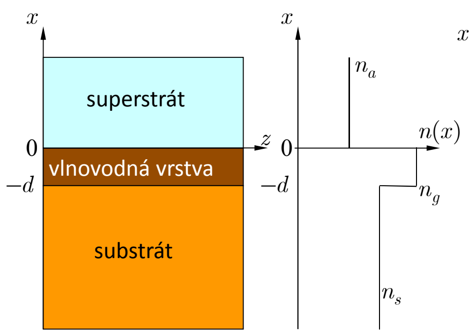
Teoretické základy

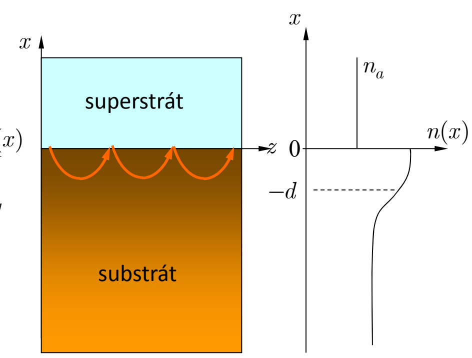
fotonických vlnovodných struktur

Základy teorie planárních vlnovodů

Vrstvový vlnovod



„Gradientní“ (nehomogenní) vlnovod

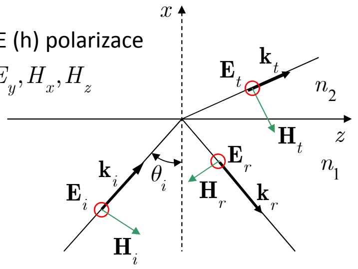


Činitel odrazu rovinné vlny od rovinného rozhraní
Fresnelovy vzorce

Odraz (a lom) rovinné vlny na rozhraní dvou prostředí, $n_1 > n_2$

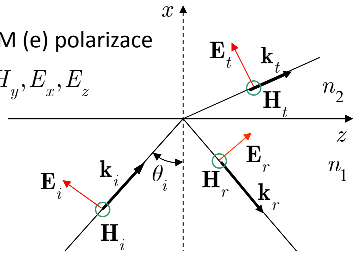
TE (h) polarizace

E_y, H_x, H_z



TM (e) polarizace

H_y, E_x, E_z



Dopadající, odražená a prošlá vlna: $\mathbf{k}_\alpha = k_0\left(\gamma_\alpha \mathbf{x}^0 + N_\alpha \mathbf{z}^0\right),\ \alpha = i,\, r,\, t$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i0}\, \mathrm{e}^{ik_0\left(\gamma_i x + N_i z\right)},\quad \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r0}\, \mathrm{e}^{ik_0\left(\gamma_r x + N_r z\right)},\quad \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t0}\, \mathrm{e}^{ik_0\left(\gamma_t x + N_t z\right)},$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i0}\, \mathrm{e}^{ik_0\left(\gamma_i x + N_i z\right)},\quad \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_{r0}\, \mathrm{e}^{ik_0\left(\gamma_r x + N_r z\right)},\quad \mathbf{H}_t = \mathbf{H}_{t0}\, \mathrm{e}^{ik_0\left(\gamma_t x + N_t z\right)}$$

Spojitost tečných složek *intenzit* polí na rozhraní $x = 0$:

$$\mathbf{x}^0 \times (\mathbf{E}_{i0} e^{ik_0 N_i z} + \mathbf{E}_{r0} e^{ik_0 N_r z}) = \mathbf{x}^0 \times \mathbf{E}_{t0} e^{ik_0 N_t z},$$

$$\mathbf{x}^0 \times (\mathbf{H}_{i0} e^{ik_0 N_i z} + \mathbf{H}_{r0} e^{ik_0 N_r z}) = \mathbf{x}^0 \times \mathbf{H}_{t0} e^{ik_0 N_t z},$$

$$\boxed{N_i = N_r = N_t = N = \beta / k_0}$$

Činitel odrazu rovinné vlny od rovinného rozhraní
Fresnelovy vzorce – 2

=> (podélné) konstanty šíření všech vln jsou stejné.

Pak $\gamma_i = \sqrt{n_1^2 - N^2},\quad \gamma_r = -\sqrt{n_1^2 - N^2},\quad \gamma_t = \sqrt{n_2^2 - N^2},\quad N = n_1 \sin\theta_i.$

Spojitost tečných složek *intenzit* polí na rozhraní

TE (h) polarizace

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0}\mathbf{z}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \frac{k_0}{\omega\mu_0}\gamma E_y$$

$$E_y: \quad E_i + E_r = E_t$$

$$H_z: \quad \gamma_1 E_i - \gamma_1 E_r = \gamma_2 E_t$$

$$R^{TE} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2};$$

$$R^{TE} = \frac{\sqrt{n_1^2 - N^2} - \sqrt{n_2^2 - N^2}}{\sqrt{n_1^2 - N^2} + \sqrt{n_2^2 - N^2}}$$

TM (e) polarizace

$$E_z = -\mathbf{z}^0 \cdot \frac{1}{i\omega\varepsilon_0 n^2}\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{k_0}{\omega\varepsilon_0 n^2}\gamma H_y$$

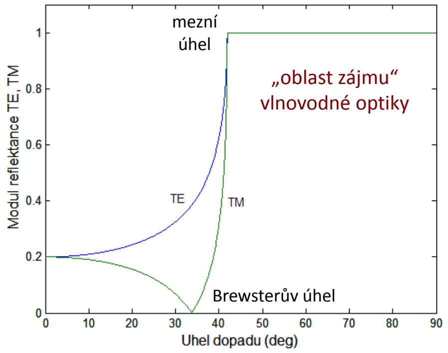
$$H_y: \quad H_i + H_r = H_t$$

$$E_z: \quad \frac{\gamma_1}{n_1^2}H_i - \frac{\gamma_1}{n_1^2}H_r = \frac{\gamma_2}{n_2^2}H_t$$

$$R^{TM} = \frac{H_r}{H_i} = \frac{\gamma_1/n_1^2 - \gamma_2/n_2^2}{\gamma_1/n_1^2 + \gamma_2/n_2^2};$$

$$R^{TM} = \frac{n_2^2\sqrt{n_1^2 - N^2} - n_1^2\sqrt{n_2^2 - N^2}}{n_2^2\sqrt{n_1^2 - N^2} + n_1^2\sqrt{n_2^2 - N^2}}$$

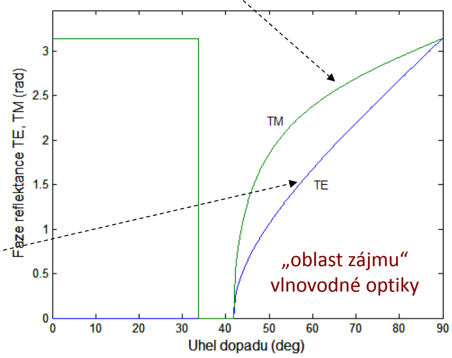
Vlastnosti činitele odrazu



V oblasti totálního odrazu je modul roven 1 a fáze závisí na úhlu dopadu:

$$R^{TM} = e^{i\Phi^{TM}};$$

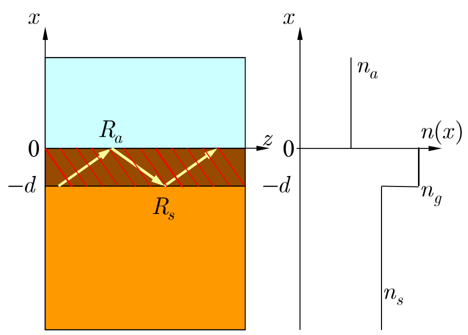
$$\Phi^{TM} = -2\arctan\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sqrt{\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - N^2}}\right].$$



$$R^{TE} = e^{i\Phi^{TE}};$$

$$\Phi^{TE} = -2\arctan\sqrt{\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - N^2}}.$$

Disperzní rovnice planárního vrstvového vlnovodu



Vrstvový vlnovod –
podmínka příčné rezonance

$$R_a R_s e^{2ik_0\gamma_g d} = 1$$

$$2k_0\gamma_g d + \arg R_s + \arg R_a = 2\pi m$$

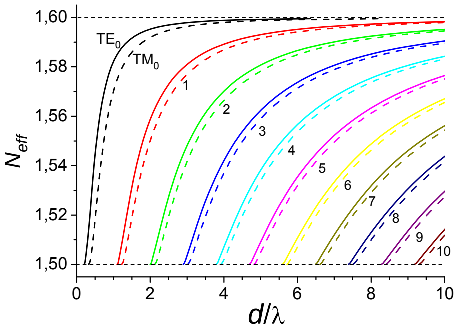
$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{TE} \\ 1, & \text{TM} \end{cases}$$

$$k_0 d\sqrt{n_g^2 - N^2} = \arctan\left[\left(\frac{n_g}{n_s}\right)^{2\nu} \sqrt{\frac{N^2 - n_s^2}{n_g^2 - N^2}}\right] + \arctan\left[\left(\frac{n_g}{n_a}\right)^{2\nu} \sqrt{\frac{N^2 - n_a^2}{n_g^2 - N^2}}\right] + m\pi,$$

Disperzní diagram planárního vlnovodu

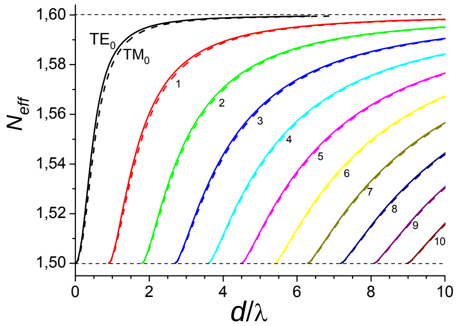
Nesymetrický vlnovod

$n_a < n_s < n_g$

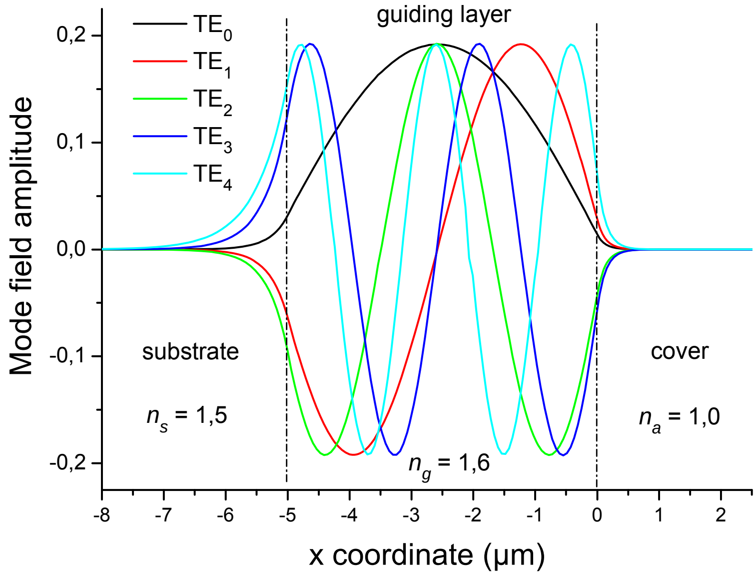


Symetrický vlnovod

$n_a = n_s < n_g$

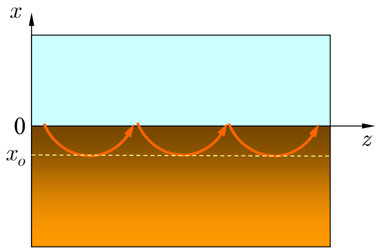


Rozložení pole vidů vrstvového vlnovodu



Disperzní rovnice gradientního vlnovodu

Wignerova –Kramersova – Brillouinova (WKB) aproximace



$$k_0 \gamma_g d \rightarrow k_0 \int_{x_0}^{0} \gamma_g(x)\, dx = k_0 \int_{x_0}^{0} \sqrt{n^2(x) - N^2}\, dx$$

$$R_s \rightarrow \exp(-i\pi/2)$$

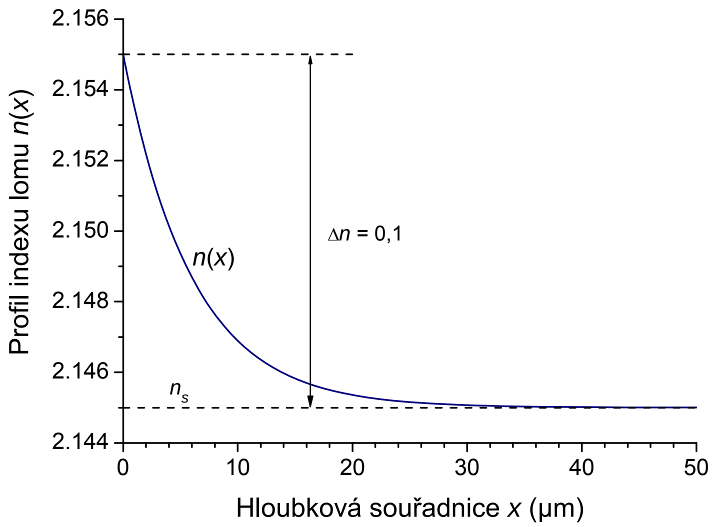
$$\nu = \begin{cases} 0, & \text{TE} \\ 1, & \text{TM} \end{cases}$$

$$k_0 \int_{x_0(N)}^{0} \sqrt{n^2(x) - N^2}\, dx = \arctan\left[\left(\frac{n_g}{n_a}\right)^{2\nu} \sqrt{\frac{N^2 - n_a^2}{n_g^2 - N^2}}\right] + \left(m + \frac{1}{4}\right)\pi,$$

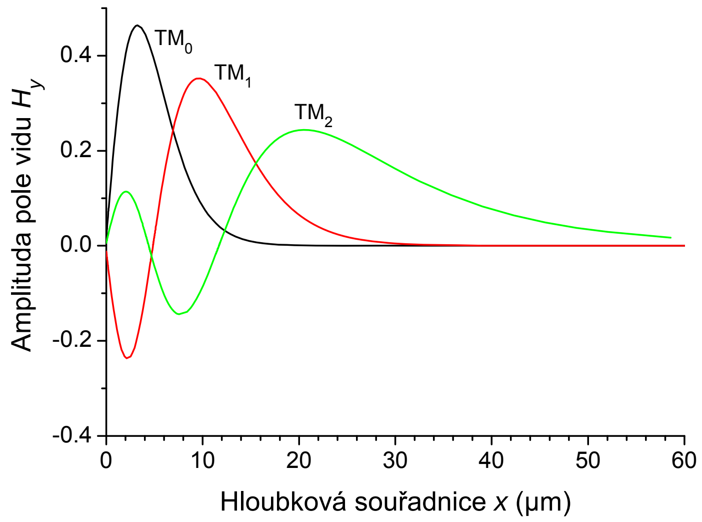
$$k_x = 0 \quad \Rightarrow \quad n(x_0) = N$$

Základ postupu určování profilu indexu lomu ze spektra vedených vidů

Příklad: vlnovod s exponenciálním profilem indexu lomu



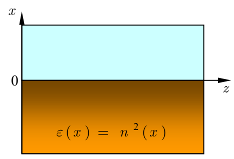
Rozložení pole H_y TM vidů gradientního vlnovodu



Maxwellovy rovnice pro planární vlnovod

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2(x)\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \cancel{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot (n^2 \mathbf{E}) = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{E}(x,z) = \mathbf{E}(x)\exp\left(ik_0 N z\right), \quad \mathbf{H}(x,z) = \mathbf{H}(x)\exp\left(ik_0 N z\right)$$



$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}, \quad N = \beta / k_0 \ldots$ efektivní index lomu

$$\frac{\partial}{\partial z} = ik_0 N, \quad \nabla = \mathbf{x}^0 \frac{\partial}{\partial x} + ik_0 N \mathbf{z}^0;$$

1. TE polarizace: E_y, H_x, H_z

$$\begin{aligned} \frac{dE_y}{dx} &= i\omega\mu_0 H_z, \\ -ik_0 N E_y &= -i\omega\mu_0 H_x, \\ \frac{dH_z}{dx} - ik_0 N H_x &= i\omega\varepsilon_0 n^2 E_y, \end{aligned}$$

$$\frac{dH_z}{dx} = i\omega\varepsilon_0\left[n^2(x) - N^2\right]E_y.$$

2. TM polarizace: H_y, E_x, E_z

$$\begin{aligned} \frac{dH_y}{dx} &= -i\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_z, \\ -ik_0 N H_y &= -i\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_x, \\ \frac{dE_z}{dx} - ik_0 N E_x &= -i\omega\mu_0 H_y, \end{aligned}$$

$$\frac{dE_z}{dx} = -i\omega\mu_0 \frac{\left[n^2(x) - N^2\right]}{n^2(x)} H_y,$$

Maxwellovy rovnice pro planární vlnovod

Vidy TE

$$\frac{d^2E_y(x)}{dx^2} + k_0^2\left[n^2(x) - N^2\right]E_y(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\left|E_y\right|^2 dx < \infty$$

$$P_z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{z}^0 dx = -\int_{-\infty}^{\infty} E_y H_x^* dx = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}N^*\int_{-\infty}^{\infty}\left|E_y\right|^2 dx,$$

Vidy TM

$$n^2(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n^2(x)}\frac{dH_y}{dx}\right] + k_0^2\left[n^2(x) - N^2\right]H_y(x) = 0,$$

$$P_z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{z}^0 dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_x H_y^* dx = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}N\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2(x)}\left|H_y\right|^2 dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2(x)}\left|H_y\right|^2 dx < \infty$$

Analogie vlnové rovnice se Schrödingerovou rovnicí pro částici v potenciálové jámě

Vlnová rovnice

$$\frac{1}{k_0^2}\frac{d^2E_y}{dx^2} + n^2(x)E_y = N^2E_y$$

Schrödingerova rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

dominantní složka $\mathbf{E}$

TE polarizace

vlnová funkce

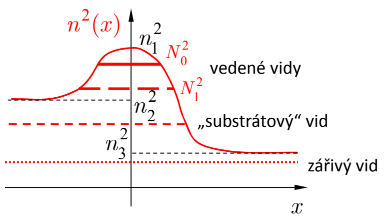
$E_y(x) \Leftrightarrow \psi(x)$

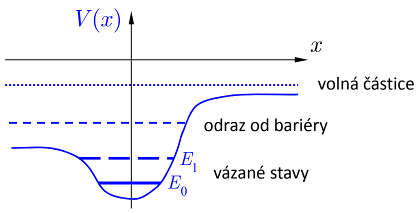
$k_0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}$

$n^2(x) \Leftrightarrow -V(x)$

$N^2 \Leftrightarrow -E$

(TM polarizace nemá přesnou analogii, ale chová se podobně)

