# Disperzní chyby B-spline varianty metody konečných prvků

**Ing. Radek Kolman, Ph.D.**

Ústav termomechaniky AV ČR, v. v. i.
Praha

SIGA 2011
Spliny a IsoGeometrická Analýza 2011
9. únor 2011
Ústav termomechaniky AV ČR, v. v. i., Praha

# Obsah

- Šíření elastických vln v 1D kontinuu
- Pojem disperze
- Metoda konečných prvků
  - Lagrangeovy polynomy - klasická varianta
  - B-spline bázové funkce
- Výsledky disperzní analýzy
  - Vliv stupně splinů
  - Vliv počtu řídících bodů
  - Vliv parametrizace (linearní versus nelinearní)
- Porovnaní výsledků disperzní analýzy pro B-spline a klasickou variantu MKP
- Závěr

# Šíření elastický vln v 1D kontinuu

Achenbach, J.D. *Wave propagation in Elastic Solids.* North-Holland Publishing Comp., American Elsevier Publishing Comp., Inc., New York, 1973.

Pohybová rovnice - vlnová rovnice

$$E\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t \in \langle 0, \infty)$$

$E$ je Youngův modul pružnosti, $\rho$ je hustota.

Rychlost vln v tyči

$$c_0 = \sqrt{E/\rho}$$

Vlnové řešení – monochromatická vlna

$$u(x,t) = U\ \exp[\mathrm{i}(k\,x \pm \omega\,t)]$$

Vlnová délka, vlnové číslo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

# Šíření elastický vln v 1D kontinuu

Achenbach, J.D. *Wave propagation in Elastic Solids.* North-Holland Publishing Comp., American Elsevier Publishing Comp., Inc., New York, 1973.

Fázová rychlost

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Grupová rychlost

$$c_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

Disperzní zákon

$$\omega = \omega(k)$$

Konstantním $E$, $\rho$ odpovídá bezdisperzní kontinuum $\Rightarrow$ lineární disperzní zákon

$$c = c_g = c_0 = const \qquad \Rightarrow \qquad \omega = c_0\, k$$

Diskretizovaný systém, disperzní zákon je nelineární a obecně platí

$$c = \frac{\omega(k^h)}{k^h} \neq c_0 \quad \text{a} \quad c_g = \frac{\mathrm{d}\omega(k^h)}{\mathrm{d}k^h} \neq c_0$$

# Metoda konečných prvků - 1D

Spojitá Galerkinova aproximační metoda.

Prostorová diskretizace

$$u^e(\xi) = \mathbf{H}(\xi)\mathbf{u}^e, \quad \mathbf{u}^e - \text{ vektor uzlových, popř. řídících hodnot}$$

kde $\mathbf{H}$ je matice tvarových funkcí a $\mathbf{B}$ je matice derivací tvarových funkcí.

Pohybová rovnice pro diskretizovaný systém

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^h + \mathbf{K}\mathbf{u}^h = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{M} = \int_h \varrho \mathbf{H}^\intercal \mathbf{H} \, \mathrm{d}x, \qquad \mathbf{K} = \int_h E \, \mathbf{B}^\intercal \mathbf{B} \, \mathrm{d}x$$

Matice hmotnosti $\mathbf{M}$:

- konzistentní
- diagonální (lumped mass matrix)
  – metoda řádkových součtů (row-sum method)
  – škálovací metoda (HRZ method)

# Klasická MKP - 1D úloha

Lagrangeovy polynomy

$$h_i\left(\xi\right) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_i}{\xi_j - \xi_i}, \quad \forall\, i, j \, \in \left\{1, 2, \ldots, p+1\right\}, \quad \xi_i - \text{poloha uzlu, rovnoměrné dělení}$$

Vlastnost Lagrangeových polynomů

$$h_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

Gaussův-Legendrův kvadraturní vzorec

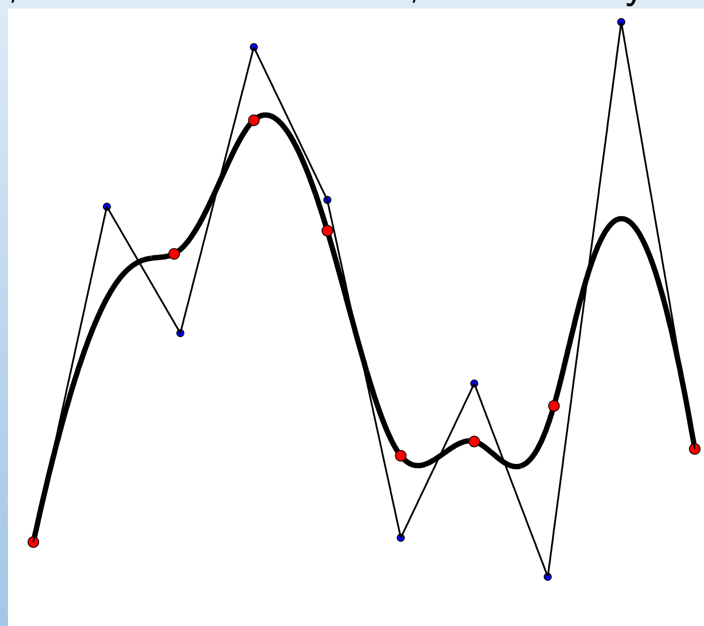
$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i f(\tilde{\xi}_i), \quad \tilde{\xi}_i - \text{integrační body} = \text{kořeny Legendrových polynomů } P_n$$

$$\tilde{\xi}_i \neq \xi_i, \forall\, i \, \in \left\{1, 2, \ldots, p+1\right\}, \quad p - \text{stupeň polynomu}$$

# B-spline křivka

B-spline křivka - parametricky popsána po částech spojitá polynomiální křivka stupně $p$. V uzlových bodech (v místech napojení segmentů) vykazuje $C^{p-1}$ spojitost. Násobností uzlů je možné ovlivňovat stupeň spojitosti.

stupeň $p = 3$, řídících bodů $n = 10$, rovnoměrný uzlový vektor



Zobecněním B-spline křivek jsou NURBS křivky - zavedením vah řídících bodů.

