatrix} u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{7b} & C_{7a} \\ C_{8b} & C_{8a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_7 \\ X_8 \end{Bmatrix}$$

Nyní

$$\Delta K = \frac{k}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Všimněme si, že posuvy u_1, u_2 do poslední rovnice nevstupují, poněvadž jsou nulové. Bude tedy

$$\begin{aligned} I + C_{aa} \Delta K &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 + 4\sqrt{2} & 2 + 2\sqrt{2} \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Z rovnice (10.13)

$$C_{aa}^* = \frac{1}{(3 + 4\sqrt{2})k} \begin{bmatrix} 2(5 + 3\sqrt{2}) & -2(1 + \sqrt{2}) \\ -2(1 + \sqrt{2}) & 2(1 + 2\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Z rovnice (10.14)

$$C_{ab}^* = (C_{ba}^*)^T = \frac{1}{(3 + 4\sqrt{2})k} \begin{bmatrix} 9 + 4\sqrt{2} & 1 + 2\sqrt{2} \\ -1 - 2\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_{bb}^* = \frac{1}{(3 + 4\sqrt{2})k} \begin{bmatrix} 2(5 + 3\sqrt{2}) & 2(1 + \sqrt{2}) \\ 2(1 + \sqrt{2}) & 2(1 + 2\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Pro upravenou konstrukci bude tedy platit tato rovnice:

$$\begin{Bmatrix} u_5^* \\ u_6^* \\ u_7^* \\ u_8^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{(3 + 4\sqrt{2})k} \begin{bmatrix} 2(5 + 3\sqrt{2}) & 2(1 + \sqrt{2}) & (9 + 4\sqrt{2}) & -(1 + 2\sqrt{2}) \\ 2(1 + \sqrt{2}) & 2(1 + 2\sqrt{2}) & (1 + 2\sqrt{2}) & -1 \\ (9 + 4\sqrt{2}) & (1 + 2\sqrt{2}) & 2(5 + 3\sqrt{2}) & -2(1 + \sqrt{2}) \\ -(1 + 2\sqrt{2}) & -1 & -2(1 + \sqrt{2}) & 2(1 + 2\sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_5^* \\ X_6^* \\ X_7^* \\ X_8^* \end{Bmatrix}$$

Tuto matici poddajnosti jsme však získali v úloze 34 ve skriptech k první části semináře přímým využitím principu superpozice. Lze se přesvědčit,

že výsledek je stejný. Tehdy však jsme musili znovu invertovat oprave-
nou matici tuhosti čtvrtého řádu. Toho nebylo nyní potřeba.

13. Nejprve vypočteme

$$K K_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 & -0,8 \\ -0,8 & 1,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,1 & 1,1 \end{bmatrix}$$

Pak podle (12.4)

$$K_{(1)}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,8 \\ -0,8 & 1,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,3 \\ -0,1 & 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,98 & -0,99 \\ -0,99 & 1,95 \end{bmatrix}$$

Všimněme si, že součin $K K_1^{-1}$ je nesouměrná matice, avšak $K_{(1)}^{-1}$ je
opět matice souměrná. Od správné matice

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

se liší mnohem méně než matice původní. Zatímco u matice K_1^{-1} byla
chyba u prvků na vedlejší diagonále 20 %, je nyní jen 1 %. Největší
chyba je přitom 2,5 %. Přesnost se tedy po jediném iteračním kroku
podstatně zvýšila.

14. Derivací (13.25) vyjde

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial Q} &= H_{QQ} Q - H_{QX} X = \\ &= H_{QQ} Q - H_{QX} H_{XX}^{-1} H_{XQ} Q = \\ &= (H_{QQ} - H_{QX} H_{XX}^{-1} H_{XQ}) Q \end{aligned}$$

což je právě (13.27).

15. Pro dané pořadí prutů je matice elementárních poddajností

$$F = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matice

$$[b_0; b_1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Matice H vyjde

$$H = \frac{1}{k} \left[\begin{array}{cccc|c} 3,828 & 1 & 0 & 0 & 3,828 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3,828 & -1 & -3,828 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 3,828 & 1 & -3,828 & 1 & 8,656 \end{array} \right]$$

a síly v prutech (pro $Q_3 = Q$)

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{(1-3)} = 0,442 \quad Q = X \\ P_2 &= P_{(1-4)} = 0,790 \quad Q \\ P_3 &= P_{(2-3)} = -0,624 \quad Q \\ P_4 &= P_{(2-4)} = -0,558 \quad Q \\ P_5 &= P_{(3-4)} = 0,442 \quad Q \end{aligned}$$