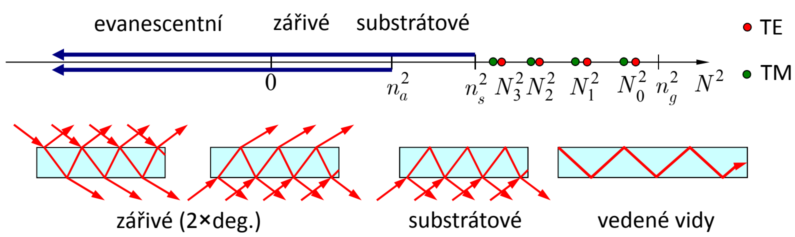




Vidy jako vlastní funkce lineárního diferenciálního operátoru

Vidy TE
$$\frac{d^2E_y(x)}{dx^2}+k_0^2n^2(x)E_y(x)=\left(\beta^{TE}\right)^2E_y(x),\quad \beta^{TE}=k_0N^{TE}$$

Vidy TM
$$n^2(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n^2(x)}\frac{dH_y}{dx}\right]+k_0^2n^2(x)H_y(x)=\left(\beta^{TM}\right)^2H_y(x),\quad \beta^{TM}=k_0N^{TM}$$



Ortogonalita vlastních vidů vlnovodů

Lze ukázat, že pro vedené vidy (s diskrétním spektrem) platí podmínka ortogonality

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_m(x)\times\mathbf{H}_n(x)\cdot\mathbf{z}^0dx=\frac{\beta_m}{|\beta_m|}\delta_{mn}.$$

Pro zářivé a evanescentní vidy (se spojitým spektrem) platí podmínka ortogonality

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(x,\beta)\times\mathbf{H}_n(x,\beta')\cdot\mathbf{z}^0dx=\frac{\beta}{|\beta|}\delta(\beta-\beta')$$

(přitom je třeba brát v úvahu *hlavní hodnotu integrálu*)

zářivé (a evanescentní) vidy (se spojitým spektrem) jsou vždy s vedenými vidy ortogonální :

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(x,\beta)\times\mathbf{H}_n(x)\cdot\mathbf{z}^0dx=0,$$

Pro bezeztrátové vlnovody jsou *příčné* složky polí $\mathbf{E}_\perp$ a $\mathbf{H}_\perp$ *vedených vidů* soufázové, takže *v takovém případě* platí i „výkonová“ ortogonalita

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_m(x)\times\mathbf{H}_n^*(x)\cdot\mathbf{z}^0dx=\frac{\beta_m}{|\beta_m|}\delta_{mn}.$$

Výkon přenášený superpozicí vlastních vidů

Pokud je současně vybuzeno více *(konečný počet) vedených* vidů,

$$\mathbf{E}_\perp(x,y,z) = \sum_m \left[a_m \mathbf{E}_{m\perp}(x,y)\exp(i\beta_m z) + b_m \mathbf{E}_{m\perp}(x,y)\exp(-i\beta_m z) \right],$$

$$\mathbf{H}_\perp(x,y,z) = \sum_n \left[a_n \mathbf{H}_{n\perp}(x,y)\exp(i\beta_n z) - b_n \mathbf{H}_{n\perp}(x,y)\exp(-i\beta_n z) \right].$$

v kladném směru *z* v záporném směru *z*

Přenesený výkon:

$\beta_m,\ \beta_n$ jsou reálné.

$$P_z(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \iint_S \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^* \cdot d\,\mathbf{S} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \sum_{m,n} \left(a_m a_n^* e^{i(\beta_m - \beta_n^*)z} - b_m b_n^* e^{-i(\beta_m - \beta_n^*)z} + b_m a_n^* e^{-i(\beta_m + \beta_n^*)z} - a_m b_n^* e^{i(\beta_m + \beta_n^*)z} \right) \iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{n\perp}^* \cdot d\,\mathbf{S} \right\}$$

V bezeztrátovém vlnovodu $\iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{n\perp}^* \cdot d\,\mathbf{S} = \frac{\beta_m}{|\beta_m|}\delta_{mn} = \delta_{mn};$

$$\boxed{P_z = \frac{1}{2}\sum_m \left(a_m a_m^* - b_m b_m^* \right) = P_m^+ - P_m^-}$$

celkový výkon je roven součtu výkonů přenášených jednotlivými vidy.

Evanescentní vidy – jednosměrná superpozice

Evanescentní vidy: $\beta_m = i|\beta_m|,\ \left[\exp(i\beta_m z)\right]^* = \left[\exp(-|\beta_m|z)\right]^* = \exp(-|\beta_m|z),$

$\mathbf{E}_{m\perp}^*(x,y) = \mathbf{E}_{m\perp}(x,y), \quad \mathbf{H}_{m\perp}^*(x,y) = -\mathbf{H}_{m\perp}(x,y)$ ... pole fázově posunuta o ± π/2

Evanescentní vidy
v bezeztrátovém vlnovodu

$$\iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{n\perp}^* \cdot d\,\mathbf{S} = \frac{\beta_m}{|\beta_m|}\delta_{mn} = \pm i\delta_{mn};$$

Jednosměrná superpozice: $\mathbf{E}_\perp(x,y,z) = \sum_m a_m \mathbf{E}_{m\perp}(x,y)\exp(-|\beta_m|z),$

Přenesený výkon: $\mathbf{H}_\perp(x,y,z) = \sum_n a_n \mathbf{H}_{n\perp}(x,y)\exp(-|\beta_m|z).$

$$P_z(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \iint_S \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^* \cdot d\,\mathbf{S} \right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \sum_{m,n} a_m a_n^* e^{i(\beta_m - \beta_n^*)z} \iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{n\perp}^* \cdot d\,\mathbf{S} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_m a_m a_m^* e^{-2|\beta_m|z}\, \underbrace{\mathrm{Re}\left\{ \iint_S \mathbf{E}_{m\perp} \times \mathbf{H}_{m\perp}^* \cdot d\,\mathbf{S} \right\}}_{0} = 0;$$

Evanescentní vidy – obousměrná superpozice

$$\mathbf{E}_\perp(x,y,z) = \sum_m \left[a_m \mathbf{E}_{m\perp}(x,y)\exp(-|\beta_m|z) + b_m \mathbf{E}_{m\perp}(x,y)\exp(|\beta_m|z) \right],$$

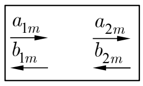
$$\mathbf{H}_\perp(x,y,z) = \sum_n \left[a_n \mathbf{H}_{n\perp}(x,y)\exp(-|\beta_n|z) - b_n \mathbf{H}_{n\perp}(x,y)\exp(|\beta_n|z) \right],$$

$$\mathbf{H}^*_\perp(x,y,z) = \sum_n \left[a^*_n \mathbf{H}^*_{n\perp}(x,y)\exp(-|\beta_n|z) - b^*_n \mathbf{H}^*_{n\perp}(x,y)\exp(|\beta_n|z) \right]$$

Obousměrná superpozice:

$$P_z(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \sum_{m,n} \left[a_m a_n^* e^{-(|\beta_m|+|\beta_n|)z} - b_m b_n^* e^{(|\beta_m|+|\beta_n|)z} + b_m a_n^* e^{(|\beta_m|-|\beta_n|)z} - a_m b_n^* e^{(|\beta_n|-|\beta_m|)z} \right] (\pm i\delta_{mn}) \right\}$$
$$= \pm\frac{1}{2}\mathrm{Im}\sum_m \left[\left(b_m a_m^* - a_m b_m^* \right) \right] \neq 0$$

Označme *d* délku úseku s evanescentními vlnami,



d

$$b_{2m} = b_{1m}\exp(|\beta_m|d), \quad b_{1m} = b_{2m}\exp(-|\beta_m|d)$$

$$P_z(z) = \pm\frac{1}{2}\mathrm{Im}\sum_m \left[\left(b_{2m} a_{1m}^* - a_{1m} b_{2m}^* \right)\exp(-|\beta_m|d) \right] \neq 0$$ ... *optické tunelování*

Metoda příčné rezonance (admitance) pro TE vidy

$$\frac{dE_y}{dx} = i\omega\mu_0 H_z, \quad \frac{dH_z}{dx} = i\omega\varepsilon_0 \left[n^2(x) - N^2 \right] E_y$$ ... Maxwellovy rovnice

$$u(x) = iZ_0\frac{H_z}{E_y} = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{H_z}{E_y} = \frac{i\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\frac{H_z}{E_y} = \frac{dE_y / dx}{k_0 E_y}$$ . . . (normovaná) příčná admitance

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$ . . . vlnová impedance vakua

Diferenciální rovnice pro příčnou admitanci:

$$\frac{1}{k_0}\frac{du}{dx} = i\frac{Z_0}{k_0}\frac{\frac{dH_z}{dx}E_y - H_x\frac{dE_y}{dx}}{E_y^2} = -\underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}_{1}\omega\varepsilon_0\left[n^2(x) - N^2\right] + \overbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}^{Z_0^2}\frac{H_z^2}{E_y^2};$$

Výsledná *soustava dvou rovnic 1. řádu s okrajovými podmínkami (pro vedený vid)*

$$\frac{1}{k_0}\frac{du}{dx} = -u^2(x) - \left[n^2(x) - N^2\right], \qquad \lim_{x\to-\infty} u(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{k_0}\frac{dE_y / dx}{E_y} = -\sqrt{N^2 - n_a^2}$$

$$\frac{1}{k_0}\frac{dE_y}{dx} = u(x)E_y, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{k_0}\frac{dE_y / dx}{E_y} = \sqrt{N^2 - n_s^2}$$

Riccatiho rovnice

Metoda příčné rezonance (impedance) pro TM vidy

$$\frac{dH_y}{dx} = -i\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_z, \quad \frac{dE_z}{dx} = -i\omega\mu_0 \frac{\left[n^2(x) - N^2\right]}{n^2(x)} H_y$$ ... Maxwellovy rovnice

$$u(x) = \frac{dH_y \,/\, dx}{n^2 k_0 H_y} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\frac{E_z}{H_y} = -i\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{E_z}{H_y} = -iY_0\frac{E_z}{H_y}$$ . . . (normovaná) příčná impedance

$$Y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{Z_0}$$ . . . vlnová admitance vakua

Diferenciální rovnice pro příčnou impedanci:

$$\frac{1}{k_0}\frac{du}{dx} = -i\frac{Y_0}{k_0}\frac{\frac{dE_z}{dx}H_y - E_x\frac{dH_y}{dx}}{H_y^2} = -\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{1}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\omega\mu_0}_{1}\frac{\left[n^2(x) - N^2\right]}{n^2(x)} - \overbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\omega\varepsilon_0}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}^{Y_0^2} n^2\frac{E_z^2}{H_y^2};$$

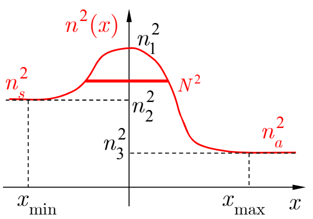
Výsledná *soustava dvou rovnic 1. řádu s okrajovými podmínkami (pro vedený vid)*

$$\frac{1}{k_0}\frac{du}{dx} = -n^2(x)u^2(x) - \frac{\left[n^2(x) - N^2\right]}{n^2(x)}, \qquad \lim_{x\to-\infty} u(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{k_0}\frac{dH_y \,/\, dx}{n^2 H_y} = -\frac{\sqrt{N^2 - n_a^2}}{n^2}$$

$$\frac{1}{k_0}\frac{dH_y}{dx} = n^2(x)u(x)H_y, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{k_0}\frac{dH_y \,/\, dx}{n^2 H_y} = \frac{\sqrt{N^2 - n_s^2}}{n^2}$$

Riccatiho rovnice

Řešení Riccatiho rovnice



Riccatiho rovnici

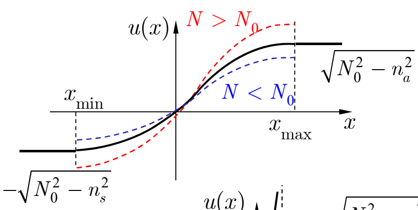
$$\frac{1}{k_0}\frac{du}{dx} = -u^2(x) - \left[n^2(x) - N^2\right]$$

řešíme např. integrací Rungeho-Kuttovou metodou s počáteční podmínkou

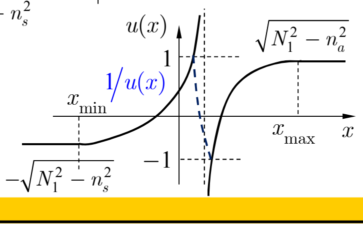
$$u(x_{\min}) = -\sqrt{N^2 - n_s^2}, \quad N^2 \approx n_1^2 - \delta.$$

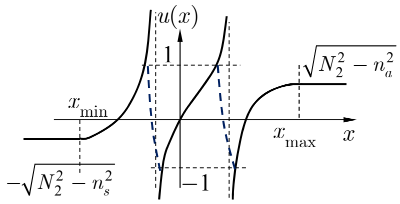
Měníme postupně *N* tak, aby na konci integračního intervalu byla splněna i druhá podmínka,

$$u(x_{\max}) = \sqrt{N^2 - n_a^2}.$$



Vyšší vidy: singularity (póly) funkce $u(x)$





Vyšší vidy

Vidy vyšších řádů hledáme analogicky z výchozího odhadu $N_{m+1}^2 \approx N_m^2 - \delta.$

Přitom vznikne problém, že funkce $E_{ym}(x)$ prochází v intervalu $\langle x_{\min},\ x_{\max} \rangle$ *m*-krát nulou,

takže $u_m(x) = \dfrac{dE_{ym}\,/\,dx}{k_0 E_{ym}}$ má v těchto bodech póly.

Problém lze elegantně obejít tak, že v okolí pólů přejdeme od řešení rovnice pro $u_m(x)$

na řešení rovnice pro $v_m(x) = 1\,/\,u_m(x)$, která má podobný tvar:

$$\frac{1}{k_0}\frac{dv(x)}{dx} = 1 + \left[n^2(x) - N^2\right]v^2(x).$$

Funkce $v_m(x)$ prochází v kritických bodech nulou, takže řešení nemá singularity.

Po průchodu nulou se opět vrátíme k řešení rovnice pro $u_m(x)$.

Výpočet funkce $E_{ym}(x)$ nečiní potíže, poněvadž funkce $u_m(x)$ je integrovatelná.

Rozložení pole vyšších vidů

$$u(x) = \frac{dE_y\,/\,dx}{k_0 E_y} \Rightarrow \boxed{\frac{dE_y}{dx} = k_0 u(x) E_y(x)}$$ TE vidy

$$u(x) = \frac{dH_y\,/\,dx}{n^2 k_0 H_y} \Rightarrow \boxed{\frac{dH_y}{dx} = \frac{k_0}{n^2} u(x) H_y(x)}$$ TM vidy

Řešení přímou integrací metodou Rungeho a Kutty.
Funkce určena až na multiplikativní konstantu, kterou můžeme určit z normovací podmínky

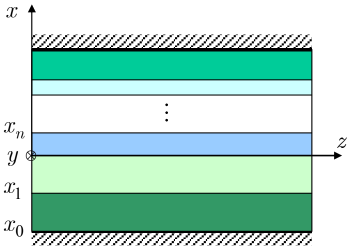
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|E_{ym}(x)\right|^2 dx = \frac{2Z_0}{\left|N_m\right|}.$$ TE vidy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2(x)}\left|H_{ym}(x)\right|^2 dx = \frac{2Y_0}{\left|N_m\right|}$$ TM vidy

„Planární“ (1D) struktura jako multivrstva

Metoda přenosové matice

J. Chilwell and I. Hodgkinson, *JOSA A*, **1**, pp. 742-753, 1984.



Normujeme souřadnice:

$$\xi = k_0 x,\ \zeta = k_0 z,\ Z_0 = Y_0^{-1} = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0},\ \ \beta = k_0 N;$$

Normujeme složky pole: $\left(\exp(i\beta z) = \exp(iN\zeta)\right)$

TE polarizace	TM polarizace
$E_y = \sqrt{2k_0 Z_0} f(\xi,\zeta),$	$H_y = \sqrt{2k_0 Y_0} f(\xi,\zeta),$
$H_x = -\sqrt{2k_0 Y_0} h(\xi,\zeta),$	$E_x = \sqrt{2k_0 Z_0} h(\xi,\zeta),$
$H_z = -i\sqrt{2k_0 Y_0} g(\xi,\zeta),$	$E_z = i\sqrt{2k_0 Z_0} g(\xi,\zeta).$

Z Maxwellových rovnic plyne

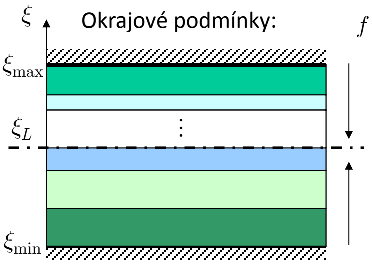
$$\frac{d}{d\xi}\begin{pmatrix} f(\xi) \\ g(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{\nu} \\ \gamma^2/\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(\xi) \\ g(\xi) \end{pmatrix},\quad h(\xi) = \frac{N}{\varepsilon^{\nu}} f(\xi),\ \ \gamma^2 = \varepsilon - N^2. \qquad \nu = \begin{cases} 0 \text{ pro TE} \\ 1 \text{ pro TM} \end{cases}$$

Řešením je

$$\begin{pmatrix} f(\xi) \\ g(\xi) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} f(\xi_0) \\ g(\xi_0) \end{pmatrix},\quad \mathbf{M} = \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{\nu} \\ \dfrac{\gamma^2}{\varepsilon^{\nu}} & 0 \end{pmatrix}(\xi - \xi_0)\right] = \begin{pmatrix} \cos\gamma(\xi-\xi_0) & \pm\dfrac{(\varepsilon)^{\nu}}{\gamma}\sin\gamma(\xi-\xi_0) \\ \mp\dfrac{\gamma}{\varepsilon^{\nu}}\sin\gamma(\xi-\xi_0) & \cos\gamma(\xi-\xi_0) \end{pmatrix}.$$

Metoda přenosové matice pro 1D multivrstvy…

$$\begin{pmatrix} f(\xi_{l+1}) \\ g(\xi_{l+1}) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_l^{+} \cdot \begin{pmatrix} f(\xi_l) \\ g(\xi_l) \end{pmatrix},\qquad \mathbf{M}_l^{\pm} = \begin{pmatrix} \cos\gamma_l(\xi_{l+1}-\xi_l) & \pm\dfrac{(\varepsilon_l)^{\nu}}{\gamma_l}\sin\gamma_l(\xi_{l+1}-\xi_l) \\ \mp\dfrac{\gamma_l}{\varepsilon_l^{\nu}}\sin\gamma_l(\xi_{l+1}-\xi_l) & \cos\gamma_l(\xi_{l+1}-\xi_l) \end{pmatrix}$$



