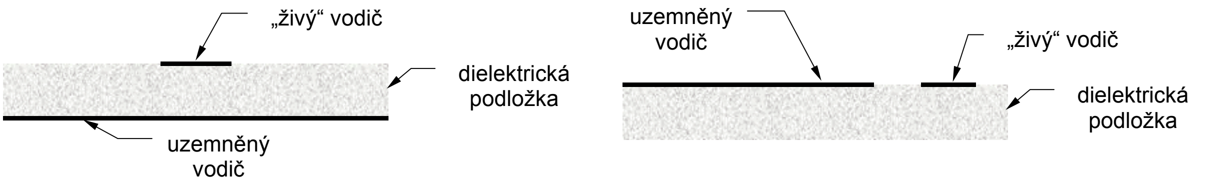
3.5. Koplanární vedení a jejich analýza metodou konformního zobrazení

V moderní technické praxi se velmi často pro vedení elektromagnetických vln o frekvencích řádu jednotek a desítek GHz využívají různé typy mikropáskových a koplanárních vedení (viz Obr. 4), jejichž rozměry jsou – na rozdíl od kovových vlnovodů – podstatně menší než je vlnová délka elektromagnetického záření, které se v nich šíří.



Obr. 4. Mikrovlnné vedení mikropáskové (vlevo) a koplanární (vpravo).

Exaktní elektromagnetická analýza většiny takových vlnovodných struktur v analytické formě není většinou možná a je třeba použít numerické řešení Maxwellových rovnic. Nehomogenní rozložení permitivity má totiž za následek, že všechny módy (včetně základního) jsou hybridní, tj. mají všechny složky elektrického i magnetického pole obecně nenulové. Určitou představu o chování tohoto módu můžeme získat přibližnou analýzou vycházející z předpokladu, že podélné složky polí **E** i **H** můžeme zanedbat. Jako příklad uvedeme analýzu nesymetrického koplanárního vedení na Obr. 4 vpravo.

Předpokládejme nejprve, že permitivita podložky i okolního prostředí je stejná a označme ji ε. Pak základním módem struktury je mód TEM_{00} jako zvláštní případ módů TM s nulovým mezním kmitočtem. Jak jsme ukázali dříve, jeho rozložení pole je možno vyjádřit vztahy

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\perp} V(x,y)\exp(ikz), \qquad \mathbf{H} = Y\mathbf{z}^0 \times \mathbf{E}, \qquad Y = \sqrt{\varepsilon / \mu}\,, \tag{3.73}$$

kde V je potenciální funkce splňující Laplaceovu rovnici

$$\Delta_{\perp} V = 0\,. \tag{3.74}$$

Kapacita na jednotku délky vedení je

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{\varepsilon}{V_2 - V_1}\oint_C \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}^0 dl = \frac{\varepsilon}{V_2 - V_1}\oint_C \frac{\partial V}{\partial n} dl\,, \tag{3.75}$$

kde $V_2 - V_1$ je napětí mezi elektrodami a křivka C obepíná „živý“ vodič. Konstanta šíření je $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Z teorie vedení je známo, že je-li C kapacita na jednotku délky a L indukčnost na jednotku délky vedení, je konstanta šíření (napěťové nebo proudové) vlny na vedení rovna $\beta = k = \omega\sqrt{LC}$. Srovnáním obou výrazů pro β získáme pro indukčnost na jednotku délky a charakteristickou admitanci vedení výrazy

$$L = \frac{\mu\varepsilon}{C} = \frac{\mu}{\dfrac{1}{V_2 - V_1}\displaystyle\oint_C \frac{\partial V}{\partial n} dl}, \qquad Y_c = \sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1}{V_2 - V_1}\oint_C \frac{\partial V}{\partial n} dl\,. \tag{3.76}$$

Laplaceovu rovnici můžeme v řadě případů řešit *metodou konformního zobrazení*. Připomeňme stručně její princip: každá funkce komplexní proměnné $w = F(z)$, která je regulární (holomorfní) v určité oblasti roviny komplexních čísel $z = x + iy$, reprezentuje zobrazení z kartézských souřadnic (x, y) na křivočaré souřadnice (u, v) v rovině $w = u + iv$. Podmínka regulárnosti, tj. *existence* derivace funkce komplexní proměnné,