Poznámka: Poněvadž je nenulová jediná síla Q_3 , nemusili jsme do rovnic rovnováhy ostatní vnější síly počítat. Ze submatice $[b_0]$ by pak zbyl jen třetí sloupec, takže

$$[b_0; b_1] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \quad H = \frac{1}{k} \left[\begin{array}{c|c} 3,828 & -3,828 \\ \hline -3,828 & 8,656 \end{array} \right]$$

$$\text{Vyjde } X = \frac{1}{8,656} \cdot 3,828 \quad Q = 0,442 \quad Q \quad \text{jako prve. V tomto}$$

zkráceném výpočtu snadno odvodíme, že

$$C = H_{QQ} - H_{QX} H_{XX}^{-1} H_{XQ} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[3,828 - \frac{3,828^2}{8,656} \right] = \frac{2,14}{2}$$

Je to vodorovný posuv uzlu 4 působený silou $Q_3 = 1$. Chceme-li dostat i posuvy ostatních uzlů, musíme použít úplné matice H , jak byla uvedena dříve.

16. Soustava je dvakrát staticky neurčitá. Poněvadž nás zajímá i vodorovný posuv kloubu 1, musíme v něm připojit dvě síly: svislou $Q_1 = Q$, vodorovnou $Q_2 = 0$. První soustavu sil v prutech, jež udržuje vnější síly v rovnováze, zvolíme např. takto:

$$P_1 = -0,707 \text{ ll } (Q_1 - Q_2)$$

$$P_2 = 0$$

$$P_3 = 0,707 \text{ ll } (Q_1 + Q_2)$$

$$P_4 = 0$$

Kromě toho musíme volit dvě lineárně nezávislé soustavy sil příslušných vlastním pnutím. První z nich bude např.

$$P_1 = -0,707 \text{ ll } X$$

$$P_2 = X$$

$$P_3 = -0,707 \text{ ll } X$$

$$P_4 = 0$$

a druhá

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = 0,3660 Y$$

$$P_3 = -1,2247 Y$$

$$P_4 = Y$$

Rovnice rovnováhy tedy budou (zaokrouhleně)

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,707 & 0,707 \\ 0 & 0 \\ 0,707 & 0,707 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,707 & 0 \\ 1 & 0,366 \\ -0,707 & -1,225 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

Matice $[b_0]$ i $[b_1]$ mají tentokrát stejný tvar, totiž 4×2 . Matice elementárních poddajností je

$$F = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tuto diagonální matici bychom mohli zkráceně zapsat také takto:

$$F = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \sqrt{2} & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

Tohoto způsobu se někdy používá pro úsporu místa. Matice H vyjde

$$H = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1,414 & 0 & 0 & -1,225 \\ 0 & 1,414 & -1,414 & -1,225 \\ 0 & -1,414 & 2,414 & 1,591 \\ -1,225 & -1,225 & 1,591 & 4,254 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{QQ} & H_{QX} \\ H_{XQ} & H_{XX} \end{bmatrix}$$

Staticky neurčitě síly (obecněji by to mohly být parametry vlastního pnutí) vyjdou

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} &= -H_{XX}^{-1} H_{XQ} Q = \\ &= -\frac{1}{7,75} \begin{bmatrix} 4,254 & -1,591 \\ -1,591 & 2,414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1,414 \\ -1,225 & -1,225 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Poněvadž $Q_2 = 0$, je

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{7,75} \begin{bmatrix} 4,254 & -1,591 \\ -1,591 & 2,414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1,225 \end{bmatrix} \{Q\} \\ &= \frac{1,225}{7,75} \begin{bmatrix} -1,591 \\ 2,414 \end{bmatrix} \{Q\} = \begin{Bmatrix} -0,252 \\ 0,382 \end{Bmatrix} Q \end{aligned}$$

Síly v prutech jsou pak

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,707 \\ 0 \\ 0,707 \\ 0 \end{bmatrix} Q + \begin{bmatrix} -0,707 & 0 \\ 1 & 0,366 \\ -0,707 & -1,225 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,252 \\ 0,382 \end{Bmatrix} Q =$$

$$= \begin{Bmatrix} -0,530 \\ -0,112 \\ 0,417 \\ 0,382 \end{Bmatrix} Q$$

Pomocí matice H nyní vypočteme matici poddajnosti a dostaneme pro vertikální, resp. horizontální, posuv uzlu 1

$$u_{(1)} = -0,112 \frac{Q}{k} \quad v_{(1)} = 0,95 \frac{Q}{k}$$

Na tomto příkladu jsme si ukázali značnou libovольnost, s jakou volíme jednotlivé soustavy sil v rovnicích rovnováhy. Tato volba sice neovlivňuje teoreticky výsledek výpočtu, může však na ní prakticky záviset stabilita numerického výpočtu, jde-li o velké soustavy.

