

# ZÁKLADY KRYSTALOPTIKY

Jiří Čtyrský

[ctyroky@ufe.cz](mailto:ctyroky@ufe.cz)

Ústav fotoniky a elektroniky AV ČR, v.v.i.

2014

[www.ufe.cz/cs/fjfi](http://www.ufe.cz/cs/fjfi)

UFE

1

## Tenzor a jeho transformace při rotaci souřadnicové soustavy

Vektor:  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{x}^0 + a_y \mathbf{y}^0 + a_z \mathbf{z}^0 = \sum_i a_i \mathbf{x}_i^0$ , v „maticovém“ vyjádření  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Tenzor 2. řádu:  $\bar{\mathbf{T}} = \sum_i \sum_j T_{ij} \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0$ . Dyadický součin vektorů:  $\mathbf{ab} = \sum_i \sum_j a_i b_j \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0$

V maticovém vyjádření  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$ .

Tenzor 3. řádu:  $\bar{\mathbf{r}} = \sum_i \sum_j \sum_k r_{ijk} \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0 \mathbf{x}_k^0$  Tenzor 4. řádu:  $\bar{\mathbf{c}} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l c_{ijkl} \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0 \mathbf{x}_k^0 \mathbf{x}_l^0$

Skalární součiny tenzorů:  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \left( \sum_i \sum_j T_{ij} \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0 \right) \cdot \sum_k a_k \mathbf{x}_k^0 = \sum_i \sum_j \left( T_{ij} \mathbf{x}_i^0 \sum_k \mathbf{x}_j^0 \cdot \mathbf{x}_k^0 a_k \right)$   
 $= \sum_i \sum_j \left( T_{ij} \mathbf{x}_i^0 \sum_k \delta_{jk} a_k \right) = \sum_i \sum_j T_{ij} a_j \mathbf{x}_i^0 = \sum_i b_i \mathbf{x}_i^0$ ,  
 $b_i = \sum_j T_{ij} a_j$

UFE

2

## Tenzor a jeho transformace při rotaci souřadnicové soustavy - II

Dvojný skalární součin: 
$$\bar{\mathbf{T}} : \bar{\mathbf{S}} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l T_{ij} S_{kl} [\mathbf{x}_i^0 (\mathbf{x}_j^0 \cdot \mathbf{x}_k^0)] \cdot \mathbf{x}_l^0$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l T_{ij} S_{kl} \delta_{il} \delta_{jk} = \sum_i \sum_j T_{ij} S_{ji}$$

Rotace souřadnic: původní soustava  $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \mathbf{x}_3^0$ , pootočená  $\mathbf{x}_1^{0'}, \mathbf{x}_2^{0'}, \mathbf{x}_3^{0'}$ .

Matice směrových kosinů:  $\alpha_{ij} = \mathbf{x}_i^{0'} \cdot \mathbf{x}_j^0 = \cos(x_i', x_j)$

Matice zpětné transformace  $\beta_{ji} = \mathbf{x}_j^0 \cdot \mathbf{x}_i^{0'} = \cos(x_j, x_i') = \cos(x_i', x_j) = \alpha_{ij}$ ,  $\alpha^{-1} = \alpha'$

Zřejmě  $\mathbf{x}_i^{0'} = \sum_j (\mathbf{x}_i^{0'} \cdot \mathbf{x}_j^0) \mathbf{x}_j^0 = \sum_j \alpha_{ij} \mathbf{x}_j^0$ ,  $\mathbf{x}_j^0 = \sum_i \beta_{ji} \mathbf{x}_i^{0'} = \sum_i \alpha_{ij} \mathbf{x}_i^{0'}$

Transformace vektoru:  $\mathbf{a} = \sum_i a_i' \mathbf{x}_i^{0'} = \sum_j a_j \mathbf{x}_j^0 = \sum_j \sum_i \alpha_{ij} a_j \mathbf{x}_i^{0'}$ ;  $a_i' = \sum_j \alpha_{ij} a_j$

Analogicky  $T_{ij}' = \sum_k \sum_l \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}$ ,  $r_{ijk}' = \sum_l \sum_m \sum_n \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} r_{lmn}$ ,

$$c_{ijkl}' = \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq} c_{mnpq} \text{ atd.}$$

Sumační symbol se často vynechává, sčítá se přes opakující se symboly

ÚFE

3

## Základy krystaloptiky

### Šíření vln v anizotropním prostředí

Časově harmonicky proměnné pole bez zdrojů:  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \right\}, \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + c.c. \right\}$$

$$\text{Šíření vln se řídí Maxwellovými rovnicemi} \quad \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D},$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Další dvě rovnice jsou přímým důsledkem prvních:  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ .

Anizotropie je popsána vztahem mezi  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{D}$ : 
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{E}$$

Z obecných zákonů termodynamiky lze odvodit, že tenzor relativní permittivity  $\boldsymbol{\epsilon}$  v bezztrátovém prostředí je **hermitovský**; my se budeme zabývat prostředími popsanými **reálným symetrickým**  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

ÚFE

4

Reálný symetrický tenzor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je možno **diagonalizovat** rotací (volbou) souřadnicového systému; v nové souřadnicové soustavě má tenzor relativní permitivity  $\boldsymbol{\varepsilon}$  **diagonální tvar**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}. \quad \text{Z obecných vlastností symetrických matic plyne, že vlastní vektory tenzoru (krystalografické osy tenzoru) jsou tři a jsou vzájemně ortogonální.}$$

#### Klasifikace anizotropních prostředí:

$$\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}, \quad n_1 \neq n_2 \neq n_3 \quad \text{opticky dvojosé prostředí (nejobecnější; krystaly)}$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}, \quad n_1 = n_2 \neq n_3 \quad \text{opticky jednoosé prostředí (krystaly, polymery, ...)}$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}, \quad n_1 = n_2 = n_3 \quad \text{izotropní prostředí (většina pevných látek a kapalin)}$$

#### Šíření rovinných vln v anizotropním prostředí

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{ik_0 \mathbf{l}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{H}_0 e^{ik_0 \mathbf{l}\cdot\mathbf{r}}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{k}}{k_0}, \quad \mathbf{l} = n \mathbf{l}^0$$

$$\text{Fázová rychlost šíření:} \quad v_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \mathbf{k}^0 = \frac{c}{|\mathbf{l}|} \mathbf{l}^0; \quad |\mathbf{l}| = n.$$

ÚFE

5

#### Vztahy mezi vektory pole

Analogicky s přechodem  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$  lze snadno odvodit, že pro  $e^{ik_0 \mathbf{l}\cdot\mathbf{r}} \quad \nabla \rightarrow ik_0 \mathbf{l}$

$$\text{Pak } ik_0 \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 = i\omega \mu_0 \mathbf{H}_0, \quad ik_0 \mathbf{l} \times \mathbf{H}_0 = -i\omega \mathbf{D}_0, \quad \mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0.$$

$$\text{Odtud } \mathbf{H}_0 = \frac{k_0}{\omega \mu_0} \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\mu_0} \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 = Y_0 \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0, \quad Y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \quad Z_0 = Y_0^{-1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

$$\mathbf{D}_0 = -\frac{k_0}{\omega} \mathbf{l} \times \mathbf{H}_0 = -\frac{1}{c} \mathbf{l} \times \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E}_0 = -\frac{k_0}{\omega \varepsilon_0} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{H}_0) = -Z_0 \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{H}_0).$$

**Závěry:** 1. Trojice vektorů  $\mathbf{D}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{l}$  tvoří **pravotočivou ortogonální soustavu** vektorů;

2. Vektory  $\mathbf{E}_0$  a  $\mathbf{H}_0$  jsou vzájemně ortogonální;

3. Vektory  $\mathbf{D}_0$  a  $\mathbf{E}_0$  **nejsou** obecně **vzájemně rovnoběžné**;

4. Vektory  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{D}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  jsou vzájemně **soufázové**;

5. Směr šíření energie (Poyntingova vektoru) **není rovnoběžný s vlnovým vektorem**,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 = \frac{1}{2} Y_0 \mathbf{E}_0 \times (\mathbf{l} \times \mathbf{E}_0) = \frac{1}{2} Y_0 [ \mathbf{l} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 (\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_0) ].$$

$$|\mathbf{l}| = n.$$

ÚFE

6

„Disperzní“ (Fresnelova) rovnice pro anizotropní prostředí:

$$ik_0 \mathbf{l} \times \mathbf{H}_0 = ik_0 \mathbf{l} \times (Y_0 \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0) = -i\omega \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0, \text{ resp. } \mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{E}_0) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}.$$

To lze přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{l}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_0) - (\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \text{ neboli } \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{l}\mathbf{l} - \mathbf{l}^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}},$$

kde  $\mathbf{a} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$  je **dyáda** vektorů  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ .

Fresnelova rovnice má explicitní tvar

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2 & \varepsilon_{xy} + l_x l_y & \varepsilon_{xz} + l_x l_z \\ \varepsilon_{xy} + l_x l_y & \varepsilon_{yy} - l_x^2 - l_z^2 & \varepsilon_{yz} + l_y l_z \\ \varepsilon_{xz} + l_x l_z & \varepsilon_{yz} + l_y l_z & \varepsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podmínkou existence netriviálního řešení  $\mathbf{E}_0$  je **nulovost determinantu**

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = \det(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{l}\mathbf{l} - \mathbf{l}^2 \mathbf{I}) = 0.$$

V osové poloze (diagonální  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) je

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, \mathbf{l}) = & (\varepsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2)(\varepsilon_{yy} - l_x^2 - l_z^2)(\varepsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2) + 2l_x^2 l_y^2 l_z^2 \\ & - l_x^2 l_z^2 (\varepsilon_{yy} - l_x^2 - l_z^2) - l_y^2 l_z^2 (\varepsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2) - l_x^2 l_y^2 (\varepsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2). \end{aligned}$$

UFE

7

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, \mathbf{l}) = & \varepsilon_{xx} l_x^4 + \varepsilon_{yy} l_y^4 + \varepsilon_{zz} l_z^4 + \varepsilon_{xx} l_x^2 (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{yy} l_y^2 (l_x^2 + l_z^2) + \varepsilon_{zz} l_z^2 (l_x^2 + l_y^2) \\ & - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (l_x^2 + l_z^2) - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \end{aligned}$$

$\Phi(\omega, \mathbf{l})$  je tedy **polynom 4. stupně** v každé z proměnných  $l_x, l_y, l_z$ , **symetrický** vůči inverzi os.

Řešením (např.  $l_z$  pro zadané  $l_x, l_y$ ) jsou tedy 2 hodnoty  $l_{z1,2}$  a 2 hodnoty  $l_{z3,4} = -l_{z1,2}$ .

Plocha  $\Phi(\omega, \mathbf{l}) = 0$  je tedy **plochou 4. stupně**, tzv. **plochou vlnových vektorů**.

Ukážeme, že **energie se šíří kolmo k ploše vlnových vektorů**.

Směr šíření energie určuje grupová rychlost,  $\mathbf{v}_g = \frac{1}{k_0} \nabla_1 \omega$ ,  $v_{gx} = \frac{1}{k_0} \frac{\partial \omega}{\partial l_x}$  atd.

Poněvadž  $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} d\omega + \nabla_1 \Phi \cdot d\mathbf{l} = 0$ ,  $d\omega = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}} \nabla_1 \Phi \cdot d\mathbf{l}$ , a tedy

$\mathbf{v}_g = -\frac{1}{k_0} \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}} \nabla_1 \Phi$ . Směr šíření energie je tedy rovnoběžný s normálou k ploše vln. vektorů.

Vektory  $\mathbf{H}_0$  i  $\mathbf{E}_0$  jsou kolmé ke směru Poyntingova vektoru, tj. k normále plochy  $\Phi = 0$ .

$\mathbf{H}_0$  je navíc kolmý i k  $\mathbf{l}$ .

UFE

8

Alternativní popis chování vlny v anizotropním prostředí pomocí „elipsoidu indexů lomu“

Zavedeme **projektor** do podprostoru kolmého k  $\mathbf{l}$  jako tenzor  $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{l}^0 \mathbf{l}^0$ .

Ve složkách zřejmě platí

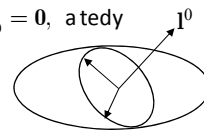
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - (l_x^0)^2 & -l_x^0 l_y^0 & -l_x^0 l_z^0 \\ -l_y^0 l_x^0 & 1 - (l_y^0)^2 & -l_y^0 l_z^0 \\ -l_z^0 l_x^0 & -l_z^0 l_y^0 & 1 - (l_z^0)^2 \end{pmatrix}$$

Poněvadž je  $\mathbf{D}_0$  kolmé k  $\mathbf{l}$ , **projekcí**  $\mathbf{D}_0$  do podprostoru kolmého k  $\mathbf{l}$  se tento vektor nemění:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{D}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{l}^0 \mathbf{l}^0) \cdot \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_0.$$

Pak se rovnice  $\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{E}_0) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$  dá přepsat do tvaru  $(\mathbf{l} = n \mathbf{l}^0, \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{D}_0)$   
 $n^2 \mathbf{l}^0 \times \left( \mathbf{l}^0 \times \frac{1}{\varepsilon_0} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{D}_0 \right) + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}_0 = \mathbf{0}$ , neboli  $\left[ (\mathbf{I} - \mathbf{l}^0 \mathbf{l}^0) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} - \frac{1}{n^2} \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{D}_0 = \mathbf{0}$ , a tedy

$$\left[ \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{P} - \frac{1}{n^2} \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{D}_0 = \mathbf{0}.$$



$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{P}$  je v podstatě **dvojměrný** tenzor v rovině kolmé na  $\mathbf{l}$  a rovnice je rovnící elipsy v této rovině. Odtud plyne konstrukce elipsoidu indexů lomu a orientace vektorů  $\mathbf{D}_0$ .

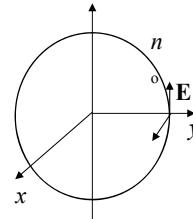
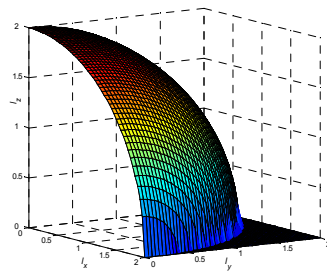
Úprava obecné disperzní relace

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = \varepsilon_{xx} l_x^4 + \varepsilon_{yy} l_y^4 + \varepsilon_{zz} l_z^4 + \varepsilon_{xx} l_x^2 (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{yy} l_y^2 (l_x^2 + l_z^2) + \varepsilon_{zz} l_z^2 (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (l_x^2 + l_z^2) - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}$$

pro speciální případy:

V **izotropním prostředí** popisuje disperzní rovnice „dvojnásobně degenerovanou“ kulovou plochu.

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = \varepsilon_{xx} (\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_y^2 - l_z^2)^2 = 0.$$

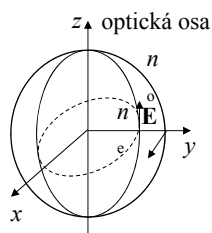


**Jednoosé prostředí:**  $\Phi(\omega, \mathbf{l}) = (\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_y^2 - l_z^2) [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx} (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{zz} l_z^2] = 0.$

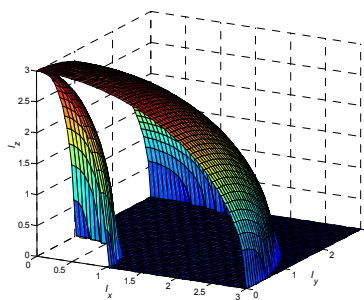
Rovnice kulové plochy (řádová vlna):  $\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_y^2 - l_z^2 = 0,$

Rotační elipsoid (mimořádná vlna):  $\frac{l_x^2 + l_y^2}{\varepsilon_{zz}} + \frac{l_z^2}{\varepsilon_{xx}} = 1,$  neboli  $\frac{l_x^2 + l_y^2}{n_e^2} + \frac{l_z^2}{n_o^2} = 1$

V rovině (x z) platí  $n = |\mathbf{l}| = l = \frac{n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 \sin^2 \theta + n_z^2 \cos^2 \theta}},$



kde  $\theta$  je úhel vlnového vektoru  $\mathbf{l}$  od osy  $z.$



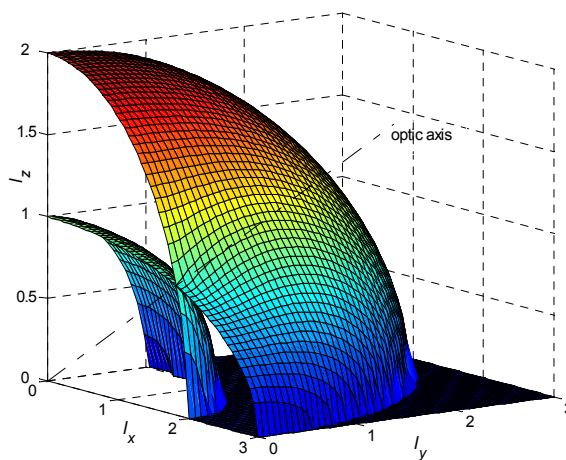
ÚFE

11

**Dvojosé prostředí**

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = \varepsilon_{xx} l_x^4 + \varepsilon_{yy} l_y^4 + \varepsilon_{zz} l_z^4 + \varepsilon_{xx} l_x^2 (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{yy} l_y^2 (l_x^2 + l_z^2) + \varepsilon_{zz} l_z^2 (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (l_x^2 + l_z^2) - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}$$

Plocha vlnových vektorů dvojosého prostředí s indexy lomu  $n_x = 1, n_y = 2, n_z = 3$



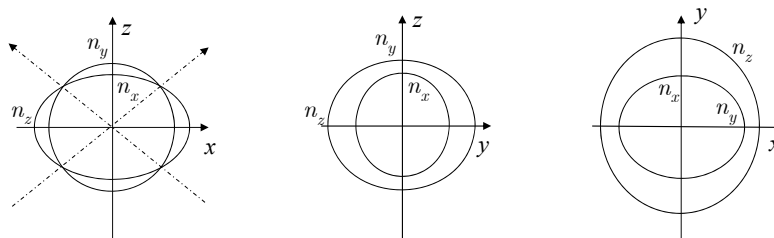
ÚFE

12

Pro **dvojosé prostředí** lze řezu plochy vlnových vektorů souřadnicovými rovinami  $l_x, l_y, l_z$  vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}
 l_x = 0: & \quad (\varepsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2) [\varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yy} l_y^2 - \varepsilon_{zz} l_z^2] = 0, \\
 l_y = 0: & \quad (\varepsilon_{yy} - l_x^2 - l_z^2) [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx} l_x^2 - \varepsilon_{zz} l_z^2] = 0, \\
 l_z = 0: & \quad (\varepsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2) [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} l_x^2 - \varepsilon_{yy} l_y^2] = 0,
 \end{aligned}$$

což je součin rovnice kružnice a rovnice elipsy.  
Pro  $n_x < n_y < n_z$



UFE

13

### Prostředí s optickou aktivitou – *chirální prostředí*

Optická aktivita = stáčení roviny polarizace lineárně polarizované vlny.

Chirální prostředí je prostředí **bez** *translační symetrie*.

*Konstituční relace* pro chirální prostředí lze zavést různým způsobem. Jeden z možných je

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \frac{i}{c} \mathbf{g} \cdot \mathbf{H} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \frac{Y_0}{\omega} \mathbf{g} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \\
 \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \frac{i}{c} \mathbf{g} \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{H} - \frac{Z_0}{\omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{H}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{g}$  je bezrozměrný symetrický tenzor 2. řádu, tzv. *chirální tenzor*

**Šíření rovinné vlny v chirálním prostředí**

Rovinnou vlnu popisují vztahy  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{l} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \mathbf{l} = \frac{\omega}{c} \mathbf{l} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{l}$ .

Rotace dá

Dosazením do Maxwellových rovnic získáme

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = ik_0 \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, & \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{H}_0 + i \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_0, \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = ik_0 \mathbf{l} \times \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}; & -\mathbf{l} \times \mathbf{H}_0 &= \varepsilon \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot \mathbf{H}_0.
 \end{aligned}$$

UFE

14

Z prvé rovnice vypočítáme  $\mathbf{H}_0$  :  $\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\mathbf{1} \times \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_0)$ .