# B-spline křivka

B-spline křivka je dána vektorovou rovnicí

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi)\,\mathbf{P}_i,$$

kde $\mathbf{P}_i$, $i = 1, \ldots, n$ jsou souřad. řídících bodů a $N_{i,p}$ jsou bázové fce stupně $p$.

Možnosti ovlivňování tvaru křivky:

- polohami řídících bodů $\mathbf{P}_i$
- stupněm křivky $p$
- uzlovým vektorem $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+p+1}\}$

Druhy B-spline křivek:

- otevřená, ukotvená, uzavřená
- uniformní (rovnoměrná), neuniformní (rozdíl přírůstků parametrů)
- aproximační, interpolační

# B-spline varianta MKP - 1D případ

Piegl, L., Tiller, W. *The NURBS Book, 2nd Edition.* Springer-Verlag, 1997.

Pro daný uzlový vektor $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+p+1}\}$ jsou B-spline bázové funkce definovány rekurzivě.

Pro nultý stupeň $(p = 0)$ jsou po částech konstantní funkce dány

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže} \quad \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pro vyšší stupně $p = 1, 2, 3, ...$ platí

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

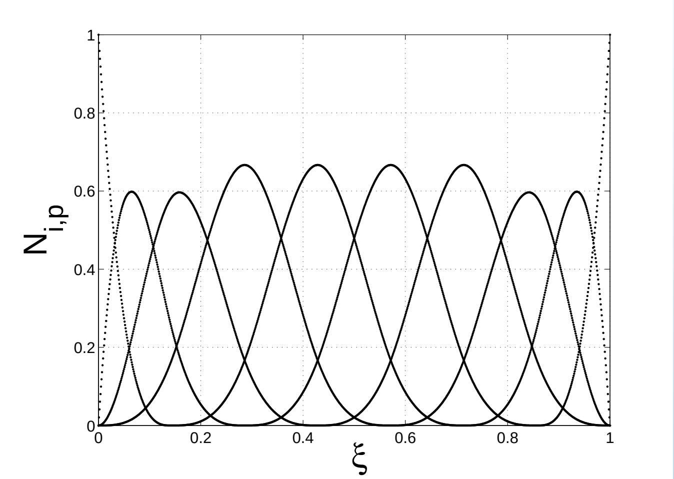
Aproximace pole posuvů $u^h$ pomocí B-spline bazových funkcí je dáno

$$u^h(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi)\, u_i^B,$$

kde $u_i^B$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou hodnoty v řídících bodech.

# Příklad B-spline bázových funkcí

stupeň $p = 3$, řídících bodů $n = 10$, rovnoměrný uzlový vektor



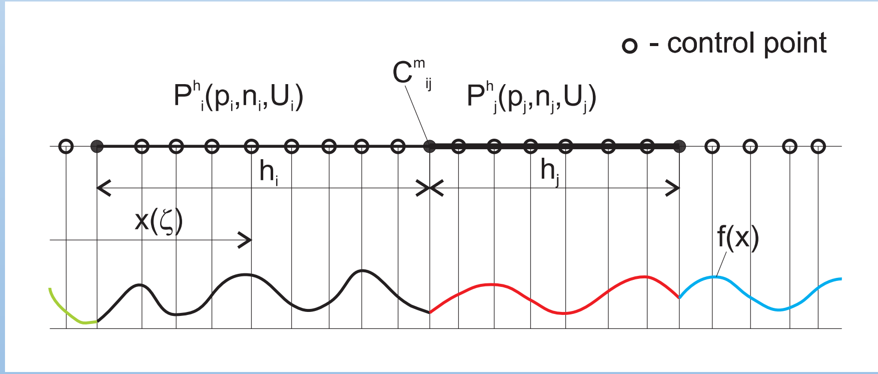

Základní vlastnosti:

- Rozklad jedničky, platí: $\sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) = 1$
- Malá podpora $N_{i,p}$ a nenulové pouze na intervalu $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$
- B-spline bázové funkce jsou nazáporné: $N_{i,p}(\xi) \geq 0 \, \forall \xi$
- $C^{p-k}$ po částech spojité polynomy, $k$ je stupeň násobnosti řídícího bodu

# B-spline varianta MKP - 1D případ

Aproximované pole posuvů pomocí B-spline může být ovlivněno:

- délkou B-spline segmentu ($h$-*refinement*)
- stupněm splinů ($p$-*refinement*)
- počtem řídících bodů ($k$-*refinement*)
- polohou řídících bodů (linearní versus nelinearní parametrizace)
- násobností uzlu v uzlovém vektoru $\Xi$
- $C^m$ spojitostí mezi B-spline segmenty, $m < p - 1$ stupeň spojitosti mezi segmenty



