

**ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS**

**DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA**



# **VLIV TEPLoty NA NAPJATOST A PEVNOST ČÁSTÍ**

**CYRIL HÖSCHL**

**ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV**

**PRAHA 1986**

V publikaci se podrobně vysvětluje aplikace termodynamických zákonů při výpočtu deformací a napjatosti termoelastických těles. Objasňuje se podstata vazby mezi změnami deformace a změnami teplotního pole a formulují se podmínky, za nichž lze tuto vazbu zanedbat.

Zákony termoelasticity jsou pak použity k řešení mnoha praktických úloh. Probírají se rovněž energetické principy, jež jsou základem příbližných numerických metod, např. metody konečných prvků. V dalším textu se uvádí dynamická teorie termoelasticity a aplikuje se na případ jedno-rozměrného vlnění v termoelastické tyči. Objasňuje se vznik a význam útlumu kmitání tyče vedením tepla v tyči.

V závěru publikace se probírá relaxace a creep konstrukcí vystavených působení vysokých teplot. Počítá se doba životnosti konstrukcí při stálém zatížení jednak za předpokladu dokonale vazkého porušení, jednak za předpokladu kvazikřehkého porušení, a výsledky výpočtů se porovnávají s experimenty. Probírají se energetické principy a také stabilita konstrukcí v podmínkách creepu.

Předpokládají se jen běžné znalosti zákonů termodynamiky a teorie pružnosti. Výklad postupuje od jednoduchých případů k složitějším a je doplněn třiceti čtyřmi instruktivními řešenými úlohami.

## OBSAH

ÚVOD	5
1. VNITŘNÍ ENERGIE V PEVNÉM TĚLESE	7
2. STAVOVÉ VELIČINY A ZÁKONY TERMODYNAMIKY	12
3. JEDNOOSÉ NAMÁHÁNÍ TERMOELASTICKÉ TYČE	17
4. DUHAMELŮV - NEUMANNŮV ZÁKON	28
5. TERMOMECHANICKÁ VAZBA PŘI PROSTOROVÉ DEFORMACI	31
6. NEVÁZANÁ KVAZISTATICKÁ TEORIE TERMOELASTICITY	41
7. ENERGETICKÉ PRINCIPY V TERMOELASTICITĚ	48
8. NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ ÚLCH TERMOELASTICITY	56
9. ROTAČNĚ SYMETRICKÁ TENKOSTĚNNÁ TRUBKA	70
10. TLUSTOSTĚNNÁ TRUBKA	81
11. VOLNÁ DESKA S PŘÍČNĚ PROMĚNNOU TEPLOTOU	86
12. VLNĚNÍ V TERMOELASTICKÉ TYČI	91
13. TEČENÍ KOVŮ ZA VYSOKÝCH TEPLOT	102
14. ENERGETICKÉ PRINCIPY V PODMÍNKÁCH CREEPU	114
15. STABILITA KONSTRUKCÍ ZA VYSOKÝCH TEPLOT	117
16. ROZPTYL ŽIVOTNOSTI KONSTRUKCÍ NAMÁHANÝCH V PODMÍNKÁCH CREEPU	123

"... chodil jsem jen na povinné předměty." "A které?" zeptala se Alenka. "No především samozřejmě na bdění a spaní," odpověděl Paželv. "A pak na motyku s všelijakými početními úkony, jako je svítání, odmítání, nasolení a želení."

Lewis Carroll, Alenka v říši divů

## ÚVOD

Inženýři, kteří si během studia osvojili znalosti pouze povinných předmětů, nevědí o teplotním pnutí ani o vlivu teploty na mechanické vlastnosti pevných látek prakticky nič nebo jen velmi málo. Přestože se ve strojnictví uplatňují čím dál tím více umělé hmoty, zejména kompozitní materiály, vyrábí se většina důležitých strojních částí z kovů. Jejich velká tepelná vodivost způsobuje, že je v nich teplota většinou rovnoměrně rozdělena. Výjimkou jsou jen exponované části energetických strojů a zařízení, u nichž dochází k intenzivní výměně tepla. A tak si inženýři většinou teploty příliš nevědomují a navrhují stroje a jejich části tak, jako by jejich teplota byla konstantní a nezávislá na provozních podmínkách. Bezstarostnost tohoto druhu se však může vymstít. Např. kola železničních vozidel mohou praskat vlivem pnutí vyvolaných intenzivním ohřevem nákoků při brzdění. Části strojů a konstrukcí vystavené jednostrannému působení sálavého tepla se nejen roztahují, ale také prohýbají. Nemohou-li volně dilatovat, mohou se vyboulit vlivem ztráty elastické stability nebo se mohou i trvale deformovat. Vruby v tělese působí koncentraci teplotních napětí, jež se skládají s napětími působenými vnějším zatížením. Mění-li se teplota periodicky, může vyvolat kmitavý pohyb, který se při rezonanci zvětšuje. Může vzniknout tepelná únava materiálu. Změna teploty kompozitních materiálů může způsobit jejich poškození i tehdy, je-li teplota rozdělena rovnoměrně. Příčinou je rozdílná teplotní roztažnost jednotlivých komponent. Za vysokých teplot vznikají trvalé deformace, jež mohou ohrozit funkci stroje a zkrátit jeho životnost. Avšak i pokles teploty může vést ke katastrofě vlivem zkrěhnutí materiálu. S teplotním pnutím musíme samozřejmě počítat všude tam, kde dochází k přestupu a k vedení tepla. S teplotou musí inženýr počítat i při technologických procesech, zejména při tváření a při tepelném zpracování. Nedbalost se nevyplácí; např. mikrotrhliny vzniklé při nesprávném povrchovém kalení mohou vést k pozdějším únavovým lomům.

Deformací a pnutí vyvolaných změnami teploty lze využít k měření teploty a k regulaci. Na tomto principu pracují bimetalová čidla a přepínače. Trvalých deformací vyvolaných jednostranným lokálním ohřevem se využívá k rovnání plechů plamenem.

Vnucuje se otázka, proč se v základním studiu na vysokých školách věnuje vlivu teploty na napjatost a pevnost částí strojů jen malá pozornost. Je tomu tak proto, že se nároky na rozšíření obsahu učiva nemohou dostatečně uspokojovat v neměnném časovém rozvrhu studia. I kdybychom se zaměřili pouze na elastické deformace, tj. zabývali se jen termoelasticitou, musili bychom nejprve podrobně vykládat jednak teorii přestupu a vedení tepla, jednak teorii pružnosti, a pak syntézu obou těchto disciplín. Právě tato syntéza se na našich vysokých školách většinou vynechává a odsouvá do postgraduálního studia, v nejlepším případě do specializací.

V tomto semináři podáme výklad zákonů termoelasticity a creepu a doplníme jej mnoha příklady. Naší snahou bude, aby výklad byl co nej-srozumitelnější, nikoli co nejúplnější. Bude to tedy jen úvod k dalšímu studiu, což při daném rozsahu semináře není ani jinak možné. Výběr látky však umožní pozornému čtenáři, jak věříme, aby samostatně a s porozuměním řešil různé problémy inženýrské praxe a aby dobře chápal jejich fyzikální podstatu.

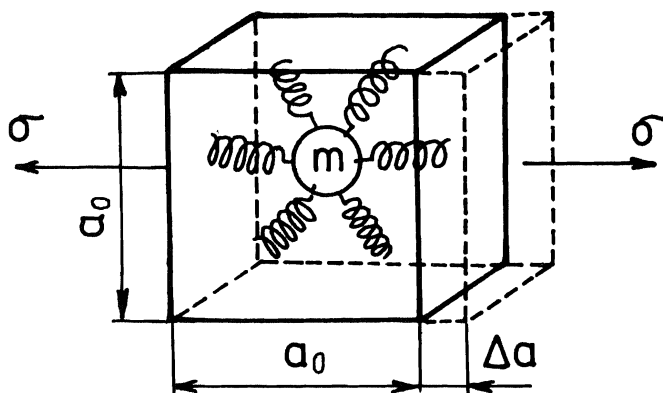
Autor děkuje všem pracovníkům Domu techniky ČSVTS Praha, kteří se podíleli na přípravě semináře a na vytištění těchto skript. Zvláště děkuje Ing. Vladimíru Václavíkovi, který se po mnoho let obětavě stará o to, aby náplň cyklu "Stavba strojů" neztrácela aktuálnost a byla skutečnou pomocí inženýrům a technikům v různých oborech našeho strojírenství.

## 1. VNITŘNÍ ENERGIE V PEVNÉM TĚLESE

Pevná látka se skládá z atomů, z iontů nebo z molekul umístěných v těsné blízkosti. V krystalických látkách jsou uspořádány víceméně pravidelně (nepravidelnost je způsobena jen poruchami ve struktuře krystalu a překážkami ve volném růstu při vzniku krystalů). Když krystal taje, uvolňují se vazby mezi jeho částicemi prakticky najednou při určité teplotě (bod tání). Struktura amorfních látek, jakými jsou např. sklo, asfalt a četné plastické hmoty, tuto pravidelnost nemá. \*) Amorfní látky lze považovat za kapaliny s extrémně velkou viskozitou. Nemají pevný bod tání; vazby mezi jejich hmotnými částicemi se u nich uvolňují postupně, takže amorfní pevná látka přejde nejprve do kašovitého stavu a pak teprve - při dalším zvyšování teploty - začne kapalnět.

To, že si nezatížená pevná tělesa zachovávají při nezměněné teplotě svůj tvar, je způsobeno vazbami bránícími vzájemným posuvům mezi atomy, popř. ionty či molekulami. Změna jejich vzájemné rovnovážné polohy je možná jen za silového působení nebo změnou jejich teploty.

Pro názornost omezíme svůj výklad na případ krystalu, jehož model uvádíme na obr. 1. Atomy představují hmotné body, kdežto vazebné síly



OBR. 1

představují nehmotné pružiny. Krychle, jejíž hrana má délku rovnou meziatomární vzdálenosti  $a_0$ , obsahuje jen jeden atom. Působením jednoosého napětí  $\sigma$  se její hrany, rovnoběžné s působícím napětím, prodlouží o  $\Delta a$ . Podle Hookeova zákona bude pro malé deformace platit, že

$$\frac{\Delta a}{a_0} = \frac{\sigma}{E} \quad (1.1)$$

\*) Některé látky se mohou vyskytovat jak v krystalické, tak v amorfni modifikaci. Příkladnou kontrakci zatím neuvažujeme.

Zde  $E$  je Youngův modul pružnosti. Síly přenášené pružinami budou mít výslednici

$$F = G a_0^2 \quad (1.2)$$

takže pružinová konstanta vazby bude

$$k = \frac{F}{\Delta a} = \frac{G a_0^2}{G a_0 / E} = E a_0 \quad (1.3)$$

Např. u hliníku je  $a_0 = 2.86 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ , takže  $k = (7 \cdot 10^{10}) (2.86 \cdot 10^{-10}) \doteq 20 \text{ N m}^{-1}$ . Kdyby byly všechny atomy nehybné až na atom uvnitř krychle na obr. 1, měl by tento atom vlastní frekvenci volného kmitání

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.4)$$

Protože atom hliníku má hmotnost  $m = 4.5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ , vyjde  $\nu = (1/2\pi) \sqrt{20/4.5 \cdot 10^{-26}} \doteq 3.4 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ . Skutečný kmitočet vibrací atomů v hliníku je přibližně  $6.4 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ . Rozdíl vzniká tím, že atomy nekmítají izolovaně, ale všechny najednou. Také výpočet konstanty (1.3) je příliš zjednodušený. Z hlediska účelu, který sledujeme, je však shoda našeho výpočtu se skutečností vyhovující; potvrzuje, že se energie může uvnitř pevných látek akumulovat buď jako potenciální energie (v nehmotných pružinách), nebo jako kinetická energie kmitajících atomů (v hmotných bodech našeho modelu). Oba druhy energie se ovšem vyskytují vždy zároveň. \*) Celková energie vibračních pohybů, která se neustále periodicky mění z potenciální na kinetickou a naopak, nazývá se teplo. Odmyslíme-li si vibrace atomů, které se dějí s neobyčejně vysokými frekvencemi a s velmi malými amplitudami, zbuďte potenciální deformační energie.

Kmitavé pohyby atomů však nejsou u všech atomů stejné, neboť jde o soustavu s neobyčejně velkým počtem stupňů volnosti. Energie se může mezi atomy různě vyměňovat a její rozdělení lze popsat jen statisticky. Pro střední hodnotu energie vibračního pohybu jednoho atomu kmitajícího v třídimenzionálním prostoru (v tepelné rovnováze s okolím) dává statistická mechanika výraz  $3kT$ , kde  $k = 1.38062 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  značí Boltzmannovu konstantu a  $T$  absolutní teplotu. Protože jeden kilomol látky obsahuje právě  $N_0$  atomů (což je Avogadrovo číslo,  $N_0 = 6.02217 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ ), bude celková vnitřní energie v jednom kilomolu nedeformované pevné látky

\*) Kinetickou energii danou pohybem tělesa jako celku neuvažujeme; těleso je ve statické rovnováze.

$$U = 3 N_0 \theta T = 3 RT \quad (1.5)$$

Zde  $R = N_0 \theta \doteq 8,31 \cdot 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$  je univerzální plynová konstanta. Přivedeme-li do této látky množství tepla  $C_V$ , aniž těleso deformujeme (a tedy při nezměněném objemu  $V$ ), stoupne jeho teplota o 1 K. Hodnota  $C_V$  se nazývá molová tepelná kapacita (molové specifické teplo) při stálém objemu. K diferenciální změně teploty o  $dT$  je třeba dodat teplo  $C_V dT$ . To se může v jednom kilomolu látky uložit jen jako přírůstek  $dU$  celkové vnitřní energie (1.5). Tedy

$$dU = C_V dT = 3 R dT \quad (1.6)$$

Odtud vypočteme

$$C_V = 3R = 2,49 \cdot 10^4 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1} \quad (1.7)$$

Rovnice (1.7) vyjadřuje Dulongův - Petitův zákon, který platí, pokud je teplota  $T$  dostatečně velká. Není-li tomu tak, je třeba počítat s kvantováním energie v jednotkách  $h\nu$ , kde  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$  je Planckova konstanta a  $\nu$  kmitočet. Molová tepelná kapacita pak závisí na teplotě a vyjde menší než podle (1.7). Vzorec (1.7) platí jen pro  $\theta T \gg h\nu$ . Blíží-li se absolutní teplota k nule, blíží se k nule i molová tepelná kapacita (Einsteinův a Debeyův vzorec, viz /4/).

Spíše než s jedním kilomolem látky počítáme s jedním kilogramem. Dostáváme pak měrnou tepelnou kapacitu  $c_V = C_V / M$  a měrnou plynovou konstantu  $r = R / M$ , kde  $M$  je molová hmotnost. Místo rovnice (1.7) dostaneme \*)

$$c_V = \frac{3R}{M} \quad [ \text{J K}^{-1} \text{ kg}^{-1} ] \quad (1.8)$$

a měrná vnitřní energie je

$$u_1 = \frac{3RT}{M} \quad [ \text{J kg}^{-1} ] \quad (1.9)$$

Vzorce (1.8) a (1.9) platí rovněž jen pro dostatečně velké hodnoty  $T$ .

Jestliže se pevná látka také deformuje, ukládá se v ní měrná deformační energie

---

\*) Veličiny vztažené k jednomu kilogramu budeme značit malými písmeny.



$$u_2 = \frac{1}{\rho} \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad [J \text{ kg}^{-1}] \quad (1.10)$$

Zde  $\varepsilon_{ij}$  představuje elastickou část poměrných deformací (elastickou část složek tenzoru přetvoření). Na pravé straně rovnice (1.10) jsme použili tenzorové symboliky. Sčítá se podle indexů  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $\rho$  značí hustotu,  $\sigma_{ij}$  složky tenzoru napjatosti. Celková vnitřní energie v 1 kg látky je pak

$$u = u_1 + u_2 + u_{12} \quad (1.11)$$

Člen  $u_{12}$  vyplývá z vazby mezi tepelnými a mechanickými veličinami; v podrobnostech odkazujeme na literaturu /4/, /11/. Viz též příklad 13 za 5. kapitolou těchto skript.

Jak jsme právě ukázali, závisí vnitřní energie pružného pevného tělesa jednak na teplotě, jednak na šesti poměrných deformacích (na složkách tenzoru přetvoření). Proto  $u = u(T, \varepsilon_{ij})$ . U ideálních kapalin neexistuje smykové napětí. Je tedy u nich  $\sigma_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ , takže poměr Mohrových kružnic znázorňujících napjatost v nějakém bodě kapaliny je nulový. Odtud plyne Pascalův zákon  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$ , který platí v ideálních tekutinách, a všechny osy v daném bodě jsou hlavními osami napjatosti (je jich nekonečně mnoho). V takovém případě je deformační energie dána výlučně poměrnou změnou objemu  $\varepsilon = \Delta v/v$ . Proto je u ideálních kapalin vnitřní energie funkcí pouze teploty a poměrné změny objemu, tedy  $u = u(T, \varepsilon)$ . Konečně u ideálních plynů žádná deformační energie neexistuje a vnitřní energie závisí pouze na teplotě, takže  $u = u(T)$ .

### Příklad 1

Vypočtete měrnou tepelnou kapacitu (měrné teplo, specifické teplo) čistého hliníku, olova a uhlíku podle Dulongova-Petitova zákona a porovnejte ji s údaji zjištěnými experimentálně.

### Řešení

Pro hliník máme  $M \doteq 27$ , takže podle vzorce (1.8) vyjde

$$c_v(\text{Al}) = \frac{24\,900}{27} \doteq 922 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Ve fyzikálních příručkách se pro pokojovou teplotu uvádí hodnota  $c_v(\text{Al}) = 900 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Pro olovo bude  $M \doteq 207$ , takže rovnice (1.8) dá

$$c_v(\text{Pb}) = \frac{24\,900}{207} \doteq 120 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

kdežto v literatuře najdeme  $c_v(\text{Pb}) \doteq 130 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Pro uhlík je  $M = 12$ , proto \*)

$$c_v(\text{C}) = \frac{24\,900}{12} \doteq 2075 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Avšak v literatuře se najde pro pokojovou teplotu  $c_v(\text{C}) = 690 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Vzorec (1.8) platí pro uhlík (tuhu) přibližně teprve při teplotách vyšších než asi 1000 K. Při pokojové teplotě neplatí.

### Příklad 2

Porovnejte měrnou vnitřní energii hliníku při pokojové teplotě s měrnou deformační energií při namáhání prostým tahem napětím 100 MPa.

### Řešení

Podle (1.9) vyjde pro teplotu  $T = 300 \text{ K}$

$$u_1 = \frac{24\,900 \cdot 300}{27} \doteq 2,8 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}$$

a podle (1.10) dostaneme pro  $\varrho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 72\,200 \text{ MPa}$

$$u_2 = \frac{\sigma^2}{2\varrho E} = \frac{100^2 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 2700 \cdot 72\,200 \cdot 10^6} \doteq 0,26 \text{ J kg}^{-1}$$

Zřejmě  $u_2 \ll u_1$ .

---

\*) Uhlík se vyskytuje ve dvou modifikacích (tuha nebo diamant).

## 2. STAVOVÉ VELIČINY A ZÁKONY TERMODYNAMIKY

Nechť látka - lhostejno, zda pevná či tekutá - zaujímá v prostoru nějakou oblast a nechť její makroskopické fyzikální vlastnosti jsou v každém bodě této oblasti stejné. Soubor těchto vlastností charakterizuje stav látky. Předpokládáme tedy rovnoměrné rozdělení fyzikálních vlastností, ale nikoli jejich neměnnost; stav látky se může s časem měnit. Chemické změny nepředpokládáme a chemické vlastnosti neuvažujeme.

Fyzikální veličiny, které za klidu popisují stav dané látky (daného tělesa), označíme  $X_1, X_2, \dots, X_{n+m}$ . Jsou to např. teplota, vnitřní energie, složky tenzoru napjatosti, složky tenzoru přetvoření, hustota apod. Každá veličina, která nějak souvisí se stavem zkoumané látky, je stavová veličina. Jestliže se tyto veličiny s časem nemění, je látka (těleso) v termodynamické rovnováze. Záhy zjistíme, že stavové veličiny nejsou zcela nezávislé. Např. mezi tenzorem napjatosti, tenzorem přetvoření a teplotou existuje u termoelastických látek vztah, který později uvedeme jako Duhamelův - Neumannův zákon. Předpokládejme, že existuje jen  $m$  nezávislých stavových veličin  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . Známe-li je, jsou jimi určeny zbývající stavové veličiny  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$  (a ovšem i fyzikální stav látky či tělesa). Existují tedy vztahy

$$X_\alpha = f_\alpha(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (2.1)$$

pro  $\alpha = n+1, n+2, \dots, n+m$ , kterým říkáme stavové rovnice.

To, co jsme psali o látce nebo o tělese, můžeme vztáhnout i na libovolný systém látek či těles uzavřený v konečném prostoru tak, že nemůže nastat výměna hmoty s okolím. Předpokládáme, že nedochází ani k žádným chemickým změnám. Představme si dva takové systémy  $A^{(1)}, A^{(2)}$ , u nichž stavové veličiny nezávisí ani na prostorových souřadnicích, ani na čase. Každý z nich je tedy v termodynamické rovnováze. Přivedeme-li je do těsné blízkosti tak, aby se v určité ploše dokonale dotýkaly, pak se jejich termodynamická rovnováha může, ale nemusí porušit. Neporuší-li se, jsou oba systémy ve vzájemné tepelné rovnováze. Pak existuje mezi jejich stavovými veličinami vztah

$$f(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_{m_1}^{(1)}; X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_{m_2}^{(2)}) = 0 \quad (2.2)$$

Zkráceně jej zapíšeme ve tvaru

$$f(1; 2) = 0 \quad (2.3)$$

Jsou-li v tepelné rovnováze také systémy  $A^{(1)}, A^{(3)}$ , je rovněž

$$q(1; 3) = 0 \quad (2.4)$$

Platí-li (2.3) a (2.4), platí také

$$h(2; 3) = 0 \quad (2.5)$$

Toto tvrzení se někdy označuje jako nultý zákon termodynamiky: jsou-li dva systémy v tepelné rovnováze s třetím systémem, jsou v tepelné rovnováze i mezi sebou.

Lze dokázat, že vztahy (2.3) až (2.5) mohou zároveň platit jen tehdy, mají-li funkce  $f$ ,  $q$ ,  $h$  tvar

$$\begin{aligned} f(1; 2) &= f_1 - f_2 \\ q(1; 3) &= f_1 - f_3 \\ h(2; 3) &= f_2 - f_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

kde

$$f_i = f_i(X_1^{(i)}, \dots, X_{m_i}^{(i)}) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.7)$$

Protože výrazy (2.6) jsou nulové [srovnej s nimi vztahy (2.3) až (2.6)], musí být  $f_1 = f_2 = f_3$ . Označme tuto hodnotu  $\theta$ . Bude tedy např.

$$\theta = f_1(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_{m_1}^{(1)}) \quad (2.8)$$

Je to empirická teplota systému  $A^{(1)}$ . Jsou-li dva termodynamicky rovnovážné systémy v tepelné rovnováze, mají stejnou empirickou teplotu.

Předpokládejme nyní, že dva rovnoměrné a rovnovážné systémy  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  nejsou ve vzájemné tepelné rovnováze. Přivedeme je do vzájemného kontaktu přes stěnu. Má-li tato stěna takovou vlastnost, že se rovnováha systémů nezmění, nazývá se adiabatická. Proces probíhající v systému uzavřeném adiabatickou stěnou se nazývá adiabatický. Práce  $\Delta W$ , kterou musíme vynaložit, abychom při adiabatickém procesu přešli z počátečního rovnovážného stavu  $X_\alpha(t_0)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) do jiného rovnovážného stavu  $X_\alpha(t_1)$ , závisí pouze na těchto stavových veličinách, a nikoli snad na průběhu funkcí  $X_\alpha(t)$  v otevřeném intervalu  $t_0 < t < t_1$ . Tato práce odpovídá změně vnitřní energie  $\Delta U = U(t_1) - U(t_0)$ . Protože do energetické bilance vstupují vždy jen rozdíly  $\Delta U$ , můžeme vnitřní energii měřit od libovolného referenčního stavu, např. od  $U(t_0)$ . To znamená, že bude  $U(t_1) = \Delta U$ ,  $U(t_0) = 0$ . Veličina  $U(t_1)$  závisí výhradně na  $X_\alpha(t_1)$ , přičemž  $t_1$  můžeme zvolit jakkoli. Pak ovšem platí, že

$$U = U(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (2.9)$$

pro kterékoli  $t$ . Vztah (2.9) je zřejmě stavová rovnice. Podle zákona o zachování energie se dodávaná práce  $\Delta W$  mění při adiabatickém procesu ve vnitřní energii  $\Delta U$ . Platí tedy, že  $\Delta W = \Delta U$ , nebo v diferenciálním tvaru  $dW = dU$ . Není-li proces adiabatický, bude se do uzavřeného systému dodávat z okolí ještě teplo  $dQ$ , takže

$$dQ + dW = dU \quad (2.10)$$

Energetická bilance (2.10), vyjadřující zákon zachování energie, je prvním zákonem termodynamiky.

Přírůstek mechanické práce se definuje jako součin síly (intenzivní veličiny) a přírůstku dráhy (extenzivní veličiny). Protože práce a energie jsou ekvivalentní pojmy a protože teplo je druh energie, vnucuje se myšlenka vyjádřit přírůstek tepla  $dQ$  rovněž ve tvaru součinu nějaké intenzivní veličiny (absolutní teploty  $T$ ) a přírůstku  $dS$  extenzivní veličiny  $S$

$$dQ = T dS \quad (2.11)$$

Veličina  $S$  zavedená definicí (2.11) je entropie. Absolutní teplota  $T$  je kladné číslo závislé pouze na empirické teplotě. Stupnice pro absolutní teplotu je dána rozpínavostí ideálního plynu.

Entropie je extenzivní veličina, tj. entropie soustavy je součtem entropií jejích částí. Diferenciální změna  $dS$  entropie může vzniknout buď interakcí s okolím (změna  $dS_e$ ), nebo z vnitřních příčin (změna  $dS_i$ ). Takže

$$dS = dS_e + dS_i \quad (2.12)$$

Je-li  $dQ$  teplo přivedené zvenku, přivádí s sebou také entropii

$$dS_e = \frac{dQ}{T} \quad (2.13)$$

Přírůstek  $dS_i$  odpovídá přírůstku tepla z vnitřních zdrojů. Může vzniknout např. disipací mechanické energie vnitřním tlumením materiálu, plastickými deformacemi, přeměnou elektrické energie v teplo při vedení elektrického proudu apod. Je-li  $dS_i = 0$ , je děj vratný, jinak  $dS_i > 0$  a děj je nevratný. Příklad  $dS_i < 0$  nemůže nastat. \*) Tato tvrzení jsou obsahem druhého zákona termodynamiky.

\*) Mařil-li se mechanická práce vnitřním tlumením v materiálu, může tím vzniknout pouze jeho ohřev, nikoli ochlazení.

Až dosud jsme předpokládali rovnoměrnost, tj. nezávislost stavových veličin  $X_\alpha$  na prostorových souřadnicích. Obecně však může stavová veličina záviset nejen na čase  $t$ , ale také na poloze bodu  $P(x_1, x_2, x_3)$ . Může tedy být  $X_\alpha = X_\alpha(P, t)$ . V takovém případě budeme předpokládat, že stav látky v infinitesimálním okolí bodu  $P$  lze popsat týmiž stavovými veličinami a že pro ně platí stejné stavové rovnice jako v rovnoměrných systémech, u nichž závislost na poloze bodu  $P$  odpadá.

### Příklad 3

Popište děj, který nastane, uvedeme-li do těsného kontaktu dvě rovnovážné soustavy  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$ , které nejsou ve vzájemné tepelné rovnováze.

### Řešení

Soustava  $A^{(1)}$  má absolutní teplotu  $T_1$ , soustava  $A^{(2)}$  pak  $T_2$ . Pokud jsou soustavy oddělené, nezávislejší tyto teploty na prostorových souřadnicích ani na čase. Jakmile se začnou soustavy dotýkat, vytvoří jednu izolovanou soustavu (s okolím se nebude vyměňovat ani hmota, ani energie). Předpokládejme, že se za čas  $dt$  odvede z tělesa  $A^{(1)}$  přes dotykovou plochu do tělesa  $A^{(2)}$  teplo  $dQ > 0$ . Jde o vnitřní změnu v izolované soustavě, takže bude

$$dS_i^{(1)} = -\frac{dQ}{T_1} \quad dS_i^{(2)} = +\frac{dQ}{T_2}$$

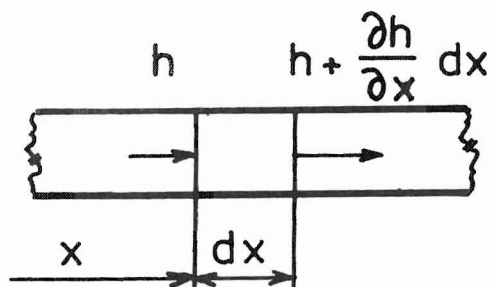
Celková změna entropie bude

$$dS_i = dS_i^{(1)} + dS_i^{(2)} = -\frac{dQ}{T_1} + \frac{dQ}{T_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} dQ$$

Protože musí být  $dS_i \geq 0$  (druhý zákon termodynamiky), je  $T_1 \geq T_2$ . Je-li  $dS_i > 0$ , je  $T_1 > T_2$  a proces je nevratný (teplo přechází z tělesa teplejšího do studenějšího, nikdy naopak). Je-li  $dS_i = 0$ , je  $T_1 = T_2$ , takže jde o vzájemnou tepelnou rovnováhu.

### Příklad 4

Na obr. 2 je znázorněna část tepelně izolované tyče s nerovnoměrně rozdělenou teplotou. Za čas  $dt$  projde průřezem o ploše  $A$  ve vzdálenosti  $x$  teplo  $dQ = A\dot{h}dt$  a průřezem ve vzdálenosti  $x + dx$  teplo  $dQ + d^2Q = A[\dot{h}dt + (\partial\dot{h}/\partial x)dxdt]$ . Zde  $\dot{h}$  představuje hustotu tepelné-



OBR. 2

ho toku ( $\text{W m}^{-2}$ ). \*) Do části tyče o délce  $dx$  se tedy přivede teplo  $dQ - (dQ + d^2Q) = -d^2Q$ ,

$$-d^2Q = -A \frac{\partial h}{\partial x} dx dt = \rho A dx du \quad (a)$$

Tato rovnice vyjadřuje první zákon termodynamiky (o přivedené teplo se zvětší vnitřní energie). Přivedené teplo však můžeme zapsat také jako  $T ds$ , kde  $s$  je entropie v 1 kg; pro element o hmotnosti  $\rho A dx$  bude

$$-A \frac{\partial h}{\partial x} dx dt = \rho A dx \cdot T ds \quad (b)$$

S pomocí identity

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h}{T} \right) = \frac{1}{T} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (c)$$

upravíme rovnici (b) na tvar

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h}{T} \right) - \frac{h}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{ds}{dt} \quad (d)$$

Je-li  $h$  teplo, které projde za 1 s plošnou jednotkou průřezu, pak touž plochou projde za stejný čas entropie  $h/T$ . To znamená, že podíl  $h/T$  ( $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ ) představuje hustotu toku entropie průřezem tyče. Jestliže  $ds = ds_e + ds_i$ , budeme moci v rovnici (d) označit člen  $-(\partial/\partial x)(h/T)$

\*) Častěji bývá hustota tepelného toku označována  $q$ . Tento symbol však použijeme jinak, totiž jako teplo vztažené k 1 kg.

jako celkový přítok entropie z okolí do jednotky objemu za jednu sekundu; tedy

$$\varrho \frac{ds_e}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h}{T} \right) \quad (e)$$

Zbývající člen musí představovat přírůstek entropie z vnitřních zdrojů, takže

$$\varrho \frac{ds_i}{dt} = - \frac{h}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (f)$$

Protože  $\varrho > 0$ ,  $T > 0$ ,  $ds_i \geq 0$  (druhý zákon termodynamiky), musí být

$$h \frac{\partial T}{\partial x} \leq 0 \quad (g)$$

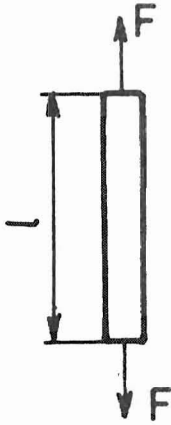
Teplo tedy směřuje proti gradientu teploty (postupuje z teplejších míst do studenějších, a nikdy naopak).