Dosazením do druhej rovnice dostaneme

$$-1 \times (\mathbf{1} \times \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_0) = \epsilon \cdot \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot (\mathbf{1} \times \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_0)$$

Rovnici pak můžeme upravit do tvaru

$$[l^2 \mathbf{I} - 1\mathbf{1} + i(\mathbf{1} \times \mathbf{g} + \mathbf{g} \times \mathbf{1}) - \epsilon + \underbrace{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}}_{\text{zanedbáme, člen malý 2. řádu}}] \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \text{ kde } \mathbf{1} \times \mathbf{g} = \sum_{m,n=1}^3 (\mathbf{1} \times \mathbf{x}_m^0) \mathbf{x}_n^0 g_{mn},$$

$$\mathbf{g} \times \mathbf{1} = \sum_{m,n=1}^3 \mathbf{x}_m^0 (\mathbf{x}_n^0 \times \mathbf{1}) g_{mn}.$$

V souřadnicové soustavě, v níž je  $\epsilon$  diagonální, má rovnice tvar

$$\begin{bmatrix} l_y^2 + l_z^2 - \epsilon_{xx} & -l_x l_y + i[(g_{xx} + g_{yy})l_z - g_{zx}l_x - g_{yz}l_y] & -l_x l_z - i[(g_{xx} + g_{zz})l_y - g_{yx}l_x - g_{yz}l_z] \\ -l_x l_y - i[(g_{xx} + g_{yy})l_z - g_{zx}l_x - g_{yz}l_y] & l_x^2 + l_z^2 - \epsilon_{yy} & -l_y l_z - i[(g_{yy} + g_{zz})l_x - g_{xy}l_y - g_{xz}l_z] \\ -l_x l_z + i[(g_{xx} + g_{zz})l_y - g_{yx}l_x - g_{yz}l_z] & -l_y l_z + i[(g_{yy} + g_{zz})l_x - g_{xy}l_y - g_{xz}l_z] & l_x^2 + l_y^2 - \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

*Disperzní rovnice pro rovinnou vlnu v chirálním prostředí:*

$$\det[\dots] = 0 \dots \text{plocha 4. stupně v souřadnicích } (l_x, l_y, l_z).$$

### ***Izotropní chirální prostředí***

$$\mathbf{g} = g\mathbf{I}, \quad \epsilon = \epsilon\mathbf{I}; \quad \text{volme } \mathbf{1} = l_z \mathbf{z}^0 = l_z \mathbf{x}_3^0.$$

Pak disperzní rovnice přejde na tvar

Poslední rovnice má řešení  $E_z = 0$ .

$$\begin{pmatrix} l_z^2 - \epsilon & -2i g l_z & 0 \\ 2i g l_z & l_z^2 - \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Další dvě mají netriviální řešení, pokud

$$(l_z^2 - \epsilon)^2 - 4g^2 l_z^2 = 0,$$

Poněvadž prakticky vždy  $g \ll \epsilon$ ,

získáme obecný vztah

$$l_z = \pm \sqrt{\epsilon + g^2} \pm g \approx \pm \sqrt{\epsilon} \pm g = \pm n \pm g; \quad \text{pro amplitudy pole získáme}$$

$$\frac{E_y}{E_x} \approx 2i \frac{g l_z}{l_z^2 - \epsilon} \approx \pm i.$$

Vlastní vlny izotropního chirálního prostředí jsou tedy *kuhově polarizované* a šíří se s indexem lomu  $n \pm g$ .

V izotropním prostředí lze za osu  $z$  zvolit libovolný směr;

plocha vlnových vektorů se tedy rozpadá na *dvě kulové plochy* o poloměrech  $n \pm g$ .



### Stáčení roviny polarizace v izotropním chirálním prostředí

Je-li v místě  $z = 0$  inzenzita elektrického pole lineárně polarizovaná,  $\mathbf{E}(z = 0) = E_0 \mathbf{x}^0$ , je ji možno vyjádřit jako superpozici dvou kruhově polarizovaných vln,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^+ e^{ik_0 l^+ z} + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^- e^{ik_0 l^- z}, \text{ kde } \mathbf{E}_0^+ = E_0(\mathbf{x}^0 + i\mathbf{y}^0), \mathbf{E}_0^- = E_0(\mathbf{x}^0 - i\mathbf{y}^0), l^\pm = n \pm g.$$

$$\text{Pak } E_x = \frac{1}{2} E_0 (e^{ik_0 l^+ z} + e^{ik_0 l^- z}) = E_0 e^{ik_0 (l^+ + l^-) z / 2} \cos k_0 \frac{\Delta l}{2} z,$$

$$E_y = \frac{i}{2} E_0 (e^{ik_0 l^+ z} - e^{ik_0 l^- z}) = -E_0 e^{ik_0 (l^+ + l^-) z / 2} \sin k_0 \frac{\Delta l}{2} z.$$

Při šíření na vzdálenost  $L$  se polarizace pootočí o úhel  $\varphi = k_0 \frac{\Delta l}{2} L = k_0 g L$ .

Chirální parametr  $g$  je tedy určen specifickou stáčivostí polarizace,  $g = \frac{1}{k_0} \frac{\varphi}{L}$ .

Specifická stáčivost a chirální parametr některých materiálů na vln. délce 632,8 nm:

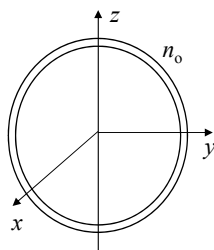
materiál	$\varphi/L$	$g$
křemen $\text{SiO}_2$	$22^\circ/\text{mm}$	$3.85 \times 10^{-5}$
paratelurit $\text{TeO}_2$	$87^\circ/\text{mm}$	$1.52 \times 10^{-4}$
$\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$	$20^\circ/\text{mm}$	$3.5 \times 10^{-5}$

ÚFE

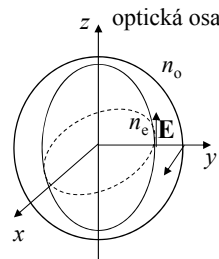
17

### Vliv optické aktivity prostředí na tvar ploch vlnových vektorů

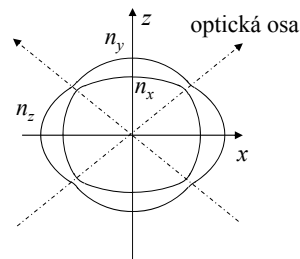
a) Izotropní prostředí



b) Jednoosé prostředí



c) Dvojosé prostředí



ÚFE

18

# Úvod do základů teorie hyperbolických (meta)materiálů

## Elementární teorie efektivního prostředí (EMT)

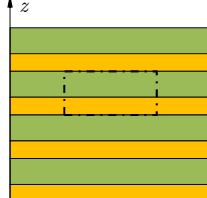
Vrstevnaté prostředí s parametry  $\epsilon_1, d_1$  a  $\epsilon_2, d_2$ ,  $d_1, d_2 \ll \lambda$

*Sřední hodnota elektrické indukce pro elektrické pole rovnoběžné s vrstvami :*

$$E_{x1} = E_{x2} = E, \quad \bar{D}_x = \frac{D_{x1}d_1 + D_{x2}d_2}{d_1 + d_2} = \frac{\epsilon_1 d_1 + \epsilon_2 d_2}{d_1 + d_2} E = \epsilon_{\parallel} E$$

$$\frac{d_1}{d_1 + d_2} = f, \quad \frac{d_2}{d_1 + d_2} = 1 - f, \quad 0 \leq f \leq 1. \quad \text{Tedy} \quad \epsilon_{\parallel} = f\epsilon_1 + (1 - f)\epsilon_2,$$

*Sřední hodnota intenzity elektrického pole pro elektrickou indukci rovnoběžnou s vrstvami :*



$$D_{z1} = D_{z2} = D, \quad \bar{E}_z = \frac{E_{z1}d_1 + E_{z2}d_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2}{d_1 + d_2} E = \frac{1}{\epsilon_{\perp}} E,$$

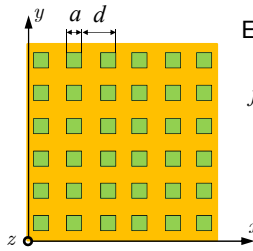
$$\text{Tedy} \quad \frac{1}{\epsilon_{\perp}} = \frac{1}{\epsilon_1} f + \frac{1}{\epsilon_2} (1 - f), \quad \epsilon_{\perp} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{f\epsilon_2 + (1 - f)\epsilon_1},$$

**Efektivní prostředí je anizotropní, jednoosé, s tenzorem permitivity**

$$\epsilon_{eff} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

J. C. Maxwell Garnett, "Colours in metal glasses and in metallic films,"  
*Philosophical Transaction of the Royal Society London* **203**, 385-420 (1904).

„Duální“ („nanodrátové“) efektivní prostředí



Evidentně,  $\epsilon_{||} = f^2\epsilon_1 + (1 - f^2)\epsilon_2$ ,  $\epsilon_{eff} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{||} \end{pmatrix}$

$f = \frac{a}{d}$ ,  $\epsilon_{\perp} \approx \frac{f\epsilon_1\epsilon_2}{f\epsilon_2 + (1-f)\epsilon_1} + (1-f)\epsilon_1$

Efektivní anizotropní jednoosé prostředí

**Ideální (bezeztrátové) metalo-dielektrické (efektivní) prostředí:**

$\epsilon_1 = \epsilon_m$ ,  $\epsilon_m < 0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_d$ ,  $\epsilon_d > 0$ ,  $|\epsilon_m| < \epsilon_d$

Příklad: Ag/SiO<sub>2</sub> na vln. délce 700 nm:  $\epsilon_m \doteq -22 + i0.67$ ,  $\epsilon_d \doteq 2.12$

f	$\epsilon_{  }$	$\epsilon_{\perp}$
0.2	-2.70	2.71
0.5	-9.94	4.69
0.7	-14.76	9.12
0.8	-18.38	31.14

ÚFE

Fresnelova disperzní formule pro jednoosé prostředí:

$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = (\epsilon_{xx} - l_x^2 - l_y^2 - l_z^2) [\epsilon_{xx}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}(l_x^2 + l_y^2) - \epsilon_{zz}l_z^2] = 0.$

Pro (bezeztrátové) vrstevnaté prostředí  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{||} < 0$ ,  $\epsilon_{zz} = \epsilon_{\perp} > 0$ .

Tedy

$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = \epsilon_{||}$ ,  $\frac{l_x^2 + l_y^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{l_z^2}{\epsilon_{||}} = 1$ , neboli  $l_x^2 + l_y^2 = \epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_{\perp}}{|\epsilon_{||}|} l_z^2$

„Řádná“ evanescentní (tlumená) vlna – objemový plazmon (nešířivá vlna)

Jednodílný rotační hyperboloid

Pro (bezeztrátové) „drátové“ prostředí  $\epsilon_{xx} \approx \epsilon_{\perp} > 0$ ,  $\epsilon_{zz} \approx \epsilon_{||} < 0$ .

$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = \epsilon_{\perp}$ ,  $\frac{l_x^2 + l_y^2}{\epsilon_{||}} + \frac{l_z^2}{\epsilon_{\perp}} = 1$ , neboli  $l_x^2 + l_y^2 = \frac{|\epsilon_{||}|}{\epsilon_{\perp}} (l_z^2 - \epsilon_{\perp})$ .

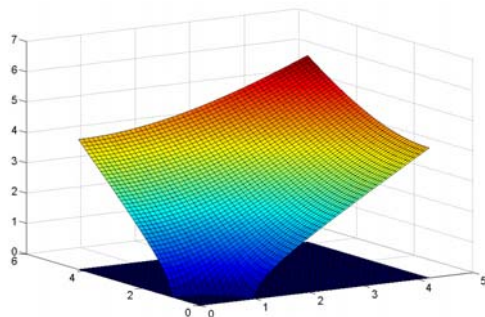
„Řádná“ „šířivá“ (netlumená) vlna – polaritonový mód

Dvojdílný rotační hyperboloid (poloměr je kladný jen pro  $|l_z| > \sqrt{\epsilon_{\perp}}$ ).

ÚFE

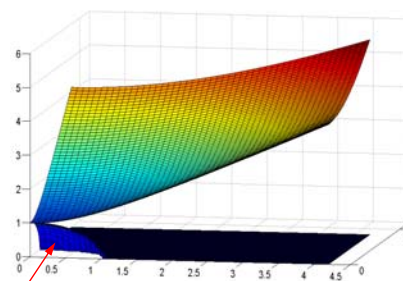
22

### Hyperbolické plochy vlnových vektorů



**Jednodílný** rotační hyperboloid

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eff} = \begin{pmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



polaritonový mód (kulová plocha)

**Dvojdílný** rotační hyperboloid

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eff} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}$$

### Řezy hyperbolickými plochami vlnových vektorů

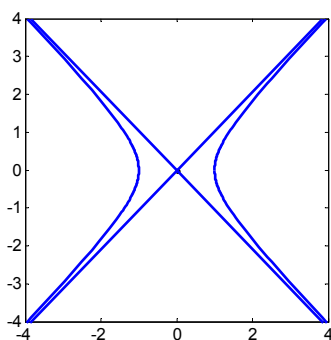
$$l_x^2 + l_z^2 = \varepsilon_{xx}, \quad \frac{l_x^2}{\varepsilon_{zz}} + \frac{l_z^2}{\varepsilon_{xx}} = 1;$$

$$l_{x,o} = \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi, \quad l_{z,o} = \sqrt{\varepsilon_{xx}} \sin \varphi,$$

$$l_{x,e} = a \cos \varphi; \quad l_{z,e} = a \sin \varphi; \quad a = \sqrt{\frac{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{zz} + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz}) \cos^2 \varphi}};$$

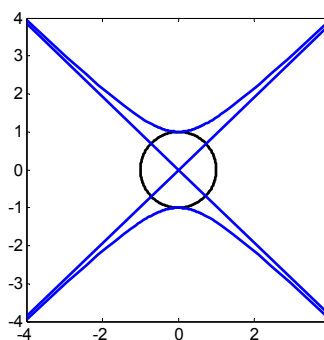
**Jednodílný** rotační hyperboloid

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eff} = \begin{pmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



**Dvojdílný** rotační hyperboloid

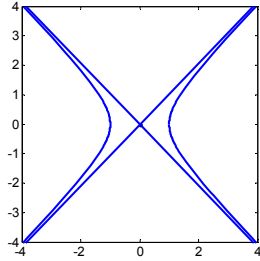
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eff} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}$$



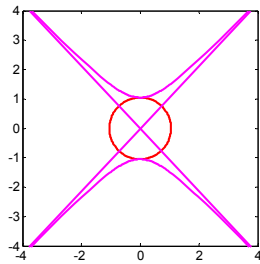
### Hyperbolické plochy komplexních vlnových vektorů

**Jednodílný** rotační hyperboloid

$$\epsilon_{eff} = \begin{pmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



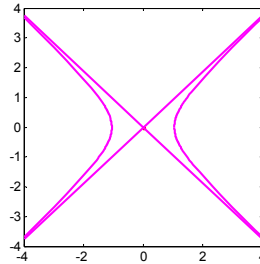
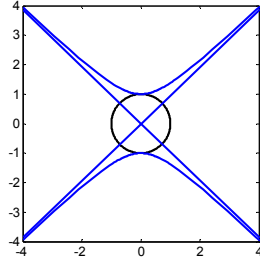
$\text{Re}\{l_x\}, \text{Re}\{l_z\}$



$\text{Im}\{l_x\}, \text{Im}\{l_z\}$

**Dvojdílný** rotační hyperboloid

$$\epsilon_{eff} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}$$

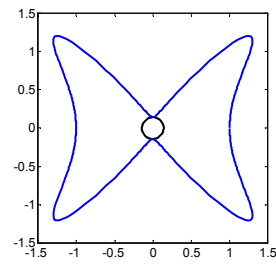


ÚFE

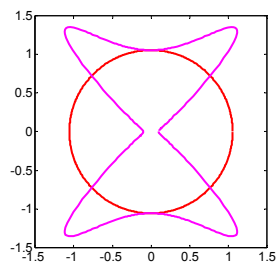
25

### Plochy komplexních vlnových vektorů ve ztrátovém hyperbolickém prostředí

$$\epsilon_{eff} = \begin{pmatrix} -1.1+0.3i & 0 & 0 \\ 0 & -1.1+0.3i & 0 \\ 0 & 0 & 1+0.2i \end{pmatrix}$$

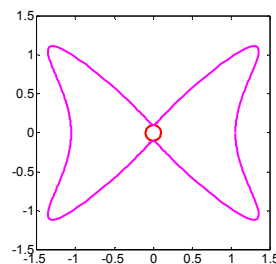
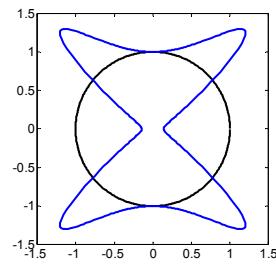


$\text{Re}\{l_x\}, \text{Re}\{l_z\}$



$\text{Im}\{l_x\}, \text{Im}\{l_z\}$

$$\epsilon_{eff} = \begin{pmatrix} 1+0.2i & 0 & 0 \\ 0 & 1+0.2i & 0 \\ 0 & 0 & -1.1+0.3i \end{pmatrix}$$

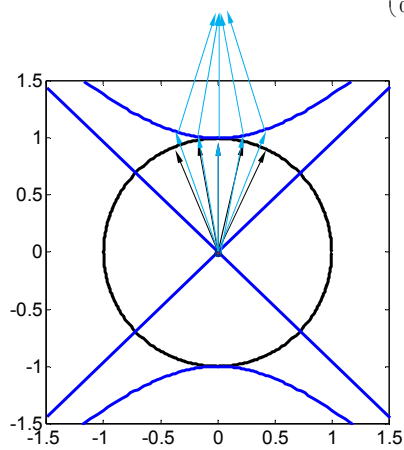


ÚFE

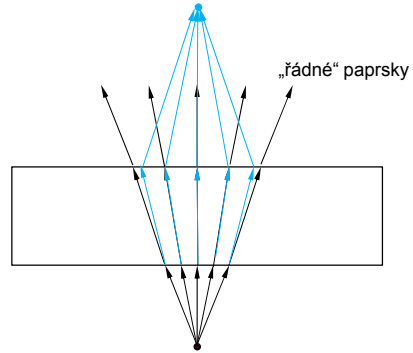
26

**Možné potenciální aplikace:  
zobrazování planární čočkou z hyperbolického materiálu**

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 < 0$$



„mimořádné“ paprsky



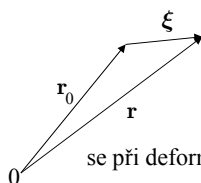
„řádné“ paprsky

... a mnohé další...

**Základy teorie šíření  
akustických vln  
v elastickém prostředí**

## Šíření akustické vlny v elastickém prostředí

(B.A.Auld: Acoustic fields and waves in solids I, II, J. Wiley 1973)



Deformace tělesar  $(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t)$

$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t)$  (elastická) výchylka bodu  $\mathbf{r}_0$

Element vzdálenosti mezi dvěma body vzdálenými o  $d\mathbf{r}_0$ ,

se při deformaci změní na  $\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t) = d\mathbf{r}_0 + d\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t)$ ,

$$\text{kde } d\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t) = \sum_n \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_n} dx_n = \sum_{m,n,p} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} \mathbf{x}_m^0 \underbrace{\mathbf{x}_n^0 \cdot \mathbf{x}_p^0}_{\delta_{np}} dx_p = \nabla \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t) \cdot d\mathbf{r}_0,$$

$$\text{kde } \nabla \boldsymbol{\xi} = \sum_{m,n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} \mathbf{x}_m^0 \mathbf{x}_n^0 \text{ je gradient výchylky (dyáda).}$$

Pokud  $d\boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{r}_0 = 0$ , nezmění se velikost  $d\mathbf{r}_0$ . Pak nejde o *deformaci*, ale o *pootočení* tělesa:

$$d\boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{r}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{r}_0 = \sum_{m,n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} dx_m dx_n = \frac{1}{2} \sum_{m,n} \left( \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_m} \right) dx_m dx_n = 0$$

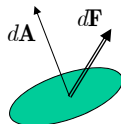
**Tensor deformace** se proto zavádí jako *symetrická část tenzoru gradientu výchylky*,

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{\xi} + (\nabla \boldsymbol{\xi})^T); \quad S_{mn} = S_{nm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_m} \right)$$

UFE

29

## Silové působení v pevných látkách

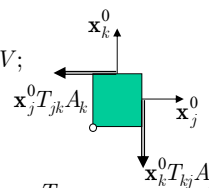


Síla působící na element plochy  $d\mathbf{A}$  je  $d\mathbf{F}$ :  $d\mathbf{F} = \bar{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{A}$

Síla působící na element *objemu* je

$$d\mathbf{F} = \iiint_{dA} \bar{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{A} = \int_{dV} \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} dV = \sum_j \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} \mathbf{x}_j^0 dV;$$

$\mathbf{T}$  ... tenzor pnutí pevné látky



Poněvadž element pevné látky se „neotáčí“, na element tělesa *nepůsobí moment* síly, tenzor pnutí je tedy *symetrický*:

$$T_{jk} = T_{kj}$$

„Hookův zákon“:  $T_{jk} = \sum_{lm} c_{jklm} S_{lm}$  Pro malé deformace platí **lineární vztah** mezi  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{S}$

Ze symetrie  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{S}$  vyplývá  $c_{jklm} = c_{kjml} = c_{jkm l}$

Lze ukázat, že s deformací je spojena hustota energie

$$dU = \mathbf{T} : d\mathbf{S} = \sum_{jk} T_{jk} dS_{jk} = \sum_{jklm} c_{jklm} dS_{jk} S_{lm} = \sum_{jklm} c_{jklm} S_{jk} dS_{lm}, \text{ a tedy } c_{jklm} = c_{lmjk}$$

Symetrie umožňuje zavést zkrácené značení  $c_{\alpha\beta} = c_{jklm}$ ,  $T_\alpha = T_{jk}$ ,  $S_\alpha = \begin{cases} S_{jj} \\ 2S_{jk}, j \neq k \end{cases}$   
(Voigtův zápis)  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$

UFE

30

## Dynamika elastického prostředí; šíření akustických vln

Analogie Newtonovy silové rovnice  $\mathbf{F} = m \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$  pro element objemu látky

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho \xi dV = \oint_A \mathbf{T} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV, \text{ a tedy } \rho \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} = \sum_k \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k}. \quad \text{Po dosazení za } \mathbf{T}$$

a s uvážením symetrie  $\mathbf{S}$  dostaneme  $\rho \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} = \sum_{klm} c_{jklm} \frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x_k \partial x_l}$ , což je **vlnová rovnice** pro  $\xi$ .