# Příklad matice tuhosti

Lagrange - p = 2, NELEM = 5, NNOD = 11

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 35/3 | -40/3 | 5/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | -40/3 | 80/3 | -40/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 5/3 | -40/3 | 70/3 | -40/3 | 5/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | -40/3 | 80/3 | -40/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 5/3 | -40/3 | 70/3 | -40/3 | 5/3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | -40/3 | 80/3 | -40/3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5/3 | -40/3 | 70/3 | -40/3 | 5/3 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -40/3 | 80/3 | -40/3 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5/3 | -40/3 | 70/3 | -40/3 | 5/3 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -40/3 | 80/3 | -40/3 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5/3 | -40/3 | 35/3 |

B-spline - p = 2, n = 11

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1460/189 | -1030/189 | -430/189 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | -1030/189 | 1745/189 | -400/189 | -5/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | -430/189 | -400/189 | 1775/189 | -10/3 | -5/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | -5/3 | -10/3 | 10 | -10/3 | -5/3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | -5/3 | -10/3 | 10 | -10/3 | -5/3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | -5/3 | -10/3 | 10 | -10/3 | -5/3 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | -5/3 | -10/3 | 10 | -10/3 | -5/3 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -5/3 | -10/3 | 10 | -10/3 | -5/3 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -5/3 | -10/3 | 1775/189 | -400/189 | -430/189 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -5/3 | -400/189 | 1745/189 | -1030/189 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -430/189 | -1030/189 | 1460/189 |

# Prostorová disperze

Brillouin, L.: *Wave Propagation in Periodic Structures.*
Dover Publications, Inc., New York 1953.

Pohybová rovnice

$\ddot{u}_j = \omega_0^2(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})$

Řešení

$u_j(t) = U_0 e^{\mathrm{i}j\psi} e^{\mathrm{i}\omega t}$

kde $\psi = K + \mathrm{i}b$, $K \in < -\pi, \pi >$

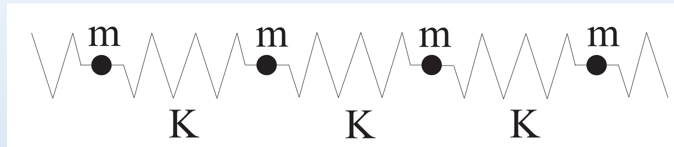
Pro $\omega/\omega_0 < 2$ - vlnové řešení

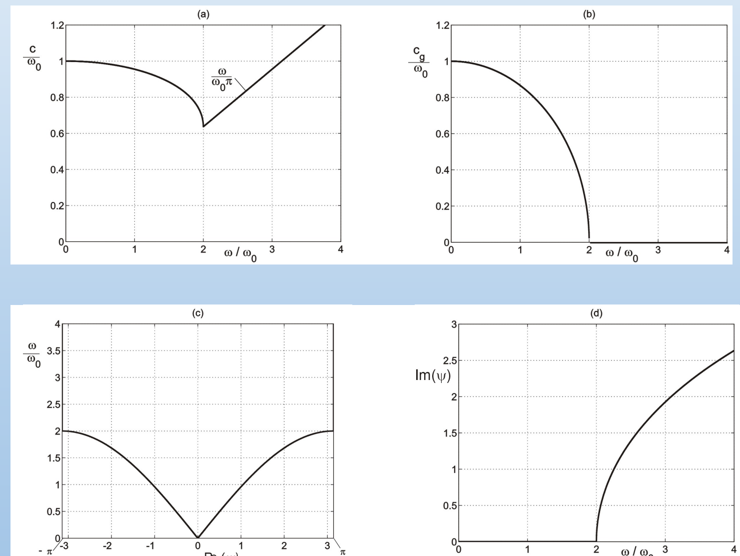
$K \neq 0$ a $b = 0$

disperzní vztah $\omega = 2\omega_0 \left|\sin(K/2)\right|$

Pro $\omega/\omega_0 > 2$ - attenuating řešení

$K = \pi$ a $b \neq 0$



# Disperzní analýza

Thompson, L.L., Pinsky, P.M. Complex wavenumber Fourier analysis of the p-version finite element method. *Computational Mechanics*, **13**(4), 255-275, 1994.

Disperzní vztah

$$\omega = \omega(k^h)$$

Předpokládané řešení - Fourierova analýza

$$u_i^h = A_i e^{\mathrm{i}\left(\psi^h x_i - \omega t\right)}$$

Diskrétní vlnové číslo

$$k^h = \mathsf{Re}\, \psi^h$$

Intenzita zeslabování (attenuation)