Z příkladů 3 a 4 je zřejmé, že druhý zákon termodynamiky určuje směr vývoje fyzikálního děje. První zákon termodynamiky představuje jakési "účetnictví" tohoto děje.

### 3. JEDNOOSÉ NAMÁHÁNÍ TERMOELASTICKÉ TYČE

Budeme sledovat změny při zatěžování pružné tyče tahem, popř. tlakem. Prizmatická část tyče zakreslená na obr. 3 bude namáhána jednoosým napětím  $\sigma = F/A$  ( $F$  je síla,  $A$  průřez tyče). Všechny změny nechť jsou tak pomalé, že setrvačné síly můžeme zanedbat. Změní-li se poměrné prodloužení  $\epsilon = \Delta l/l$  o diferenciální přírůstek  $d\epsilon$ , vykoná se v jednotce objemu tyče práce  $\sigma d\epsilon$ . Tuto práci přepočteme na jeden kilogram hmotnosti, a to dělením hustotou  $\varrho$ . Zároveň přivedeme z okolí teplo  $dQ$ . Na jeden kilogram připadne množství tepla  $dq = dQ/m$ . Opět se přidržujeme pravidla, že veličiny vztažené k jednomu kilogramu látky značíme malými písmeny. Součet přivedeného tepla a mechanické práce představuje celkovou energii vloženou do jednoho kilogramu, která se





OBR. 3

podle (2.10) v tyči uloží jako přírůstek vnitřní energie. Bude tedy

$$dq + \frac{1}{\rho} \sigma d\varepsilon = du \quad (3.1)$$

Tato bilance energií odpovídá prvnímu zákonu termodynamiky.

Tyč deformujeme a ohříváme tak pomalu, abychom mohli zanedbat kinetickou energii a abychom zachovali rovnoměrné rozdělení napětí a teploty. Zanedbáváme tedy i setrvačné síly, i vedení tepla (k tomu přihlédneme později).

Jaké jsou v tomto případě stavové veličiny? Jsou to ty, které nějak souvisejí se změnou původního (referenčního) přirozeného stavu nezátíženého tělesa, při němž je teplota tělesa rovnoměrná a napětí nulové. Za stavovou veličinu můžeme zřejmě považovat napětí  $\sigma$ , poměrné prodloužení  $\varepsilon$ , teplotu  $T$ , měrnou vnitřní energii  $u$ , měrnou entropii  $s$ . Ukáže se, že jen dvě z těchto veličin jsou nezávislé. Později zavedeme ještě jinou stavovou veličinu (volnou energii), avšak i ta bude funkcí pouze dvou nezávislých veličin. Teplotu tělesa v přirozeném stavu označíme  $T_0$ . Při této teplotě je vztah mezi napětím  $\sigma$  a poměrným prodloužením  $\varepsilon$  dán Hookeovým zákonem  $\sigma = E\varepsilon$ . Zvětšuje-li se teplota nezátížené tyče, roste její poměrné prodloužení  $\varepsilon$  podle vztahu  $d\varepsilon = \alpha dT$  ( $\alpha$  je délková roztažnost). Pro malé změny můžeme předpokládat lineární závislost, takže bude platit tento Duhamelův - Neumannův zákon:

$$\varepsilon = \frac{1}{E_T} \sigma + \alpha_T (T - T_0) \quad (3.2)$$

Zde  $E_T$  značí Youngův modul pružnosti zjišťovaný při konstantní teplotě  $T = T_0$ ; symbol  $\alpha_T$  značí délkovou roztažnost při téže teplotě. Změnu těchto veličin s teplotou v linearizované stavové rovnici (3.2) zanedbáváme. Jsou-li tedy dvě ze tří veličin  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$  dány, lze ze stavové rovnice (3.2) třetí z nich vypočítat. Na těchto veličinách pak závisí i proměnné  $u$ ,  $s$ .

Vztáhneme-li rovnici (2.11) k jednomu kilogramu hmotnosti, bude  $dq = T ds$ . V tomto případě jde o přírůstek tepla, resp. entropie, přívodem zvnějšku, takže  $ds = ds_e$ ,  $ds_i = 0$ . Teplo přivádíme tak pomalu, že teplota je (téměř) rovnoměrně rozdělená a vedení tepla lze za-

nedbat. \*) Za tohoto předpokladu jde o ideální pružnost, deformace jsou vratné. Z rovnice (3.1) tak dostaneme pro přírůstek měrné vnitřní energie vztah

$$du = T ds + \frac{1}{\varrho} \sigma d\varepsilon \quad (3.3)$$

Vidíme, že měrná vnitřní energie  $u$  je v rovnici (3.3) vyjádřena pomocí stavových veličin  $s$ ,  $\varepsilon$ . Diferencováním funkce  $u = u(s, \varepsilon)$  vyjde

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_{\varepsilon} ds + \left( \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right)_{s} d\varepsilon \quad (3.4)$$

Indexy u závorek naznačují, která veličina byla při parciálním derivování konstantní. Pak již z pouhého výrazu např.  $(\partial u / \partial \varepsilon)_{s}$  poznáváme, že bylo  $u = u(s, \varepsilon)$ , a nikoli třeba  $u = u(T, \varepsilon)$ . Srovnáním výrazů (3.3) a (3.4) dostaneme, že

$$T = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_{\varepsilon} \quad \sigma = \varrho \left( \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \right)_{s} \quad (3.5)$$

Z rovnice (3.3) poznáváme, že se celá vložená mechanická práce  $\sigma d\varepsilon / \varrho$  změní v přírůstek  $du$  měrné vnitřní energie jen tehdy, je-li  $ds = 0$ , a tedy  $s = \text{konst.}$  (izoentropická změna). Druhá z rovnic (3.5) naznačuje, že parciální derivací hustoty  $\varrho u$  vnitřní energie podle poměrného prodloužení (při konstantní entropii) vyjde napětí. Hustota vnitřní energie je tedy potenciálem napětí při izoentropické změně. To vyžaduje, aby tyč byla tepelně izolována ( $dq = T ds = 0$ ). Místo toho můžeme uspořádat pokus tak, že budeme udržovat konstantní teplotu  $T_0$  (izotermická změna). Pak je výhodné zavést měrnou volnou energii  $f$  podle definice

$$f = u - Ts \quad (3.6)$$

Zavedli jsme další stavovou veličinu  $f$ , ale zároveň s tím i další stavovou rovnici (3.6), takže se počet nezávislých stavových veličin nezměnil. Diferencováním vztahu (3.6) vyjde

$$df = du - T ds - s dT \quad (3.7)$$

---

\*) V tom je jistý rozpor, který objasníme v 5. kapitole.

Za diferenciál  $du$  dosadíme z rovnice (3.3) a budeme mít

$$df = \frac{1}{\varrho} \sigma d\varepsilon - s dT \quad (3.8)$$

V rovnici (3.8) je zřejmé  $f = f(\varepsilon, T)$ , takže

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_T d\varepsilon + \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_\varepsilon dT \quad (3.9)$$

Srovnáním pravých stran (3.8) a (3.9) dostaneme

$$\sigma = \varrho \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_T \quad s = - \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_\varepsilon \quad (3.10)$$

Hustota  $\varrho f$  volné energie je tedy potenciálem napětí při izotermické změně. Jinými slovy, při izotermické změně se mechanická práce mění ve volnou energii, a naopak.

V druhé z rovnic (3.10) je entropie funkcí poměrného prodloužení a teploty. Pak ovšem

$$dq = T ds = T \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \right)_T d\varepsilon + \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_\varepsilon dT \right] \quad (3.11)$$

Když sem dosadíme z druhé z rovnic (3.10), bude

$$dq = -T \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \varepsilon} d\varepsilon + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_\varepsilon dT \right] \quad (3.12)$$

Přivedením tepla  $dq$  se při nezměněném poměrném prodloužení  $\varepsilon$  zvýší teplota o  $dT$ , přičemž

$$dq = c_\varepsilon dT \quad (3.13)$$

Zde  $c_\varepsilon$  značí měrnou tepelnou kapacitu při konstantním poměrném prodloužení (při nezměněné délce tyče). Pro tento případ je  $d\varepsilon = 0$ , takže z rovnic (3.12) a (3.13) vyjde

$$c_\varepsilon = -T \left( \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right)_\varepsilon \quad (3.14)$$

Když (3.14) dosadíme do (3.12), budeme mít

$$dq = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \epsilon} d\epsilon + c_\epsilon dT \quad (3.15)$$

a s použitím první z rovnic (3.10)

$$dq = -\frac{1}{\rho} T \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_\epsilon d\epsilon + c_\epsilon dT \quad (3.16)$$

Rovnice (3.16) popisuje vazbu mezi mechanickými a tepelnými veličinami (tj. mezi  $\sigma$ ,  $\epsilon$  a  $T$ ,  $q$ ).

Je-li tyč tepelně izolovaná, je  $dq = 0$ . Z rovnice (3.2) vypočteme

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_\epsilon = -E_T \alpha_T \quad (3.17)$$

a obojí dosadíme do (3.16). Vyjde

$$0 = \frac{1}{\rho} E_T \alpha_T T d\epsilon + c_\epsilon dT \quad (3.18)$$

Na rozdíl od rovnice (3.16) popisuje (3.18) adiabatickou změnu. Pro malé změny v okolí teploty  $T_0$  odtud vypočteme \*)

$$\Delta T = -\frac{E_T \alpha_T T_0}{\rho c_\epsilon} \Delta \epsilon \quad (3.19)$$

Je to změna teploty vyvolaná rovnoměrným elastickým prodloužením tepelně izolované tyče. Pokud je  $\alpha_T > 0$ , je elastické prodloužení tyče spojeno s poklesem teploty; při stlačení se tyč naopak zahřeje. Je to důsledek termomechanické vazby. K disipaci energie ani ke sdílení tepla přitom - podle přijatých předpokladů - nedochází. Přesněji řečeno, jde o vazbu mezi změnami deformačního a teplotního pole v termoelastickém tělese. To znamená, že elastická deformace vyvolává obecně v tepelně izolovaném tělese změnu teplotního pole. Později ukážeme, že změnu teplotního pole způsobí ta část elastické deformace, která souvisí se změnou objemu,

\*) Vzorec (3.19) byl odvozen zjednodušeně a je zatížen malou chybou, jak podrobně vysvětlíme v páté kapitole. Srovnej s rovnicí (5.14)

a nikoli se změnou tvaru tělesa (při nezměněném objemu). Vyvoláme-li v tělese naopak změnu teplotního pole, pak každé blokování teplotních dilatací je vždy spojeno se vznikem teplotních napětí. Množství tepla, které musíme dodat, abychom teplotu zvýšili o daný teplotní rozdíl, závisí na tom, zda jsou dilatace volné, či zda je jim bráněno. Kdyby termomechanická vazba neexistovala, neměly by elastické deformace vliv na teplotní pole a tepelná kapacita by byla na nich rovněž nezávislá. S termomechanickou vazbou souvisí i rozdíl ve velikosti modulu pružnosti v tahu - tlaku, který se mění podle toho, probíhají-li elastické deformace při konstantní teplotě, či je-li tyč tepelně izolovaná, což nyní ukážeme.

Při izotermické změně ( $T = T_0$ ) máme podle (3.2)

$$d\varepsilon_T = \frac{d\sigma}{E_T} \quad (3.20)$$

Při izoentropické změně vznikne navíc roztažení tyče vlivem změny teploty podle (3.19), takže bude

$$d\varepsilon_A = \frac{d\sigma}{E_A} = \frac{d\sigma}{E_T} + \alpha_T dT = \frac{d\sigma}{E_T} - \frac{E_T \alpha_T^2 T_0}{\rho c_E} \cdot \frac{d\sigma}{E_T} \quad (3.21)$$

Odtud

$$\frac{1}{E_T} - \frac{1}{E_A} = \frac{\alpha_T^2 T_0}{\rho c_E} \quad (3.22)$$

Rozdíl mezi izoentropickým a izotermickým modulem pružnosti tedy je

$$E_A - E_T = E_T E_A \frac{\alpha_T^2 T_0}{\rho c_E} \approx \frac{E_T^2 \alpha_T^2 T_0}{\rho c_E} \quad (3.23)$$

Modul pružnosti je proto při izoentropické změně vždy o něco větší než při izotermické změně. Je to důsledek termomechanické vazby, která se však v technických úlohách zpravidla zanedbává (bere se  $E_A = E_T$  a označuje jednoduše  $E$ ).

Podle rovnic (3.1) a (3.13) je přírůstek měrné vnitřní energie

$$du = c_E dT + \frac{1}{\rho} \sigma d\varepsilon \quad (3.24)$$

Odtud je zřejmé, že při nezměněném poměrném prodloužení je  $du = c_E dT$ .

Kdyby šlo naopak o změnu při stálém napětí  $\sigma = \text{konst.}$ , bylo by podle (3.2)

$$d\varepsilon = \alpha_T dT \quad (3.25)$$

Když na levou stranu rovnice (3.16) dosadíme  $dq = c_G dT$  (teplo dodávané při stálém napětí) a na pravou stranu za  $d\varepsilon$  výraz (3.25), vyjde

$$c_G dT = -\frac{1}{\rho} T \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_\varepsilon \alpha_T dT + c_E dT \quad (3.26)$$

Zde se  $dT$  zkrátí. S použitím (3.17) pak vyjde rozdíl měrných tepelných kapacit (měrných tepel) při stálém napětí a při stálém poměrném prodloužení

$$c_G - c_E = \frac{1}{\rho} E_T \alpha_T^2 T \quad (3.27)$$

Rovnice (3.19) pak dá

$$\Delta T = - \left( \frac{c_G}{c_E} - 1 \right) \frac{\Delta \varepsilon}{\alpha_T} \quad (3.28)$$

Změny teploty při elastických deformacích tedy souvisejí se změnami tepelné kapacity. Kdyby se tepelná kapacita neměnila ( $c_G = c_E$ ), bylo by  $\Delta T = 0$ . Rozdíl v tepelných kapacitách zase souvisí s délkovou roztažností  $\alpha_T$  podle vztahu (3.27). Kdyby byla délková roztažnost nulová, vymizela by termomechanická vazba a vyšlo by  $c_G = c_E$ ,  $\Delta T = 0$ .

Dosadíme-li z rovnice (3.28) na levou stranu (3.19) a odtud do (3.23), pak pro  $E_\beta$  nepřilíží různé od  $E_T$  dostaneme úměru

$$\frac{c_G}{c_E} = \frac{E_\beta}{E_T} \quad (3.29)$$

#### Poznámka

Pro ideální plyny platí známá Mayerova rovnice

$$c_p - c_v = r \quad (3.30)$$

kde  $r$  je měrná plynová konstanta. Poměr měrných tepelných kapacit při stálém tlaku a při stálém objemu

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa \quad (3.31)$$

se rovná Poissonově konstantě  $\kappa$ , což je polytropický exponent při izoentropické změně. Rovnice (3.30), resp. (3.31), je analogická s rovnicí (3.27), resp. (3.29).

### Příklad 5

Jak se změní teplota izolované ocelové tyče, roztáhneme-li ji až na mez úměrnosti, které odpovídá napětí v tahu 200 MPa? Dáno:  $E_T = 2 \cdot 10^5$  MPa,  $\alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $c_\varepsilon = 460 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $\rho = 7860 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $T_0 = 300 \text{ K}$ .

### Řešení

Podle (3.19) vyjde

$$\Delta T = - \frac{\alpha_T \cdot T_0}{\rho c_\varepsilon} \Delta \sigma = - \frac{(1,2 \cdot 10^{-5}) \cdot (300)}{(7860) \cdot (460)} \cdot (200 \cdot 10^6) \doteq 0,2 \text{ K}$$

Teplota tedy poklesne o dvě desetiny stupně.

### Příklad 6

Jaký je poměr měrných tepelných kapacit  $c_\sigma$  a  $c_\varepsilon$ , popř. elastic-  
kých modulů  $E_\sigma$  a  $E_T$  u oceli z příkladu 5?

### Řešení

Podle (3.27) vyjde

$$\begin{aligned} c_\sigma &= c_\varepsilon + \frac{1}{\rho} E_T \alpha_T^2 T_0 = (460) + (7860^{-1}) \cdot (2 \cdot 10^{11}) \cdot (1,2 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (300) \doteq \\ &\doteq 460 + 1,1 = 461,1 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

Rovnice (3.29) pak dává

$$\frac{c_\sigma}{c_\varepsilon} = \frac{E_\sigma}{E_T} = \frac{461,1}{460,0} \doteq 1,0024$$

### Příklad 7

Jsou-li ze čtyř proměnných  $x_1, x_2, x_3, x_4$  jen dvě nezávislé, platí pro ně identicky tento vztah:

$$\frac{\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_4}}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3}} = 1 - \frac{\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_4}}{\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_1}}$$

Dokažte.

### Řešení

Předpokládejme, že

$$x_2 = x_2(x_1, x_3) \qquad x_4 = x_4(x_1, x_3) \qquad (a)$$

Diferencováním dostaneme

$$dx_2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)_{x_3} dx_1 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right)_{x_1} dx_3 \qquad (b)$$

$$dx_4 = \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right)_{x_3} dx_1 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\right)_{x_1} dx_3$$

Odtud vyloučíme  $dx_1$ ; bude

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} dx_2 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_4}\right)_{x_3} dx_4 &= \\ &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right)_{x_1} dx_3 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_4}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\right)_{x_1} dx_3 \end{aligned} \qquad (c)$$

Je-li  $x_4 = \text{konst.}$ , je jednak  $dx_4 = 0$ , jednak  $dx_2/dx_3 \equiv (\partial x_2 / \partial x_3)_{x_4}$ .  
Takže

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right)_{x_4} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\right)_{x_1} - \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_4}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\right)_{x_1} \qquad (d)$$



Tuto rovnici násobíme součinem  $(\partial x_3 / \partial x_2)_{x_1} \cdot (\partial x_3 / \partial x_2)_{x_4}$ .

Dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_1} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_4} - \\ &- \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_1} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_4} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_4}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\right)_{x_1} \end{aligned} \quad (e)$$

Pro  $dx_4 = 0$  máme

$$dx_4 = \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right)_{x_3} dx_1 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\right)_{x_1} dx_3 = 0 \quad (f)$$

a odtud

$$\left(\frac{\partial x_4}{\partial x_1}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\right)_{x_4} + \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\right)_{x_1} = 0 \quad (g)$$

Užitím pravidla o derivování inverzních funkcí vypočteme z rovnice (g)

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_4}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\right)_{x_1} = - \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\right)_{x_4} \quad (h)$$

a dosadíme do rovnice (e). Vyjde

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_4} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_1} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_4} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\right)_{x_4} \quad (i)$$

Z rovnic (a) však vidíme, že pro  $x_4 = \text{konst.}$  je  $x_1 = f(x_3)$ ,  
 $x_3 = g(x_2)$ . Podle pravidla o derivování složených funkcí

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\right)_{x_4} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_4} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_4} \quad (j)$$

To dosadíme do vztahu (i) a zaměníme obě strany rovnice. Dostaneme

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_4} + \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_4} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{x_3} \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)_{x_1} \quad (k)$$

Nyní se již snadno přesvědčíme, že rovnice (k) je totožná se vztahem, který jsme měli dokázat.

### Příklad 8

Do vztahu uvedeného v zadání příkladu 7 dosaďte za proměnné  $x_1, \dots, x_4$  postupně  $\varepsilon, T, q, G$ , resp.  $T, \varepsilon, G, A$ . Dokažte, že vyjde vztah (3.28), resp. (3.29).

### Řešení

V prvním případě bude

$$\frac{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_G}{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_q} = 1 - \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_G}{\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_\varepsilon} \quad (a)$$

Avšak  $(\partial \varepsilon / \partial T)_G = \alpha$ ,  $(\partial \varepsilon / \partial T)_q = \Delta \varepsilon / \Delta T$  při adiabatické změně. Kromě toho  $(\partial q / \partial T)_G = c_G$ ,  $(\partial q / \partial T)_\varepsilon = c_\varepsilon$ . Takže

$$\frac{\alpha \Delta T}{\Delta \varepsilon} = 1 - \frac{c_G}{c_\varepsilon} \quad (b)$$

To je však - po malé úpravě - vztah (3.28).

V druhém případě máme

$$\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right)_A}{\left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\right)_G} = 1 - \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}\right)_A}{\left(\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}\right)_T} \quad (c)$$

Z definice  $(\partial T / \partial \varepsilon)_\Delta = \Delta T / \Delta \varepsilon$  při izoentropické změně,  
 $(\partial T / \partial \varepsilon)_G = \alpha^{-1}$ ,  $(\partial G / \partial \varepsilon)_\Delta = E_\Delta$ ,  $(\partial G / \partial \varepsilon)_T = E_T$ . Je tedy

$$\frac{\alpha \Delta T}{\Delta \varepsilon} = 1 - \frac{E_\Delta}{E_T} \quad (d)$$

Když za  $E_\Delta / E_T$  dosadíme z rovnice (3.29), dostaneme (3.28).

**Poznámka.** Měrné teplo  $q$  není stavovou veličinou a její infinitesimální množství není úplný diferenciál (na rozdíl třeba od diferenciálu měrné entropie). Stane se jím teprve po vynásobení integračním faktorem  $(1/T)$ . Symboly úplného a částečného diferenciálu jsme v tomto textu nerozlišovali.

#### 4. DUHAMELŮV - NEUMANNŮV ZÁKON

Jedním ze základních zákonů lineární termoelastivity je konstitutivní vztah mezi složkami napjatosti, složkami přetvoření (poměrnými deformacemi) a teplotou. Pro jednoosou napjatost má tvar (3.2). Jde-li o obecnou napjatost a o izotropický materiál, platí těchto šest rovnic:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha (T - T_0) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha (T - T_0) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha (T - T_0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (4.2)$$

Přitom - jak známo -  $E = 2(1+\mu)G$ ;  $\mu$  je Poissonovo číslo charakterizující příčnou kontrakci. Je-li  $T = T_0 = \text{konst.}$ , dostáváme Hookeův zákon. Budou-li nulová napětí, vyjdou vztahy popisující teplotní roztažnost. Index "T" u modulů pružnosti  $E$ ,  $G$  a u délkové roztažnosti  $\alpha$  pro stručnost vynecháváme.

K rovnicím (4.1) a (4.2) lze napsat inverzní vztahy ve tvaru \*)

---

\*) V literatuře /7/ je symbolem  $\alpha$  označen součinitel objemové roztažnosti, tj. trojnásobek délkové roztažnosti. Na to je třeba pamatovat při eventuální aplikaci vzorců uvedených v citované publikaci.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda^* e + 2G \varepsilon_x - \beta (T - T_0) \\
 \sigma_y &= \lambda^* e + 2G \varepsilon_y - \beta (T - T_0) \\
 \sigma_z &= \lambda^* e + 2G \varepsilon_z - \beta (T - T_0)
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}
 \tag{4.4}$$

Zde

$$\lambda^* = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z
 \tag{4.5}$$

Jde o Lamého konstantu  $\lambda^*$  a o poměrnou změnu  $e$  elementárního objemu.  $\kappa$ ) Konstanta  $\beta$  vyjde

$$\beta = \frac{E\alpha}{1-2\mu}
 \tag{4.6}$$

Sečtením rovnic (4.3) dostaneme vztah

$$p = -K e + \beta (T - T_0)
 \tag{4.7}$$

kde

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)
 \tag{4.8}$$

$$K = \frac{3\lambda^* + 2G}{3} = \frac{E}{3(1-2\mu)}
 \tag{4.9}$$

Zde  $K$  značí modul objemové pružnosti.

Rovnice (4.1) a (4.2) můžeme zapsat jako jednu tenzorovou rovnici. V kartézských souřadnicích  $x_1, x_2, x_3$  je

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\mu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}
 \tag{4.10}$$

---

$\kappa$ ) Viz též rovnici (5.12). V literatuře najdeme i zkrácené označení "objemová dilatace".

Inverzní vztahy (4.3) a (4.4) lze nahradit rovnicí

$$\sigma_{ij} = \lambda^* \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \beta (T - T_0) \delta_{ij} \quad (4.11)$$

Základy tenzorové algebry a její aplikaci v různých úlohách mechaniky kontinua jsme podrobně vyložili jinde /16/.

Rovnici (4.7) dostaneme z rovnice (4.11) úžením (dosazením  $i = j$  a aplikací Einsteinova součtového pravidla).

Je třeba připomenout, co jsme již řekli v komentáři k rovnici (3.2). Elastické konstanty a činitele roztažnosti zavedené do rovnic (4.1) až (4.11) nejsou ve skutečnosti konstanty, ale závisí na teplotě. Tuto závislost v malém okolí referenční teploty  $T_0$  zanedbáváme. Prakticky to znamená, že za ně dosazujeme konstantní střední hodnoty, platné - ovšem jen přibližně - pro celý provozní rozsah teplotních změn. Kdyby byl tento rozsah příliš velký, rozdělili bychom jej na menší teplotní intervaly a v každém z nich zavedli poněkud jiné konstanty podle příslušné střední teploty. Zpravidla to nebývá nutné.

#### Poznámka

V literatuře se Lamého konstanty značí obvykle  $\lambda$ ,  $\mu$ ; v této kapitole jsme pro ně použili symbolů  $\lambda^*$ ,  $G$ . Ponecháváme totiž označení obvyklé v technické praxi (modul pružnosti v tahu či tlaku  $E$ , modul pružnosti ve smyku  $G$ , Poissonovo číslo  $\mu$ ). První Lamého elastickou konstantu  $\lambda^*$ , s kterou získají rovnice (4.3) výhodný tvar, rozlišujeme hvězdičkou od součinitele tepelné vodivosti  $\lambda$ . Druhou Lamého elastickou konstantu jsme označili  $G$ , neboť je to vskutku modul pružnosti ve smyku.

#### Příklad 9

Určete napjatost a deformaci přímé kolejnice způsobenou stoupnutím teploty o  $\Delta T = T - T_0$ . Předpokládejte, že se kolejnice nemůže ani prodloužit, ani prohnut a že teplota je v kolejnici rozdělena rovnoměrně.

#### Řešení

Nechť osa  $x$  souhlasí s osou kolejnice. Pak  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ; rovněž smyková napětí jsou nulová. Z rovnice (4.1) dosadíme do podmínky nulového poměrného prodloužení  $\varepsilon_x = 0$ . Vyjde

$$\sigma_x = -E\alpha \Delta T \quad (a)$$

Příčné rozměry kolejnice se změjí o poměrné přírůstky

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = (1 + \mu) \alpha \Delta T \quad (b)$$

### 5. TERMOMECHANICKÁ VAZBA PŘI PROSTOROVÉ DEFORMACI

Ukázali jsme, že ke změně teploty dochází i pouhou deformací (bez přívodu či odvodu tepla). Tento jev jsme nazvali termomechanická vazba. Úvahy ze třetí kapitoly zobecníme na případ obecné prostorové deformace, jež je popsána tenzorem druhého řádu se šesti nezávislými složkami. V kartézských souřadnicích a v obvyklém označení jsou tyto složky

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31} \} = \\ &= \{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \frac{1}{2} \gamma_{zx} \} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Byla-li dříve měrná volná energie  $f = f(\varepsilon, T)$ , bude nyní  $f = f(\varepsilon_{ij}, T)$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ . Místo rovnice (3.10) dostaneme

$$p = - \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} \quad \sigma_{ij} = \rho \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T \quad (5.2)$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31} \} = \\ &= \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \} \end{aligned} \quad (5.3)$$

jsou složky tenzoru napjatosti. Rovnici (3.12) dostaneme ve tvaru

$$dq = -T \left( \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \varepsilon_j} d\varepsilon_j + \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} dT \right) \quad (5.4)$$

(sčítá se přes indexy  $i, j = 1, 2, 3$  podle Einsteinova součtového pravidla). Zvolíme-li  $d\varepsilon_{ij} = 0$ , bude

$$dq = c_v dT = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} dT \quad (5.5)$$

Symbolem  $c_v$  jsme označili měrnou tepelnou kapacitu (měrné teplo) při konstantní deformaci. Později ukážeme, že je stejná jako měrná tepelná kapacita při konstantním měrném objemu; odtud index "v". \*) Máme tedy

$$dq = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + c_v dT \quad (5.6)$$

Když sem dosadíme podle druhé z rovnic (5.2), dostaneme

$$dq = -\frac{T}{\varrho} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + c_v dT \quad (5.7)$$

Tato rovnice je analogická ke vztahu (3.16). Parciální derivace  $\partial \sigma_{ij} / \partial T$  se při nezměněných poměrných deformacích  $\varepsilon_{ij}$  dá vypočítat z rovnice (4.11). Zřejmé

$$\left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}} = -\beta \delta_{ij} \quad (5.8)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta ( $\delta_{ij} = 1$  pro  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ ). Přiřazení indexů je takové, že např.  $\sigma_x = \sigma_{11}$ ,  $\sigma_y = \sigma_{22}$ ,  $\tau_{xy} = \sigma_{12}$  atd. Když (5.8) dosadíme do (5.7) vyjde

$$dq = \frac{T}{\varrho} \beta d\varepsilon_{ii} + c_v dT \quad (5.9)$$

Připomeňme, že  $\delta_{ij} d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ii} = d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = de$  [srovnej s rovnicí (4.5)]. Takže

$$dq = \frac{T}{\varrho} \beta de + c_v dT \quad (5.10)$$

---

\*) To bude zřejmé z rovnice (5.10). Pro  $de = \Delta dr / dv = 0$  bude  $dq = c_v dT$ .

Jaký je význam diferenciálu  $de$  ? Nechť  $dV$  značí elementární objem, tj.  $dV = dx dy dz$ . Měrný objem je  $\nu = dV/dm = dx dy dz/\rho = \rho^{-1}$ . Přírůstek objemu při malých deformacích vyjde

$$\begin{aligned} \Delta dV &= (1 + \epsilon_x) dx (1 + \epsilon_y) dy (1 + \epsilon_z) dz - dx dy dz \doteq \\ &\doteq (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) dx dy dz = e dV \end{aligned} \quad (5.11)$$

Znamená tedy

$$e = \frac{\Delta dV}{dV} = \frac{\Delta \nu}{\nu} \quad (5.12)$$

poměrné zvětšení objemu a  $de$  jeho diferenciální přírůstek. Nemění-li se objem, je  $de = 0$ . Z rovnice (5.10) pak vyplývá, že  $dq = c_v dT$ . Tensor přetvoření  $[\epsilon_{ij}]$  lze rozdělit na tzv. kulový tenzor  $\frac{1}{3} e [\delta_{ij}]$  a deviátor  $[\epsilon'_{ij}]$ , kde  $\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} e \delta_{ij}$ .\*) Nemění-li se objem, je kulový tenzor nulový, ale deviátor může mít nenulové složky. Z rovnice (5.10) je zřejmé, že se deviátor přetvoření na termomechanické vazbě nepodílí. Tuto vazbu představuje první člen na pravé straně rovnice (5.10).

Je-li teplota v tělese rozdělena rovnoměrně a těleso je tepelně izolováno, je  $dq = 0$ . Z rovnice (5.10) pak dostaneme pro malé změny okolo referenčního stavu Kelvinův vzorec

$$\Delta T = - \frac{T_0 \beta}{c_v \rho} e = - \frac{T_0 \beta}{c_v \rho} \frac{\Delta \nu}{\nu} \quad (5.13)$$

Pro veličinu  $\beta$  platí vztah (4.6). Podle (5.13) závisí změna teploty vyvolaná elastickými deformacemi pouze na poměrné změně objemu. Změna tvaru při stálém objemu teplotu tělesa neovlivňuje.