Rovinná akustická vlna:  $\xi = \xi_0 e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)}$ ,  $\mathbf{K} = \frac{\Omega}{v_a} \mathbf{n}^0$ ,  $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$ . Dosazením získáme

$$\sum_m \left( \sum_{kl} c_{jklm} n_k n_l - \rho v_a^2 \delta_{jm} \right) \xi_{0m} = 0 \quad \dots \text{ soustava 3 lineárních rovnic pro 3 složky amplitudy } \xi_0.$$

Jinak: úloha pro vlastní čísla  $\rho v_a^2$  a vlastní vektory  $\xi_0$  pozitivně definitní reálné symetrické matice

s prvky  $\sum_{kl} c_{jklm} n_k n_l \Rightarrow$  obecně existují 3 vlastní čísla a 3 vlastní vektory vzájemně ortogonální.

V každém směru  $\mathbf{n}^0$  se mohou šířit 3 akustické vlny vzájemně ortogonálně polarizované, s různými fázovými rychlostmi.

## Některé vlastnosti akustických vln

Z energetické bilance elastických kmitů lze odvodit výraz pro akustický Poyntingův vektor

$$\mathbf{\Pi} = -\mathbf{T} \cdot \dot{\xi}$$

Grupová rychlost šíření  $\mathbf{v}_g$  je rovnoběžná s  $\mathbf{\Pi}$ , přičemž platí  $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}^0 = v_a \Rightarrow |\mathbf{v}_g| \geq v_a$  (!!!)

V izotropním prostředí  $c_{11} = c_{22} = c_{33}$ ,  $c_{12} = c_{13} = c_{23}$ ,  $c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$

Volme pro jednoduchost  $\mathbf{n}^0 = \mathbf{z}^0$ . Pak

$$\begin{pmatrix} c_{44} - \rho v_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} - \rho v_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} - \rho v_a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{a\parallel} = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \quad v_{a\perp} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} < v_{a\parallel}$$

Normovaný akustický vlnový vektor  $\mathbf{l}_a$ ,  $\xi = \xi_0 e^{i\Omega(\mathbf{l}_a \cdot \mathbf{r} - t)}$ ,  $\sum_m \left( \sum_{kl} c_{jklm} l_k l_l - \rho \delta_{jm} \right) \xi_{0m} = 0$ ,

$$\det \left[ \left( \sum_{kl} c_{jklm} l_k l_l - \rho \delta_{jm} \right) \right] = 0 \quad \text{je rovnice plochy vlnových vektorů (6. stupně!)}$$



## Teoretické základy akustooptické interakce

Elastická deformace  $\bar{S}$  způsobí změnu tenzoru (elektrické) impermitivity  $\bar{\eta} = \bar{\varepsilon}^{-1}$ ,

$$\Delta \bar{\eta} = \bar{p} : \bar{S}, \quad \Delta \bar{\varepsilon} = -\bar{\varepsilon} \cdot \bar{p} : \bar{S} \cdot \bar{\varepsilon}, \quad \text{kde } \bar{p} \text{ je tenzor fotoelastických konstant.}$$

Poněvadž  $\bar{S}$  i  $\bar{\varepsilon}$  jsou symetrické tenzory 2. řádu, musí být  $\bar{p}$  tenzor 4. řádu, symetrický vůči záměně prvních dvou a/nebo druhých dvou indexů,  $p_{ijkl} = p_{jikl} = p_{ijlk} = p_{jilk}$ .

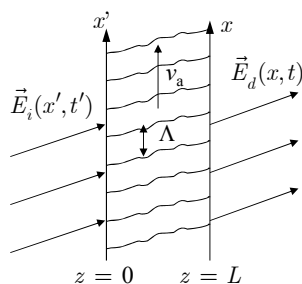
Pokud se v materiálním prostředí šíří rovinná akustická vlna s vektorem elastické výchylky

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_0 \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r} - i\Omega t), \text{ dojde k modulaci permitivity dané reálným výrazem}$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\varepsilon}(\vec{r}, t) &= -\bar{\varepsilon} \cdot \bar{p} : \left\{ \frac{1}{2} \nabla \left( \vec{\xi}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t)} \right) + c.c. \right\} \cdot \bar{\varepsilon} \\ &= \frac{\Omega}{v_a} \bar{\varepsilon} \cdot \bar{p} : \vec{n} \vec{\xi}_0 \cdot \bar{\varepsilon} \sin(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t) = \Delta \bar{\varepsilon} \sin(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t). \end{aligned}$$

Modulace permitivity způsobená akustickou vlnou má tedy tvar rovinné postupné vlny.

## Difrakce rovinné vlny na postupné akustické vlně v izotropním prostředí



V lineárním prostředí musí obecně platit

$$\begin{aligned} \vec{E}_d(x, z = L, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \bar{T}(x, x', t, t') \cdot \vec{E}(x', z = 0, t') dt' dx'. \end{aligned}$$

Akustická vlna je periodická v souř.  $x$  s periodou  $\Lambda$  a v čase s periodou  $\Omega$  a šíří se rychlostí  $v_a$ .

$$\bar{T}(x, x', t, t') = \sum \bar{T}_q(x - x', t - t') e^{iq(K_x x - \Omega t)}.$$

Pro rovinnou dopadající vlnu  $\vec{E}_i(x', z = 0, t') = \vec{E}_0 e^{i(k_{ix} x' - \omega_i t')}$  má difraktované pole tvar

$$\begin{aligned} \vec{E}_d(x, z = L, t) &= \sum_q \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \bar{T}_q(\xi, \tau) \cdot \vec{E}_0 e^{-i(k_{ix} \xi - \omega_i \tau)} d\xi d\tau e^{i[(k_{ix} + qK_x)x - (\omega_i + q\Omega)t]} \\ &= \sum_q \vec{E}_q e^{i[(k_{ix} + qK_x)x - (\omega_i + q\Omega)t]}, \end{aligned}$$

na výstupu je tedy superpozice rovinných vln, jejichž  $x$ -ové složky vlnových vektorů jsou

$$k_{d,qx} = k_{ix} + qK_x.$$

## Elastooptický a fotostrikční efekt

Předchozí analýza brala v úvahu pouze působení akustické vlny na optické záření a nikoli naopak.

Celková změna vnitřní energie objemové jednotky látky při současném působení elektrického pole a elastické deformace je  $dU = \vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{T} : d\vec{S}$ .

$$\text{Zřejmě } \vec{D} = \epsilon_0(\vec{\epsilon} + \Delta\vec{\epsilon}) \cdot \vec{E} = \epsilon_0(\vec{\epsilon} - \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} : \vec{S} \cdot \vec{\epsilon}) \cdot \vec{E}.$$

Zavedeme nový termodynamický potenciál  $V = U - \vec{E} \cdot \vec{D}$ ,  $dV = -\vec{D} \cdot d\vec{E} + \vec{T} : d\vec{S}$ .

$V$  musí tedy mít nezávislé proměnné  $\vec{E}$  a  $\vec{S}$ . Pak ale

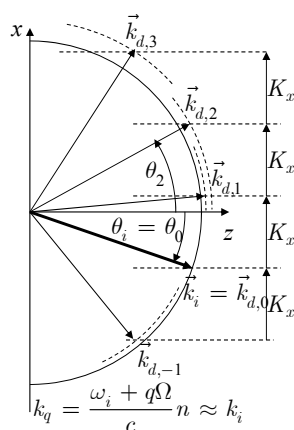
$$\frac{\partial V}{\partial E_j \partial S_{lm}} = -\frac{\partial D_j}{\partial S_{lm}} = \epsilon_0 \epsilon_{jr} \epsilon_{ks} p_{rslm} E_k = \frac{\partial T_{lm}}{\partial E_j}; \quad \text{integrací získáme}$$

$$T_{rs} = \underbrace{c_{rslm} S_{lm}}_{\text{elastická deformace}} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{jl} \epsilon_{km} p_{lmrs} E_j E_k \quad \text{(stimulovaný Brillouinův jev)}$$

$\epsilon \approx 2$ ,  $p \approx 0.2$ ,  $c \approx 10^{10} \div 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ . Pro typické hodnoty  $S \approx 10^{-6}$ ,  $E \approx 10^6 \text{ V.m}^{-1}$  je 1. člen řádu  $10^4$  až  $10^5$ , druhý řádu  $10^{-1}$  až  $10^0$ ; je tedy zanedbatelný.

## Konstrukce difraktovaných vln na výstupu ze sloupce akustické vlny

Diagram vlnových vektorů



Frekvenční posuv difraktovaných vln:

$$\omega_{d,q} = \omega_i + q\Omega \approx \omega_i$$

Vlnové vektory difraktovaných vln:

$$k_{d,qx} = k_{ix} + qK_x, \quad k_{d,qz} = \sqrt{k_q^2 - (k_{ix} + qK_x)^2} \approx \sqrt{k_0^2 n^2 - (k_{ix} + qK_x)^2}$$

Výstupní úhly difraktovaných vln

$$\sin \theta_q \approx \sin \theta_0 + q \frac{K_x}{k_0 n} = \sin \theta_0 + q \frac{\lambda}{n\Lambda}$$

## Účinnost AO interakce v přiblížení teorie vázaných vln

Vlnová rovnice pro intenzitu elektrického pole

$$\nabla \nabla \cdot \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\vec{\varepsilon}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)]; \text{ pro } \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{y}^0 E(x, z, t) \text{ platí}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(x, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ [n^2(x, t)] E(x, z, t) \} = 0;$$

**Výchozí předpoklady teorie vázaných vln:**

$$E(x, z, t) \approx \sum_{q=-\infty}^{\infty} E_q(z) e^{i[(k_{ix} + qK)x + k_{qz}z - (\omega_i + q\Omega)t]},$$

$$E_q(z) \text{ je pomalu proměnná komplexní amplituda, } \left| \frac{\partial^2 E_q(z)}{\partial z^2} \right| \ll k^2 E_q(z), \quad k \frac{\partial E_q(z)}{\partial z}.$$

$$n(x, t) = \sqrt{n^2 + \Delta\varepsilon \sin(Kx - \Omega t)} \approx n + n_1 \sin(Kx - \Omega t),$$

$$n_1 \approx \frac{\Delta\varepsilon}{2n} \approx -\frac{1}{2} n^3 p S_0 \ll n.$$

UFE

37

Zavedeme parametry

$$\Delta\varphi = \frac{k_0 n_1 L}{\cos\theta_i}, \quad Q = \frac{2\pi\lambda L}{n\Lambda^2 \cos\theta_i}, \quad \alpha = -\frac{k}{K} \sin\theta_i = -\frac{n\Lambda}{\lambda} \sin\theta_i.$$

Dosažením rozvoje do vlnové rovnice dostaneme po zanedbání malých členů vyšších řádů soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\frac{\partial E_q(z)}{\partial z} = \frac{\Delta\varphi}{2L} (E_{q+1}(z) - E_{q-1}(z)) + \frac{iqQ}{2L} (2\alpha - q) E_q(z), \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pro přehlednost soustavu rozepíšme:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \vdots \\ E_{-1} \\ E_0 \\ E_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(2\alpha + 2) \frac{Q}{2L} & \frac{\Delta\varphi}{2L} & 0 & \dots & \dots \\ -\frac{\Delta\varphi}{2L} & -i(2\alpha + 1) \frac{Q}{2L} & \frac{\Delta\varphi}{2L} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\Delta\varphi}{2L} & -i2\alpha \frac{Q}{2L} & \frac{\Delta\varphi}{2L} & 0 \\ \dots & 0 & -\frac{\Delta\varphi}{2L} & -i(2\alpha - 1) \frac{Q}{2L} & \frac{\Delta\varphi}{2L} \\ \dots & \dots & 0 & -\frac{\Delta\varphi}{2L} & -i(2\alpha - 2) \frac{Q}{2L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ E_{-1} \\ E_0 \\ E_1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

UFE

38

## Ramanův-Nathův a Braggův režim difrakce

Ze soustavy rovnic vyplývá, že jsou vzájemně vázány **vždy jen sousední difrakční řády**. To je důsledek *čistě sinusového* charakteru modulace.

Diferenciální rovnici pro  $E_q$  je možné v limitních případech  $Q \ll 1$  a  $Q \gg 1$  řešit analyticky:

1.  $Q \ll 1$  – Ramanův – Nathův režim
2.  $Q \gg 1$  – Braggův režim

$Q \ll 1$ : **Ramanův-Nathův režim**. Pro  $Q = 0$  má soustava rovnic analytické řešení

$$E_q(L) = E_0 J_q(\Delta\varphi), \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

To je možno fyzikálně snadno interpretovat jako *fázovou modulaci dopadající vlny na sloupci akustické vlny*:

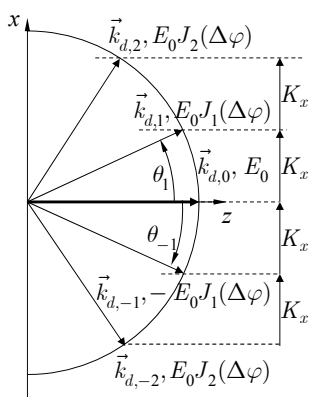
$$E(x, L, t) = E_0 e^{i(k_{ix} - \omega t)} e^{i\Delta\varphi \sin(Kx - \Omega t)} = E_0 \sum_q J_q(\Delta\varphi) e^{i[(k_{ix} + qK)x - i(\omega + q\Omega)t]}.$$

Přesnější řešení soustavy s  $Q \ll 1$ ,  $q \ll \alpha$  dá  $E_q(L) = E_0 J_q \left[ \Delta\varphi \frac{\sin(Q\alpha/2)}{Q\alpha/2} \right]$ .

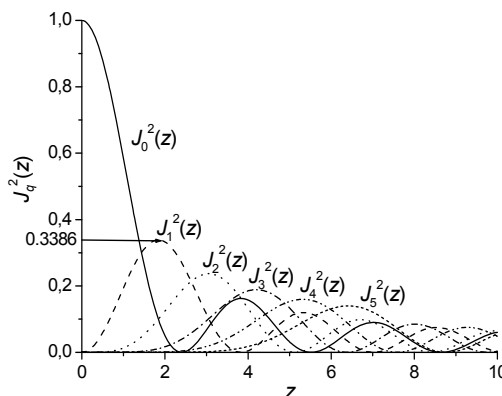
ÚFE

39

### Ramanův-Nathův režim:



Difrakce do mnoha řádů, difrakční účinnost v jednotlivých řádech je dána kvadráty Besselovy funkce  $J_q^2(\Delta\varphi)$ , podobně jako u tenkého amplitudového hologramu se sinusovou modulací amplitudové propustnosti.



ÚFE

40

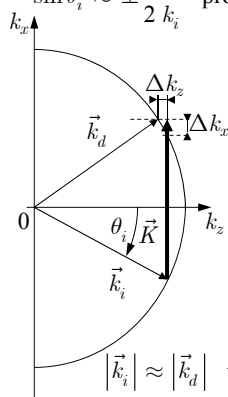
### Braggův režim

Braggův režim nastává pro  $Q \gg 1$ , prakticky pro  $Q \geq 10$ .

Pak lze zanedbat vazbu do ostatních řádů kromě případu, kdy  $q \approx 2\alpha$ , tj. pro  $q = \pm 1$

$$\sin \theta_i \approx \pm \frac{1}{2} \frac{K}{k_i} \quad \text{pro } q = \pm 1. \quad \text{Pak } \frac{Q}{2}(1 - 2\alpha) = \frac{2\pi\lambda L}{2n\Lambda^2 \cos \theta_i} (1 + 2 \frac{n\Lambda}{\lambda} \sin \theta_i) =$$

$$= \frac{KL}{2k \cos \theta_i} (K + 2k \sin \theta_i) \cong L \tan \theta_i \Delta k_x = \Delta k_z L.$$



Rovnice vázaných vln jsou pak

$$\frac{dE_{d,0}}{dz} = \frac{\Delta\varphi}{2L} E_{d,1},$$

$$\frac{dE_{d,1}}{dz} = -\frac{\Delta\varphi}{2L} E_{d,0} + i \frac{\Delta k_z}{2L} E_{d,1};$$

Řešení s počáteční podmínkou  $E_{d,0}(0) = E_0$ ,  $E_{d,1}(0) = 0$  je

$$| \vec{k}_i | \approx | \vec{k}_d | \quad E_{d,1}(L) = E_0 \frac{\Delta\varphi}{2\sigma} e^{-i \frac{\Delta k_z L}{2}} \sin \sigma, \quad \text{kde } \sigma = \sqrt{\left(\frac{\Delta k_z L}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2}.$$

$$\text{Tedy } |E_{d,1}(L)|^2 = E_0^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2\sigma}\right)^2 \sin^2 \sigma.$$

UFE

41

### Braggův režim

Difrakční účinnost

Fázový synchronismus:

$$\eta = \left| \frac{E_{d,1}(L)}{E_{d,0}(0)} \right|^2 = \left(\frac{\Delta\varphi}{2\sigma}\right)^2 \sin^2 \sigma \quad \Delta k_z L \approx 0, \text{ t.j. } \vec{k}_i \pm \vec{K} \approx \vec{k}_d$$

(podmínka zachování kvaziimpulsu).

$$\text{Platí } \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{2\pi n_1}{2\lambda \cos \theta_i} L \approx \frac{\pi}{2\lambda} n^3 p S_0 L. \quad S_0 \text{ můžeme vyjádřit jako } S_0 = \sqrt{\frac{2\Pi}{\rho v_a^3}},$$

kde  $\Pi = \frac{1}{2} \rho v_a^3 S_0^2$  [W.m<sup>-2</sup>] je hustota akustického výkonu. Pak

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2\lambda} n^3 p S_0 L = \sqrt{\frac{n^6 p^2 \pi^2 L^2}{\rho v_a^3 2\lambda^2}} \Pi = \sqrt{\frac{\Pi}{\Pi_0}}, \quad \text{kde } \Pi_0 = \frac{2\lambda^2}{\pi^2 L^2 M_2}, \quad \text{a}$$

$M_2 = \frac{p^2 n^6}{\rho v^3}$  je číselník akustické kvality materiálu.

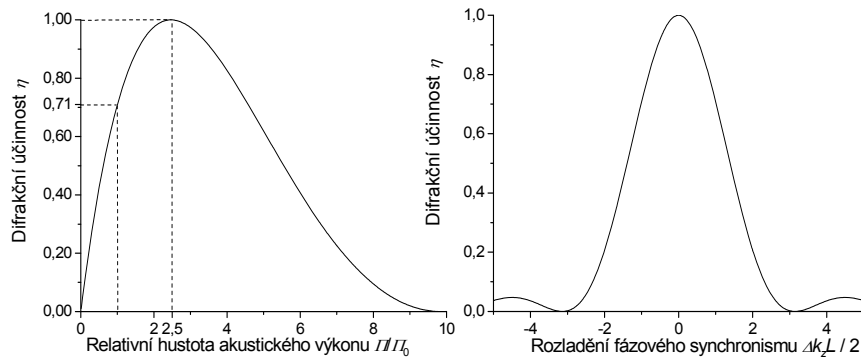
Při fázovém synchronismu  $\Delta k_z L = 0$  je difrakční účinnost  $\eta = \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = \sin^2 \sqrt{\frac{\Pi}{\Pi_0}}$ ,

pro  $\eta \leq 0.7$  lze v dobrém přiblížení psát  $\eta \approx \frac{\Pi}{\Pi_0} \left(\frac{\sin(\Delta k_z L / 2)}{\Delta k_z L / 2}\right)^2$ .

UFE

42

### Účinnost difrakce v Braggově režimu



Při hustotě akustického výkonu  $II = II_0$  dosahuje účinnost 71%;

100% účinnosti dosáhneme až při  $II = 2.47II_0$ .

Typická účinnost akustooptických prvků pracujících v Braggově režimu bývá proto 70–90%, vyšší spíš jen výjimečně.

