

## ÚVOD DO PROBLÉMU NESTABILIT KAPALNÝCH STĚNOVÝCH FILMŮ

Stanislav Knotek / Miroslav Jícha

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav,  
Odbor termomechaniky a techniky prostředí, Brno

### Úvod

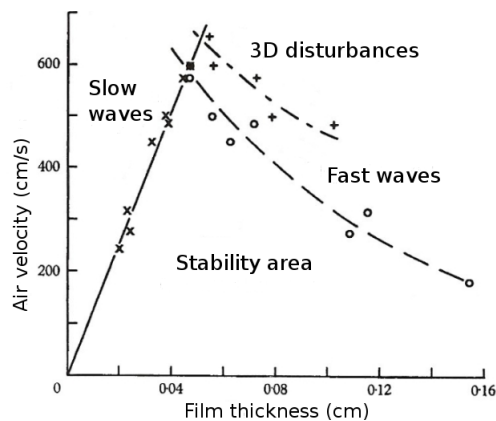
Studium problematiky kapalného stěnového filmu je obvykle pojmáno z hlediska základního výzkumu. Současně je však přirozeně motivováno četnými aplikacemi v technické praxi. Kapalné filmy významně ovlivňují přenos tepla z pevných povrchů, objevují se jako důsledek kondenzace, jsou využívány v technologii povlakových vrstev či ke snížení tření mezi tekutinou a pevnou stěnou. Z technických zařízení je tedy možné jmenovat například systémy tepelných výměníků, chladicí zařízení, potrubní vedení v nukleárním a petrochemickém průmyslu a v neposlední řadě je problematika součástí aplikovaného výzkumu v aviatice [15], [24].

Speciální vlastností kapalných filmů je výskyt různých typů hydrodynamické nestability vyvolané zejména prouděním plynu v blízkosti filmu. Dosavadní výzkum ukazuje, že nestability mají svůj původ již na mikroskopické úrovni [25]. Jejich projevy pak sahají od dvourozměrných kapilárních vln pozorovatelných na povrchu filmu až k odtrhávání kapek či celých fragmentů tekutiny tvořící film.

Cílem článku je na základě experimentálních poznatků prezentovat jednotlivé typy nestabilit a pomocí vybraných prací představit základní principy jejich matematického modelování.

### Experimentální poznatky

Jednou z prvních prací, která se teoreticky i experimentálně zabývá studiem nestabilit tenkého filmu na rovné desce, je článek [9]. Kromě matematické analýzy nestabilit obsahuje rovněž experimentální vyhodnocení typů vln v závislosti na tloušťce filmu viz obrázek 1.



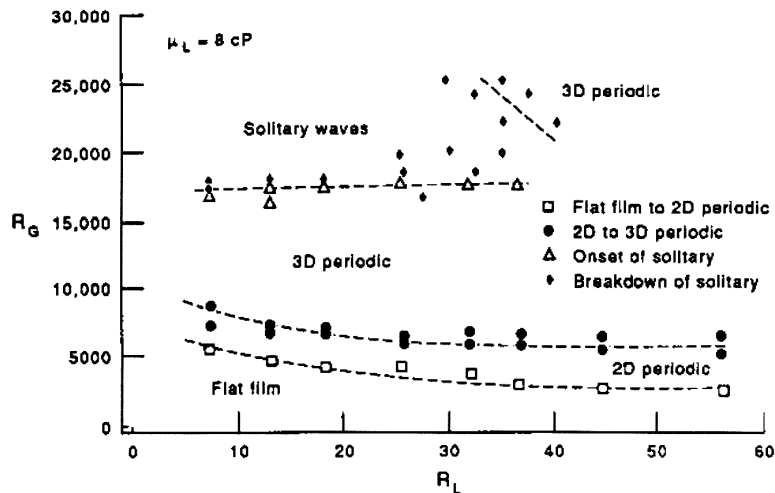
Obrázek 1: Převzato z [9].

V daném experimentu bylo při konstantní rychlosti proudícího vzduchu Reynoldsovo číslo kapaliny řízeno velikostí jejího průtoku, který se projevuje různou tloušťkou filmu. Pro velmi nízká Reynoldsova čísla resp. tloušťku filmu byl objeven dosud nepozorovaný typ neharmonických vln. Tyto vlny se šíří menší rychlostí než povrch filmu, mají příkrou přední a dlouhou zadní

část. Hřebeny vln jsou od sebe vzdáleny nejméně 10 cm, jejich amplituda roste se snižující se tloušťkou filmu. Název pomalé vlny koresponduje s označením tzv. rychlých vln, které se objevují při větších tloušťkách filmu. Tyto jsou harmonické, s vlnovou délkou 1-2 cm a šíří se rychleji než povrch filmu. Z obrázku 1 je zřejmé, že existuje taková tloušťka filmu, pro kterou je oblast stability mezi oblastmi rychlých a pomalých vln nejrozlehlejší. V daném experimentu byla naměřena tloušťka 0.46 mm.

Nestability obdobně tenkých filmů ( $<0.5$  mm) pro řádově větší rychlosti proudícího plynu ( $>20$  m/s) vyšetřovali autoři Asali a Hanratty v [3]. Vzniklé nestability mají povahu solitárních vln nazývaných ripples. Vykazují tentýž geometrický průběh jako pomalé vlny v [9]. Vzhledem k velmi rozdílným fyzikálním podmínkám, za kterých se oba typy nestabilit vyskytují, autoři usuzují, že pomalé vlny nejsou tytéž podstaty jako ripples.

Vyšetřováním vln na hladině kapalinové vrstvy s o řád větší tloušťkou (do 6 mm) a pro plné spektrum rychlostí proudícího plynu se zabývali autoři Jurman a McCready ve studiích [19] a [22]. Na základě experimentu v kanálu o průřezu  $0.3 \times 0.025$  m a délce 9 m získali celkem 4 různé typy chování kapalného filmu, které zakreslili v závislosti na Reynoldsových číslech do map pro různé viskozity tekutin. Obrázek 2 zachycuje mapu těchto režimů pro viskozitu  $\mu = 0.008$  Pa·s blížíci se viskozitě vody.



Obrázek 2: Mapa režimů vln. Převzato z [22].