Okrajové podmínky: $f(\xi_{\min}) = f(\xi_{\max}) = 0$ nebo $g(\xi_{\min}) = g(\xi_{\max}) = 0$

$$\mathbf{M}^{-} = \prod_{l=M}^{L+1} \mathbf{M}_l^{-},\qquad \mathbf{M}^{+} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g_{\min} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ g_{\min} \end{pmatrix}$$

nebo

$$\mathbf{M}^{+} = \prod_{l=1}^{L} \mathbf{M}_l^{+},\qquad \mathbf{M}^{+} \cdot \begin{pmatrix} f_{\min} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-} \cdot \begin{pmatrix} f_{\max} \\ 0 \end{pmatrix}$$

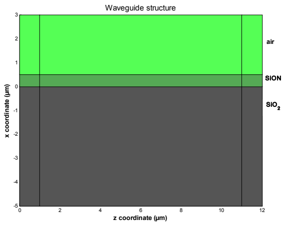
$$\begin{pmatrix} M_{12}^{+} & M_{12}^{-} \\ M_{22}^{+} & M_{22}^{-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{\min} \\ g_{\max} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{nebo} \qquad \begin{pmatrix} M_{11}^{+} & M_{11}^{-} \\ M_{21}^{+} & M_{21}^{-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{\min} \\ f_{\max} \end{pmatrix} = 0$$

Metoda není numericky dostatečně stabilní, pokud jsou v multivrstvě tlusté vrstvy s malým indexem lomu (sady vrstev nejsou vzájemně opticky svázány)

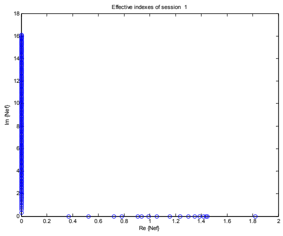
Zlepšení stability: úprava algoritmu na některé z následujících forem:

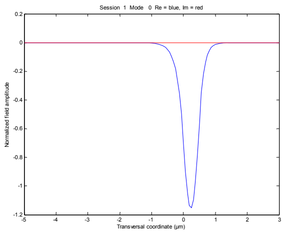
- Metoda příčné imitance (impedance, admitance);
- Metoda rozptylové matice

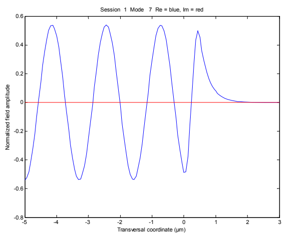
Rozložení polí vidů vrstvového vlnovodu

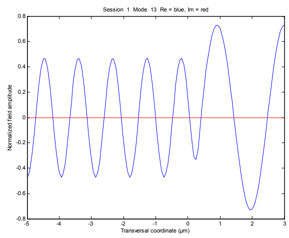


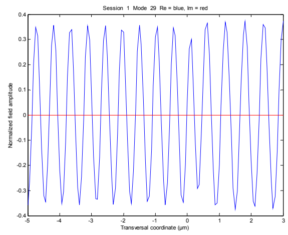
vlnovod


Ef. indexy lomu


E_y základního vidu TE_0


E_y substrátového vidu TE_7


E_y zářivého vidu TE_{13}

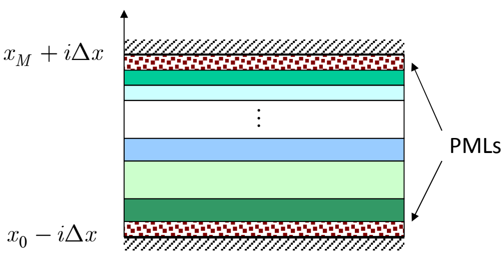

E_y evanescentního vidu TE_{29}

Více o okrajových podmínkách

- *Otevřená struktura* – vhodné pro nalezení *několika* vidů (vedené, vytékající)
- Dokonale odrazné „tvrdé stěny” – elektrické nebo magnetické
  vhodné k diskretizaci spojitého spektra zářivých vidů pro metodu rozvoje ve vlastní vidy
- Absorpční okrajové podmínky pro absorpci parazitních odrazů;
  – **„dokonale přizpůsobené vrstvy“ (perfectly matched layers, PML)**

J.-P. Bérenger, J. Comp. Phys., vol. 114, pp. 185-200, 1994

PMLs v reprezentaci komplexní souřadnice („complex coordinate stretching“)
(F. Olyslager 1998; P. Bienstman 2001)



Komplexní tloušťka vrstev způsobuje exponenciální útlum:

$$d = d' + id''$$

$$\exp(ik_0\gamma d) = \exp\left(ik_0\gamma d'\right)\exp\left(-k_0\gamma d''\right)$$

Formálně velmi jednoduchý algoritmus
izotropní prostředí;
malý útlum pro tečný dopad
neúplnost souboru vlastních funkcí (?)

Technické problémy jednodimenzionálních modálních metod:

- nelineární problém vlastních hodnot,
- ztrátové úlohy vyžadují hledání nul v komplexní rovině

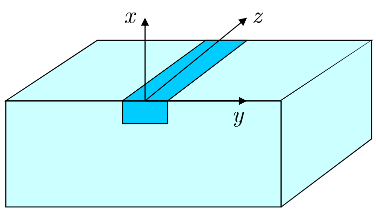
$$\Phi(N) = M_{1i}^{+}(N)M_{2i}^{-}(N) - M_{2i}^{+}(N)M_{1i}^{-}(N) = 0, \quad i = 1 \text{ nebo } 2$$

Φ - složitá transcendentní funkce

Algoritmy pro hledání komplexních nul:

- **Metoda křivkových integrálů (Cauchyova věta)**
  - „argument principle method" - musíme počítat funkci i její derivaci
  - „ADR algoritmus" - stačí znát funkční hodnoty, složitější výpočet
- Disperzní funkce F(*b*) musí být v uvažované oblasti holomorfní (regulární)
- Spolehlivé, ale velmi pomalé metody
  - obtížně aplikovatelné pro hledání velkého množství vidů
- **"Metoda sledování kořenů":**
  - „vypneme" všechny ztrátové mechanismy, najdeme reálné kořeny
  - pomalu zvyšujeme ztráty a dohledáváme nuly v komplexní rovině jednoduchým algoritmem (např. Newtonovou metodou).
- Mnohem rychlejší, méně spolehlivé

Vlastní vidy kanálkových vlnovodů



$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \varepsilon(x,y)\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon \cdot \mathbf{E} = -\nabla(\ln\varepsilon)\cdot\mathbf{E}$$

$$\Delta\mathbf{E} + \nabla\left[\nabla(\ln\varepsilon)\cdot\mathbf{E}\right] + k_0^2\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

úplná vektorová rovnice

Oddělíme příčné a podélné složky pole: $\mathbf{E} = \mathbf{e}(x,y)e^{i\beta z} = \mathbf{e}_\perp(x,y)e^{i\beta z} + \mathbf{e}_z(x,y)e^{i\beta z}$

Po úpravě

$$\Delta_\perp \mathbf{e}_\perp + \nabla_\perp\left[\nabla_\perp\left(\ln\varepsilon\right)\cdot\mathbf{e}_\perp\right] + \left(k_0^2\varepsilon - \beta^2\right)\mathbf{e}_\perp = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{i}{\beta}\mathbf{z}^0\left[\nabla_\perp\varepsilon + \nabla_\perp\right]\cdot\mathbf{e}_\perp$$

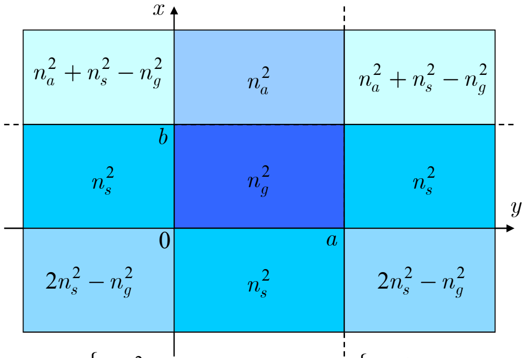
Vidy kanálkových vlnovodů jsou **hybridní** – mají **všechny složky pole nenulové**

Přibližné metody: Marcatiliho metoda (separace proměnných),
metoda efektivního indexu lomu,

Numerické metody: skalární, semivektorové**, vektorové** (nejčastěji modální, FD, FE)

Marcatiliho metoda (separace proměnných)

$$\Delta_\perp \mathbf{e}(x,y) + \underbrace{\nabla_\perp\left[\cancel{\nabla_\perp(\ln\varepsilon)\cdot \mathbf{e}_\perp}\right]}_{\text{Zanedbáme – malý člen}} + k_0^2\left[n^2(x,y) - N^2\right]\mathbf{e}(x,y) = 0$$



$$n_x^2 = \begin{cases} n_a^2, & x > b \\ n_g^2, & 0 < x < b, \\ n_s^2, & x < 0 \end{cases} \qquad n_y^2 = \begin{cases} n_s^2, & y < 0 \\ n_g^2, & 0 < y < a, \\ n_s^2, & y > a \end{cases}$$

Separace proměnných:

$$n^2(x,y) \overset{!}{=} n_x^2(x) + n_y^2(y) - const$$

Předpoklad: $e(x,y) = e_x(x)e_y(y)$

$$\frac{d^2 e_x(x)}{dx^2} + k_0^2\left[n_x^2 - N_x^2\right]e_x(x) = 0,$$

$$\frac{d^2 e_y(x)}{dy^2} + k_0^2\left[n_y^2 - N_y^2\right]e_y(x) = 0,$$

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 - const$$

K tomu je třeba modifikovat profil *n*(*x*) *v rohových oblastech*:

volme např. $const = n_g^2$

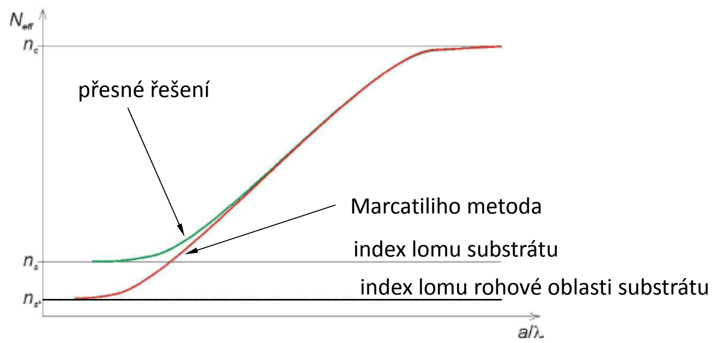
$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 - n_g^2$$

Výhoda: jednoduchost; stačí řešit planární vlnovod jednou ve směru x a jednou v y

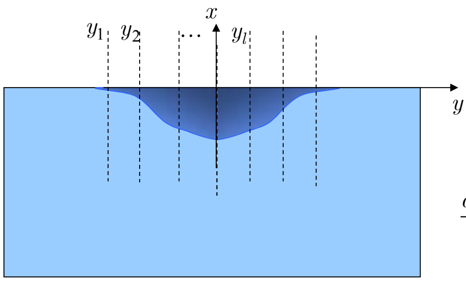
Nevýhoda: malá přesnost blízko kritické frekvence (pole slabě vedené)

Porovnání výsledků Marcartiliho metody s přesným řešením

Čím je vid slaběji vedený, tím větší část jeho energie se šíří v rohových oblastech; efektivní index lomu se pro velmi slabě vedoucí vlnovody blíží indexu lomu v rohových oblastech substrátu.



Metoda efektivního indexu lomu pro difúzní vlnovody



$$\Delta_\perp e(x,y) + k_0^2\left[n^2(x,y) - N^2\right]e(x,y) = 0$$

1. Předpoklad slabší závislosti na *y*

$$e(x,y) \cong e_x(x;y)\,e_y(y)$$

$$\frac{d^2 e_x(x;y)}{dx^2} + k_0^2\left[n^2(x;y) - N_x^2(y)\right]e_x(x;y) = 0$$

Řešíme hloubkovou rovnici pro různá *y*.
Získáme $N_x(y)$.

2. Řešíme „laterální“ rovnici

$$\frac{d^2 e_y(y)}{dy^2} + k_0^2\left[N_x^2(y) - N^2\right]e_y(y) = 0.$$

Výhoda: jednoduchost, intuitivnost.
Nevýhoda: menší přesnost, zejména v blízkosti kritické frekvence.

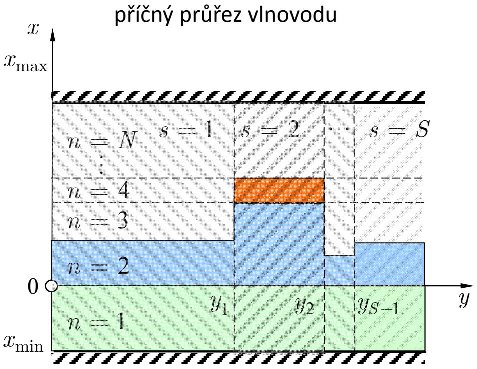
“Rigorózní“ metoda výpočtu vedených vidů 2D vlnovodů

Metoda přímek (Method of Lines, MoL) – vyžaduje 1D diskretizaci, ~FD metoda
R. Pregla a jeho žáci, Fern-Universität Hagen, SRN

Metoda sešívání vidů (Film Mode Matching, FMM)

(mikrovlny 1950++, fotonika Sudbø 1993, 1994)

příčný průřez vlnovodu



Příčné rozložení indexu lomu musí být po částech konstantní

- Průřez rozdělíme na laterálně uniformní „řezy“; každý řez představuje multivrstvu
- Najdeme TE a TM vidy v každém řezu
- Celkové pole vyjádříme jako superpozici TE a TM vidů
- Na rozhraních mezi řezy splníme podmínky spojitosti tečných složek

Stabilní „immitanční formalismus“; vektorové řešení

Základy metody FMM

Normování: $(\xi,\eta,\zeta)=k_0\,(x,y,z),\quad \bar{\nabla}=\dfrac{1}{k_0}\nabla,$

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\sqrt{2Z_0}\,k_0\mathbf{e}(\xi,\eta,\zeta),\quad \mathbf{H}(x,y,z)=\sqrt{2Y_0}\,k_0\mathbf{h}(\xi,\eta,\zeta).$$

Maxwellovy rovnice pak mají tvar $\bar{\nabla}\times\mathbf{e}=i\,\mathbf{h},\quad \bar{\nabla}\times\mathbf{h}=-i\,\varepsilon\,\mathbf{e}.$

Pole v každém řezu nezávislém na y-souřadnici lze spočítat z *derivací dvou skalárních funkcí* – Hertzových „vektorů“ (o jediné složce):

$$\boldsymbol{\pi}^h=\mathbf{x}^0\sum_m f_m^h(\xi)\,p_m^h(\eta)\,e^{iN_z\zeta},\qquad \boldsymbol{\pi}^e=\mathbf{x}^0\sum_m f_m^e(\xi)\,p_m^e(\eta)\,e^{iN_z\zeta},$$

laterální závislost amplitud

„vertikální vidové funkce“

$$e^{i\beta z}=e^{ik_0N_zz}=e^{iN_z\zeta}$$

Známe=li $\boldsymbol{\pi}$, úplné vektorové pole pak spočítáme pomocí vztahů

$$\mathbf{e}^h=i\,\bar{\nabla}\times\boldsymbol{\pi}^h,\quad \mathbf{h}^h=\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\boldsymbol{\pi}^h,$$

$$\mathbf{e}^e=\frac{1}{\varepsilon}\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\boldsymbol{\pi}^e,\quad \mathbf{h}^e=-i\,\bar{\nabla}\times\boldsymbol{\pi}^e.$$

Základy metody FMM – 2

Hertzovy vektory splňují Helmholtzovu rovnici

$$\Delta\pi^{h,e}+\varepsilon\,\pi^{h,e}=0,$$

Ta je splněna, pokud „vidové funkce“ f splňují rovnice

$$\frac{d^2f^h(\xi)}{d\xi^2}+\left[\varepsilon(\xi)-\left(N_x^h\right)^2\right]f^h(\xi)=0,\quad \varepsilon\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{df^e}{d\xi}\right)+\left[\varepsilon(\xi)-\left(N_x^e\right)^2\right]f^e(\xi)=0.$$

a laterální závislosti $p^h(\eta),\ p^e(\eta)$ jsou řešením rovnic

$$\frac{d^2p^{h,e}}{d\eta^2}+\left(N_y^{h,e}\right)^2p^{h,e}=0,\quad \text{přičemž}\quad \left(N_y^{h,e}\right)^2+N_z^2=\left(N_x^{h,e}\right)^2,$$

Z rovnic pro $p^{h,e}(h)$ pak snadno odvodíme “laterální přenosovou matici“

$$\begin{pmatrix}p(\eta+\Delta\eta)\\ q(\eta+\Delta\eta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left[N_y\Delta\eta\right] & \dfrac{1}{N_y}\sin\left[N_y\Delta\eta\right]\\ -N_y\sin\left[N_y\Delta\eta\right] & \cos\left[N_y\Delta\eta\right]\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p(\eta)\\ q(\eta)\end{pmatrix},\quad \text{kde}\ q(\eta)=\frac{dp(\eta)}{d\eta}.$$

Základy metody FMM – 3

Úplné vektorové pole v s -tém řezu je dáno superpozicí vidů:

TE

$$
\begin{aligned}
{}^{s}e_x^h(\xi,\eta) &= 0, & {}^{s}h_x^h(\xi,\eta) &= \sum_m \left({}^{s}N_{xm}^h\right)^2 {}^{s}p_m^h\, {}^{s}f_m^h(\xi),\\
{}^{s}e_y^h(\xi,\eta) &= -N_z \sum_m {}^{s}p_m^h\, {}^{s}f_m^h(\xi), & {}^{s}h_y^h(\xi,\eta) &= \sum_m {}^{s}q_m^h\, {}^{s}g_m^h(\xi),\\
{}^{s}e_z(\xi,\eta) &= -i \sum_m {}^{s}q_m^h\, {}^{s}f_m^h(\xi), & {}^{s}h_z^h(\xi,\eta) &= iN_z \sum_m {}^{s}p_m^h\, {}^{s}g_m^h(\xi).
\end{aligned}
$$

a TM

$$
\begin{aligned}
{}^{s}e_x^h(\xi,\eta) &= \frac{1}{{}^{s}\varepsilon(\xi)} \sum_m \left({}^{s}N_{xm}^e\right)^2 {}^{s}p_m^e\, {}^{s}f_m^e(\xi), & {}^{s}h_x^e(\xi,\eta) &= 0,\\
{}^{s}e_y^e(\xi,\eta) &= \sum_m {}^{s}q_m^e\, {}^{s}g_m^e(\xi), & {}^{s}h_y^e(\xi,\eta) &= N_z \sum_m {}^{s}p_m^e\, {}^{s}f_m^e(\xi),\\
{}^{s}e_z^e(\xi,\eta) &= i\,N_z \sum_m {}^{s}p_m^e\, {}^{s}g_m^e(\xi), & {}^{s}h_z^e(\xi,\eta) &= i \sum_m {}^{s}q_m^e\, {}^{s}f_m^e(\xi)
\end{aligned}
$$

kde
$$
{}^{s}g_m^h = \frac{d\,{}^{s}f_m^h}{d\xi}, \qquad {}^{s}g_m^e(\xi) = \frac{1}{{}^{s}\varepsilon(\xi)} \frac{d\,{}^{s}f_m^e}{d\xi}.
$$

Základy metody FMM – 4

Šíření vidů uvnitř téhož „řezu“ je popsáno “laterální přenosovou maticí“.