ÚFE

43

### Technické aplikace akustooptických prvků

*Dělení podle účelu:*

1. Deflektory laserového svazku: *úhel vychýlení je funkcí frekvence*
2. Modulátory laserového svazku: *účinnost závisí na akustickém výkonu*
3. Akustooptické laditelné filtry: *fázový synchronismus je spektrálně citlivý*
4. Akustooptické prvky pro zpracování (elektronických) signálů

*Dělení podle typu interakce*

1. Prvky využívající izotropní AO interakce (*v opticky izotropním prostředí*)
  - a) se soufázovým akustickým měničem
  - b) s fázovanou řadou měničů (rovinná řada, stupňovitá řada)
2. Prvky využívající anizotropní interakce (*v opticky anizotropním a opticky aktivním prostředí*)
3. Prvky využívající difrakce na stojaté akustické vlně

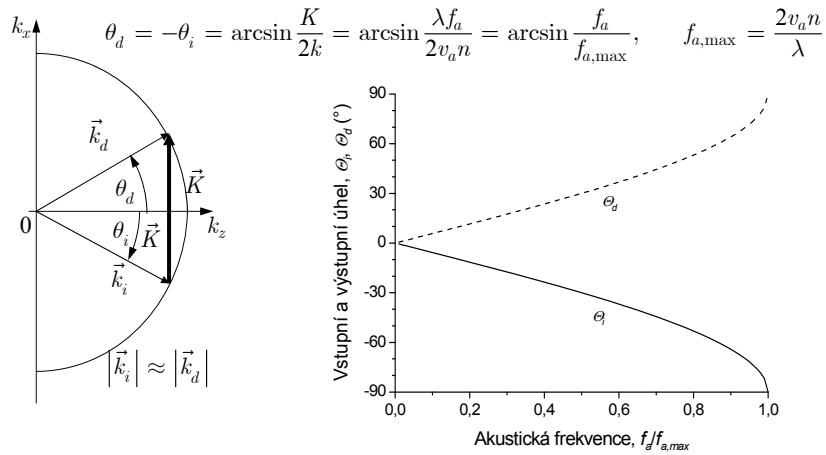
*Dělení podle konstrukce*

1. Objemové prvky
2. Vlnovodné prvky (*integrovane-optické*)

ÚFE

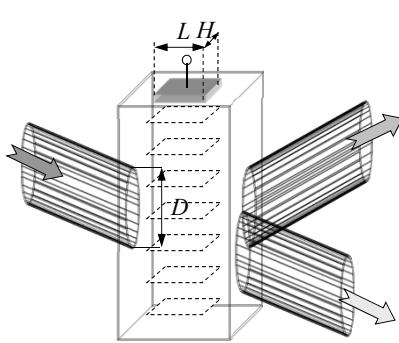
44

### Akustooptická interakce v Braggově režimu v izotropním prostředí



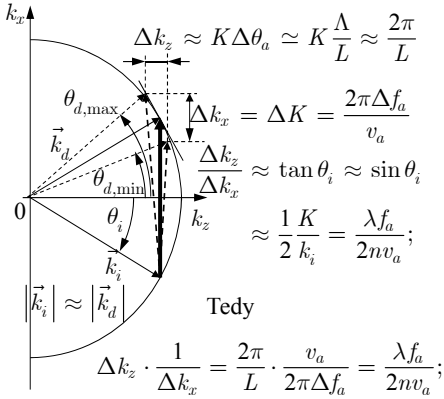
### Akustooptické deflektory laserového svazku: vychýlování změnou frekvence $f_a$

AO vychýlování v izotropním prostředí



$$\sin \theta_d \approx \sin \theta_i + \frac{K}{k}; \quad \theta_d \approx \theta_i + \frac{\lambda f_a}{v_a};$$

Úhel vychýlení je přibližně lineárně závislý na frekvenci akustické vlny.



Úhel rozmítání  $\Delta \theta_d \approx \frac{\lambda}{v_a} \Delta f_a.$

**Počet rozlišitelných bodů deflektoru:**

$$N = \frac{\Delta\theta_d}{\Delta\theta_{opt}} \approx \frac{\lambda\Delta f_a}{v_a} \frac{D}{\lambda} = \frac{D}{v_a} \Delta f_a = \tau \cdot \Delta f_a, \quad \text{tedy } \boxed{N = \tau \cdot \Delta f_a}$$

Počet rozlišitelných bodů deflektoru je dán součinem časové konstanty a frekvenčního zdvihu. Frekvenční zdvih je omezen maximálním přípustným narušením fázového synchronismu:

$$\Delta f_a \leq \frac{2nv_a^2}{\lambda f_a L} \implies \text{délka oblasti AO interakce by měla být co nejmenší}$$

Avšak: deflektor musí pracovat v Braggově režimu, jinak má malou difrakční účinnost:

$$Q = \frac{2\pi\lambda L}{n\Lambda^2 \cos\theta_i} \approx \frac{2\pi\lambda L f_a^2}{nv_a^2} \geq 4\pi \implies L \text{ musí být dostatečně velké. Odtud plyne podmínka}$$

$$\frac{2nv_a^2}{\lambda f_a^2} = L_{\min} \leq L \leq L_{\max} = \frac{2nv_a^2}{\lambda f_a \Delta f_a} \text{ pro délku interakční oblasti. Tedy } \Delta f_a \leq f_a.$$

**Ovládací akustický výkon deflektoru**

$$P_a = L \cdot H \cdot \Pi_0 = \frac{2\lambda^2}{\pi^2 M_2} \cdot \frac{H}{L} \implies \text{pro malý výkon musí být poměr } H/L \text{ co nejmenší.}$$

V každém AO materiálu se akustická vlna šíří s útlumem,  $\alpha \approx \Gamma f_a^2$ .

**Difrakce na tlumené akustické vlně:**

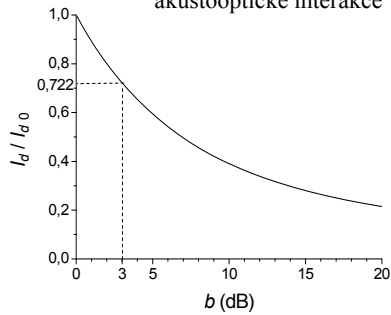
1. pokles účinnosti difrakce vlivem útlumu,  $E_d(x) \sim \bar{S}(x) = \bar{S}_0 e^{-\alpha x}$ , tedy
2. zvětšení úhlové divergence difraktovaného svazku  $E_d(x) \approx E_{d,0} e^{-\alpha x}$ , vlivem nehomogenního rozložení amplitudy.

$$I_d = I_{d,0} \int_0^D e^{-2\alpha x} dx = I_{d,0} \frac{1 - e^{-2\alpha D}}{2\alpha D}, \quad e^{-2\alpha D} = 10^{-b/10}; \quad b = 20\alpha D / \ln 10, \\ 2\alpha D = b \ln 10 / 10.$$

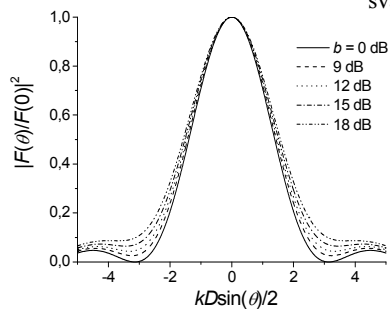
$$|F(\theta)|^2 = \left| \int_0^D e^{-\alpha x} e^{-ikx \sin \theta} dx \right|^2 = \frac{1 + e^{-2\alpha D} - 2e^{-\alpha D} \cos(kD \sin \theta)}{(\alpha D)^2 + (kD \sin \theta)^2}.$$



Vliv útlumu akustické vlny na účinnost akustooptické interakce



Vliv útlumu na divergenci difraktovaného svazku



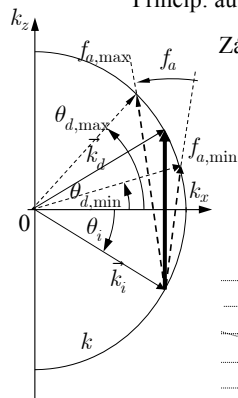
Technické řešení pro velký počet rozlišitelných bodů:

1. Silně eliptický optický svazek s velkým poměrem  $D/H$  (složitá optická soustava vyžadující soustavu hranolů nebo válcové čočky)
2. Použití materiálu s malou akustickou rychlostí, ale malým akustickým útlumem (??)
3. Zajištění účinné generace akustické vlny ve velkém frekvenčním pásmu

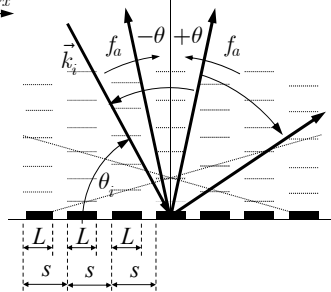
Rozšíření pásma AO interakce: deflektory s řízeným akustickým svazkem

Princip: automatické udržování fázového synchronismu při změně frekvence

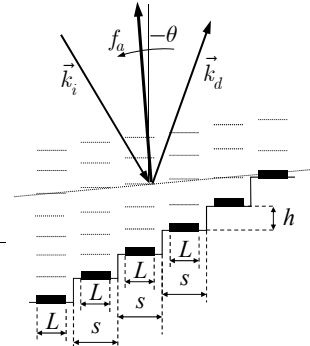
Základní přístup: fázovaná řada akustických měničů



1. Rovinná fázovaná řada měničů



2. Stupňovitá fázovaná řada měničů



Difrakční účinnost v přiblížení malých účinností (Gordonova-Dixonova metoda)

$$\eta \approx \frac{\pi^2}{2\lambda^2} M_2 \Pi_a L^2 \underbrace{\left( \frac{\sin(K\theta L/2)}{K\theta L/2} \right)^2}_{\text{vyzařovací charakteristika segmentu měniče}} \underbrace{\left( \frac{\sin[\frac{1}{2} N_m (K\theta s - \varphi)]}{\frac{1}{2} N_m (K\theta s - \varphi)} \right)^2}_{\text{vyzařovací charakteristika fázované řady měničů}},$$

$$\theta = \theta_i + \frac{\lambda f_a}{2n v_a} = \frac{\lambda}{2n v_a} (f_a - f_{a,0}) \quad \text{úhel difrakce (předpokládáme malé úhly, } \sin \theta \approx \theta)$$

$\varphi$  je relativní fázový posuv mezi sousedními segmenty,  
pro rovinnou řadu nejčastěji  $\varphi = \pi$ , pro stupňovitou řadu  $\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi f_a h}{v_a}$

Směr „difrakčních maxim“  $\pm\theta = \pm \frac{v_a}{2s f_a}$  pro rovinnou řadu,

stupňovitá řada má jediné hlavní maximum  $\theta = \frac{h}{s} \pm \frac{v}{2s f_a}$ .

Rovinná řada využívá pouze polovinu akustického výkonu, stupňovitá celý výkon.

Pro maximální celkovou délku měniče lze odvodit  $L_{tot,max} = N_m s \leq \frac{16n v_a^2}{\lambda f_a \Delta f_a}$ ,

měníč je možno prodloužit  $2 \left( \frac{f_0}{\Delta f} \right)^2 \approx 4 \div 8 \times$ .

Úspora akustického výkonu: u rovinné řady až **čtyřnásobná**, u stupňovité řady až **osminásobná**.

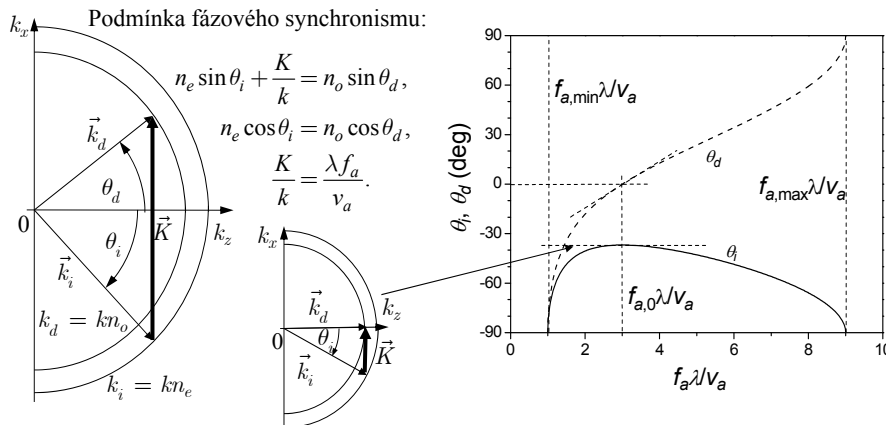
UFE

51

### Akustooptická interakce v anizotropním prostředí

Interakce v jednoosém prostředí v rovině kolmé k optické ose se změnou polarizace

Podmínka fázového synchronismu:



$$f_{a,min} = \frac{v_a}{\lambda} |n_e - n_o|, \quad f_{a,max} = \frac{v_a}{\lambda} (n_e + n_o), \quad f_{a,0} = \frac{v_a}{\lambda} \sqrt{n_e^2 - n_o^2}$$

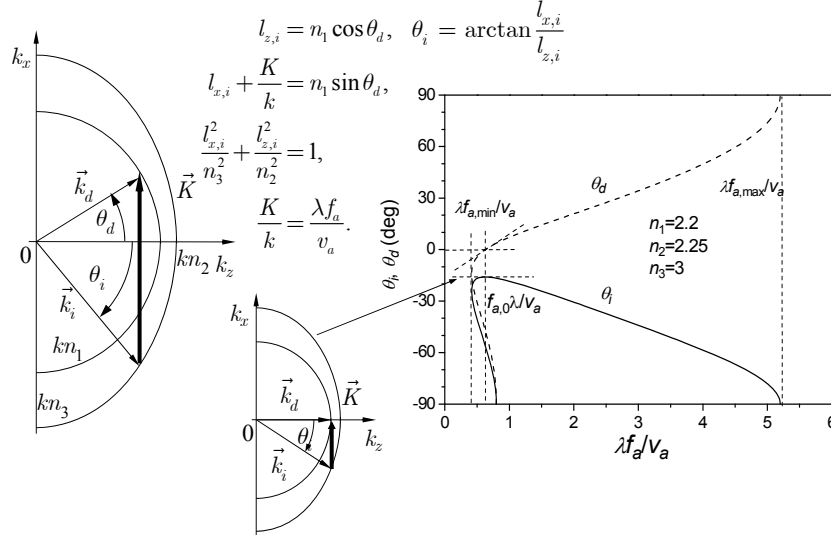
Nevýhoda: frekvence  $f_{a,0}$  je prakticky u všech AO materiálů příliš vysoká.

UFE

52

### Abnormální akustooptická interakce v anizotropním prostředí

(jednoosé) prostředí s optickou aktivitou; ve dvojosém prostředí je zpravidla  $f_a$  příliš velká



ÚFE

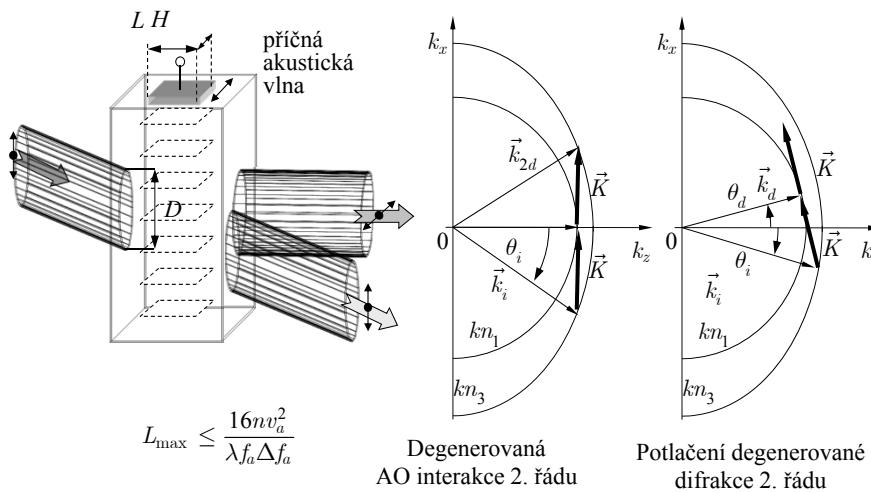
53

### AO vychylování v anizotropním prostředí

Výhody: snížení úhlové selektivity interakce  $\Rightarrow$  prodloužení interakční délky  $\Rightarrow$  snížení výkonu

Difrakce na příčné akustické vlně  $\Rightarrow$  nižší akustická rychlost

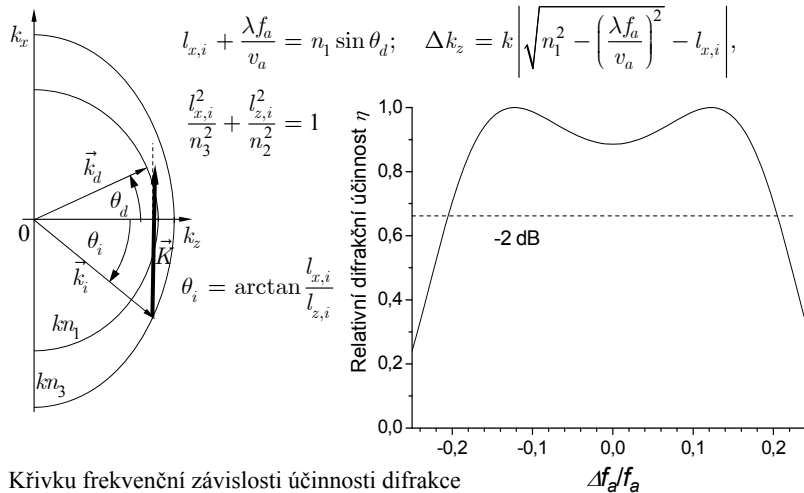
$\Rightarrow$  zvětšení počtu rozlišitelných bodů, *polarizační rozlišení* difraktované vlny



ÚFE

54

### Frekvenční závislost difrakční účinnosti při optimální konfiguraci abnormální AO interakce



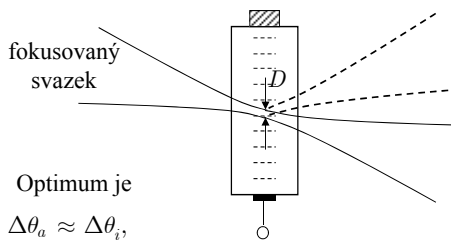
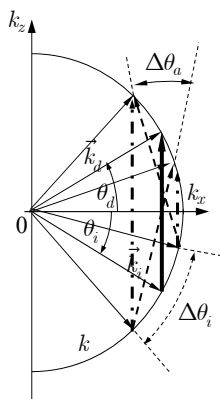
ÚFE

55

### Akustooptická modulace

Komplementární problém k akustooptickému vychylování:

K modulaci (intenzity) dojde **pouze tehdy**, když se frekvenčně posunuté svazky prostorově překrývají.