Nakonec ještě poznámku k lineární nezávislosti obou soustav vlastních prutů. Co se tím konkrétně myslí? V daném případě to znamená, že jeden sloupec v submatici $[b_i]$ nesmí být násobkem druhého. Obecně znamená lineární nezávislost vektorů V_1, V_2, \dots, V_n , že nesmějí existovat taková čísla λ_i , z nichž aspoň jedno je nenulové, aby platilo

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n = 0$$

17. Rozepsáním součinu v rovnici (13.17) dostaneme, že

$$H = \left[\begin{array}{c|c} b_0^T F b_0 & b_0^T F b_1 \\ \hline b_1^T F b_0 & b_1^T F b_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} H_{aa} & H_{ax} \\ \hline H_{xa} & H_{xx} \end{array} \right]$$

Dosazením do (13.24) plyne ihned výsledek.

18. Matici \hat{h} se pokusíme získat úpravou rovnice kompatibility (14.2). Přepíšeme ji do tvaru

$$\{\Delta e\} = -[B]^T \{u\}$$

a vektor prodloužení $\{\Delta e\}$ rozdělíme na část $\{\delta_1\}$ odpovídající prutům staticky určitým a na část $\{\delta_2\}$ odpovídající prutům staticky neurčitým. Bude tedy

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m^T \\ n^T \end{bmatrix} \{u\}$$

Tuto rovnici rozepíšeme na dvě. Z první vyjde

$$u = - (m^T)^{-1} \delta_1$$

a dosazením do druhé

$$\delta_2 = n^T (m^T)^{-1} \delta_1$$

Tuto rovnici anulujeme a upravíme do tvaru maticového součinu:

$$\begin{aligned} -n^T (m^T)^{-1} \delta_1 + \delta_2 &= [-n^T (m^T)^{-1} ; I] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \left[\frac{-m^{-1} n}{I} \right]^T \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = [h] \{\Delta \ell\} = \{0\} \end{aligned}$$

Je tedy

$$[h] = \left[\frac{-m^{-1} n}{I} \right]^T = [b_1]^T$$

jak plyne ze srovnání s rovnicí (14.16). Máme tedy rovnici kompatibility

$$[b_1]^T \{\Delta \ell\} = \{0\}$$

rovnice rovnováhy (13.11) a Hookeův zákon (14.3). Z něho dosadíme do poslední rovnice, takže budeme mít

$$b_1^T F P = 0$$

Za P pak dosadíme z (13.11) a dostaneme

$$b_1^T F b_0 Q + b_1^T F b_1 X = 0$$

odkud

$$X = - (b_1^T F b_1)^{-1} (b_1^T F b_0) Q$$

19. Vyjde matice tuhosti

$$K = \frac{k}{8} \begin{bmatrix} 9 + 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} + 3 \\ -2\sqrt{2} + 3 & 3 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1,479 & -0,137 \\ -0,137 & 0,729 \end{bmatrix}$$

Lze se přesvědčit, že inverzí této matice dostaneme matici poddajnosti obsaženou v rovnici (13.33). Stačí obě matice spolu znásobit; vyjde jednotková matice.

Touž matici dostaneme také adicí elementárních matic tuhosti

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \frac{k}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{2\sqrt{2}} & -\frac{k}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{k}{2\sqrt{2}} & \frac{k}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \frac{k}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{8} & \frac{k\sqrt{3}}{8} \\ \frac{k\sqrt{3}}{8} & \frac{3k}{8} \end{bmatrix}$$

Při odvození těchto elementárních matic jsme již počítali s tím, že posuvy v zakotveném uzlu jsou nulové. Vynechali jsme tedy jim příslušné sloupce a řádky. Pořadové číslo 1, popř. 2, značí směr posuvu příslušného síle Q_1 , popř. Q_2 . V obdélníkových transformačních maticích jsou směrové kosiny prutů vztaženy ke globální soustavě souřadnic. Osy této soustavy jsou zvoleny rovnoběžně s druhým prutem a kolmo k němu.

20. Vynecháme staticky neurčité pružiny 2 a 3 a napíšeme podmínky rovnováhy pro zbývající "primární" konstrukci:

$$\begin{aligned} P_1 &= Q \\ P_4 &= Q \end{aligned}$$

Dále připojíme dvě lineárně nezávislé soustavy sil příslušných vlastnímu pnutí. Jednou např. zvolíme $P_2 = 0$, podruhé $P_3 = 0$. Dostaneme

$$P_4 = -P_3 \quad (I)$$

$$P_1 = -P_2 \quad P_4 = -P_2 \quad (II)$$

Tyto rovnice sestavíme do maticového zápisu

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Q + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

Zkráceně

$$P = b_0 Q + b_1 X$$

Matice elementárních poddajností - pozor na pořadí sil! - vyjde

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{3k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Nyní sestavíme matici H podle (13.17):

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k} \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & \\ \hline -\frac{4}{3} & \frac{11}{6} & 1 & \\ -1 & 1 & 2 & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} H_{QQ} & & H_{QX} & \\ \hline H_{XQ} & & H_{XX} & \end{array} \right]$$

Ze vzorce (13.24) pak plyne

$$\begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = -\frac{3}{8} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{11}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -1 \end{bmatrix} \{Q\} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{8} Q \\ -\frac{3}{16} Q \end{Bmatrix}$$

což souhlasí s rovnicemi (16.14).