Experimenty ukazují, že při vrůstající rychlosti plynu původně hladký film přechází ve dvoudimenzinální sinusoidální vlny, tyto se následně rozrušují a z vln s dostatečně velkým poměrem amplitudy ku tloušťce kapalně vrstvy ( $a/h \sim 1$ ) a vlnové délky blízké spektrálnímu píku, přičemž  $a/\lambda = 0.1 - 0.15$ , vznikají působením smykových sil asymetrické solitární vlny s příkrou přední a sestupnou zadní částí tj. s geometrickým průběhem analogickým pomalým vlnám viz výše. Autoři usuzují, že kritický poměr  $a/h$  omezuje vznik solitárních vln jen pro dostatečně malé tloušťky kapalně vrstvy ( $Re_L < 30$  viz obrázek 2) zřejmě vlivem disperzního efektu. Autoři rovněž předpokládají, že pozorované solitární vlny jsou v podstatě téhož typu jako tzv. roll waves, viz například [10], pro něž nedochází k rolování.

Z obrázků 1 a 2 lze pozorovat konzistenci mezi experimenty s přihlédnutím ke skutečnosti, že ve druhém případě nebyl pozorován natolik tenký film jako v případě práce [9].

Z uvedených studií vyplývá, že kapalně filmy vykazují v závislosti na tloušťce kapalně vrstvy a rychlosti proudícího plynu následující režimy nestabilit :

- tzv. pomalé vlny v případě velmi tenkých filmů (do 0,5 mm) šířící se rychlostí menší než povrch kapaliny a zanikající pro nadkritické hodnoty tloušťky filmu. Na hladkém povrchu se pak při větších rychlostech plynu začnou tvořit
- dvoudimenzionální periodické vlny s fázovou rychlostí větší než rychlost povrchu kapaliny. Tyto pro velmi tenké filmy mohou koexistovat s předchozím typem pomalých vln, pro větší tloušťky filmu však při větších rychlostech plynu přecházejí ve
- vlny s třidimenzionálním charakterem, které se při dostatečně nízkých hodnotách Reynoldsova čísla kapalinové vrstvy redukuje na
- solitární vlny velkých amplitud s geometrickým charakterem podobným pomalým vlnám, tj. příkrou přední a sestupnou zadní částí, případně na
- tzv. ripples vznikající z dvoudimenzionálních periodických vln pro velmi tenké filmy a vysoké rychlosti plynu, přičemž pro nadkritické rychlosti plynu může u těchto, případně předchozích solitárních vln, nastávat
- tzv. atomizace, tj. odtržení fragmentů kapaliny z vrcholů vln za vzniku kapek procesem sekundární atomizace.

### **Fyzikální aspekty vzniku nestabilit**

Klasická teorie hydrodynamické nestability, viz [21], vysvětluje destabilizaci kapalných vrstev teorií Kelvinovy-Helmholtzovy nestability. Jejím principem je vznik tlakových propadů a extrémů nad apriori zvlněným povrchem. Vzhledem ke geometrickým specifikám nestabilit tenkých filmů nemůže být tato teorie použita k dostatečnému popisu pozorovaných jevů. Autoři ve studii [8] uvádějí, že v případě vln na povrchu kapalných filmů není energie transmittována z hlavního proudu, neboť vlnová rychlost je odvislá (obvykle větší) od rychlosti kapalinového proudu. To znamená, že vlny na povrchu nejsou důsledkem infinitezimálních Tollmienových-Schlichtingových vln, které jsou základem vzniku turbulence, viz například [25], [23], a mohou být zodpovědné pouze za apriorní poruchy povrchu filmu. Podobně autoři usuzují, že vlny nejsou důsledkem turbulence vzduchové vrstvy nad filmem, neboť hladký film byl pozorován i v případech turbulentního proudu plynu. Konečnou hypotézou autorů, dnes již obecně přijímanou, je tvrzení, že vlny získávají energii z proudu plynu skrze kolísání tlaku a smykových napětí způsobené nerovnostmi na povrchu filmu. Ke vzniku nestabilit tedy obecně dochází pokud vliv destabilizačních sil setrvačných, smykových a tlakových převáží nad účinky stabilizačních sil tíhových a povrchového napětí. Dle [21] má přitom povrchové napětí vliv pouze v případě malých vln ( $\lambda < 7$  cm pro rozhraní voda-vzduch). Vlny s ještě kratší vlnovou délkou ( $< 4$  mm) již nejsou přímo ovlivňovány gravitačním působením a rozhodujícím stabilizačním faktorem je tak pouze povrchové napětí.

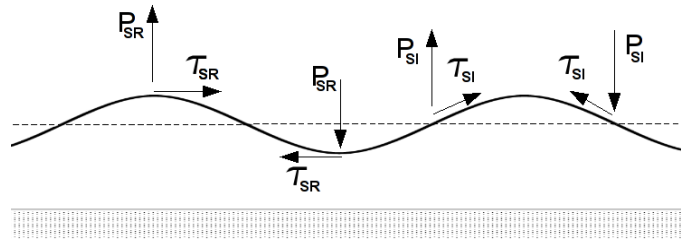
Snaha o sestavení matematických modelů vznikajících vln motivovala koncept rozkladu výchylek tlakových resp. smykových sil  $P'_S$  resp.  $\tau'_S$  pomocí reálných a imaginárních amplitud

$\hat{P}_{SR}, \hat{P}_{SI}$  resp.  $\hat{\tau}_{SR}, \hat{\tau}_{SI}$ . Ze vztahů (1), (2) pro reálné složky fluktuací  $P'_S, \tau'_S$

$$\text{Re}[P'_S] = a \exp(\alpha C_1 t) [\hat{P}_{SR} \cos \alpha(x - C_R t) - \hat{P}_{SI} \sin \alpha(x - C_R t)], \quad (1)$$

$$\text{Re}[\tau'_S] = a \exp(\alpha C_1 t) [\hat{\tau}_{SR} \cos \alpha(x - C_R t) - \hat{\tau}_{SI} \sin \alpha(x - C_R t)]. \quad (2)$$

přítom plyne, že reálné komponenty veličin  $P'_S, \tau'_S$ , tj. veličiny  $\hat{P}_{SR}$  a  $\hat{\tau}_{SR}$ , jsou ve fázi s amplitudou vln a imaginární komponenty  $\hat{P}_{SI}$  a  $\hat{\tau}_{SI}$  jsou ve fázi s „nulovými body“ vlny viz obrázek 3. Fázová posunutí teoreticky harmonických průběhů výchylek  $P'_S, \tau'_S$  vůči povrchu kapaliny tedy závisí na poměrech mezi jejich reálnými a imaginárními amplitudami.