Optimum je

$$\Delta \theta_a \approx \Delta \theta_i,$$

$$\text{tedy } \frac{\Lambda_a}{L} = \frac{v_a}{f_a L} \approx \frac{\lambda}{nD}. \text{ Odtud } \tau \approx \frac{D}{v_a}, \quad \Delta f_a \approx \frac{1}{\tau} \approx \frac{v_a}{D}.$$

$$\text{Pro délku měniče dostáváme opět } L_{\min} = \frac{2nv_a^2}{\lambda f_a^2} < L \approx \frac{nv_a^2}{\lambda f_a \Delta f_a}, \text{ tedy } \Delta f_a < f_a / 2.$$

$$\text{Pro } \Delta f_a = 50 \text{ MHz, } \tau \approx 20 \text{ ns je } D \approx \frac{v_a}{\Delta f_a} \approx \frac{3 \times 10^3}{50 \times 10^6} = 60 \mu\text{m}.$$

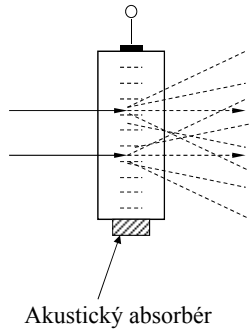
ÚFE

56

### Akustooptické modulátory pro klíčování jakosti a synchronizaci vidů

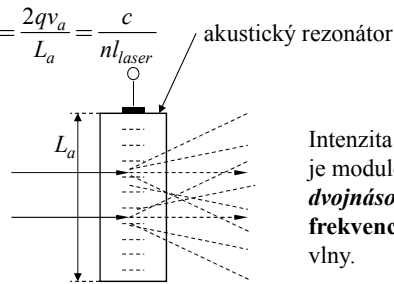
Ramanův-Nathův nebo Braggův režim; cílem je dostatečný pokles intenzity 0. řádu

**Klíčování jakosti:** difrakce na *běžící* akustické vlně



**Synchronizace vidů v dutině laseru:** difrakce na *stojaté* vlně:

$$f_{a,0} = \frac{2qv_a}{L_a} = \frac{c}{nl_{laser}}$$



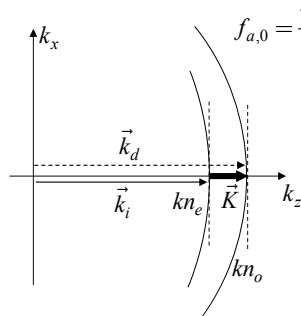
Intenzita prošlé vlny je modulována **dvojnásobnou frekvencí** akustické vlny.

$$\Delta \bar{\varepsilon}(\vec{r}, t) = \Delta \bar{\varepsilon} \left[ \sin(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t) - \sin(\vec{K} \cdot \vec{r} + \Omega t) \right] = -2\Delta \bar{\varepsilon} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \sin \Omega t.$$

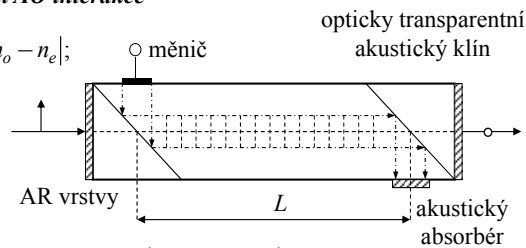
$$I_0 = I_0 \left[ (\Delta \varepsilon)^2 \right] = f \left[ \sin^2(\Omega t) \right] = f \left[ (1 - \cos 2\Omega t) / 2 \right] = g(2\Omega t).$$

### Akustooptické laditelné filtry

Základní konfigurace: **kolineární AO interakce**



$$f_{a,0} = \frac{v_a}{\lambda} |n_o - n_e|;$$



$$\Delta k_z L = \Delta \left( \frac{2\pi}{\lambda} L |n_o - n_e| \right) \approx \frac{2\pi}{\lambda^2} L |n_o - n_e| \Delta \lambda$$

$$\Delta k_z L / 2 \leq \pi / 2 \Rightarrow \Delta \lambda \approx \frac{\lambda_0^2}{2|n_o - n_e| L}$$

Přeladitelnost:

$$\lambda = \frac{v_a}{f_a} |n_o(\lambda) - n_e(\lambda)| \approx \frac{v_a}{f_a} |n_o(\lambda_0) - n_e(\lambda_0)|$$

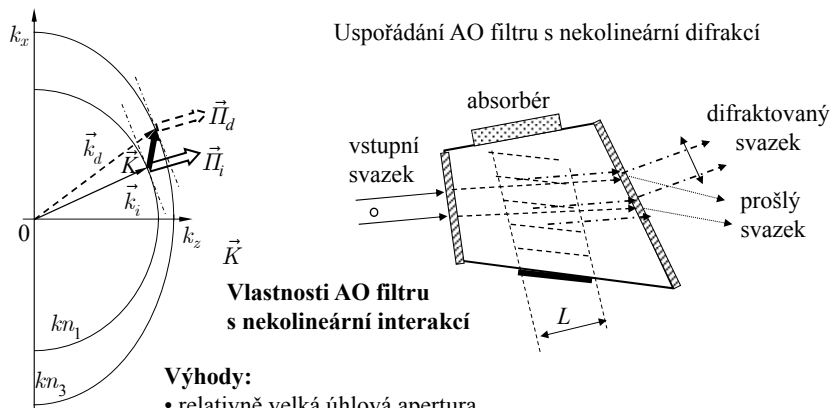
**Výhody** kolineární interakce:

- úzké spektrální pásmo
- relativně velká úhlová apertura

**Nevýhody:**

- relativně vysoký střední akustický kmitočet
- složitě uspořádání

### Akustooptické filtry s nekolineární AO interakcí



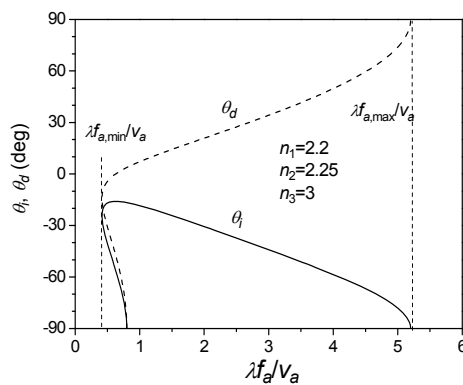
**Výhody:**

- relativně velká úhlová apertura
- směry šíření energie dopadající i difraktované vlny v krystalu *jsou stejné* a tedy interakce je účinná
- „odfiltrovaný“ svazek se liší *polarizací i směrem šíření na výstupu*
- *velká flexibilita* uspořádání změnou konfigurace

**Nevýhody:**

- menší selektivita, šířka pásma *roste s kvadrátem vln. délky*

### Optimální konfigurace nekolineárního AO laditelného filtru s minimální frekvencí



Akustická frekvence filtru je v blízkosti minimální frekvence pro nekolineární AO interakci.

Parametry typického filtru v TeO<sub>2</sub>:

- $\Delta\lambda \approx 10 \div 100 \text{ nm}$
- $f_{a,0} \approx 40 \div 200 \text{ MHz}$
- $NA \approx 10' \div 20^\circ$
- $P_a \leq 0,2 \div 2 \text{ W}$
- $\lambda \approx 0,4 \div 10 \text{ }\mu\text{m}$

### Vybrané akustooptické materiály

Materiál	optická propust. (μm)	$n$ ( $n_o, n_e$ )	$M_2 \times 10^{15}$	$v_a$ (km/s)	$Z_a$ (kg/m <sup>2</sup> s)	Akust. polarizace
Tavený křemen	0,2 4,5	1,457	1,56    0,47 ⊥	5,96 3,76	13,12	L
Sklo SF59	0,46 2,5	1,95	19,1	3,26	20,5	L
LiNbO <sub>3</sub>	0,5 4,5	2,202 2,286	7	6,57	30,6	L
<b>PbMoO<sub>4</sub></b>	0,4 5,5	2,262 2,386	36,3   36,1 ⊥	3,63	25,22	L
<b>TeO<sub>2</sub></b>	0,35 5	2,26 2,412 opt. akt.	34,5 ⊥ 25,6   <b>1200</b>	4,2 <b>0.616</b>	25,2 3,7	L S
Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	0,4 30	<b>1,97</b> <b>2,65</b>	506 640	1,62 <b>0.34</b>	11,6 2,4	L S
GaP	0,6 10	3,31	44,6	6,32	26,1	L

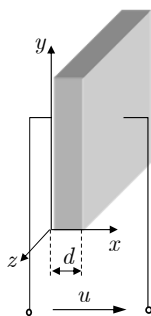
UFE

61

### Buzení akustické vlny piezoelektrickým měničem (1)

Měnič jako akustický rezonátor

Piezoelektrické prostředí:



$$\bar{T} = \bar{c}^D : \bar{S} - \tilde{h} \cdot \vec{D},$$

$$\vec{E} = -\tilde{h} : \bar{S} + \bar{\eta}^S \cdot D,$$

$$\bar{\eta}^S = (\bar{\epsilon}^S)^{-1}, \quad \tilde{h} = \bar{\eta}^S \cdot \tilde{e},$$

$$c_{jklm}^D = c_{jklm}^E + \eta_{pr}^S e_{pjke} e_{rlm},$$

$\bar{c}^D = \bar{c}^E + \tilde{e} \cdot \bar{\eta}^S \cdot \tilde{e}$  je „piezoelektricky zpevněný“ tenzor elastických konstant,

$\tilde{e}$  je piezoelektrický tenzor (3. řádu).

V konfiguraci podle obrázku při diagonálním tenzoru  $\bar{\eta}^S$  má  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  pouze složku  $x$ , t.j. 1.

Zavedeme akustickou rychlost  $\vec{u} = \frac{d\vec{\xi}}{dt}$ . Pak  $\frac{dS_{jk}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{du_j}{dx_k} + \frac{du_k}{dx_j} \right)$ .

Časová derivace rovnic dá po doplnění Newtonovou silovou rovnicí soustavu rovnic

UFE

62

### Buzení akustické vlny piezoelektrickým měničem (2)

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} = c_{\alpha\alpha}^D \frac{\partial u_l}{\partial x} - h_{1\alpha} \frac{\partial D_1}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = -h_{1\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + \eta_{11}^S \frac{\partial D_1}{\partial t}, \quad \alpha = \begin{cases} 1 = (11) \text{ pro } l = 1, \\ 6 = (12) \text{ pro } l = 2, \\ 5 = (13) \text{ pro } l = 3. \end{cases}$$

v závislosti na „polarizaci“  
(směru kmitání)  
akustické vlny.

$$\frac{\partial T_a}{\partial x} = \rho \frac{\partial u_l}{\partial t},$$

Pro harmonický časový průběh  $e^{j\Omega t}$  všech veličin můžeme soustavu rovnic integrovat od  $x = 0$  do  $x = d$  s okrajovými podmínkami  $T_\alpha(0) = T_1$ ,  $T_\alpha(d) = T_2$ ,  $u_l(0) = u_1$ ,  $u_l(d) = u_2$ .

Po formálních úpravách můžeme výsledek zapsat ve tvaru

$$T_1 = \frac{Z_a}{j \tan \theta} u_1 + \frac{Z_a}{j \sin \theta} u_2 + \frac{h_{1\alpha}}{j\Omega} J Z_a = \sqrt{c_{\alpha\alpha}^D \rho} = \rho v_a \text{ je akustická impedance,}$$

$$T_2 = \frac{Z_a}{j \sin \theta} u_1 + \frac{Z_a}{j \tan \theta} u_2 + \frac{h_{1\alpha}}{j\Omega} J, \quad J = j\Omega D_1 \text{ je hustota indukčního proudu,}$$

$$J = j\Omega \varepsilon_{11}^S E_1 - h_{1\alpha} \varepsilon_{11}^S u_1 - h_{1\alpha} \varepsilon_{11}^S u_2, \quad \theta = \Omega d / v_a = K_a d = \pi \Omega / \Omega_0,$$

$f_0 = \Omega_0 / 2\pi = v_a / 2d$  je půlvlnný rezonanční kmitočet

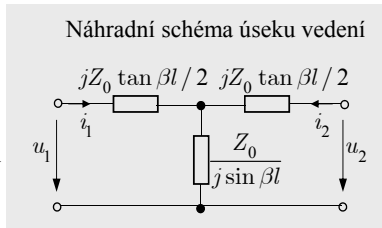
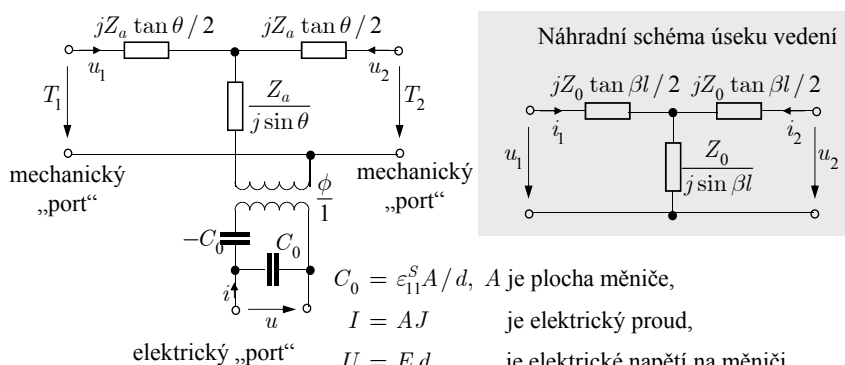
ÚFE

63

### Buzení akustické vlny piezoelektrickým měničem (3)

Předchozí soustavu rovnic lze interpretovat pomocí náhradního elektrického obvodu:

Masonovo náhradní elektrické schéma piezoelektrického tloušťkového měniče



$$C_0 = \varepsilon_{11}^S A / d, \quad A \text{ je plocha měniče,}$$

$$I = AJ \quad \text{je elektrický proud,}$$

$$U = E_1 d \quad \text{je elektrické napětí na měniči,}$$

$$\phi = k \sqrt{Z_a \Omega_0 C_0} / \pi A \text{ je převodní poměr transformátoru,}$$

$$k = h_{1\alpha} / \sqrt{\eta_{11}^S c_{\alpha\alpha}^D} \text{ je činitel elektromechanické vazby.}$$

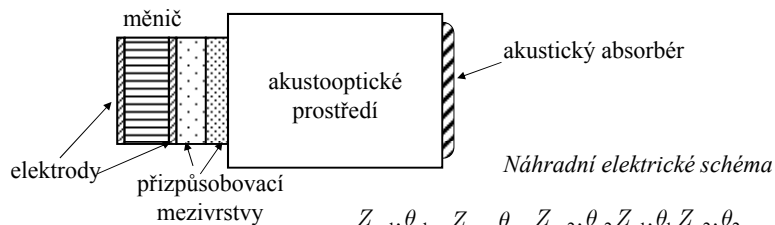
ÚFE

64



### Buzení akustické vlny piezoelektrickým měničem (4)

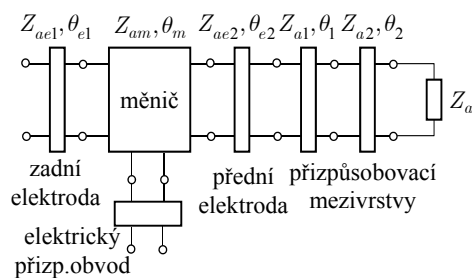
Frekvenční přenosovou charakteristiku měniče připojeného na akustooptické prostředí je možno analyzovat (optimalizovat) standardními metodami teorie elektrických obvodů.



Výsledná frekvenční charakteristika AO prvku

$$|F_{AO}(\Omega)|^2 = |F_{el}(\Omega)|^2 \cdot |F_{em}(\Omega)|^2 \cdot \eta_{AO}(\Omega)$$

el.přízp. měnič účinnost  
obvod +vrstvy AO prvku



UFE

65

### Vlastnosti vybraných piezoelektrických a akustických materiálů

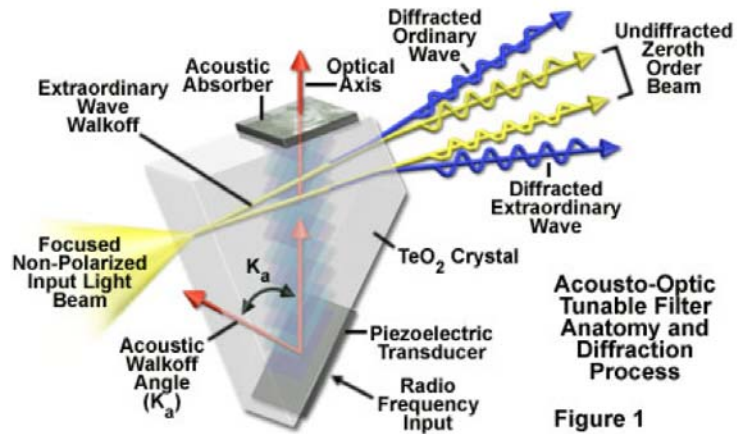
Materiál	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	mód	orientace	$k$	$\epsilon_r$	$v_a$ (km/s)	$Z_a = \rho \cdot v_a$
$\alpha$ -SiO <sub>2</sub> 32	2.65	L	X	0.098	4.58	5.75	15.2
		S	Y	0.137	4.58	3.85	10.2
LiNbO <sub>3</sub> 3m	4.64	L	36°Y	0.49	38.6	7.4	33.9
		S	163°Y	0.62	42.9	4.56	20.8
LiTaO <sub>3</sub> 3m	7.45	L	47°Y	0.29	42.7	7.2	55.2
		S	X	0.44	42.6	4.22	31.4
ZnO 6mm	5.68	L	Z	0.282	8.84	6.40	36.4
		S	43°Y	0.322	8.63	3.21	18.4
In	7.3	L				2.3	16.8
		S				1.44	10.5
Au	19	L				3.24	62.5
		S				1.20	22.8
Ag	10.5	L				3.65	38.0
		S				1.61	16.7
Sn	7.2	L				3.32	23.9
		S				1.67	12.0

UFE

66

### Akustooptický laditelné filtry v konfokální mikroskopii (OLYMPUS)

Nekolineární filtr na bázi  $\text{TeO}_2$

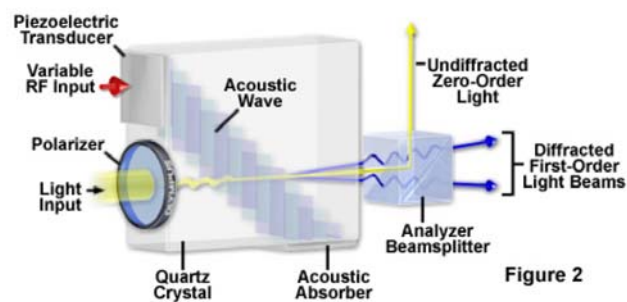


UFE

67

### Akustooptický laditelné filtry v konfokální mikroskopii (OLYMPUS)

Kolineární filtr na bázi krystalického křemene



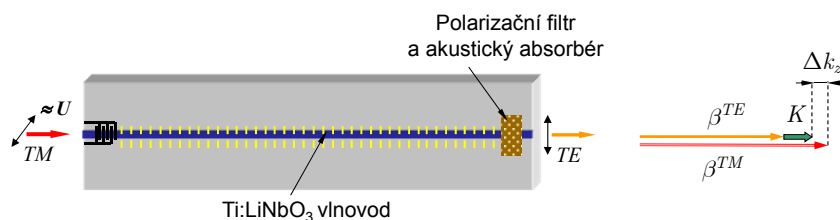
Komerční výrobce akustooptických zařízení: ISOMET, [www.isomet.com](http://www.isomet.com)

UFE

68

## Integrovaně-optické akustooptické prvky

### Kolineární interakce



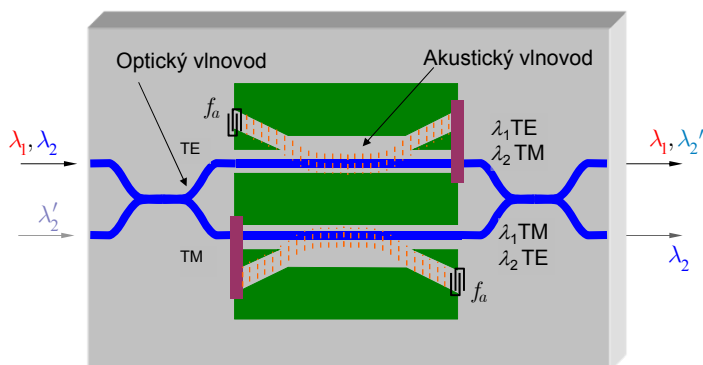
Účinnost akustooptické interakce

$$\eta = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + (\Delta k_z/2)^2} \sin^2(\sqrt{\kappa^2 + (\Delta k_z/2)^2} L),$$

$$\kappa \sim \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}^{TM}(x, y) \cdot \Delta \varepsilon(x, y) \cdot \vec{e}^{TE}(x, y) dx dy = \frac{\pi}{2L_c}$$

## Polarizačně nezávislý akustoopticky laditelný začleňovací/vydělovací demultiplexor v LiNbO<sub>3</sub>

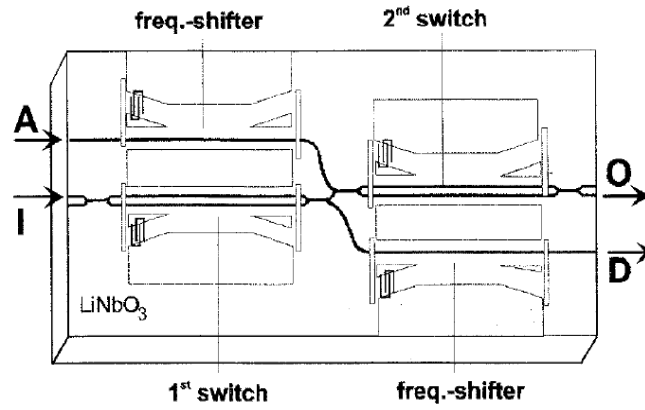
Princip: kolineární AO TE-TM konverze



Střední vlnová délka  $\lambda_c = 1,55 \mu\text{m}$ ,  
vzdálenost kanálů  $< 1 \text{ nm}$ , přeladitelnost  $\Delta\lambda \approx 70 \text{ nm}$

### Zlepšení charakteristik add-drop multiplexoru kaskádním řazením filtrů a kompenzací frekvenčního posuvu

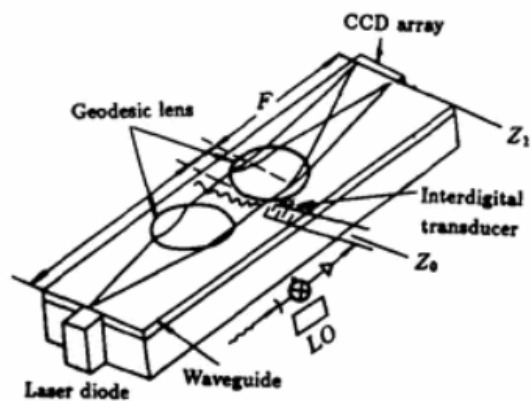
(Uni Paderborn, D, ECOC 1997)



UFE

71

### Integrovaně-optický akustooptický spektrální analyzátor RF signálů

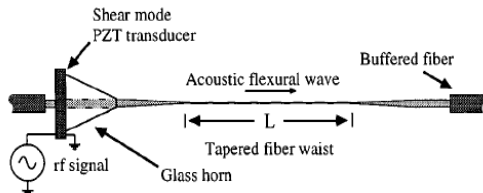


UFE

72

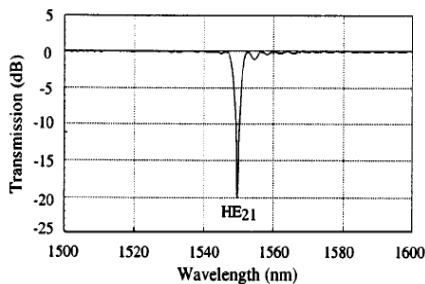
## Akustooptický zářezový („notch“) filtr v optickém vlákně

(Photonics Technol. Lett., Sept. 2000)

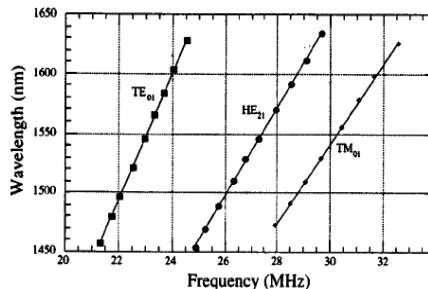


Příčná akustická vlna vytváří periodické mikroohyby, které způsobují vazbu do plášťových vidů vlákna

Přenosová spektrální charakteristika



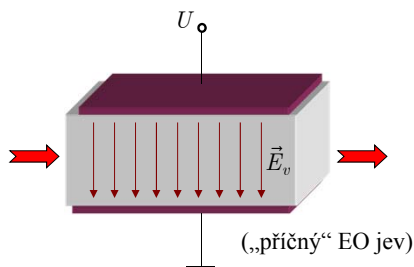
Ladící křivka



UFE

73

## Teoretické základy elektrooptického jevu



Přiložením elektrického pole na materiál dochází ke změně jeho optické permitivity (impermutivity).