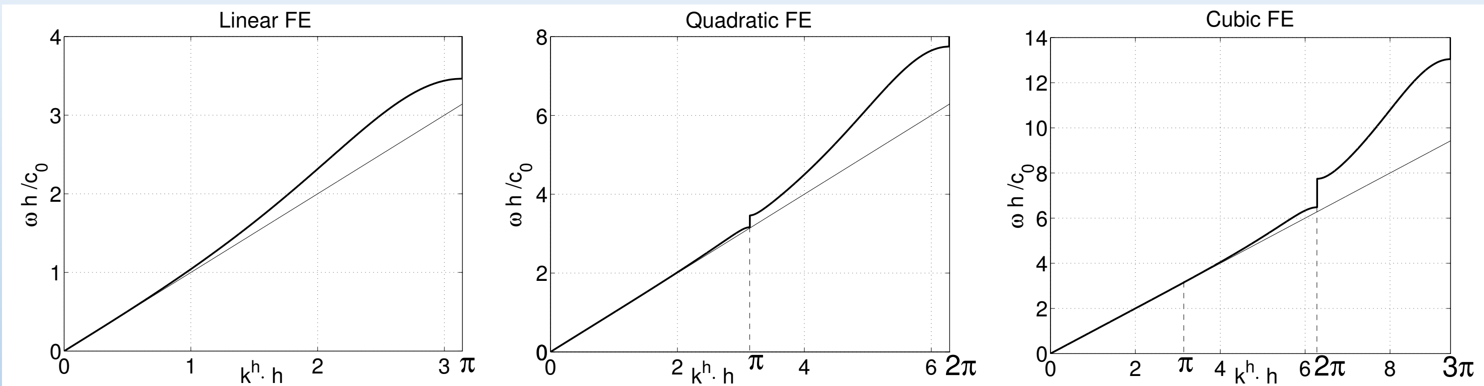
$$b = \mathsf{Im}\, \psi^h$$

Disperzní chyba

$$c^h = \omega(k^h)/k^h, \quad \text{měřena pomocí} \quad c^h/c_o$$

# Disperzní diagramy - klasická MKP

Thompson, L.L., Pinsky, P.M.: *Complex wavenumber Fourier analysis of the p-version finite element method.* *Computational Mechanics*, Vol. 13(4), 255-275, 1994.




Maximální disperzní chyba roste se stupněm polynomu $p$.

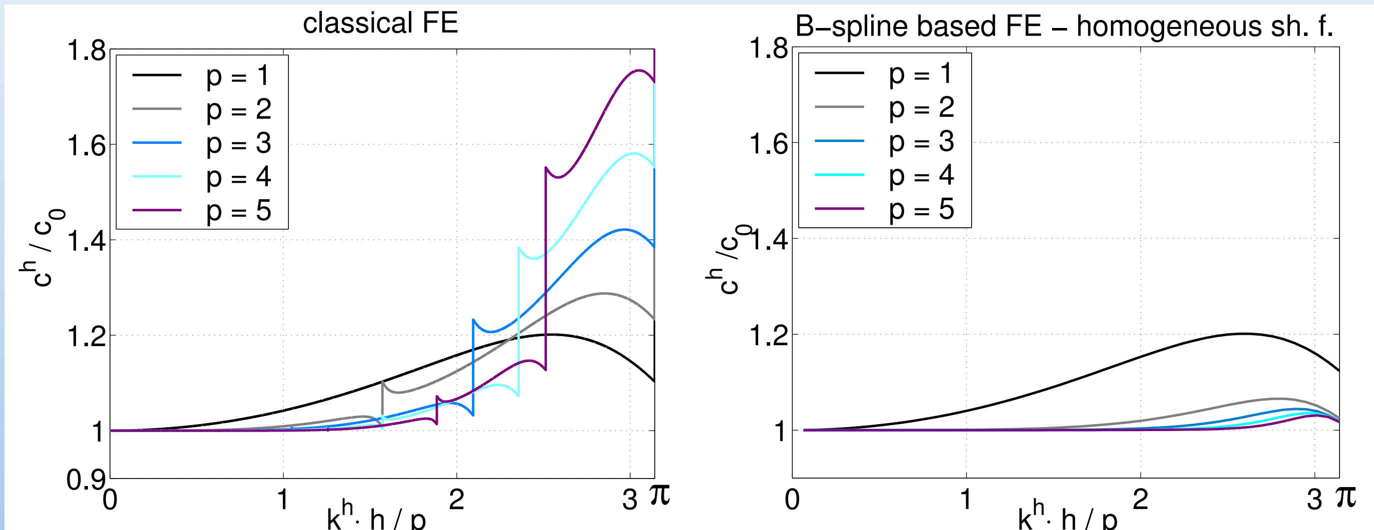
Existují optické větve - vícehmotové soustavy.

Pro vyšší hodnoty $p$ nastává prodloužení oblasti dovolených vlnových délek a frekvencí s dobrou disperzí.

$h$ je vzdálenost uzlů, popř. řídících bodů.