Obrázek 3: Fyzikální význam veličin  $\hat{P}_{SR}, \hat{P}_{SI}, \hat{\tau}_{SR}, \hat{\tau}_{SI}$ .

Fyzikální význam jednotlivých komponent je podán například v přehledové práci [11]. Z analýzy vyplývá, že vliv tlakových sil je dle principu Bernoulliovy rovnice zásadní pro vlny s velkou amplitudou, význam smykových sil pak vzrůstá pro rostoucí rychlosti proudícího plynu. Uveďme v dalším posouzení vlivu jednotlivých komponent tlakových a smykových sil ve vztahu ke konkrétním typům nestabilit, jejichž výčet byl uveden v předchozí části.

Dvoudimenzionální vlny jsou podporovány tlakovými silami, které působí ve fázi s náběhovou částí vlny. Této situaci odpovídá kladná hodnota  $\hat{P}_{SI}$  a přenos energie z plynné fáze do kapalně díky rychlostním fluktuacím ve směru normálovém k rozhraní. Pokud přenos této energie překračuje její disipaci v kapalině, dochází k růstu nestabilit.

Druhým způsobem přenosu energie ze vzduchu do kapalinového filmu je působení smykového napětí ve fázi s vrcholy vln, ke kterému dochází díky rychlostním fluktuacím v tangenciálním směru. Tomuto způsobu odpovídá kladná hodnota  $\hat{\tau}_{SR}$ .

Protože je ovšem amplituda smykového napětí v porovnání s amplitudou tlakových sil malá, je význam  $\hat{\tau}_S$  obvykle druhotný. V případě velmi tenkých filmů ( $\tanh \alpha \bar{h} \rightarrow 0$ ) jsou však rychlostní fluktuace v tangenciálním směru mnohem větší než ve směru normálovém. Pak je význam smykového napětí rovněž významný a za hraničních konstelací může dokonce dominovat. Vlny vznikající tímto mechanismem se od vln na silnějších vrstvách tvarově odlišují. Mají příkrou přední a postupně ustupující zadní část. Jedná se o kapilární vlny, případně tzv. ripples, které se objevují v případě tenkých filmů a velkých rychlostí vzduchu a tzv. pomalé vlny pro menší rychlosti plynu.

Ačkoliv smykové síly ve fázi s náběhovou částí vlny  $\hat{\tau}_{SI}$  mají obecně destabilizační charakter, autoři v článku [2] uvádějí, že pro velké vlnové délky mohou mít naopak stabilizační účinek.

Pro silnější vrstvy kapaliny se pro vysoké rychlosti vzduchu stávají dominantním destabilizačním faktorem tlakové fluktuace ve fázi s vrcholem vln reprezentované amplitudou  $\hat{P}_{SR}$ . Příslušné vlny se označují jako solitární, případně roll waves. V případě velmi vysokých rychlostí mohou destabilizační účinky  $\hat{P}_{SR}$  převážit nad stabilizační funkcí povrchového napětí. Za těchto okolností dochází k odtržení menších vlnek z vrcholu solitární vlny - atomizaci.

### Základy analýzy nestabilit

Přístupy k analýze problému se odvíjejí od geometrických charakteristik problému i předpokládaných nestabilit. Kromě kriteria mělké vody  $h/\lambda \ll 1$  zobecněného na charakteristiku  $\alpha h$  řešitelé dále užívají charakteristiky vlivu horní stěny kanálu (potrubí) resp. turbulence vzduchové vrstvy na silové účinky na rozhraní ve tvaru  $h/H$  resp.  $H/\lambda$ , kde  $H$  je mocnost vzduchové vrstvy nad rozhraním.

V závislosti na hodnotách uvedených kriterií bylo zformulováno několik přístupů k analýze nestabilit vycházejících ze zjednodušujícího omezení na dvourozměrné paralelní proudění. Principem těchto metod je vyšetření charakteru proměnných příslušných pohybových rovnic. Výchozím bodem této analýzy je zavedení funkce

$$h' = a \exp i\alpha(x - Ct) \quad (3)$$

jejíž reálná složka

$$\text{Re}[h'] = a \exp(\alpha C_I t) \cos \alpha(x - C_R t) \quad (4)$$

popisuje výchylku rozhraní od rovnovážné polohy  $\bar{h}$  pomocí funkční závislosti na vlnovém čísle  $\alpha = 2\pi/\lambda$ , souřadnici ve směru proudění  $x$ , komplexní vlnové rychlosti  $C = C_R + iC_I$  a čase  $t$ .

Vlny na rozhraní jsou doprovázeny výchylkami rychlostního pole kapalinové i plynné vrstvy, výchylkami tlaku v plynné fázi a smykového napětí na rozhraní. Užitím obvyklého Reynoldsova rozkladu na průměrnou a flukтуаční složku těchto veličin obdržíme po řadě vztahy :

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(y) + u', & v &= v' \\ U &= \bar{U}(y) + U', & V &= V' \\ P &= \bar{P} + P', \\ \tau_S &= \bar{\tau}_S + \tau'_S. \end{aligned} \quad (5)$$

Předpokladem lineární analýzy je požadavek, aby amplituda  $a$  výchylky  $h'$  byla dostatečně malá pro splnění linearity ve smyslu vztahů :

$$\frac{u'}{\hat{u}(y)} = \frac{v'}{\hat{v}(y)} = \frac{U'}{\hat{U}(y)} = \frac{V'}{\hat{V}(y)} = \frac{P'_S}{\hat{P}_S} = \frac{\tau'_S}{\hat{\tau}_S} = a \exp i\alpha(x - Ct). \quad (6)$$

Amplitudy  $a\hat{u}(y)$ ,  $a\hat{v}(y)$ ,  $a\hat{U}(y)$ ,  $a\hat{V}(y)$ ,  $a\hat{P}_S$  a  $a\hat{\tau}_S$  jsou komplexní. Separací reálných složek veličin  $P'_S$ ,  $\tau'_S$  obdržíme vztahy (1), (2).

Principem lineární analýzy stability je dosažení veličin definovaných vztahy (3) a (6) do pohybových rovnic a vyšetření jejich průběhu v závislosti na geometrických a fyzikálních parametrech definovaných okrajovými podmínkami. Cílem analýzy je zejména určení rychlosti  $C_I$  pro predikci trendu růstu nestability v závislosti na vlnovém čísle  $\alpha$ , rychlosti vnějšího proudu  $U$  a tloušťce kapalně vrstvy  $h$ . Ze vztahu (4) přitom plyne, že podmínka  $C_I = 0$  resp.  $C_I > 0$  definuje přechod ze stabilního režimu v nestabilní resp. růst vln. Nejrychleji rostoucí vlny jsou takové, pro něž je součin  $\alpha C_I$  maximální.