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z)}{\Delta z} \tag{3.77}$$

vyžaduje, aby derivace nezávisela na směru, jímž se Δz blíží k nule. Srovnáním výrazů pro derivaci pro $\Delta z = \Delta x$ a $\Delta z = i\Delta y$ dostaneme *Cauchyovy-Riemannovy podmínky regulárnosti*

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \qquad \frac{du}{dv} = -\frac{dv}{dx}. \tag{3.78}$$

Tyto podmínky jsou velmi silné a mají pro funkce $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ celou řadu závažných důsledků. Jedním z nich je, že soustava křivočarých souřadnic (u,v) je ortogonální, přičemž Laméovy koeficienty pro obě souřadnice *u* i *v* jsou stejné. Směry souřadnicových os *u* a *v* v bodě (x, y) jsou totiž zřejmě dány vektory $\nabla_\perp u$, resp. $\nabla_\perp v$. Z podmínek (3.78) bezprostředně plyne

$$\nabla_\perp u \cdot \nabla_\perp v = 0\,, \tag{3.79}$$

tj. ortogonalita souřadnic. Pro Laméovy koeficienty platí výrazy

$$h_u = \sqrt{\left(\partial x/\partial u\right)^2 + \left(\partial y/\partial u\right)^2}, \qquad h_v = \sqrt{\left(\partial x/\partial v\right)^2 + \left(\partial y/\partial v\right)^2}\,. \tag{3.80}$$

Z existence derivace funkce $F(z)$ plyne existence inverzní funkce $z = F^{-1}(w)$, která je rovněž regulární všude, kromě bodů $F'(z) = 0$. Tato komplexní funkce (určená dvojicí reálných funkcí $x = x(u, v), y = y(u, v)$) musí tedy rovněž splňovat Cauchyovy-Riemannovy podmínky (3.78), tj.

$$\frac{dx}{du} = \frac{dy}{dv}, \qquad \frac{dx}{dv} = -\frac{dy}{dx} \tag{3.81}$$

Dosazením do výrazu (3.80) pro Laméovy koeficienty se snadno přesvědčíme, že $h_u = h_v$.

Funkce *u* i *v* splňují v oblasti své regulárnosti Laplaceovu rovnici,

$$\Delta_\perp u = 0, \Delta_\perp v = 0\,, \tag{3.82}$$

což je rovněž bezprostřední důsledek Cauchyových-Riemannových podmínek.

Vraťme se nyní k naší úloze najít potenciální funkci pro dvouvodičové vedení. Poněvadž na vodiči musí být potenciál konstantní, je zřejmé, že podaří-li se najít takové konformní zobrazení $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, které zobrazí jednu z pravoúhlých souřadnic (x, y) na souřadnicové křivky tvořící vodič vlnovodu, je problém vyřešen. Souřadnicová osa *u* je totiž dána podmínkou $v = const.$ a osa *v* podmínkou $u = const.$ Pak lze ztotožnit potenciál *V* s tou z funkcí *u*, resp. *v*, jejíž souřadnicová křivka odpovídá vodiči vlnovodu, a druhá z funkcí popisuje siločáry vektoru intenzity elektrického pole, které jsou k ekvipotenciálním plochám kolmé.

Ukážeme, že výraz pro kapacitu vedení na jednotku délky se při přechodu ze souřadnicové soustavy (x, y) do soustavy (u, v) nemění. Energii elektrického pole vedení můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2}C(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}\iint_S \varepsilon \left|\mathbf{E}\right|^2 dxdy = \frac{1}{2}\varepsilon\iint_S \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dxdy = \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon\iint \left|\nabla_\perp V\right|^2 dS = \frac{1}{2}\varepsilon\iint_S \left[\left(\frac{\partial V}{h_u \partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{h_v \partial v}\right)^2\right] h_u h_v dudv = \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon\iint_S \left[\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2\right] dudv,
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

neboť podle (3.80) jsou oba Laméovy koeficienty stejně velké. Je tedy lhostejné, zda kapacitu vedení spočítáme v rovině *z* nebo *w*; volíme obvykle tu soustavu, kde je výpočet jednodušší.