21. Z Hookeova zákona

$$P = F^{-1} \Delta \ell$$

a z rovnice kompatibility

$$\Delta l = a u$$

dosadíme do vzorce pro výpočet celkové potenciální energie

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} P^T \Delta l - u^T Q = \frac{1}{2} \{\Delta l\}^T [F]^{-1} \{\Delta l\} - \{u\}^T \{Q\} = \\ &= \frac{1}{2} u^T a^T F^{-1} a u - u^T Q \end{aligned}$$

Z Lagrangeova principu

$$\frac{\partial W}{\partial u} = a^T F^{-1} a u - Q = 0$$

plyne známý vztah

$$K u = Q$$

kde

$$K = a^T F^{-1} a$$

V našem případě

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 3k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

a matice $[Q]$ plyne z rovnice (viz obr. 26)

$$\begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \\ \Delta l_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

ve tvaru transponovaném

$$a^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti vyjde

$$K = a^T F^{-1} a = k \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

stejná jako dříve - viz rovnici (16.5).

22. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 5\lambda + 4$ dává vlastní hodnoty $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ a normované vlastní vektory

$$X_{(1)} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}^T$$

$$X_{(2)} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}^T$$

Dále dokážeme, že vskutku $A^2 - 5A + 4I = 0$. Vyjde

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

23. Máme dokázat, že dvě soustavy rovnic

$$A^T y = \lambda y \quad Ax = \lambda x$$

mají netriviální řešení pro stejné vlastní hodnoty λ . Za tím účelem transformujeme vektory v první rovnici na skaláry násobením řádkovou maticí X^T zleva:

$$X^T A^T y = \lambda X^T y$$

To je skalární rovnice, které musí vyhovovat λ_i pro vlastní vektory $X_{(i)}$, $y_{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Po transpozici

$$y^T A x = \lambda y^T x$$

dostaneme stejnou rovnici, jakou bychom získali násobením vztahu $Ax = \lambda x$ řádkovou maticí y^T zleva. Z obou výchozích vztahů tedy plyne též podmínka pro λ , takže vlastní hodnoty λ musí být v obou případech stejné.

24. K důkazu použijeme transformace do hlavních os. Máme pak dokázat, že platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Lambda^m \bar{x} = 0 \quad (a)$$

kde $\Lambda = U^T A U$ podle (18.18). Matice U je složena ze sloupců tvořených vlastními normovanými vektory, a je tedy ortogonální. Pro diagonální matici

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

platí, že

$$\Lambda^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

Je-li $|\lambda_i| < 1$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, je $\lim_{m \rightarrow \infty} \Lambda^m = [0]$, takže vztah (a) platí.

25. Pro souměrnou matici $A^T = A$. Po transformaci

$$U^T A^T U = U^T A U \quad (a)$$

Je-li

$$\bar{A} = U^T A U$$

je také

$$\bar{A}^T = U^T A^T U = U^T A U$$

takže rovnici (a) lze psát ve tvaru

$$\bar{A}^T = \bar{A} \quad (b)$$

což se mělo dokázat.

Pro ortogonální matici V platí, že $V V^T = V^T V = I$

Po transformaci

$$\bar{V} \bar{V}^T = U^T V U \cdot U^T V^T U = U^T V V^T U = U^T U = I$$

Je tedy

$$\bar{V} \bar{V}^T = I = \bar{V}^T \bar{V}$$

takže ortogonalita je vzhledem k ortogonální transformaci invariantní vlastností. To jsme právě měli dokázat.

Konečně pro skalární součin $x^T y$ dostaneme transformací

$$x = U \bar{x}, \quad y = U \bar{y}$$

tento výraz:

$$x^T y = \bar{x}^T U^T U \bar{y} = \bar{x}^T \bar{y}$$

Z něho je zřejmé, že se hodnota skalárního součinu ortogonální transformací nezmění.

26. Pro takovou matici vztahenou k hlavním osám platí podmínka ortogonality

$$\Lambda^T \Lambda = \Lambda \Lambda^T = \Lambda^2 = I$$

a tedy

$$\lambda_i^2 = 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n$$

takže $\lambda_i = 1$ nebo -1 .