Konkrétní tvar příslušných pohybových rovnic je odvozen z Navierových-Stokesových rovnic za předpokladu zjednodušení v důsledku geometrických specifik kvantifikovaných výše uvedenými geometrickými kriterii a s využitím adekvátních modelů veličin definovaných vztahy (6) zejména tlakových resp. smykových účinků  $P_S$ ,  $\tau_S$  a amplitud jejich výchylek  $\hat{P}_{SR}$ ,  $\hat{P}_{SI}$  resp.  $\hat{\tau}_{SR}$ ,  $\hat{\tau}_{SI}$ .

### **Historický přehled**

Problematika nestability kapalinového filmu v důsledku jeho expozice proudícímu vzduchu je intenzivně studována přibližně od poloviny dvacátého století. Z velkého množství článků zabývajících se příbuznou problematikou se však ve velké míře jedná o práce studující spíše než kapalinový film tenké vrstvy o tloušťce několika milimetrů případně o práce zabývající se nestabilitou tekutin v potrubí. Vzhledem k analogickým typům nestabilit a matematických přístupů jejich modelování mají však i tyto práce svou hodnotu pro analýzu nestability stěnového kapalinového filmu.

Základy matematického modelování fenoménu podali ve svých člancích mimojiné zejména T.B. Benjamin, J.W. Miles a T.J. Hanratty. Myšlenku vlivu tlakových a třecích sil působících na povrch filmu a metodiku jejich výpočtu precizoval ve svém článku [9], zmíněném v úvodu této práce, Craik. Předností článku jsou výsledky experimentů týkající se přímo problematiky tenkých stěnových filmů, o něž autor opírá výsledky svého přístupu.

Poměrně velkým přínosem k diskutované problematice byly téměř po celé půlstoletí práce pod vedením T.J. Hanrattyho. V článku [8] ověřil použitelnost výpočtu třecích a tlakových účinků dle Benjamina a Milese pro případ vln malých amplitud. Vznikem a modelováním větších solitárních vln se zabývají články [17] a [2]. Prací komplexního přehledového charakteru je kapitola [11] podávající přístupy k modelování všech základních nestabilit na kapalinovém filmu. Přehledný výklad konkrétního modelu uvádí článek [13]. Mezi dalšími pracemi autora je třeba vyzdvihnout již zmíněný článek [3], řešící nestabilitu velmi tenkých filmů pro vysoké rychlosti proudícího plynu.

Na dosud uvedené studie navazují práce dvojice autorů L.A. Jurman a M.J. McCready. Ve svých člancích [18], [19] a [22] se zabývají návrhem nelineární rovnice včetně srovnání s výsledky lineárního přístupu předchozích autorů a experimentálním pozorováním. Motivem nelineárního přístupu je zejména nekorektnost Fourierova principu při modelování nelineárních solitárních vln, které nevznikají přímým následkem růstu malých rozruchů [19]. Odvození nelineární rovnice vychází z integrálních tvarů pohybové rovnice a rovnice kontinuity.

Výše uvedené práce berou v úvahu autoři v článku [15], který představuje pokus o komplexní přístup k problému kapalinových filmů. Článek uvádí algoritmus na řešení vývoje filmu za užití příslušných submodelů pro související fyzikální fenomény tj. například vliv dopadajících kapek nebo typ nestability filmu. Autoři zavádějí tří-zónovou výpočetní oblast sestávající z kapalinového filmu a viskózní a neviskózní smykové vrstvy proudícího vzduchu. Algoritmus je založen na systému vzájemně propojených integrálně-diferenciálních rovnic sestavených pro příslušné zóny. Při řešení nestabilit filmu autoři vycházejí z článků [19] a [22] pro případ periodických vln a z práce [6] pro případ solitárních vln.

Autoři Ludwig a Hornung v článku [14] následují standardní postup rozděleného přístupu, kdy třecí a tlakové účinky proudícího vzduchu jsou řešeny na základě Orrovy-Sommerfeldovy diferenciální rovnice a následně užity při výpočtu nestabilních frekvencí (vlnových délek) kapalinového filmu pomocí adekvátní pohybové rovnice. Cílem postupu je sestavení funkce korelující s normálovou složkou rychlosti výchylky hřebenu vlny v závislosti na vlnové délce, tloušťce filmu, Reynoldsově čísle a rychlostním profilu vzduchové vrstvy a smykovém napětí kapaliny.

Obdobný přístup jako v předchozí práci, tj. popis problému nestability systémem dvou simultánně řešených Orrových-Sommerfeldových rovnic, prezentují v novějších člancích například Kuru [12], Miesen [16], Boomkamp [5] a Tsai [26].

### Přístupy k řešení

Klasický přístup používaný autory nejen v počátečních pokusech o řešení spočívá v rozdělení úlohy na výpočet smykových a tlakových sil působících na pevný povrch a vlastní řešení nestabilit. Jedná se o tzv. kvazi-statickou aproximaci a tzv. „rozdělený přístup“ [16]. Principiálně jej lze realizovat za předpokladu dostatečně velkých poměrů hustot a viskozit uvažovaných fází, který je pro případ voda-vzduch splněn. Vypočtené smykové a tlakové účinky jsou následně zahrnuty v okrajových podmínkách pohybových rovnic, případně jako jejich parametry. Vlastní pohybové rovnice kapalného filmu vedou k numerickému řešení Orrovy-Sommerfeldovy rovnice [8], [9], [14] nebo přibližnému řešení integrálním přístupem [13], [2], [7], [19].

Výpočet tlakových a smykových sil je realizován v závislosti na poměru vlnové délky uvažovaných vln ku vzdálenosti horní stěny kanálu. Oba přístupy jsou stručně popsány v přehledovém článku [11]. V případě  $\lambda < 2\pi H$ , tj. vlnové délky jsou malé, případně vrstva plynu je dostatečně velká, případně nekonečná, jsou smykové a tlakové síly více než horní stěnou ovlivňovány turbulencí plynné vrstvy nad rozhraním [19]. Za tohoto předpokladu sestavil příslušný postup se zahrnutím modelů turbulence Abrams [1]. V případě  $\lambda \gg H$  se hledané veličiny spočtou integrací pohybových rovnic plynné vrstvy. Příslušné vztahy uvádí přehledově Hanratty [11], Lin [13] a precizují je Miya [17], Andreussi [2], Bruno [7].

