

NEPERIODICKÝ VĚSTNÍK ČESKOSLOVENSKÉ ASTRONOMICKÉ SPOLEČNOSTI PŘI ČSAV



KOSMICKÉ ROZHLEDY

ROČNÍK 23 (1985) ČÍSLO 2

Základní principy a výsledky speciální teorie relativity

1. Úvod

Cílem tohoto článku je zdůvodnit základní principy speciální teorie relativity (STR) a vysvětlit její nejdůležitější výsledky. Je rozdělen do osmi kapitol:

1. Úvod
2. Kinematika a systémy souřadnic
3. Dynamika v Newtonově teorii
4. Základní principy speciální teorie relativity
5. Lorentzova transformace a některé její důsledky
6. Další vztahy speciální teorie relativity
7. Paradox hodin
8. Princip ekvivalence (paradox hodin v obecné teorii relativity)

Literatura

Poměrně krátký článek nemůže pochopitelně nahradit učebnici. Částečně byly podnětem k jeho napsání dopisy polemizující s některými neobvyklými výsledky STR, případně s celou teorií. V minulosti se ukázalo, že příliš stručná vysvětlení jdoucí ihned in medias res čtenáře neuspokojí, protože jsou vytržena ze souvislosti se základními myšlenkami teorie. Na nejdůležitější z nich se budeme snažit v následujících kapitolách nezapomenout. Přesto řada podstatných faktů je pouze zmíněna formou odkazu na literaturu pořadovým číslem ze seznamu na konci článku. Citace /1/ až /9/ jsou základní učebnice a populární články s nejvýše středoškolskou matematikou a vesměs v češtině. Speciálnější reference mají pořadová čísla od /10/. Studium uvedené literatury je možné odložit na později a článek číst bez přerušování. Pozornému čtenáři bude matematika ze střední školy naprosto postačovat.

2. Kinematika a systémy souřadnic

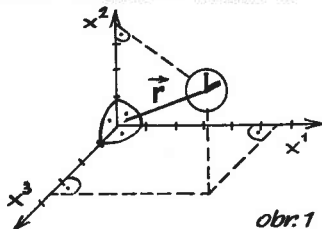
Nejprve se seznámíme s několika pojmy, které se obvykle v populárním článku o STR blíže neprobírají, neboť z fyzikálního hlediska patří již do úvodu ke klasické teoretické mechanice, zatímco z pohledu matematika jde o aparát disciplíny zvané diferenciální geometrie. Blíže se s nimi může čtenář seznámit např. v pracích /1, §2.1; 10, kap. I; 11/. Jejich správné chápání je však i zde důležité, protože jsou to velice názorné představy, s jejichž (poněkud komplikovanějším) zobecněním se v STR setkáváme na každém kroku.

Kinematikou označujeme tu část mechaniky, která se zabývá popisem pohybu těles. Příčiny tohoto pohybu se však zkoumají až v rámci dynamiky.

Tělesa a objekty reálného světa budeme uvažovat jako tzv. hmotné body. Tuto abstrakci používáme ve fyzice tehdy, jestliže rozměry oblastí vyplněných hmotou jsou nepodstatně ve srovnání se vzdálenostmi mezi nimi. U hmotných bodů není třeba přihlížet ke tvaru či prostorové orientaci. Ilustrací nám mohou být planety obíhající kolem Slunce, pokud odhlédneme od jejich detailní struktury a rotace. Např. průměr Země je asi 23 500 krát menší než průměr její oběžné dráhy, takže při zkoumání orbitálního pohybu můžeme s vysokou přesností považovat naši planetu za hmotný bod s odpovídající hmotností.

Abychom mohli popisovat pohyb těles a rozlišovat různé události, zavádíme souřadnice - tři prostorové a jednu časovou. Čtyři souřadnice tak představují označení či "jména" jednotlivých událostí. Se zavedením souřadného systému jsou v Newtonově teorii i v STR spjatá dva důležité pojmy - ideální hodiny a ideální měřicí tyče, jimiž označujeme skutečné hodiny a tyče, jejichž údaje jsme náležitě korigovali, abychom odstranili vliv rušivých vlivů. Není samozřejmé, že tuto korekci lze vždy realizovat. Elektromagnetické pole můžeme odstínit Faradayovou klecí, změnám teploty zamezíme adiabatickou stěnou. Gravitace však představuje univerzální vliv, který působí na všechny látky stejně a který odstínit nemůžeme.