27. Determinant

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

nejprve upravíme tak, že první řádek nahradíme součtem prvního a druhého řádku, druhý řádek jejich rozdílem, třetí řádek rozdílem řádku druhého a třetího, čtvrtý řádek rozdílem řádku třetího a čtvrtého. Vyjde determinant s několika nulami, který snáze vyčíslíme:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 - \lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda & 2 + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Nyní determinant rozvedeme podle prvků prvního sloupce:

$$(2-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 2-\lambda & \lambda & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 2+\lambda \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2-\lambda & \lambda & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 2+\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) [\lambda^2(2+\lambda) - 2(4-\lambda^2) - 2\lambda(2+\lambda) - 2(4-\lambda^2)] +$$

$$+ \lambda [\lambda(4-\lambda^2) - 2(4-\lambda^2)] = 0$$

Úpravou (postupným vytýkáním shodných činitelů)

$$- (2-\lambda)(4-\lambda^2)(4+\lambda) + (\lambda-2)(4-\lambda^2) = 0$$

$$2(2-\lambda)(4-\lambda^2)(2+\lambda) = 0$$

$$(4-\lambda^2)^2 = 0$$

Odtud

$$\lambda_{1,2} = 2 \quad \lambda_{3,4} = -2 \quad (c)$$

Stopa matice A je $1 + 1 - 1 - 1 = 0$ a je rovna součtu

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2 + 2 - 2 - 2 = 0 \text{ podle (18.23).}$$

Determinant $|A| = 16 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ podle (18.22). Pro vlastní vektory příslušné prvním dvěma kořenům (c) dostaneme podle (b) soustavu rovnic

$$0 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \quad (d)$$

$$2x_3 - 2x_4 = 0$$

$$-4x_3 + 4x_4 = 0$$

První dvě proměnné se vyloučí, zvolíme-li x_1 libovolně, $x_1 = a$, avšak $x_2 = +x_1$. Zbývají poslední dvě rovnice, jež jsou však lineárně závislé, a rovnice druhá. Sečtením druhé a třetí rovnice vyjde $x_3 = 0$ a pak i $x_4 = 0$. Tento vektor budeme normovat podmínkou $u_1^T u_1 = 1$. Dostaneme

$$u_{(1)} = \begin{Bmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{a\sqrt{2}} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

Ze soustavy (d) však musíme odvodit ještě jeden vektor, na $u_{(1)}$ lineárně nezávislý. Kdybychom začali tím, že bychom volili x_1 a x_2 libovolně, nebyly by vektory $u_{(1)}$, $u_{(2)}$ ortogonální. Z ortogonální podmínky $u_{(1)}^T u_{(2)} = 0$ vyjde

$$\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 = 0$$

a tedy $x_1 = -x_2$. Zvolíme proto $x_1 = b$, $x_2 = -b$ a dostaneme

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 2b \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

odkud

$$x_3 = b, \quad x_4 = b$$

Normovaný vektor bude

$$u_{(2)} = \frac{1}{2b} \begin{pmatrix} b \\ -b \\ b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Obdobně postupujeme i pro vlastní hodnoty $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$ a dostaneme tuto matici vlastních vektorů:

$$U = \begin{matrix} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Lze se přesvědčit dosazením, že platí

$$U^T A U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \Lambda$$

28. Stačí rovnici (18.14) násobit zprava maticí U^T . Vyjde

$$AUU^T = U\Lambda U^T$$

$$A = U\Lambda U^T$$

což jsme měli dokázat.

29. Obě rovnice transformujeme k hlavním osám matice A , což vyznačíme indexy:

$$\Lambda_A U_A^T B U_A \bar{x} = \lambda^{AB} \bar{x} \quad U_A^T B U_A \Lambda_A \bar{y} = \lambda^{BA} \bar{y}$$

Tyto rovnice zkráceně označíme

$$M \bar{x} = \lambda^{AB} \bar{x} \quad N \bar{y} = \lambda^{BA} \bar{y}$$

Snadno dokážeme, že $M^T = N$:

$$M^T = U_A^T B^T U_A \Lambda_A^T = U_A^T B U_A \Lambda_A = N$$

Podle úlohy 23 pak musí být $\lambda^{AB} = \lambda^{BA}$

30. Rovnici

$$y = c_1 x_{(1)} + c_2 x_{(2)} + \dots + c_n x_{(n)} \quad (a)$$

násobíme zleva transponovaným vektorem $x_{(k)}^T$. Vzhledem k ortogonalitě vlastních vektorů zůstane na pravé straně jediný člen, takže