Na hranicích mezi řezy musí být spojité tečné složky intenzit polí.
S využitím ortogonálních vlastností polí vlastních vidů a identit plynoucích z vlnové rovnice získáme transformační vztahy mezi “laterálními amplitudami” $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ mezi řezy s a t v maticovém tvaru s diagonálními maticemi ${}^{s}\mathbf{N}_x^{h,e}$, ${}^{t}\mathbf{N}_x^{h,e}$

$$
{}^{s}\mathbf{p} = \left({}^{s}\mathbf{N}_x^2\right)^{-1} \cdot {}^{s,t}\mathbf{O} \cdot {}^{t}\mathbf{N}_x^2 \cdot {}^{t}\mathbf{p}, \qquad {}^{s}\mathbf{q} = \left({}^{t,s}\mathbf{O}\right)^T \cdot {}^{t}\mathbf{q} - {}^{s,t}\mathbf{X} \cdot {}^{t}\mathbf{p},
$$

kde
$$
{}^{s,t}\mathbf{O} = \begin{pmatrix} {}^{s,t}\mathbf{O}^{hh} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{s,t}\mathbf{O}^{ee} \end{pmatrix}, \qquad {}^{s,t}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & N_z\, {}^{s,t}\mathbf{O}^{he} \\ -N_z \left({}^{t,s}\mathbf{O}^{he}\right)^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}.
$$

TE-TE

TM-TM

$$
{}^{s,t}O_{mn}^{hh} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} {}^{s}f_m^h(\xi)\, {}^{t}f_n^h(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \qquad {}^{s,t}O_{mn}^{ee} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{{}^{s}f_m^e(\xi)\, {}^{t}f_n^e(\xi)}{{}^{t}\varepsilon(\xi)}\, \mathrm{d}\xi,
$$

TE-TM

$$
{}^{s,t}O_{mn}^{he} = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{{}^{s}f_m^h(\xi)}{{}^{t}\varepsilon(\xi)} \frac{\mathrm{d}\,{}^{t}f_n^e(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\, \mathrm{d}\xi + \frac{{}^{t}N_{xn}^{e2}}{{}^{s}N_{xm}^{h2}} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{\mathrm{d}\,{}^{s}f_m^h(\xi)}{\mathrm{d}\xi} \frac{{}^{t}f_n^e(\xi)}{{}^{t}\varepsilon(\xi)}\, \mathrm{d}\xi.
$$

Základy metody FMM – 5

Poněvadž formulace založená na přenosové matici je nestabilní, použijeme s výhodou ***immitanční (impedanční resp. admitanční) formulaci***:

Zavedeme immitanční matici $\mathbf{U}$ vztahem

$$\mathbf{q}(\eta) = \mathbf{U}(\eta) \cdot \mathbf{p}(\eta).$$

Pro transformaci immitanční matice uvnitř jednoho (laterálně homogenního) řezu lze z maticové rovnice pro $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ odvodit vztah

$$\mathbf{U}(\eta + \Delta\eta) = \mathbf{T}(\eta) - \mathbf{S}(\eta) \cdot \left[\mathbf{U}(\eta) + \mathbf{T}(\eta)\right]^{-1} \cdot \mathbf{S}(\eta),$$

kde

$$\mathbf{S}(\eta) = \mathbf{N}_y \cdot \sin^{-1}\left(\mathbf{N}_y \Delta\eta\right), \quad \mathbf{T}(\eta) = \mathbf{N}_y \cdot \tan^{-1}\left(\mathbf{N}_y \Delta\eta\right).$$

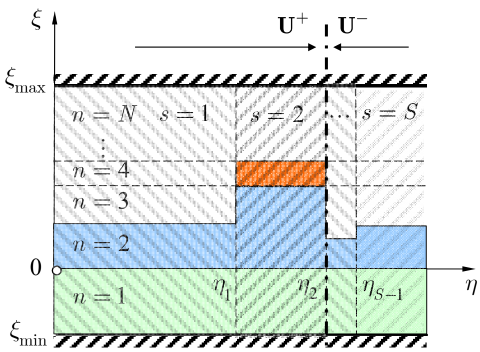
Pro transformaci matice $\mathbf{U}$ mezi řezy s a t pak dostaneme

$${}^{t}\mathbf{U} = \left({}^{s,t}\mathbf{O}\right)^T \cdot \left[{}^{s}\mathbf{U} \cdot \left({}^{s}\mathbf{N}_x^2\right)^{-1} \cdot {}^{s,t}\mathbf{O} \cdot {}^{t}\mathbf{N}_x^2 + {}^{s,t}\mathbf{X}\right].$$

Podobné relace platí i pro transformace ve zpětném směru souřadnice η.

Základy metody FMM – 6

Disperzní rovnice je vytvořena podobně jako u planární multivrstvy.



Okrajové podmínky ve vnějších řezech určují hodnotu impedancí resp. admitancí; pro otevřené struktury platí

$$\mathbf{U} = \pm i \mathbf{N}_y,$$

zatímco pro dokonale vodivé stěny platí

$$\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \text{or} \quad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{0}.$$

Postupné transformace matice **U** z obou stran do vhodně zvoleného místa průřezu dají $\mathbf{U}^+$ and $\mathbf{U}^-$

a disperzní rovnice pro N_z and $\mathbf{p}$ je pak

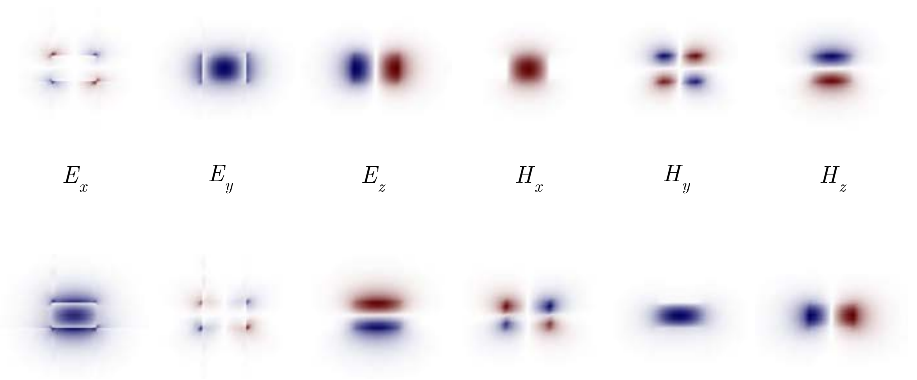
$$\left(\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-\right) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

Z podmínky nulového determinantu určíme N_z a k němu pak najdememe vektor amplitud pole $\mathbf{p}$.

Příklad vektorového rozložení pole

Vlnovod „SOI“, příčné rozměry 400×300 nm^2 , *l* = 1550 nm

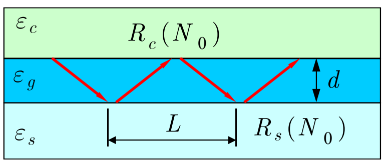
Vid TE$_{00}$



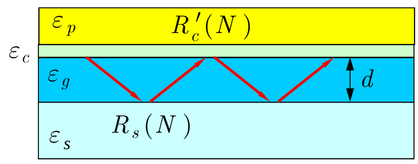
Vid TM$_{00}$

Jednoduchá poruchová teorie pro planární vlnovod I

Neporušený vlnovod



Vlnovod s „poruchou“ (hranolem)



Disperzní rovnice: neporušený vlnovod:

$$R_s(N_0)R_c(N_0)e^{2ik_0 d\sqrt{\varepsilon_g - N_0^2}} = 1$$

‘porušený’ vlnovod:

$$R_s(N)R_c'(N)e^{2ik_0 d\sqrt{\varepsilon_g - N^2}} = 1$$

$$S_0(N) = 2k_0 d\sqrt{\varepsilon_g - N^2} - 2\arctan\left[\left(\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_s}\right)^{\nu}\sqrt{\frac{N^2-\varepsilon_s}{\varepsilon_g - N^2}}\right] - 2\arctan\left[\left(\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_c}\right)^{\nu}\sqrt{\frac{N^2-\varepsilon_c}{\varepsilon_g - N^2}}\right] - 2m\pi$$

$$= 2k_0 d\sqrt{\varepsilon_g - N^2} + i\left(\ln R_s + \ln R_c\right) - 2m\pi = 0,$$ řešení je N_0: $\boxed{S_0(N_0) = 0}$

„Porušený“ vlnovod (s hranolem v blízkosti povrchu):

$$S(N) = 2k_0 d\sqrt{\varepsilon_g - N^2} + i\left(\ln R_s + \ln R_c'\right) - 2m\pi = 0,$$ řešení je N.

$R_c'(N)$ je výsledný činitel odrazu od „porušené“ vlnovodné struktury.

Jednoduchá poruchová teorie pro planární vlnovod II

$S_0(N_0)=2k_0d\sqrt{\varepsilon_g-N_0^2}+i\left[\ln R_s(N_0)+\ln R_c(N_0)\right]-2m\pi=0,$ ‚neporušená' rovnice

$S(N)=2k_0d\sqrt{\varepsilon_g-N^2}+i\left[\ln R_s(N)+\ln R'_c(N)\right]-2m\pi=0,$

$S(N)=S(N_0+\Delta N)\approx S(N_0)+(dS/dN)\big|_{N_0}\Delta N;$ ‚porušená' rovnice v 1. aprox.

$2k_0d\sqrt{\varepsilon_g-N_0^2}+i\left[\ln R_s(N_0)+\ln R'_c(N_0)\right]-2m\pi+(dS/dN)\big|_{N_0}\Delta N;$

$\underbrace{S_0(N_0)}_{0}+i\left[\ln R'_c(N_0)-\ln R_c(N_0)\right]+(dS_0/dN)\big|_{N_0}\Delta N=0,$ derivaci aproximujeme pomocí S_0

$\Delta N\approx-i\left[\ln R'_c(N_0)-\ln R_c(N_0)\right]/(dS_0/dN)\big|_{N_0}$

$L=-\frac{1}{k_0}\frac{dS_0}{dN}\Big|_{N_0}$ „perioda šíření" ve vlnovodu („Goosův-Hänchenův posuv");

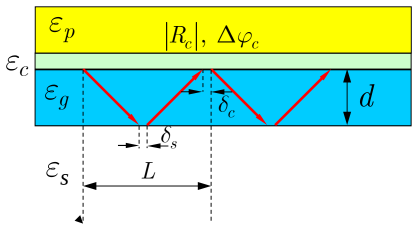
$\ln R'_c=\ln\left|R'_c\right|+i\arg R'_c,$

$$\boxed{\Delta N\approx\left\{\left[\arg\{R_c(N_0)\}-\arg\{R'_c(N_0)\}\right]-i\ln\left|R'_c(N_0)\right|\right\}\Big/(k_0L)}$$

změna ef. indexu lomu vlivem malé poruchy

Fyzikální interpretace metody

Vlnovod s poruchou



$R_s(N_0)R_c(N_0)e^{2ik_0d\sqrt{\varepsilon_g-N_0^2}}=1$

$R_s(N)R'_c(N)e^{2ik_0d\sqrt{\varepsilon_g-N^2}}=1$

$e^{ik_0\Delta NL}=e^{i\Delta\varphi_c}e^{\ln|R'_c|}=|R'_c|e^{i\Delta\varphi}$

Při šíření na vzdálenost „jedné periody" se fáze vlny změní o $\Delta\varphi_c$ a amplituda $|R'_c|$ krát

$\Delta\varphi\approx\arg\{R'_c(N_0)\}-\arg\{R'_c(N_0)\}$

změna fáze vlivem změny činitele odrazu

$|R'_c|$ změna amplitudy pole při jednom odrazu

„Perioda šíření"

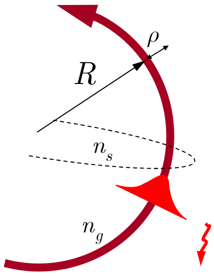
$L=-\frac{1}{k_0}\frac{dS_0}{dN}\Big|_{N_0}=$

Goosův-Hänchenův posuv při totálním odrazu

$=\frac{2dN_0}{\sqrt{\varepsilon_g-N_0^2}}+\frac{d}{d(k_0N)}\left[\arg R_s(N)\right]+\frac{d}{d(k_0N)}\left[\arg R_c(N)\right]=\frac{2dN_0}{\sqrt{\varepsilon_g-N_0^2}}+\delta_s+\delta_c$

Šíření optického záření v zakřivených vlnovodech

Každý zakřivený dielektrický vlnovod vyzařuje



Fázová rychlost vlny lineárně roste s poloměrem;
pro velké poloměry by překročila rychlost světla v substrátu.
Odpovídající část přenášeného výkonu je vyzářena do okolí

$$v(r) = v(R+\rho) = \left(1+\frac{\rho}{R}\right) v(R) \le \frac{c}{n_s},$$

$$N = N' + i\,N'', \quad N'' > 0,$$

$$\exp(i\,k_0 N z) = \exp(i k_0 N' z)\exp(-k_0 N'' z)$$

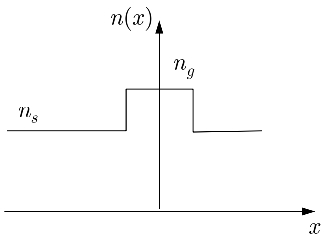
Záření Čerenkovova typu („rychlá“ vlna).
Pomocí poruchové metody je možno ukázat, že

$$N'' \approx 2\frac{\sqrt{N^2 - n_s^2}\left(n_g^2 - N^2\right)}{k_0 N d\left(n_g^2 - n_s^2\right)} \exp\left[-\frac{2}{3} k_0 R \frac{\left(N^2 - n_s^2\right)^{3/2}}{n_s^2}\right]$$

Metody analýzy zakřivených vlnovodů

Metoda konformního zobrazení pro 2D (planární) vlnovod

Přímý vlnovod:
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(x) E = 0$$
$$E(x,z) = E(x)\exp(i k_0 N z)$$



Zakřivený vlnovod:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k_0^2 n^2(r) E = 0$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

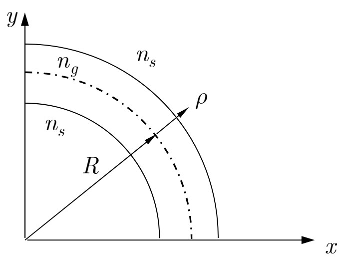
Komplexní proměnná $\quad z = x + iy = re^{i\varphi}$

Konformní zobrazení $\quad w = u + iv$

$$w = u + iv = R\ln\frac{z}{R} = R\ln\frac{r}{R} + iR\varphi,$$

$$u = R\ln\frac{r}{R}, \quad v = R\varphi$$

$$\frac{r}{R} = \exp\left(\frac{u}{R}\right), \quad \varphi = \frac{v}{R}$$



M. Heiblum and J. H. Harris, "Analysis of curved optical waveguides by conformal transformation," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. QE-11, pp. 75-83, 1975.

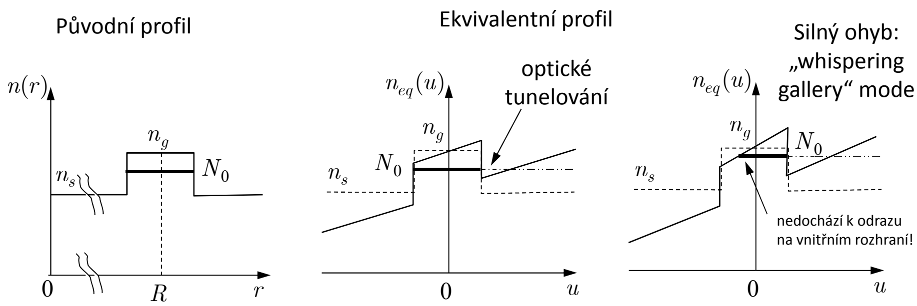
Metoda konformního zobrazení pro 2D (planární) vlnovod

Konformní zobrazení transformuje vlnovou rovnici do tvaru
$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}+k_0^2\underbrace{\frac{r^2}{R^2}n^2(r)}_{n_{eq}^2(u)}E=0$$

$$n_{eq}(u)=\frac{r}{R}n(r)=\exp\left(\frac{u}{R}\right)n\left[R\exp\left(\frac{u}{R}\right)\right]\ldots$$ ekvivalentní profil přímého vlnovodu

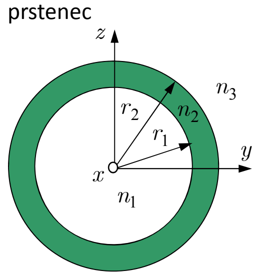
Ekvivalentní profil: $r=R+\rho,\ \rho\ll R,\quad \frac{u}{R}=\ln\frac{r}{R}=\ln\frac{R+\rho}{R}\approx\frac{\rho}{R},\ u\approx\rho,$

$$\exp\left(\frac{u}{R}\right)\approx\exp\left(\frac{\rho}{R}\right)\approx 1+\frac{\rho}{R},\quad n_{eq}(u)\approx\left(1+\frac{u}{R}\right)n\left[R\left(1+\frac{u}{R}\right)\right]\approx\frac{r}{R}n(r)$$

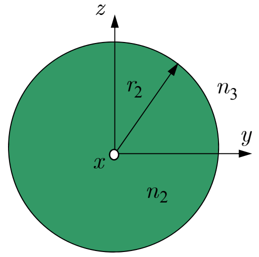


Rigorózní řešení vlnové rovnice zakřiveného 2D vlnovodu

prstenec



$n_2 > n_1, n_3,$



disk $n_2 > n_3$

Polarizace: $\mathbf{E}\parallel\mathbf{x}^0;\ \frac{\partial}{\partial x}\equiv 0$ (kolmo k rovině zakřivení)

$$\mathbf{E}(r,\varphi)=E_x(r,\varphi)\mathbf{x}^0=\psi(r)\exp(i\nu\varphi)\mathbf{x}^0$$

Vlnová rovnice (z Maxwellových rovnic)

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=\nabla\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{E}}_{0}-\Delta\mathbf{E}=-k_0^2n^2(r)\mathbf{E},$$

$$\Delta_\perp E_x+k_0^2n^2(r)E_x=0,$$

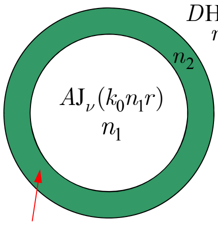
Besselova rovnice

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi(r)}{dr}\right)+\left(k_0^2n^2r^2-\nu^2\right)\psi(r)=0,$$

prstenec:
$$n(r)=\begin{cases}n_1, & r\le r_1,\\ n_2, & r_1<r\le r_2,\\ n_3, & r>r_2\end{cases}$$

disk:
$$n(r)=\begin{cases}n_2, & r\le r_2\\ n_3, & r>r_2\end{cases}$$

Zakřivený vlnovod, nebo mikrorezonátor?