Je-li závislost změny na velikosti pole *lineární*, jde o *lineární (Pockelsův) elektrooptický jev*, je-li kvadratická, jde o *kvadratický (Kerrův) elektrooptický jev*.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\eta} \cdot \vec{D}, \quad \vec{\eta} = \vec{\epsilon}^{-1}.$$

$$\vec{\eta}(\vec{E}_v) = \vec{\eta}(\vec{0}) + \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{E}_v}_{\text{lineární jev (Pockelsův)}} + \underbrace{\vec{s} : \vec{E}_v \vec{E}_v}_{\text{kvadratický jev (Kerrův)}}$$

Lineární (Pockelsův) jev nastává pouze v materiálech, jejichž fyzikální vlastnosti nejsou invariantní vůči záměně směru souřadnicových os (*necentrosymetrický materiál*).

$$\vec{\eta} + \Delta \vec{\eta} = (\vec{\epsilon} + \Delta \vec{\epsilon})^{-1};$$

$$(\vec{\eta} + \Delta \vec{\eta}) \cdot (\vec{\epsilon} + \Delta \vec{\epsilon}) = \vec{I};$$

$$\underbrace{\vec{\eta} \cdot \vec{\epsilon}}_{\vec{I}} + \vec{\eta} \cdot \Delta \vec{\epsilon} + \Delta \vec{\eta} \cdot \vec{\epsilon} + \underbrace{\Delta \vec{\eta} \cdot \Delta \vec{\epsilon}}_{\text{malý člen 2. řádu}} = \vec{I}$$

$$\vec{\eta} \cdot \Delta \vec{\epsilon} = -\Delta \vec{\eta} \cdot \vec{\epsilon};$$

$$\Delta \vec{\epsilon} = -\vec{\eta}^{-1} \cdot \Delta \vec{\eta} \cdot \vec{\epsilon};$$

$$\Delta \vec{\epsilon} = -\vec{\epsilon} \cdot \Delta \vec{\eta} \cdot \vec{\epsilon}$$

UFE

74

### Teoretické základy elektrooptického jevu (2)

Poněvadž  $\bar{\epsilon}$  je symetrický tenzor, musí být tenzore invariantní vůči záměně

$$\text{první dvojice indexů, } r_{jkl} = r_{kjl},$$

a tenzor  $\bar{s}$  invariantní vůči záměně indexů v první a druhé dvojici,

$$s_{jklm} = s_{jkml} = s_{kijm} = s_{kjml}$$

To umožňuje zavést zkrácenou Voigtovu notaci

$$r_{jkl} \Rightarrow r_{\alpha\beta}, \quad s_{jklm} = s_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3 \text{ pro } (11), (22), (33),$$

$$\alpha, \beta = 4, 5, 6 \text{ pro } (23) \equiv (32), (13) \equiv (31), (12) \equiv (21).$$

Poněvadž  $\Delta\bar{\eta} = \tilde{r} \cdot \vec{E}_v + \bar{s} : \vec{E}_v \vec{E}_v$ , jednotky elektrooptických tenzorů jsou

$$[\tilde{r}] = \text{m/V (prakticky pm/V)}, \quad [\bar{s}] = \text{m}^2 / \text{V}^2$$

### Vlastnosti některých významných elektrooptických materiálů (1)

Dielektrické krystaly skupiny ADP  
pěstované z vodního roztoku, hygroskopické  
bodová grupa symetrie  $\bar{4}2m$

$$\text{ADP: } r_{41} = 23.11 \text{ pm/V}, \quad n_o = 1.522$$

$$r_{63} = 8.5 \text{ pm/V}, \quad n_e = 1.4773$$

$$\text{KDP: } r_{41} = 8 \text{ pm/V}, \quad n_o = 1.5074$$

$$r_{63} = 11 \text{ pm/V}, \quad n_e = 1.4661$$

$$\text{DKDP: } r_{41} = 26 \text{ pm/V}, \quad n_o = 1.502$$

$$r_{63} = 24.1 \text{ pm/V}, \quad n_e = 1.462$$

$$(r_{j\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

## Vlastnosti některých významných elektrooptických materiálů (2)

Polovodičové krystaly typu A<sup>III</sup>B<sup>V</sup> (GaAs, InP)  
bodová grupa symetrie  $\bar{4}3m$

GaAs:  $\lambda = 1.15 \mu\text{m}$   
 $r_{41} = 1.43 \text{ pm/V}, \quad n = 3.43$

$$(r_{j\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix}$$

Feroelektrické krystaly typu LiNbO<sub>3</sub> (LiTaO<sub>3</sub>)  
bodová grupa symetrie  $3m$

LiNbO<sub>3</sub>:  $r_{22} = 6.8 \text{ pm/V}, \quad n_o = 2.286$   
 $r_{13} = 10 \text{ pm/V}, \quad n_e = 2.202$   
 $r_{33} \doteq 30 \text{ pm/V},$   
 $r_{51} \doteq 32 \text{ pm/V}$

$$(r_{j\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LiTaO<sub>3</sub>:  $n_o = 2.176$   
 $n_e = 2.180$

UFE

77

## Šíření rovinné vlny v elektrooptickém materiálu s přiloženým vnějším polem (1)

Změna optické permitivity při přiložení vnějšího pole je  $\Delta\bar{\varepsilon} = -\bar{\varepsilon} \cdot (\tilde{r} \cdot \vec{E}_v) \cdot \bar{\varepsilon}$ ;

Rovnice pro rovinnou vlnu je pak  $[\vec{l}^2 \vec{I} - \vec{l}\vec{l} - \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon} \cdot (\tilde{r} \cdot \vec{E}_v) \cdot \bar{\varepsilon}] \cdot \vec{E}_0 = \vec{0}$ .

**Příklad 1:** Amplitudový modulátor v KDP řezu Z

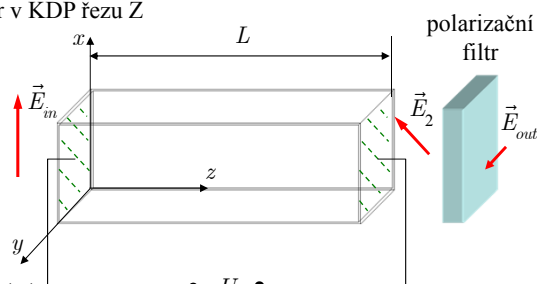
$$\vec{l} = l_z \vec{z}^0; \quad \vec{E}_v = E_v \vec{z}^0;$$

$$\tilde{r} \cdot \vec{E}_v = r_{63} (\vec{x}^0 \vec{y}^0 + \vec{y}^0 \vec{x}^0);$$

$$\Delta\varepsilon_{12} = \Delta\varepsilon_{21} = -n_o^4 r_{63} E_v.$$

Rovnice pro vlastní vlny je

$$\begin{pmatrix} l_z^2 - n_o^2 & n_o^4 r_{63} E_v & 0 \\ n_o^4 r_{63} E_v & l_z^2 - n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & -n_e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



(„podélný“ elektrooptický jev)

UFE

78

### Amplitudový modulátor v KDP řezu Z (2)

Disperzní rovnice je  $(l_z^2 - n_o^2)^2 - (n_o^4 r_{63} E_v)^2 = 0$ , která má řešení

$$l_{z1,2} = \sqrt{n_o^2 \pm n_o^4 r_{63} E_v} \cong n_o \pm \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_v = n_o \pm \Delta n, \quad \Delta n = \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_v.$$

Vlastní vlny musejí splňovat rovnici  $\begin{pmatrix} l_z^2 - n_o^2 & n_o^4 r_{63} E_v \\ n_o^4 r_{63} E_v & l_z^2 - n_o^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , neboli

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{n_o^4 r_{63} E_v}{l_z^2 - n_o^2} = \mp 1; \text{ vlastní vlny jsou tedy } \textit{lineárně polarizované} \text{ pod úhlem } 45^\circ \text{ vůči souřadnicovým osám}$$

Vstupní polarizace  $\vec{E}_{in} = E_0 \vec{x}^0$  se tak rozloží na dvě složky s polarizací  $\vec{e}_{1,2}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{x}^0 \pm \vec{y}^0)$ ,

$$\vec{E}_{in} = E_0 \vec{x}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\vec{e}_1^0 + \vec{e}_2^0). \text{ Šíření na vzdálenost } z \text{ je pak popsáno vztahem}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{e^{ik_0 n_o z}}{\sqrt{2}} E_0 (\vec{e}_1^0 e^{ik_0 \Delta n z} + \vec{e}_2^0 e^{-ik_0 \Delta n z}) = e^{ik_0 n_o z} E_0 (\vec{x}^0 \cos k_0 \Delta n z + i \vec{y}^0 \sin k_0 \Delta n z).$$

Na výstupu za polarizátorem propouštějícím složku  $\vec{y}^0$  se tak objeví intenzita záření

$$I(L) = |E_y(L)|^2 = E_0^2 \sin^2 k_0 \Delta n L = I(0) \sin^2 k_0 \Delta n L.$$

ÚFE

79

### Amplitudový modulátor v KDP řezu Z (3)

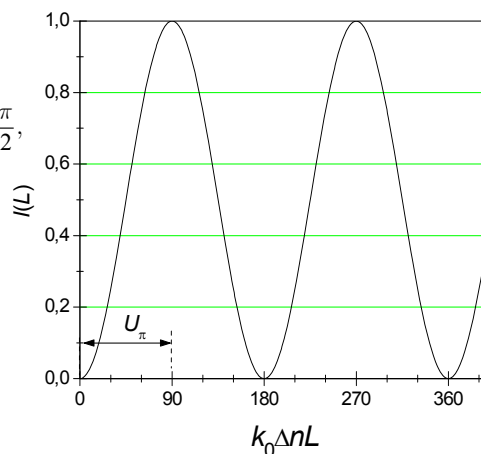
„Půlvlnné“ napětí modulátoru:

$$k_0 \Delta n L = \frac{\pi}{2}, \text{ t.j. } \frac{1}{2} k_0 n_o^3 r_{63} E_v L \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2},$$

$$U_\pi = E_v L = \frac{\pi}{k_0 n_o^3 r_{63}} = \frac{\lambda}{2 n_o^3 r_{63}}$$

Pro KDP  $U_\pi \cong 9.3 \text{ kV}$

Při „podélném“ EO jevu nezávisí půlvlnné napětí na délce ani na příčných rozměrech modulátoru



ÚFE

80

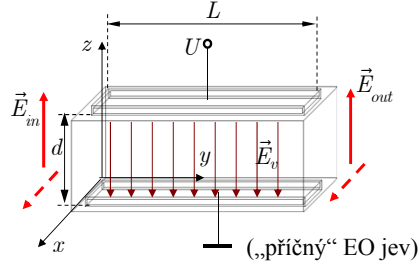


### Příklad 2: Fázový modulátor v LiNbO<sub>3</sub> (1)

$$\vec{l} = l_y \vec{y}^0, \quad \vec{E}_v = E_v \vec{z}^0,$$

$$\Delta \vec{\varepsilon} = -\vec{\varepsilon} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{z}^0 E_v) \cdot \vec{\varepsilon} =$$

$$= \begin{pmatrix} -n_o^4 r_{13} E_v & 0 & 0 \\ 0 & -n_o^4 r_{13} E_v & 0 \\ 0 & 0 & -n_e^4 r_{33} E_v \end{pmatrix}.$$



$$\begin{pmatrix} l_y^2 - n_o^2 + n_o^4 r_{13} E_v & 0 & 0 \\ 0 & -n_o^2 + n_o^4 r_{13} E_v & 0 \\ & & l_y^2 - n_e^2 + n_e^4 r_{33} E_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_y \equiv 0$$

V závislosti na vstupní polarizaci ( $E_x$  nebo  $E_z$ ) je

$$\Delta n_o \doteq -\frac{1}{2} n_o^3 r_{13} E_v, \quad \Delta n_e \doteq -\frac{1}{2} n_e^3 r_{33} E_v.$$

ÚFE

81

### Fázový modulátor v LiNbO<sub>3</sub> (2)

Změna fáze při průchodu úsekem délky  $L$  vlivem přiloženého napětí je pro různé polarizace

$$E_x(L) = E_0 e^{ik_0 n_o L} e^{-i \frac{1}{2} k_0 n_o^3 r_{13} E_v L}, \quad \Delta \varphi_o = -\frac{1}{2} k_0 n_o^3 r_{13} L E_v,$$

$$E_z(L) = E_0 e^{ik_0 n_e L} e^{-i \frac{1}{2} k_0 n_e^3 r_{33} E_v L}, \quad \Delta \varphi_e = -\frac{1}{2} k_0 n_e^3 r_{33} L E_v.$$

Na rozdíl od „podélného“ EO jevu je nyní  $E_v = U/d$ , kde  $d$  je vzdálenost elektrod.

Půlvlňné napětí je definováno jako napětí potřebné pro dosažení změny fáze o  $\pi$ :

$$U_\pi = E_v d = \frac{\lambda}{n_o^3 r_{13}} \frac{d}{L} \quad \text{pro } E_{in} = E_x, \quad \text{Pro LiNbO}_3 \quad U_\pi \approx 5.3 \frac{d}{L} \text{ [kV]} \quad \text{pro } E_x,$$

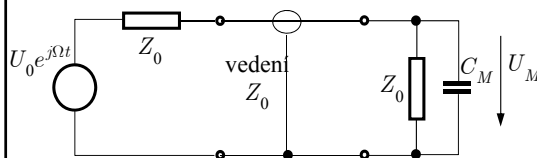
$$U_\pi = E_v d = \frac{\lambda}{n_e^3 r_{33}} \frac{d}{L} \quad \text{pro } E_{in} = E_z, \quad U_\pi \approx 2.2 \frac{d}{L} \text{ [kV]} \quad \text{pro } E_z.$$

ÚFE

82

## Rychlost EO modulační šířka pásma

Vlastní EO jev má časové konstanty velmi krátké, řádu  $10^{-14} \div 10^{-15}$  s.  
Omezení vzniká vlivem časové konstanty elektrického obvodu ovládajícího modulátor



Kapacita elektrod

$$C_m = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{el} A}{d} \approx 2 \div 5 \text{ pF}$$

Napájecí vedení má obvykle impedanci

$$Z_0 = 50 \Omega$$

Přenosová funkce obvodu

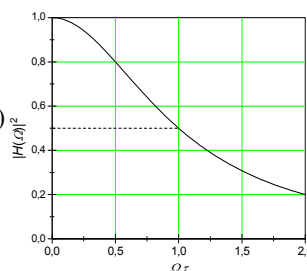
$$H(\Omega) = \frac{U_m}{U_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega C_m Z_0 / 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega \tau}$$

$$\tau = C_m Z_0 / 2.$$

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + (\Omega \tau)^2}.$$

Pokles o 3 dB (na polovinu) nastane při  $\Omega \tau \approx 1$ , t.j.

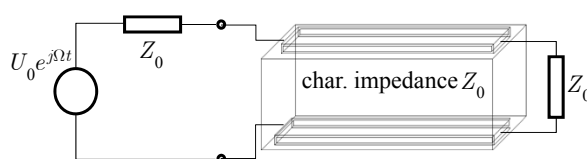
$$\Omega_{\max} \approx \frac{1}{\tau}, \quad f_{\max} = B = \frac{1}{\pi C_m Z_0} \approx 3 \text{ GHz}.$$



UFE

83

## Rozšíření pásma modulační pomocí elektrod s postupnou vlnou



$$\text{Opická vlna: } E_{opt} = E_0 \exp[j(\omega t - k_0 n_{eff} y)],$$

$$\text{Modulační vlna: } E_{mod} = E_m \exp[j(\Omega t - k_0 n_m y)].$$

$$\text{Lze ukázat, že účinnost modulační je } \eta_{mod} \sim \left[ \frac{\sin \frac{\Omega}{2c} (n_m - n_{eff}) L}{\frac{\Omega}{2c} (n_m - n_{eff}) L} \right]^2;$$

Šířka pásma pro pokles účinnosti modulační o 4 dB je

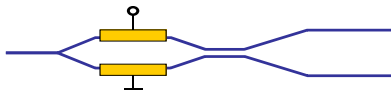
$$B \cdot L \approx \frac{\Omega_{\max}}{2\pi} L = \frac{c}{2(n_m - n_{eff})} \approx 10 \text{ GHz} \cdot \text{km}$$

UFE

84

## Příklady elektrooptických a akustooptických součástek

### Lineární modulátor pro kabelovou TV: MZ modulátor+ směrová odbočnice



#### GENERAL SPECIFICATIONS

Material	LiNbO <sub>3</sub>
Crystal orientation	x-cut, y-propagating
Electrical connectors (package)	SMA connectors
Operating wavelength	1535 - 1550nm
Fiber Options (1 meter fiber pigtailed)	1. Fujikura SM 15-P-8/125-UV/UV-400 2. 3M FS-PM-7621 3. Corning SMF 28 4. Custom Fiber <sup>2</sup> (Customer supplied)

#### ABSOLUTE SPECIFICATIONS

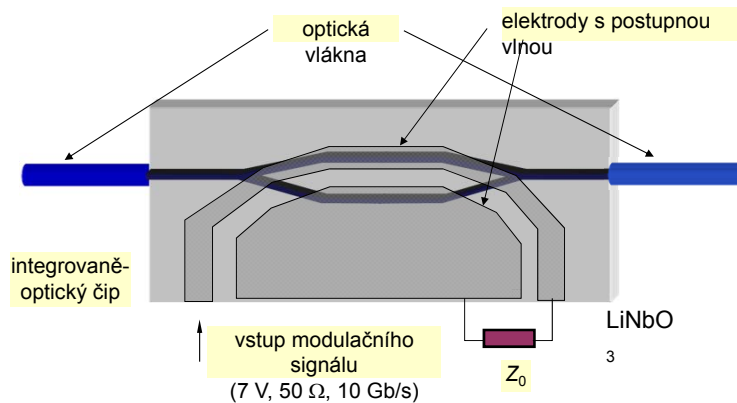
Input optical power	200 mW maximum
Operating temperature	-25°C minimum, 75°C maximum
Storage temperature	-45°C minimum, 90°C maximum
Bias Port	
Applied DC Voltage	± 15 V maximum
RF Port	
Applied DC Voltage	0 V maximum
Applied RF Power	+ 27 dBm maximum

ÚFE

85

### Elektroopticky řízený MZ interferometrický modulátor

Externí modulátor pro optické komunikační systémy s přenosovou rychlostí  $\geq 2.5$  Gb/s

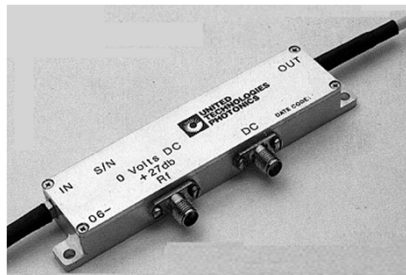
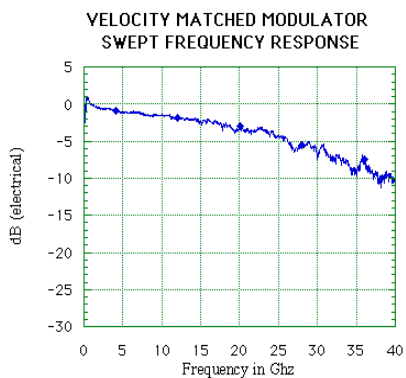