Analýza koplanárního vedení

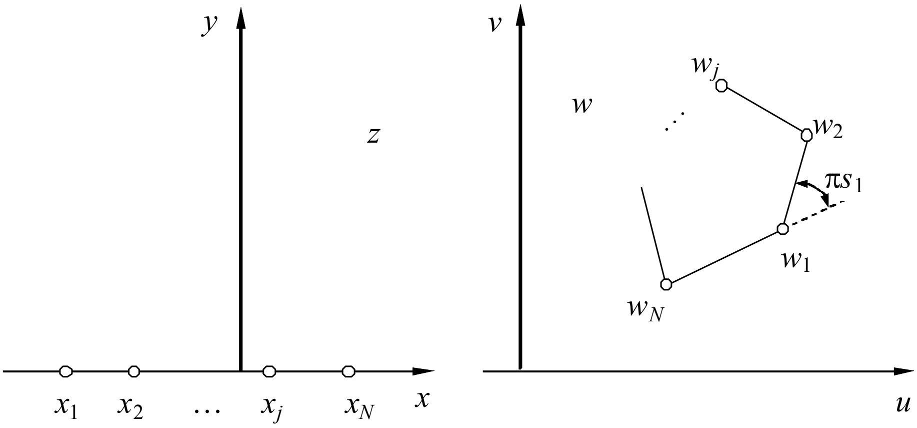
Obecný postup, jak najít vhodné konformní zobrazení pro určitý typ vedení, neexistuje. Výjimkou jsou některé typy koplanárních vedení, pro něž můžeme najít vhodné konformní zobrazení pomocí tzv. Schwarzova-Christoffelova integrálu

$$
w = A\int \prod_{j=1}^{N} (z - x_j)^{-s_j} dz + B, \qquad \sum_{j=1}^{N} s_j = 2\,. \tag{3.84}
$$

Integrál na levé straně vyjadřuje funkci komplexní proměnné *z*, regulární v celé komplexní rovině s výjimkou bodů $z = x_j$ ležících na reálné ose. Konstanty s_j jsou reálná čísla, jejichž součet musí být roven 2. Pro derivaci funkce *w* zřejmě platí

$$
\frac{dw}{dz} = A\prod_{j=1}^{N} (z - x_j)^{-s_j}\,. \tag{3.85}
$$

Ukážeme, že konformní zobrazení (3.84) zobrazuje horní polorovinu $y > 0$ komplexní roviny *z* na vnitřek uzavřeného polygonu o *N* vrcholech w_j odpovídajících bodům x_j transformovaným do roviny *w*, viz Obr. 5.



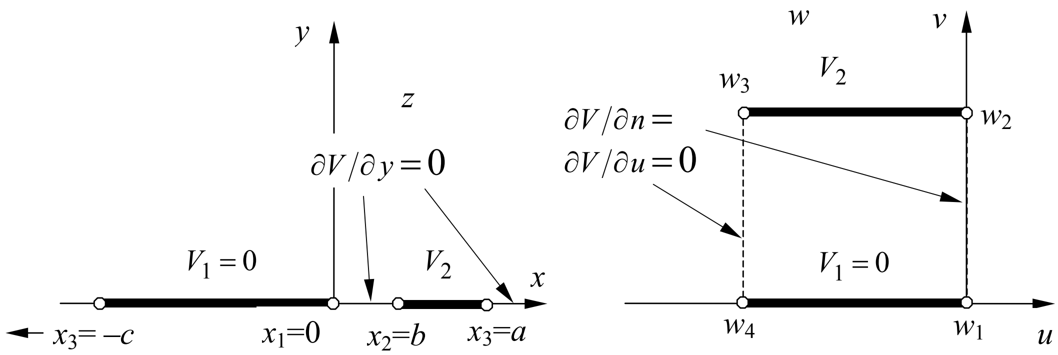
Obr. 5. Konformní zobrazení Schwarzovým-Christoffelovým integrálem.