Newtonovská fyzika privileguje tzv. kartézské souřadnice, v nichž jsou hodiny umístěné v jednotlivých bodech prostoru navzájem synchronizovány a v nichž polohu určuje trojice čísel tak, že platí Pythagorova věta (systém tvořený navzájem kolmými osami, na nichž nanášíme stupnice pomocí ideálních měřítek - viz obr. 1).



obr. 1

Synchronizace se provádí tak, že hodiny seřídíme v jednom bodě prostoru a poté rozmístíme na různá místa, nebo neko- nečně rychlým signálem, jehož existence je s newtonovskou fyzikou zcela slučitelná. Před- běhneme a poznamenejme, že synchronizaci podle STR bude třeba provádět jiným způsobem, neboť, jak uvidíme, existuje

v této teorii jev zvaný dilatace času a rychlost světla je mezní rychlostí při šíření signálů.

Prostorové souřadnice budeme značit x^1, x^2, x^3 nebo někdy x, y, z . Místo času t bývá mnohdy výhodné zavést souřadnici $x^4 = ict$, kde i značí komplexní jednotku ($i^2 = -1$), $c = 299\,792\,458\,0$ km/s je rychlost světla ve vakuu. Souřadnice x^4 se od t liší pouze multiplikační konstantou ic , takže známe-li x^4 , známe také t a naopak. Rozdíl tkví pouze ve volbě jednotky na časové ose.

Použití x^4 je však z početního hlediska někdy výhodné. Existuje matematicky velmi elegantní přístup diferenciální geometrie, který ve svých základech zavedení souřadnic nepotřebuje. Čtenář se s ním může seznámit např. v [1]. Výsledky formulované cestou diferenciální geometrie se pochopitelně neliší od závěrů, k nimž dospějeme pomocí obvyklejšího formalismu použitého také v tomto článku.

Každá událost je tedy určena uspořádanou čtveřicí

čísel-svými souřadnicemi $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$ nebo ekvivalentně $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

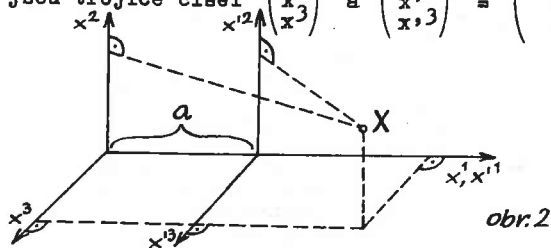
Čas má v newtonovské fyzice absolutní význam, neboť díky popsané možnosti synchronizace je určen jednoznačně až na aditivní konstantu (volba počátku odečítání času). Události se proto popisují parametricky $x^i = x^i(x^4)$, $i = 1, 2, 3$. Souřadných systémů můžeme zkonstruovat libovolné množství; osové trojhrany těchto systémů budou navzájem různě pootočené a budou se vůči sobě pohybovat. Proto potřebujeme znát vztah mezi jednotlivými systémy.

Jak se transformují prostorové souřadnice?

Podstatu ukážeme na třech příkladech:

1) Systém S' je vybaven kartézskými souřadnicemi posunutými o vzdálenost a ve směru osy x^1 vůči souřadnicím systému S . Prostorové souřadnice téhož bodu X v systémech S a S'

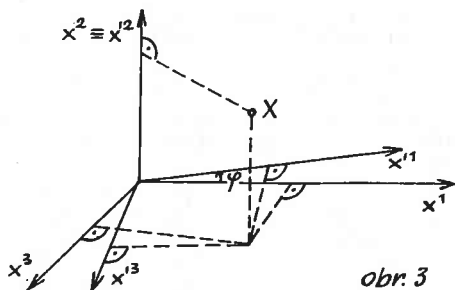
jsou trojice čísel $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + a$



2) Kartézský systém S' se pohybuje vůči S rovnoměrně přímočaře v kladném směru osy x^1 , přičemž počátek odečítání času volíme tak, že oba systémy splývaly v $t = t' = 0$.

Potom $\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + vt$

3) Systém S' je vzhledem k S otočen o úhel φ kolem společné osy $x^2 \equiv x'^2$. Vztah mezi oběma systémy plyne z elementárních goniometrických vzorců



$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \cos \varphi - x^3 \sin \varphi \\ x^2 \\ x^3 \cos \varphi + x^1 \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ resp.}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \cos \varphi + x^3 \sin \varphi \\ x^2 \\ x^3 \cos \varphi - x^1 \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

neboli v často používaném maticovém zápisu

$$x^i = \sum_{j=1}^3 a_j^i x^j \quad \text{resp.} \quad x^i = \sum_{j=1}^3 A_j^i x^j, \quad i=1,2,3 \quad (2.2)$$

kde matice koeficientů jsou

$$a_j^i = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad A_j^i = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Libovolnou rotaci lze rozložit na tři postupná otočení kolem pevných os a vyjádřit vzorci (2.2). Tvar matice a_j^i resp. A_j^i je pak ovšem složitější.