# B-spline MKP - homogenní bázové funkce

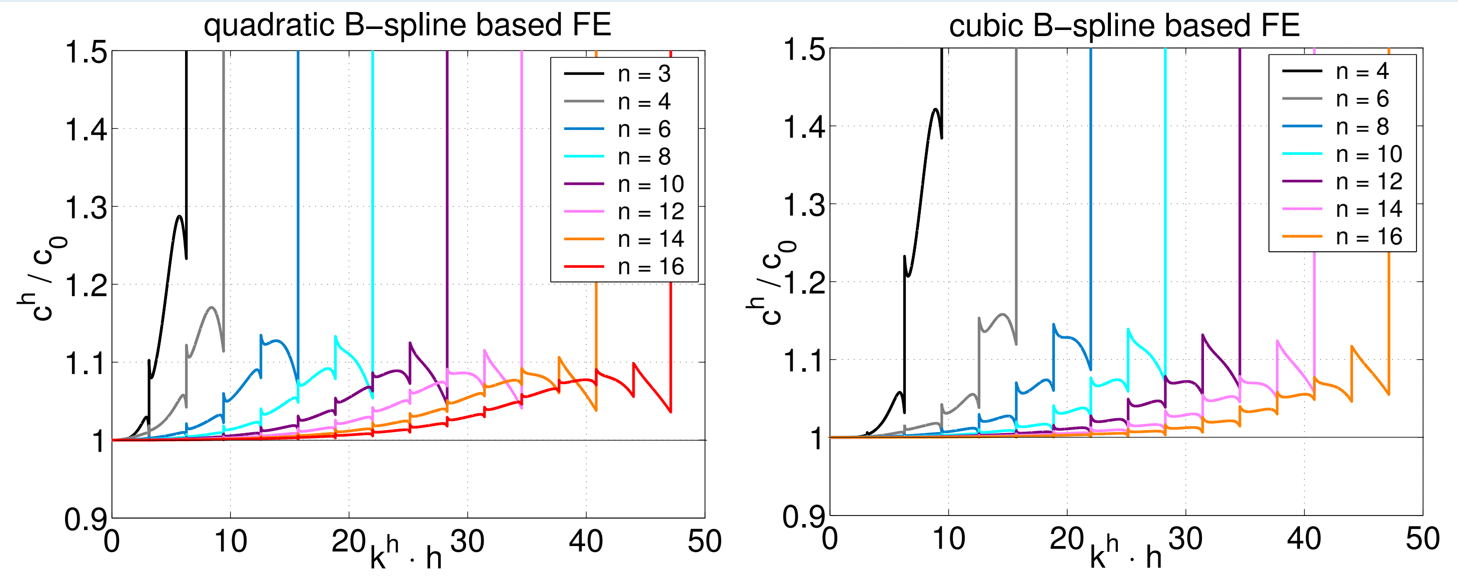
Hughes T.J.R., Reali A., Sangalli G. Duality and Unified Analysis of Discrete Approximations in Structural Dynamics and Wave Propagation: Comparison of p-method Finite Elements with k-method NURBS. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **197**, 4104-4124, 2008.




B-spline varianta MKP s homogenními bázovými funkcemi - disperzní chyby klesají se stupněm splinů oproti klasické MKP.

# B-spline MKP
# $C^0$ spojitost mezi B-spline segmenty

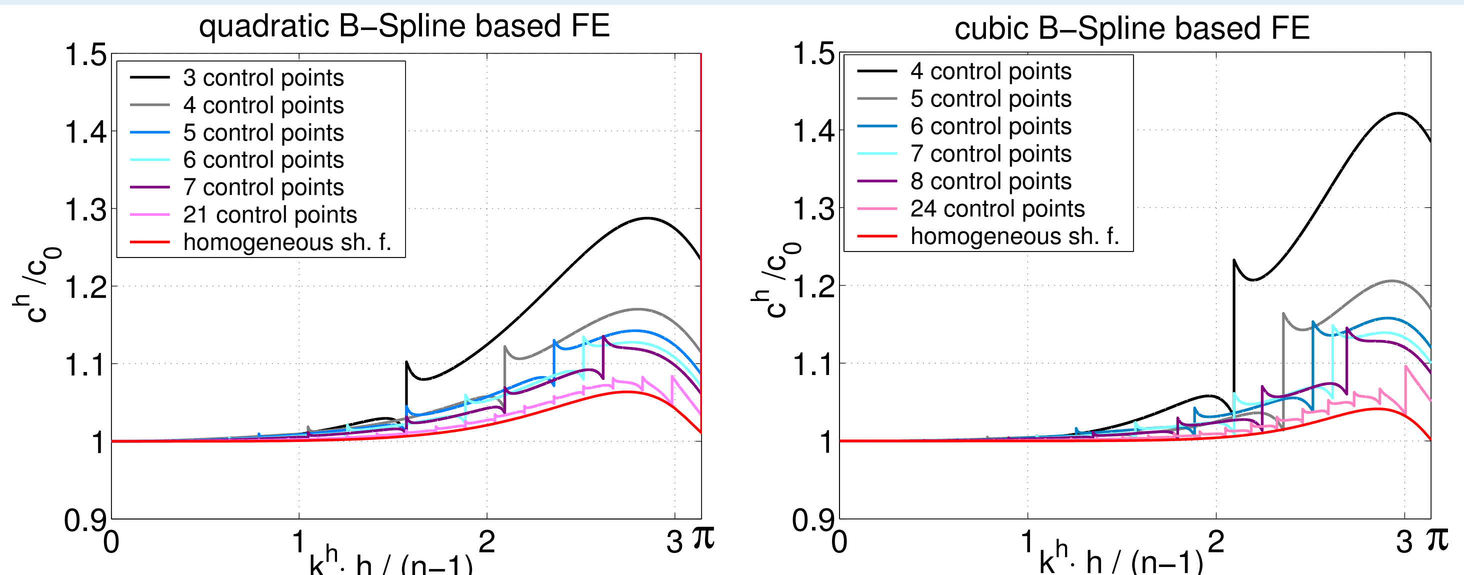
Disperzní chyby pro různý počet rovnoměrně rozložených řídících bodů a pro uniformní uzlový vektor




Disperzní chyby s počet řídících bodů klesají a konvergují k řešení pro homogenní bázové funkce. Disperze Lagrangeových konečných prvků odpovídá B-spline prvku s $n = p+1$ počtem rovnoměrně rozložených řídících bodů (Bézierův segment).