Pro všechny body $z = x < x_j$ na reálné ose v rovině z je argument komplexního čísla $(z - x_j)^{-s_j}$ ve výrazu (3.85) pro derivaci funkce $w(z)$ zřejmě roven πs_j, neboť $z - x_j$ je reálné záporné číslo, jehož argument je $-\pi$. Pro $z = x > x_j$ je $z - x_j$ kladné a argument výrazu $(z - x_j)^{-s_j}$ je nulový. V každém vrcholu polygonu se tedy argument derivace dw / dz mění skokem o úhel πs_1. Požadavek $\sum_{j-1}^{N} s_j$ znamená, že součet všech vnějších úhlů polygonu v rovině w je 2π a polygon je tedy uzavřený.

Schwarzův-Christoffelův integrál (3.84) aplikujeme na asymetrické koplanární vedení podle Obr. 6. Horní polorovina $y > 0$ se transformuje na vnitřek obdélníku v rovině w transformací konformním zobrazením

$$w = A\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z'(z'-b)(z'-a)(z'+c)}} + B; \qquad (3.86)$$

poněvadž jde o obdélník, zřejmě $k_j = 1/2$ pro všechna $j = 1, 2, 3, 4$.



Obr. 6. Asymetrické koplanární vedení a jeho obraz.

Z požadavku, aby $w = w_1 = 0$ pro $z = x_1 = 0$, plyne $B = 0$. Úlohu dále zjednodušíme předpokladem, že zemní elektroda koplanárního vedení je polonekonečná, $c \to \infty$. Pro všechna konečná z' z horní poloroviny můžeme pak člen $z' + c$ pod odmocninou ve jmenovateli výrazu (3.86) nahradit konstantou c, a provést záměnu v označení multiplikativní konstanty, $A/\sqrt{c} \rightarrow A$. Konformní zobrazení je pak dáno jednodušším vztahem

$$w = A\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z'(z'-b)(z'-a)}}\,. \tag{3.87}$$

Záměnou integrační proměnné $z'/b = \lambda^2$, $dz' = 2b\lambda d\lambda$ získáme

$$w = A''\int_0^{\sqrt{z/b}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-\frac{b}{a}\lambda^2)}}, \qquad A'' = 2\,A/\sqrt{a}\,, \tag{3.88}$$

Tento integrál můžeme vyjádřit pomocí inverzní eliptické funkce $\mathrm{sn}^{-1}(\zeta, k)$

$$\mathrm{sn}^{-1}(\zeta,k) = \int_0^{\zeta} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}}, \qquad k = \sqrt{\frac{b}{a}} \tag{3.89}$$

jako

$$w = A''\mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{z}{b}}, \sqrt{\frac{b}{a}}\right). \tag{3.90}$$

Funkce $\zeta = \frac{1}{A''}\mathrm{sn}\left(w, k\right)$ je periodická v proměnných u i v s periodou $-w_4$ resp. $w_2 = iv_2$. Lze ukázat, že dolní polorovina z se transformuje v obdélník symetrický s obdélníkem (w_1, w_2, w_3, w_4) vůči ose symetrie v. Vzhledem k tomu jsou tedy křivky $v = const.$ ekvipotenciání plochy a $u = const.$ jsou siločáry intenzity elektrického pole. Hodnota iv_2 odpovídající v rovině z bodu b je podle (3.89) a Obr. 6 dána výrazem

$$w_2 = iv_2 = A''K(k)\,, \tag{3.91}$$

kde

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} \tag{3.92}$$

je tzv. úplný eliptický integrál 1. druhu, který je tabelován a existují pro něj velmi přesné aproximativní formule.

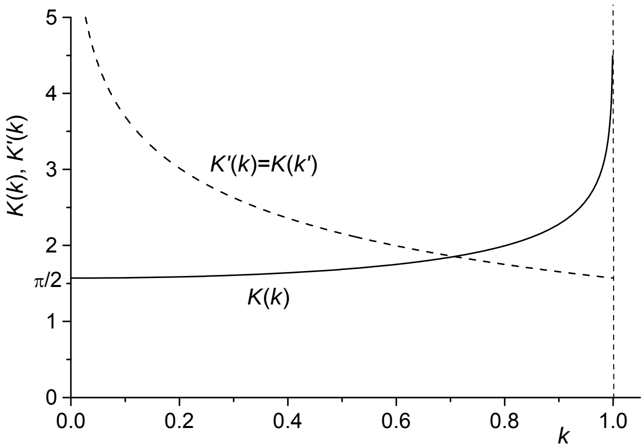
Hodnotu w_3 získáme podle vztahu (3.88) výpočtem

$$w_3 - w_2 = A''\int_1^{\sqrt{a/b}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} = iA''\int_1^{\sqrt{a/b}} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-1)(1-k^2\lambda^2)}} = iA''K'(k), \tag{3.93}$$

kde

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-1)(1-k^2\lambda^2)}} \tag{3.94}$$

je tzv. úplný eliptický integrál druhého druhu.