Protože délka tyče se při rotaci nemůže změnit, dostáváme z Pythagorovy věty

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad \text{tj.}$$

$$\sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \quad (2.4)$$

Podle (2.2) pak

$$\sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = \sum_{i,j,k} a_j^i a_k^i x^j x^k \quad (2.5)$$

(a analogicky pro A_j^i).

To platí pro libovolná x^i , takže porovnáním levé a pravé strany (2.5) dostáváme tzv. relaci ortogonality

$$\sum_{i=1}^3 a_j^i a_k^i = \delta_{jk}, \quad (2.6)$$

kde Kroneckerův symbol $\delta_{jk} \equiv \begin{cases} 1 & \text{pro } j=k \\ 0 & \text{pro } j \neq k \end{cases}$

Čtenář se snadno přímým dosazením přesvědčí, že nyní vskutku bude (2.4) splněno:

$$\sum_i (x^i)^2 = \sum_{i,j,k}^3 a_j^i a_k^i x^{,j} x^{,k} = \sum_{j,k}^3 \delta_{jk} x^{,j} x^{,k} = \sum_j (x^{,j})^2.$$

Translacemi či rotacemi, jejichž speciální případy jsme uvedli, můžeme přecházet od jednoho kartézského systému k jinému.

Nezabýváme se zde nyní přechodem do krivočarých souřadnic, jejichž využití bývá často výhodné v závislosti na symetrii problému (kulová symetrie - sférické souřadnice, axiální symetrie - cylindrické souřadnice apod.).

Obecně můžeme transformace souřadnic zapsat ve tvaru

$$x^{,i} \equiv x^{,i}(x^j), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.7.)$$

Tento zápis vyjadřuje, že čárkované souřadnice $x^{,i}$ mohou být funkcemi všech tří nečárkovaných x^j . Tvar závislosti (2.7) nemůže být zcela libovolný. Studium různých omezení je však z hlediska tohoto článku nepříliš podstatná podrobnost.

Uvažme nyní dva blízké body v systému S se souřadnicemi x^i , $x^i + dx^i$. Pak v S' budou čárkované souřadnice prvního bodu určeny formulí (2.7). Z Taylorova vzorce (o němž se čtenář může dozvědět více v učebnicích diferenciálního počtu) dostaneme

$$x^{,i}(x^j) + dx^{,i}(x^j) \equiv x^{,i}(x^j + dx^j) \approx x^{,i}(x^j) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^{,i}}{\partial x^j} dx^j. \quad (2.8)$$

Odečtením vztahů (2.7) a (2.8) získáme transformační předpis pro diferenciály souřadnic:

$$dx^i \rightarrow dx^{,i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^{,i}}{\partial x^j} dx^j, \quad i=1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Tím se dostáváme k základní veličině klasické i relativistické mechaniky - tenzoru /2, I.1/.

1. Tenzorem nultého řádu neboli skalárem $\varphi(x^i)$ ve třírozměrném prostoru nazýváme veličinu, která je invariantní (neměnná) při transformaci souřadnic, tj. při přechodu S \rightarrow S' popsaném formulí (2.7) platí

$$\varphi(x^i) \rightarrow \varphi(x^{,i}(x^j)). \quad (2.10)$$

Charakteristická je pro skaláry skutečnost, že tvar závislosti φ zůstává stejný. Skalární veličina je určena svou číselnou hodnotou, která závisí pouze na zvolených jednotkách. Příkladem nám může být teplota.

Od těchto tzv. pravých skalárů bývá zvykem odlišovat nepravé skaláry, které jsou charakterizovány transformační vlastností při inverzi souřadnic

$$x^i \rightarrow x^{,i}(x^j) = -x^i \Rightarrow \varphi(x^i) \rightarrow -\varphi(x^{,i}(x^j)), \quad (2.11)$$

tzn. mění znaménko. Tato podrobnost se vyskytuje také u následujících veličin.