Pro jednoosou napjatost máme  $\sigma_x = \Delta \sigma$ , ostatní složky tenzoru napjatosti jsou nulové. Pak ovšem

$$\epsilon_x = \Delta \epsilon = \frac{\Delta \sigma}{E} \quad \epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \Delta \epsilon \quad e = (1 - 2\mu) \Delta \epsilon$$

Z rovnice (5.13) vyjde pro tento případ

---

\*) Zapišeme-li složky tenzoru ve tvaru matice, pak  $[\delta_{ij}]$  značí jednotkovou matici.



$$\Delta T = -\frac{T_0 \beta}{c_v \varrho} (1-2\mu) \Delta \varepsilon = -\frac{T_0 E \alpha}{c_v \varrho} \Delta \varepsilon \quad (5.14)$$

To je však rovnice (3.19), pokud  $c_v = c_\varepsilon$ . Rovnost těchto měrných tepelných kapacit poněkud překvapuje, neboť je logické, aby bylo  $c_\sigma = c_p$  (je-li při jednoosé napjatosti  $\sigma = \text{konst.}$ , je konstantní i kulový tenzor napjatosti). Jak později ukážeme, liší se rozdíl  $c_\sigma - c_\varepsilon$  od rozdílu  $c_p - c_v$  [srovnej rovnici (3.27) s příkladem 10]. Zřejmě musí být  $c_p = c_\sigma > c_\varepsilon > c_v$ . Rozdíl mezi těmito hodnotami je však relativně velmi malý, takže rovnost  $c_v = c_\varepsilon$  platí velmi přibližně. Z praktického hlediska tedy můžeme být spokojeni, ale teoreticky nás toto tvrzení neuspokojuje. Nepřesnost vznikla patrně tím, že jsme v rovnici (3.10) brali volnou energii jako funkci  $f(\varepsilon, T)$ , kde  $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$ , místo správného  $f(\varepsilon_{ij}, T)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Jak později ukážeme v příkladu 13 a v tab. 1, je

$$\frac{\partial f(\varepsilon_{ij}, T)}{\partial T} = -\frac{\beta}{\varrho} \varepsilon_{ii} - c_v \ln \frac{T}{T_0} \quad (5.15)$$

a samozřejmě také

$$\frac{\partial^2 f(\varepsilon_{ij}, T)}{\partial T^2} = -c_v \cdot \frac{1}{T} \quad (5.16)$$

shodně s rovnicí (5.5). Budeme-li však podruhé podle teploty derivovat za podmínky  $\varepsilon_{ii} = \text{konst.}$ , bude se týč při změně teploty v příčném směru rozpínat, takže - označíme-li tuto derivaci symbolem  $D/DT$  - vyjde

$$\frac{D \varepsilon_{ii}}{DT} = \left( \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ii} = \text{konst.}} = 2(1+\mu)\alpha \quad (5.17)$$

Podle toho bude

$$c_\varepsilon = -T \frac{D}{DT} \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right) = \frac{1}{\varrho} T \beta \cdot 2(1+\mu)\alpha + c_v \quad (5.18)$$

Odtud vypočteme

$$c_\varepsilon - c_v = \frac{2(1+\mu)\alpha\beta T}{\varrho} \quad (5.19)$$

shodně s výsledky odvozenými v příkladu 10 a v rovnici (3.27).

Jak jsme právě ukázali, dopustili jsme se ve třetí kapitole jen té nepřesnosti, že jsme do stavových veličin zahrnuli pouze jednu ze složek tenzoru přetvoření, neboť šlo o jednoosou napjatost. To znamená, že v příčném směru nepůsobilo žádné napětí a při příčné kontrakci se nekona-  
la žádná práce. Proto je chyba, které jsme se dopustili, prakticky ne-  
významná. Nicméně je třeba poznamenat, že vzorec (3.19) je touto chybou  
zatížen a že správný je vzorec (5.14). Zjednodušení ve třetí kapitole  
jsme volili záměrně, aby se výklad stal přehlednějším a pochopitelnějším.

Shrňme dosavadní poznatky. Termomechanická vazba se projevuje na  
jedné straně tím, že objemová dilatace či komprese je provázána změnami  
teploty, na druhé straně tím, že tepelná kapacita závisí na tom, zda na-  
stává volná objemová dilatace, či zda je nějak omezována. Existují dvě  
změny, při nichž mají napětí potenciál. Při izoentropické změně je tímto  
potenciálem vnitřní energie, při izotermické změně volná energie. Při  
těchto změnách proto existuje mezi napětím a přetvořením jednoznačný  
vztah; obě tyto změny jsou vratné. Existují proto dvě verze Hookeova zá-  
kona. Liší se tím, že za Youngův modul pružnosti dosazujeme buď izoentro-  
pický, nebo izotermický modul. Modul pružnosti ve smyku je v obou přípa-  
dech stejný. Isoentropický Youngův modul pružnosti v tahu - tlaku je ne-  
patrně větší než izotermický. Podobný malý rozdíl je i mezi izoentropic-  
kým a izotermickým Poissonovým číslem. V souvislosti s tím se v praxi  
někdy rozlišují "statické" a "dynamické" moduly pružnosti. U kovů je však  
rozdíl tak nepatrný, že se nejčastěji zanedbává (viz příklad 6).

Hookeův zákon je tedy definován - přísně vzato - jen pro izoentro-  
pickou nebo izotermickou změnu. V žádném jiném případě nelze o ideální  
elasticitě hovořit. Dojde-li k nerovnoměrnému rozdělení teploty - a k to-  
mu dojde i pouhou nerovnoměrnou objemovou dilatací nebo kompresí -, je  
třeba počítat s vedením tepla, a tedy s termodynamikou nevratných procesů.  
To nyní ukážeme.

Předpoklad, že teplota je v tělese rovnoměrně rozdělena, je v rozpo-  
ru s předpokladem, že do tělesa přivádíme teplo. Do vnitřních částí těle-  
sa může teplo proniknout jen vedením, tj. za nerovnoměrného rozdělení  
teploty. Teplotu pak můžeme považovat za rovnoměrnou jen uvnitř elementár-  
ního objemu  $dV = dx dy dz$ . Do tohoto objemu přivedeme teplo  $dQ =$   
 $= dq \cdot \rho dV$ . Stěnou  $dy dz$  se přivede v rovině  $x = x_0$  za jednu  
sekundu teplo  $h_x dy dz$  a v rovině  $x = x_0 + dx$  se zároveň odvede  
 $[h_x + (\partial h_x / \partial x) dx] dy dz$ . Celkem se tedy přivede množství tepla  
 $-(\partial h_x / \partial x) dV$ . Analogické výrazy dostaneme i pro směry  $y$ ,  $z$ . Do  
jednoho kilogramu hmotnosti tedy přivedeme za čas  $dt$  teplo

$$dq = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) dt \quad (5.20)$$

Výraz (5.20) můžeme zjednodušit, přejdeme-li k tenzorové symbolice. Označíme

$$\vec{h} = \{ h_1, h_2, h_3 \} = \{ h_x, h_y, h_z \} \quad (5.21)$$

vektor hustoty tepelného toku a pro derivace jeho složek zavedeme symbol

$$h_{i,j} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \quad (5.22)$$

Index za čárkou tedy znamená derivaci podle příslušné souřadnice. Pak

$$dq = -\frac{1}{\rho} h_{i,i} dt \quad (5.23)$$

Sčítá se přes  $i = 1, 2, 3$ . Rovnice (5.23) je totožná s rovnicí (5.20). Když (5.23) dosadíme do (5.10), bude

$$-h_{i,i} = T\beta \frac{de}{dt} + \rho C_v \frac{dT}{dt} \quad (5.24)$$

V izotropickém tělese platí pro vedení tepla Fourierův zákon ve tvaru

$$h_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\lambda T_{,i} \quad (5.25)$$

kde  $\lambda$  ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) je tepelná vodivost. Předpokládáme, že je konstantní. S použitím (5.25) získá (5.24) tvar

$$\lambda T_{,ii} = T\beta \dot{e} + \rho C_v \dot{T} \quad (5.26)$$

Tečkou označujeme - jako obvykle - derivaci podle času.

### Příklad 10

Dokažte, že rozdíl měrných tepelných kapacit při stálém tlaku a při stálém objemu je dán vztahem

$$c_p - c_v = \frac{3}{1-2\mu} \cdot \frac{E\alpha^2 T}{\varrho}$$

### Řešení

Je-li  $p = \text{konst.}$ , jsou teplotní poměrné deformace v izotropickém tělese

$$d\varepsilon_{ij} = \alpha \delta_{ij} dT \quad (a)$$

V tomto vztahu je  $\delta_{ij}$  Kroneckerovo delta. Vztah (a) vyplývá z rovnic (4.1) a (4.2). Na levou stranu rovnice (5.10) dosadíme  $dq = c_p dT$ . Pro  $de$  dostaneme s použitím (a)

$$\begin{aligned} de &= \delta_{ij} d\varepsilon_{ij} = \alpha \delta_{ij} \delta_{ij} dT = \\ &= \alpha \delta_{ii} dT = \alpha (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) dT = 3\alpha dT \end{aligned} \quad (b)$$

Vyjde

$$c_p dT = \frac{3T\beta\alpha}{\varrho} dT + c_v dT \quad (c)$$

Pro  $\beta$  platí (4.6), takže rovnice (c) je totožná se vztahem, který jsme měli dokázat.

Jiný způsob důkazu spočívá v tom, že za proměnné  $x_1, \dots, x_4$  v příkladu 7 dosadíme po řadě  $v, T, q, p$ . To již ponecháváme čtenáři.

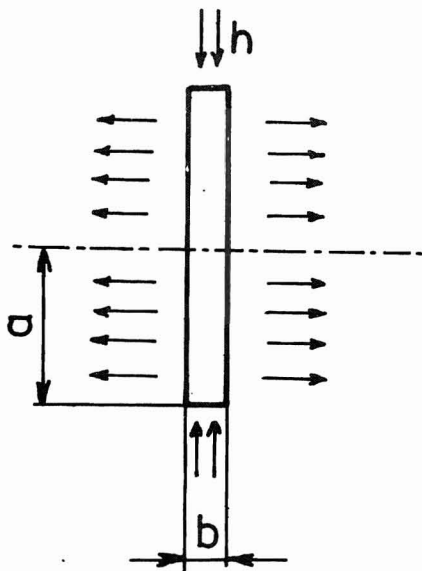
### Příklad 11

Najděte rozdělení teploty v tenkém kotouči podle obr. 4, do něhož se teplo přivádí na obvodu o poloměru  $a$  a odvádí na obou lících plochách, na nichž podmínky přestupu tepla nezávisí na poloměru. Předpokládáme ustálený stav.

### Řešení

Zanedbáme-li termomechanickou vazbu, dá rovnice (5.26)

$$\lambda \nabla^2 T = \varrho c_v \dot{T} \quad (a)$$



OBR. 4

Zde  $\nabla^2 T \approx T_{,rr}$ . Levou stranu musíme doplnit o teplo přivedené lícnicími povrchy, které bude úměrné rozdílu teplot  $\Theta = T - T_0$  od teploty okolí  $T_0$ . Konstantu úměrnosti označíme  $\alpha$ , takže dvěma plochami  $2\pi r dr$  projde za sekundu teplo  $-4\pi r dr \cdot \alpha \Theta$ . To podělíme objemem  $dV = 2\pi r dr \cdot b$  a dostaneme přírůstek tepla v jednotce objemu  $-2\alpha\Theta/b$ . Konstanta  $\alpha$  představuje součinitel přestupu tepla. Místo rovnice (a) pak bude platit vztah

$$\lambda \nabla^2 \Theta - 2\alpha\Theta/b = \rho c_v \dot{\Theta} \quad (b)$$

V ustáleném stavu  $\dot{\Theta} = 0$ , takže bude

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda b} \Theta = 0 \quad (c)$$

To je Besselova diferenciální rovnice. Řešení musí zůstat konečné i pro  $r = 0$  a musí splňovat okrajovou podmínku

$$\lambda \frac{d\Theta}{dr} = h\Theta \quad \text{pro } r = a \quad (d)$$

Vypočteme

$$\Theta = \frac{h}{\sqrt{2\alpha\lambda/b}} \cdot \frac{I_0(cr)}{I_0(ca)} \quad (e)$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda b}} \quad (f)$$

a  $I_0(x)$  značí modifikovanou Besselovu funkci prvního druhu, nultého řádu.

### Příklad 12

Stanovte podmínky pro zanedbání termomechanické vazby.

### Řešení

Rovnici (5.26) upravíme do tvaru

$$\lambda T_{,ii} = \rho C_v \dot{T} \left[ 1 + \frac{T\beta}{\rho C_v} \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{T}} \right] \quad (a)$$

Termomechanickou vazbu lze zřejmě zanedbat, je-li druhý člen v hranaté závorce (a) mnohem menší než jedna. Pak ovšem

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\alpha \dot{T}} \ll \frac{\rho C_v}{T\beta\alpha} = (1 - 2\mu) \frac{\rho C_v}{E\alpha^2 T} = \delta \quad (b)$$

Např. pro ocel vyjde za normální teploty 20 °C

$$\delta = (1 - 2 \cdot 0,3) \frac{(7860) \cdot (460)}{(2 \cdot 10^{11}) \cdot (1,2 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (293)} \doteq 170$$

Za zvýšené teploty např. 100 °C ( $T = 373$  K) vyjde přibližně  $\delta \doteq 130$ .  
Hledané kritérium tedy je

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\alpha \dot{T}} \ll \delta \quad (c)$$

Zřejmě záleží na poměru rychlostí, s jakými se mění objem a teplota;  
 $\delta$  je bezrozměrové číslo závislé na materiálu a na jeho teplotě.

### Příklad 13

Ukažte, jak souvisí vnitřní energie termoelastického tělesa s jeho teplotou a přetvořením.

### Řešení

Odvodíme vzorec pro měrnou vnitřní energii  $u = u(T, \epsilon_{ij})$  vztáženou k jednotce hmotnosti. Pro přírůstek  $du$  měrné vnitřní energie platí vztah

$$du = dq + \frac{1}{\varrho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (a)$$

který dostaneme z prvního zákona termodynamiky. Podle (5.9) je

$$dq = T ds = \frac{T}{\varrho} \beta d\varepsilon_{ii} + c_v dT \quad (b)$$

takže

$$du = \frac{T}{\varrho} \beta d\varepsilon_{ii} + c_v dT + \frac{1}{\varrho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (c)$$

Integrujeme v mezích od  $T = T_0$  do  $T = T_1$  a od  $\varepsilon_{ij} = 0$  do  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij1}$ . Index 1, kterým jsme vyznačili koncový stav, po dokončené integraci vynecháme. Vyjde

$$u(T_1, \varepsilon_{ij}) - u(T_0, 0) = \frac{T+T_0}{2\varrho} \beta \varepsilon_{ii} + \\ + c_v (T - T_0) + \frac{1}{2\varrho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (d)$$

V prvním členu na pravé straně jsme za  $T$  dosadili střední hodnotu intervalu, tj. teplotu  $(T+T_0)/2$ ; tento člen vznikl interakcí elastické deformace a teplotního pole, souvisí tedy s termomechanickou vazbou. Druhý člen na pravé straně rovnice (d) představuje zvýšení měrné vnitřní energie přívodem tepla za nezměněné deformace (za nezměněného objemu). Poslední člen představuje měrnou elastickou deformační energii. Byla vy počtena integrací posledního členu v rovnici (c) za předpokladu konstantní teploty (s použitím Hookeova zákona).

#### Poznámka

Veličiny vztažené k jednotce hmotnosti označujeme jako "měrné". Vztahují-li se k jednotce objemu, hovoříme o "hustotách". Např. hustotu deformační energie dostaneme, když měrnou deformační energii vynásobíme hustotou (specifickou hmotností). Výrazy pro měrnou volnou energii  $f$ , pro měrnou vnitřní energii  $u$  a měrnou entropii  $s$ , popř. diferenciály těchto veličin, najdeme v tab. 1. Vztahují se k 1 kg hmotnosti. Čtenáři doporučujeme, aby se pokusil tyto vztahy samostatně odvodit.

$u = u(\varepsilon_{ij}, T)$	$u = \frac{\beta T}{\rho} \varepsilon_{ii} + c_v T + \frac{1}{2\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \text{konst.}$ $du = \left( \frac{\beta T}{\rho} \delta_{ij} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \right) d\varepsilon_{ij} + c_v dT$
$s = s(\varepsilon_{ij}, T)$	$s = \frac{\beta}{\rho} \varepsilon_{ii} + c_v \ln \frac{T}{T_0} + \text{konst.}$ $ds = \frac{\beta}{\rho} d\varepsilon_{ii} + c_v \frac{dT}{T}$
$f = f(\varepsilon_{ij}, T)$	$f = \frac{1}{2\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + c_v T - c_v T \ln \frac{T}{T_0} + \text{konst.}$ $df = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \left( \frac{\beta}{\rho} \varepsilon_{ii} + c_v \ln \frac{T}{T_0} \right) dT$

6. NEVÁZANÁ KVAZISTATICKÁ TEORIE TERMOELASTICITY

Zanedbáme-li termomechanickou vazbu danou prvním členem na pravé straně rovnice (5.26), zbude rovnice popisující vedení tepla

$$\lambda \nabla^2 T = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{6.1}$$

Index "v" u měrné tepelné kapacity vynecháváme, neboť neexistuje-li vazba mezi teplotním polem a elastickou deformací, je  $c_v = c_p$ . Úlohu o vedení tepla řešíme nyní nezávisle. Předpokládáme, že se teplota mění s místem  $P(x_1, x_2, x_3)$  i s časem  $t$ , takže máme  $T = T(P, t)$ . Omezíme se však na případy tak pomalých změn, že setrvačné síly bude možné v každém bodě tělesa zanedbat. Deformace tělesa pak bezprostředně sledují změny teploty a zatížení, takže čas je jen "slepým" parametrem úlohy. To znamená, že termoelastickou úlohu budeme pro každý okamžik řešit jakoby v zastaveném čase. \*)

\*) K setrvačným silám přihlédneme ve 12. kapitole.



Řešení rovnice (6.1) vyžaduje znalost počátečních a okrajových podmínek. Na počátku děje bývá zpravidla  $T(P, 0) = T_0 = \text{konst.}$  Okrajové podmínky popisují fyzikální děj na povrchu tělesa a bývají složitější. Je-li předepsána povrchová teplota  $\bar{T}$ , je v bodě  $P$  na povrchu tělesa

$$T(P, t) = \bar{T}(P, t) \quad (6.2)$$

Je-li předepsána hustota tepelného toku, bude podle (5.25)

$$h(P, t) = \lambda \frac{\partial T}{\partial n}(P, t) \quad (6.3)$$

Zde  $h$  značí teplo přiváděné za jednotku času jednotkou plochy povrchu,  $\vec{n}$  je vektor vnější normály a  $\partial T / \partial n$  derivace teploty v jeho směru. Je-li povrch dokonale izolovaný, je

$$\frac{\partial T}{\partial n}(P, t) = 0 \quad (6.4)$$

Stýká-li se povrch tělesa s tekutinou o jiné teplotě  $T_f$ , takže se teplo sdílí konvekcí, je

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha^* [T_f - T(P, t)] \quad (6.5)$$

kde  $\alpha^*$  je součinitel přestupu tepla.

Dotýkají-li se určitou částí povrchu dvě různě teplá tělesa, pak při dokonalém dotyku budou v každém bodě  $P$  dotykové plochy platit podmínky

$$T_1(P, t) = T_2(P, t) \quad (6.6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n}(P, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}(P, t) \quad (6.7)$$

Zde  $\vec{n}$  je společná normála v bodě  $P$ . Není-li dotyk obou těles dokonalý, nahrazuje se vztah (6.6) závislostí

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial m_1} (P, t) = \frac{1}{R} [T_2(P, t) - T_1(P, t)] \quad (6.8)$$

v níž  $R$  značí dotykový odpor.

Je-li část povrchu vystavena sálavému záření, je podle Stefanova-Boltzmannova zákona

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial m} (P, t) = C [T_e^4(t) - T^4(P, t)] \quad (6.9)$$

Zde  $T_e$  je teplota povrchu tělesa, z něhož teplo sálá na povrchový element v bodě  $P$  termoelastického tělesa. Ten má teplotu  $T$ . Vztah (6.9) je nepříjemný tím, že je nelineární. Proto se někdy linearizuje. Platí, že

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial m} (P, t) = R^* [T_e(t) - T(P, t)] \quad (6.10)$$

$$R^* = C (T_e^3 + T_e^2 T + T_e T^2 + T^3) \quad (6.11)$$

Proměnlivost  $R^*$  se při malých změnách teploty zanedbává. V literatuře se veličina  $R^*$  často označuje názvem radiální povrchová vodivost. Je-li  $T_e \gg T$ , lze místo vztahu (6.9) psát

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial m} = C T^4 = \text{konst.} \quad (6.12)$$

a vztah (6.9) tak přejde do tvaru (6.3). Prakticky stačí, je-li  $T_e > 2T$ ; chyba vzorce (6.12) je pak menší než 6,7 %.

Nejsložitější okrajové podmínky bývají pro styk tělesa s tekutinou. Součinitel  $\alpha^*$  přestupu tepla v rovnici (6.5) nebývá konstantní, ale mění se v prostoru i v čase. Závisí na fyzikálních vlastnostech tekutiny a na tom, zda jde o vynucené či o volné proudění. Podrobnější diskusi o okrajových podmínkách pro úlohu o vedení tepla lze nalézt např. v literatuře /6/.

Jestliže jsme vyřešili teplotní pole, známe pro každý okamžik  $t$  funkci  $T(x_i)$ , která vstupuje do Duhamelových-Neumannových rovnic (4.3) a (4.4). V tenzorovém zápisu bude podle (4.11) v kartézských souřadnicích platit, že

$$\sigma_{ij} = \lambda^* e \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \beta (T - T_0) \delta_{ij} \quad (6.13)$$

kde  $e = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  značí objemovou dilataci. Složky  $\varepsilon_{ij}$  tenzoru přetvoření závisí na posuvech  $u_i$  podle vzorce

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.14)$$

a napětí  $\sigma_{ij}$  splňují podmínky rovnováhy

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (6.15)$$

Zde  $X_i$  ( $N m^{-3}$ ) je  $i$ -tá složka vektoru  $\vec{X}$  objemových sil. Vztahy (6.13) až (6.15) představují soustavu patnácti rovnic pro neznámé funkce polohy  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ . Od soustavy rovnic teorie pružnosti se liší jen tím, že v rovnici (6.13) je navíc člen  $-\beta(T - T_0)\delta_{ij}$ , což je známá funkce polohy, kterou jsme získali předchozím řešením teplotního pole.

Okrajové podmínky pro tuto úlohu se zpravidla formulují tak, že na části  $S_u$  povrchu tělesa jsou zadány posuvy  $\bar{u}_i$

$$u_i = \bar{u}_i(P) \quad (6.16)$$

na zbývajících částech  $S_\sigma$  povrchu je zadán vektor napětí  $\bar{f}_i$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{f}_i(P) \quad (6.17)$$

Pruh nad symboly znamená, že jde o dané (známé) funkce.

Dosadíme-li z rovnice (6.14) nejprve do (6.13) a pak do (6.15), dostaneme soustavu tří diferenciálních rovnic ( $i = 1, 2, 3$ ) pro neznámé posuvy  $u_i$

$$(\lambda^* + G) u_{j,jj} + G u_{i,jj} + X_i - \beta T_{,i} = 0 \quad (6.18)$$

Místo toho lze z rovnic (6.14) vyloučit posuvy  $u_i$ ; dostaneme tak šest rovnic kompatibility, kterým musí vyhovovat poměrné deformace  $\varepsilon_{ij}$ . Když je pak vyjádříme pomocí napětí užitím konstitutivní rovnice (4.10), vyjde soustava šesti rovnic pro napětí  $\sigma_{ij}$  ve tvaru

$$(1+\mu) \sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} + E\alpha \left[ \frac{1+\mu}{1-\mu} T_{,kk} \delta_{ij} + T_{,ij} \right] + \\ + \mu \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \chi_{k,k} \delta_{ij} + (1+\mu)(\chi_{i,j} + \chi_{j,i}) = 0 \quad (6.19)$$

K těmto šesti rovnicím kompatibility přistupují tři rovnice rovnováhy (6.15) a okrajové podmínky (6.16), resp. (6.17).

Rovnice (6.18) představuje zobecnění Navierových rovnic, známých z teorie pružnosti. Rovnice (6.19) vznikla zobecněním rovnic Beltramiho-Michellových. Metodami řešení těchto rovnic se nebudeme zabývat. Odvodíme z nich však dva důležité praktické poznatky.

Především si všimneme rovnice (6.18). Označíme-li veličiny vstupující do této rovnice horním indexem I, budeme mít

$$(\lambda^* + G) \mu_{j,i}^I + G \mu_{i,jj}^I + \chi_i^I - \beta T_{,i}^I = 0 \quad (6.20)$$

Index I znamená, že jde o úlohu termoelasticity. Kdyby bylo  $T = T_0 = \text{konst.}$ , dostali bychom úlohu elasticity (index II)

$$(\lambda^* + G) \mu_{j,i}^{II} + G \mu_{i,jj}^{II} + \chi_i^{II} = 0 \quad (6.21)$$

Když takto rozepíšeme a porovnáme i konstitutivní rovnici (6.13) pro obě úlohy, bude

$$\sigma_{ij}^I + \beta (T^I - T_0) \delta_{ij} = \lambda^* e^I \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}^I \quad (6.22)$$

$$\sigma_{ij}^{II} = \lambda^* e^{II} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}^{II} \quad (6.23)$$

Zvolme  $\mu_i^I = \mu_i^{II}$ . Pak bude také  $e^I = e^{II}$ ,  $\varepsilon_{ij}^I = \varepsilon_{ij}^{II}$ . Deformace I a II se budou zřejmě shodovat, bude-li

$$\chi_i^{II} = \chi_i^I - \beta T_{,i}^I \quad (6.24)$$

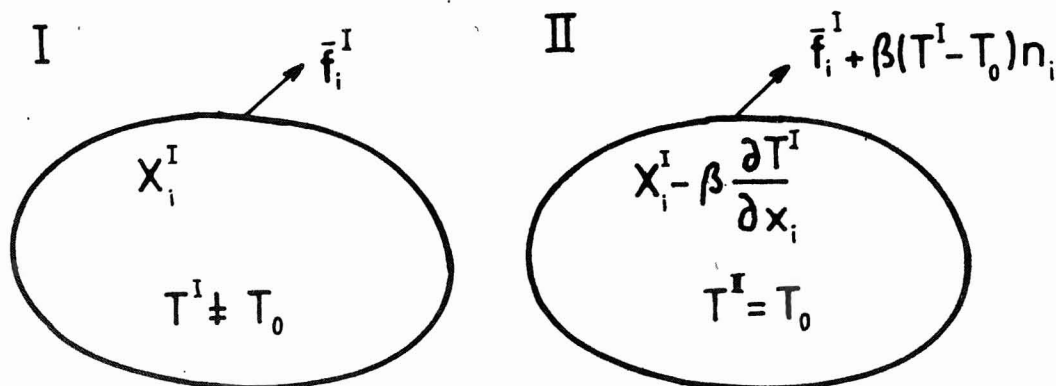
$$\sigma_{ij}^{II} = \sigma_{ij}^I + \beta (T^I - T_0) \delta_{ij} \quad (6.25)$$

To vyplývá ze srovnání rovnic (6.20), (6.21), popř. (6.22), (6.23).  
 Když (6.25) dosadíme do okrajové podmínky (6.17), vyjde

$$\bar{f}_i^{\text{II}} = \bar{f}_i^{\text{I}} + \beta (T^{\text{I}} - T_0) n_i \quad (6.26)$$

Rovnice (6.24) až (6.26) vyjadřují Duhamelovu - Neumannovu větu: vliv nerovnoměrného rozdělení teploty na napjatost a deformace tělesa dostaneme řešením izotermické úlohy teorie pružnosti, nahradíme-li objemové síly  $X_i$  výrazem  $X_i - \beta T_{,i}$  a vektor povrchových napětí  $\bar{f}_i$  výrazem  $\bar{f}_i + \beta (T - T_0) n_i$ . Od vypočtených normálových napětí pak musíme odečíst součin  $\beta (T - T_0)$ . Větu znázorňuje obr. 5.

## VĚTA DUHAMELOVA - NEUMANNOVA



$$u_i^{\text{I}} = u_i^{\text{II}}$$

$$\sigma_{ij}^{\text{I}} = \sigma_{ij}^{\text{II}} - \beta (T^{\text{I}} - T_0) \delta_{ij}$$

OBR. 5

Duhamelova - Neumannova věta řešení neusnadní, ale tím, že převede vliv teploty na mechanické působení objemových a povrchových sil, poskytne názornější představu o působení teplotního pole.

Další důsledek vyplývá z rovnic (6.19). Je-li

$$T_{,ij} \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (6.27)$$

pro všechna  $i, j = 1, 2, 3$ , vliv teploty se neprojeví, neboť člen s hranatou závorkou v rovnici (6.19) odpadne. Rovnice (6.27) má řešení

$$T = T_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \quad (6.28)$$

v němž  $T_0, a_1, a_2, a_3$  jsou konstanty (popř. veličiny, které závisí pouze na čase a mění se jen zvolna);  $x_1, x_2, x_3$  jsou kartézské souřadnice.

Je-li tedy teplota rozdělena v prostoru lineárně a na těleso nepůsobí ani objemové, ani povrchové síly, jsou - za předpokladu spojitých posuvů - napětí v tělese nulová.

K tomu připojíme poznámku. Předpokládáme, že v přirozeném (referenčním) stavu nezávisí teplota na prostorových souřadnicích a napětí je (v nezátíženém tělese) nulové. Vlastní pnutí vzniklé např. tepelným zpracováním tedy neuvažujeme. Zmínka o spojitosti posuvů se týká několikaúhelně souvislých oblastí; nespojitě posuvy v nich mohou vzniknout Volterrovými dislokacemi /24/. Konečně požadavek, aby nepůsobily povrchové síly, znamená, že teplotním dilatacím tělesa nic nebrání. Není-li tomu tak, mohou teplotní pnutí vzniknout třeba i při konstantní teplotě (příklad 9).

#### Příklad 14

Přesvědčte se, že rovnice (6.19) neodporuje Duhamelově - Neumannově větě.