# B-spline MKP
# $C^0$ spojitost mezi B-spline segmenty

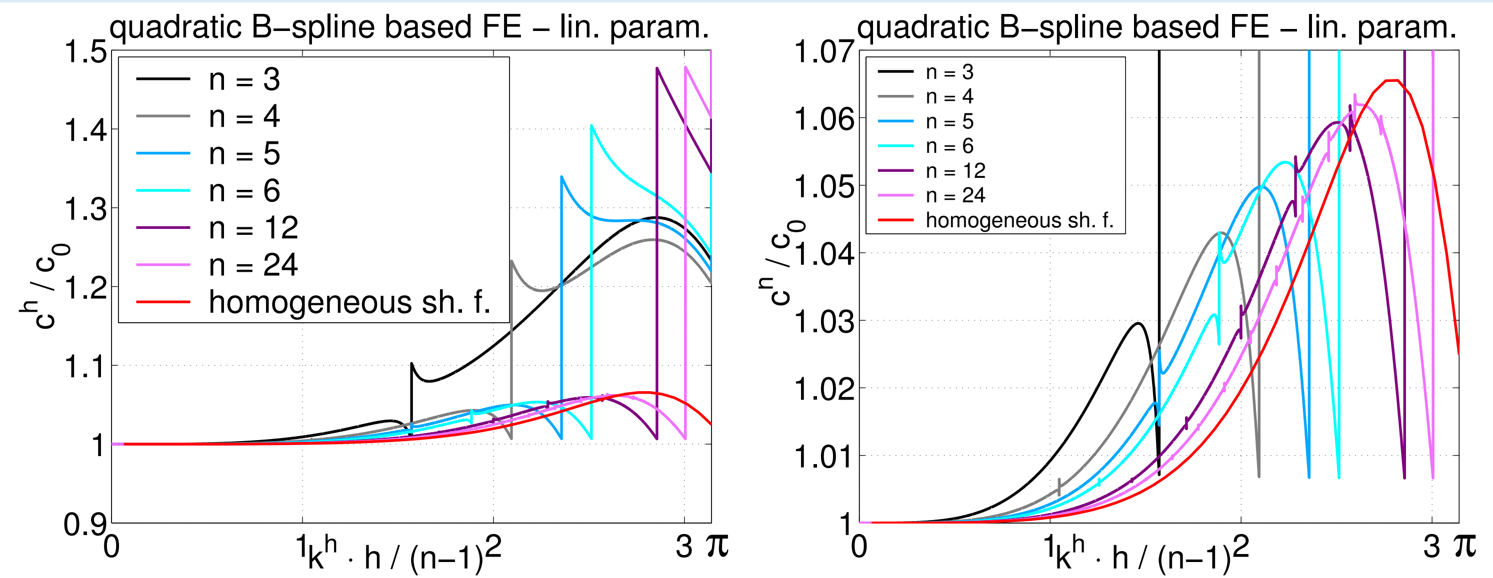
Normalizované disperzní křivky




B-spline varianta MKP - disperzní chyby pro vysoký počet řídících bodů konvergují k řešení pro homogenní bázové funkce.

# B-spline MKP - $C^0$ spojitost lineární parametrizace

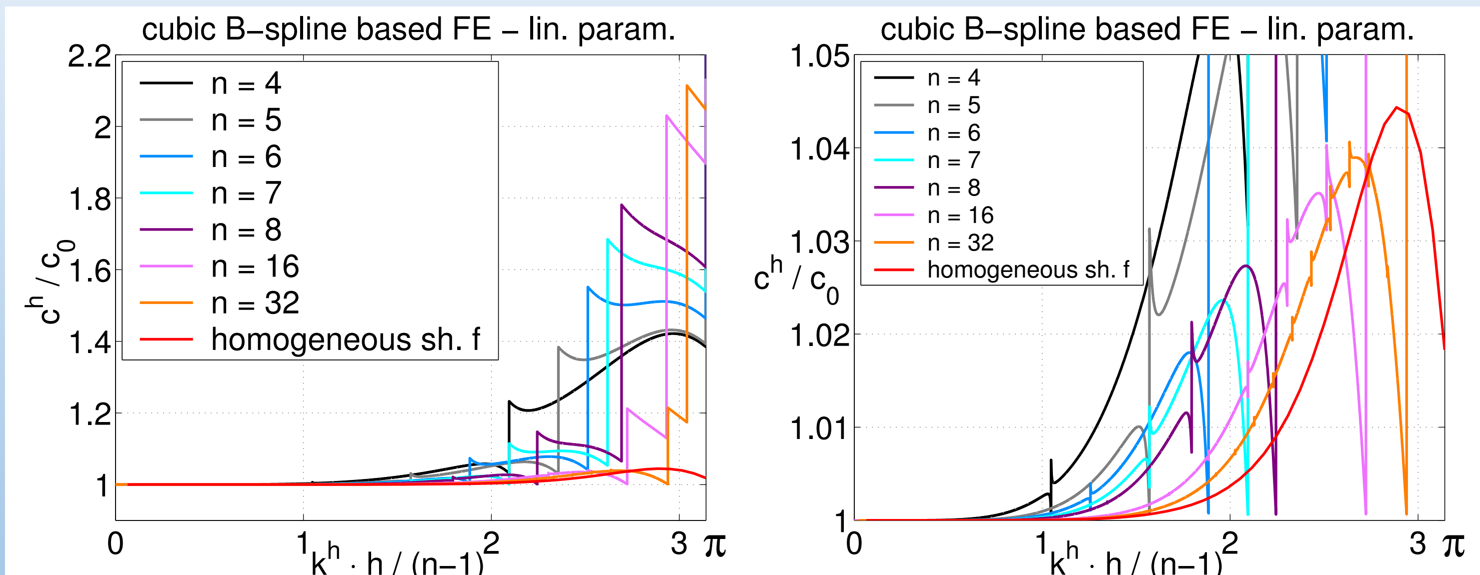
Disperzní chyby pro různý počet řídících bodů, **kvadratický B-spline**, lineární parametrizace - Jacobian $J(\xi) = \left|\frac{\mathrm{d}x(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right| = const.$, Greville abscissae