Obr. 7. Průběh úplného eliptického integrálu prvého a druhého druhu

Graf na obr. Obr. 7 ukazuje průběh závislosti úplných eliptických integrálů prvého i druhého druhu na parametru *k*. Substitucí $(\lambda')^2 = (1-k^2\lambda^2)\big/(1-k^2)$ lze ukázat, že

$$K'(k) = \int_0^1 \frac{d\lambda'}{\sqrt{(1-\lambda'^2)[1-(1-k^2)\lambda'^2]}} = K(\sqrt{1-k^2}) = K(k'),\;\; k' = \sqrt{1-k^2}\,. \tag{3.95}$$

Pak dostaneme s uvážením vztahu (3.91)

$$w_3 - w_2 = iA''K(k') = -v_2\frac{K(k')}{K(k)}. \tag{3.96}$$

Kapacita horní poloroviny vedení v rovině *w* na jednotku délky vedení je tedy

$$C' = \varepsilon\frac{(w_2 - w_3)}{v_2} = \varepsilon\frac{K(k')}{K(k)} = \varepsilon\frac{K(\sqrt{1-k^2})}{K(k)}, \tag{3.97}$$

kapacita celého koplanárního vedení (v homogenním dielektriku) na jednotku délky je tedy

$$C = 2\varepsilon\frac{K(k')}{K(k)}, \qquad k = \sqrt{\frac{b}{a}}\,. \tag{3.98}$$

Indukčnost na jednotku délky je pak

$$L = \frac{\mu\varepsilon}{C} = \frac{\mu}{2}\frac{K(k)}{K(k')}, \tag{3.99}$$

a charakteristická impedance vedení je tedy

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{K(k')}{K(k)}. \tag{3.100}$$

Položíme-li napětí na vedení rovno $v_2 = U$, pak podle (3.91) platí $A'' = \dfrac{iU}{K(k)}$, a konformní zobrazení (3.87) můžeme psát ve tvaru

$$w = u + iv = \frac{i\sqrt{a}}{2}\frac{U}{K(k)}\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z'(z'-b)(z'-a)}}. \tag{3.101}$$

(Příčné) složky intenzity elektrického pole jsou dány obecným výrazem (3.73):

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\{w\} = --\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\right\}, \\ E_y &= -\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial w}{\partial z}\right\}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Poněvadž

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{i\sqrt{a}}{2}\frac{U}{K(k)}\frac{1}{\sqrt{z(z-b)(z-a)}}, \quad z = x + iy, \tag{3.103}$$

získáme pro rozložení intenzity elektrického pole v koplanárním vedení explicitní výrazy

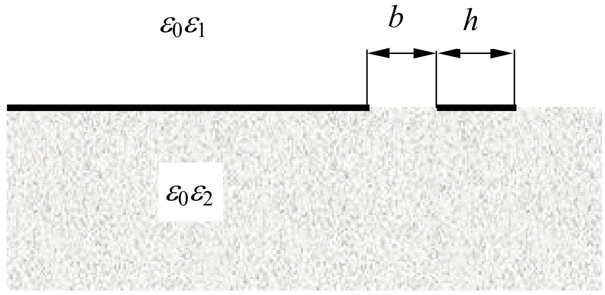
$$E_x(x,y) = -\frac{\sqrt{a}}{2}\frac{U}{K(k)}\mathrm{Re}\frac{1}{\sqrt{z(z-b)(z-a)}}, \qquad E_y(x,y) = \frac{\sqrt{a}}{2}\frac{U}{K(k)}\mathrm{Im}\frac{1}{\sqrt{z(z-b)(z-a)}}. \tag{3.104}$$