#### Řešení

Rovnice (6.19) platí pro termoelastickou úlohu. K symbolům v této rovnici bychom si tedy mohli přimyslet horní index I. Obdobná rovnice pro ekvivalentní izotermickou úlohu nemá výraz v hranaté závorce a veličiny v ní mají index II; zní takto:

$$(1+\mu)G_{ij,kk}^{\text{II}} + G_{kk,ij}^{\text{II}} + \mu \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) X_{kk}^{\text{II}} \delta_{ij} + (1+\mu)(X_{i,j}^{\text{II}} + X_{j,i}^{\text{II}}) = 0 \quad (\text{a})$$

Dosadíme-li do rovnice (a) výrazy (6.24) a (6.25), musíme dostat rovnici (6.19). Tak tomu bude, jestliže pro funkce

$$G_{ij} = \beta (T - T_0) \delta_{ij} \quad X_i = -\beta T_{,i} \quad (\text{b})$$

bude platit, že

$$(1+\mu)\sigma_{ij,kk} + \mu \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \chi_{kk} \delta_{ij} = E\alpha \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right) T_{,kk} \delta_{ij} \quad (c)$$

$$\sigma_{kk,ij} + (1+\mu)(\chi_{ij} + \chi_{ji}) = E\alpha T_{,ij} \quad (d)$$

Rovnice (c) a (d) skutečně platí, neboť podle (4.6)

$$\beta = E\alpha / (1-2\mu) \quad (e)$$

a pro funkce (b) vyjde

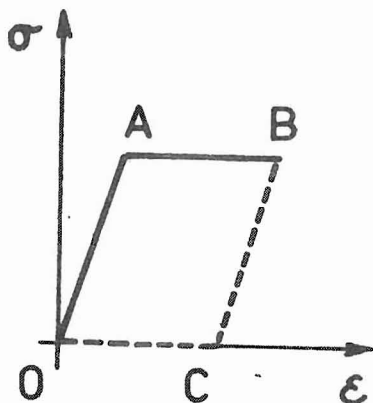
$$\sigma_{kk,ij} = 3\beta T_{,ij} \quad (f)$$

$$\chi_{ij} + \chi_{ji} = -2\beta T_{,ij} \quad (g)$$

## 7. ENERGETICKÉ PRINCIPY

Vraťme se k tyči podle obr. 3 namáhané prostým tahem. Když ji zatížíme v mezích úměrnosti napětím  $\sigma = F/A$ , vznikne v ní poměrné prodloužení - za nezměněné teploty -  $\varepsilon = \sigma/E$  a uloží se v ní deformační energie o hustotě  $\sigma^2/2E$ . Nyní ponecháme zatížení nezměněné a tyč zahřejeme o  $\Delta T = T - T_0$ . K tomu musíme na každou jednotku objemu dodat teplo  $\rho c \Delta T$ . Zároveň vykoná napětí  $\sigma$  práci  $\sigma \alpha \Delta T$ . Vztahujeme ji rovněž k jednotce objemu. Dodáme tedy energii  $\sigma^2/2E + \rho c \Delta T + \sigma \alpha \Delta T$  a dostaneme se v pracovním diagramu na obr. 6 do bodu B po dráze OAB. Termomechanickou vazbu pokládáme za nevýznamnou, takže  $c_p = c_v = c$ ,  $E_s = E_T = E$ .

Nyní budeme postupovat obráceně. Nejprve tyč zahřejeme dodáním tepla  $\rho c \Delta T$  do každé jednotky objemu a pak teprve ji zatížíme napětím  $\sigma$ . Dostaneme se rovněž do bodu B, avšak po dráze OCB, přičemž do každé



OBR. 6

jednotky objemu dodáme mechanickou práci  $\sigma^2 / 2E$ . Celková dodaná energie bude menší než v předchozím případě, a to o hodnotu  $\sigma \propto \Delta T$ . Protože se dodaná energie mění v obou případech ve vnitřní energii a ta je jednoznačně určena teplotou a poměrným prodloužením v bodě B, měla by být vynaložená energie v obou případech stejná. V čem spočívá uvedený rozpor?

Mohlo by se zdát, že rozpor vzniká tím, že zanedbáváme termomechanickou vazbu. Toto podezření je zcela oprávněné, protože nevázaná teorie termoelasticity není fyzikálně zcela v pořádku; zanedbáváme sice vazbu mezi mechanickými a te-

pelnými veličinami, ale nezanedbáváme teplotní roztažnost, ačkoli víme, že uvedená vazba vymizí zároveň s teplotní roztažností.

Tento rozpor je zásadní. Kdybychom při změně OAB opravdu spotřebovali větší energii než při změně OCB, mohli bychom při cyklickém procesu OCBAO získávat energii zadarmo. Bylo by to perpetuum mobile.

Termomechanická vazba je popsána vzorcem (5.13). Pro jednoosou napjatost z něho získáme vztah (5.14). To znamená, že při prodloužení tyče o  $\Delta \epsilon = \Delta \sigma / E$  poklesne teplota tyče o hodnotu

$$-\Delta T_1 = \frac{T_0 \alpha}{c_v \rho} \Delta \sigma \quad (7.1)$$

Dodáme-li nyní teplo

$$\Delta q_1 = \frac{T_0 \alpha}{\rho} \Delta \sigma \quad (7.2a)$$

vrátíme se na původní teplotu  $T_0$ , takže výsledný přírůstek teploty bude nulový. K jeho zvýšení na hodnotu  $\Delta T = T - T_0$  musíme dodat další teplo (při konstantním napětí)

$$\Delta q_2 = c_p \Delta T \quad (7.2b)$$

Celkem tedy dodáme teplo  $\Delta q = \Delta q_1 + \Delta q_2$ , takže pro současný ohřev a prodlužování tyče bude platit bilanční rovnice

$$\Delta q = \frac{T_0 \alpha}{\rho} \Delta \sigma + c_p \Delta T \quad (7.3)$$



To je správná rovnice pro analýzu našeho problému. Při změně izochorické odpadne na pravé straně první člen, při izotermické druhý. Dostaneme hodnoty měrných energií podle Tab. 2.

Tab. 2

Změna	Dodaná měrná energie
OA	$\frac{T_0 \alpha}{\rho} \sigma + \frac{1}{\rho} \frac{\sigma^2}{2E}$
AB	$c_p(T - T_0) + \frac{\sigma(T - T_0)\alpha}{\rho}$
BC	$-\frac{T\alpha}{\rho} \sigma - \frac{1}{\rho} \frac{\sigma^2}{2E}$
CO	$-c_p(T - T_0)$
OABCO	Součet energií je nulový

Z Tab. 2 je zřejmé, že práce, kterou vykoná napětí  $\sigma$  na teplotních dilatacích  $\alpha(T - T_0)$ , se anuluje s vazební energií. Nemá proto vliv na deformační energii. I tehdy, zanedbáme-li vazební energii, budeme tento poznatek respektovat. Hustota deformační energie proto bude

$$\Lambda = \sigma^2 / (2E) = (\sigma / 2E)(\epsilon - \alpha \Delta T). \quad (7.4)$$

Při trojosé napjatosti bude analogicky k rovnici (7.4)

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} [ \epsilon_{ij} - \alpha (T - T_0) \delta_{ij} ] = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \alpha (T - T_0) \sigma_{kk} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Když sem dosadíme za  $\sigma_{ij}$  z rovnice (6.13), popř. (4.11), dostaneme s použitím vztahů

$$\beta = \alpha (3\lambda^* + 2G) \quad E = G \frac{3\lambda^* + 2G}{\lambda^* + G} \quad \mu = \frac{\lambda^*}{2(\lambda^* + G)} \quad (7.6)$$

výraz

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2} \lambda^* \epsilon^2 + G \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} - (3\lambda^* + 2G) \alpha (T - T_0) \epsilon + \\ &+ \frac{3}{2} (3\lambda^* + 2G) \alpha^2 (T - T_0)^2 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Přitom  $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  (jako dříve) a

$$G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = G (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{zx}^2) \quad (7.8)$$

Dosadíme-li do rovnice (7.5) naopak za  $\varepsilon_{ij}$  z rovnice (4.10), vyjde po úpravě

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \\ + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] \end{aligned} \quad (7.9)$$

Výraz (7.9) se shoduje s tím, co se uvádí jako hustota deformační energie (dříve nazývaná potenciální energie napjatosti) v každé učebnici technické nauky o pružnosti a pevnosti. Neobsahuje žádné členy závislé na teplotě a teplotní roztažnosti. Rovnice (7.7) a (7.9) jsou ekvivalentní, pokud platí Duhamelův - Neumannův zákon. V širších souvislostech mechaniky je však třeba považovat vztah (7.7) za prvotní. Hustota deformační energie, je-li chápána jako funkce poměrných deformací, je totiž potenciálem napětí. Platí, že

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (7.10)$$

jak se snadno přesvědčíme dosazením z rovnice (7.7). Přitom pamatujeme, že

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial (\varepsilon_{kk} \delta_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ij} \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial (\varepsilon_{kk} \varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2 \varepsilon_{ij} \quad (7.12)$$

a že pro  $\sigma_{ij}$  platí rovnice (6.13).

Potenciálem poměrných deformací je v teorii pružnosti hustota komplementární energie napjatosti  $\tilde{\Lambda}$ , pro kterou musí platit, že

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad (7.13)$$

Hustotu komplementární energie napjatosti  $\tilde{\Lambda}$  proto považujeme za funkci napětí  $\sigma_{ij}$ . Pro poměrné deformace platí vztah (4.10). Podle rovnic (7.13) a (7.9) pak usoudíme, že

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda} &= \Lambda + \alpha (T - T_0) \sigma_{kk} = \\ &= \Lambda + \alpha (T - T_0) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\end{aligned}\quad (7.14)$$

Za  $\Lambda$  dosazujeme na pravou stranu (7.14) z rovnice (7.9).

Máme tedy podobně jako v teorii pružnosti deformační energii, jejíž hustota je dána vztahem (7.7), a pak komplementární energii napjatosti s hustotou podle (7.14). V teorii pružnosti jsou obě tyto duální energie stejné, pokud platí Hookeův zákon. V teorii termoelastivity se obě energie liší i tehdy, platí-li Duhamelův - Neumannův zákon, tj. v lineární oblasti, a to o člen  $\alpha (T - T_0) \sigma_{kk}$  [srovnej s rovnicí (7.14)].

Je-li hustota deformační energie  $\Lambda$ , pak celková deformační energie v tělese je

$$U = \iiint_V \Lambda \, dV \quad (7.15)$$

Podle známého principu virtuálních prací se virtuální práce akčních sil (povrchových sil  $f_i$  a objemových sil  $X_i$ ) rovná virtuální změně (variaci) celkové deformační energie, takže  $\ast$ )

$$\delta U = \iint_S \bar{f}_i \delta u_i \, dS + \iiint_V X_i \delta u_i \, dV \quad (7.16)$$

Přitom podle (7.10) a (7.15)

$$\delta U = \iiint_V \delta \Lambda \, dV = \iiint_V \frac{\partial \Lambda}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} \, dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \, dV \quad (7.17)$$

Z Cauchyho vztahu (6.14) dále vypočteme

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{ij} + \delta u_{ji}) \quad (7.18)$$

Rovnice (7.17) a (7.18) říkají, jak získáme variaci deformační energie  $\delta U$ , je-li dána variace posuvů  $\delta u_i$ .

---

$\ast$ ) Mají-li akční síly potenciál, vyjadřuje rovnice (7.16) Lagrangeův variační princip minima celkové potenciální energie. V dalším textu předpokládáme, že na povrchu nejsou předepsány nenulové posuvy.

K Lagrangeově variačním principu (7.16) existuje ve statice princip minima komplementární energie napjatosti

$$\tilde{U} = \iiint \tilde{\Lambda} dV \quad (7.19)$$

Podle něho je variace komplementární energie napjatosti nulová

$$\delta \tilde{U} = 0 \quad (7.20)$$

pokud je virtuální komplementární práce předepsaných posuvů také nulová, jak tomu nejčastěji bývá. \*) Je to Castiglianův variační princip.

Rovnice (7.16) je základem deformačních, princip (7.20) silových metod přibližného řešení úloh termoelastivity.

### Příklad 15

Dokažte, že pro dvě nezávislá pole  $u_i(x_k)$ ,  $\sigma_{ij}(x_k)$  platí vztah

$$\iint_S \sigma_{ij} u_i n_j dS = \iiint_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV \quad (a)$$

### Řešení

Označíme  $\sigma_{ij} u_i = v_j$ , což je vektor o složkách  $v_1, v_2, v_3$ . Pak podle Gaussovy věty

$$\iint_S v_j n_j dS = \iiint_V v_{j,j} dV \quad (b)$$

Podle pravidla o derivování součinu však platí, že

$$v_{j,j} = \sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j} \quad (c)$$

Dosazením (c) do (b) dostaneme (a). Poznamenejme ještě, že tenzor napjatosti je souměrný, takže s pomocí (6.14) dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} u_{i,j} &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j} + \frac{1}{2} \sigma_{ji} u_{j,i} = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (d)$$

---

\*) To objasní příklad 17.

Proto lze rovnici (a) upravit takto:

$$\iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \iint_S \sigma_{ij} u_i n_j dS - \iiint_V \sigma_{ij,j} u_i dV \quad (e)$$

Vztah (e) platí pro jakékoli geometricky kompatibilní pole posuvů  $u_i$  a poměrných deformací  $\varepsilon_{ij}$  [tzn. splňující Cauchyho kinematické vztahy (6.14)] a jakékoli nezávislé pole napjatosti  $\sigma_{ij}$  (nezávislé na  $\varepsilon_{ij}$ ).

### Příklad 16

V rovnici (e) z předchozího příkladu zvolte za pole posuvů variaci  $\delta u_i$  a jí příslušné poměrné deformace  $\delta \varepsilon_{ij}$  a ukažte, že odtud plyne rovnice (7.16).

### Řešení

Podle (7.17) bude

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta U \quad (a)$$

Pak ještě dosadíme z rovnic (6.17) a (6.15) a dostaneme (7.16).

### Příklad 17

V rovnici (e) z příkladu 15 zvolte za  $\sigma_{ij}$  variaci  $\delta \sigma_{ij}$  a ukažte, že odtud dostanete variační princip (7.20).

### Řešení

Protože

$$\delta \tilde{U} = \iiint_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV \quad (a)$$

vyjde

$$\delta \tilde{U} = \iint_S u_i n_j \delta \sigma_{ij} dS - \iiint_V u_i \delta \sigma_{ij,j} dV \quad (b)$$

S použitím (6.15) a (6.17) dostaneme

$$\delta \tilde{U} = \iint_{S_G} u_i \delta f_i dS - \iiint_V u_i \delta \chi_i dV \quad (c)$$

Avšak  $f_i$  jsou předepsané síly na povrchu  $S$  a  $X_i$  jsou předepsané objemové síly. Variace těchto veličin je proto nulová (nepřipouštíme ji). Pokud na povrchu nepředepisujeme nenulové posuvy, je nakonec

$$\delta \tilde{U} = 0 \quad (d)$$

To však je rovnice (7.20). Při tomto odvození jsme předpokládali, že na povrchu  $S = S_\sigma \cup S_u$  jsou na části  $S_\sigma$  předepsány měrné povrchové síly  $f_i = \bar{f}_i$  (vektor napětí) a na zbývající části  $S_u$  povrchu je předepsán nulový posuv  $\bar{u}_i$ , takže

$$\iint_S u_i \delta f_i dS = \iint_{S_\sigma} u_i \delta \bar{f}_i dS + \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta f_i dS = 0 \quad (e)$$

První člen na pravé straně rovnice (e) odpadá, protože  $\delta \bar{f}_i = 0$ . Druhý člen odpadá, pokud  $\bar{u}_i = 0$  na  $S_u$ . Kdyby tato podmínka neplatila, bylo by

$$\delta \tilde{U} = \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta f_i dS \quad (f)$$

Na pravé straně rovnice (f) je virtuální komplementární práce předepsaných posuvů.

### Příklad 18

Dokažte, že princip virtuálních prací (7.16) je ekvivalentní se soustavou diferenciálních rovnic rovnováhy a s okrajovými podmínkami na  $S_\sigma$ .

### Řešení

S použitím výsledků z příkladů 14 a 15 a pomocí vztahu (7.17) upravíme rovnici (7.16) na tvar

$$\iint_{S_\sigma} (\sigma_{ij} m_j - f_i) \delta u_i dS = \iiint_V (\sigma_{ij,j} + X_i) \delta u_i dV \quad (a)$$

Protože variace  $\delta u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jsou libovolné (až na nepodstatná omezení, viz např. /10/), musí být výrazy v obléhých závorkách nulové. Tím získáme hledané ekvivalentní rovnice. Vztah (7.16) zřejmě představuje kompaktní vyjádření celé soustavy rovnic (6.15) a (6.17).

## 8. NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ ÚLOH TERMOELASTICITY

Podstata numerických metod řešení úloh z mechaniky kontinua spočívá v tom, že se fyzikální pole v definiční oblasti (thermoelastickém tělese) přibližně popíše nějakou soustavou algebraických rovnic s konečným počtem neznámých, která nahrazuje podle zvoleného kritéria rigorózní soustavu parciálních diferenciálních rovnic. Může se tak stát např. tím, že přejdeme od diferenciálních rovnic k diferenčním rovnicím (metoda sítí), nebo tím, že těleso s nekonečně mnoha stupni volnosti nahradíme mechanickou soustavou s konečným počtem těchto stupňů (metoda fyzikální diskretizace, Ritzova metoda aj.).

Probereme podrobně Ritzovu metodu, jejímž zvláštním případem je i deformační varianta metody konečných prvků. Vektor zobecněných posuvů  $\{u(x, y, z)\}$ , tedy neznámé vektorové pole, napíšeme ve tvaru

$$\{u(x, y, z)\} = [A(x, y, z)]\{q\} \quad (8.1)$$

kde  $[A]$  je matice zvolených bázevých funkcí a  $\{q\}$  je vektor neznámých parametrů. Rovnice (8.1) platí jen přibližně. Parametry ve vektoru  $\{q\}$  vybereme tak, aby byla tato přibližnost v jistém smyslu co největší. Za neznámé parametry můžeme zvolit zobecněné posuvy konečného počtu bodů vybraných z definiční oblasti, ale obecně to není nutné. Původní pole  $\{u\}$  je dáno, známe-li zobecněné posuvy v každém z nekonečně mnoha bodů  $(x, y, z)$  definiční oblasti. Rovnice (8.1) toto pole poněkud zjednodušuje; zobecněné posuvy zde počítáme užitím pouze konečného počtu prvků vektoru  $\{q\}$ , a to pomocí předem zvolených funkcí, z nichž je sestavena matice  $[A]$ . Obecně se toto pole od původního poněkud liší. Vztah (8.1) předepisuje kinematiku pohybu všech bodů tělesa, je-li vektor  $\{q\}$  dán. Volnost pohybu tělesa je tak uměle omezena na počet stupňů volnosti odpovídající počtu prvků ve vektoru  $\{q\}$ . Rovnice (8.1) představuje matematický model, kterým popisujeme - ovšem jen přibližně - fyzikální model tělesa s nekonečně mnoha stupni volnosti. Protože pohyb matematického modelu je zde dán pohybem oddělených (= diskrétních) bodů, popř. konečným počtem jiných parametrů, mluvíme o diskrétní soustavě, o diskretizovaném modelu, popř. o soustavě se soustředěnými parametry.

Je-li pole posuvů  $\{u\}$  známo, můžeme z něho podle vztahů (6.14) vypočítat poměrné deformace. Nejde-li o posuvy v kartézských souřadnicích, ale o zobecněné posuvy  $\times$ ), odvodíme z nich zobecněné poměrné deformace. Vycházíme-li přitom z aproximace (8.1) skutečného pole zobecněných posu-

---

$\times$ ) Bližší výklad obsahuje např. /18/.

vů, budou tyto zobecněné poměrné deformace  $\{\varepsilon\}$  záviset rovněž na vektoru  $\{q\}$ . Dostaneme vztah

$$\{\varepsilon(x, y, z)\} = [B(x, y, z)]\{q\} \quad (8.2)$$

Matice  $[B]$  je odvozena z matice  $[A]$  a obsahuje jen známé funkce souřadnic.

Duhamelův - Neumannův zákon (4.3) a (4.4) zapíšeme rovněž v maticovém tvaru. Bude

$$\{\sigma\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (8.3)$$

kde  $\{\varepsilon_0\}$  představuje vektor počátečních poměrných deformací a symbol  $[E]$  představuje matici elastických modulů. Podle (4.1) a (4.2) vyjde

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{z0} \\ \gamma_{xy0} \\ \gamma_{yz0} \\ \gamma_{zx0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha (T - T_0) \\ \alpha (T - T_0) \\ \alpha (T - T_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.4)$$

Půjde-li o zobecněné poměrné deformace, dostaneme jiný, ale obdobný vztah pro počáteční zobecněné hodnoty. To ukážeme později (viz příklad 19). Vektor  $\{\varepsilon_0\}$  odpovídá teplotním dilatacím v uvolněných elementárních hranolcích tělesa, pro něž  $\{\sigma\} = \{0\}$ . Kdyby se těleso naopak nemohlo vůbec deformovat, bylo by  $\{\varepsilon\} = \{0\}$  a z rovnice (8.3) by vyšel vektor počátečních napětí

$$\{\sigma_0\} = -[E]\{\varepsilon_0\} \quad (8.5)$$

Rovnici (8.3) bychom pak mohli napsat ve tvaru

$$\{\sigma\} - \{\sigma_0\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (8.6)$$

Rovnice (8.3) a (8.6) jsou rovnocenné.

Nechť nyní na těleso působí objemové síly  $\{X\}$  a na část povrchu  $S_\sigma$  předepsané povrchové měrné síly  $\{f\}$  (vektor napětí). Kromě toho ať působí v referenčních uzlových bodech soustředěné zobecněné síly  $\{f_0\}$ . Z principu virtuálních prací (7.16) pak dostáváme



$$\iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \iint_{S_\sigma} \{\delta u\}^T \{\bar{f}\} dS +$$

$$+ \iiint_V \{\delta u\}^T \{X\} + \{\delta q\}^T \{f_v\}$$

(8.7)

Variace vektoru  $\{\delta u\}$ , resp.  $\{\delta \varepsilon\}$ , musí respektovat omezení stupně volnosti dané rovnicí (8.1), resp. (8.2). Bude proto

$$\{\delta u\} = [A] \{\delta q\} \quad \{\delta \varepsilon\} = [B] \{\delta q\} \quad (8.8)$$

Dosadíme-li (8.8) do (8.7), dostaneme

$$\{\delta q\}^T \iiint_V [B]^T \{\sigma\} dV = \{\delta q\}^T \iint_{S_\sigma} [A]^T \{\bar{f}\} dS +$$

$$+ \{\delta q\}^T \iiint_V [A]^T \{X\} dV + \{\delta q\}^T \{f_v\}$$

(8.9)

Za vektor  $\{\sigma\}$  dosadíme z rovnice (8.3) a za  $\{\varepsilon\}$  ze vztahu (8.2). Po úpravě dostaneme

$$\{\delta q\}^T [K] \{q\} = \{\delta q\}^T \{f\} \quad (8.10)$$

kde

$$[K] = \iiint_V [B]^T [E] [B] dV \quad (8.11)$$

$$\{f\} = \{f_\varepsilon\} + \{f_v\} + \{f_T\} + \{f_u\} \quad (8.12)$$

$$\{f_\varepsilon\} = \iint_{S_\sigma} [A]^T \{\bar{f}\} dS \quad (8.13)$$

$$\{f_v\} = \iiint_V [A]^T \{X\} dV \quad (8.14)$$

$$\{f_T\} = \iiint_V [B]^T [E] \{\epsilon_0\} dV = - \iiint_V [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad (8.15)$$

Zde  $[K]$  značí matici tuhosti,  $\{f_s\}$  vektor sil ekvivalentních předepsaným povrchovým silám,  $\{f_v\}$  vektor ekvivalentní objemovým silám a  $\{f_T\}$  vektor sil představujících účinek teplotního pole. Vektor  $\{f_v\}$  představuje osamělé síly připojené v uzlových bodech. Protože variaci  $\{\delta q\}$  můžeme zvolit jakkoli, musí platit vztah

$$[K] \{q\} = \{f\} \quad (8.16)$$

má-li být rovnice (8.10) splněna. Je-li těleso podepřeno tak, že se nemůže jako tuhý celek pohybovat (může se však deformovat), a je-li toto omezení už zahrnuto do aproximace (8.1), je matice tuhosti  $[K]$  pozitivně definitní a je možno ji invertovat. Pak

$$\{q\} = [K]^{-1} \{f\} \quad (8.17)$$

Známe-li  $\{q\}$ , vypočteme z rovnic (8.2)  $\{\epsilon\}$  a z rovnice (8.3), popř. (8.6), napětí  $\{\sigma\}$ . Vyjde

$$\{\sigma(x, y, z)\} = [E][B(x, y, z)]\{q\} + \{\sigma_0(x, y, z)\} \quad (8.18)$$

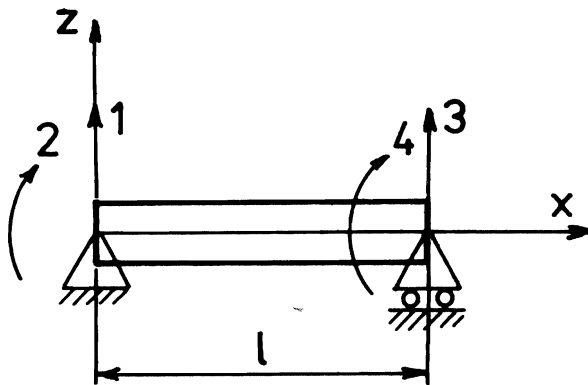
Vektor počátečních napětí  $\{\sigma_0\}$  představuje teplotní pnutí, které by vzniklo v tělese, jehož zobecněné posuvy  $\{q\}$  by byly nulové. To je zřejmé z rovnice (8.18), dosadíme-li tam  $\{q\} = \{0\}$ . V tom případě jsou však - podle (8.1) - posuvy nulové všude. Počáteční napětí  $\{\sigma_0\}$  vznikají tedy účinkem teploty v tělese, které se nedeformuje (deformaci je úplně zabráněno).

Nevzniká-li teplotní pnutí, jsou  $\{\sigma_0\}$ ,  $\{\epsilon_0\}$ ,  $\{f_T\}$  nulové vektory. Rovnice (8.3), popř. (8.6), pak přejde v zobecněný Hookeův zákon.

Vybereme-li báze funkce tak, že jsou nenulové jen v blízkém okolí uzlového bodu, k němuž se vztahuje příslušný zobecněný posuv, dostaneme metodu konečných prvků. Postupuje se však obráceně: daná oblast se nejprve rozdělí na podoblasti - konečné prvky - a v nich se volí tvarové (interpolační, "násové") funkce, nejčastěji ve tvaru polynomů. Z těch se pak sestavují báze funkce s uvedenou vlastností. Podrobnostmi se zde nebudeme zabývat; čtenáře odkazujeme na specializovanou literaturu, v níž se lze poučit nejen o základních principech metody konečných prvků, ale i o způsobu realizace výpočtů na počítači /3/, /8/. O jiných metodách, zvláště o metodě hraniční (okrajové) integrace, se lze poučit v literatuře /36/.

### Příklad 19

Nahraďte rovnoměrně zatížený prizmatický nosník podle obr. 7 mate-



OBR.7

matickým modelem o čtyřech stupních volnosti. Pak předepište okrajové podmínky odpovídající prostému podepření nosníku (kloubové podpory nebránící osové dilataci umístěné na koncích nosníku). Rozdělení teploty předpokládejte nezávislé na souřadnicích  $x$ ,  $y$ , avšak lineárně závislé na souřadnici  $z$ . Nosník je souměrný k rovině ohybu  $x$ ,  $z$ .

### Řešení

Vyjdeme-li z jednoduché Bernoulliho - Navierovy teorie ohybu, budeme moci popsat veškeré deformace nosníku průhybovou čarou, tj. posuvy  $w(x)$  bodů na jeho střednici. Za zobecněné posuvy  $\{q\}$  vezmeme posuvy a úhly otočení v koncových řezech nosníku na obr. 7, kde jsou příslušné stupně volnosti označeny číslicemi 1 až 4. S přihlédnutím k obr. 7 definujeme  $\{q\}$  takto:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(0) \\ -w'(0) \\ w(l) \\ -w'(l) \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Aproximaci průhybové čáry zvolíme ve tvaru kubického polynomu

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (b)$$

v němž jsou čtyři neznámé koeficienty (jejich počet souhlasí s počtem prvků ve vektoru  $\{q\}$ ). Určíme je tak, aby byla splněna rovnice (a). Vztah (8.1) pak bude mít tvar

$$w(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (c)$$

Zobecněné posuvy  $q_1$ ,  $q_3$  jsou skutečné posuvy v podporách. Jsou ovšem nulové, ale tuto podmínku zahrneme do výpočtu později. V rovnici (c) bude

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & \varphi_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ \varphi_2 &= -x + 2\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} & \varphi_4 &= \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \end{aligned} \quad (d)$$

Za zobecněnou poměrnou deformaci bereme křivost, takže

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon(x)\} = \left\{ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\} = \frac{d^2}{dx^2} \{w(x)\} \quad (e)$$

a za zobecněné napětí ohybový moment  $\varkappa$ )

$$\{\sigma\} = \{\sigma(x)\} = \{M(x)\} \quad (f)$$

Matice elastických modulů bude prvního řádu a bude mít tvar

$$[E] = [E J_y] \quad (g)$$

kde  $E J_y$  značí ohybovou tuhost. Dosadíme-li (c) do rovnice (e), dostaneme rovnici (8.2), v níž

$$[B(x)] = [\varphi_1''(x), \varphi_2''(x), \varphi_3''(x), \varphi_4''(x)] \quad (h)$$

---

$\varkappa$ ) Takže deformační energie v elementu nosníku o délce  $dx$  je

$$dU = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dx.$$

S použitím (b) vypočteme

$$\varphi_1'' = -6 \frac{1}{l^2} + 12 \frac{x}{l^3}$$

$$\varphi_3'' = 6 \frac{1}{l^2} - 12 \frac{x}{l^3}$$

$$\varphi_2'' = 4 \frac{1}{l} - 6 \frac{x}{l^2}$$

$$\varphi_4'' = 2 \frac{1}{l} - 6 \frac{x}{l^2}$$

Čárkou značíme derivaci podle  $x$ . "Objem" nosníku představuje otevřený interval  $0 < x < l$  a "povrch" jsou koncové body  $x=0$ ,  $x=l$  tohoto intervalu, v nichž je předepsán nulový průhyb. Objemové síly tedy jsou

$$\{X\} = \{(-q)\} \quad (i)$$

kde  $q$  je předepsané délkové zatížení. Nezaměňuj délkové zatížení  $q$  se zobecněnými posuvy  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$ . Předpokládáme, že  $q$  je konstantní a směřuje dolů (proti smyslu osy  $z$ ). Povrchové síly nejsou předepsány.