V poslední době se objevují numerické přístupy založené na simultánním (coupled) řešení obou fází popsaných Orrovou-Sommerfeldovou rovnicí. Tento postup užívá například Kuru [12] pro výpočet nestabilit v potrubí, Yecko [27] při řešení nestability dvou viskózních vrstev a konečně Miesen [16], Boomkamp [5] a Tsai [26] k řešení nestability kapalných filmů.

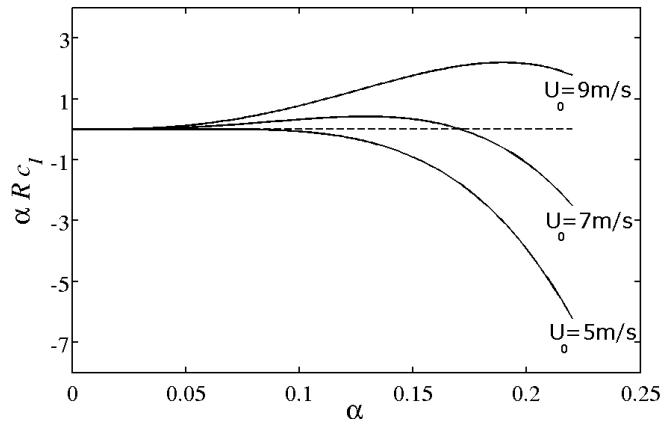
### Pomalé vlny - Craik, 1966

Craik v článku [9] pomocí experimentů odhalil speciální typ nestability velmi tenkých filmů ( $< 0.5$  mm) pro malé rychlosti, viz pomalé vlny z úvodní části předloženého článku, a jednak se snažil sestavit model predikce těchto nestabilit. Autor předpokládá nekonečnou tloušťku plynné vrstvy,  $\alpha \ll 1$ ,  $\alpha R < O(1)$ ,  $\alpha R|C| < O(1)$ , kde  $\alpha = 2\pi h/\lambda$  a  $R = Vh/\nu$  je Reynoldsovo číslo filmu, kde rychlost rozhraní  $V$  je spočtená pomocí vztahu  $U_0/v_* = 8.74(Hv_*/2\nu_a)^{1/7}$  viz [23]. Principem řešení je rozdělený přístup, ve kterém jsou smykové a tlakové účinky na povrch filmu počítány dle Benjaminova viz. [4]. S ohledem na význam smykových a tlakových sil za předpokladu uvažovaných geometrických a fyzikálních podmínek Craik zanedbává vliv amplitud  $\hat{P}_{SI}$  a  $\hat{\tau}_{SR}$ . Pomocí Benjaminova řešení Orrovy-Sommerfeldovy rovnice metodou řad a uvedených předpokladů dospívá ke vztahu pro parametr růstu nestabilit

$$C_I = \frac{\alpha}{3R} \left[ \frac{I}{c_f} (\alpha R + \frac{3}{2} \beta (\alpha R)^{\frac{2}{3}}) - \alpha^2 R^2 T - R^2 G \right]$$

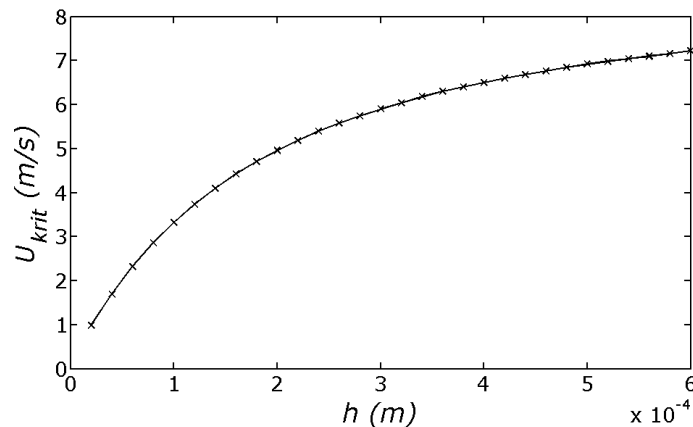
kde  $T^{-1} = \rho h V^2 / \sigma$  resp.  $G^{-1} = V^2 / gh$  je Weberovo resp. Freudovo číslo,  $\beta$  zohledňuje poměr viskozit a hustot uvažovaných tekutin,  $I/c_f$  je konstantní podíl charakteristiky plynného proudu a třecího koeficientu. Na obrázku 4 je zobrazena závislost bezrozměrného parametru růstu nestabilit na vlnovém čísle  $\alpha$  pro film o tloušťce 0.2 mm, trojí rychlost  $U_0$  a  $I/c_f = 220$ .

Ačkoliv je z obrázku zřejmé, že pro zvolené rychlosti  $U_0$  není splněna výše uvedená podmínka  $\alpha R|C| < O(1)$ , autor považuje uvedené řešení za dostatečně přesné za zjednodušených podmínek  $\alpha^2 \ll 1$  a  $\alpha R \ll 6$ . Z těchto vyplývá, že metoda je použitelná přibližně do kritické tloušťky 0.45 mm největší nestability z obrázku 1.



Obrázek 4: Parametr růstu nestabilit.

Obrázek 5 zobrazuje kritické rychlosti pro vznik studovaných pomalých vln, tj. takové rychlosti  $U_0$ , pro něž existuje takové vlnové číslo  $\alpha$ , že platí  $\alpha R C_I > 0$ .



Obrázek 5: Závislost kritické rychlosti na tloušťce filmu.