2. Tenzorem prvního řádu - vektorem - označujeme veličinu, která se při (2.7) transformuje stejně jako diferenciály souřadnic (2.9), tj.

$$v^i \rightarrow v'^i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} v^j, \quad i=1,2,3. \quad (2.12)$$

Vektory jsou např. polohový vektor, rychlost, zrychlení či síla.

3. Obdobně se zavádějí tenzory vyšších řádů. Např. transformace tenzoru 2. řádu má tvar

$$T^{ij} \rightarrow T'^{ij} = \sum_{k,l} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} T^{kl}. \quad (2.13)$$

Komponenty v^i resp. T^{ij} vektorů resp. tenzorů, jež jsme zde zavedli, označujeme jako kontravariantní. Z fyzikálních a geometrických důvodů se zavádějí tzv. kovariantní složky, které jsou podstatné při studiu obecné teorie relativity (OTR) /1, D2; 11/. V tomto článku se bez nich obejdeme a nebudeme zde proto výklad komplikovat.

Později uvidíme, že v STR ztrácí čas svůj absolutní význam. Transformační vlastnosti tenzorů ve čtyřrozměrném prostoru (který v tomto případě nazýváme prostorčasem), jež pro popis jevů v STR budeme používat, zůstávají stejné:

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &\rightarrow x''^{\mu} = x'^{\mu} (x^{\alpha}) , \\ v'^{\mu} &\rightarrow v''^{\mu} = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} v^{\alpha} , \\ T'^{\mu\nu} &\rightarrow T''^{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} , \quad (\mu,\nu) = 1,2,3,4. \end{aligned} \quad (2.14)$$

V kinematice newtonovské teorie se zavádí označení polohového vektoru tělesa v daném systému prostorových souřadnic

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Šipka označuje, že jde o vektor ve třírozměrném prostoru. Podobně označujeme vektor (okamžité) rychlosti, tj. časové derivace polohového vektoru, vyjadřující změnu polohy tělesa za jednotku času

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} dx^1(t) / dt \\ dx^2(t) / dt \\ dx^3(t) / dt \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

a vektor (okamžitého) zrychlení

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} d^2x^1(t)/dt^2 \\ d^2x^2(t)/dt^2 \\ d^2x^3(t)/dt^2 \end{pmatrix}$$

V kartézském systému prostorových souřadnic lze zvolit jako základní vektory (bázi) tři vektory, které mají jednotkovou délku a směr souřadných os:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Každý další vektor lze potom vyjádřit pomocí těchto bázevých vektorů

$$\vec{A} = A^1\vec{i} + A^2\vec{j} + A^3\vec{k}. \quad (2.18)$$

Nakonec zavedeme ještě jeden užitečný pojem, který budeme často potřebovat - skalární součin vektorů \vec{A} , \vec{B} :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A^i B^i. \quad (2.19)$$

Speciálně.

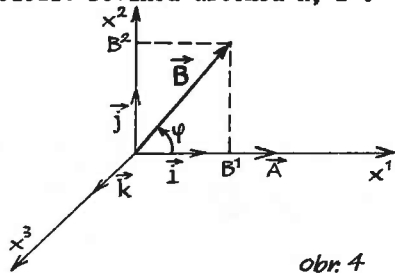
$$\vec{A} \cdot \vec{A} \equiv |\vec{A}|^2 = (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 \quad (2.20)$$

je kvadrát délky vektoru \vec{A} , jak plyne z Pythagorovy věty.

Skutečnost, že veličina (2.19) je skalárem při rotacích kartézského systému, plyne z relace ortogonality (2.6):

$$\sum_{i=1}^3 A^i B^i = \sum_{i,j,k} a_j^i a_k^i A^j B^k = \sum_{j,k} \delta_{jk} A^j B^k = \sum_{j=1}^3 A^j B^j.$$

Její velikost proto stačí určit v libovolně natočených souřadnicích. Výhodné je např. zvolit osu x^1 ve směru vektoru \vec{A} a rovinu (x^1, x^2) proložit rovinou určenou \vec{A} , \vec{B} .



obr. 4

$$\text{Tedy } \vec{A} = \begin{pmatrix} A^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Délky vektorů jsou $|\vec{A}| = A^1$, $|\vec{B}| = B^1/\cos\varphi$, kde φ je úhel mezi vektory. Zřejmě $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^1 B^1 = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\varphi$. Dva vektory nenulové délky jsou navzájem kolmé, když $\cos\varphi = 0$,

tj. když skalární součin je nulový, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

3. Dynamika v Newtonově teorii

Dosud jsme se zabývali popisem polohy tělesa, příčinu pohybu jsme však ponechávali stranou. Základy dynamiky, která se touto otázkou zabývá, položil v 17. století Isaac Newton.