Vypočteme ještě vektor počátečních teplotních napětí  $\{\sigma_0\}$ . Je to ohybový moment, který vznikne v nosníku vlivem nerovnoměrného rozdělení teploty, zabráníme-li jeho deformaci. Protože je dán průběh teplotních rozdílů

$$T(z) - T_0 = kz \quad (j)$$

kde  $k$  je známá konstanta, bude hledaný ohybový moment

$$\begin{aligned} M_T &= \iint_S E\alpha [T(z) - T_0] z dS = \\ &= E\alpha k \iint_S z^2 dS = EJ_y \alpha k \end{aligned} \quad (k)$$

Je-li  $\Delta T$  rozdíl teplot krajních vláken nosníku a  $h$  jejich vzdálenost (výška nosníku), je  $k = \Delta T/h$ . Takže

$$M_T = \frac{EJ_y \alpha \Delta T}{h} \quad (l)$$

Pak  $\equiv$ )

$$\{G_0\} = \{M_T\} \quad (m)$$

Nyní již můžeme vypočítat matici tuhosti podle rovnice (8.11). Vyjde

$$[K] = \frac{2EJ_y}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 \\ -6 & 3l & 6 & 3l \\ -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (n)$$

Dále vypočteme vektor sil ekvivalentních objemovým silám podle vztahu (8.14). Dostaneme

$$\{f_v\} = \left[ -\frac{q_l}{2}, \frac{q_l l^2}{12}, -\frac{q_l}{2}, -\frac{q_l l^2}{12} \right]^T \quad (o)$$

A konečně vzorec (8.15) dá

$$\{f_T\} = [0, -M_T, 0, M_T]^T \quad (p)$$

Rovnici (8.16) můžeme zapsat symbolicky takto

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (q)$$

Protože matice tuhosti je singulární, nelze odtud zobecněné posuvy  $\{q\}$  vypočítat. Nejprve musíme vyloučit pohyb nosníku jako tuhého celku, tj. předepsat jeho podepření podmínkami

---

$\equiv$ ) Je tedy  $\{\varepsilon_0\} = \left\{ -\frac{\alpha \Delta T}{h} \right\}$ , srovnej s rovnicí (8.5). Horní vlákno má vyšší teplotu než spodní, pokud  $\Delta T > 0$ .

$$q_1 = 0 \quad q_3 = 0 \quad (r)$$

Protože se těmito nulami násobí v rovnici (q) první a třetí sloupec, můžeme tyto sloupce vynechat a psát

$$\begin{bmatrix} k_{12} & k_{14} \\ k_{22} & k_{24} \\ k_{32} & k_{34} \\ k_{42} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (s)$$

Síly  $f_1$ ,  $f_3$  mají význam reakcí v podporách a pro začátek nás nezajímají. Vynecháme tedy i první a třetí řádek a dostaneme

$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{24} \\ k_{42} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (t)$$

To je již regulární problém, neboť matice tuhosti je v této rovnici pozitivně definitní. Rozpisem dostaneme maticovou rovnici pro dvě neznámé

$$\frac{2EJ_y}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q l^2}{12} & -M_T \\ -\frac{q l^2}{12} & +M_T \end{Bmatrix} \quad (u)$$

s řešením

$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \frac{l}{6EJ_y} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{q l^2}{12} & -M_T \\ -\frac{q l^2}{12} & +M_T \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{l}{14EJ_y} \begin{Bmatrix} q l^2 & -12 M_T \\ -q l^2 & +12 M_T \end{Bmatrix} \quad (v)$$

Zobecněné souřadnice  $q_2$ ,  $q_4$  znamenají úhly otočení v podporách. Za kladné bereme ty, jejichž smysl se shoduje se smyslem otáčení hodinových ručiček (srovnej s obr. 6). Je tedy

$$q_2 = -q_4 = \frac{q\ell^3}{24 E J_y} - \frac{\ell \alpha \Delta T}{2h}$$

$$q_1 = q_3 = 0$$

(w)

Tento výsledek je přesný, jak se snadno přesvědčíme, ale aproximace (c) přesná není, pokud  $q \neq 0$ . Skutečný průhyb je dán parabolou čtvrtého stupně, je-li  $q = \text{konst.}$  V daném případě dostaneme z rovnice (c) dokonce jen kvadratickou parabolou, neboť kubické členy se zruší. Vyjde totiž

$$w(x) = -x(\ell-x) \left( \frac{q\ell^3}{24 E J_y} - \frac{\ell \alpha \Delta T}{2h} \right)$$

(x)

s největším průhybem uprostřed

$$\delta = -w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q\ell^4}{96 E J_y} - \frac{\ell^2 \alpha \Delta T}{8h}$$

(y)

Přesná hodnota tohoto průhybu však je

$$\delta = \frac{q\ell^4}{76,8 E J_y} - \frac{\ell^2 \alpha \Delta T}{8h}$$

(z)

Část průhybu způsobená nerovnoměrným teplotním polem vyšla přesně, zbývající část odpovídající délkovému zatížení vyšla přibližně. Z rovnice (s) vypočteme reakce v podporách

$$f_1 = \frac{q\ell}{2} \quad f_2 = 0 \quad f_3 = \frac{q\ell}{2} \quad f_4 = 0$$

a z rovnice (8.18) zobecněné napětí. Využijeme přitom toho, že  $q_1 = 0$ ,  $q_3 = 0$ . S přihlédnutím k definici (f) vyjde

$$M = E J_y [\varphi_2'', \varphi_4''] \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix} + \{\sigma_0\} = \frac{q\ell^2}{12}$$

Teplotní pnutí je nulové. Je to důsledek toho, že teplota je rozdělena lineárně a teplotnímu prohnutí nosníku ani jeho osovému roztažení nic ne-

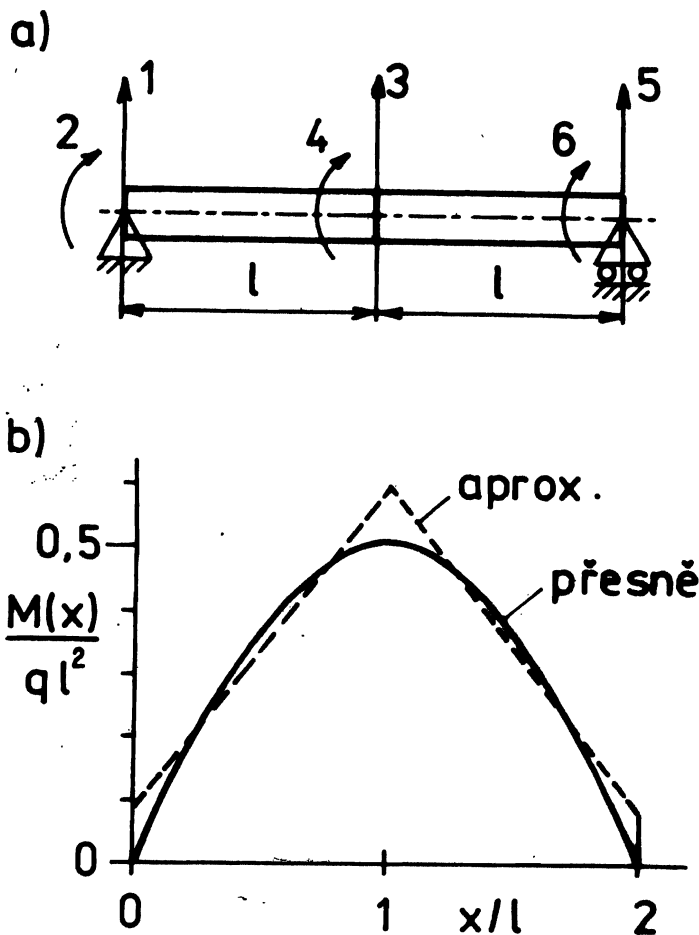


brání. Osovou dilataci jsme však výpočtem nepostihli, neboť jsme neza-  
vedli ve směru osy nosníku žádný zobecněný posuv ani sílu a pro osové po-  
suvy nemáme žádnou aproximaci. Ohybový moment  $M$  vyšel konstantní,

$M = ql^2/12$ , ačkoli se ve skutečnosti mění podle paraboly v mezích  
od nuly do  $ql^2/8$ . Tato velká nepřesnost je důsledkem toho, že se  
v matici  $[B]$  vyskytují druhé derivace interpolačních funkcí. Derivová-  
ním se každá nepřesnost zvětšuje. Kdybychom chtěli dostat přesnější vý-  
sledky, musili bychom nosník rozdělit na několik prvků. To nyní ukážeme.

### Příklad 20

Řešte úlohu z příkladu 19, avšak nosník rozdělte na dva stejně dlou-  
hé prvky podle obr. 8a, takže nepodepřený nosník (jeho matematický model)  
bude mít šest stupňů volnosti.



OBR. 8

## Řešení

Použijeme výsledků odvozených v příkladu 19. Pro levý prvek (pro levou polovinu nosníku) bude platit rovnice (q) z příkladu 19 s tou změnou, že místo zobecněných sil  $f_3$ ,  $f_4$  zde budou působit síly  $f_3^{(1)}$ ,  $f_4^{(1)}$  připadající na levý nosníkový prvek. Bude tedy

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3^{(1)} \\ f_4^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

Druhý nosníkový prvek bude mít stejnou matici tuhosti, avšak stupně volnosti budou mít indexy 3 až 6. Takže

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_3^{(2)} \\ f_4^{(2)} \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{b})$$

Zde  $f_3^{(2)}$ ,  $f_4^{(2)}$  představují zobecněné síly připadající na druhý prvek (na pravou polovinu nosníku). Protože

$$f_3 = f_3^{(1)} + f_3^{(2)} \quad f_4 = f_4^{(1)} + f_4^{(2)} \quad (\text{c})$$

budeme moci složit vztahy (a) a (b) platné pro jednotlivé nosníkové prvky do jednoho vztahu platného pro celou soustavu. Vyjde  $\times$ )

---

$\times$ ) Rozepsáním se lze přesvědčit, že platí-li (a) až (c), platí i rovnice (d).

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & (k_{33}+k_{11}) & (k_{34}+k_{12}) & k_{13} & k_{14} \\ k_{41} & k_{42} & (k_{43}+k_{21}) & (k_{44}+k_{22}) & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

Po dosazení z rovnice (n) příkladu 19 bude

$$\frac{2EJ_y}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l & -6 & -3l & 0 & 0 \\ -3l & 2l^2 & 3l & l^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3l & 12 & 0 & -6 & -3l \\ -3l & l^2 & 0 & 4l^2 & 3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3l & 6 & 3l \\ 0 & 0 & -3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

Protože  $q_1 = 0$ ,  $q_5 = 0$ , vynecháme v rovnici (e) první a pátý řádek a v matici tuhosti první a pátý sloupec (násobí se totiž nulami). Zbude

$$\frac{2EJ_y}{l^3} \begin{bmatrix} 2l^2 & 3l & l^2 & 0 \\ 3l & 12 & 0 & -3l \\ l^2 & 0 & 4l^2 & l^2 \\ 0 & -3l & l^2 & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

S použitím vztahů (o) a (p) z příkladu 19 sestavíme vektor pravé strany poslední rovnice pro případ, že  $q_4 = \text{konst.}$  a  $M_T = \text{konst.}$  Dostaneme

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} ql^2/12 \\ -ql/2 \\ -ql^2/12 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -M_T \\ 0 \\ M_T \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{zatěhuje levý prvek}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -ql/2 \\ ql^2/12 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_T \\ M_T \end{Bmatrix}}_{\text{zatěhuje pravý prvek}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} ql^2/12 - M_T \\ -ql \\ 0 \\ -ql^2/12 + M_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql^2/12 - EJ_y \alpha \Delta T / h \\ -ql \\ 0 \\ -ql^2/12 + EJ_y \alpha \Delta T / h \end{Bmatrix} \quad (g)$$

Řešením soustavy (f) dostaneme

$$q_2 = -q_6 = \frac{ql^3}{3EJ_y} - \frac{l\alpha\Delta T}{h}$$

$$q_3 = -\frac{5ql^4}{24EJ_y} + \frac{l^2\alpha\Delta T}{2h} \quad q_4 = 0 \quad (h)$$

Tyto hodnoty jsou přesné. Aproximace

$$w(x) = [\varphi_2(x), \varphi_3(x)] \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (0 < x < l)$$

$$w(x) = [\varphi_1(x-l), \varphi_4(x-l)] \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (l < x < 2l) \quad (i)$$

je opět nepřesná, avšak chyba je nepatrná. Ohyb způsobený nerovnoměrným rozdělením teploty je popsán kvadratickou parabolou, takže je v příkladu 19 i 20 aproximován bez chyby. Působí-li na nosník pouze délkové zatížení  $q = \text{konst.}$  (takže  $\Delta T = 0$ ), je ohybová čára popsána polynomem čtvrtého stupně. Přibližné řešení ji nahrazuje dvěma oblouky kubických parabol souměrnými k řezu ve vzdálenosti  $x = l$ . Srovnání přesného a přibližného řešení je v tomto případě zřejmé z tab. 3.

$x/l$		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
aprox.	$-\frac{24 EJ_y W}{q l^4}$	0	1,544	2,912	4,008	4,736	5
přesně		0	1,570	2,970	4,065	4,762	5

Vycházíme-li z principu virtuálních prací\*), jsou aproximované průhyby (v absolutní hodnotě) vždy menší nebo nejvýš stejné jako přesné průhyby. Zobecněné napětí (tj. ohybový moment v nosníku) dostaneme podle vzorce (8.18) pro  $0 < x \leq l$  ve tvaru

$$\begin{aligned}
 M &= EJ_y [\varphi_2''(x), \varphi_3''(x)] \left\{ \begin{matrix} q_2 \\ q_3 \end{matrix} \right\} + \{ \sigma_0 \} = \\
 &= EJ_y \left[ \left( \frac{4}{l} - 6 \frac{x}{l^2} \right) \left( \frac{q l^3}{3 EJ_y} - \frac{l \alpha \Delta T}{h} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{6}{l^2} - 12 \frac{x}{l^3} \right) \left( -\frac{5 q l^4}{24 EJ_y} + \frac{l^2 \alpha \Delta T}{2h} \right) \right] + \\
 &\quad + \frac{EJ_y \alpha \Delta T}{h} = \frac{q l^2}{12} + \frac{q l}{2} x \quad (j)
 \end{aligned}$$

V intervalu  $l \leq x < 2l$  je průběh souměrný. Srovnání přesného a přibližného průběhu ohybových momentů je sřejmá z obr. 8b. Přesnost řešení se tedy podstatně zvýšila, ačkoli jsme nosník rozdělili pouze na dva prvky.

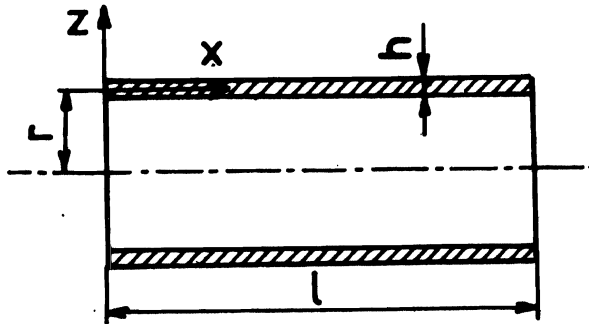
V příkladech 19 a 20 jsme zvolili velmi jednoduché zadání, aby bylo možné průběh řešení podrobně sledovat i bez výpočetní techniky. Výhoda metody konečných prvků se ovšem uplatní teprve u rozsáhlých a složitých úloh, u nichž bychom s ručním výpočtem nevystačili.

## 9. ROTAČNĚ SYMETRICKÁ TENKOSTĚNNÁ TRUBKA

Budeme předpokládat, že střední poloměr trubky je  $r$  a tloušťka stěny  $h$ . Teplota v trubce je konstantní;  $T = T_0$ , tj. nezávisí ani na souřadnicích, ani na čase. Počátek souřadnic zvolíme v okrajovém průřezu

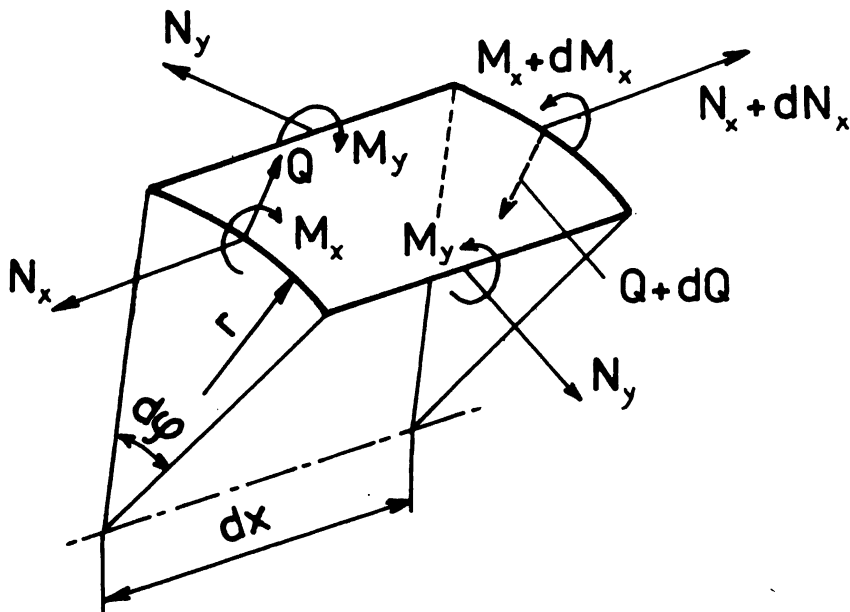
\*) Převedeme-li oba členy pravé strany rovnice (7.16), které představují variaci potenciální energie akčních sil (se záporným znaménkem), na levou stranu, dostaneme podmínku stacionární hodnoty (minima) celkové potenciální energie, což je Lagrangeův variační princip. Jím lze odůvodnit uvedené ohraničení.

v některém bodě na obvodu střední plochy (obr. 9). V osovém směru bude



OBR. 9

souřadnice  $x$ , v obvodovém  $y$  (měřená po oblouku) a v radiálním směru  $z$ . Protože souřadnici  $y$  měříme po oblouku, nejde o kartézské souřadnice. Vzhledem k rotační symetrii nebude žádná veličina záviset na  $y$ , takže půjde o dvourozměrnou úlohu na definiční oblasti  $0 \leq x \leq l$ ,  $-(h/2) \leq z \leq (h/2)$ . Závislosti na souřadnici  $z$  se zbavíme tím, že budeme předpokládat, že body na normále ke střední ploše zůstanou na této normále i po deformaci střední plochy (Kirchhoffova hypotéza). Kromě toho zanedbáme napětí  $\sigma_z$  i smykové deformace. Pro momenty a síly zakreslené na obr. 10 pak budou platit tyto konstitutivní vztahy /34/:



OBR. 10

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{du}{dx} + \mu \frac{w}{r} \right) \\
 N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{w}{r} + \mu \frac{du}{dx} \right) \\
 M_x &= D \frac{d^2w}{dx^2} \qquad M_y = \mu M_x
 \end{aligned}
 \tag{9.1}$$

Pro ohybovou tuhost  $D$  přitom platí vztah

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}
 \tag{9.2}$$

Takto zjednodušená teorie vystihuje složitou skutečnost jen tehdy, je-li  $h \ll r$ , tj. je-li trubka tenkostěnná. Přitom  $u$ , resp.  $w$ , značí posuv ve směru osy  $x$ , resp.  $z$ .

Předpokládáme, že v trubce působí vnitřní přetlak  $p$ . Pro síly a momenty podle obr. 10 pak platí tyto podmínky rovnováhy  $\kappa$ )

$$\begin{aligned}
 dN_x r dy &= 0 \\
 dQ r dy + N_y dx dy - p r dy dx &= 0 \\
 dM_x r dy - Q r dy dx &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.3}$$

Z první z těchto rovnic vyplývá, že  $N_x = \text{konst.}$  Z druhé a ze třetí rovnice vyloučíme posouvající sílu  $Q$ . Dostaneme

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{1}{r} N_y = p
 \tag{9.4}$$

Když sem dosadíme z rovnic (9.1), vyjde diferenciální rovnice čtvrtého řádu

$$D \frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Eh}{r^2} w = p - \mu \frac{1}{r} N_x
 \tag{9.5}$$

---

$\kappa$ ) Síly a silové dvojice se v teorii desek a skořepin vztahují k jednotce délky příslušného řezu střední plochy. Viz např. /34/.

Protože jde o lineární rovnici, můžeme použít princip superpozice a partikulární řešení

$$w_{\text{part}} = -\frac{\mu}{E} \frac{r}{h} N_x \quad (9.6)$$

platné pro zatížení trubky konstantní osovou silou oddělit od řešení platného pro trubku bez osové síly. Pro  $N_x = 0$  budeme mít

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{r^2} w = p \quad (9.7)$$

Nyní úlohu zobecníme pro případ, že v trubce existuje nerovnoměrně rozdělená teplota  $T(x, z)$  daná vztahem

$$T(x, z) = T_0 + T_1(x) + \frac{2z}{h} T_2(x) \quad (9.8)$$

To znamená, že vnější stěna má teplotu  $T_0 + T_1 + T_2$  a vnitřní stěna  $T_0 + T_1 - T_2$ . Lineární průběh teploty napříč stěnou je možné předpokládat jen proto, že trubka je tenkostěnná. Pak ovšem  $T_0 + T_1$  značí teplotu střední plochy ve vzdálenosti  $x$  od levého okraje trubky a  $T_2$  poloviční rozdíl teplot obou povrchů v témže místě;  $T_0$  je referenční teplota, která do výpočtů nevstupuje.

Chceme-li zabránit teplotním deformacím, musíme připojit jednak obvodové a osové síly bránící obvodovému a osovému poměrnému prodloužení, jednak ohybové momenty bránící změnám křivosti; budou to tyto síly

$$N_{1x} = N_{1y} = -\frac{E\alpha h}{1-\mu} T_1(x) \quad (9.9)$$

a tyto ohybové momenty

$$M_{2x} = M_{2y} = \frac{E\alpha h^2}{6(1-\mu)} T_2(x) \quad (9.10)$$

Zároveň vzniknou teplotní napětí



$$\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = -\frac{E}{1-\mu} \left[ T_1(x) + \frac{2}{h} z T_2(x) \right] \quad (9.11)$$

složená z napětí tahových (tlakových) a ohybových.

Je zřejmé, že síla  $N_{1x}$  odporuje první z rovnic rovnováhy (9.3), pokud není  $T_1 = \text{konst.}$  Abychom rovnováhu obnovili, museli bychom připojit objemové síly působící ve směru osy  $x$ , které by byly úměrné derivaci  $dT_1/dx$ . Místo toho budeme předpokládat, že  $N_{1x} = 0$  a že se trubka může v osovém směru volně roztahovat. V tom případě bude

$$N_{1x} = 0 \quad N_{1y} = -E\alpha h T_1(x) \quad (9.12)$$

$$M_{2x} = M_{2y} = \frac{E\alpha h^2}{6(1-\mu)} T_2(x) \quad (9.13)$$

$$\sigma_{x0} = -\frac{2E\alpha}{(1-\mu)h} z T_2(x) \quad (9.14)$$

$$\sigma_{y0} = -E\alpha T_1(x) - \frac{2E\alpha}{(1-\mu)h} z T_2(x) \quad (9.15)$$

Síly a momenty podle (9.12) a (9.13) v trubce ve skutečnosti nepůsobí. Musíme je tedy odečíst, čímž trubku uvolníme. Zůstanou v ní pak už jen teplotní napětí. To znamená, že na okrajích  $x = 0$ ,  $x = l$  připojíme ohybové momenty

$$\begin{aligned} M_{Tx}(0) = -M_{2x}(0) &= -\frac{E\alpha h^2}{6(1-\mu)} T_2(0) \\ M_{Tx}(l) = -M_{2x}(l) &= -\frac{E\alpha h^2}{6(1-\mu)} T_2(l) \end{aligned} \quad (9.16)$$

To však ještě nestačí. Dosadíme-li do rovnice (9.4) za  $M_x$  výraz pro  $M_{2x}$  z rovnice (9.13) a za  $N_y$  výraz pro  $N_{1y}$  podle (9.12), dostaneme tlak  $p_T$ , který musí působit, má-li se udržet rovnováha. Vyjde

$$p_T = \frac{E\alpha h^2}{6(1-\mu)} \frac{d^2 T_2(x)}{dx^2} - \frac{E\alpha h}{r} T_1(x) \quad (9.17)$$

Tento tlak ve skutečnosti na skořepinu nepůsobí, takže jej musíme odečíst. \*)

Shrneme-li tyto poznatky, můžeme konstatovat, že pro trubku namáhanou teplotním polem  $T(x, z)$  podle rovnice (9.8) a vnitřním přetlakem  $p(x)$  platí diferenciální rovnice

$$D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{Eh}{r^2} w(x) = \bar{p}(x) \quad (9.18)$$

v níž

$$\bar{p}(x) = p(x) - p_T(x) \quad (9.19)$$

značí ekvivalentní zatížení respektující i vliv teplotního pole. Zároveň je nutné okraje trubky zatížit ohybovými momenty  $M_{Tx}(0)$ ,  $M_{Tx}(\ell)$  podle vztahu (9.16) a k vypočteným napětím

$$\sigma_x = -\frac{12}{h^3} M_x z \quad (9.20)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{h} N_y - \frac{12}{h^3} M_y z \quad (9.21)$$

připočítat počáteční hodnoty  $\sigma_{x0}$ ,  $\sigma_{y0}$  podle rovnic (9.14) a (9.15).

Některé ilustrativní příklady analytických řešení rovnice (9.18) lze nalézt ve zprávě /20/.

### Příklad 21

Trubka podle obr. 9 s volnými konci je zahřáta na teplotu, která probíhá po délce trubky lineárně a v tloušťce trubky je konstantní. Určete deformace trubky a teplotní napětí.

---

\*) Tento tlak až dosud bránil radiálním posuvům.

## Řešení

V tomto případě  $T_1(x) = a + bx$ ,  $T_2(x) = 0$ . Podle (9.17) až (9.19) dostaneme

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{r^2} w = \frac{E\alpha h}{r} (a + bx) \quad (a)$$

a podle (9.14) až (9.16)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{x0} &= 0 & \bar{\sigma}_{y0} &= -E\alpha (a + bx) \\ M_{Tx} &= 0 & M_{Ty} &= 0 \end{aligned} \quad (b)$$

Řešení diferenciální rovnice (a) musí vyhovovat okrajovým podmínkám

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad (c)$$

pro  $x = 0$  i pro  $x = l$  (vymizí ohybový moment  $M_x$  i posouvající síla  $Q$ ). Zřejmě bude

$$w(x) = \alpha r (a + bx) \quad (d)$$

Obvodové napětí působené tlakem  $\bar{p} = E\alpha h (a + bx)/r$  vyjde  
 $\bar{\sigma}_y = \bar{p} r/h = E\alpha (a + bx)$  a výsledné napětí bude

$$\sigma_y = \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_{y0} = E\alpha (a + bx) - E\alpha (a + bx) = 0 \quad (e)$$

Teplotní napětí tedy v trubce nepůsobí, což je samozřejmé, neboť teplotní pole je lineární funkcí kartézských souřadnic a teplotní dilataci nic nebrání.  $\times$ )

## Příklad 22

Trubka podle obr. 9 s volnými konci je zahřáta tak, že vnější povrch má teplotu o  $\Delta T$  vyšší než vnitřní. V osovém směru se přitom teplota nemění. Určete deformace trubky a teplotní napětí.

$\times$ ) Zde máme na mysli libovolné kartézské, tj. přímočaré pravouhlé souřadnice. Systém souřadnic zavedený v 9. kapitole je křivočarý, není tedy kartézský. Shodou okolností však je i v něm průběh teploty lineární.

## Řešení

V tomto případě je  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = \Delta T / 2 = \text{konst.}$  Bude tedy  $p_T = \bar{p} = 0$ ,  $G_{x_0} = G_{y_0} = -E\alpha z \Delta T / (1-\mu)h$  a dále

$$M_{T_x}(0) = M_{T_x}(\ell) = -\frac{E\alpha h^2}{12(1-\mu)} \Delta T \quad (\text{a})$$

Další výpočet uskutečňujeme za předpokladu, že trubka je dlouhá, např.

$\ell > 3\sqrt{rh}$ . V tom případě stačí uvažovat jen část řešení diferenciální rovnice (9.18) popisující blízké okolí řezu  $x = 0$ , totiž

$$W(x) = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (\text{b})$$

kde

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4r^2D}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{r^2h^2}} \quad (\text{c})$$

Nezaměňuj tuto charakteristickou konstantu s veličinou  $\beta$  podle rovnice (4.6). S okrajovými podmínkami

$$D \frac{d^2 W}{dx^2} = M_{T_x}(0) \quad \frac{d^3 W}{dx^3} = 0 \quad (\text{d})$$

dostaneme

$$W(x) = \frac{1}{2\beta^2 D} M_{T_x}(0) e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \quad (\text{e})$$

$$M_x = M_{T_x}(0) e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (\text{f})$$

$$M_y = \mu M_x \quad (\text{g})$$

$$N_y = Eh \frac{w}{r} = \frac{Eh}{r} \frac{M_{T_x}(0)}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \quad (\text{h})$$

$$\sigma_x = -\frac{12}{h^3} z M_x + \sigma_{x0} \quad (i)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{h} N_y - \frac{12}{h^3} z M_y + \sigma_{y0} \quad (j)$$

Největší absolutní hodnota napětí působí v obvodovém směru, a to

$$|\sigma_y|_{\max} = \frac{E\alpha |\Delta T|}{2(1-\mu)} \left( 1 - \mu + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{3}} \right) \quad (k)$$

### Příklad 23

Pro rotačně symetrickou tenkostěnnou trubku zatíženou teplotním polem  $T(x, z)$  podle rovnice (9.8) navrhnete konečný prvek a uveďte jeho vlastnosti.

### Řešení

Problém je popsán diferenciální rovnicí (9.18) pro průhyb  $w(x)$ . První člen znamená elastickou vratnou sílu připadající na délkovou jednotku. Druhý člen představuje reakci vznikající působením obvodových napětí, která je analogická reakci pružného podkladu u nosníků uložených na Winklerevě pružném podkladu. Konečně třetí člen (první člen na pravé straně) představuje ekvivalentní měrné zatížení, tj. působení vnějších vlivů (vnitřního přetlaku  $p$  a teplotního pole  $T$ ).

Je zřejmé, že úleha je analogická s teorií ohybu nosníku na pružném podkladu. Budeme proto postupovat stejně jako v příkladu 19. Použijeme aproximace

$$\begin{aligned} \{w(x)\} &= [A(x)] \{q\} = \\ &= [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)] \{q_1, q_2, q_3, q_4\}^T \end{aligned} \quad (a)$$

v níž  $q_1 = w(0)$ ,  $q_2 = -w'(0)$ ,  $q_3 = w(l)$ ,  $q_4 = -w'(l)$  (čárka značí derivaci podle  $x$ ). Tvarové funkce jsou rovněž stejné jako v příkladu 19, totiž

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & \varphi_3 &= 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ \varphi_2 &= -x + 2\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} & \varphi_4 &= \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \end{aligned} \quad (b)$$

Elastické vratné síly jsou v uzlech představovány vektorem  $[K]\{q\}$ , kde podle příkladu 19 vyjde

$$[K] = \frac{2D}{\ell^3} \begin{bmatrix} 6 & -3\ell & -6 & -3\ell \\ -3\ell & 2\ell^2 & 3\ell & \ell^2 \\ -6 & 3\ell & 6 & 3\ell \\ -3\ell & \ell^2 & 3\ell & 2\ell^2 \end{bmatrix} \quad (c)$$

Na rozdíl od příkladu 19 zde máme ohybovou tuhost skořepiny

$D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ . Nyní půjde o to, určit ještě vektor ekvivalentní vratným silám, které jsou dány druhým členem v rovnici (9.18). Označíme jej  $\{f_p\}$  (síly z pomyslného pružného podkladu). Podle principu virtuálních prací budeme požadovat, aby

$$\{\delta q\}^T \{f_p\} = \int_0^\ell \{\delta w(x)\}^T \frac{Eh}{r^2} [w(x)] dx \quad (d)$$

tj. aby virtuální práce vratných měrných sil  $Ehw/r^2$  byla stejná jako virtuální práce ekvivalentních sil  $\{f_p\}$ . Vzhledem k rovnici (a) odtud dostaneme podmínku

$$\{\delta q\}^T \{f_p\} = \frac{Eh}{r^2} \{\delta q\}^T \int_0^\ell [A(x)]^T [A(x)] dx \{q\} \quad (e)$$

Protože variace  $\{\delta q\}$  je libovolná, vyjde vektor reaktivních sil

$$\{f_p\} = [K_1]\{q\} \quad (f)$$

kde podle rovnice (e)

$$[K_1] = \frac{Eh}{r^2} \int_0^\ell [A(x)]^T [A(x)] dx =$$

$$= \frac{Eh}{r^2} \int_0^\ell \begin{bmatrix} \varphi_1^2 & \varphi_1\varphi_2 & \varphi_1\varphi_3 & \varphi_1\varphi_4 \\ \varphi_2\varphi_1 & \varphi_2^2 & \varphi_2\varphi_3 & \varphi_2\varphi_4 \\ \varphi_3\varphi_1 & \varphi_3\varphi_2 & \varphi_3^2 & \varphi_3\varphi_4 \\ \varphi_4\varphi_1 & \varphi_4\varphi_2 & \varphi_4\varphi_3 & \varphi_4^2 \end{bmatrix} dx \quad (g)$$

Dosazením z rovnic (b) vyjde

$$[K] = \frac{Eh\ell}{420\ell} \begin{bmatrix} 156 & -22\ell & 54 & 13\ell \\ -22\ell & 4\ell^2 & -13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & -13\ell & 156 & 22\ell \\ 13\ell & -3\ell^2 & 22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (h)$$

Vektor sil  $\{f_E\}$  odpovídající ekvivalentnímu zatížení  $\bar{p}(x)$  podle rovnice (9.19) vyjde ze srovnání virtuálních prací

$$\{\delta q\}^T \{f_E\} = \int_0^\ell \{\delta w(x)\}^T \{\bar{p}(x)\} dx \quad (i)$$

Protože  $\{\delta w\} = [A]\{\delta q\}$ , bude

$$\begin{aligned} \{f_E\} &= \int_0^\ell [A(x)]^T \{\bar{p}(x)\} dx = \\ &= \int_0^\ell \bar{p}(x) \begin{Bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \\ \varphi_4(x) \end{Bmatrix} dx \end{aligned} \quad (j)$$

Výchozí rovnice metody konečných prvků má v tomto případě tvar

$$([K] + [K_i])\{q\} = \{f_E\} + \{f_M\} + \{f_U\} \quad (k)$$

Do pravé strany rovnice (k) dosadíme za  $\{f_M\}$  ze vztahu (9.16)

$$\{f_M\} = [0 \quad M_{Tx}(0) \quad 0 \quad -M_{Tx}(\ell)]^T \quad (l)$$

Prvky vektoru  $\{f_U\}$  jsou osamělé síly a silové dvojice působící v uzlech. Jde o vnější síly a momenty, popř. o síly a momenty přenášené do daného prvku z ostatních částí konstrukce.