Pravděpodobně nejužívanější elektrooptická součástka

ÚFE

86

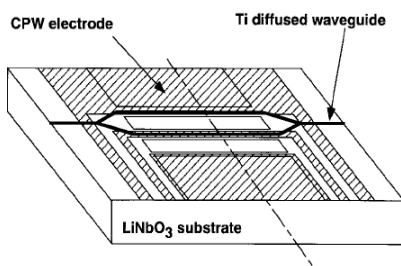
### Vlastnosti MZ elektrooptického modulátoru



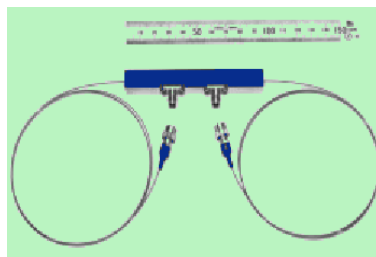
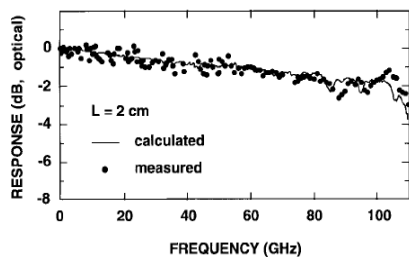
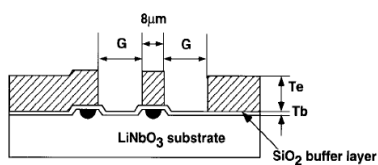
UFE

87

### 100 GHz LiNbO<sub>3</sub> modulátor s ovládacím napětím 5,1 V



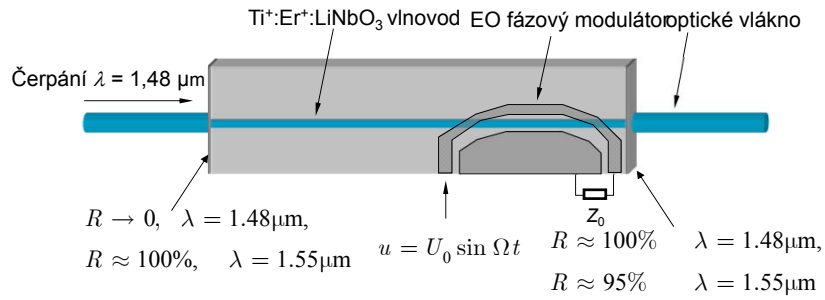
(NTT, 1998)



UFE

88

## Vlnodný Ti:Er:LiNbO<sub>3</sub> laser s integrovaným elektrooptickým modulátorem pro synchronizaci vidů



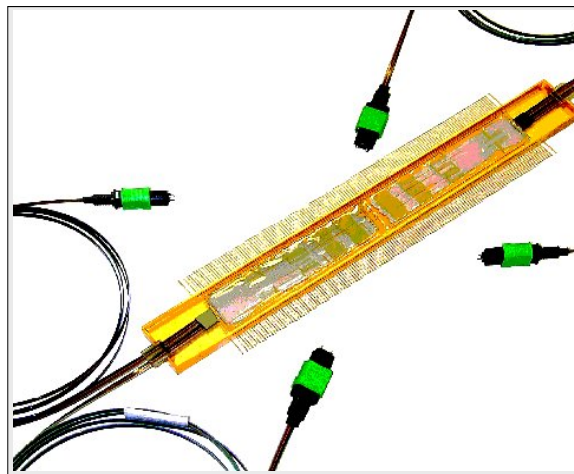
Ultrakrátké pulsy ( $\leq 10 \text{ ps}$ ), opakovací frekvence  $\approx 20 \text{ GHz}$

ÚFE

89

## „Prostorový“ přepínač 16×16 v Ti:LiNbO<sub>3</sub> (2×20×5 mm)

„Neblokující“ architektura, 480 DOS přepínačů.  $U = \pm 45 \text{ V}$ ,  $IL < 15 \text{ dB}$ ,  
 $\tau \cong 5 \text{ ns}$ ,  $\text{PMD} < 1 \text{ ps}$ , kompenzace PMD křemennou  $\lambda/4$  destičkou

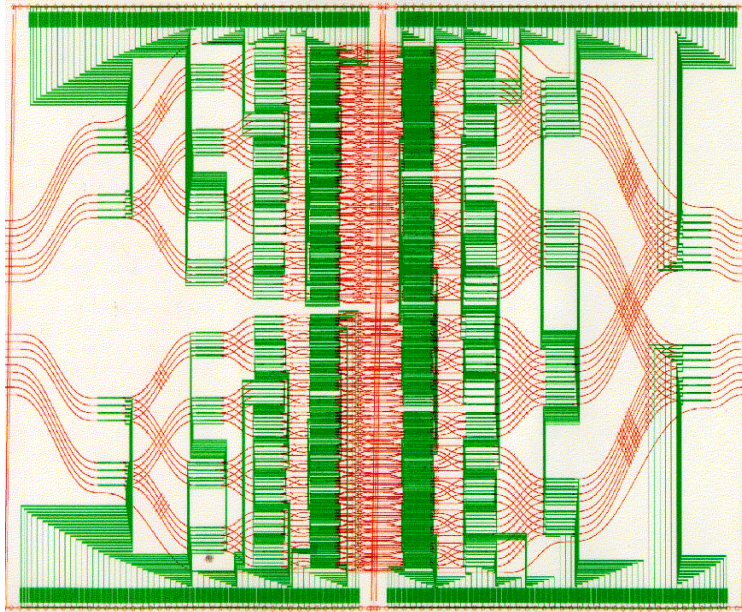


(Lucent, 2000)

ÚFE

90

### Layout optických vlnodů a elektrodivé struktury přepínače



UFE

91

### Elektrooptické amplitudové modulátory (Newport)

	4102NF	4104NF	4101NF	4103
Type <sup>(1)</sup>	Broadband AM	Broadband AM	Resonant AM	Resonant AM
Operating Frequency	DC-200 MHz	DC-200 MHz	0.01-250 MHz	0.01-250 MHz
Wavelength Range	500-900 nm	900-1600 nm	500-900 nm	900-1600 nm
Material	LiNbO <sub>3</sub>	LiNbO <sub>3</sub>	LiNbO <sub>3</sub>	LiNbO <sub>3</sub>
Maximum V <sub>n</sub> <sup>(2)</sup>	160 V @ 532 nm	300 V @ 1000 nm	16 V @ 532 nm	30 V @ 1000 nm
On:Off Extinction Ratio <sup>(3)</sup>	50:1	50:1	50:1	50:1
Maximum Optical Intensity <sup>(4)</sup>	0.5 W/mm <sup>2</sup> @ 532 nm	1 W/mm <sup>2</sup> @ 1300 nm	0.5 W/mm <sup>2</sup> @ 532 nm	1 W/mm <sup>2</sup> @ 1300 nm
Aperture Diameter	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm
Insertion Loss <sup>(5)</sup>	<0.3 dB	<0.3 dB	<0.3 dB	<0.3 dB
RF Bandwidth	200 MHz	200 MHz	2-4% freq.	2-4% freq.
RF Connector	SMA	SMA	SMA	SMA
Input Impedance	10 pF	10 pF	50 Ω	50 Ω
Maximum RF Power	10 W	10 W	1 W	1 W
VSWR	NA	NA	<1.5	<1.5



UFE

92

## Elektrooptické fázové modulátory (Newport)

	4006	4002	4004	4005	4001NF	4003NF
Type <sup>(1)</sup>	Broadband	Broadband	Broadband	Resonant	Resonant	Resonant
Operating Frequency	DC-100	DC-100 MHz	DC-100 MHz	0.01-250	0.01-250 MHz	0.01-250 MHz
Wavelength Range	360-500 nm	500-900 nm	900-1600 nm	360-500 nm	500-900 nm	900-1600 nm
Material	MgO:LiNbO <sub>3</sub>	MgO:LiNbO <sub>3</sub>	MgO:LiNbO <sub>3</sub>	MgO:LiNbO <sub>3</sub>	MgO:LiNbO <sub>3</sub>	MgO:LiNbO <sub>3</sub>
Modulation Depth	40 mrad/V @ 364 nm	30 mrad/V @ 532 nm	15 mrad/V @ 1000 nm	0.27 - 0.8 rad/V @ 364 nm	0.2 - 0.6 rad/V @ 532 nm	0.1 - 0.3 rad/V @ 1000 nm
Maximum V <sub>n</sub> <sup>(2)</sup>	79 V @ 364 nm	105 V @ 532 nm	210 V @ 1000 nm	3.8 - 11.7 V @ 364 nm	5 - 16 V @ 532 nm	10 - 31 V @ 1000 nm
Maximum Optical Intensity <sup>(4)</sup>	0.1 W/mm <sup>2</sup> @ 364 nm	2 W/mm <sup>2</sup> @ 532 nm	4 W/mm <sup>2</sup> @ 1064 nm	0.1 W/mm <sup>2</sup> @ 364 nm	2 W/mm <sup>2</sup> @ 532 nm	4 W/mm <sup>2</sup> @ 1064 nm
Aperture Diameter	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm
RF Bandwidth	100 MHz	100 MHz	100 MHz	2-4% freq.	2-4% freq.	2-4% freq.
RF Connector	SMA	SMA	SMA	SMA	SMA	SMA
Input Impedance	20 pF	20 pF	20 pF	50 Ω	50 Ω	50 Ω
Maximum RF Power	10	10 W	10 W	1	1 W	1 W
VSWR	NA	NA	NA	NA	<1.5	<1.5



UFE

93

## Elektrooptické modulátory










LEADER IN  
ELECTRO-OPTIC  
INNOVATIONS



Home
About Us
New Products
Pulse Shaping / Regen Switching / Pulse Extraction / Pulse Picking
Q-Switches / Electro-Optic Modulators / Pockels Cells
Q-Switch Drivers & Systems
HV Pulsers / Amplifiers
Optical Isolators & Faraday Effect Devices
Mechanical Gimbals and Accessories
Technical Notes / Publications / Instrument Manuals
Map and Directions
Contact Us
International Representatives

Q-Switches / Electro-Optic Modulators / Pockels Cells


### KD\*P Pockels Cells

-  **1040 SERIES** POCKELS CELL ELECTRO-OPTIC LIGHT MODULATORS
-  **1058 SERIES** ELECTRO-OPTIC Q-SWITCHES
-  **1059 SERIES** ELECTRO-OPTIC Q-SWITCHES
-  **1070 SERIES** 50 OHM IMPEDANCE ELECTRO-OPTIC MODULATORS
-  **MODELS 1111 / 1112** PICOSECOND POCKELS CELLS
-  **1145 SERIES** POCKELS CELL ELECTRO-OPTIC Q-SWITCHES
-  **1148 SERIES** 1" DIAMETER DKDP POCKELS CELL ELECTRO-OPTIC Q-SWITCHES


### RTP Cells

-  **1147 SERIES** RTP ELECTRO-OPTIC MODULATORS AND Q-SWITCHES

### BBO Cells

-  **1150 SERIES** BBO POCKELS CELL Q-SWITCHES

### Transverse Field KD\*P Modulator

-  **3079 SERIES** LOW VOLTAGE LIGHT MODULATORS

UFE

94

## Aktuality v oblasti akustooptických a elektrooptických součástek

Isomet Corporation, Springfield, USA – tradiční výrobce akustooptických součástek  
<http://www.isomet.com>

### AO modulátory pro UV a viditelnou oblast

Model	Operating Wavelength Range	Crystal Material	Active Aperture (mm)	Typical Risetime (ns)	Modulation Bandwidth (MHz)	Center Freq. (MHz)
<a href="#">M1134-FS80L</a>	UV	Fused Silica	3	55	10	80
<a href="#">1211-5-UV</a>	UV	Quartz	5	113	5	110
<a href="#">M1088-FS110L</a>	UV	Fused Silica	3	55	10	110
<a href="#">1211-UV</a>	UV	Quartz	2	57	20	150
<a href="#">1212-2-949</a>	UV	Quartz	2	25	20	150
<a href="#">1212</a>	UV	Quartz	1	10	30	175
<a href="#">1212-248</a>	UV	Quartz	1	10	30	200
---						
<a href="#">1201E-1</a>	VIS	Glass	1.7	46	7	40
<a href="#">1201E-964</a>	VIS	Glass	3	93	10	70
<a href="#">OAM1060</a>	VIS	TeO2 (S)	2	1000	0.2	80
<a href="#">M1115-FS80L-3</a>	VIS	Fused Silica	3(H)x14(W)	170	10	80
<a href="#">1205C-x</a>	VIS	PbMo04	1 / 2 / 3	25	15	80
<a href="#">M1133-aQ80L</a>	VIS	Quartz	1.5 / 2	114	10	80
<a href="#">OAM1020</a>	VIS	TeO2 (S)	3	1000	0.2	110
<a href="#">1211</a>	VIS	Quartz	2	57	10	110
<a href="#">1211-3-985</a>	VIS	Quartz	2.7	57	20	110
<a href="#">1206C</a>	VIS	PbMo04	1	15	25	110
<a href="#">1206C-833</a>	NUV, VIS	TeO2	1	15	25	110
<a href="#">1206C-2-1002</a>	NUV, VIS	TeO2	2	30	25	110
<a href="#">1250C-829A</a>	NUV, VIS	TeO2	0.45	9	50	260
<a href="#">1250C</a>	VIS	PbMo04	0.75	10	50	200
<a href="#">1250C-848</a>	VIS	TeO2	0.5	7	50	200
<a href="#">1250C-974</a>	VIS	TeO2	0.4	7	50	200
<a href="#">M1067-T200L</a>	VIS	TeO2	0.2	7	50	200
<a href="#">1260-1044</a>	VIS	TeO2	0.2	6	100	350

UFE

95

### AO modulátory pro infračervenou oblast

Model	Operating Wavelength Range	Crystal Material	Active Aperture (mm)	Typical Risetime (ns)	Modulation Bandwidth (MHz)	Center Freq. (MHz)
<a href="#">1201E-2</a>	NIR	Glass	1.7	93	3.8	40
<a href="#">1202-4</a>	NIR	Glass	4(H)x14(W)	350	10	40
<a href="#">M1137-SF40L</a>	NIR	Glass	1.5	191	10	40
<a href="#">1205C-x-NIR</a>	NIR	PbMo04	1 / 2	25	15	80
<a href="#">1205C-1023</a>	NIR	PbMo04	0.6	25	15	80
<a href="#">1205C-843</a>	NIR	PbMo04	0.5	25	15	80
<a href="#">M1142-SF80L</a>	NIR	Glass	0.5	40	15	80
<a href="#">M1080-T80L</a>	NIR	TeO2	1.5	77	15	80
<a href="#">M1135-T80L</a>	NIR	TeO2	3	245	15	80
<a href="#">1206C-NIR</a>	NIR	PbMo04	1	15	25	110
<a href="#">1250C-868</a>	NIR	TeO2	0.5	7	25	150
<a href="#">1250C-NIR</a>	NIR	PbMo04	0.75	10	50	200
---						
<a href="#">1207B-3</a>	IR	Ge	3	70	8	40
<a href="#">1210</a>	mid-IR	Ge	4	500	10	81 / 105
<a href="#">1208-6-4(M)</a>	mid-IR	Ge	6(H)x14(W)	500	10	50
<a href="#">1207B-6</a>	IR	Ge	6	700	10	40
<a href="#">1208-6-955M</a>	IR	Ge	6(H)x14(W)	700	10	40
<a href="#">1209-7-993M</a>	IR	Ge	7(H)x14(W)	830	10	40
<a href="#">1209-7-1064M</a>	IR	Ge	7(H)x14(W)	830	10	40
<a href="#">1209-7-1112M</a>	IR	Ge	7(H)x14(W)	830	10	40
<a href="#">1209-9-1010M</a>	IR	Ge	9(H)x20(W)	830	2.5	40
<a href="#">AOM6x0-H</a>	IR	Ge	7(H)x30(W)	830	10	40 / 50

### Mnohokanálové AO modulátory

Model	Channels	Spectral Range (µm)	Material	Active Aperture (mm)	Typical Risetime (ns)	Information Bandwidth (MHz)	Center Freq. (MHz)
M1140	4	0.45-0.67	PbMo04	0.7	25	15	110
8080	8	0.45-0.67	PbMo04	0.7	36	9	80
<a href="#">M8080C</a>	8	0.488-0.633	PbMo04	0.5	55	6	80
<a href="#">M9080C</a>	8, collinear	0.45-0.67	PbMo04	0.7	36	9	90
G7060	6	2.5-11.0	Ge	0.8	70	5	70

UFE

96



## AO deflektory

Model	Operating Wavelengths	Material	Resolution	Time Aperture (us)	Sweep Bandwidth (MHz)	Center Freq. (MHz)
<a href="#">1211-6BS-1045</a>	UV	Quartz	35	0.87	40	110
<a href="#">D1155-175S</a>	405nm	TeO2 (S)	140	14.5	10	75
---						
<a href="#">1205C-2</a>	VIS	PbMoO4	16	0.55	30	80
<a href="#">LS55-V</a>	VIS	TeO2 (S)	450	11.3	40	80
<a href="#">LS110-VIS</a>	VIS	TeO2 (S)	1100	22.7	50	100
<a href="#">LS110A-VIS-XY</a>	VIS	TeO2 (S)	750x750	15	50	100
<a href="#">OAD948</a>	488nm	TeO2 (S)	600	12.3	50	100
<a href="#">OAD1020</a>	532nm	TeO2 (S)	600	12.3	50	100
<a href="#">1206C-1002</a>	NUV, VIS	TeO2	35	0.7	50	110
<a href="#">OPP834</a>	VIS	PbMoO4	520	5.2	100	200
<a href="#">1250C-BS-960A</a>	VIS	PbMoO4	192	1.6	120	190
---						
<a href="#">OAD1550-XY</a>	1550nm	TeO2 (S)	200x200	10	20	40
<a href="#">LS110-NIR</a>	NIR	TeO2 (S)	1100	22.7	25	50
<a href="#">LS110A-NIR-XY</a>	NIR	TeO2 (S)	375x375	15	25	50
<a href="#">1205C-x-804B</a>	NIR	PbMoO4	66	1.6	40	80
<a href="#">OAD1121-XY</a>	810nm	TeO2 (S)	500x500	13	40	80
<a href="#">LS55-NIR</a>	NIR	TeO2 (S)	450	11.3	40	80
<a href="#">D1135-T110L</a>	NIR	TeO2	35	0.7	50	110
<a href="#">1250-BS-926</a>	NIR	PbMoO4	70	1	70	145
<a href="#">1250C-BS-943A</a>	NIR	PbMoO4	190	1.6	120	185
---						
<a href="#">1208-6BS-955M</a>	IR	Ge	50	2.5	20	40
<a href="#">1209-7BS-986</a>	IR	Ge	50	2.5	20	40
<a href="#">AOM6x0-H</a>	IR	Ge	100	5.5	20	40 / 50
<a href="#">LS50XY</a>	IR	Ge	50x50	1.27	40	70
<a href="#">LS600-1011</a>	IR	Ge	436	10.9	40	70
<a href="#">LS600-4</a>	IR	Ge	545	13.6	40	70

UFE

97

## AO posouvače frekvence

Model	Operating Wavelengths	Material	Active Aperture (mm)	Center Frequency (MHz)	Frequency Range (MHz)
<a href="#">OAM1059-V31</a>	633nm	TeO2 (S)	1.5	10	+/- 0.5
<a href="#">OAM1059A</a>	633nm	TeO2 (S)	1.5	15	+/- 1.0
<a href="#">1201E-1</a>	VIS	Glass	1.7	40	+/- 7.0
<a href="#">1201E-2</a>	NIR	Glass	1.7	40	+/- 7.0
<a href="#">OAM1141-T40-2</a>	633nm	TeO2 (S)	2	40	+/- 1.0
---					
<a href="#">OAM1141-T80-2</a>	633nm	TeO2 (S)	2	80	+/- 1.0
<a href="#">1205-1054</a>	VIS	PbMoO4	1	80	+/- 5
<a href="#">1205-1069</a>	VIS	PbMoO4	1	160	+/- 5
<a href="#">M1141-P80-1</a>	VIS	PbMoO4	1	80	+/- 5
<a href="#">1205-1118</a>	VIS	PbMoO4	2	80	+/- 5
<a href="#">1205C-1-869</a>	VIS, NIR	PbMoO4	1 / 2	80	+/- 20
---					
<a href="#">1206C</a>	VIS, NIR	PbMoO4	1	110	+/- 25
<a href="#">1250C</a>	VIS, NIR	PbMoO4	0.75	200	+/- 50
<a href="#">1250C-829A</a>	NUV, VIS	TeO2	0.45	260	+/- 50
<a href="#">OPP-1</a>	VIS	PbMoO4	1.5	300	+/- 100
---					
<a href="#">1210</a>	mid-IR	Ge	4	81 / 105	+/- 10
<a href="#">1207B-6</a>	IR	Ge	6	40	+/- 10
<a href="#">1207B-3-80</a>	IR	Ge	3	80	+/- 2.5