$$x_{(k)}^T y = c_k x_{(k)}^T x_{(k)} \quad (b)$$

Kdyby vektory byly normovány, vyšlo by $x_{(k)}^T x_{(k)} = 1$ a

$$c_k = x_{(k)}^T y \quad (c)$$

a řada (a) by se dala psát takto:

$$y = \sum_{k=1}^n x_{(k)}^T y x_{(k)} \quad (d)$$

Nejsou-li vektory normovány, plyne z rovnice (18.3)

$$x_{(k)} = \frac{1}{\lambda_{(k)}} A x_{(k)}$$

takže

$$x_{(k)}^T x_{(k)} = \frac{1}{\lambda_k} x_{(k)}^T A x_{(k)} \quad (e)$$

Z rovnice (b) pak plyne

$$c_k = \frac{\lambda_k x_{(k)}^T y}{x_{(k)}^T A x_{(k)}} = \frac{x_{(k)}^T A^T y}{\lambda_k x_{(k)}^T A x_{(k)}}$$

a vzhledem k souměrnosti matice A

$$c_k = \frac{x_{(k)}^T A y}{x_{(k)}^T A x_{(k)}}$$

V první části skript jsme ukázali, že k úlohám o vlastních hodnotách vedou mj. problémy vibrací. Rozvoj libovolného vektoru v řadu (a) lze tedy fyzikálně vysvětlit také tak, že libovolný tvar kmitu lze získat superpozicí vlastních tvarů kmitu. To je velmi důležitý poznatek z teorie lineární mechaniky.

31. Je-li $A = U^T \Lambda U$, bude

$$A^2 = U^T \Lambda U U^T \Lambda U = U^T \Lambda^2 U$$

Avšak $\Lambda^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$; podle (18.23) je stopa matice A^2 rovna součtu $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$. Jak se lze přesvědčit vynásobením, je stopou matice A^2 právě součet čtverců všech prvků. K důkazu použijeme označení

$$B = [b_{ij}] = A^2$$

Podle definice součinu

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk}$$

Stopa matice $B = A^2$ je

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} + b_{33} + \dots + b_{nn} &= \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \end{aligned}$$

Je tedy

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

což jsme měli dokázat.

32. Mají-li být vlastní vektory lineárně nezávislé, nesmí mezi nimi existovat žádná rovnice typu

$$c_1 x_{(1)} + c_2 x_{(2)} + \dots + c_n x_{(n)} = 0 \quad (a)$$

v níž by nebyly zároveň všechny konstanty c_k nulové. Danou úlohu budeme řešit sporem. Budeme předpokládat, že tato rovnice platí a že alespoň c_1 bude od nuly různé. Tím jsme úlohu nijak neomezili, poněvadž existuje-li aspoň jedna nenulová konstanta, můžeme ji označit c_1 . Rovnici (a) nyní znásobíme na obou stranách zleva výrazem

$$(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) \dots (A - \lambda_n I) \quad (b)$$

Poněvadž platí, že

$$\begin{aligned} (A - \lambda_k I) x_{(j)} &= A x_{(j)} - \lambda_k x_{(j)} = \\ &= \lambda_j x_{(j)} - \lambda_k x_{(j)} = x_{(j)} (\lambda_j - \lambda_k) \end{aligned} \quad (c)$$

vyjde nakonec na levé straně rovnice jediný nenulový člen, a to

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \dots (\lambda_1 - \lambda_n) = 0 \quad (d)$$

Na pravé straně máme ovšem nulu. Rovnice (d) může platit jen pro

$c_1 = 0$, což odporuje předpokladu. Proto rovnice (a) neplatí a vektory jsou vskutku lineárně nezávislé.

33. Podle věty Cayleyho-Hamiltonovy

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I) = 0 \quad (a)$$

Vlastní hodnoty matice B označíme $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$. Máme dokázat, že $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \dots = \Lambda_k = 0$, kdežto ostatní vlastní hodnoty $\Lambda_{k+1}, \Lambda_{k+2}, \dots, \Lambda_n$ jsou od nuly různé, takže platí

$$B^k (B - \Lambda_{k+1} I)(B - \Lambda_{k+2} I) \dots (B - \Lambda_n I) = 0 \quad (b)$$

Mohli bychom nyní závorky v rovnicích (a) a (b) vynásobit a za maticí B dosadit podle definice. Porovnáním součinitelů bychom tvrzení dokázali. Takový postup by však byl málo přehledný. Budeme proto postupovat poněkud jinak. Platí-li rovnice (b) obecně, platí i pro diagonalizované matice, neboť transformací (18.12) se vlastní hodnoty matice nemění. Pak

$$A = \Gamma \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \Gamma$$

kdežto matice B vznikne vynásobením činitelů

$$B_1 = \Gamma 0, (\lambda_2 - \lambda_1), (\lambda_3 - \lambda_1), \dots, (\lambda_n - \lambda_1) \Gamma$$

$$B_2 = \Gamma (\lambda_1 - \lambda_2), 0, (\lambda_3 - \lambda_2), \dots, (\lambda_n - \lambda_2) \Gamma$$

$$B_k = \Gamma (\lambda_1 - \lambda_k), (\lambda_2 - \lambda_k), \dots, (\lambda_{k-1} - \lambda_k), 0, (\lambda_{k+1} - \lambda_k), \dots, (\lambda_n - \lambda_k) \Gamma$$