#### Poznámka

Vektor  $\{\delta w\}^T$  a matice  $\{\bar{p}(x)\}$  za integračním znaménkem v rovnici (i) jsou v tomto zvláštním případě jednoprvkové matice (matice typu  $1 \times 1$ ); matice  $[A]$  je typu  $1 \times 4$ , vektor  $\{q\}$  je typu  $4 \times 1$ .

## 10. TLUSTOSTĚNNÁ TRUBKA

Omezíme se na případ dutého rotačně symetrického válce, v němž jsou všechny veličiny ve směru osy konstantní a osový posuv je nulový. Půjde tedy o případ rovinné deformace. Na žádný z obou plášťů nebudou působit žádné síly a také objemové síly budou nulové. Rozdíl teploty  $T_1(r)$  v daném místě a referenční teploty  $T_0$  označíme  $T(r)$ . Bude tedy  $T(r) = T_1(r) - T_0$ . Jediná nenulová složka posuvu je  $u(r)$ ; je to radiální posuv. Průřez válce tvoří mezikružší  $a \leq r \leq b$ . Kdybychom znali pole posuvů  $u(r)$ , snadno bychom z něho odvodili hlavní poměrná prodloužení

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z = 0 \quad (10.1)$$

Z Duhamelova - Neumannova zákona (4.1) bychom pak dostali hlavní napětí  $\sigma$ )

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-2\mu} \left[ \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{du}{dr} + \frac{\mu}{1+\mu} \frac{u}{r} - \alpha T \right] \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-2\mu} \left[ \frac{\mu}{1+\mu} \frac{du}{dr} + \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{u}{r} - \alpha T \right] \\ \sigma_z &= \mu (\sigma_r + \sigma_\varphi) - E\alpha T \end{aligned} \quad (10.2)$$

Tato napětí musí splňovat diferenciální rovnici rovnováhy známou z teorie tlustostěnných nádob a lisovaných spojů

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\varphi = 0 \quad (10.3)$$

Když do rovnice (10.3) dosadíme z prvních dvou vztahů (10.2), vyjde diferenciální rovnice pro radiální posuv  $u(r)$  ve tvaru

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{dT}{dr} \quad (10.4)$$

Přitom předpokládáme, že délková roztažnost je konstantní, tj. že nezávisí ani na teplotě, ani na poloměru. Řešením této rovnice dostaneme

---

\*) Dosadíme  $\varepsilon_z = 0$ ,  $T_0 = 0$ . Alternativně můžeme vycházet z rovnic (4.3) až (4.5).



$$u(r) = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \int_a^r T(\xi) \xi d\xi + C_1 r + C_2 \frac{1}{r} \quad (10.5)$$

Symbolem  $\xi$  jsme označili poloměr z intervalu  $(a, r)$ . Z rovnice (10.5) dosadíme do vztahů (10.2) a integrační konstanty  $C_1$ ,  $C_2$  určíme tak, aby radiální napětí  $\sigma_r$  vymizelo na povrchu  $r = a$  i na povrchu  $r = b$ . Vyjde  $\equiv$ )

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E\alpha}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - \int_a^r T(\xi) \xi d\xi \right] \\ \sigma_\varphi &= \frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr + \int_a^r T(\xi) \xi d\xi - Tr^2 \right] \quad (10.6) \\ \sigma_z &= \frac{E\alpha}{1-\mu} \left[ \frac{2\mu}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - T \right] \end{aligned}$$

Je-li třeba, můžeme k těmto napětím superponovat napětí vzniklá mechanickým zatížením (vnějším, popř. vnitřním radiálním tlakem, osovou silou).

Můžeme např. požadovat, aby osová síla ve válci byla nulová. Za podmínky rovinné deformace dává napětí  $\sigma_z$  podle (10.6) osovou sílu

$$F = 2\pi \int_a^b \sigma_z(r) r dr \quad (10.7)$$

Nepůsobí-li ve skutečnosti tato síla, musíme její účinek odečíst. Radiální a obvodové napětí se přitom nezmění. Osová napětí  $\sigma_{z0}$  vyjde sice opět nenulové, ale dá nulovou výslednici. Zřejmě bude

$$\begin{aligned} \sigma_{z0} &= \sigma_z - \frac{F}{\pi(b^2 - a^2)} = \\ &= \frac{E\alpha}{1-\mu} \left\{ \left[ \frac{2\mu}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr - T \right] - \frac{2\mu}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr + \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr \right\} = \\ &= \frac{E\alpha}{1-\mu} \left[ \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr - T \right] = \sigma_r + \sigma_\varphi \end{aligned}$$

(10.8)

---

\*) Tyto rovnice jsou uvedeny ve sborníku /35/ na str. 23 s drobnými chybami.

Toto napětí působí v řezech dostatečně vzdálených od obou konců trubky (co znamená tato "dostatečná" vzdálenost, objasní příklad 24). Radiální posuv v libovolném místě vypočteme nejnázorněji ze vztahu pro obvodové poměrné prodloužení  $\epsilon_\varphi$  podle (10.1) a z Duhamelova - Neumannova zákona (4.1). Vyjde

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r - \mu \sigma_z + E \alpha T) \quad (10.9)$$

Jde-li o trubku bez osové síly, dosadíme za  $\sigma_z$  hodnotu  $\sigma_{z0}$ .

### Příklad 24

Ocelová trubka má poloměry  $a = 50$  mm,  $b = 80$  mm, modul pružnosti  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa, délkovou roztažnost  $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$  K<sup>-1</sup>, Poissonovo číslo  $\mu = 0,3$ . Vypočtete teplotní pnutí v ustáleném rotačně symetrickém teplotním poli takovém, že teplota na vnitřním povrchu je  $T_a = 100$  °C, na vnějším povrchu  $T_b = 0$  °C. Určete rovněž deformace trubky. Předpokládejte, že se teplota ve směru osy trubky nemění a že je trubka relativně velmi dlouhá, takže se v místech dostatečně vzdálených od obou konců zachovává rovinnost průřezů. Osová síla nepůsobí. Odhadněte též deformaci a napjatost v okolí konců trubky, kde předpoklad rovinnosti průřezů neplatí.

### Řešení

Za přirozený stav tělesa zvolíme ten, při němž nepůsobí žádné zatížení a teplota je v celém tělese rovna 0 °C. V ustáleném rotačně symetrickém teplotním poli je  $\partial T / \partial t = 0$ ; rovnice (6.1) dává

$$\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (a)$$

Teplota  $T(r)$  vyhovuje okrajovým podmínkám

$$T(a) = T_a \quad T(b) = T_b = 0 \quad (b)$$

Řešením rovnice (a) s okrajovými podmínkami (b) dostaneme pro průběh teploty vzorec

$$T(r) = T_a \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} \quad (c)$$

Tuto funkci nyní dosadíme do prvních dvou rovnic (10.6) a do rovnice (10.8). K tomu budeme potřebovat vyřešit integrály

$$\int_a^b r \ln r \, dr = \left[ \frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} (b^2 \ln b - a^2 \ln a) - \frac{1}{4} (b^2 - a^2)$$

$$\int_a^r \xi \ln \xi \, d\xi = \frac{1}{2} (r^2 \ln r - a^2 \ln a) - \frac{1}{4} (r^2 - a^2)$$

Všimneme-li si, že konstantní teplota nemá na teplotní napětí vliv, stačí do rovnic (10.6) a (10.8) dosadit pouze

$$T^*(r) = -\frac{T_a}{\ln(b/a)} \ln r \quad (d)$$

S označením

$$\beta = \frac{b}{a} \quad x = \frac{b}{r} \quad (\beta \geq x \geq 1)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E\alpha T_a}{2(1-\mu)} \left[ \frac{\ln x}{\ln \beta} - \frac{x^2-1}{\beta^2-1} \right] \\ \sigma_y &= -\frac{E\alpha T_a}{2(1-\mu)} \left[ \frac{\ln x - 1}{\ln \beta} + \frac{x^2+1}{\beta^2-1} \right] \\ \sigma_{z0} &= -\frac{E\alpha T_a}{2(1-\mu)} \left[ \frac{2 \ln x - 1}{\ln \beta} + \frac{2}{\beta^2-1} \right] \end{aligned} \quad (e)$$

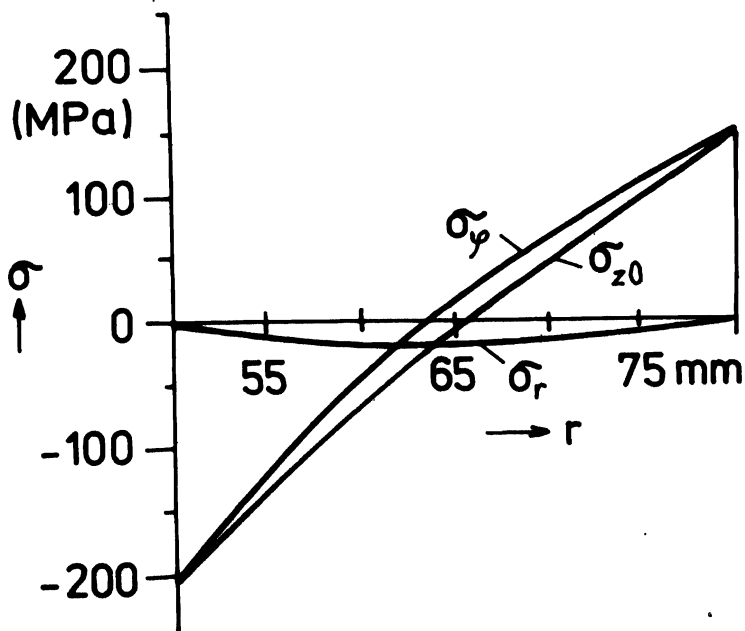
Pro dané hodnoty vyjde

$$\frac{E\alpha T_a}{2(1-\mu)} = \frac{2,5 \cdot 100}{2 \cdot 0,7} = \frac{250}{1,4} \quad \beta = \frac{80}{50} = 1,6$$

Průběhy napětí vypočtené z rovnic (e) jsou zakresleny na obr. 11.

Radiální posuv na vnějším poloměru vyjde podle (10.9)

$$u(b) = \frac{80}{2 \cdot 10^5} [ 151,0 (1 - 0,3) + 0 ] = 0,042 \text{ mm}$$



OBR. 11

a na vnitřním poloměru

$$u(a) = \frac{50}{2 \cdot 10^5} [ -206,14 (1 - 0,3) + 250 ] \doteq 0,026 \text{ mm}$$

Tyto posuvy jsou měřeny od poloměrů obou povrchů, které zjistíme při teplotě 0 °C. Kdybychom je vztahovali k pokojové teplotě 20 °C, vyšlo by

$$u(b) \doteq 0,022 \text{ mm} \qquad u(a) \doteq 0,014 \text{ mm}$$

Napětí  $\sigma_{z0}$  nedává sice žádnou výslednou sílu, ale je u vnitřního pláště tlakové a u vnějšího pláště tahové. Na čelech ve skutečnosti nepůsobí. Napjatost v okolí konců trubky tedy dostaneme, když k napětím vypočteným podle rovnic (e) připočteme napjatost způsobenou napětím  $\sigma_{z0}$ , připojeným na obou čelech s opačným znaménkem. Posoudíme tuto "poruchu" řešení (e) podle teorie tenkých skořepin, jež ovšem bude platit jen přibližně. Skořepina má totiž střední poloměr  $r_0 = 65 \text{ mm}$  a tloušťka stěny  $h = 30 \text{ mm}$ , není tedy nijak "tenkostěnná". Na okraji této skořepiny musíme připojit radiální ohybový moment (působící tah na vnitřním a tlak na vnějším povrchu) o velikosti

$$M_{r_0} = \frac{1}{r_0} \int_a^b \sigma_{20}(r) r^2 dr =$$

$$= \frac{E \alpha T_a}{3(1-\mu)} \frac{a^3}{r_0} \left[ \frac{\beta^3-1}{6 \ln \beta} - \frac{\beta^2}{\beta+1} \right] \quad (f)$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme  $M_{r_0} = 25\,926,85$  N. Linearizované ohybové napětí je pak  $\sigma_0 = \frac{6}{h^2} M_{r_0} = \frac{6}{30^2} \cdot 25\,926,85 \doteq 173$  MPa. Toto napětí můžeme porovnat s extrémními hodnotami  $\sigma_{20}$  na obr. 11 (s napětím 151, resp. 206 MPa).

Označme charakteristickou délku skořepiny  $\delta$ . Pro  $\mu = 0,3$  je  $\delta \doteq 0,78 \sqrt{r_0 h} = 0,78 \sqrt{65 \cdot 30} \doteq 34,44$  mm. Vliv okrajové poruchy zasáhne do vzdálenosti asi  $3\delta$  od okraje trubky, tj. do vzdálenosti asi 100 mm. Radiální posuv na okraji skořepiny působený ohybovým momentem  $M_{r_0}$  vyjde (podle /17/, str. 230)

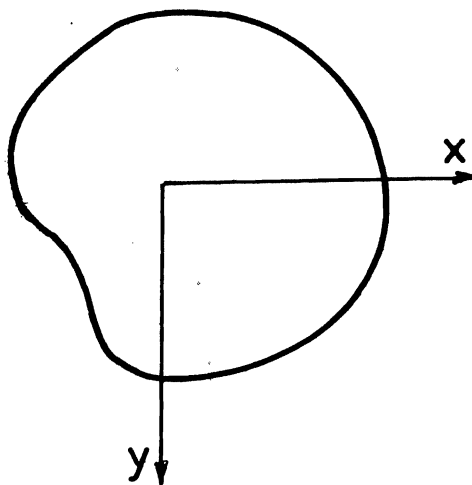
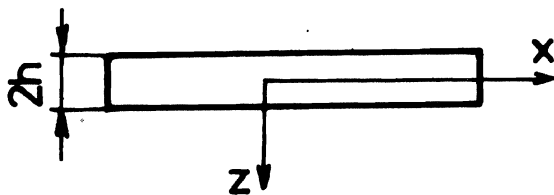
$$\mu_0 = \frac{2 r_0^2}{E h \delta^2} M_{r_0} = \frac{2 \cdot 65^2 \cdot 25\,926,85}{2 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 34,44^2} \doteq 0,031 \text{ mm} \quad (g)$$

Tento průhyb se rychle zmenšuje, vzdalujeme-li se od okraje trubky, až ve vzdálenosti asi 100 mm prakticky vymizí. Radiální posuv na vnějším povrchu trubky, měřený od přirozeného stavu při 0 °C, je tedy na koncích trubky celkem 0,073 mm a v místech vzdálených od okrajů více než 100 mm jen asi 0,042 mm.

Podle teorie tenkých skořepin můžeme přibližně vypočítat i průběh ohybových momentů, a tím i průběh rušivého napětí, které by bylo třeba superponovat k hodnotám vypočteným z rovnic (e), abychom získali přibližnou představu o napětích poblíž konců trubky. To ponecháváme čtenáři.

## 11. VOLNÁ DESKA S PŘÍČNĚ PROMĚNNOU TEPLOTOU

Na obr. 12 je znázorněna deska o tloušťce  $2h$  s libovolným obrysem. Předpokládáme, že není zatížena ani podepřena. Teplota se v ní mění pouze v závislosti na souřadnici  $z$ , takže teplotní rozdíl  $T$  měřený od referenční teploty bude



OBR. 12

$$\Gamma = T(z) \quad (11.1)$$

Ukážeme, že teplotní napjatost a deformaci dostaneme velmi snadno semi-inverzní metodou. Budeme předpokládat, že

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (11.2)$$

Jediné nenulové složky napětí jsou tedy  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$ . Odhadneme řešení ve tvaru

$$\sigma_x = \sigma_y = f(z) \quad (11.3)$$

a pokusíme se nalézt funkci  $f(z)$  tak, aby byly splněny všechny potřebné rovnice a okrajové podmínky.

Rovnice rovnováhy (6.15) jsou zřejmě splněny identicky. Ze šesti rovnic kompatibility (6.19) jsou splněny stejným způsobem tři. Zbývající tři budou splněny jen tehdy, bude-li platit diferenciální rovnice

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ f(z) + \frac{E\alpha}{1-\mu} T(z) \right] = 0 \quad (11.4)$$

Řešením získáme funkci  $f(z)$ , a tím i napětí  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  podle vztahu (11.3). Vyjde

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{E\alpha}{1-\mu} T(z) + C_1 + C_2 z \quad (11.5)$$

Z podmínek (11.2) vyplývá, že lící povrchy desky jsou bez napětí. Válcový plášť desky však může být bez napětí jen tehdy, bude-li tam  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 0$ . To by vyžadovalo, aby  $T(z)$  byla lineární funkce. Pak by bylo napětí nulové všude. V jiném případě nebude válcový plášť bez napětí. Lze však požadovat, aby na okraji desky byly nulové výslednice, tj. nulová normálová síla a nulový ohybový moment. Tehdy musí platit tyto dvě podmínky:

$$\int_{-h}^h \sigma_x(z) dz = 0 \quad \int_{-h}^h z \sigma_x(z) dz = 0 \quad (11.6)$$

Protože platí (11.3), budou obdobné rovnice splněny i pro napětí  $\sigma_y$ . Z podmínek (11.6) vypočteme integrační konstanty  $C_1$ ,  $C_2$ . Nakonec vyjde

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E\alpha}{1-\mu} \left[ -T(z) + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T(z) dz + \frac{3z}{2h^3} \int_{-h}^h z T(z) dz \right] \quad (11.7)$$

Tak jsme dostali řešení dané úlohy s tím omezením, že okrajové podmínky splňujeme na obvodu desky pouze v globálním smyslu (okraj není sice bez napětí, avšak tato napětí dávají nulovou výslednici a nulovou výslednou dvojici). Tato "porucha" však zasahuje ve smyslu Saint-Venantova principu pouze blízké okolí okraje desky (asi do vzdálenosti  $2h$ ).

Rovnici (11.7) můžeme zapsat jednodušeji, zavedeme-li označení

$$N_T = E\alpha \int_{-h}^h T(z) dz \quad M_T = E\alpha \int_{-h}^h z T(z) dz \quad (11.8)$$

Úplné řešení pak vypadá takto:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_y = \frac{1}{1-\mu} \left[ -\alpha E T(z) + \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T \right] \\ \sigma_z &= 0 \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T \right] \\ \varepsilon_z &= -\frac{2\mu}{(1-\mu)E} \left[ \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T \right] + \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha T(z) \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0\end{aligned}\tag{11.9}$$

Pro posuvy dostaneme (až na možné přemístění desky jako tuhého tělesa, které můžeme superponovat)

$$\begin{aligned}u &= \frac{x}{E} \left[ \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T \right] \\ v &= \frac{y}{E} \left[ \frac{1}{2h} N_T + \frac{3z}{2h^3} M_T \right] \\ w &= -\frac{3M_T}{4h^3 E} (x^2 + y^2) + \frac{1}{(1-\mu)E} \left[ (1+\mu)\alpha E \int_0^z T(z) dz - \frac{\mu z}{h} N_T - \frac{3\mu z^2}{2h^3} M_T \right]\end{aligned}\tag{11.10}$$

### Příklad 25

Vypočtete přetvoření tenké desky o tloušťce  $2h$ , mění-li se teplota napříč deskou lineárně.

### Řešení

Teplotu ve střední ploše desky zvolíme za referenční, takže budeme počítat s rozdílem teplot

$$T(z) = az \tag{a)}$$



kde  $\alpha = \frac{\Delta T}{2h}$  ;  $\Delta T$  je rozdíl teplot obou povrchů, tj.

$$\Delta T = T(h) - T(-h) \quad (b)$$

V tom případě vyjde

$$N_T = 0 \quad M_T = \alpha E a \int_{-h}^h z^2 dz = \frac{1}{3} \alpha E h^2 \Delta T \quad (c)$$

Podle (11.10) vypočteme posuvy. Vyjde

$$u = \frac{x}{E} \frac{3z}{2h^3} \frac{1}{3} \alpha E h^2 \Delta T = \frac{xz}{2h} \alpha \Delta T$$

$$v = \frac{yz}{2h} \alpha \Delta T$$

$$w = -\frac{\alpha \Delta T}{4h} (x^2 + y^2 - z^2) \quad (d)$$

Napětí jsou vesměs nulová.

Tyto výsledky zkontrolujeme ještě přímým výpočtem. Označme poloměr křivosti střední plochy  $R$  (obr. 13). Poměrná prodloužení způsobená zkřivením do kulové plochy jsou

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{z}{R} \quad (e)$$

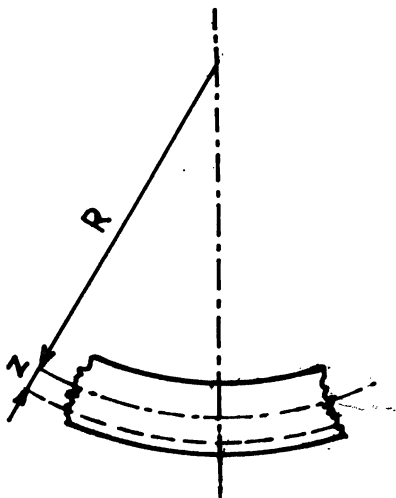
Protože napětí jsou nulová, musí být

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \alpha T = \frac{\alpha \Delta T}{2h} z \quad (f)$$

Srovnáním (e) a (f) dostaneme pro křivost střední plochy vzorec

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha \Delta T}{2h} \quad (g)$$

Na druhé straně musí podle (d) pro malé deformace platit, že



OBR. 13

$$\frac{1}{R} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\alpha \Delta T}{2h} \quad (\text{h})$$

Shoda obou výsledků je zřejmá. Kromě toho musí platit, že

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{\alpha \Delta T}{2h} z \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \frac{\alpha \Delta T}{2h} z \quad (\text{i})$$

Také těmto rovnicím řešení (d) vyhovuje. Konečně

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \alpha \Delta T = \frac{\alpha \Delta T}{2h} z \quad (\text{j})$$

což rovněž platí.

## 12. VLNĚNÍ V TERMOELASTICKE TYČI

V této kapitole se vrátíme k představě tenké homogenní termoelastické tyče, z které jsme vycházeli při odvozování základních fyzikálních vztahů ve 3. kapitole. Tato představa je výhodná proto, že se zmenší počet nezávisle proměnných na dvě - na prostorovou souřadnici  $x$  a na časovou souřadnici  $t$ . Tentokrát se budeme zabývat šířením harmonické vlny v tyči, v níž existuje termomechanická vazba. Tyč je od okolí tepelně izolována, napjatost v ní je jednoosá. To znamená, že nic nebrání příčné kontrakci. Setrvačné síly působené příčným pohybem však zanedbáme, což znamená, že se omezíme jen na případ velmi tenké tyče.

Zcela obdobně bychom ovšem mohli probírat případ podélné vlny s rovinným čelem, která by se šířila izotropním, homogenním, nekonečným termoelastickým prostředím. V něm by byly příčné posuvy nulové. Další případ, totiž šíření smykové vlny, je nezajímavý, protože se při něm žádná termomechanická vazba neuplatňuje (změna objemu je v prvním přiblížení nulová). Zůstaneme však jen u prvého z uvedených případů, tj. u podélného vlnění v tenké termoelastické tyči.

Dosadíme-li do rovnice (5.21) za  $\epsilon$  hodnotu

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_x (1 - 2\mu) = (1 - 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12.1)$$

a za  $T_{,ii}$  položíme

$$T_{,ii} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (12.2)$$

vyjde s použitím (4.6) tato parciální diferenciální rovnice popisující termomechanickou vazbu:

$$E \alpha T \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (12.3)$$

Rovnice rovnováhy (6.15) dá v našem případě

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + X_x = 0 \quad (12.4)$$

Za napětí  $\bar{\sigma}_x$  dosadíme z Duhamelova - Neumannova zákona

$$\bar{\sigma}_x = E \left[ \epsilon_x - \alpha (T - T_0) \right] = E \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha (T - T_0) \right] \quad (12.5)$$

a za objemovou sílu  $X_x$  vezmeme setrvačnou sílu

$$X_x = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12.6)$$

Dostaneme

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - E \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (12.7)$$

Rovnice (12.3) a (12.7) jsou základem celého řešení. Platí pro dvě nezávisle proměnné  $u(x, t)$ ,  $T(x, t)$ . Protože změny teploty budou nepatrné, dosadíme do prvního členu na levé straně rovnice (12.3)  $T = T_0 = \text{konst.}$

Bude tedy

$$E \alpha T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (12.8)$$

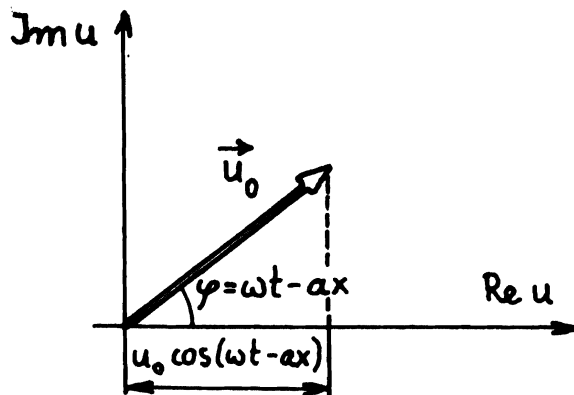
Tím jsme dostali dvě lineární diferenciální rovnice (12.7) a (12.8). Pokud není  $\alpha = 0$ , jsou obě rovnice vzájemně vázané.

Harmonickou deformační vlnu v tyči popíšeme rovnicí

$$\bar{u} = u_0 \cos(\omega t - ax) \quad (12.9)$$

V určitém řezu  $x = \text{konst.}$  se posuv  $\bar{u}$  mění v čase harmonicky s kruhovou frekvencí  $\omega$  a s periodou  $2\pi/\omega$ ; frekvence kmitů je tedy  $f = \omega/2\pi$ . V určitém okamžiku (v zastaveném čase) se deformační vlna jeví jako sinusovka s délkou vlny  $L = 2\pi/a$ . Veličina  $a$  je vlnové číslo,  $u_0$  je amplituda.

Výchylku  $\bar{u}$  danou rovnicí (12.9) lze získat jako průmět vektoru  $\vec{u}_0$  o délce  $|\vec{u}_0| = u_0$ , který svírá se souřadnicovou osou úhel  $\varphi = \omega t - ax$  (obr. 14). Polohu vektoru  $\vec{u}_0$  můžeme popsat pomocí



OBR. 14

komplexní proměnné v Gaussově rovině. Koncový bod vektoru  $\vec{u}_0$  má souřadnice  $u_0 \cos \varphi$ ,  $u_0 \sin \varphi$ . V tom případě představuje posuv  $\bar{u}$  podle (12.9) pouze reálnou část komplexního čísla

$$\begin{aligned} u &= u_0 [\cos(\omega t - ax) + i \sin(\omega t - ax)] = \\ &= u_0 e^{i(\omega t - ax)} \end{aligned} \quad (12.10)$$

kde  $u_0$  značí modul tohoto komplexního čísla a úhel  $(\omega t - ax)$  jeho argument. Jinými slovy, šíření deformační vlny bude popsáno reálnou částí komplexního čísla  $u$  podle (12.10). Podobně popíšeme i tepelnou vlnu. Označíme rozdíl teplot  $T - T_0 = \tau$ , což bude reálná část komplexního čísla

$$\tau = \tau_0 e^{i(\omega t - ax)} \quad (12.11)$$

Abychom postihli i eventuální fázový posuv mezi oběma vlnami (mezi deformační a tepelnou vlnou), připustíme, že číslo  $\tau_0$  může být komplexní, ovšem konstantní.

Výrazy (12.10) a (12.11) dosadíme do rovnic (12.7) a (12.8). Abychom zápis zjednodušili, dosadíme přitom

$$T = T_0 + \tau = T_0 + \tau_0 e^{i(\omega t - ax)} \quad (12.12)$$

a budeme pamatovat, že z komplexního čísla  $T$  má fyzikální význam teploty jen jeho reálná část. Podobně skutečný posuv ve směru souřadnicové osy  $x$  je jen reálnou částí komplexního čísla  $u$  (12.10). Za těchto předpokladů bude např.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -a^2 u_0 e^{i(\omega t - ax)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\omega^2 u_0 e^{i(\omega t - ax)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} &= a\omega u_0 e^{i(\omega t - ax)} \end{aligned} \quad (12.13)$$

a obdobně

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= -ia\tau_0 e^{i(\omega t - ax)} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= i\omega\tau_0 e^{i(\omega t - ax)} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= -a^2\tau_0 e^{i(\omega t - ax)} \end{aligned} \quad (12.14)$$

Je zřejmé, že se po dosazení těchto výrazů do rovnic (12.7) a (12.8) exponenciální funkce zkrátí. Zbude soustava dvou rovnic pro dvě proměnné  $u_0$ ,  $\tau_0$

$$(\varrho\omega^2 - E\alpha^2)u_0 + i(E\alpha)\tau_0 = 0 \quad (12.15)$$

$$(E\alpha T_0 \omega \alpha)u_0 + (\lambda\alpha^2 + i\varrho c_v \omega)\tau_0 = 0$$

To jsou dvě lineární algebraické homogenní rovnice, jež mají netriviální řešení jen tehdy, je-li determinant soustavy nulový. To znamená, že

$$(\varrho\omega^2 - E\alpha^2)(\lambda\alpha^2 + i\varrho c_v \omega) - i(E\alpha T_0 \omega \alpha)(E\alpha) = 0 \quad (12.16)$$

Netriviální řešení ve tvaru (12.10) a (12.12) může existovat jen tehdy, platí-li (12.16).

Probereme některé zvláštní případy. Je-li teplotní délková roztažnost  $\alpha$  nulová, vymizí termomechanická vazba. Pro  $u_0 \neq 0$  dostaneme podle první z rovnic (12.15) podmínku  $\varrho\omega^2 - E\alpha^2 = 0$ , z čehož

$$a = \pm \omega \sqrt{\frac{\varrho}{E}} = \pm \frac{\omega}{c_E} \quad (12.17)$$

kde

$$c_E = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad (12.18)$$

značí postupnou rychlost elastické podélné vlny. Pro  $\alpha = 0$ ,  $\tau_0 \neq 0$  dá druhá z rovnic (12.15) podmínku  $\lambda\alpha^2 + i\varrho c_v \omega = 0$ . Odtud vypočteme

$$a = \pm (1-i) \sqrt{\frac{\varrho c_v \omega}{2\lambda}} \quad (12.19)$$

Vlnové číslo zde vyšlo komplexní; to znamená, že nepůjde o prostou harmonickou vlnu, ale o vlnu tlumenou. Označme

$$A = \sqrt{\frac{\varrho c_v \omega}{2\lambda}} \quad (12.20)$$

Pak  $a = \pm (1-i) A$  ; po dosazení tohoto výrazu do vztahu (12.11) dostaneme

$$\tau = \tau_0 e^{i(\omega t \mp Ax)} \mp Ax \quad (12.21)$$

To jsou zřejmě dvě stejné vlny opačných smyslů. Pro vlnu, která se šíří ve směru kladné osy  $x$ , platí horní znaménko, neboť amplituda vlny buzené v počátku souřadnic se nemůže donekonečna zvětšovat. Dolní znaménko platí z téhož důvodu pro vlnu, která se šíří proti kladnému smyslu osy  $x$ .