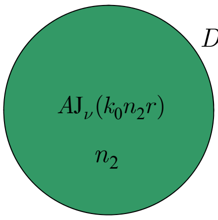
$\rho = k_0 r$

Podmínky spojitosti na rozhraních r_1, r_2

E_x spojité $\Rightarrow$ $\psi(r)$ spojité

H_φ spojité $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\psi(r)}{\partial r}$ spojité

$$\begin{pmatrix} n_1 J'_\nu(n_1\rho_1) & -n_2 J'_\nu(n_2\rho_1) & -n_2 Y'_\nu(n_2\rho_1) & 0 \\ J_\nu(n_1\rho_1) & -J_\nu(n_2\rho_1) & -Y_\nu(n_2\rho_1) & 0 \\ 0 & -n_2 J'_\nu(n_2\rho_2) & -n_2 Y'_\nu(n_2\rho_2) & n_3 H_\nu^{(1)\prime}(n_3\rho_2) \\ 0 & -J_\nu(n_2\rho_2) & -Y_\nu(n_2\rho_2) & H_\nu^{(1)}(n_3\rho_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{pmatrix} n_2 J'_\nu(n_2\rho_2) & n_3 H_\nu^{(1)\prime}(n_3\rho_2) \\ J_\nu(n_2\rho_2) & H_\nu^{(1)}(n_3\rho_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\ldots) = \Phi(\nu,\omega) = 0$ …disperzní rovnice pro ν nebo ω

zakřivený vlnovod rezonátor

Rigorózní řešení rovnice pro 2D prstencový a diskový mikrorezonátor

Numerické problémy:

v blízkosti rezonance, pro $r \approx R, \quad \omega \doteq \nu c / R n_2, \quad k_0 n_2 r = n_2\rho \approx \nu;$

Programy pro výpočet cylindrických funkcí pro reálné i komplexní argumenty selhávají pro (velké) argumenty blízké řádu cylindrické funkce.

Řešení: napsat vlastní program (doktorand L. Prkna, obhájil 2004)

Základ: Uniformní asymptotický rozvoj

M. Abramovitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*,

Applied mathematics series – 55, NBS, Boulder, 1964

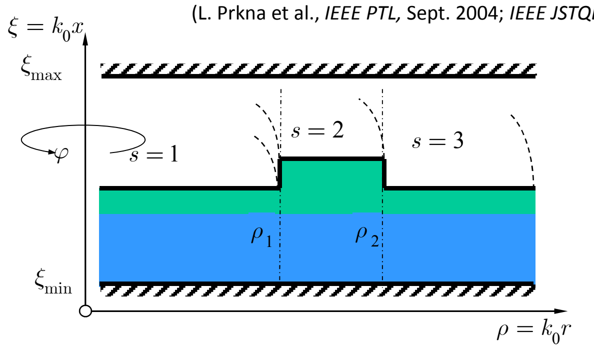
L. Prkna, PhD práce, MFF UK 2004

Kiran Hiremath, PhD práce, Uni Twente, 2005

…

„FMM mode solver“ pro zakřivené vlnovody

(L. Prkna et al., *IEEE PTL,* Sept. 2004; *IEEE JSTQE,* Jan. 2005)



Přístup velmi podobný jako u přímých vlnovodů; ***radiální*** závislost místo ***laterální.***

Problém:
Cylindrické funkce místo trigonometrických.

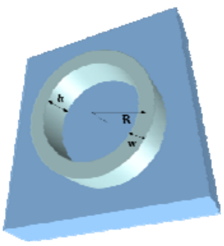
1. rozdělení struktury na radiálně homogenní úseky („řezy“),
   každý řez je považován za multivrstvu.
2. Pole v každém řezu je vyjádřeno pomocí TE a TM vidů multivrstvy.
3. Na rozhraní mezi řezy jsou aplikovány podmínky spojitosti tečných složek.

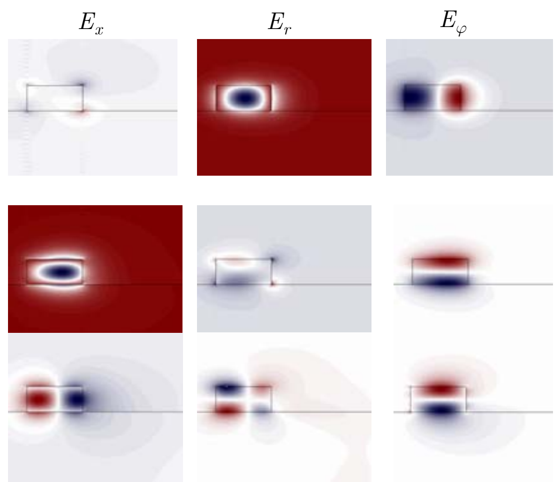
- *Žádná* (nebo malá) *diskretizace*
- Pole v každém řezu je popsáno *analyticky*

Příklad rozložení pole v mikrorezonátoru s velkým kontrastem indexu lomu (SOI)

Si/SiO_2 prstencový mikrorezonátor,

$R = 2\ \mu\text{m}, \ n_{\text{Si}} = 3.5, \ n_{\text{SiO}_2} = 1.45, \ n_a = 1, \ \lambda = 1.55\ \mu\text{m}, \ h = 360\ \text{nm}, \ w = 500\ \text{nm}.$





Kvazi-TE_{00}

Kvazi-TM_{00}

Kvazi-TM_{10}

Složitější vlnovodné struktury: rigorózní formulace metody vázaných vidů

Výpočet pole v obecné vlnovodné struktuře pomocí rozkladu ve vlastní vidy podélně homogenního vlnovodu

1. Vlastní vidy vlnovodu s permitivitou $\varepsilon^{(0)}(x,y)$:
$$\mathbf{E}_\mu(x,y,z) = A_\mu \mathbf{e}_\mu(x,y)e^{i\beta_\mu z},$$
$$\mathbf{H}_\mu(x,y,z) = A_\mu \mathbf{h}_\mu(x,y)e^{i\beta_\mu z}$$

   Ortogonalita a úplnost spektra vlastních vidů
$$\frac{1}{2}\iint_S \mathbf{e}_\mu \times \mathbf{h}_\nu \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2}\iint_S \mathbf{e}_{\mu\perp} \times \mathbf{h}_{\nu\perp} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\beta_\mu}{|\beta_\mu|}\delta_{\mu\nu}$$

2. Obecný vlnovod s permitivitou $\varepsilon(x,y,z)$:
$$\mathbf{E}_\perp(x,z,y) = \sum_\mu \left[a_\mu(z)\mathbf{e}_{\mu\perp}(x,y) + b_\mu(z)\mathbf{e}_{\mu\perp}(x,y)\right],$$
$$\mathbf{H}_\perp(x,z,y) = \sum_\mu \left[a_\mu(z)\mathbf{h}_{\mu\perp}(x,y) - b_\mu(z)\mathbf{h}_{\mu\perp}(x,y)\right],$$

3. **Přesné řešení** vede na soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu
$$\frac{da_\mu(z)}{dz} = i\beta_\mu a_\mu(z) + \sum_\nu \left[K_{\mu\nu}^{++}(z)a_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{+-}(z)b_\nu(z)\right],$$
$$\frac{db_\mu(z)}{dz} = -i\beta_\mu b_\mu(z) + \sum_\nu \left[K_{\mu\nu}^{-+}(z)a_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{--}(z)b_\nu(z)\right].$$

Rovnice pro pomalu proměnné amplitudy

$$a_\mu(z) = A_\mu(z)e^{i\beta_\mu z}, \qquad b_\mu(z) = B_\mu(z)e^{-i\beta_\mu z}.$$
$$\frac{da_\mu}{dz} = e^{i\beta_\mu z}\frac{dA_\mu}{dz} + i\beta_\mu a_\mu, \qquad \frac{db_\mu}{dz} = e^{-i\beta_\mu z}\frac{dB_\mu}{dz} - i\beta_\mu b_\mu.$$

Dosazením získáme
$$\frac{dA_\mu}{dz} = \sum_\nu \left[K_{\mu\nu}^{++}(z)e^{-i(\beta_\mu-\beta_\nu)z}A_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{+-}(z)e^{-i(\beta_\mu+\beta_\nu)z}B_\nu(z)\right],$$
$$\frac{dB_\mu}{dz} = \sum_\nu \left[K_{\mu\nu}^{-+}(z)e^{i(\beta_\mu+\beta_\nu)z}A_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{--}(z)e^{i(\beta_\mu-\beta_\nu)z}B_\nu(z)\right].$$

$$K_{\mu\nu}^{pq} = pK_{\mu\nu} + qk_{\mu\nu}, \qquad p,q = 1 \text{ nebo } -1,$$
$$K_{\mu\nu}(z) = \frac{i\omega\varepsilon_0}{4}\frac{|\beta_\mu|}{\beta_\mu}\iint_S \left[\varepsilon(x,z,y) - \varepsilon^{(0)}(x,y)\right]\mathbf{e}_{\mu\perp}\cdot\mathbf{e}_{\nu\perp}\,dxdy,$$
$$k_{\mu\nu}(z) = \frac{i\omega\varepsilon_0}{4}\frac{|\beta_\mu|}{\beta_\mu^*}\iint_S \frac{\varepsilon^{(0)}(x,y)}{\varepsilon(x,y,z)}\left[\varepsilon(x,z,y) - \varepsilon^{(0)}(x,y)\right]\mathbf{e}_{\mu z}\cdot\mathbf{e}_{\nu z}\,dxdy,$$

„Bornovo přiblížení“ – aproximativní řešení

Soustavu rovnic zkusíme integrovat:

$$\int_0^z \frac{dA_\mu}{dz}dz \approx \int_0^z \sum_\nu \left[K_{\mu\nu}^{++}(z)e^{-i(\beta_\mu-\beta_\nu)z}A_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{+-}(z)e^{-i(\beta_\mu+\beta_\nu)z}B_\nu(z)\right]dz,$$

$$\int_0^z \frac{dB_\mu}{dz}dz \approx \int_0^z \sum_\nu \left[K_{\mu\nu}^{-+}(z)e^{i(\beta_\mu+\beta_\nu)z}A_\nu(z) + K_{\mu\nu}^{--}(z)e^{i(\beta_\mu-\beta_\nu)z}B_\nu(z)\right]dz,$$

Za předpokladu, že amplitudy se mění pomalu, pro nevelké z přibližně platí

$$A_\mu(z) \approx A_\mu(0) + \sum_\nu \left[A_\nu(0)\int_0^z K_{\mu\nu}^{++}(z)e^{-i(\beta_\mu-\beta_\nu)z}dz + B_\nu(0)\int_0^z K_{\mu\nu}^{+-}(z)e^{-i(\beta_\mu+\beta_\nu)z}dz\right],$$

$$B_\mu(z) \approx B_\mu(0) + \sum_\nu \left[A_\nu(0)\int_0^z K_{\mu\nu}^{-+}(z)e^{i(\beta_\mu+\beta_\nu)z}dz + B_\nu(0)\int_0^z K_{\mu\nu}^{--}(z)e^{i(\beta_\mu-\beta_\nu)z}dz\right].$$

Integrály jsou „významně nenulové“, pouze pokud integrované funkce neoscilují rychle.

Rovnice vázaných vln pro pomalu proměnné amplitudy

Zjednodušme soustavu rovnic ponecháním pouze členů splňujících podmínku fázového synchronismu:

$$\frac{dA_\mu}{dz} \approx K_{\mu\nu}^{++}(z)e^{-i(\beta_\mu-\beta_\nu)z}A_\nu(z)$$

Pro pomalu proměnné amplitudy přibližně platí $A_\nu(0) \approx A_\nu(0)$.

Položme dále
$$\beta_\mu - \beta_\nu \approx \beta_\mu(\omega_0) - \beta_\nu(\omega_0) + \frac{d}{d\omega}\left[\beta_\mu(\omega) - \beta_\nu(\omega)\right](\omega-\omega_0)$$
$$\approx \beta_\mu(\omega_0) - \beta_\nu(\omega_0) + \frac{N_{\mu g}-N_{\nu g}}{c}(\omega-\omega_0).$$

Pak pokud $\beta_{\mu 0} = \beta_{\nu 0}$

$$T(z) = \frac{A_\mu(z)}{A_\nu(0)} \approx \int_0^z K_{\mu\nu}^{++}(z')e^{-i(\beta_\mu-\beta_\nu)z'}dz' \approx \int_0^z K_{\mu\nu}^{++}(z')e^{-i\left[\frac{N_{\mu g}-N_{\nu g}}{c}(\omega-\omega_0)\right]z'}dz'.$$

Spektrální charakteristika přenosu je přibližně dána Fourierovou transformací podélné závislosti činitele vazby

Vzájemná vazba dvou vln

Pro vazební délku podstatně delší než je délka záznějů mezi vidy se uplatní pouze členy blízké fázovému synchronismu:

Pro „dopřednou“ vazbu

$$\frac{dA_\mu}{dz} = K_{\mu\mu}^{++}(z)A_\mu(z) \qquad + K_{\mu\nu}^{++}(z)e^{-i\left(\beta_\mu-\beta_\nu\right)z}A_\nu(z),$$
$$\frac{dA_\nu}{dz} = K_{\nu\mu}^{++}(z)e^{i\left(\beta_\mu-\beta_\nu\right)z}A_\mu(z) + K_{\nu\nu}^{++}(z)A_\nu(z),$$

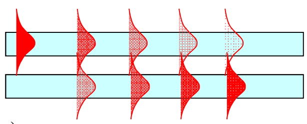
Pro „zpětnou“ vazbu

$$\frac{dA_\mu}{dz} = K_{\mu\mu}^{++}(z)A_\mu(z) \qquad + K_{\mu\nu}^{+-}(z)e^{-i\left(\beta_\mu+\beta_\nu\right)z}B_\nu(z)$$
$$\frac{dB_\nu}{dz} = K_{\nu\mu}^{-+}(z)e^{i\left(\beta_\mu+\beta_\nu\right)z}A_\mu(z) + K_{\nu\nu}^{--}(z)B_\nu(z)$$

Aproximativní metoda vázaných vidů

Dvojice vázaných vlnovodů $e_1(x,y)$

nejsou ortogonální! $e_2(x,y)$



$$E(x,y,z) \approx a_1(z)e_1(x,y) + a_2(z)e_2(x,y)$$

$$\frac{da_1}{dz} = i\beta_1 a_1(z) + i\kappa_{12}a_2(z)$$
$$\frac{da_2}{dz} = i\kappa_{21}a_1(z) + i\beta_2 a_2(z)$$

Zachování výkonu v bezeztrátové struktuře:

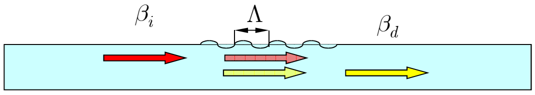
$$\frac{d}{dz}\left(a_1a_1^* + a_2a_2^*\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa_{21} = \kappa_{12}^*$$

$$a_1(z) = a_1(0)e^{i\frac{\beta_1+\beta_2}{2}z}\left[\cos\delta z - i(\Delta\beta/2)\sin\delta z\right], \qquad \delta = \sqrt{(\Delta\beta/2)^2 + |\kappa_{12}\kappa_{21}|},$$

$$a_2(z) = ia_1(0)\frac{\kappa}{\delta}e^{i\frac{\beta_1+\beta_2}{2}z}\sin\delta z; \qquad P_d(z) = |a_1(0)|^2\left|\frac{\kappa}{\delta}\right|^2\sin^2\delta z.$$

Problém: neexistuje jednoznačný způsob výpočtu činitele vazby
(úloha není exaktně formulována!)
Exaktní řešení ukážeme později.