Newtonovy axiomy pohybu /10; 13; 14; 15/ jsou tři:

1. Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo přímočarého rovnoměrného pohybu, není-li vtištěnými silami nuceno svůj stav změnit.
2. Časová změna hybnosti \vec{p} je úměrná vtištěné síle \vec{f} a má s ní stejný směr

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}, \quad (3.1)$$

kde $\vec{p} = M_{\text{g}} \vec{v}$ je hybnost vyjádřená jako součin setrvačné hmotnosti tělesa a jeho rychlosti.

3. Každá akce způsobuje vždy stejnou reakci opačného směru, čili vzájemná působení dvou těles jsou stejně velká a opačného směru.

Podáme krátké vysvětlení významu axiomů /16/.

Pokud na těleso nepůsobí žádná síla, pohybuje se tzv. volným pohybem, který je ve vhodném gourečném systému popsán závislostí kartézských souřadnic x^i Eukleidova prostoru na absolutním čase t . Přitom platí

$d^2 x^i / dt^2 = 0$. Takový systém existuje a nazývá se inerciální. Transformace, které mezi sebou převádějí inerciální systémy (IS), se nazývají Galileovy. IS se navzájem pohybují rovnoměrně přímočarě. Pro gravitačně interagující tělesa je formulace 1. zákona komplikovanější. Za privilegované pohyby lze potom považovat volné pády, které jsou ve vhodných souřadnicích charakterizovány pomocí skalární funkce - potenciálu $\varphi(x^i(t))$ - rovnicemi

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Připomeneme, že tento popis interakce soustavy pomocí potenciálu předpokládá nekonečně rychlé působení na dálku. Tvar rovnic (3.2) zůstává zachován při transformacích typu

$$x'^1 = x^1 + a(t), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3,$$

$$\varphi' = \varphi - x^1 \frac{d^2 a(t)}{dt^2}. \quad (3.3)$$

Potenciál sám je určen až na aditivní konstantu. Při studiu prostorově omezených zdrojů gravitačního pole lze klást podmínku $\varphi \rightarrow 0$ daleko od zdroje, což opět privileguje

Galileovy transformace, které jsou speciálním případem (3.3) pro $\dot{a} = 0$. V kosmologických modelech, kdy hmota není rozložena pouze v prostorově ohraničené oblasti, však tuto podmínku klást nemůžeme.

Druhý zákon je třeba doplnit nezávislým vztahem pro sílu. V případě gravitační interakce dvou těles ve vzdálenosti r má tvar

$$\vec{F} = -G \frac{M_G m_G}{r^2} \vec{r}_0, \quad (3.4)$$

kde \vec{r}_0 je jednotkový vektor ve směru spojnice obou těles. Index "G" označuje konstanty, které nazýváme gravitační hmotnost. Pro různá tělesa ji můžeme určit např. tak, že tato tělesa postupně připevňujeme na pružinu a měříme její prodloužení při interakci se srovnávacím tělesem v dané vzdálenosti. Setrvačná a gravitační hmotnost jsou určeny nezávisle vztahy (3.1) a (3.4) a lze je měřit odlišnými postupy. Proto je v Newtonově teorii překvapující, že mezi nimi platí rovnost

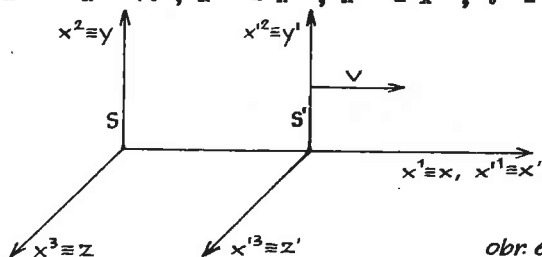
$$M_S = M_G. \quad (3.5)$$

Uvedené tři Newtonovy zákony mají diferenciální tvar a popisují chování dynamické soustavy v určitém časovém okamžiku. Očividně vyhovují z hlediska požadavku kauzality, neboť vývoj systému je jednoznačně určen počátečními polohami a rychlostmi všech těles. Do jisté míry ekvivalentní popis pomocí integrálních principů /13, část II; 14/ má výhodu v tom, že umožňuje hlubší chápání zákonů zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti a že jej lze aplikovat na elektrodynamiku a kvantovou teorii.