Složky intenzity magnetického pole jsou pak podle vztahu $\mathbf{H} = Y\mathbf{z}^0 \times \mathbf{E} = \sqrt{\varepsilon/\mu}\,\mathbf{z}^0 \times \mathbf{E}$

$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_y, \qquad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x. \tag{3.105}$$

Koplanární vedení s děleným dielektrikem

Výše uvedená analýza nesymetrického koplanárního vedení platí přesně pro vedení tvořené dvěma vodiči s nekonečně velkou vodivostí, nekonečně malé tloušťky, v homogenním dielektriku o permitivitě ε. Skutečné koplanární vedení je však zpravidla vytvářeno na dielektrické podložce podle Obr. 4 vpravo kovovými vrstvami konečné tloušťky i vodivosti. Pro takové vedení naše analýza neplatí. Zanedbáme konečnou tloušťku kovu, budeme předpokládat nekonečnou vodivost kovu, ale pokusíme se řešit problém různých dielektrických materiálů nad a pod elektrodami v různých polorovinách vedení podle Obr. 8.



Obr. 8. Koplanární vedení s děleným dielektrikem

Označme relativní permitivitu horního prostředí ε_1 a dolního prostředí ε_2. Oznčíme dále štěrbinu mezi vodiči symbolem b a šířku „živého“ vodiče h. V každé polorovině můžeme použít konformní zobrazení odvozené výše, s parametrem $k = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{b}{b+h}}$. Poněvadž rozhraní představuje pro elektrické pole rovinu symetrie, v nepokovených místech rozhraní je $E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$ a $E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$ je spojité nad i pod rozhraním, intenzita elektrického pole má nad i pod rozhraním identický průběh. Celková kapacita vedení je tedy rovna součtu kapacit obou polorovin (celková elektrická energie $W_e = \dfrac{1}{2}CU^2$ je rovna součtu energií v obou polorovinách při identickém potenciálovém rozdílu mezi elektrodami, tj.

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{K(k')}{K(k)}. \tag{3.106}$$

Indukčnost dvouvodičového vedení daná výrazem (3.99) nezávisí na permitivitě prostředí a je tedy stejná. Srovnáním s kapacitou ‘ekvivalentního‘ vedení s homogenním dielektrikem o „efektivní“ permitivitě ε_{eff},

$$C = 2\varepsilon_0\varepsilon_{eff}\frac{K(k')}{K(k)}, \tag{3.107}$$

získáme pro efektivní permitivitu výraz

$$\varepsilon_{eff} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \tag{3.108}$$

Konstantu šíření základního módu „kvazi“-TEM můžeme pak aproximovat výrazem

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{eff}} \tag{3.109}$$

a charakteristickou impedanci vedení vztahem

$$Z_c \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0\varepsilon_{eff}}}\frac{K(k)}{K(k')}. \tag{3.110}$$

Rozložení intenzity elektrického pole je určené potenciální funkcí $v(x, y)$ a je tedy symetrické vůči rozhraní. Magnetické pole je určeno výrazy (3.105). Poněvadž složka E_x je na rozhraní spojitá a relativní permitivita se v jednotlivých polorovinách liší, jsou podle tohoto vztahu normálové složky intenzity magnetického pole H_y (a pro nemagnetické prostředí tedy i složky magnetické indukce B_y) *různé*. Tento rozpor je důsledkem pouze přibližné platnosti našeho rozboru. V praxi se ukazuje, že aproximativní řešení platí s přijatelnou chybou,pokud rozměry vedení (*a*, *b*) jsou malé ve srovnání s vlnovou délkou záření, které se podél vedení šíří. Konstanta šíření i charakteristická impedance vedení se tak stává závislou na frekvenci přenášeného záření, tj. vedení je disperzní.

Konformním zobrazením založeném na inverzní eliptické funkci (3.90) je možno stejně jednoduše řešit nejen nesymetrické, ale i symetrické dvouvodičové a třívodičové koplanární vedení s polonekonečnými vnějšími elektrodami znázorněné na Obr. 9.

Obr. 9. Symetrické dvouvodičové a třívodičové koplanární vedení.