Nejvyšší disperzní větev vykazuje přibližně konstatní průběh disperzního zákona, odpovídající grupové rychlosti jsou tedy přibližně rovny nule.

# B-spline MKP - $C^0$ spojitost linear parametrization

Disperzní chyby pro různý počet řídících bodů, **kubický B-spline**,
lineární parametrizace - Jacobian $J(\xi) = \left|\frac{\mathrm{d}x(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right| = const.$, Greville abscissaee




Vyskytují se dvě nejvyšší disperzní větve s přibližně konstatntím průběhem disperzního zákona, odpovídající grupové rychlosti jsou tedy přibližně rovny nule.

# B-spline MKP - optimalizace parametrizace

Stanovení poloh řídících bodů lze přeformulovat na optimalizační úlohu s cílem minimalizovat disperzní chyby v celém rozsahu dovolených vlnových čísel $k^h =< 0, k^h_{max} >$.

Optimalizační úloha: nalézt $\mathbf{x}_P^{opt} = arg\,(min\,F(\mathbf{x}_P))$, kde $F(\mathbf{x}_P)$ je cílová funkce.

Např. $F(\mathbf{x}_P) = \frac{\int_0^{k^h_{max}} \left| c^h(\mathbf{x}_P) - c_o \right| \mathrm{d}k^h}{k^h_{max}}$.

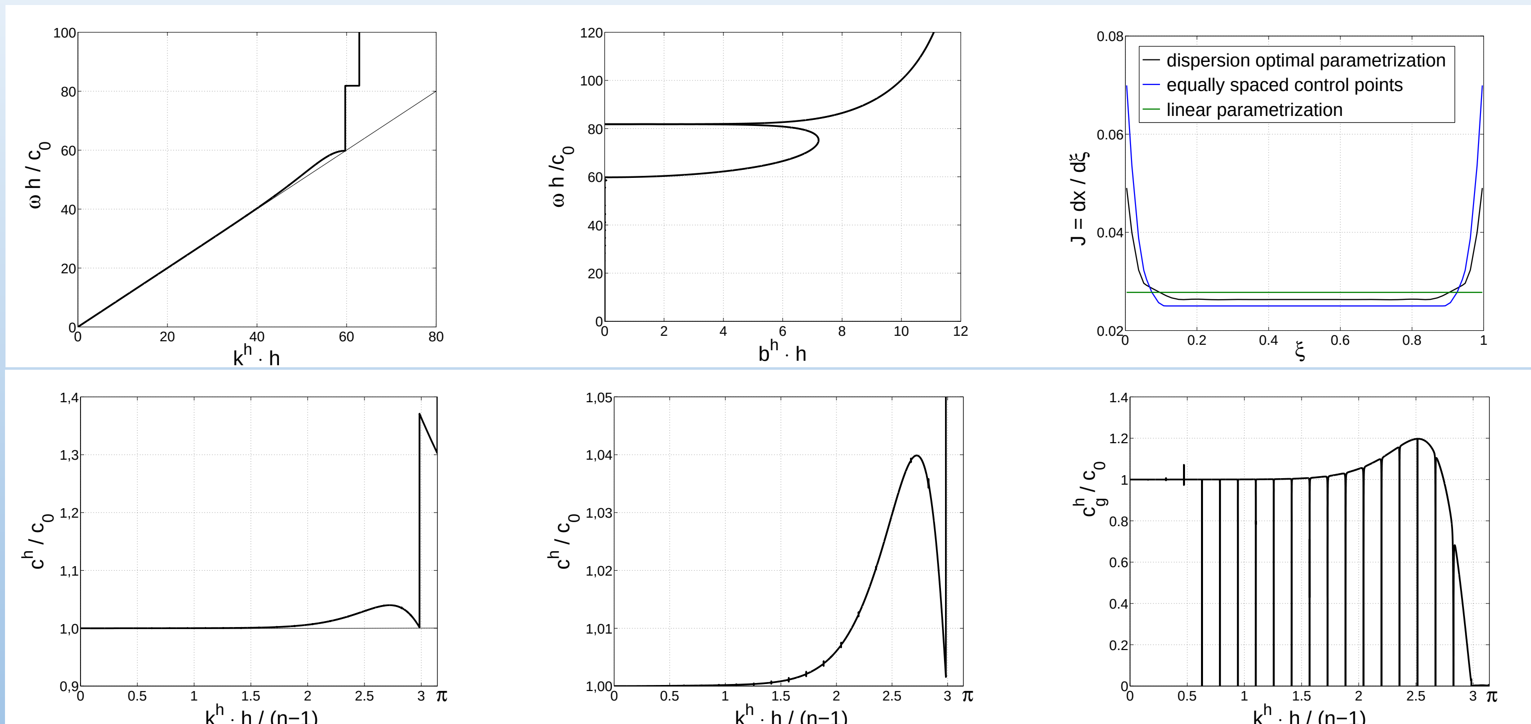
Výpočet cílové funkce $F(\mathbf{x}_P)$ je proveden numerickou integrací - lichoběžníkové pravidlo.