Aplikace teorie vázaných vidů: konverze vidů na vlnovodné mřížce



$$K_{\mu\nu}^{pq}(z) = \sum_m K_{\mu\nu,m}^{pq} e^{imKz}, \qquad K = \frac{2\pi}{\Lambda} \qquad\qquad \beta_d \approx \beta_i \pm mK$$

Pro $m = 1$

$$\frac{dA_i}{dz} = i\kappa e^{i\Delta\beta z} A_d(z), \qquad \Delta\beta = \beta_d - \beta_i - K$$

$$\frac{dA_d}{dz} = i\kappa^* e^{-i\Delta\beta z} A_i(z), \quad \kappa = iK_{d,i,1}^{++}$$

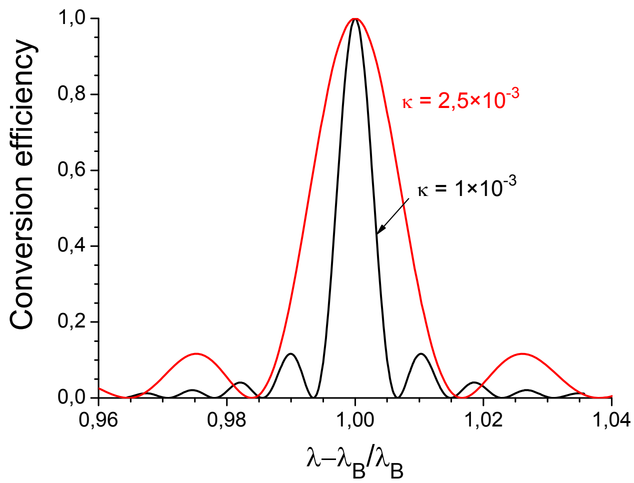
Řešení s počáteční podmínkou $A_i(0) = A_{i0}, \quad A_d(0) = 0$ je

$$A_i(z) = A_{i,0} e^{i\frac{\Delta\beta}{2}z}\left[\cos\delta z - i(\Delta\beta/2\delta)\sin\delta z\right], \qquad \delta = \sqrt{(\Delta\beta/2)^2 + |\kappa|^2}.$$

$$A_d(z) = iA_{i,0}\frac{\kappa}{\delta}e^{-i\frac{\Delta\beta}{2}z}\sin\delta z; \qquad |A_d(z)|^2 = |A_{i0}|^2\left|\frac{\kappa}{\delta}\right|^2\sin^2\delta z.$$

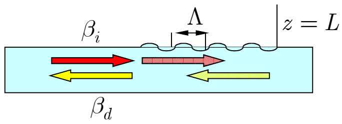
Pro $\Delta\beta = 0$ $\quad |A_d(z)|^2 = |A_{i0}|^2 \sin|\kappa| z$ Účinnost může být teoreticky 100%

Spektrální závislost konverze vidů na mřížce



„Dlouhá“ mřížka s malým činitelem vazby má úzkou spektrální křivku konverzní účinnosti

Zpětný (braggovský) odraz na mřížce



$$\beta_d \approx \beta_i \pm mK; \quad \beta_d \approx \beta_i - K \approx -\beta_i$$
$$K \approx 2\beta_i$$

$$\frac{dA_i}{dz} = i\kappa e^{-i\Delta\beta z} B_d(z), \quad \Delta\beta = \beta_d + \beta_i - K$$
$$\frac{dB_d}{dz} = -i\kappa^* e^{i\Delta\beta z} A_i(z), \quad \kappa = iK^{++}_{d,i,1}.$$

Řešení s okrajovými podmínkami $A_i(0) = A_{i0}, \quad B_d(L) = 0$ je

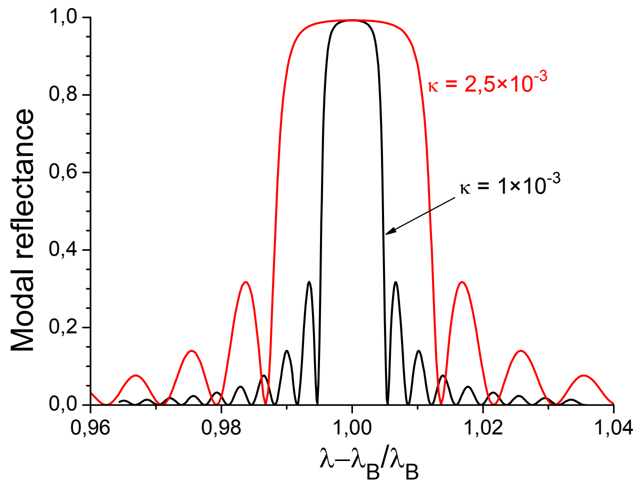
$$A_i(z) = \delta A_{i,0}\left[\delta\cosh\delta z - i\left(\Delta\beta/2\right)\sinh\delta z\right]^{-1}, \quad \delta = \sqrt{\left|\kappa\right|^2 - \left(\Delta\beta/2\right)^2}.$$
$$B_d(z) = i\kappa^* A_{i,0} e^{-i\frac{\Delta\beta}{2}z}\left[\delta\coth\delta z - i\frac{\Delta\beta}{2}\right]^{-1}$$

Pro $\Delta\beta = 0$

$$\left|R\right|^2 = \left|\frac{B_d(0)}{A_{i0}}\right|^2 = \left|\frac{\kappa\sinh\delta L}{\delta\cosh\delta L - i\left(\Delta\beta/2\right)\sinh\delta L}\right|^2$$

$$\left|R^2\right| = \tanh^2\left|\kappa\right| L.$$

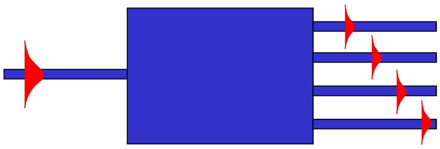
Spektrální závislost účinnosti zpětného odrazu



Úzká spektrální křivka konverzní účinnosti vyžaduje malý činitel vazby a dlouhou mřížku

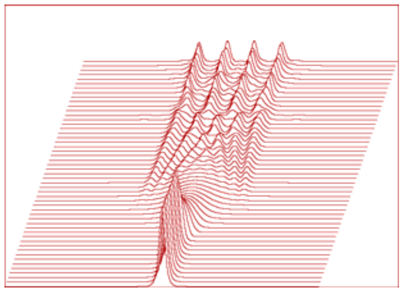
Metody „šíření optického svazku“ (BPM)

Metody pro výpočet rozložení pole optického záření
ve složitějších podélně nehomogenních vlnovodných strukturách



Složitější vlnovodná struktura

Rozložení optického záření



Princip metody FFT BPM

Předpokládáme, že rozložení pole je popsáno Helmholtzovou vlnovou rovnicí
(zanedbáváme vektorový charakter pole, aproximace pro „slabě vedoucí“ vlnovody

$$\Delta E + k_0^2 n^2(x,y,z)E = 0$$

Upravíme na tvar $$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\left[\Delta_\perp E + k_0^2 n^2(x,y,z)E\right] = -\mathbb{L}^2 E$$

neboli $$\frac{\partial E}{\partial z} = \pm i \mathbb{L} E = \pm i \sqrt{\Delta_\perp + k_0^2 n^2(x,y,z)}\,E$$

Formální řešení: $$E(x,y,z+\Delta z) = \exp(i\Delta z \mathbb{L})\,E(x,y,z)$$

Volba znaménka určuje směr šíření vlny!

Problém: co je to $\mathbb{L} = \sqrt{\Delta_\perp + k_0^2 n^2(x,y,z)}$ a jak to spočítat?

Operátory $\Delta_\perp$ a $k_0^2 n^2(x,y,z)$ vzájemně nekomutují!

Předpokládejme, že optická nehomogenita prostředí je slabá,

$$n^2(x,y,z) = \varepsilon_s + \Delta\varepsilon(x,y,z), \qquad \Delta\varepsilon \ll \varepsilon_s, \qquad \Delta_\perp \ll k_0^2\varepsilon_s$$

Pak

$$\mathbb{L} = \sqrt{k_0^2\varepsilon + \Delta_\perp} = \sqrt{k_0^2\varepsilon_s + \Delta_\perp + k_0^2\Delta\varepsilon} \cong \sqrt{k_0^2\varepsilon_s + \Delta_\perp} + k_0\Delta n(x,y,z)$$

Ukážeme, že operátor $\exp\left(i\sqrt{k_0^2\varepsilon_s + \Delta_\perp}\, z\right)$ popisuje *šíření vlny v homogenním prostředí s indexem lomu* $n_s = \sqrt{\varepsilon_s}$: Nechť

$$E(x,y,z=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(k_x,k_y,z=0)\exp\left[i\left(k_x x + k_y y\right)\right] dk_x dk_y,$$

$$F(k_x,k_y,z=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(x,y,z=0)\exp\left[-i\left(k_x x + k_y y\right)\right] dx dy$$

Pak

$$E(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(k_x,k_y,z=0)\exp\left(i\sqrt{k_0^2\varepsilon_s - k_x^2 - k_y^2}\, z\right)\exp\left[i\left(k_x x + k_y y\right)\right] dk_x dk_y$$

neboli $F(k_x,k_y,z) = \exp\left(i\sqrt{k_0^2\varepsilon_s - k_x^2 - k_y^2}\, z\right) F(k_x,k_y,z=0),$

$$F(k_x,k_y,z) = \exp(i\mathbb{L}z)\, F(k_x,k_y,z=0).$$

Šíření vlny v homogenním prostředí s indexem lomu n_s

popisuje tedy ve spektrální oblasti operace násobení

$$F(k_x,k_y,z) = \exp\left(i\sqrt{k_0^2\varepsilon_s - k_x^2 - k_y^2}\, z\right) F(k_x,k_y,z=0), \qquad n_s = \sqrt{\varepsilon_s}$$

Formálně můžeme tedy psát

$$E(x,y,z) = \exp\left(i\sqrt{k_0^2\varepsilon_s + \Delta_\perp}\, z\right) E(x,y,z=0)$$

My ale potřebujeme spočítat $\exp\left\{i\left[\sqrt{k_0^2\varepsilon_s + \Delta_\perp} + k_0\Delta n(x,y,z)\right] z\right\}.$

Operátory $\sqrt{k_0^2\varepsilon_s + \Delta_\perp}$ a $k_0\Delta n(x,y)$ vzájemně nekomutují, proto

$$\exp\left\{i\left[\sqrt{k_0^2\varepsilon_s + \Delta_\perp} + k_0\Delta n(x,y,z)\right] z\right\} \neq \exp\left\{i\left[\sqrt{k_0^2\varepsilon_s + \Delta_\perp}\right] z\right\}\exp\left[ik_0\Delta n(x,y,z)\, z\right]$$

Použijeme tzv. “operator splitting” method: při šíření na malou vzdálenost Δz

$$\exp\left\{i\left[\sqrt{k_0^2\varepsilon_s+\Delta_\perp}+k_0\Delta n(x,y,z)\right]\Delta z\right\}\cong$$
$$\cong\exp\left\{\frac{i}{2}\left[\sqrt{k_0^2\varepsilon_s+\Delta_\perp}\right]\Delta z\right\}\exp\left[ik_0\Delta n(x,y,z)\Delta z\right]\exp\left\{\frac{i}{2}\left[\sqrt{k_0^2\varepsilon_s+\Delta_\perp}\right]\Delta z\right\}$$

Aproximace platí tím lépe, čím menší je krok Δz.

Dá se ukázat, že chyba je úměrná $(\Delta z)^2$.

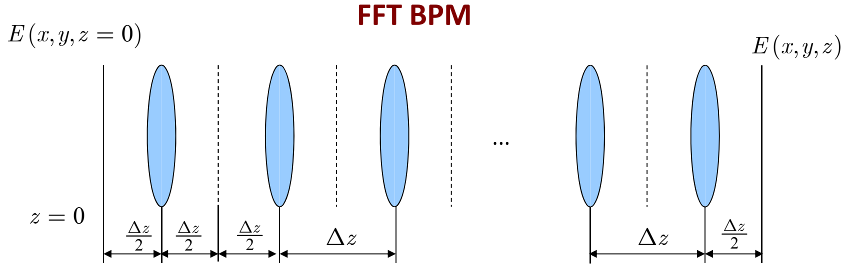
Zjemňování dělení operátoru je identické se zmenšováním kroku Δz.

Jednoduchá fyzikální interpretace algoritmu:

$$\underbrace{\exp\left\{\frac{i}{2}\left[\sqrt{k_0^2\varepsilon_s+\Delta_\perp}\right]\Delta z\right\}}_{\text{šíření v homog. prostředí na vzdálenost } \Delta z}\ \underbrace{\exp\left[ik_0\Delta n(x,y,z)\Delta z\right]}_{\text{fázová korekce}}\ \underbrace{\exp\left\{\frac{i}{2}\left[\sqrt{k_0^2\varepsilon_s+\Delta_\perp}\right]\Delta z\right\}}_{\text{šíření v homog. prostředí na vzdálenost } \Delta z}$$

To je princip metody šíření optického svazku založené
na rychlé Fourierově transformaci (označované jako FFT BPM)

FFT BPM



Šíření ve volném prostoru: přechod do spektrální oblasti pomocí FFT,

násobení faktorem $\exp\left(i\sqrt{k_0^2\varepsilon_s-k_x^2-k_y^2}\,\Delta z/2\right)$, zpětná FFT

Fázová korekce: násobení faktorem $\exp\left[ik_0\Delta n(x,y,z)\Delta z\right]$

atd., atd....

Výhody (pro 2D): relativní jednoduchost, rychlost

Nevýhody: použitelno pouze pro „paraxiální“ struktury
s omezeným úhlovým spektrem

Princip metody konečných diferencí (FD)

Metoda konečných diferencí: diskretizace, přechod od derivace k diferenci

$$U(x) \to u_m = U(x_m), \quad j = 1 \ldots M, \quad x_j = x_0 + m\Delta x$$

$$\frac{dU}{dx} \cong \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2\Delta x}, \qquad \mathbf{D}^{(1)} = \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \ldots & 0 & 0 & -1 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{D}^{(1)} \cdot \mathbf{u}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} \cong \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{\left(\Delta x\right)^2}, \qquad \mathbf{D}^{(2)} = \frac{1}{\left(\Delta x\right)^2}\begin{pmatrix} \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{D}^{(2)} \cdot \mathbf{u}$$

FD BPM

Rovnice pro vlastní vidy jako problém vlastních čísel maticového operátoru

$$\frac{d^2}{dx^2}E + k_0^2\left[n^2(x) - N^2\right]E = 0 \ \to \ \left\{\mathbf{D}^{(2)} + k_0^2\left[\mathbf{n}^2 - N^2\mathbf{I}\right]\right\} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

$$\left(\mathbf{D}^{(2)} + k_0^2\mathbf{n}^2\right) \cdot \mathbf{E} = N^2\mathbf{I} \cdot \mathbf{E}$$

„Fresnelova“ aproximace:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\left[\Delta_\perp E + k_0^2 n^2(x,y,z)E\right] = -\mathbb{L}^2 E$$

$$\mathbf{D}_z \cdot \mathbf{E} = i\sqrt{\mathbf{D}_\perp^{(2)} + k_0^2 n^2 \mathbf{I}} \cdot \mathbf{E} = i\,\mathbf{L} \cdot \mathbf{E}$$

$\mathbf{L}$ je nyní ***matice***

$$\mathbf{L} = \sqrt{\mathbf{D}_\perp^{(2)} + k_0^2\mathbf{n}^2} \cong \sqrt{\mathbf{D}_\perp^{(2)} + k_0^2 n_s^2 \mathbf{I}} + \frac{1}{2}k_0\left(\sqrt{\mathbf{D}_\perp^{(2)} + k_0^2 n_s^2 \mathbf{I}}\right)^{-1} \cdot \Delta n\mathbf{I},$$

$$\mathbf{L}_0 = \sqrt{\mathbf{D}_\perp^{(2)} + k_0^2 n_s^2 \mathbf{I}}, \quad \mathbf{L} \cong \mathbf{L}_0 + \frac{1}{2}k_0\mathbf{L}_0^{-1} \cdot \Delta n\mathbf{I}$$

Omezení na „paraxiální“ šíření v důsledku „Fresnelovy“ aproximace

Padého aproximace

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left[\Delta_\perp + k_0^2 n^2(x,y,z)\right]E = 0;$$ volme $E(x,y,z) = \exp\left(ik_0 n_0 z\right)\Psi(x,y,z)$

$\Psi(x,y,z)$ ... „pomalu proměnná amplituda“

Pak $$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2ik_0 n_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \mathbb{Q}\Psi = 0, \qquad \mathbb{Q} = \mathbb{L} - k_0^2 n_0^2 = \Delta_\perp + k_0^2\left(n^2 - n_0^2\right)$$

v symbolickém operátorovém vyjádření $$\frac{\partial}{\partial z} - i\alpha\frac{\partial^2}{\partial z^2} = i\alpha\mathbb{Q}, \quad \alpha = \frac{1}{2k_0 n_0},$$

neboli $$\frac{\partial}{\partial z}\left(1 - i\alpha\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\alpha\mathbb{Q}.$$

Padého aproximace vychází z formálního vyjádření $$\frac{\partial}{\partial z} = i\alpha\mathbb{Q}\left(1 - i\alpha\frac{\partial}{\partial z}\right)^{-1}$$

a postupné substituce.

Padého aproximace 2. řádu: $$\frac{\partial}{\partial z} \approx i\alpha\mathbb{Q}\left(1 + \alpha^2\mathbb{Q}\right)^{-1},$$

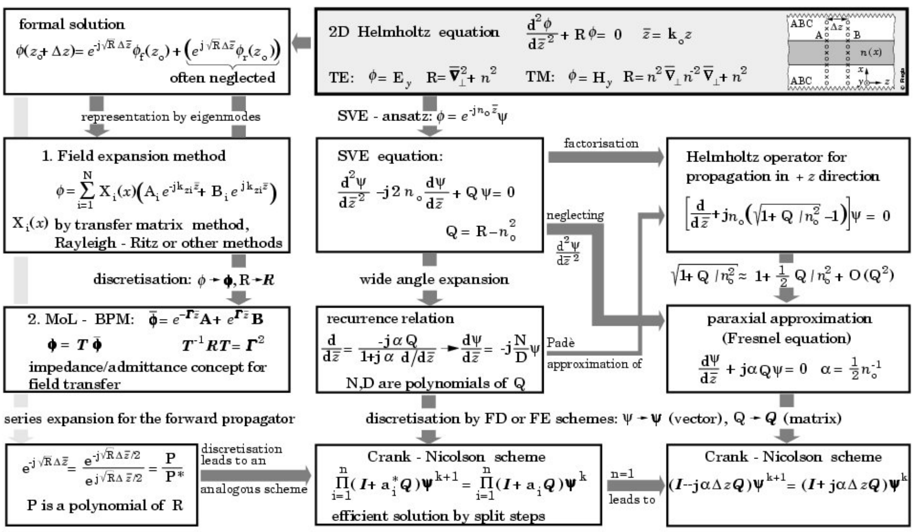
3. řádu $$\frac{\partial}{\partial z} \approx i\alpha\mathbb{Q} + i\alpha^3\mathbb{Q}^2\left(1 + 2\alpha^2\mathbb{Q}\right)^{-1}$$ atd.

Ve FD aproximaci je *Q* maticový operátor, takže je ho možno explicitně vyjádřit.

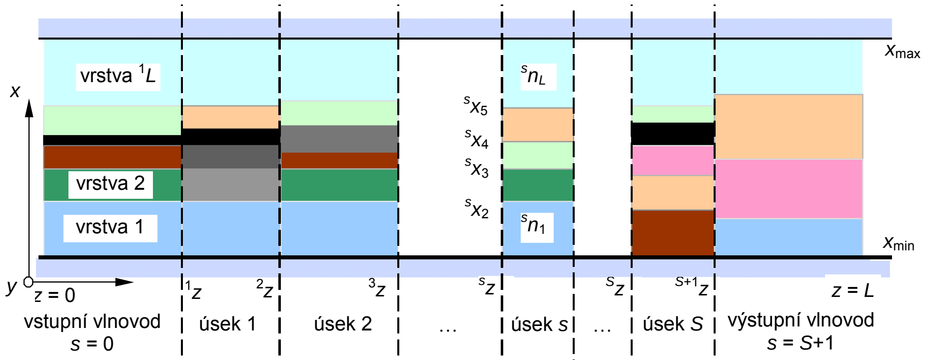
Předchozí vztahy představují parabolické rovnice, které lze relativně snadno řešit.