Shrňme tedy:

Inerciálních systémů je nekonečně mnoho a vztah mezi nimi je dán Galileovou transformací. Tato transformace určuje souvislost mezi prostorovočasovými souřadnicemi téže události pozorované ze dvou IS a ve speciálním případě podle obr. 6 má tvar

$$x^{1,1} = x^1 - vt, \quad x^{2,1} = x^2, \quad x^{3,1} = x^3, \quad t^{1,1} = t \quad (x^{4,1} = x^4) \quad (3.6)$$



obr. 6

Principiálně mohou existovat nekonečně rychle signály, které lze použít k synchronizaci hodin v různých bodech prostoru. Prostor a čas mají v NT absolutní význam

a časová koordináta se může lišit v jednotlivých systémech pouze o konstantu, jež je v (3.6) zvolena nulová, takže oba systémy splývají v čase $t = t' = 0$.

Pokud bychom uvažovali třetí systém S'' , který by se analogicky obr. 6 pohyboval vůči S' rychlostí V v kladném směru osy x''^1 , dostali bychom z Galileiho transformace vztah mezi S a S''

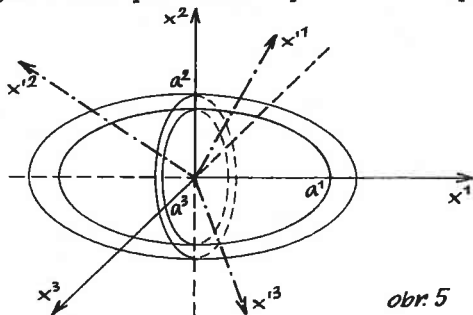
$$x''^1 = x^1 - (V + v)t, \quad x''^2 = x^2, \quad x''^3 = x^3, \quad t'' = t, \quad (3.7)$$

tedy rychlosti se prostě sčítají.

Příklad kosmologického modelu v newtonovské fyzice

Kosmologické modely založené na Newtonově teorii (NT) jsou velmi zajímavé, neboť dokážou vysvětlit mnohé pozorované skutečnosti. Podáme zde nástin jednoho takového modelu /3, str. 81; 17, kap. 18; 18, kap. II/. Vyjdeme přitom z astronomických pozorování, která ukazují, že vesmír je s velkou přesností izotropní (a v důsledku toho též homogenní). To znamená, že v každém bodě prostoročasu existuje pozorovatel, pro něhož jsou všechny prostorové směry ekvivalentní - sledováním velkého počtu galaxií, kvasarů ani jiných objektů nemůže žádný ze směrů privilegovat. Tento fakt bývá označován jako kosmologický princip /např. 4; 18, kap. I/.

V teoretické mechanice se dokazuje, že přidáním vrstvy hmoty k homogennímu elipsoidu při současném zachování jeho tvaru se nemění gravitační pole uvnitř původního elipsoidu.



obr. 5

Postupným přidáváním takových vrstev dostaneme homogenní, obecně anizotropní model, jehož hustota představuje průměrné množství hmoty galaxií a všech ostatních objektů v objemové jednotce. Vývoj tohoto modelu budeme znát, určíme-li vývoj elipsoidu konečné velikosti. Ten je určen zadáním počáteční hustoty ρ , velikostí poloos a_1, a_2, a_3 a rozložení rychlosti expanze, jež musí být vhodně zvoleny, aby se zachovával původní elipsoidální tvar. Matematicky to znamená řešit Poissonovu rovnici

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial (x^{i1})^2} = 4\pi G \rho, \quad (3.8)$$

$G = \text{gravitační konstanta} = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

příčemž potenciál uvnitř elipsoidu je dán vztahem

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,k}^3 \varphi_{ik} x^i x^k, \quad \varphi_0, \varphi_{ik}(a^j) = \varphi_{ki}(a^j) = \text{konst.} \quad (3.9)$$

(viz obr. 5).
Natočíme-li osy souřadné soustavy do směru os a^i elipsoidu, zjednoduší se výraz pro potenciál na

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \varphi_{ii} (x^i)^2. \quad (3.10)$$

Tímto postupem lze nalézt řešení i pro neomezené rozložení hmoty, protože, jak jsme odůvodnili, hmota rozložená vně elipsoidu nemá na jeho vývoj vliv. Počátek souřadnic (a tedy též původní elipsoid) lze přitom vzhledem k homogenitě volit libovolně. Výsledkem je expandující model, v němž se každý pozorovatel vzdaluje od svých sousedů až k okamžiku eventuálního bodu obratu a zpětné kontrakce.