Fázovou rychlost tepelné vlny dostaneme, když budeme sledovat změnu polohy bodů se stejnou fází  $\varphi = \omega t - Ax$  vlny za čas  $dt$ . Pro  $\varphi = \text{konst.}$  dostaneme  $\omega dt - A dx = 0$  a odtud už vyjde rychlost  $c_T$  tepelné vlny ve tvaru

$$c_T = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{A} = \sqrt{\frac{2\lambda\omega}{\rho c_v}} \quad (12.22)$$

Tepelná vlna rychle doznívá. Kdybychom hodnotu  $e^{-3} \doteq 0,0498$  zanedbali proti 1, mohli bychom prohlásit, že tepelná vlna buzená v počátečním průřezu  $x = 0$  vymizí ("dozní") už ve vzdálenosti

$$l = \frac{3}{A} = \sqrt{\frac{18\lambda}{\rho c_v \omega}} \quad (12.23)$$

Délka vlny přitom je

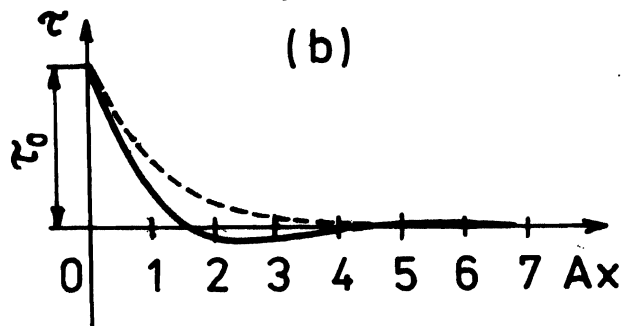
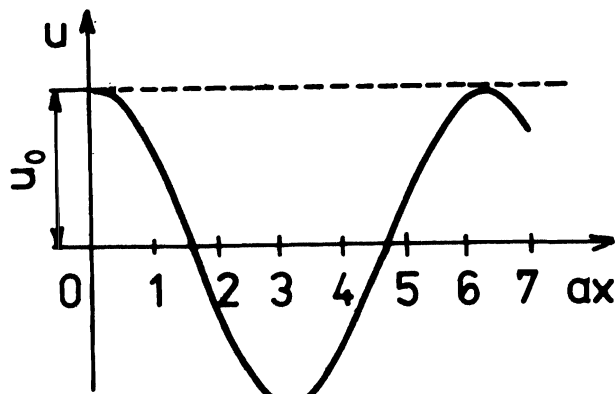
$$L = \frac{2\pi}{A} = \sqrt{\frac{8\pi^2\lambda}{\rho c_v \omega}} \quad (12.24)$$

To znamená, že tepelná vlna prakticky vymizí už ve vzdálenosti rovné asi polovině vlnové délky, neboť

$$l = L \sqrt{\frac{18}{8\pi^2}} \doteq 0,477 L \quad (12.25)$$

Protože jsme zanedbali termomechanickou vazbu, jsou obě vlny, deformační i tepelná, nezávislé. Rozkmitáváme-li tedy počáteční průřez tyče  $x = 0$  s amplitudou osového posuvu  $u_0$ , bude se od tohoto místa šířit elastická vlna s posuvy popsány rovnicí (12.9). Bude mít ve všech průřezích tyče konstantní amplitudu (obr. 15 a). Rozkmitáme-li místo toho

(a)



OBR. 15

v počátečním průřezu teplotu tak, že amplituda teploty v průřezu  $x = 0$  bude  $\tau_0$ , bude se amplituda změny teploty se vzdáleností od počátku velmi rychle zmenšovat (obr. 15 b). Pesovy budou přitom nulové, neboť délková roztažnost je nulová. Tvar vlny je na obr. 15 vyznačen plnou čarou, průběh amplitud je vyznačen čárkovaně.

Uvažujme nyní o případě tyče s nenulovou délkovou roztažností, tedy s termomechanickou vazbou, ale s nulovou tepelnou vodivostí  $\lambda$ . Dosadíme-li do rovnice (12.16)  $\lambda = 0$ , dostaneme po úpravě

$$\varrho \omega^2 - E \alpha^2 = \frac{E^2 \alpha^2 T_0 a^2}{\varrho c_v} \quad (12.26)$$

Avšak  $c_v = c_e$ ,  $E = E_T$ .\*) Za  $E_T$  dosadíme na levou stranu (12.26) z rovnice (3.23) a dostaneme

---

\*) Srovnej rovnice (3.19) a (5.14).



$$\varrho \omega^2 = E_{\Delta} a^2 \quad (12.27)$$

To je zcela logický výsledek. Je-li tepelná vodivost  $\lambda$  nulová, jsou deformace tyče izoentropické. Deformační vlna je netlumená s fázovou rychlostí  $\sqrt{E_{\Delta}/\varrho}$ . Z jedné nebo z druhé z rovnic (12.15) pak vyjde

$$\tau_0 = -i \frac{E_{\Delta} T_0}{\varrho c_{vr}} a u_0 \quad (12.28)$$

Tepelná vlna je tedy fázově posunuta o úhel  $-\pi/2$ . Uvědomíme-li si, že pro poměrné prodloužení dostaneme derivací vztahu (12.10) závislost

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -i a u_0 e^{i(\omega t - ax)} = -\varepsilon_0 e^{i(\omega t - ax)} \quad (12.29)$$

můžeme rovnici (12.28) přepsat do tvaru

$$\tau_0 = -\frac{E_{\Delta} T_0}{\varrho c_{vr}} \varepsilon_0 \quad (12.30)$$

Tento výsledek lze porovnat se vzorcem (3.19). Je zřejmé, že tepelná vlna odpovídá izoentropickému roztahování, popř. stlačování tyče. Protože tepelná vodivost je nulová, nedochází k disipaci energie vedením tepla a celý děj je konzervativní.

Přistoupíme konečně k rozboru obecného případu. Úpravou rovnice (12.16) dostaneme

$$\left(a^2 - \frac{\varrho \omega^2}{E}\right) \left(a^2 \frac{E}{\omega^2} + i \frac{E \varrho c_{vr}}{\lambda \omega}\right) + i \frac{E^2 \alpha^2 T_0}{\lambda \omega} a^2 = 0 \quad (12.31)$$

To je vztah mezi vlnovým číslem  $a$  a úhlovou frekvencí  $\omega$ . Pro danou frekvenci  $\omega$  vypočteme odtud obecně komplexní kořeny  $a$  a z kterékoli z rovnic (12.15) pak určíme příslušný poměr  $\tau_0/u_0$ . Ukáže se, že obecně vzniká útlum elastických vln způsobený vyrovnáváním teplot (vedením tepla).

Rovnice (12.31) je bohužel čtvrtého řádu. Můžeme ji zjednodušit, uvědomíme-li si, že v krajních případech platí buď (12.17), nebo (12.27). Hodnota  $a^2 E/\omega^2$  se tedy nebude příliš lišit od hustoty  $\varrho$ . Rovnici (12.31) můžeme proto nahradit vztahem

$$\left(a^2 - \frac{\rho\omega^2}{E}\right)\left(1 + i \frac{E c_{vr}}{\lambda\omega}\right)\rho + i \frac{E^2 \alpha^2 T_0}{\lambda\omega} \approx 0 \quad (12.32)$$

Předpokládejme, že součin  $\lambda\omega$  bude mnohem menší než  $E c_{vr}$ . Pak lze jedničku v druhé závorce zanedbat. Zbývá

$$a^2 \left(1 + \frac{E \alpha^2 T_0}{\rho c_{vr}}\right) = \frac{\rho\omega^2}{E} \quad (12.33)$$

To však je rovnice (12.26), z níž plyne (12.27). To znamená, že pro malý součin  $\lambda\omega$  je elastická vlna velmi přibližně izoentropická a útlum velmi přibližně zanedbatelný. Dostáváme kvazielastickou vlnu.

Je-li tedy  $\lambda\omega \ll E c_{vr}$ , jsou tepelné vlny s úhlovou frekvencí  $\omega$  mnohem pomalejší než elastické vlny o stejné úhlové frekvenci a výsledná vlna je prakticky izoentropická.

Bude-li naopak  $\lambda\omega \gg E c_{vr}$ , budeme moci v druhé oblé závorce rovnice (12.32) zanedbat druhý člen. Pak dostaneme

$$\left(a^2 - \frac{\rho\omega^2}{E}\right)\rho + i \frac{E^2 \alpha^2 T_0}{\lambda\omega} a^2 = 0 \quad (12.34)$$

a odtud

$$a^2 \left(1 + i \frac{E^2 \alpha^2 T_0}{\rho \lambda\omega}\right) = \frac{\rho\omega^2}{E} \quad (12.35)$$

Pokud je druhý člen v závorce (12.35) v absolutní hodnotě malý, můžeme použít vzorce

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \quad (|\varepsilon| \ll 1)$$

Po snadné úpravě dostaneme

$$a = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \left(1 - i \frac{E^2 \alpha^2 T_0}{2\rho \lambda\omega}\right) \quad (12.36)$$

S touto komplexní hodnotou dává rovnice (12.10) tlumenou vlnu se stejnou fázovou rychlostí, jakou má izotermní vlna [rovnice (12.18)]; amplituda se na vzdálenosti jedné vlnové délky zmenší v poměru  $e^{\mathcal{V}}$  : 1, kde

$$\mathcal{V} = \pi \frac{E^2 \alpha^2 T_0}{\rho \lambda \omega} \quad (12.37)$$

Vzorec (12.37) byl odvozen za předpokladu, že  $\lambda \omega \gg E c_v$  a že  $\mathcal{V} \ll 1$ .

Vlny jsou tedy prakticky izotermické, což je způsobeno tím, že tepelné vlny jsou v daném případě rychlejší než elastické a vedou k vyrovnání teplot. Zároveň však odnášejí energii, což má za následek útlum elastických vln.

Je poněkud paradoxní, že při dané nenulové tepelné vodivosti jsou vysokofrekvenční vlny izotermické a nízkofrekvenční vlny izoentropické. Nezapomeňme však, že při velké úhlové frekvenci kmitání vzniká i velký teplotní gradient (nebo lépe velká divergence tohoto gradientu).

Shrneme-li uvedené poznatky, pak o povaze vlnění v termoelastické tyči rozhoduje charakteristická úhlová frekvence

$$\omega^* = \frac{E c_v}{\lambda} \quad (12.38)$$

Je-li  $\omega \ll \omega^*$ , jsou vlny kvazielastické, tj. prakticky izoentropické, se zanedbatelným tlumením. Tak je tomu u kovových materiálů, u nichž vychází  $\omega^* = 10^{12}$  až  $10^{14} \text{ s}^{-1}$ . Je-li naopak  $\omega \gg \omega^*$ , jsou vlny tlumené, prakticky izotermické. Toto tvrzení platí pro materiál s idealizovanými termoelastickými vlastnostmi. Vnitřní útlum materiálu však může souviset i s jinými fyzikálními jevy, které jsme do svých úvah nepojali, s heterogenitou mikrostruktury aj.

Oba popsané krajní případy, tj. vlny kvazielastické i tlumené, jsou podle předpokladu adiabatické, neboť tyč je izolována od okolí adiabatickou stěnou. Proto je třeba názvoslovně rozlišovat procesy adiabatické od procesů izoentropických; tento rozdíl se někdy nesprávně zanedbává.

Podrobnější výklad o mechanických vlnách v prostředí s různými fyzikálními vlastnostmi obsahuje /26/.

### Příklad 26

Vypočtete charakteristickou úhlovou frekvenci  $\omega^*$  pro ocel, pro niž  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Pa,  $c_v = 460$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>,  $\lambda = 40$  W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>.

### Řešení

Protože všechny veličiny jsou uvedeny v jednotkách SI, stačí je dosadit do vztahu (12.38) bez dalších úprav. Vyjde

$$\omega^* = \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 460}{40} \doteq 2,415 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

To odpovídá kmitočtu  $f^* = \omega^*/2\pi \doteq 3,84 \cdot 10^{11}$  Hz = 384 GHz.

### Příklad 27

Pro ocel z příkladu 26 vypočtete rychlost šíření elastické, popř. tepelné vlny o kmitočtu  $f = 100$  Hz, resp. 1000 Hz. Hustota oceli  $\rho = 7865$  kg m<sup>-3</sup>. Vlna se šíří tenkou tepelně izolovanou tyčí.

### Řešení

Protože se izoentropický a izotermický modul pružnosti v tahu - tlaku navzájem neliší o více než asi o dvě promile (viz příklad 6), nezávisí rychlost elastických vln prakticky na jejich frekvenci a je

$$c_E = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11}}{7865}} \doteq 5\,167 \text{ m s}^{-1}$$

Rychlost šíření tepelné vlny je dána přibližně vztahem (12.22). Pro  $f = 100$  Hz je  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100 \doteq 628,32$  s<sup>-1</sup> a vzorec (12.22) dá

$$c_T = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 628,32}{7865 \cdot 460}} \doteq 21,45 \text{ m s}^{-1}$$

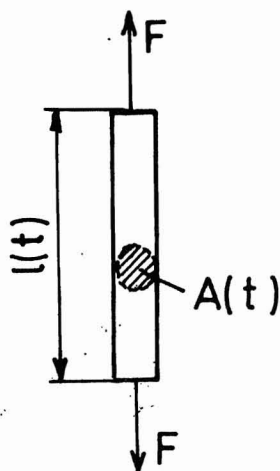
Pro frekvenci  $f = 1000$  Hz vyjde obdobně  $c_T \doteq 67,83$  m s<sup>-1</sup>.

### 13. TEČENÍ KOVŮ ZA VYSOKÝCH TEPLŮT

Za poměrně vysokých teplot, přesněji v rozmezí asi od  $\frac{1}{3}$  do  $\frac{4}{7}$  absolutní teploty tání kovu, nastává pozvolná trvalá deformace označovaná jako tečení. \*) Protože se tohoto názvu dříve používalo i pro plastické deformace za normální teploty na mezi kluzu, používá se nyní raději označení "creep" (z angl. creep = plazení). Vlivem tohoto creepu se mění rozměry zatížené součásti; např. tyč zatížená stálým tahem se pozvolna prodlužuje, průměr potrubí zatíženého vnitřním přetlakem se zvětšuje apod. Je-li naopak počáteční deformace udržována konstantní, klesá zvolna počáteční napětí, tj. nastává relaxace. Tak tomu zhruba je u předepjatých šroubů, které za vysokých teplot pozvolna ztrácejí počáteční předpětí.

Abychom oba jevy objasnili, představíme si prizmatickou tyč namáhanou tahem (obr. 16). Délka i průřez tyče se budou s časem měnit, bude tedy

$$l = l(t) \quad A = A(t) \quad (13.1)$$



Protože tyto deformace nebudou malé, zavedeme elementární poměrné prodloužení  $d\varepsilon$  definicí

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} dt \quad (13.2)$$

Integrací dostaneme logaritmickou deformaci

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} \quad (13.3)$$

OBR. 16

kde  $l_0 = l(0)$  značí počáteční délku tyče.

Podobně označíme  $A_0 = A(0)$  počáteční plochu průřezu. Protože změnu objemu můžeme při velkých deformacích zanedbat, bude  $Al = A_0 l_0$ . Tedy také

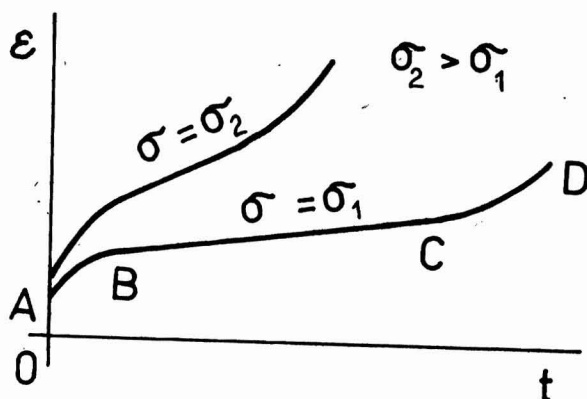
$$\varepsilon = \ln \frac{A_0}{A} \quad (13.4)$$

\*) Taje-li např. některá ocel při 1400 °C, jde o teploty od 285 °C do 683 °C.

Budeme sledovat prodloužení tyče namáhané konstantním napětím  $\sigma$ . To ovšem vyžaduje, aby se zatěžující síla  $F$  měnila podle zákona

$$F(t) = \sigma A(t) = \sigma \frac{A_0 l_0}{l(t)} \quad (13.5)$$

Protože jsou tyto změny pozvolné, máme při pokusu dost času na to, abychom potřebnou změnu síly  $F$  nastavili; spojitou funkci  $F(t)$  můžeme přitom - bez významné nepřesnosti - nahradit funkcí stupňovitou. Výsledek pokusu znázorňuje obr. 17. Při konstantním napětí  $\sigma = \sigma_1$  vzroste



OBR. 17

na počátku zatěžování logaritmická deformace náhle o hodnotu  $\sigma_1/E$ , což je elastická deformace  $OA$ . Jak se snadno přesvědčíme, je-li  $|\epsilon| \ll 1$ , není třeba rozlišovat logaritmickou deformaci od poměrného prodloužení. V další fázi zůstává napětí konstantní, ale deformace roste. Její růst se časem zpomaluje (oblouk  $AB$ ), až se ustálí na konstantní deformační rychlosti ( $d\epsilon/dt = \text{konst.}$ , úsečka  $BC$ ). Ke konci zkoušky se deformace začne zrychlovat (oblouk  $CD$ ), až se v bodě  $D$  tyč konečně přetrhne.

Zatížíme-li tyč napětím  $\sigma_2 > \sigma_1$ , probíhá zkouška obdobně, ale popsané úseky jsou kratší. První úsek  $AB$  je oblast primárního creepu. Druhý úsek  $BC$  je zpravidla nejdélší, je to úsek sekundárního creepu. Konečně třetí úsek  $CD$  je terciární creep.

Chování většiny kovů dobře vystihuje lineární závislost  $\epsilon(t)$  charakteristická pro sekundární creep. Závislost na napětí  $\sigma$  však je nelineární a je možné ji popsat mocninovým vztahem. Tak dostal F. H. Norton /27/ empirickou konstitutivní rovnici pro creep ve tvaru

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = k\sigma^n \quad (13.6)$$

Zde  $k$ ,  $n$  jsou materiálové konstanty (závisí pouze na materiálu a na jeho teplotě). Při řešení praktických úloh se předpokládá, že Nortonův zákon (13.6) platí v celém rozsahu, přičemž nejen logaritmická deformace  $\varepsilon$ , ale i napětí  $\sigma$  jsou funkcemi času. Jen zřídka se přihlíží, a to jen pro jisté rozsahy napětí a teploty, k odlišnému průběhu primárního creepu /31/, /14/, /19/.

Jak ukázal Bailey /2/, probíhají creepové deformace za podmínek konstantního objemu a nejsou ovlivněny hydrostatickým tlakem. Odquist /29/ zobecnil Nortonův zákon pro případ tříosé napjatosti tak, aby se hydrostatická část napjatosti (aritmetický průměr normálových napětí) na creepových deformacích nepodílela. Navrhl vztah

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = f(\sigma_e) s_{ij} \quad (13.7)$$

kde

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (13.8)$$

a s přihlédnutím k rovnici (13.6)

$$f(\sigma_e) = \frac{3}{2} k \sigma_e^{n-1} \quad (13.9)$$

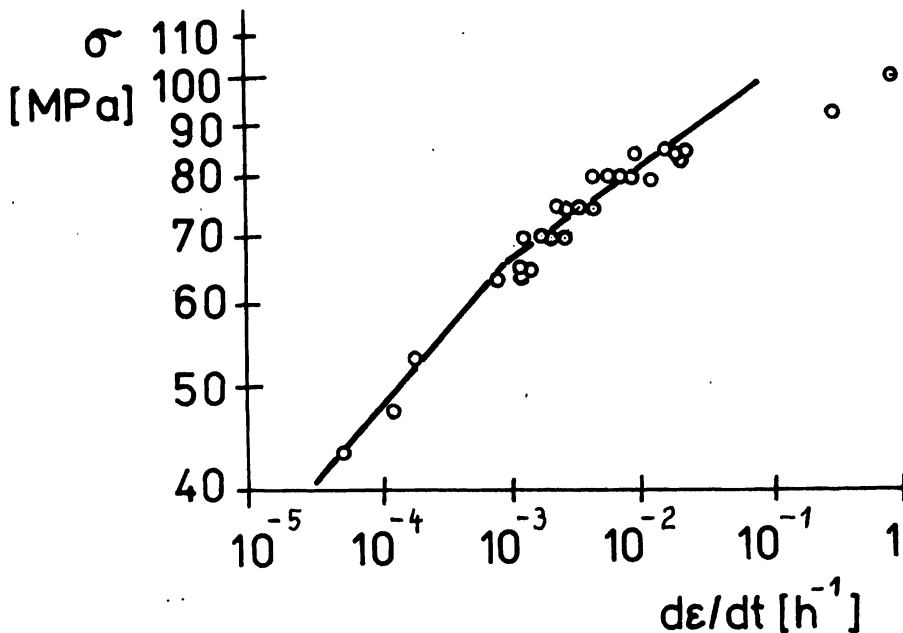
Zde  $\sigma_e$  je ekvivalentní napětí odvozené z druhého invariantu deviatoru napjatosti  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ .

Rovnice (13.7) je obdobou Misesovy rovnice pro plastické tečení, avšak s tím rozdílem, že čas  $t$  zde není pouhým parametrem, ale nezávisle proměnnou. Zákon normality se vztahuje k plochám  $\sigma_e = \text{konst.}$  Pro jednoosou napjatost přejde rovnice (13.7) do tvaru (13.6), což ukážeme v příkladu 28.

Materiálové konstanty  $k$ ,  $n$  v Nortonově zákonu (13.6) nejsou ve skutečnosti zcela nezávislé na velikosti napětí. Logaritmováním vztahu (13.6) dostaneme rovnici

$$\log\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = \log k + n \log \sigma \quad (13.10)$$

Kdyby byly  $k$ ,  $n$  skutečně konstantní, jevila by se rovnice (13.10) ve znázornění na logaritmickém papíru jako přímka. Příklad jedné takové závislosti je zakreslen na obr. 18 (podle /19/). Je zřejmé, že  $k$  přes-



OBR. 18

nějšímu výpočtu by bylo třeba použít dvou přímek, jejichž konstanty  $k$ ,  $n$  by se poněkud lišily. Zpravidla toho však nebývá třeba.

Nastává-li zároveň creep i elastická deformace, platí místo (13.6) obecnější vztah

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + k\sigma^n \quad (13.11)$$

Vztahy (13.6) a (13.11) platí pro  $\sigma > 0$  (tahové napětí). Kdyby šlo o tlak, bylo by třeba do vzorce dosadit absolutní hodnotu napětí a u rychlosti deformace změnit znaménko.

Typickým případem, kdy nelze elastické deformace při creepu zanedbat, je relaxace šroubových spojů. Nechť je dáno počáteční napětí  $\sigma = E \epsilon_0$  a nechť  $\epsilon = \epsilon_0 = \text{konst.}$  Pak  $d\epsilon/dt = 0$  a integrací (13.11) vyjde

$$\sigma^{-n+1} - \sigma_0^{-n+1} = (n-1)kEt \quad (13.12)$$



Tato rovnice dovoluje vypočítat závislost  $\sigma(t)$ , tedy pokles předpětí šroubu v závislosti na čase.

Zabývejme se dále creepem tyče o počátečním průřezu  $A_0$ , která je zatížena konstantní silou  $F$ . Z rovnice (13.5) dosadíme do (13.6) a budeme mít

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = k \frac{F^m}{A^m} \quad (13.13)$$

Derivací (13.4) dostaneme

$$d\varepsilon = - \frac{dA}{A} \quad (13.14)$$

takže

$$-A^{m-1} \frac{dA}{dt} = k F^m \quad (13.15)$$

Mění-li se čas  $t$  v mezích  $0 \leq t \leq t_{kr}$  a průřez  $A$  v mezích  $A_0 > A > A_{kr} = 0$ , dostaneme integrací

$$- \int_{A_0}^0 A^{m-1} dA = k F^m \int_0^{t_{kr}} dt \quad (13.16)$$

kritickou dobu života (životnost)

$$t_{kr} = \frac{1}{k F^m} \cdot \frac{1}{m} A_0^m = \frac{1}{k m} \cdot \frac{1}{\sigma_0} \quad (13.17)$$

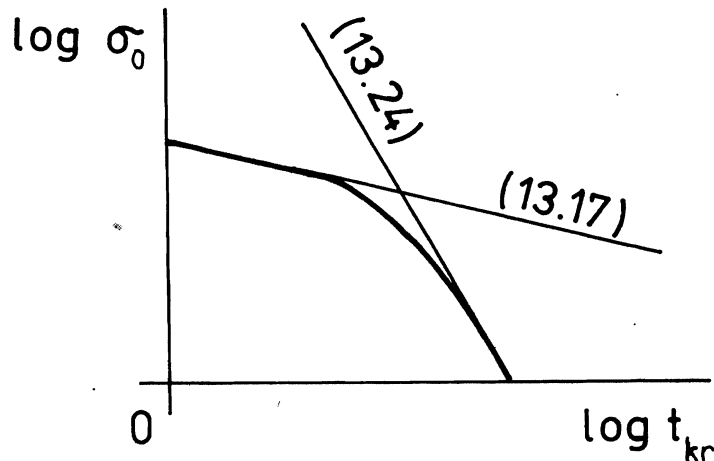
Tento vzorec upravíme s použitím vztahu (13.6). Vyjde Hoffův vzorec /15/ pro životnost tyče zatížené konstantní silou

$$t_{kr} = \frac{1}{m \dot{\varepsilon}_0} \quad (13.18)$$

(tečkou je označena derivace podle času).

Při odvození Hoffova vzorce jsme předpokládali, že kontrakce tyče pokračuje až do vymizení průřezu, kdy se deformační rychlost bez omezení zvětšuje a tyč se trhá. Zkušenost ukazuje, že takto probíhá creep až do

přetržení tyče jen při poměrně velkém počátečním napětí. To je zřejmé ze schematického obr. 19, na němž je experimentálně zjištěná závislost vyznačena tlustou čarou; Hoffův vzorec je znázorněn tenčí vytaženou přímkou označenou číslem rovnice (13.17).



OBR. 19

Je zřejmé, že mechanismus porušení je při menším namáhání tyče jiný. Nejde už o pouhé vazké tečení materiálu (creep), ale o současně probíhající významné změny v metalografické struktuře; tyto změny se za vyšší úrovně napětí neměly čas uplatnit. Jev postupných strukturálních změn spojených s vytvářením diskontinuit (mikrotrhlin) vzal v úvahu Kačanov /21/. Postupnou změnu struktury za dané teploty vyjádřil jako zmenšování efektivní velikosti průřezu podle vztahu \*)

$$A(t) = A_0 \psi(t) \quad (13.19)$$

kde  $0 < \psi(t) < 1$ . Zmenšování efektivní velikosti průřezu je způsobeno postupným porušováním soudržnosti uvnitř skutečného průřezu, tedy vznikem mikrotrhlin v ploše průřezu, která se zdánlivě - posuzováno podle obrysu - vůbec nemění, nebo se mění jen málo. Proto se někdy hovoří o "křehkém" porušení za creepu. Obdobně k Nortonovu zákonu zvolil Kačanov vztah

$$\frac{d\psi}{dt} = -c G^v \quad (13.20)$$

\*) Tyto diskontinuity mají často tvar dutinek (kavit). Zmenšují skutečný průřez stejně jako mikrotrhliny. Viz /9/.

kde  $\zeta$ ,  $\nu$  jsou konstanty závislé na materiálu a na jeho teplotě.  
Protože

$$\zeta = \zeta_0 \frac{A_0}{A} \quad (13.21)$$

vyjde ze vztahu (13.20)

$$\frac{d\psi}{dt} = -c \zeta_0^\nu \left(\frac{A_0}{A}\right)^\nu = -c \zeta_0^\nu \frac{1}{\psi^\nu} \quad (13.22)$$

což je diferenciální rovnice pro funkci  $\psi(t)$ . Integrací s počáteční podmínkou  $\psi(0) = 1$ , tj. z rovnice

$$\int_1^0 \psi^\nu d\psi = -c \zeta_0^\nu \int_0^{t_{kr}} dt \quad (13.23)$$

vyjde Kačanovův vzorec

$$t_{kr} = \frac{1}{(\nu+1)c \zeta_0^\nu} \quad (13.24)$$

Je zcela obdobný Hoffovu vzorci (13.17) až na to, že se v něm změnila velikost konstant; také fyzikální interpretace je nyní jiná. Závislost (13.24) je rovněž zakreslena do obr. 19. Dvě přímky v tomto obrázku velmi dobře vystihují skutečnost. Umožňují předvídat životnost s použitím míry poškození  $D$  definované poměrem

$$D = \frac{t}{t_{kr}} \quad (13.25)$$

Porucha vzniká, je-li  $D = 1$ .

Podle Kačanovy teorie dochází k poruše v okamžiku vymizení efektivního průřezu, kdy  $\psi \rightarrow 0$ . Zdánlivý průřez, a tedy i rozměry tyče, jsou v okamžiku přetržení konečné. Struktura tyče je však natolik porušena, že se soudržností tyče nelze počítat. V tom je rozdíl od Hoffovy teorie, která do poslední chvíle počítala s tím, že se efektivní průřez shoduje se skutečným a že k poruše dojde teprve poté, kdy se skutečný průřez stáhne k nule.

Existují i složitější teorie, které přihlížejí k vazbě mezi rychlostí creepu a creepovým porušením, popř. ke kombinaci creepu a únavy materiálu. Jimi se však nebudeme zabývat a odkazujeme na literaturu /31/. Pokud jde o rozptyl experimentálních hodnot, pojednáme o něm stručně v 16. kapitole.

### Příklad 28

Dokažte, že rovnice (13.6) je jen zvláštním případem obecnějšího zákona (13.7).

### Řešení

Pro  $\sigma_x = \sigma$ , ostatní složky napjatosti nulové, vyjde

$$\Delta_{11} = \frac{2}{3} \sigma \qquad \Delta_{22} = \Delta_{33} = -\frac{1}{3} \sigma$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{23} = \Delta_{31} = 0$$

Pak - s využitím Einsteinova součtového pravidla -

$$\Delta_{ij} \Delta_{ij} = \Delta_{11}^2 + \Delta_{22}^2 + \Delta_{33}^2 = \frac{2}{3} \sigma^2$$

a z rovnice (13.8) vyjde  $\sigma_e = \sigma$ . Když (13.9) dosadíme do (13.7), dostaneme

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \frac{2}{3} k \sigma_e^{n-1} \Delta_{ij}$$

V našem případě bude

$$\frac{d\epsilon_{11}}{dt} = \frac{2}{3} k \sigma^{n-1} \cdot \frac{2}{3} \sigma = k \sigma^n$$

což je rovnice (13.6).

Kromě toho bude pro příčnou kontrakci platit

$$\frac{d\epsilon_{22}}{dt} = \frac{d\epsilon_{33}}{dt} = \left( \frac{2}{3} k \sigma^{n-1} \right) \left( -\frac{1}{3} \sigma \right) = -\frac{1}{2} k \sigma^n$$

Okamžitá poměrná změna objemu je nulová, neboť

$$d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = 0$$

### Příklad 29

Určete konstanty  $k$ ,  $n$  pro případ creepu znázorněný na obr. 18.

### Řešení

Rovnice (13.10) představuje v souřadnicích  $\log \sigma - \log \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$  přímku. V daném případě určíme její parametry např. pro interval  $10^{-3} \text{ h}^{-1} < \frac{d\varepsilon}{dt} < 10^{-1} \text{ h}^{-1}$ .