Postup je možno aplikovat i na vektorové rovnice ⇒ ***vektorové metody BPM***

Alternativní metody BPM (skalární aproximace)



Metoda obousměrného rozkladu ve vlastní vidy (BEP):
(„rigorózní“ *vektorová* metoda)



$$\left.\begin{matrix} {}^sE_y \\ {}^sH_y \end{matrix}\right\} = \sum_m {}^sp_m(z)\,{}^sf_m(x), \qquad \left.\begin{matrix} {}^sH_x \\ {}^sE_x \end{matrix}\right\} = \sum_m \frac{{}^sN_m}{{}^s\varepsilon^{\nu}(x)}\,{}^sq_m(z)\,{}^sf_m(x),$$

kompl. amplitudy vlastní vidy s-tého úseku vlnovodu

---

1. Výpočet vlastních vidů v homogenním úseku

$$\frac{d^2\,{}^sf_m(x)}{dx^2} + k_0^2\left[{}^s\varepsilon(x) - {}^sN_m^2\right]{}^sf_m(x) = 0 \qquad \text{pro TE polarizaci}$$

$$\varepsilon\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\,{}^sf_m(x)}{dx}\right) + k_0^2\left[{}^s\varepsilon(x) - {}^sN_m^2\right]{}^sf_m(x) = 0 \qquad \text{pro TM polarizaci}$$

Řešení metodou přenosových matic (příčné rezonance)

2. Zavedení (příčné) immitance (impedance)

$${}^s\mathbf{q}(z) = {}^s\mathbf{u}(z)\cdot{}^s\mathbf{p}(z)$$

3. Šíření v homogenním úseku jako transformace immitance
(lze odvodit z metody přenosové matice po delších úpravách)

$${}^s\mathbf{u}(z+\Delta z) = -i\left[\tan\left(k_0\,{}^s\mathbf{N}\Delta z\right)\right]^{-1} + \left[\sin\left(k_0\,{}^s\mathbf{N}\Delta z\right)\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left[{}^s\mathbf{u}({}^sz) - \cot\left(k_0\,{}^s\mathbf{N}\Delta z\right)\right]^{-1}\cdot\left[\sin\left(k_0\,{}^s\mathbf{N}\Delta z\right)\right]^{-1}.$$

$${}^s\mathbf{p}(z+\Delta z) = i\left[{}^s\mathbf{u}(z) + i\cot(k_0\,{}^s\mathbf{N}\Delta z)\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left[\sin(k_0\,{}^s\mathbf{N}\Delta z)\right]^{-1}\cdot{}^s\mathbf{p}(z)$$

4. **Přechod mezi homogenními úseky**

$$ {}^{a}\mathbf{u} = \left({}^{a}\mathbf{N}\right)^{-1} \cdot {}^{a\underline{b}}\mathbf{O} \cdot {}^{b}\mathbf{N} \cdot {}^{b}\mathbf{u} \cdot {}^{\underline{b}a}\mathbf{O}, \qquad {}^{b}\mathbf{p} = {}^{\underline{b}a}\mathbf{O} \cdot {}^{a}\mathbf{p}, $$

$$ {}^{b}\mathbf{u} = \left({}^{b}\mathbf{N}\right)^{-1} \cdot {}^{b\underline{a}}\mathbf{O} \cdot {}^{a}\mathbf{N} \cdot {}^{a}\mathbf{u} \cdot {}^{\underline{a}b}\mathbf{O}. \qquad {}^{b}\mathbf{q} = {}^{b}\mathbf{N}^{-1} \cdot {}^{\underline{b}a}\mathbf{O} \cdot {}^{a}\mathbf{N} $$

$$ {}^{\underline{b}a}O_{nm} = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{{}^{a}f_m(x)\,{}^{b}f_n(x)}{{}^{b}\varepsilon^{\nu}(x)}dx, \qquad {}^{b\underline{a}}O_{nm} = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{{}^{a}f_m(x)\,{}^{b}f_n(x)}{{}^{a}\varepsilon^{\nu}(x)}dx $$

5. **Výpočet odražené vlny** na vstupu struktury

$$ {}^{1}\mathbf{a}^{-}(0) = \mathbf{R} \cdot {}^{1}\mathbf{a}^{+}(0), \qquad \mathbf{R} = \left[{}^{1}\mathbf{u}(0) - \mathbf{I}\right] \cdot \left[{}^{1}\mathbf{u}(0) + \mathbf{I}\right]^{-1} $$

6. **Výpočet rozložení pole ve struktuře**

$$ {}^{1}\mathbf{p}(0) = {}^{s}\mathbf{a}^{+}(0) + {}^{s}\mathbf{a}^{-}(0); \qquad {}^{s}\mathbf{q}(z) = {}^{s}\mathbf{u}(z) \cdot {}^{s}\mathbf{p}(z) $$

- Immitanční formulace – dobrá numerická stabilita metody
- Okrajové podmínky – „dokonale přizpůsobené vrstvy“
- Analýza 1D periodické struktury s použitím Floquetova – Blochova teorému

Aplikace na periodické struktury
(fotonické krystaly)

Kombinace metody rozvoje ve vlastní vidy s Floquetovým teorémem:

Je-li struktura periodická a $^{\Lambda}\mathbf{A}^{\pm}$ je přenosová matice jedné periody pro přímý a zpětný průchod, l-tý Floquetův-Blochův vid splňuje podmínku

$$ {}^{\Lambda}\mathbf{A}^{\pm} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}^{l} \\ \mathbf{q}^{l} \end{pmatrix} = \exp(\pm i\phi^{l}) \begin{pmatrix} \mathbf{p}^{l} \\ \mathbf{q}^{l} \end{pmatrix}. $$

Jakmile známe Floquetův-Blochův vid a jeho „konstantu šíření“ ϕ^l,

průchod strukturou o L periodách je jednoduše popsán vztahem

$$ {}^{L\Lambda}\mathbf{A}^{\pm} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}^{l} \\ \mathbf{q}^{l} \end{pmatrix} = \left({}^{\Lambda}\mathbf{A}^{\pm}\right)^{L} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}^{l} \\ \mathbf{q}^{l} \end{pmatrix} = \exp(\pm iL\phi^{l}) \begin{pmatrix} \mathbf{p}^{l} \\ \mathbf{q}^{l} \end{pmatrix}. $$

(Formulace pomocí rozptylové matice je numericky stabilnější).

P. Bienstman: CAMFR, camfr. sourceforge.net

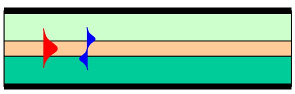
Problémy „standardní“ metody BEP:

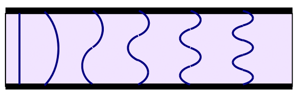
1. Pro numerický výpočet je třeba pracovat s konečným počtem vidů, ty však netvoří úplný systém. V různých sekcích jsou navíc tyto systémy různé. To vede k nejednoznačnosti splnění podmínek spojitosti tečných složek polí na rozhraní, k narušení reciprocity a v bezeztrátovém prostředí ke vzniku „numerického útlumu“.

2. V případě ztrátových materiálů s komplexní permitivitou nebo při použití PML je třeba hledat relativně velký počet vidů, tedy hledat velký počet nul složité komplexní (analytické) funkce v komplexní rovině. Výpočet je časově náročný a jeho urychlení bývá na úkor spolehlivosti (některé nuly se nemusí podařit najít).

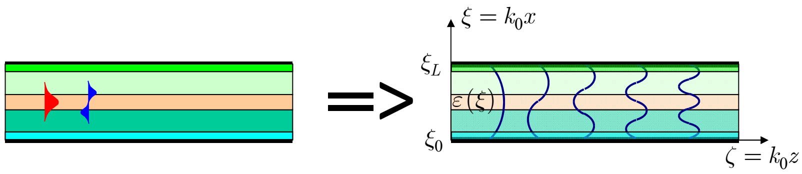
Jednoduchá alternativa:

Metoda založená na rozvoji v harmonické funkce:





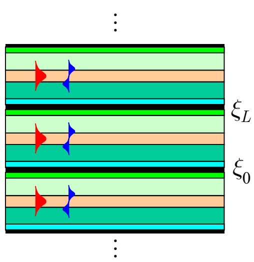
Metoda Fourierova rozkladu (v rovinné vlny) (Ph. Lalanne)



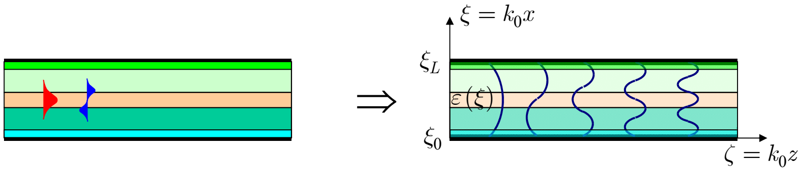
Periodické okrajové podmínky: $f_m(\xi_{\min}) = f(\xi_{\max})$

Rozklad do soustavy funkcí (= rovinné vlny) $u_m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{X}} \exp\left(i \frac{m\pi}{X}\right), \quad u'_m = i \frac{m\pi}{X} u_m(\xi)$

Fyzikální interpretace:
periodické opakování struktury
Pro neperiodické struktury
oddělení „period“ pomocí PML



Metoda rozkladu ve Fourierovu řadu (2D)



Ortonormované „vidy deskového vlnovodu“

elektricky/magneticky vodivé stěny

$$u_m(\xi) = \sqrt{\frac{2}{X}} \sin\left[\frac{m\pi}{X}(\xi - \xi_0)\right], \quad X = \xi_L - \xi_0, \quad m = 1, 2, \ldots, \infty$$

$$u(\xi_0) = u(\xi_L) = 0 \qquad u_m(\xi_0) = u_m(\xi_L) = 0$$

také potřebujeme

$$v_1(\xi) = \sqrt{\frac{1}{X}}, \qquad v_m'(\xi_0) = v_m'(\xi_L) = 0$$

$$v'(\xi_0) = v'(\xi_L) = 0, \qquad v_m(\xi) = \sqrt{\frac{2}{X}} \cos\left[\frac{(m-1)\pi}{X}(\xi - \xi_0)\right], \quad m = 2, \ldots, \infty$$

Vzájemné relace:

$$u_m'(\xi) = \frac{m\pi}{X} v_{m+1}(\xi), \quad v_{m+1}'(\xi) = -\frac{m\pi}{X} u_m(\xi).$$

Problém „správné“ fourierovské faktorizace

P. Lalanne and G. M. Morris, *JOSA. A*, vol. 13, pp. 779-784, 1996:
Idea: Fourierův rozvoj spojité funkce konverguje rychleji než rozvoj nespojité funkce
Lifeng Li, *JOSA. A*, vol. 13, pp. 1870-1876, 1996:
Postavení myšlenky na solidnější matematický základ

$$D(x) = \varepsilon(x) E(x) \quad \Rightarrow \quad E(x) = \sum_m E_m u_m(x), \quad D(x) = \sum_m D_m u_m(x)$$

V mnoha případech je ε nespojité.

1. Tečné složky intenzity el. pole jsou spojité na rozhraních, tedy

$$\mathbf{D}_{\parallel} = [\![\varepsilon]\!] \cdot \mathbf{E}_{\parallel}, \quad [\![\varepsilon]\!]_{mm'} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} u_m(x) \varepsilon(x) u_{m'}(x)\, dx,$$

Toeplitzova matice

2. Kolmá složka intenzity elektrického pole $E_{\perp}$ je na rozhraní nespojitá, $D_{\perp}$ je spojité:

$$\mathbf{E} = [\![\varepsilon^{-1}]\!] \cdot \mathbf{D}, \quad \text{nebo} \quad \mathbf{D} = [\![\varepsilon^{-1}]\!]^{-1} \cdot \mathbf{E}, \quad [\![\varepsilon^{-1}]\!]_{mm'} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} u_m(x) \frac{1}{\varepsilon(x)} u_{m'}(x)\, dx.$$

Obecně tedy pro *konečný počet členů rozvoje*

$$\cancel{\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\parallel} \\ \mathbf{D}_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\![\varepsilon]\!] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\![\varepsilon]\!] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{E}_{\perp} \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\parallel} \\ \mathbf{D}_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\![\varepsilon]\!] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\![1/\varepsilon]\!]^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{E}_{\perp} \end{pmatrix}$$

Rozvoj s konečným počtem členů a jeho maticové vyjádření:

$$f(\xi) = \sum_{m=1}^{M} {}^{u}f_m u_m(\xi), \text{ etc.} \quad ==> \quad f(\xi) \to {}^{u}\mathbf{f}, \quad g(\xi) \to {}^{u}\mathbf{g}, \quad h(\xi) \to \quad {}^{v}\mathbf{h} = \begin{pmatrix} {}^{v}h_1 \\ {}^{v}h_2 \\ \vdots \\ {}^{v}h_M \end{pmatrix}$$

TE vidy:

$$ {}^{vu}\mathbf{D} \cdot {}^{u}\mathbf{f} = {}^{v}\mathbf{h}$$

$$ {}^{u}\mathbf{g}(\xi) = N\, {}^{u}\mathbf{f}(\xi)$$

$$ {}^{uv}\mathbf{D} \cdot {}^{v}\mathbf{h} = N\, {}^{u}\mathbf{g} - {}^{u}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot {}^{u}\mathbf{f}$$

$$\boxed{\left({}^{uv}\mathbf{D} \cdot {}^{vu}\mathbf{D} + {}^{u}\boldsymbol{\varepsilon}\right) \cdot {}^{u}\mathbf{f} = N^2\, {}^{u}\mathbf{f}}$$

$$ {}^{u}\varepsilon_{mn} = \int_{\xi_0}^{\xi_M} u_m(\xi)\,\varepsilon(\xi)\,u_n(\xi)\,d\xi,$$

$$ {}^{uv}D_{mn} = -{}^{vu}D_{mn} = \frac{m\pi}{X}\delta_{mn},$$

TM vidy:

$$ {}^{v}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot {}^{vu}\mathbf{D} \cdot {}^{u}\mathbf{f} = {}^{v}\mathbf{h}$$

$$ {}^{u}\mathbf{g}(\xi) = N\, {}^{u}\boldsymbol{\eta} \cdot {}^{u}\mathbf{f}$$

$$ {}^{uv}\mathbf{D} \cdot {}^{v}\mathbf{h} = N\, {}^{u}\mathbf{g} - {}^{u}\mathbf{f}$$

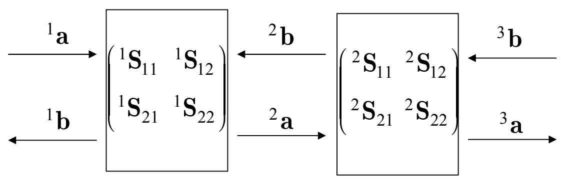
$$\boxed{\left[\mathbf{I} + {}^{uv}\mathbf{D} \cdot {}^{v}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot {}^{vu}\mathbf{D}\right] \cdot {}^{u}\mathbf{f} = N^2\, {}^{u}\boldsymbol{\eta} \cdot {}^{u}\mathbf{f}}$$

$$ {}^{v}\varepsilon_{mn} = \int_{\xi_0}^{\xi_M} v_m(\xi)\,\varepsilon(\xi)\,v_n(\xi)\,d\xi$$

$$ {}^{u}\eta_{mn} = \int_{\xi_0}^{\xi_M} u_m(\xi)\frac{1}{\varepsilon(\xi)}u_n(\xi)\,d\xi$$

$$\left(\mathbf{I} + {}^{uv}\mathbf{D} \cdot {}^{v}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot {}^{vu}\mathbf{D}\right)_{mm'} = \delta_{mm'} - \frac{\pi^2}{X^2} mm' \left({}^{v}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\right)_{m+1,m'+1}$$

Rozptylová matice spojení (konkatenace) dvou sousedních sekcí



$$\begin{pmatrix} {}^{1}\mathbf{b} \\ {}^{2}\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}\mathbf{S}_{11} & {}^{1}\mathbf{S}_{12} \\ {}^{1}\mathbf{S}_{21} & {}^{1}\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{1}\mathbf{a} \\ {}^{2}\mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} {}^{2}\mathbf{b} \\ {}^{3}\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{2}\mathbf{S}_{11} & {}^{2}\mathbf{S}_{12} \\ {}^{2}\mathbf{S}_{21} & {}^{2}\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{2}\mathbf{a} \\ {}^{3}\mathbf{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} {}^{1}\mathbf{b} \\ {}^{3}\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{1}\mathbf{a} \\ {}^{3}\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

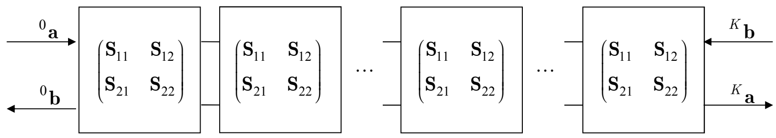
$$\mathbf{S}_{11} = {}^{1}\mathbf{S}_{12} \cdot (\mathbf{I} - {}^{2}\mathbf{S}_{11} \cdot {}^{1}\mathbf{S}_{22})^{-1} \cdot {}^{2}\mathbf{S}_{11} \cdot {}^{1}\mathbf{S}_{21} + {}^{1}\mathbf{S}_{11},$$

$$\mathbf{S}_{12} = {}^{1}\mathbf{S}_{12} \cdot (\mathbf{I} - {}^{2}\mathbf{S}_{11} \cdot {}^{1}\mathbf{S}_{22})^{-1} \cdot {}^{2}\mathbf{S}_{12},$$

$$\mathbf{S}_{21} = {}^{2}\mathbf{S}_{21} \cdot (\mathbf{I} - {}^{1}\mathbf{S}_{22} \cdot {}^{2}\mathbf{S}_{11})^{-1} \cdot {}^{1}\mathbf{S}_{21}.$$

$$\mathbf{S}_{22} = {}^{2}\mathbf{S}_{21} \cdot (\mathbf{I} - {}^{1}\mathbf{S}_{22} \cdot {}^{2}\mathbf{S}_{11})^{-1} \cdot {}^{1}\mathbf{S}_{22} \cdot {}^{2}\mathbf{S}_{12} + {}^{2}\mathbf{S}_{22}.$$

Periodické struktury a Blochovy vidy



Zobecněná úloha vlastních čísel –Blochovy vidy

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{S}_{11} & \mathbf{I} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Gamma}$$

Transformace mezi lokálními normálními vidy a Blochovými vidy:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}^B \\ \mathbf{b}^B \end{pmatrix}$$

Rozptylová matice *K* period v bázi Blochových vidů

$$\mathbf{S}^B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{\Gamma}^+)^K \\ (\mathbf{\Gamma}^+)^K & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}^+ = diag(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_M), \quad |\gamma_j| \le 1, \; j = 1, 2, \ldots, M$$

Numericky stabilnější formulace rovnice pro Blochovy vidy

Konstanty šíření Blochových vidů v zakázaném pásu jsou komplexní,
γ tak mohou být v modulu velmi velká čísla.