Optimalizační metoda - funkce *fminsearch* v prostředí Matlab.

Počáteční odhad poloh řídících bodů $\mathbf{x}_p$ je zvolen pro lineární parametrizaci.

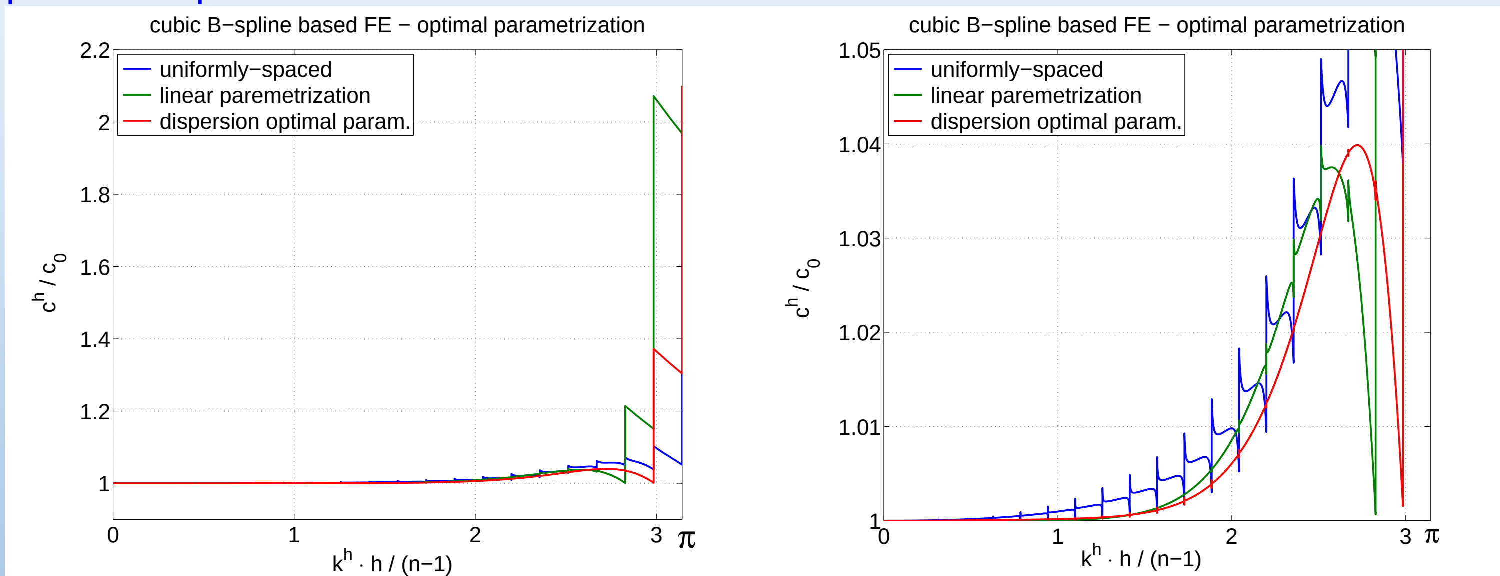
# B-spline MKP - $C^0$ spojitost optimalizovaná parametrizace

Disperzní diagramy pro $n = 21$ řídících bodů, **kubický B-spline**



# B-spline MKP
# $C^0$ spojitost mezi B-spline segmenty

Disperzní diagramy pro $n = 21$ řídících bodů, **kubický B-spline**, porovnání parametrizací




Dovolená numerická vlnové čísla $\left|k^h h\right| < (n-2)\pi$. Maximální disperzní chyba fázové rychlosti je nižší než 4% v celém dovoleném frekvenčním pásmu. Nejvyšší disperzní větev vykazuje přibližně konstantní průběh. Z toho vyplývá nulová grupová rychlost - rozruch se již prostředím nešíří.

# Conclusions and summary

- Klasické Lagrangeovy konečné prvky produkují optické módy a falešné oscilace, vyskytují se oblasti mtrvých frekvenčních pásem (band gaps).
- Disperzní chyby MKP pro B-spline bázové funkce s rostoucím stupněm klesají. Výhodnější je vkládat nové řídící body než segmenty s $C^0$ spojitostí. Zlepšení disperze lze docílit optimalizovanou nelineární parametrizací. Lze nalézt takovou parametrizaci, že vliv $C^0$ spojitosti na rozhraní jednotlivých B-spline segmentů lze z hlediska disperze eliminovat.
- MKP založená na spline reprezentaci má velký potenciál k úspěšnému použití pro numerické řešení úloh kmitání,šíření vln napěří a rázových vln v tělesech.
- Další práce: vhodná časová schémata pro B-spline variantu MKP a diagonalizace matice hmotnosti. Po částech spojité trigonometrické spliny.
- R. Kolman, J. Plešek, M. Okrouhlík, D. Gabriel, Spatial dispersion and attenuation analysis of B-spline based finite element method in one-dimensional elastic wave propagation. *In preparation*.

Děkuji za pozornost.