Obvyklá dvourozměrná analogie k objasnění této situace je příklad s poutovým balonkem, který pomalujeme na povrchu puntíky a zvolna nafukujeme. Každý puntík se pak vzdaluje ode všech svých sousedů, avšak žádný nemá privilegovanou polohu. Statické řešení v NT (na rozdíl od OTR) neexistuje.

Právě uvedený model tzv. newtonovské kosmologie není zcela bezesporný. Řešíme-li Poissonovu rovnici (3.8) rovnou pro neohraničený elipsoid, aniž bychom prováděli předchozí úvahu o elipsoidu, máme jednu rovnici pro neznámé φ_{ik} , kterých je pět ($\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$). Rovnice mechaniky proto neurčí řešení dostatečně. Je to právě způsobeno nepoužitelností požadavku $\varphi \rightarrow 0$ v nekonečnu.

Speciálně nejjednodušší izotropní modely získáme při $a^1 = a^2 = a^3$. Jejich rychlost expanze je stejná jako u známých relativistických Friedmannových modelů. To není náhoda - NT je limitou OTR pro slabá gravitační pole a my jsme ukázali, že chování kosmologického řešení je určeno vývojem libovolně malého elipsoidu (resp. zde koule), kde již NT můžeme použít. Chování světelných paprsků však NT není schopna správně určit (fotony jsou vždy částice relativistické).

Ukázali jsme tedy, že existují kosmologické modely postavené na NT a správně předpovídající řadu pozorovaných skutečností. Matematický aparát této teorie je mnohem snazší oproti OTR a proto se používají tyto modely pro některé aproximační výpočty. Je však třeba mít na paměti meze jejich použitelnosti.

Většina čtenářů bude s dosud provedenými úvahami patrně souhlasit. Mnohem obtížnější situace nastává při přechodu k mechanice STR, ačkoli její základní principy jsou velice přirozené, což o NT nelze tak jednoznačně tvrdit. Newton si byl vědom zásadní důležitosti předpokladů o absolutním prostoru a čase a tyto pojmy přesně objasnil /např. 19, kap. III, § 1; 7, část I.1/.

V STR je význam prostoru a času poněkud odlišný. Ve druhé části článku podáme stručný přehled základů a nejdůležitějších výsledků STR. Některé z nich vyvolávají námítky. Jedná se především o problémy spojené s existencí éteru, interpretaci Michelsonova pokusu a zejména je v centru pozornosti tzv. paradox dodin. Takový zájem je pochopitelný, neboť se jedná o velice fundamentální úvahy a v minulosti se těmto otázkám věnovala řada vynikajících vědců. Nyní však již diskuse na toto téma trvají poněkud zbytečně dlouho a nepřinášejí další nové myšlenky. Zčásti jsou způsobeny nepřesnostmi, které se občas objevují v populárních člancích na toto téma. Abychom se mohli zmínit o některých příčinách nejasností, shrneme stručně základní principy a vztahy STR, které může čtenář nalézt v nepřehledné řadě monografií /5; 6; 20; 21; 22; 23; 24/.

4. Základní principy speciální teorie relativity

STR je založena na dvou postulátech - principu relativity a principu konstantní rychlosti světla - které hovoří o fyzikálních jevech v inerciálních soustavách, tj. soustavách vybavených kartézským systémem souřadnic, v němž se tělesa nepodrobená žádným vnějším silám pohybují rovnoměrně přímočarě.

- 1) Všechny IS jsou v navzájem recipročním vztahu, takže veškeré fyzikální děje probíhají za stejných podmínek stejně. Všechny IS jsou pro formulaci veškerých fyzikálních zákonů rovnocenné.
- 2) Rychlost světla ve vakuu, měřená v libovolné IS, je vždy stejná, nezávisle na pohybu zdroje (toto tvrzení je samozřejmě třeba důkladně experimentálně ověřit).

Poslední postulát vyžaduje ovšem vzdát se představy éteru jako substance sloužící k přenosu elektromagnetických signálů, jakož i představy absolutního času.