### Kapilární vlny za vysokých rychlostí - Asali, 1993

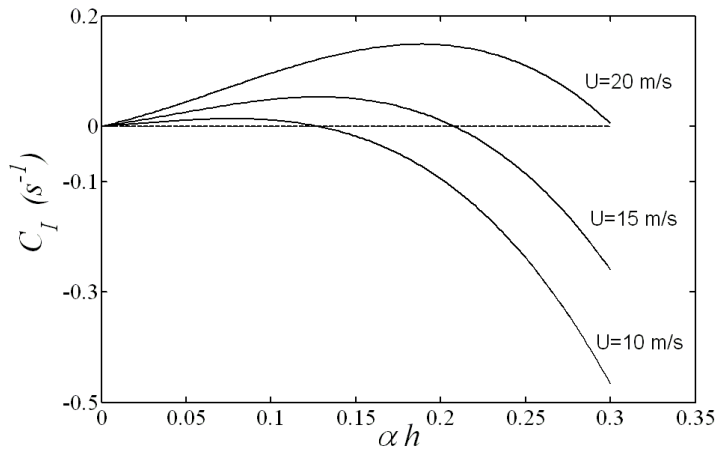
V protikladu k předchozí práci se Asali zabývá vyšetřováním nestability a parametrů kapilárních vln (ripples) vznikajících na velmi tenkých filmech v potrubí za velkých rychlostí proudícího plynu ( $> 20$  m/s). Jedná se o vlnky s příkrou přední částí třídimenzionálního charakteru přecházející při větších rychlostech plynu v solitární vlny (roll waves). Problém nestability je řešen metodou integrace pohybových rovnic vedoucí k definici veličin

$$u_a = \int_0^h u \, dy, \quad \Gamma = \frac{1}{hu_a^2} \int_0^h u^2 \, dy.$$

Substitucí veličin s vlastnostmi (5),(6) a vztahu pro tlak v kapalině

$$P = P_S + g(h - y)\rho_L \sin\beta - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$





Obrázek 6: Parametr růstu nestabilit.

do pohybových rovnic, lze jejich linearizací obdržet (blíže viz [11]) rovnici pro komplexní rychlost  $C = C_R + C_I$ :

$$C^2 + \bar{u}_a^2 \bar{\Gamma} - 2\bar{u}_a \bar{\Gamma} C - \bar{h} \bar{u}_a^2 \hat{\Gamma} = i \frac{\hat{\tau}_S - \hat{\tau}_W}{\rho_L \alpha} - i \frac{\bar{\tau}_S - \bar{\tau}_W}{\alpha \bar{h} \rho_L} + \bar{h} \frac{\hat{P}_S}{\rho_L} + g \bar{h} \sin \beta + \frac{\alpha^2 \sigma \bar{h}}{\rho_L}, \quad (7)$$

kde  $\tau_W$  je smykové napětí na stěně,  $\rho_L$  hustota kapaliny,  $\sigma$  povrchové napětí a  $\beta$  úhel náklonu stěny vůči vektoru tíhového zrychlení  $g$ . Řešení rovnice vyžaduje vyčíslení veličin  $\hat{P}_S$ ,  $\hat{\tau}_S$ ,  $\hat{\tau}_W$ , a  $\hat{\Gamma}$ . S ohledem na velké vlnové délky ( $\alpha \bar{h} \ll O(1)$ ) a malý poměr  $\bar{h}/H$  jsou veličiny  $\hat{\tau}_W$  a  $\hat{\Gamma}$  počítány za předpokladu nerušeného laminárního filmu viz [11]:

$$\frac{h \hat{\tau}_W}{\bar{\tau}_S} = \frac{3}{2} \left( \frac{C}{\bar{u}_a} - 2 \right) - \frac{1}{2} \frac{\bar{h} \hat{\tau}_S}{\bar{\tau}_S},$$

$$\bar{h} \hat{\Gamma} = \frac{1}{270} \left( 90 - \frac{45C}{\bar{u}_a} \right) + 3 \frac{\hat{\tau}_S \bar{h}}{\bar{\tau}_S},$$

kde  $\bar{\tau}_S \cong \bar{\tau}_W = 2\bar{u}_a \mu_L / \bar{h} = 2\rho_L \bar{u}_a^2 / \text{Re}_L$ . Amplitudy výchylek smykových a tlakových sil jsou aproximovány s využitím výpočtů dle Abramse [1] pomocí vztahů

$$\frac{\hat{\tau}_{SR}}{\alpha \bar{\tau}_S} \cong \frac{\hat{\tau}_{SI}}{\alpha \bar{\tau}_S} \cong 7, \quad \frac{\hat{P}_{SR}}{\alpha \bar{\tau}_S} \cong -78, \quad \frac{\hat{P}_{SI}}{\alpha \bar{\tau}_S} \cong 45.$$

Separací rovnice (7) na reálnou a imaginární část, substitucí uvedených vztahů pro  $\hat{P}_S$ ,  $\hat{\tau}_S$ ,  $\hat{\tau}_W$  a  $\hat{\Gamma}$  a zanedbáním členů násobených výrazy  $(\alpha \bar{h})$  a  $(\alpha \bar{h}) \text{Re}_L$  obdržíme  $C_R = 2\bar{u}_a$  a vztah pro koeficient růstu nestabilit  $C_I$ :

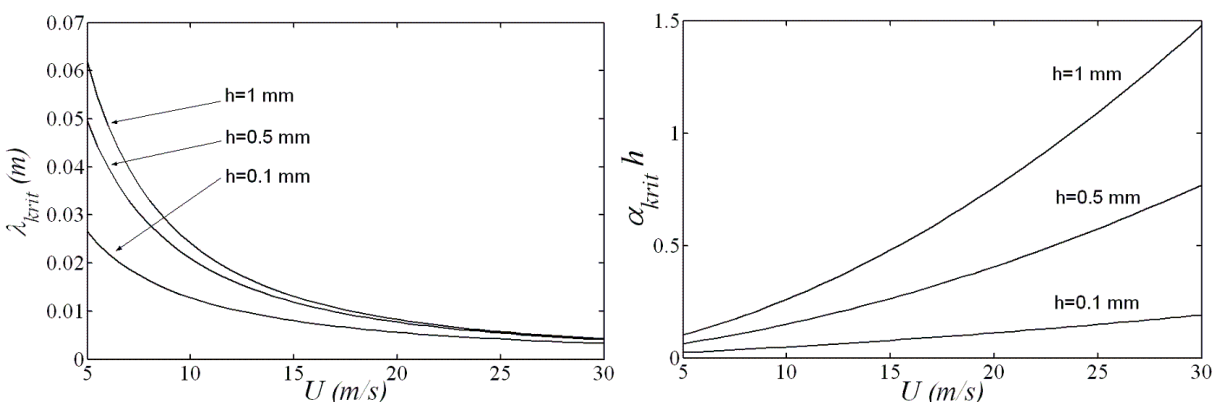
$$0 = \frac{-2}{\text{Re}_L} \left[ \frac{3}{2} \frac{\hat{\tau}_{SI}}{\alpha \bar{\tau}_S} - \alpha \bar{h} \frac{\hat{P}_{SR}}{\alpha \bar{\tau}_S} - \frac{\rho_L g \bar{h}}{\bar{\tau}_S} \sin \beta - \frac{(\alpha \bar{h})^2 \sigma}{\bar{\tau}_S \bar{h}} \right] + \frac{3}{\text{Re}_L \alpha \bar{h} \bar{u}_a} C_I. \quad (8)$$

Obrázek 6 uvádí závislost parametru růstu nestabilit  $C_I$  na bezrozměrném parametru  $(\alpha \bar{h})$  a rychlosti vnějšího proudu vzduchu pro tloušťku filmu  $\bar{h} = 0.2$  mm. Z kvantifikace parametru

( $\alpha\bar{h}$ ) a smykových a tlakových amplitud však vyplývá, že uvedené zjednodušení není zcela korektní. Proto Asali uvádí poněkud složitější rovnice než 8.