Zvolíme dva body, např.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 10^{-1} \text{ h}^{-1}, \quad \sigma = 100 \text{ MPa}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 10^{-3} \text{ h}^{-1}, \quad \sigma = 68 \text{ MPa}$$

a dostaneme soustavu rovnic

$$-1 = \log k + 2n$$

$$-3 = \log k + 1,8325n$$

Řešením získáme  $n \doteq 11,941$ ,  $\log k \doteq -24,8819$ . Odtud vypočteme  $k \doteq 1,3125 \cdot 10^{-25}$ . Veličina  $k$  se vztahuje ke zvoleným fyzikálním jednotkám. Exponent  $n$  je poměrně velký (bývá  $n = 1,1$  až  $14$ ). Svědčí to o poměrně vysoké teplotě materiálu.

### Příklad 30

Pro materiál z příkladu 29 vypočtete dobu do přetržení prizmatické tyče zatížené stálou silou, je-li počáteční napětí v tyči  $\sigma_0 = 90 \text{ MPa}$ . Předpokládejte, že platí Hoffův vzorec.

### Řešení

Ze vzorce (13.17) vypočteme

$$t_{kr} = (1,3125 \cdot 10^{-25} \cdot 11,941 \cdot 90^{11,941})^{-1} \approx 0,34 \text{ h}$$

Tyč by se tedy přetrhla asi za 20 minut. Je to skutečně velmi vysoké napětí pro danou tyč. Většina creepových zkoušek probíhá mnohem déle, některé trvají i víc než deset let.

Kritická doba se s napětím značně mění, neboť v daném případě je exponent  $n$  značně velký. Např. pro  $\sigma_0 = 50 \text{ MPa}$  by vyšlo  $t_{kr} \approx 3292 \text{ h}$ .

### Příklad 31

Šroub, pro který platí hodnoty z příkladu 29, byl utažen na počáteční napětí 60 MPa. Za jakou dobu klesne toto napětí na poloviční hodnotu?

### Řešení

Do rovnice (13.12) dosadíme  $\sigma_0 = 60 \text{ MPa}$ ,  $\sigma = 30 \text{ MPa}$ ,  $n = 11,941$ ,  $k = 1,3125 \cdot 10^{-25}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$  (ocel). Vyjde

$$30^{-10,941} - 60^{-10,941} = (10,941)(1,3125 \cdot 10^{-25})(2 \cdot 10^5)t$$

a odtud  $t \approx 240$  hodin.

### Příklad 32

Vypočtete dobu životnosti tenkostěnného potrubí namáhaného vnitřním přetlakem za předpokladu, že dojde k dokonale vazkému porušení podle Hoffovy teorie. Potrubí je přímé a jeho osová dilatace není omezována.

### Řešení

Je-li přetlak  $p$ , střední poloměr  $r = r(t)$  a tloušťka stěny  $h = h(t)$ , bude obvodové, resp. osové a radiální napětí

$$\sigma_{11} = \frac{pr}{h} \quad \sigma_{22} = \frac{pr}{2h} \quad \sigma_{33} \approx 0 \quad (a)$$

Smyková napětí jsou vesměs nulová, takže uvedená napětí jsou hlavní. Odpovídající složky deviatoru napjatosti jsou

$$\Delta_{11} = \frac{pr}{2h} \quad \Delta_{22} = 0 \quad \Delta_{33} = -\frac{pr}{2h} \quad (b)$$

Ekvivalentní napětí  $\bar{\sigma}_e$  vyjde podle vztahu (13.8)

$$\bar{\sigma}_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pr}{h} \quad (c)$$

Je to "redukováno napětí" podle Huberovy - Misesovy - Henckeho pevnostní hypotézy. Funkce  $f(\bar{\sigma}_e)$  vyjde podle (13.9)

$$f(\bar{\sigma}_e) = \frac{3}{2} k \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pr}{h} \right)^{n-1} = 3 \frac{n+1}{2} \frac{k}{2} \bar{\sigma}_e^{n-1} \quad (d)$$

Rychlost logaritmické deformace vyjde ze vzorce (13.7) takto:

$$\frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = 3 \frac{n+1}{2} \frac{k}{2} \bar{\sigma}_e^n = 3 \frac{n+1}{2} \frac{k}{2} \left( \frac{pr}{2h} \right)^n \quad (e)$$

$$\frac{d\varepsilon_{22}}{dt} = 0 \quad (f)$$

$$\frac{d\varepsilon_{33}}{dt} = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = -3 \frac{n+1}{2} \frac{k}{2} \left( \frac{pr}{2h} \right)^n \quad (g)$$

Potrubí se tedy vlivem creepu neprodlužuje, pouze jeho poloměr roste a tloušťka stěny se zmenšuje. Z podmínky zachování objemu plyne, že  $rh = r_0 h_0$ . Z rovnice (g) pak vypočteme

$$\int_{h_0}^0 h^{2n-1} dh = -3 \frac{n+1}{2} \frac{k}{2} \left( \frac{pr_0 h_0}{2} \right)^n \int_0^{t_{cr}} dt \quad (h)$$

$$t_{cr} = \frac{1}{3 \frac{n+1}{2}} \cdot \frac{1}{k n} \left( \frac{2h_0}{pr_0} \right)^n \quad (i)$$

Zde  $h_0 = h(0)$  je počáteční tloušťka stěny potrubí.

### Příklad 33

Nosník obdélníkového průřezu o rozměrech  $b \times h$  je namáhán za vysoké teploty konstantním ohybovým momentem. Určete průběh napětí a deformační rychlost po delší době namáhání.

### Řešení

Je-li křivost nosníku  $\alpha = R^{-1}$  ( $R$  je poloměr křivosti jeho střednice), bude prodloužení vlákna vzdáleného o  $z$  od neutrální roviny

$$\varepsilon = \alpha z \quad (a)$$

Vztah (a) je důsledkem Bernoulliho - Navierovy hypotézy o zachování rovinnosti průřezů a jejich kolmosti k ohybové čáře. Za předpokladu jednoosé napjatosti platí vztah (13.11), podle něhož pro  $\sigma > 0$

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + k \sigma^n = z \frac{d\alpha}{dt} \quad (b)$$

Po delší době bude trvalá deformace mnohem větší než elastická, takže první člen v rovnici (b) lze zanedbat. Potom (pro  $z > 0$ )

$$\sigma = \sqrt[n]{\frac{z}{k} \cdot \frac{d\alpha}{dt}} \quad (c)$$

a pro ohybový moment dostaneme - s přihlédnutím k souměrnosti -

$$\begin{aligned} M_0 &= 2b \int_0^{h/2} \sigma z dz = 2b \int_0^{h/2} \sqrt[n]{\frac{z}{k}} \cdot z dz = \\ &= b \int_0^{h/2} \sqrt[n]{\frac{z}{k}} \cdot \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{2n+1}{n}} dz = \end{aligned}$$

(d)

Je tedy (pro plně vyvinutý creep,  $t \rightarrow \infty$ )

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left(\frac{4M_0}{b h^2}\right)^n \frac{2k}{h} \quad (e)$$



a pro  $z > 0$

$$\sigma = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \frac{4M_0}{bh^2} \sqrt[n]{\frac{2z}{h}} \quad (f)$$

Pro  $z < 0$  bude napětí probíhat antisymetricky, tj. bude

$$\sigma(z) = -\sigma(-z) \quad (g)$$

Lze ukázat, že počáteční rychlost změny křivosti  $\dot{\kappa}(t=0)$  je větší než  $\dot{\kappa}(t \rightarrow \infty)$  podle (e) v poměru

$$\frac{\dot{\kappa}(t=0)}{\dot{\kappa}(t \rightarrow \infty)} = \frac{3(3n)^n}{(n+2)(2n+1)^n} \quad (h)$$

a že stadium plně vyvinutého creepu, pro které platí vzorce (e) a (f), nastává poměrně krátce po začátku zatěžování. Tyto vzorce tedy prakticky platí po velkou část zatěžovací doby. V inženýrských aplikacích lze bez větší chyby předpokládat, že uvedené vzorce platí po celou dobu zatěžování /13/.

#### 14. ENERGETICKÉ PRINCIPY V PODMÍNKÁCH CREEPU

Nortonův zákon (13.6) je analogický k deformačnímu zákonu pro nelineárně elastické těleso

$$\varepsilon = k \sigma^n \quad (14.1)$$

To znamená, že v tělese, jehož materiál se v podmínkách creepu řídí Nortonovým zákonem, jsou poměrné deformační rychlosti rozloženy stejně jako poměrné deformace v jiném, nelineárně elastickém tělese stejného tvaru při stejných okrajových podmínkách. Je tedy možné - pro toto druhé těleso - použít energetických principů známých z teorie nelineární elasticity.

Při jednoosém namáhání je např. v objemovém elementu  $dV$  uložena deformační energie  $dU$  vypočtená podle vzorce

$$\begin{aligned}
 dU &= dV \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \\
 &= \frac{dV}{\sqrt[n]{k}} \int_0^\varepsilon \sqrt[n]{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{n}{n+1} \frac{dV}{\sqrt[n]{k}} \varepsilon^{\frac{n+1}{n}}
 \end{aligned}
 \tag{14.2}$$

kdežto komplementární energie napjatosti  $d\tilde{U}$  vyjde

$$\begin{aligned}
 d\tilde{U} &= dV \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma = \\
 &= k dV \int_0^\sigma \sigma^n d\sigma = \frac{k dV}{n+1} \sigma^{n+1}
 \end{aligned}
 \tag{14.3}$$

Pro prutovou soustavu bude komplementární energie napjatosti dána součtem energií v jednotlivých prutech

$$\tilde{U} = \frac{k}{n+1} \sum_{i=1}^N A_i l_i \left( \frac{F_i}{A_i} \right)^{n+1}
 \tag{14.4}$$

Pro nosník v podmínkách plně vyvinutého creepu (z příkladu 33) dostaneme

$$\tilde{U} = \frac{\gamma}{n+1} \int_0^l M_0^{n+1} dx
 \tag{14.5}$$

kde

$$\gamma = 2^{n+1} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n \left( \frac{1}{l} \right)^n \left( \frac{1}{h} \right)^{2n+1} k
 \tag{14.6}$$

Pro analogický nelineárně elastický nosník pak platí vztah mezi křivostí  $\varkappa$  a ohybovým momentem  $M_0$

$$\varkappa = \gamma M_0^n
 \tag{14.7}$$

[srovnej se vzorcem (e) z příkladu 33, podle něhož  $\varkappa = \gamma M_0^n$ ]

Značí-li  $Q_k$  nějakou zobecněnou sílu a  $q_k$  odpovídající zobecněný posuv, bude pro nelineárně elastické těleso platit známá Castiglianova věta

$$q_k = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial Q_k} \quad (14.8)$$

a pro dané těleso v podmínkách creepu

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial \dot{\tilde{U}}}{\partial Q_k} \quad (14.9)$$

V podrobnostech odkazujeme na práci /12/.

### Příklad 34

Prostě podepřený štíhlý nosník obdélníkového průřezu  $b \times h$  délky  $l$  je uprostřed zatížen osamělou silou  $F$ . Stanovte rychlost narůstání průhybu v působišti síly  $F$ .

### Řešení

Zanedbáme-li vliv posouvající síly a kontaktní napětí v okolí jejího působišti, k čemuž nás opravňuje skutečnost, že nosník je štíhlý, můžeme použít vzorec (14.5) pro výpočet komplementární energie napjatosti sdruženého nelineárně elastického nosníku. Protože

$$M_0 = \frac{F}{2} x \quad \text{pro} \quad 0 \leq x = \frac{l}{2} \quad (a)$$

vyjde

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{2\gamma}{m+1} \int_0^{l/2} M_0^{m+1} dx = \frac{2\gamma}{m+1} \left(\frac{F}{2}\right)^{m+1} \int_0^{l/2} x^{m+1} dx = \\ &= \frac{\gamma F^{m+1}}{2^m (m+1)(m+2)} \left(\frac{l}{2}\right)^{m+2} = \frac{\gamma F^{m+1} l^{m+2}}{2^{2(m+1)} (m+1)(m+2)} \end{aligned}$$

(b)

Zobecněné síly a posuvy jsou  $Q = F$ ,  $q = w(x=l/2) = w_1$ , takže rychlost narůstání průhybu  $w_1$  uprostřed nosníku bude

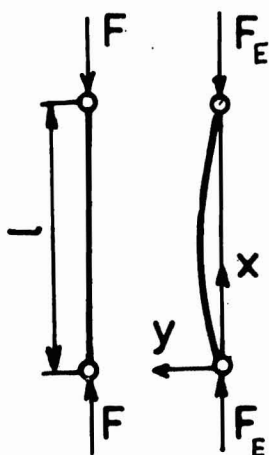
$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{d\tilde{U}}{dF} = \frac{\gamma F^m l^{m+2}}{2^{2(m+1)} (m+2)} \quad (c)$$

Když sem dosadíme z rovnice (14.6), vyjde nakonec

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{1}{2^{(m+1)}} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^m \frac{1}{m+2} \frac{l^{m+2}}{6^m h^{2m+1}} k F^m \quad (d)$$

## 15. STABILITA KONSTRUKCÍ ZA VYSOKÝCH TEPLŮT

V této kapitole již nebudeme vzorce odvozovat, uvedeme pouze výsledky. Začneme s případem vzpěry s kloubově uloženými konci. Kdyby byla vzpěra dokonale přímá a homogenní a síla by působila přesně v ose, byla by namáhána pouhým tlakem. Rovnováha by byla stabilní, pokud by síla - za předpokladu ideální elasticity - nedosáhla Eulerovy kritické hodnoty (obr. 20)



OBR. 20

$$F_E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \quad (15.1)$$

Zde  $l$  je délka prutu,  $EJ$  jeho ohybová tuhost vztahovaná k centrální ose průřezu kolmé k rovině ohybu při vybočení prutu. Ve skutečnosti nebude prut dokonale přímý a síla nebude přesně centrována. Ani homogenitu materiálu vzpěry nelze zcela zaručit. Tyto odchylky od čistého tlaku vzpěry lze vzít v úvahu za předpokladu, že skutečný tvar střednice  $y(x)$  nezátíženého prutu bude nějakou obecnou nenulovou funkcí, o níž budeme předpokládat, že je spojitá a hladká na intervalu  $0 < x < l$

a že splňuje okrajové podmínky  $y(0) = 0$ ,  $y(l) = 0$ . Tuto funkci lze zřejmě rozvinout do Fourierovy řady

$$y(x) = y_1 \sin \frac{\pi x}{l} + y_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + y_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (15.2)$$

Předpokládejme, že v této řadě bude dominantní první člen. Zavedeme bezrozměrovou veličinu

$$a_{00} = y_1 \sqrt{\frac{A}{J}} \quad (15.3)$$

kde  $A$  je průřez a  $\sqrt{J/A}$  poloměr setrvačnosti průřezu.  $\pi$ ) Efektivní počáteční průhyb pak bude

$$y_{00}(x) \approx a_{00} \sqrt{\frac{J}{A}} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (15.4)$$

Při zatížení tlakovou silou  $F$  se tento průhyb zvětší na hodnotu

$$y_0(x) = a_0 \sqrt{\frac{J}{A}} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (15.5)$$

kde

$$a_0 = a_{00} \frac{F_E}{F_E - F} \quad (15.6)$$

Zároveň se začne rozvíjet creep, během něhož se bezrozměrový průhyb  $a_0$  zvětší na hodnotu  $a = a(t)$ . Je-li  $n = 3$ , lze pro ni odvodit implicitní závislost

---

$\pi$ ) Norma ČSN 01 1302 zavedla pro tento pojem nesmyslný název "kvadratický poloměr průřezu". Pro veličinu  $J = \int y^2 dA$  zavedla název "kvadratický moment průřezu", avšak pro jinou, rovněž "kvadratickou" veličinu  $D = \int xy dA$  ponechala název "deviační moment průřezu". Norma tak nedůsledně zatemnila analogii mezi geometrickými a mechanickými veličinami i jejich tenzorový charakter.

$$t = \frac{1}{6} \frac{F_E - F}{F_E} t_E \ln \frac{a^2(4+a_0^2)}{a_0^2(4+a^2)} \quad (15.7)$$

Tzv. Eulerův čas  $t_E$  je přitom dán vztahem

$$t_E = \frac{\varepsilon_E}{\dot{\varepsilon}_{nom}} \quad (15.8)$$

v němž

$$\varepsilon_E = \frac{F_E}{EA} \quad \dot{\varepsilon}_{nom} = k \left( \frac{F}{A} \right)^m \quad (15.9)$$

Bezrozměrový průhyb  $a(t)$  se z počátku mění velmi pomalu, pak se však růst deformace zrychluje a při  $t = t_{kr}$  roste  $a$  nade všechny meze. Kritický čas  $t_{kr}$  vypočteme ze vztahu (15.7), když přejdeme k limitě  $a \rightarrow \infty$ . Vyjde

$$t_{kr} = \frac{1}{6} \frac{F_E - F}{F_E} t_E \ln \frac{4+a_0^2}{a_0^2} \quad (15.10)$$

Většinou bývá  $a_0 \ll 1$ ; pak

$$t_{kr} \approx \frac{1}{3} \frac{F_E - F}{F_E} t_E \ln \frac{2}{a_0} \quad (15.11)$$

Protože se v tomto vztahu vyskytuje logaritmus bezrozměrového průhybu, nezáleží příliš na přesnosti, s jakou hodnotu  $a_0$  stanovíme (přiměřená změna  $a_0$  způsobí jen malou změnu  $t_{kr}$ ).

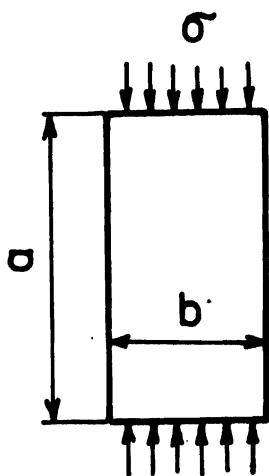
Ve skutečnosti přestane použitá teorie platit, bude-li průhyb příliš velký, takže případ  $\lim a \rightarrow \infty$  je jen hypotetický. Kromě creepu budou vznikat také plastické deformace. Obě tyto odchylky však nemají velký praktický význam. Pokud jde o výpočet vzpěru pro jiné hodnoty exponentu než  $m = 3$ , odkazujeme na literaturu /14/.

K výpočtu vzpěrné pevnosti při creepu jsme vyšli z předpokladu počáteční odchylky od přímého tvaru prutu. Lze se však obejít i bez tohoto

předpokladu a vyjít z klasické bifurkační teorie a z teorie strukturálních změn během creepu. Pak se nepočítá kritická doba do zhroutilí vzpěry, ale do okamžiku ztráty stability. Oba přístupy lze kombinovat /19/.

Zabývejme se dále případem obdélníkové desky o tloušťce  $h$ , šířce  $b$  a délce  $a > b$  (obr. 21). Jsou-li okraje desky kloubově uloženy, je kritické tlakové napětí na mezi elasticke stability dáno vzorcem

$$\sigma_E \approx 3,6 E \left( \frac{h}{b} \right)^2 \quad (15.12)$$



Přenášená síla je  $F = \sigma b h$ ,  $\sigma < \sigma_E$ . Předpokládejme opět počáteční nerovnost s amplitudou průhybu  $W_0$  (je to amplituda základní harmonické složky). Jí odpovídá bezrozměrová excentricita

$$e_{\infty} = \frac{W_0}{h} \quad (15.13)$$

která se ihned po zatížení zvětší na hodnotu

$$e_0 = e_{\infty} \frac{\sigma_E}{\sigma_E - \sigma} \quad (15.14)$$

Zároveň začne creep. Kritická doba do velkého vyboulení desky ( $\lim e \rightarrow \infty$ ) vyjde ze vzorce

$$t_{kr} = C_1 \frac{\sigma_E - \sigma}{\sigma_E} t_E \ln \frac{C_2 + e_0^{n-1}}{e_0^{n-1}} \quad (15.15)$$

Eulerův čas  $t_E$  bude

$$t_E = \frac{\epsilon_E}{\dot{\epsilon}_{nom}} \quad (15.16)$$

a jmenovitá rychlost logaritmičké deformace

$$\dot{\epsilon}_{\text{nom}} = k \sigma^m = k \left( \frac{F}{b h} \right)^m \quad (15.17)$$

Konstanty  $C_1$ ,  $C_2$  v rovnici (15.15) závisí na exponentu v Nortonově zákonu. Přibližně platí vztahy

$$C_1 = \frac{1,72}{m^{1,41}} \xi \quad C_2 = \frac{3,24}{e^{0,6m}} \quad (15.18)$$

pro  $3 \leq m \leq 7$ . Přitom  $\xi = 1$ , je-li  $m < 4$ . Jinak platí tabulka (pro  $m \geq 4$ )

$e_0$	0,001	0,01	0,01
$\xi$	1,0	0,8	0,6

Kritickou dobou zde rozumíme dobu do velkého vyboulení desky. To ještě nemusí znamenat její úplné zhroucení. Napětí se může jinak rozdělit a kloubové podpěry mohou úplnému zhroucení desky zabránit. Značně vyboulená deska se však považuje za provozně nezpůsobilou.

K tomu poznamenejme, že kloubové podepření okraje desky je třeba si představit jako závěs, který umožňuje otočení okraje desky pouze kolem osy spadající do směru tečny k okraji (jde-li o přímý okraj, tedy kolem okraje). U obdélníkové desky si podepřenou stranu představujeme tak, jako by byla uložena na pianovém závěsu ("pantu"). Kladný ani záporný průhyb není na kloubově podepřeném okraji možný.

Je-li válcová skořepina namáhána osovým tlakem silou  $F = 2\pi r h \sigma$ , je - jak známo - Eulerovo vzpěrné napětí, resp. poměrné zkrácení, dáno vzorcem

$$\sigma_E = 0,6 E \frac{h}{r} \quad \epsilon_E = 0,6 \frac{h}{r} \quad (15.19)$$

a kritická doba je

$$t_{kr} = \Gamma D_1 \frac{\sigma_E - \sigma}{\sigma_E} t_E \ln \frac{e_0^2 + D_2}{e_0^2} \quad (15.20)$$



kde

$$D_1 = \frac{0,6}{n^{0,65}} \quad D_2 = \frac{0,368}{n^{0,106}} \quad (15.21)$$

Vzorce (15.21) platí pro  $3 \leq n \leq 11$ . Pro Eulerův čas  $t_E$  platí vzorec (15.6), v němž

$$\dot{\epsilon}_{nom} = k \left( \frac{F}{2\pi r h} \right)^m \quad (15.22)$$

a pro  $e_0$  platí (15.14). Bezrozměrová excentricita  $e_{00}$  se nyní vztahuje k základní osově symetrické harmonické složce nerovnosti o vlnové délce

$$\lambda \approx 1,7 \sqrt{r h} \quad (15.23)$$

Korekční faktor  $\Gamma$  je dán vztahem

$$\Gamma = 1 - \frac{\ln \frac{0,328 + e_{kr}^2}{e_{kr}^2}}{\ln \frac{0,328 + e_{00}^2}{e_{00}^2}} \quad (15.24)$$

kde

$$e_{kr} = 0,4 \frac{(\sigma_E - \sigma)^2}{\sigma \sigma_E} \quad (15.25)$$

Jako poslední případ probereme ohyb tenkostěnného potrubí (válcové skořepiny). Předpokládáme, že ohybový moment  $M$  je konstantní podél potrubí i v čase. Pro kritický čas  $t_{kr}$  platí za určitých zjednodušujících předpokladů vzorec

$$t_{kr} = \frac{M_{kr} - M}{M_{kr}} \left[ H_1 \frac{\epsilon_E}{\dot{\epsilon}_{nom}} - H_2 \frac{\epsilon_0}{\dot{\epsilon}_{nom}} \right] \quad (15.26)$$

v němž (pro  $1 < n \leq 11$ )

$$M_{kr} = 0,35 \pi h^2 r E$$

$$\varepsilon_E = 0,6 \frac{h}{r}$$

$$E_0 = \frac{M}{\pi h r^2 E}$$

$$\dot{\varepsilon}_{nom} = k \left( \frac{M}{\pi h r^2} \right)^n$$

$$H_1 = 1,25 e^{0,235n}$$

$$H_2 = 0,78 e^{0,235n}$$

( $e$  je základ přirozených logaritmů).

## 16. ROZPTYL ŽIVOTNOSTI KONSTRUKCÍ V PODMÍNKÁCH CREEPU

Nortonův empirický zákon (13.6) vyjadřuje vztah mezi okamžitou rychlostí poměrné deformace

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{l(t)} \frac{dl(t)}{dt} \quad (16.1)$$

a napětím  $\sigma(t)$ . Tento vztah je silně nelineární. Představuje určitou idealizaci složité skutečnosti, jak jsme ukázali na obr. 18.

V 13. kapitole jsme uvedli dva vzorce pro výpočet doby do přetržení tyče zatížené za dané konstantní teploty konstantní silou  $F$ . První vzorec (13.18) vyšel z předpokladu dokonale vazkého porušení. Druhý vzorec (13.24) předpokládá "křehké" porušení (zdánlivá velikost průřezu se prakticky nemění, ale zmenšuje se efektivní průřez vytvářením strukturálních vad uvnitř průřezu). První vzorec platí pro relativně velká, druhý pro relativně malá namáhání. Skutečný průběh křivky životnosti lze získat vepsáním oblouku vyznačeného tlustou čarou na obr. 19, který se k oběma citovaným řešením přimyká.

V příkladu 32 jsme uvedenou metodu zobecnili na případ tenkostěnného potrubí zatíženého vnitřním přetlakem a vypočetli jeho životnost za předpokladu dokonale vazkého porušení. V 15. kapitole jsme počítali dobu do zhroutení konstrukce, popř. do jejího nepřijatelného vyboulení.

V použité teorii byla vždy různá omezení. Avšak nejpodstatnější omezení tkví ve statistické povaze creepového porušení. Creep je výsledkem složitých a četných, zčásti protichůdných změn, které probíhají jednak v mikrostruktuře materiálu, jednak v geometrii konstrukce. Dvě stejně vyrobené části ze stejného materiálu se při téže teplotě a při stejném zatížení nezachovají stejně. Zvláště výpočet životnosti je zatížen velkým rozptylem. Stává se, že i při velmi pečlivě kontrolovaných pokusech je poměr nejdelší a nejkratší životnosti vzorků z téhož materiálu a při téže teplotě až 3 : 1. K tomu je třeba přihlížet při volbě vhodné míry bezpečnosti, popř. aplikovat statistické metody (ČSN 01 0250).

V souvislosti s tím citoval profesor Odquist na mezinárodním kongresu v Kalifornii roku 1968 slova Marka Twaina: "Je velmi obtížné něco předvídat, obzvláště jde-li o budoucnost." \*)

\*) Profesor Folke Odquist se narodil r. 1899, takže v době, kdy pronášel tento výrok, mu bylo téměř 70 let; zemřel r. 1984.

## Literatura

- /1/ ALBRECHT, W.: Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern. Konstruktion 18 (1966), č. 6, s. 224-231.
- /2/ BAILEY, R.W.: Trans. World Power Conf., sv. 3, s. 1089, Tokyo 1929. Viz též: Proc. Inst. Mech. Engrs., London 131 (1935), s. 260.
- /3/ BATHE, K.J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1982.
- /4/ BEISER, A.: Úvod do moderní fyziky. Praha, Academia 1975.
- /5/ BOGOV, I.A.: Ploskije zadači termouprugosti v gazoturbostrojeniji. Leningrad, Izd. Leningr. Univ. 1984.
- /6/ BOLEY, B.A. - WEINER, J.H.: Theory of Thermal Stresses. New York, John Wiley 1960.
- /7/ CHADWICK, P.: Thermoelasticity, the Dynamical Theory. In: Progress in Solid Mechanics (red.: I.E. Sneddon, R. Hill). Amsterdam, North-Holland Publ. Co. 1960.
- /8/ COOK, R.D.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 2. vyd. New York, John Wiley 1981.
- /9/ ČADEK, J.: Creep kovových materiálů. Praha, Academia 1984.
- /10/ ELSGOLC, L.E.: Variační počet. Praha, SNTL 1965.
- /11/ FUNG, Y.C.: Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- /12/ HOFF, N.J.: Approximate Analysis of Structures in the Presence of Moderately Large Creep Deformations. Quarterly of Applied Mathematics 12 (1954), č. 1, s. 49.
- /13/ HOFF, N.J. (red.): High Temperature Effects in Aircraft Structures. London, Pergamon Press 1958.
- /14/ HOFF, N.J.: Rules and Methods of Stress and Stability Calculations in the Presence of Creep. ASME Journal of Applied Mechanics 45 (1978), s. 669-675.
- /15/ HOFF, N.J.: The Necking and the Rupture of Rods Subjected to a Constant Tensile Load. Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics 20 (1953), č. 1, s. 105.
- /16/ HÖSCHL, C.: Principy a zákony mechaniky poddajných těles, I. část. Praha, publikace DT ČSVTS Praha č. 60-537-78 (1491) 1978.
- /17/ HÖSCHL, C.: Pružnost a pevnost ve strojnictví. Praha, SNTL 1971.
- /18/ HÖSCHL, C.: Užití malých počítačů v dynamice soustav. Praha, publikace DT ČSVTS Praha č. 60-643-83 (DT 2420), 1983.

- /19/ HULT, J. (ed.): Creep in Structures. Berlin, Springer-Verlag 1972.
- /20/ JANATKA, J.: Tepelné namáhání trubky v osově souměrném teplotním poli. Výzkumná zpráva č. Z 191/64, Praha, ÚT ČSAV 1964.
- /21/ KAČANOV, L.M.: O vremeni razrušenija v uslovijach polzučesti. Izvěstija AN-SSSR, otd. techn. nauk (1958), č. 8, s. 26-31. Viz též: Problems of Continuum Mechanics. Philadelphia, Muskhelishvili Anniversary Volume 1961.
- /22/ KLEČKOVÁ, M.: Nestacionární teplotní pole napjatosti ve strojních částech. Praha, SNTL 1979.
- /23/ KOVALENKO, A.D.: Termourpugosť. Kijev, Naukova Dumka 1975.
- /24/ LOVE, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Přetisk 4. přeprac. vyd., New York, Dover Publ. 1944.
- /25/ MALININ, N.N.: Prikladnaja teorija plastičnosti i polzučesti. Moskva, Mašinostrojenije 1975.
- /26/ MANDEL, J. - BRUN, L. (red.): Mechanical Waves in Solids. Wien - New York, Springer-Verlag 1975.
- /27/ NORTON, F.H.: Creep of Steel at High Temperatures. New York, McGraw-Hill 1929.
- /28/ ODQUIST, F.K.G.: Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture. 2. vyd., Oxford, Clarendon Press 1974.
- /29/ ODQUIST, F.G.: in: Proc. IV. Int. Cong. Appl. Mech., s. 228. Cambridge 1934.
- /30/ PENNY, R.K.: Design for Creep. New York, McGraw-Hill 1971.
- /31/ RABOTNOV, Y.N.: Polzučesť elementov konstrukciji. Moskva 1966.
- /32/ Sborník referátů "Problémy pevnostních výpočtů za vysokých teplot". Praha, ČVUT 1970.
- /33/ Tepelná napjatost částí strojů a konstrukcí. Učební texty pro postgraduální kurs. Praha, ÚT ČSAV 1966.
- /34/ TIMOŠENKO, Š.P. - WOINOWSKI-KRIEGER, S.: Plastinki i oboločki. Moskva, Nauka 1966.
- /35/ Účinky teploty na chování strojních součástí a konstrukcí. Praha, publikace DT ČSVTS Praha č. 60-624-76 (1139) 1976.
- /36/ VALCHÁŘOVÁ, J.: Soudobé numerické metody v mechanice kontinua. Praha, SNTL 1986.

---

Název:	Stavba strojů 104 VLIV TEPLoty NA NAPJATOST A PEVNOST ČÁSTÍ
Autor:	Prof. Ing. Cyril Höschl, Ústav termomechaniky ČSAV
Počet stran:	126
Náklad:	160
Formát:	A4
Číslo publikace:	60 - 617 - 86 /3275-217 G/
Vydal a rozmnožil:	Dům techniky ČSVTS Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23
Rok vydání:	1986 DT 01 - 417/86
Cena publikace:	210,- Kčs (cenový výměr DT č. 121/1986)