Poněvadž se součin diagonálních matic řídí pravidlem

$$\begin{aligned} \Gamma a_1, a_2, \dots, a_n \Gamma \Gamma b_1, b_2, \dots, b_n \Gamma &= \\ &= \Gamma (a_1 b_1), (a_2 b_2), \dots, (a_n b_n) \Gamma \end{aligned}$$

jak se snadno přesvědčíme, bude mít matice B tvar

$$B = \Gamma 0, 0, \dots, 0, \Lambda_{k+1}, \Lambda_{k+2}, \dots, \Lambda_n \Gamma$$

kde

$$\Lambda_{k+1} = (\lambda_{k+1} - \lambda_1)(\lambda_{k+1} - \lambda_2) \dots (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$$

$$\Lambda_{k+2} = (\lambda_{k+2} - \lambda_1)(\lambda_{k+2} - \lambda_2) \dots (\lambda_{k+2} - \lambda_k)$$

$$\Lambda_n = (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_k)$$

Uvedeme ještě číselný příklad:

Matice

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

má vlastní hodnoty $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$. Matice

$$B = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) =$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

má vlastní hodnoty $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 45$, takže je skutečně nulová vlastní hodnota dvojnásobná a

$$\Lambda_3 = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) = (3 - 18)(3 - 6) = 45$$

34. Z charakteristického polynomu $|A - \lambda I| = 0$, tj.

$$(-5 - \lambda)(1 - \lambda) + 27 = 0$$

nalezneme vlastní hodnoty $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -8$. Příslušné vlastní vektory označíme h_1 , h_2 . Ze soustavy

$$[A]\{h_i\} = \lambda_i\{h_i\} \quad (i = 1, 2)$$

vyjde pro $\lambda_1 = 4$ normovaný vlastní vektor

$$h_1 = \left\{ \frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}^T$$

a obdobně pro $\lambda_2 = -8$ vyjde

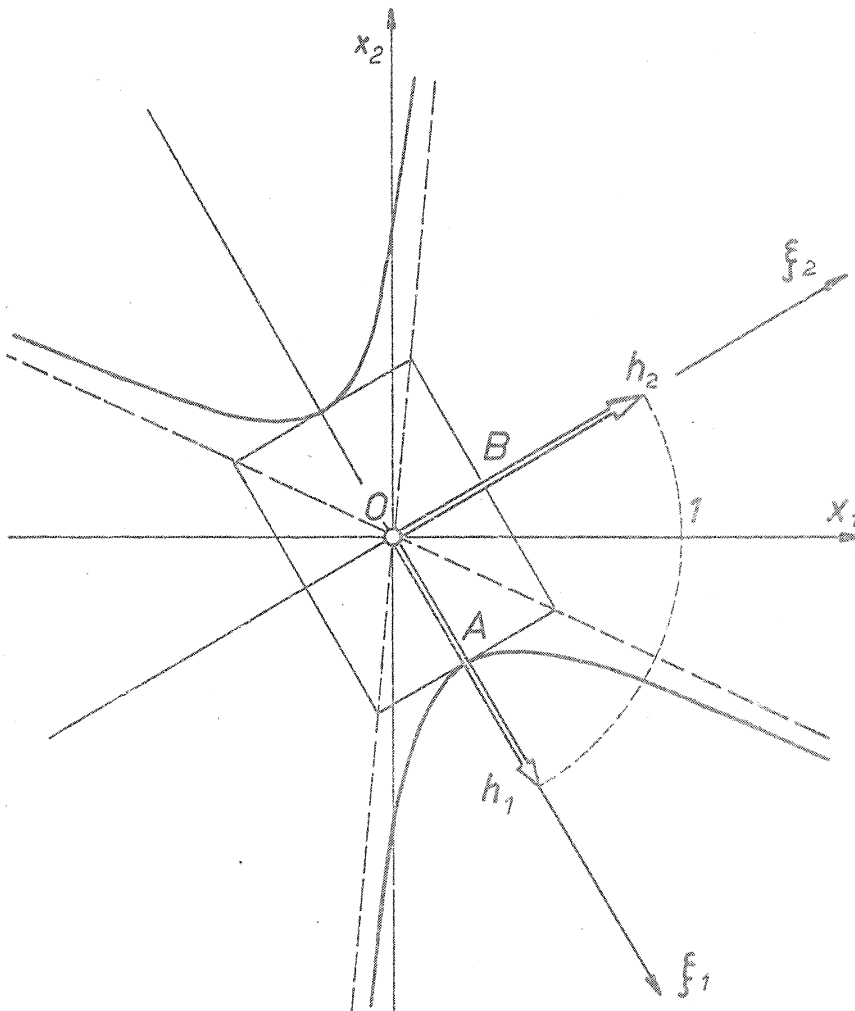
$$h_2 = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \right\}^T$$