UFE

98

## AO Q-spínače

Model	Cooling	Centre Frequency (MHz)	Material	Active Aperture (mm)	Max RF Power (W)	Damage Threshold (MW/cm <sup>2</sup> )
<a href="#">Q1072-SF24L</a>	Conduction	24	SF10	1.5	5	>300
<a href="#">Q1058C-SFxxL-H</a>	Conduction	24/27	SF10	1.0/1.5	5	>300
<a href="#">Q1025-TxxL-H</a>	Conduction	27/80	TeO <sub>2</sub>	1.0	3	>250
<a href="#">Q1025-SFxxL-H</a>	Conduction	41/80	SF10	1.0	3	>300
<a href="#">Q1080C-TxxL-H</a>	Conduction	41/ 68 / 80	TeO <sub>2</sub>	1.5	4	>250
<a href="#">Q1087-aQ80L</a>	Conduction	80	Quartz	1.0	6	>500
<a href="#">Q1137-SFxxL-H</a>	Conduction	41/80	SF57	1.0 / 1.5	6	>300
<a href="#">Q1162-SFxxL-H</a>	Conduction	41/80	SF10	1.0	6	>300
-						
<a href="#">Q1119-aQxxL-H</a>	Conduction	41/ 80	Quartz	1.0 / 1.5	10	>500
<a href="#">Q1119-FSxxL-H</a>	Conduction	41/ 80	Fused Silica	1.0 / 1.5	10	>500
<a href="#">Q1133-aQxxL-H</a>	Conduction	41/ 68 / 80	Quartz	1.0 to 2.0	10	>500
<a href="#">Q1133-FSxxL-H</a>	Conduction	41/ 68 / 80	Fused Silica	1.0 / 1.5	10	>500
-						
<a href="#">Q1062-FSxxL-H</a>	Water	24/ 27	Fused Silica	1.5 to 6.0	60	>500
<a href="#">Q1062-FSxxS-H</a>	Water	24/ 27	F.Silica (Shear)	1.5 to 5.5	60	>500
<a href="#">Q1083-FSxxL-H</a>	Water	24/ 27 / 41	Fused Silica	1.5 to 6.0	60	>500
<a href="#">Q1083-FSxxS-H</a>	Water	24/ 27 / 41	F.Silica (Shear)	1.5 to 5.5	60	>500

UFE

99

## AO laditelné filtry

Model	Spectral Range (µm)	Active Aperture (sq. mm)	Acceptance Angle (Deg.)	Optical Bandwidth (nm)	Drive Frequency (MHz)
<a href="#">AOLF-615-1049</a>	VIS	2.5x2.5	3.5 - 4.5	1.0 - 6.0	109 - 65
<a href="#">AOLF-615-1082</a>	VIS	2.5x2.5	3.5 - 4.5	1.0 - 6.0	109 - 65
<a href="#">AOTF614-08</a>	VIS,NIR	5x5	3.5 - 6.0	1.0 - 22.0	140 - 35
<a href="#">AOTF614-16</a>	VIS,NIR	5x5	2.5 - 4.2	0.6 - 11.0	140 - 35
<a href="#">AOTF614-24</a>	VIS,NIR	5x5	3.5 - 6.0	0.4 - 7.0	140 - 35
-					
<a href="#">AOTF920-14</a>	NIR	5x5	3.4 - 6.1	2.0 - 27.0	95 - 26
<a href="#">AOTF920-20</a>	NIR	5x5	2.6 - 4.9	1.5 - 18.5	95 - 26
<a href="#">AOTF920-24</a>	NIR	5x5	2.8 - 5.0	1.0 - 15.5	95 - 26
<a href="#">AOTF1331</a>	mid-IR	7x7	5	30 - 50	24 - 39
<a href="#">AOTF1550-SLS</a>	1550nm	3x3	-	2	81 - 84
<a href="#">AOTF1110-VB</a>	VIS,NIR	10x10	5.7 (nominal)	Variable	80 - 50
<a href="#">OSTF</a>	VIS-NIR	5x5	4 (nominal)	1.0 - 12	110 - 45

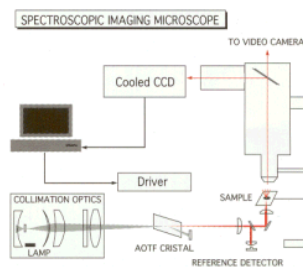
UFE

100



**AO laditelné filtry**

AOTF MODEL	OPTICAL RANGE (nm)	LIGHT SOURCE [1/N]:Laser /lines [2]:Lamp	OPTICAL TRANS. (%)	APERTURE (mm <sup>2</sup> )	FIELD OF VIEW	AO EFF. (%) linear pol.	SPECTRAL RES. (nm) -3dB	MAX RF POWER
AOTF-C-UV	350-430	[1]	70-90	2x2	1°	85	1-2	2
AOTF-1	360-530	[2]	70-90	2x2	1.5°	85	1.5-5	0.2xN
AOTF-2	360-530	[1/4] or [2]	80-90	2x2	1.5°	85	1.5-5	0.2xN
AOTF-3	400-700	[2]	>90	5x5	5°	80	5-30	2
AOTF-5	480-620	[2]	>95	5x5	8°	80	3-10	2
AOTF-6	500-850	[1/1] or [2]	>95	5x5	3°	80-60	1-3	1
AOTF-7	600-900	[1/1] or [2]	>95	5x5	4°	70	<4	1.5
AOTF-7A	600-900	[1/1] or [2]	>95	10x10	4°	70	7-10	2
AOTF-8	800-1800	[1/1] or [2]	>95	5x5	4°	60	2-15	2



**AO laditelný filtr v KDP pro UV oblast**

**Parameters of KDP Crystal**

Parameter

At Wavelength 633 nm 480 nm 350 nm 220 nm 200 nm

Index of Refraction  $n_o$  1.507 1.515 1.532 1.596 1.622

$n_e$  1.467 1.470 1.487 1.543 1.562

Density

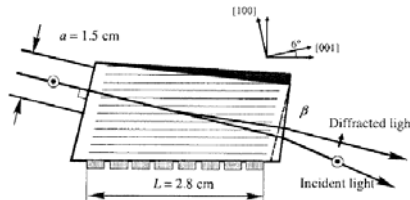
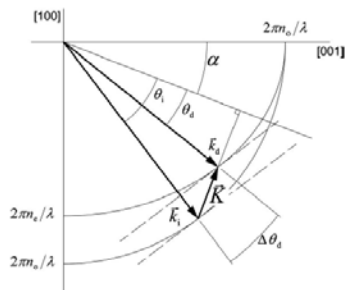
$\rho = 2.34 \text{ g/cm}^3$

Effective photoelastic coefficient at 12° relative to Z axis in XZ plane,  $\rho_{\text{eff}} = 0.067$

Acoustic phase velocity at 6° relative to X axis in XZ plane,  $v = 1.66 \times 10^5 \text{ cm/s}$

$M_2 = 4.6 \times 10^{18} \text{ s}^3/\text{g}$

AO figure of merit

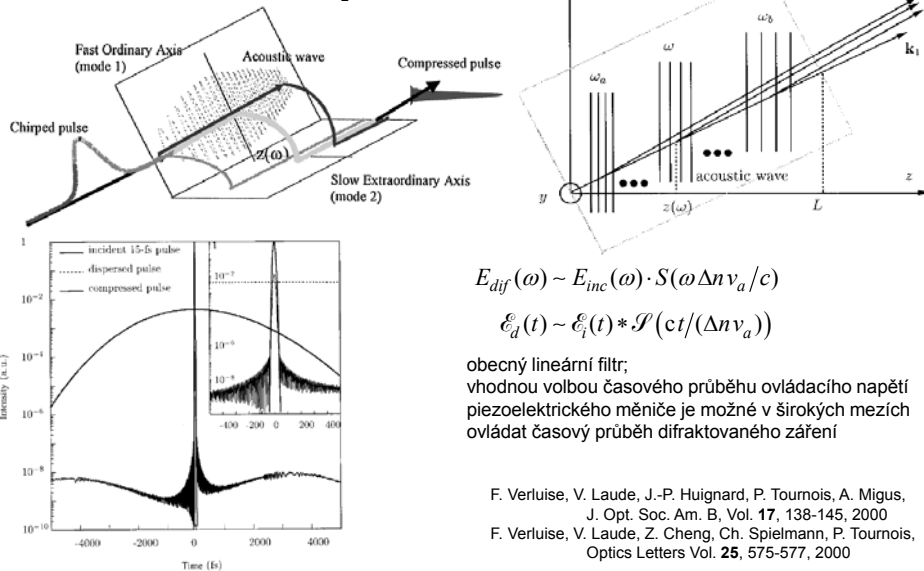


Spectral range, 220–480 nm  
 Spectral passband A at 350 nm, 2 nm; at 633 nm, 67 nm  
 Rf range, 60–164 MHz  
 Linear aperture, 1.5 1.5 cm<sup>2</sup>  
 Angular aperture, 1.2°  
 Applied power, 2.0 W  
 Transmission coefficient, 60%

N. Gupta, V. Voloshinov, APPLIED OPTICS, Vol. 43, No. 13, pp. 2752-2759, 2004

## Akustooptické řízení disperze ultrakrátkých optických signálů

Kvazikolineární interakce v  $\text{TeO}_2$



UFE

103

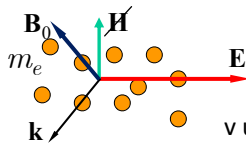
## Základy magnetooptiky

UFE

104

## Drudeho model magnetooptického prostředí

„Volný“ elektronový plyn v elektromagnetickém poli za přítomnosti stálého magnetického pole



Newtonova pohybová rovnice náboje  $q$  o hmotnosti  $m$ :

$$-m\ddot{\mathbf{r}} - m\gamma\dot{\mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{0}$$

Pro časově harmonické elmg. pole  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$  v ustáleném stavu,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t)$  zřejmě platí:

$$m\omega^2 \mathbf{r}_0 + im\gamma\omega \mathbf{r}_0 + q(\mathbf{E}_0 - i\omega \mathbf{r}_0 \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{0}.$$

Zvolme směr konstantního magnetického pole za souř. osu  $z$  a rozepišme rovnici:

$$\begin{pmatrix} m(\omega^2 + i\gamma\omega) & i\omega q B_0 & 0 \\ -i\omega q B_0 & m(\omega^2 + i\gamma\omega) & 0 \\ 0 & 0 & m(\omega^2 + i\gamma\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = -q \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

UFE

105

## Susceptibilita prostředí v magnetickém poli

Drobná úprava dá

$$\begin{pmatrix} \omega^2 + i\gamma\omega & i\omega\omega_c & 0 \\ -i\omega\omega_c & \omega^2 + i\gamma\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 + i\gamma\omega \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_0 = -\frac{q}{m} \mathbf{E}_0,$$

$\omega_c = qB_0/m$  je cyklotronová frekvence.

Zřejmě

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{q}{m} \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{E}_0,$$

$$\mathbf{P}_0 = qn\mathbf{r}_0 = -\frac{q^2 n}{m} \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}_0,$$

$$\boldsymbol{\chi} = -\frac{q^2 n}{m\varepsilon_0} \mathbf{M}^{-1} = -\omega_p^2 \mathbf{M}^{-1}, \quad \omega_p = |q| \sqrt{\frac{n}{m\varepsilon_0}} \quad \dots \text{ plazmová frekvence.}$$

Explicitní výpočet inverzní matice a zobecnění na materiály s permitivitou

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty \quad \text{dává} \quad \varepsilon = \varepsilon_\infty (\mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\chi}}),$$

UFE

### Permitivita prostředí v magnetickém poli

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & i\epsilon_{xy} & 0 \\ -i\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{xx} = \epsilon_{\infty} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega + i\gamma)}{\omega [(\omega + i\gamma)^2 - \omega_c^2]} \right],$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{\infty} \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega [(\omega + i\gamma)^2 - \omega_c^2]}, \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_{\infty} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega + i\gamma)} \right].$$

Pokud srážková frekvence  $\gamma \ll \omega$  a  $\omega_c < \omega$ ,  $\epsilon_{xx} \approx \epsilon_{zz}$ ,

prostředí je *bezeztrátové s hermitovskou permitivitou*,

$$\epsilon_{xy} \approx \frac{\epsilon_{\infty} q^3 n}{\epsilon_0 m^2 \omega^3} B_0 \quad \text{lineárně závisí na vnějším magnetickém poli.}$$

Pro jednoduchost se budeme dále zabývat jen takovým prostředím.

ÚFE

### Šíření rovinné vlny v izotropním magnetooptickém prostředí

„Rigorózní“ analýza s pomocí Fresnelova disperzního vztahu pro *obecné* anizotropní prostředí

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2 & i\epsilon_{xy} + l_x l_y & l_x l_z \\ -i\epsilon_{xy} + l_x l_y & \epsilon_{xx} - l_x^2 - l_z^2 & l_y l_z \\ l_x l_z & l_y l_z & \epsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha je rotačně symetrická vzhledem ke směru magnetického pole  $z$ , stačí analýza v rovině  $xz$ , tedy pro  $l_z = 0$ .

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - l_z^2 & i\epsilon_{xy} & l_x l_z \\ -i\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} - l_x^2 - l_z^2 & 0 \\ l_x l_z & 0 & \epsilon_{zz} - l_x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro reálná prostředí a magnetická pole  $B_0 \leq 1 \text{ T}$ ,  $\epsilon_{xx} \approx \epsilon_{zz}$  a  $|\epsilon_{xy}| \ll \epsilon_{xx}$ .

ÚFE

108

## Plochy vlnových vektorů

Disperzní rovnice je pak

$$\left[ (\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_z^2)(\varepsilon_{xx} - l_z^2) - \varepsilon_{xy}^2 \right] (\varepsilon_{zz} - l_x^2) - (\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_z^2) l_x^2 l_z^2 = 0,$$

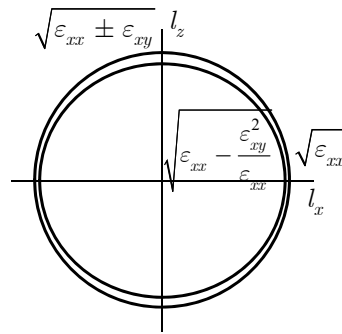
což se pro  $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_{zz}$  zredukuje na

$$\varepsilon_{xx} (\varepsilon_{xx}^2 - l_x^2 - l_z^2)^2 - \varepsilon_{xy}^2 (\varepsilon_{xx} - l_x^2) = 0.$$

To je bikvadratická rovnice pro  $l_z$  s řešením

$$l_z = \pm \sqrt{\varepsilon_{xx} - l_x^2 \pm \varepsilon_{xy} \sqrt{\frac{\varepsilon_{xx} - l_x^2}{\varepsilon_{xx}}}}.$$

Plochy vlnových vektorů jsou pak „téměř kružnice“:



## „Vlastní vlny“

Šíření **podél magnetického pole**:  $l_x = 0$  :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx} \mp \varepsilon_{xy} & i\varepsilon_{xy} & 0 \\ -i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx} \mp \varepsilon_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy  $E_{0z} = 0$ ,  $E_{0x} = \pm i E_{0y}$  ... *kruhově polarizované vlny*.

Chirální prostředí:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - l_z^2 & 2i g l_z & 0 \\ -2i g l_z & \varepsilon - l_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Magnetooptické prostředí:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - l_z^2 & i\varepsilon_{xy} & 0 \\ -i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} - l_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

V obou prostředích dochází ke stáčení roviny polarizace, ale chirální prostředí je reciproké, zatímco **magnetooptické prostředí nikoli**.  
**Při šíření opačnými směry se polarizace stáčí stejným směrem.**

## „Vlastní vlny“

Šíření **kolmo ke směru magnetického pole**,  $l_z = 0$  :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & i\varepsilon_{xy} & 0 \\ -i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} - l_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} - l_x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vlna polarizovaná ve směru  $z$  se šíří s konstantou šíření  $l_z = \sqrt{\varepsilon_{xx}}$

Druhá vlna se šíří s konstantou šíření  $l_x = \sqrt{\varepsilon_{xx} - \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}}}$ ,

má nenulovou, i když velmi malou **podélnou složku** pole  $E_x$ ,

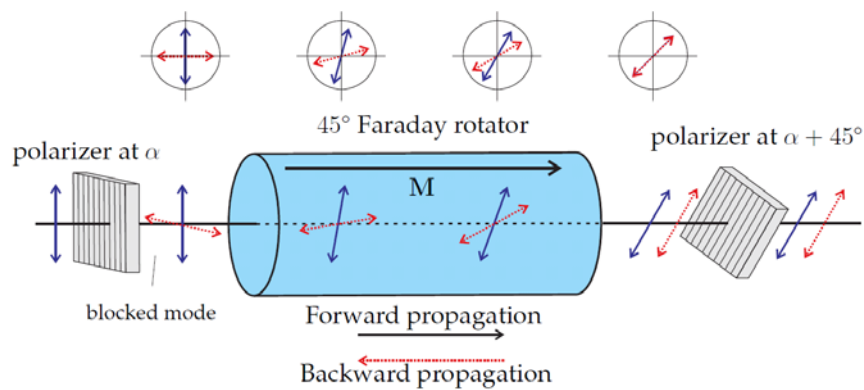
$$\frac{E_x}{E_y} = -i \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}, \quad \left| \frac{E_x}{E_y} \right| \ll 1.$$

Konstanta šíření této vlny závisí na **kvadrátu** magnetické indukce, je tedy **stejná** pro oba vzájemně opačné směry šíření.

UFE

111

## Princip optického izolátoru

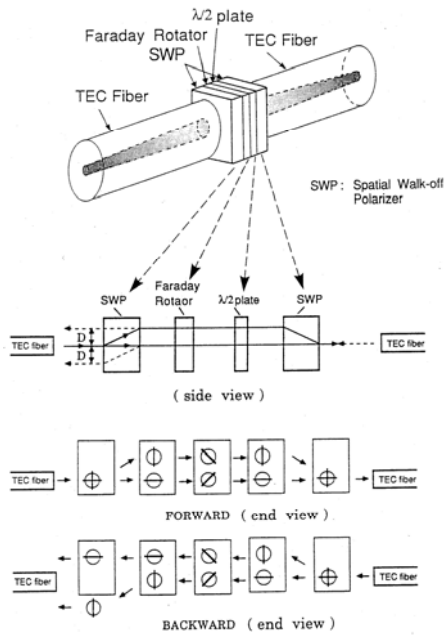


UFE

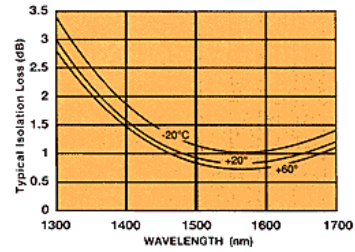
112



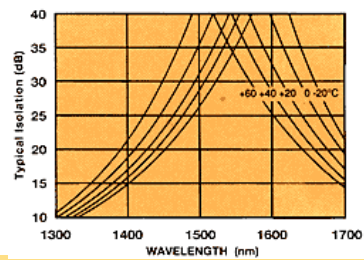
## Vláknový polarizačně nezávislý optický izolátor



Vložný útlum



Izolační poměr

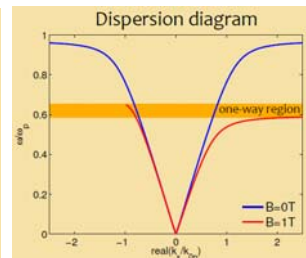
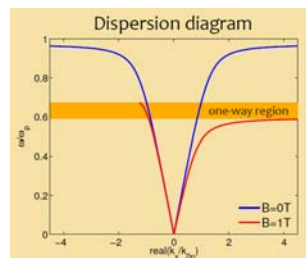
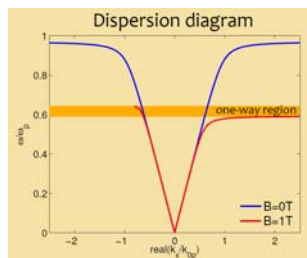
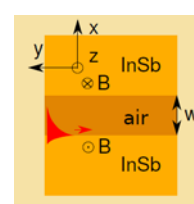
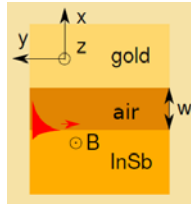
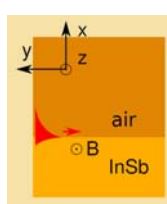


ÚFE

113

## Vlnovodné izolátory a pod.

Faradayův jev nelze efektivně využít – *krátká dráha*, polarizační závislost.  
 Příčný MO jev v *asymetrickém vlnovodu*,  
*MO rozštěpení disperzních charakteristik povrchových plazmonů*,....



ÚFE

114