Z rozboru rovnice 7 plyne, že je až na konstanty totožná disperzní rovnici pro výpočet nestabilit, kterou uvádí Craik v předchozím přístupu. Z analýzy významu veličin vystupujících v rovnicích dále vyplývá, že studované kapilární vlny podléhají obdobnému mechanismu jako pomalé vlny. Předpokládá se, že vznikají z nejrychleji rostoucích dvoudimenzionálních vln. Jejich další růst je podmíněn nerovnováhou mezi stabilizačním efektem povrchového napětí a destabilizačními účinky setrvačných sil, smykového napětí ve fázi s náběhovou částí vlny ( $\hat{\tau}_{SI}$ ) a tlakových sil ve fázi s vrcholem vlny ( $\hat{P}_{SR}$ ). Výsledné stacionární vlny jsou udržovány smykovým napětím ve fázi s vrcholem vln ( $\hat{\tau}_{SR}$ ) a tlakovými účinky ve fázi s náběhem vlny ( $\hat{P}_{SI}$ ).

Obrázek 7 zachycuje závislost kritické vlnové délky  $\lambda_{krit} = 2\pi/\alpha_{krit}$ , kde  $\alpha_{krit}$  realizuje maximální hodnotu parametru růstu  $C_I$ , na rychlosti vnějšího proudu pro trojí tloušťku filmu.



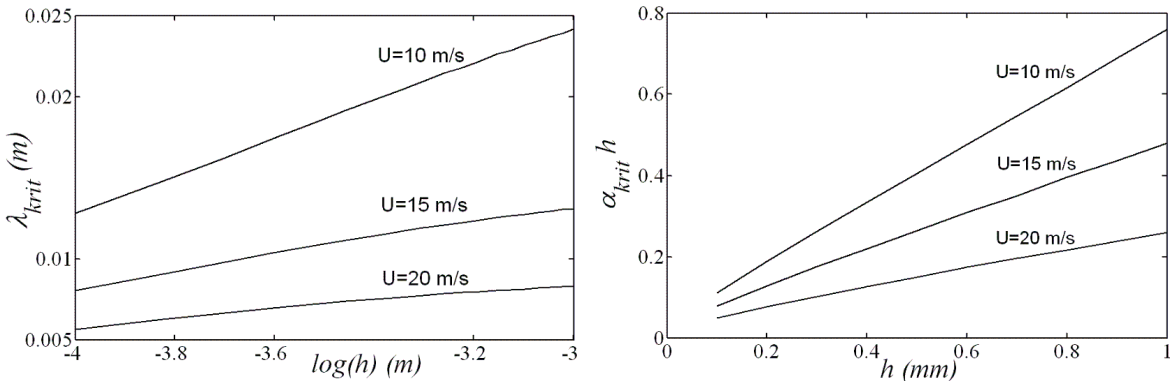
Obrázek 7: Závislost  $\lambda_{krit}$  na rychlosti vnějšího proudu a tloušťce filmu. Obrázek 8: Závislost součinu  $\alpha_{krit}\bar{h}$  na rychlosti vnějšího proudu a tloušťce filmu.

Z grafu vyplývá, že kritické vlnové délky se pro rozdílné tloušťky filmu příliš neliší. Pro velké rychlosti plynu jsou rozdíly zanedbatelné. Na obrázku 8 je zobrazen součin  $\alpha_{krit}\bar{h}$  v závislosti na rychlosti vnějšího proudu  $U$  pro tytéž tloušťky filmu. Je zřejmé, že vzhledem k předpokladu  $\alpha\bar{h} \ll O(1)$  má prezentovaný vztah 8 pro vzrůstající tloušťky filmu klesající vypovídací hodnotu. V případě  $h \cong 0.1$  mm je ovšem přesnost aproximace dostatečná i pro vysoké rychlosti plynu.

Obrázky 9 a 10 zachycují obdobné závislosti jako obrázky 7 a 8.

### Závěr

Z experimentálních poznatků vyplývá, že vnější konfigurace problému kapalných stěnových filmů zásadním způsobem ovlivňují typ vzniklých nestabilit, jejichž výčet byl uveden v úvodní části článku. Tato skutečnost znemožňuje použití jednoho univerzálního přístupu k řešení. Přesto lze na základě citovaných prací vytyčit základní principy řešení a analyzovat fyzikální význam definovaných veličin. Výzkumy ukazují, že fyzikální podstatou nestabilit je nerovnováha mezi stabilizačním efektem povrchového napětí a gravitační síly a destabilizačními účinky smykových a tlakových napětí působících na povrch filmu. Vznik jednotlivých typů nestabilit je přitom závislý na fyzikálních parametrech kapaliny a plynu (hustota, viskozita, povrchové napětí), na tloušťce filmu a rychlosti vnějšího proudu plynu. Dle vzájemných poměrů mezi vlnovými



Obrázek 9: Závislost  $\lambda_{krit}$  na tloušťce filmu a Obrázek 10: Závislost součinu  $\alpha_{krit} \bar{h}$  tloušťce filmu a rychlosti vnějšího proudu.

délkami vln, tloušťkou filmu a plynné vrstvy jsou volena odpovídající matematická řešení. Mezi hlavními přístupy k řešení vlastního problému nestabilit lze jmenovat metodu integrace pohybových rovnic a Orrovy-Sommerfeldovu rovnici hydrodynamické nestability. Stěžejním bodem těchto řešení je přitom vyčíslení smykových a tlakových účinků vnějšího proudu na povrch filmu, které vystupují v okrajových podmínkách nebo parametrech odpovídajících rovnic. Výstupem modelů je obvykle komplexní rychlost  $C = C_R + iC_I$ , kde  $C_R$  je fázová rychlost a  $C_I$  parametr rychlosti růstu nestabilit.