Tyto vektory (jednotkové délky) jsou v souřadnicích λ_1 , λ_2 zakresleny na obr. 28. Jsou ortogonální, neboť $h_1^T h_2 = 0$, a jsou normované, neboť $h_1^T h_1 = h_2^T h_2 = 1$. Zkráceně též říkáme, že jsou "ortonormální". Tvoří transformační matici

$$U = [h_1 \ h_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Kuželosečka pro danou matici A má rovnici

$$x^T A x = -5x_1^2 - 6\sqrt{3}x_1x_2 + x_2^2 = 1$$



Obr. 28

Snadno se přesvědčíme, že jde o hyperbolu se středem v počátku souřadnic, která je zakreslena na témže obrázku. Její asymptoty jsou vytaženy čárkovaně.

Nyní budeme matici A diagonalizovat:

$$\Lambda = U^T A U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

V nových souřadnicích $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}^T$, které spadají do směrů \vec{h}_1 , \vec{h}_2 , má kuželosečka rovnici

$$\xi^T \Lambda \xi = 4 \xi_1^2 - 8 \xi_2^2 = 1$$

což - přepsáním do standardního tvaru

$$\frac{\xi_1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{\xi_2^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

- dává poloosy hyperboly

$$a = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$b = 1 \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1,03536$$

Hlavní poloosa \overline{OA} je reálná, vedlejší \overline{OB} je imaginární. (Vrchol B leží na kuželosečce jen tehdy, jsou-li jeho souřadnice $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1,03536$, jak se lze přesvědčit dosazením do rovnice kuželosečky). Skutečně pak platí, že

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{0,5^2} = \frac{1}{0,25} = 4$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{b^2} = -\frac{1}{0,3536^2} = -\frac{1}{0,125} = -8$$

Poznámka: Kdyby matice A byla pozitivně definitní, byly by její vlastní hodnoty kladné, takže kuželosečka by mohla být jen elipsou nebo kružnicí. "Pozitivně definitní matice" je užší pojem než "souměrná matice". Souměrnost zaručuje existenci reálných vlastních hodnot, pozitivní definitnost zaručuje, že vlastní hodnoty jsou reálné a kladné. V úlohách o vlastních kmitcích mechanických soustav mají vlastní hodnoty matice význam čtverců kruhových frekvencí volných kmitů. Pozitivní definitnost matice pak zaručuje existenci reálných kruhových frekvencí při volném kmitání, což je poznatek základního fyzikálního významu!

Použitá literatura

V tomto seznamu uvádíme jen prameny, jež nebyly uvedeny ve skriptech k první části semináře.

- /1/ Collatz, R. : Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, 2. vyd., Akad. Verlagsgesellschaft Gesset et Portig, Lipsko 1963. (Český překlad SNTL, Praha 1965).
- /2/ Trench, W.F. - Kolman, B.: Multivariable Calculus with Linear Algebra and Series. Academic Press, New York 1972.
- /3/ Zieknkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science. Univ. of Wales, Swansea 1971.
- /4/ Westlake, J.R. : Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations. John Wiley, New York 1968.
- /5/ Desai, C.S. - Abel, J.P.: Introduction to the Finite Element Method. Van Nostrand Reinhold Publ., New York 1972.
- /6/ Smith, G.N. : An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering. Appl. Science Publ., London 1971.
- /7/ Rao, C.R. - Mitra, S.K.: Generalized Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley, New York 1971.
- /8/ Bellman, R. : Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill, New York 1960.
- /9/ Adzericho, S.Je. - Polonskij, I.M. - Stodolnik, N.A.: Uvedeniye v linějnuju algebru. Vyšejšaja škola, Minsk 1968.

Název publikace: MATICOVÉ METODY V PEVNOSTNÍCH VÝPOČTECH
II. část
STAVBA STROJŮ XXV

Autor: Prof. Ing. Cyril Höschl

Počet stran: 134

Formát: A 4

Náklad: 250 výtisků

Číslo publikace: 60/812/73 (752)

Vydal a rozmnožil: Dům techniky ČVTS Praha,
Gorkého nám. 23, Praha 1

Datum vydání: 1973