Lze najít stabilnější formulaci úlohy:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix} = (1+\gamma)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{S}_{11} & \mathbf{I}+\mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I}+\mathbf{S}_{21} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{S}_{11} & \mathbf{I}+\mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I}+\mathbf{S}_{21} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix},$$

kde

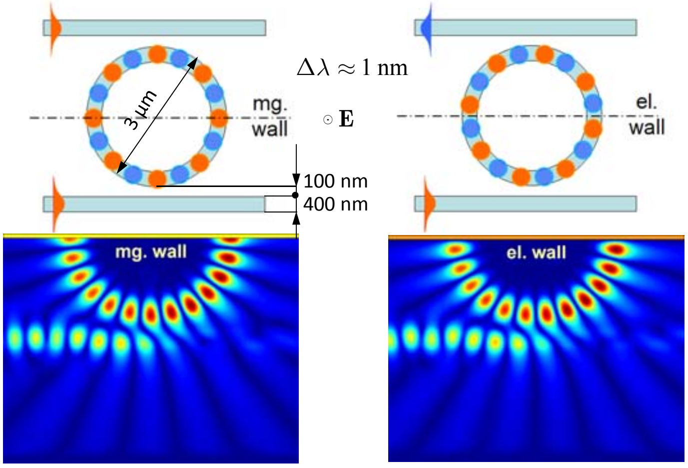
$$G = (1+\gamma)^{-1}, \quad \gamma = G^{-1} - 1.$$

Vlastní číslo *G* je zřejmě malé.

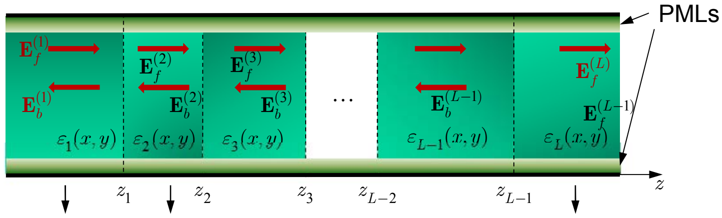
VYUŽITÍ SYMETRIE VLNOVODNÉ STRUKTURY

Rozštěpení rezonance mikrorezonátoru vlivem porušení symetrie vazbou na vlnovod; při symetrickém a antisymetrickém buzení jsou rezonanční křivky posunuté!

Symetrické buzení: **Antisymetrické buzení:**



3D METODY ZALOŽENÉ NA FOURIEROVSKÉM ROZVOJI



Vlastní vidy: $\mathbf{e}_m^{(1)}(x,y)$, $\mathbf{h}_m^{(1)}(x,y)$; $\mathbf{e}_m^{(2)}(x,y)$, $\mathbf{h}_m^{(2)}(x,y)$; $\dots$; $\mathbf{e}_m^{(L)}(x,y)$, $\mathbf{h}_m^{(L)}(x,y)$ $\quad m = 1,2\dots,M$

Modální rozvoj:

$$\mathbf{E}_\perp^{(j)} = \mathbf{E}_{f\perp}^{(j)} + \mathbf{E}_{b\perp}^{(j)} = \sum_m \left[a_m^{(j)}(z) + b_m^{(j)}(z)\right]\mathbf{e}_{\perp m}^{(j)}(x,y),$$

$$\mathbf{H}_\perp^{(j)} = \mathbf{H}_{f\perp}^{(j)} + \mathbf{H}_{b\perp}^{(j)} = \sum_m \left[a_m^{(j)}(z) - b_m^{(j)}(z)\right]\mathbf{h}_{\perp m}^{(j)}(x,y),$$

$a^{(j)}, b^{(j)}\dots$ komplexní amplitudy vidů

Rozptylová matice: uvnitř homogenní sekce: přechod mezi sekcemi

$$\begin{pmatrix}\mathbf{b}^{(j)}(z_{j-1})\\ \mathbf{a}^{(j)}(z_j)\end{pmatrix} = \mathbf{S}^{(j)}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{a}^{(j)}(z_{j-1})\\ \mathbf{b}^{(j)}(z_j)\end{pmatrix}, \mathbf{S}^{(j)} = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & e^{i\boldsymbol{\beta}^{(j)}\Delta z_j}\\ e^{i\boldsymbol{\beta}^{(j)}\Delta z_j} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{b}^{(j)}(z_j)\\ \mathbf{a}^{(j+1)}(z_j)\end{pmatrix} = \mathbf{S}^{(j,j+1)}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{a}^{(j)}(z_j)\\ \mathbf{b}^{(j+1)}(z_j)\end{pmatrix};$$

překryvové integrály

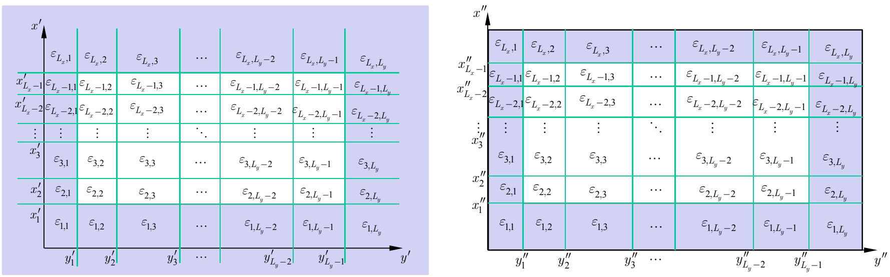
Výsledná matice soustavy

$$\boxed{\begin{pmatrix}\mathbf{b}^{(1)}\\ \mathbf{a}^{(L)}\end{pmatrix} = \mathbf{S}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{a}^{(1)}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}}$$

9

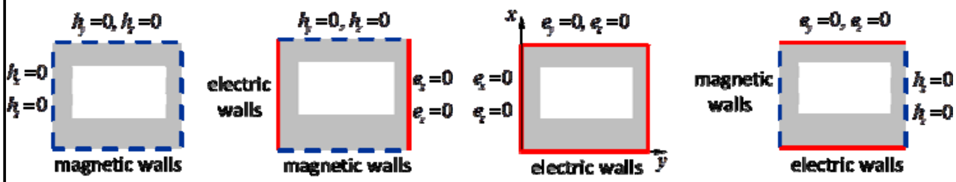
KOMPLEXNÍ TRANSFORMACE ve 2D

Transformace nekonečné komplexní oblasti do reálné konečné



$$\frac{\partial}{\partial x'} = c_x(x'')\frac{\partial}{\partial x''}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = c_y(y'')\frac{\partial}{\partial y''}$$

Aplikace různých typů okrajových podmínek



„H-FORMULACE“ ELEKTROMAGNETICKÉHO PROBLÉMU

Za nezávislé skalární funkce volíme příčné složky vektoru **H**

Z Maxwellových rovnic získáme

$$h_z = \frac{i}{N}\left(c_x(x'')\frac{\partial h_x}{\partial x''} + c_y(y'')\frac{\partial h_y}{\partial y''}\right),$$

$$e_x = \eta\left[Nh_y - \frac{1}{N}c_y\frac{\partial}{\partial y''}\left(c_x\frac{\partial h_x}{\partial x''} + c_y\frac{\partial h_y}{\partial y''}\right)\right],$$

$$e_y = -\eta\left[Nh_x - \frac{1}{N}c_x\frac{\partial}{\partial x''}\left(c_x\frac{\partial h_x}{\partial x''} + c_y\frac{\partial h_y}{\partial y''}\right)\right],$$

$$e_z = i\eta\left(c_x\frac{\partial h_y}{\partial x''} - c_y\frac{\partial h_x}{\partial y''}\right),$$

a dostaneme rovnici pro vlastní vidy v H-formulaci:

$$\varepsilon\left[\mathbf{I} + \begin{pmatrix} \eta c_x\frac{\partial}{\partial x''} & c_y\frac{\partial}{\partial y''}\eta \\ \eta c_y\frac{\partial}{\partial y''} & -c_x\frac{\partial}{\partial x''}\eta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_x\frac{\partial}{\partial x''} & c_y\frac{\partial}{\partial y''} \\ c_y\frac{\partial}{\partial y''} & -c_x\frac{\partial}{\partial x''} \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = N^2\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}.$$

FOURIEROVSKÝ ROZKLAD I

$$
\begin{aligned}
e_x(x'',y'') &= u_{x,m}(x'')\,v_{y,n}(y'')e_{x,mn}, \quad m=1,\dots,M_x, \quad n=1,\dots,M_y+1.\\
e_y(x'',y'') &= v_{x,m}(x'')\,u_{y,n}(y'')e_{y,mn}, \quad m=1,\dots,M_x+1, \quad n=1,\dots,M_y,\\
e_z(x'',y'') &= v_{x,m}(x'')\,v_{y,n}(y'')e_{z,mn}, \quad m=1,\dots,M_x+1, \quad n=1,\dots,M_y+1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_x(x'',y'') &= v_{x,m}(x'')\,u_{y,n}(y'')h_{x,mn}, \; m=1,\dots,M_x+1, \qquad n=1,\dots,M_y,\\
h_y(x'',y'') &= u_{x,m}(x'')\,v_{y,n}(y'')h_{y,mn}, \; m=1,\dots,M_x, \qquad n=1,\dots,M_y+1,\\
h_z(x'',y'') &= u_{x,m}(x'')u_{y,n}(y'')h_{z,mn}, \; m=1,\dots,M_x, \qquad n=1,\dots,M_y.
\end{aligned}
$$

(Předpokládáme Einsteinovu konvenci sčítání přes opakované indexy).

Rovnice pro vlastní vidy přejde v rovnici pro vlastní čísla a vlastní vektory matice:

$$
\left[\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{vu}\lfloor\lceil \eta \rceil\rfloor \cdot {}^{vu}\mathbf{C}^{u} & {}^{v}\mathbf{C}^{uv} \cdot {}^{vv}[\![\boldsymbol{\varepsilon}]\!]^{-1} \\ {}^{uv}\lceil\lfloor \eta \rfloor\rceil \cdot {}^{u}\mathbf{C}^{vu} & -{}^{uv}\mathbf{C}^{v} \cdot {}^{vv}[\![\boldsymbol{\varepsilon}]\!]^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{uv}\mathbf{C}^{u} & {}^{u}\mathbf{C}^{uv} \\ {}^{v}\mathbf{C}^{vu} & -{}^{vu}\mathbf{C}^{v} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{vu}\lfloor\lceil \boldsymbol{\eta} \rceil\rfloor & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{uv}\lceil\lfloor \boldsymbol{\eta} \rfloor\rceil \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N}^2,
$$

Matice **C** zahrnují fourierovský rozklad transformačních funkcí $c_x(x'')$ a $c_y(y'')$

FOURIEROVSKÝ ROZKLAD II

Transformaci derivací $\frac{\partial}{\partial x'} = c_x(x'')\frac{\partial}{\partial x''}$, $\frac{\partial}{\partial y'} = c_y(y'')\frac{\partial}{\partial y''}$ rovněž rozložíme v harmonické funkce

$$
\begin{aligned}
c_x(x'')\frac{du_{x,m}(x'')}{dx''} &= v_{x,m'}(x'')\,{}^{vu}C_{x,m'm}, \quad & c_x(x'')\frac{dv_{x,m}(x'')}{dx''} &= u_{x,m'}(x'')\,{}^{uv}C_{x,m'm},\\
c_y(y'')\frac{du_{y,n}(y'')}{dy''} &= v_{y,n'}(y'')\,{}^{vu}C_{y,n'n}, \quad & c_y(y'')\frac{dv_{y,n}(y'')}{dy''} &= u_{y,n'}(y'')\,{}^{uv}C_{y,n'n},
\end{aligned}
$$

a zavedeme „dvojrozměrné“ matice $\mathbf{C}$

$$
\begin{aligned}
{}^{uv}\mathbf{C}^{u} &= {}^{uv}\mathbf{C}_x \otimes {}^{u}\mathbf{I}_y, \quad {}^{uv}\mathbf{C}^{v} = {}^{uv}\mathbf{C}_x \otimes {}^{v}\mathbf{I}_y, \quad {}^{vu}\mathbf{C}^{u} = {}^{vu}\mathbf{C}_x \otimes {}^{u}\mathbf{I}_y, \quad {}^{vu}\mathbf{C}^{v} = {}^{vu}\mathbf{C}_x \otimes {}^{v}\mathbf{I}_y,\\
{}^{u}\mathbf{C}^{uv} &= {}^{u}\mathbf{I}_x \otimes {}^{uv}\mathbf{C}_y, \quad {}^{u}\mathbf{C}^{vu} = {}^{u}\mathbf{I}_x \otimes {}^{vu}\mathbf{C}_y, \quad {}^{v}\mathbf{C}^{uv} = {}^{v}\mathbf{I}_y \otimes {}^{uv}\mathbf{C}_y, \quad {}^{v}\mathbf{C}^{vu} = {}^{v}\mathbf{I}_x \otimes {}^{vu}\mathbf{C}_y.
\end{aligned}
$$

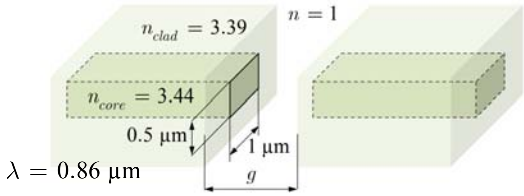
Rovnice pro vlastní vidy přejde v rovnici pro vlastní čísla a vlastní vektory matice:

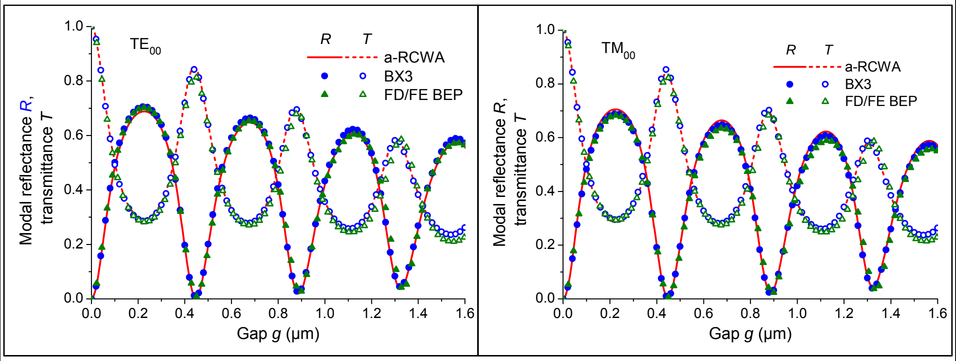
$$
\left[\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{vu}\lfloor\lceil \eta \rceil\rfloor \cdot {}^{vu}\mathbf{C}^{u} & {}^{v}\mathbf{C}^{uv} \cdot {}^{vv}[\![\boldsymbol{\varepsilon}]\!]^{-1} \\ {}^{uv}\lceil\lfloor \eta \rfloor\rceil \cdot {}^{u}\mathbf{C}^{vu} & -{}^{uv}\mathbf{C}^{v} \cdot {}^{vv}[\![\boldsymbol{\varepsilon}]\!]^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{uv}\mathbf{C}^{u} & {}^{u}\mathbf{C}^{uv} \\ {}^{v}\mathbf{C}^{vu} & -{}^{vu}\mathbf{C}^{v} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{vu}\lfloor\lceil \boldsymbol{\eta} \rceil\rfloor & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{uv}\lceil\lfloor \boldsymbol{\eta} \rfloor\rceil \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N}^2,
$$

kde symboly $\lceil\lfloor \eta \rfloor\rceil, \lfloor\lceil \eta \rceil\rfloor$ a $[\![\varepsilon]\!]$ označují „správnou“ fourierovskou faktorizaci ve 2D. Další postup (rozptylové matice a jejich konkatenace) je analogický případu 2D.

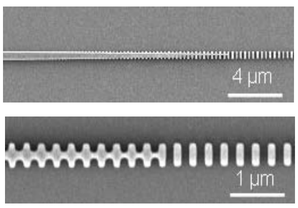
PŘÍKLAD APLIKACE 3D METODY

Modální transmitance a reflektance
v závislosti na velikosti štěrbiny
v polovodičovém vlnovodu
GaAs/GaAlAs

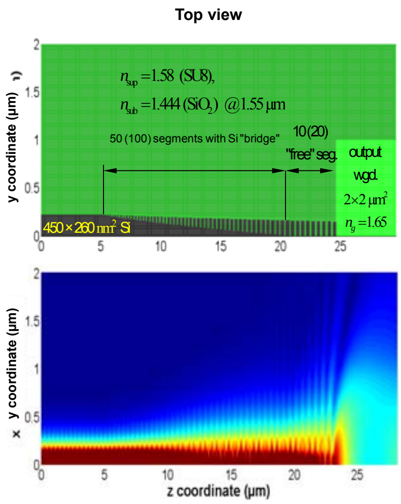




VAZEBNÍ ČLEN SE SUBVLNOVÝM MŘÍŽKOVÝM VLNOVODEM



P. Cheben , P. J. Bock, *et al.*, *Optics Letters*, vol. 35, pp. 2526-2528, 2010,
I. Glesk, P. J. Bock, P. Cheben, *et al.*, *Optics Express*, vol. 19, pp. 14031-14039, 2011.

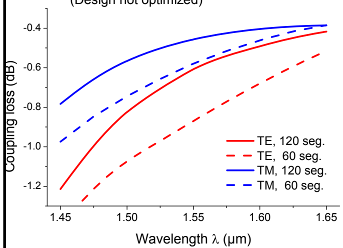


Coupling from SOI nanowire 450×260 nm^2 into a 2×2 μm polymer waveguide
short coupler: 60 segments
long coupler: 120 segments

Lateral symmetry,
$M_x = 60$ (vertical)
$M_y = 50$ (horizontal)
Eigenvalue matrix size
8531×8531 elements

HP Z400, 6 cores,
3.2 GHz, 24 GB RAM
4 (8) days

(Design not optimized)



Existuje množství komerčních softwarových produktů pro modelování a návrh integrovaně-optických struktur