Článek uzavírá prezentace dvou konkrétních modelů. První z nich, [9], je založen na řešení Orrovy-Sommerfeldovy rovnice s využitím odvozených formulí pro smykové a tlakové síly. Výsledkem modelu je analytický vztah pro parametr  $C_I$  v závislosti na vlnovém čísle a dynamických a fyzikálních charakteristikách problému. Druhý model, [3], vychází z metody integrace pohybových rovnic a vede k algebraické nelineární rovnici pro komplexní rychlost  $C$ , přičemž smykové a tlakové účinky jsou aproximovány pomocí standardního postupu viz [1]. Navzdory různým přístupům k řešení a studovaným typům nestabilit (pomalé vs. kapilární vlny) Asali ukazuje, že oba vedou na totožnou výslednou rovnici až na konstanty. Přitom s ohledem na výsledky experimentů je použitelnost modelu pro řešení pomalých vln zpochybněna.

Předložený článek si kládí za cíl provést úvodní seznámení s problémem nestabilit kapalných stěnových filmů pomocí stručného uvedení experimentálních poznatků, fyzikálních aspektů vzniku nestabilit, chronologického přehledu výbraných prací, hlavních principů matematických řešení a ukázky konkrétních modelů a jejich výsledků. Vzhledem k šíři tématu nebylo ovšem možno uvést v dostatečné hloubce všechny aspekty fenoménu, které jsou předmětem probíhajícího studia a výzkumu.

**Poděkování:** Článek vznikl za grantové podpory GA ČR z projektu GA101/08/0096.

## Reference

- [1] Abrams, J.: Turbulent flow over small amplitude solid waves, Ph.D. Disertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1984.

- [2] Andreussi, J.C. Asali and T.J. Hanratty, Initiation of roll waves in gas-liquid flows, *AIChE JI*, vol. 31, s. 119–126, 1985.
- [3] Asali, K.C., Hanratty, T.J.: Ripples generated on liquid film at high gas velocities, *Int. Multiphase Flow*, 1993, vol. 19, s. 229-243.
- [4] Benjamin, T.B.: Shearing flow over a wavy boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 6, pp 161-205, 1959.
- [5] Boomkamp, P.A.M., Boersma, B.J., Miesen, H.M., Beijnon, G.V.: A Chebyshev Collocation Method for Solving Two-Phase Flow Stability Problems, *Journal of Computational Physics* 132, s. 191-200, 1997.
- [6] Brauner, N., Maron, D.M., Dukler, A.E.: Modeling of wavy flow in inclined thin films in the presence of interfacial shear, *Chemical Engineering Science*, Vol. 40, No. 6, s. 923-937, 1985.
- [7] Bruno, K., McCready, M.J.: Origin of roll waves in horizontal gas–liquid flows, *AIChE J.* 34, pp. 1431–1440, 1988.
- [8] Cohen, L.S., Hanratty, T.J.: Generation of Waves in the Concurrent Flow of Air and a Liquid, *AIChE Journal*, vol. 11, 1965, s. 138-144.
- [9] Craik, A.D.D.: Wind-generated waves in thin liquid films, *J. Fluid Mechanics*, vol. 26, s. 369-392, 1966.
- [10] Hanratty, T.J., Hershman, A.: Initiation of Roll Waves, *AIChE Journal*, 1961, vol. 7, s. 488.
- [11] Hanratty, T.J.: Interfacial instabilities caused by air flow over a thin liquid layer, *Waves on Fluid Interfaces* (Edited by Meyer, R.E.), s. 221-259, Academic Press, New York, 1983.
- [12] Kuru, W.C., Sangali, M., Uphold, D.D., McCready, M.J.: Linear stability of stratified channel flow, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 21, No. 5, s. 733-753, 1995.
- [13] Lin, P.Y., Hanratty, T.J.: Prediction of the initiation of slugs with linear stability theory, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 12, No. 1, s. 79-98, 1986.
- [14] Ludwig, H., Hornung, H.: The instability of a liquid film on a wall exposed to an air flow, *J. Fluid Mechanics*, vol. 200, s. 217-233, 1988.
- [15] Malamatenios, Ch., Giannakoglou, K.C., Papailiou, K.D.: A coupled two-phase shear layer/liquid film calculation method. Formulation of the physical problem and solution algorithm, *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 20, No. 3, s. 593-612, 1994.
- [16] Miesen, R., Boersma, B.J.: Hydrodynamics stability of sheared liquid film, *J. Fluid Mech.*, Vol. 301, s. 175-202, 1995.
- [17] Myia, M., Woodmansee, D.E., Hanratty, T.J.: A model for roll waves in gas-liquid flow, *Chem. eng. Science* 21, s. 1915, 1971.

- [18] Jurman, L.A., Bruno, K., McCready, M.J.: Periodic and solitary waves on thin, horizontal, gas-sheared liquid films, *Int. J. Multiphase Flow*, 15, s. 371-384, 1989.
- [19] Jurman, L.A., McCready, M.J.: Study of waves on thin liquid films sheared by turbulent gas flows, *Phys. Fluids*, 1989.
- [20] Knotek, S.: Nestability kapalného stěnového filmu, Pojednání ke státní doktorské zkoušce, VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav, 2010.
- [21] Kundu, P.J. - Cohen, I.M.: *Fluid Mechanics*, Fourth Edition, Elsevier Inc., 2008.
- [22] Peng, C.A., Jurman, L.A., McCready, M.J.: Formation of solitary waves on gas-sheared liquid layers, *Int. J. Multiphase Flow*, 1991.
- [23] Schlichting, H.; Gersten, K.: *Boundary-layer theory*, 8th Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2000.
- [24] Rothmayer, A.P., Matheis, B.D., Timoshin, S.N.: Thin liquid films flowing over external aerodynamics surfaces, *Journal of Engineering Mathematics*, 42, s. 341-357, 2002.
- [25] Tesař, V.: *Mezní vrstvy a turbulence*, Vydavatelství ČVUT, 1996, ISBN 80-01-00675-1.
- [26] Tsai, Y.S., Grass, A.J., Simons, R.R.: On the spatial linear growth of gravity-capillary water waves sheared by a laminar air flow, *Physics of Fluids*, 17, 2005.
- [27] Yecko, P., Zaleski, S., Fullana, J.-M.: Viscous modes in two-phase mixing layers, *Physics of Fluids*, 14, pp. 4115-4122, 2002.