Je třeba znát postup, jak vytvořit kartézský systém souřadnic a provést synchronizaci hodin. K sestrojení osového trojhranu můžeme užít ideálních navzájem kolmých měřitek. Za primární metodu k synchronizaci hodin lze považovat postup založený na vyslání signálu ze středu spojnice dvou hodin, které chceme seřadit. Hodiny ukazující týž údaj v okamžiku přijetí signálu jsou synchronizovány. V STR lze tímto postupem umístit do každého bodu prostoru hodiny synchronizované navzájem s ostatními. V teoriích obsahujících hypotézu o éteru je rychlost světla závislá na pohybu inerciálního systému. Z jejich hlediska je proto synchronizace hodin v inerciálním systému pohybujícím se vůči éteru zkreslená.

Rovnocennou metodou je synchronizace hodin na jednom místě a jejich nekonečně pomalé přenesení (tj. čím pomalejší rychlost přenášení, tím přesnější synchronizace). Příčina těchto složitostí v synchronizaci spočívá v konečné a konstantní rychlosti světelných signálů a bude zřejmější po prostudování dilatace času v následující kapitole.

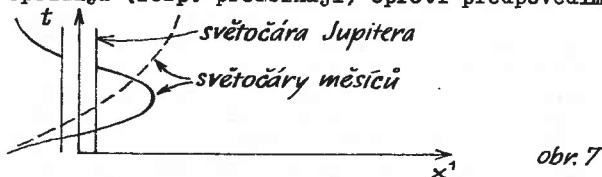
Oba principy obsahují implicitně předpoklad prostoročasové homogenity a izotropie, který se používal již v NT -

žádný bod v prostoročasu není privilegovaný, všechny směry v prostoru jsou rovnocenné.

Ekvivalentně lze přijmout princip relativity a Maxwellovu teorii elektromagnetismu, která umožňuje řadu dalších experimentálních ověření.

Jaké je experimentální ověření postulátu o konstantní rychlosti světelné a jaký je jeho vztah k teorii éteru? Bylo by přehnané očekávat, že se podaří v krátkém článku jednoznačně ukázat neudržitelnost interpretace éteru jakožto substance vyplňující veškerý prostor a přenášející elektromagnetické vlnění, jehož podstatou by mělo být chvění této kontinuálně rozprostrané látky. Je pravda, že tato představa je poměrně přirozená, neboť odpovídá výsledkům jednoduchých pozorování: 1. Okamžité působení na dálku neodpovídá skutečnosti; signály se šíří konečnou rychlostí. 2. zvuk - chvění vzduchu (resp. jiné tekutiny či pevné látky), tj. hustotní vlny ve směsi plynů - se nešíří vzduchoprázdnem (např. z nádoby, z níž byl vyčerpán vzduch). Světlo - elektromagnetické vlnění s vlnovou délkou 400 - 750 nm - postupuje nezávisle na stupni dosaženého vakua. Proto by měla existovat látka, která světlo přenáší.

První úspěšné měření rychlosti světla provedl Römer (1676), který sledoval zákryty Jupiterových měsíčků a zjistil, že během období od konjunkce Země s Jupiterem k opozici (resp. od opozice ke konjunkci) se pozorované začátky zákrytů postupně opožďují (resp. předbíhají) oproti předpovědím.



obr. 7

Maximální rozdíl činí $\Delta t \approx 1000$ s. To je doba, kterou potřebuje světlo k proběhnutí průměru D dráhy Země a odtud rychlost světla $c = D / \Delta t$ (Země se pohybuje po elipse s nepatrnou excentricitou. Její parametry můžeme určit z jiných astronomických pozorování).

Každý se nepochybně přesvědčil o existenci Dopplerova jevu v akustice, tj. o závislosti frekvence slyšeného signálu na pohybu zdroje vzhledem k pozorovateli (připomenme, že vlnová délka λ souvisí s frekvencí signálu ν a rychlostí jeho šíření c vztahem $\lambda = c / \nu$). Tento jev je způsoben tím, že 1. rychlost šíření zvuku ve vzduchu je konečná a je dána závislostí jeho tlaku na hustotě (tuto rychlost určují pozorovatelé nehybní vůči hmotě okolního prostředí - kontinua představujícího referenční soustavu klidu), 2. zdroj signálu a jeho přijímač jsou ve vzájemném radiálním pohybu, vzdalují se či přibližují. V /1, kap. 3.2.7/ je ukázáno, že pozorovatel přijímá frekvenci

$$\nu = \frac{c - u}{c - v} \nu_0, \text{ kde } c \text{ je rychlost šíření signálu,}$$

v rychlost zdroje, u rychlost pozorovatele vůči klidnému prostředí a v frekvence kmitů zdroje v klidu. Později uvidíme, že tento tzv. longitudinální akustický Dopplerův jev má svou analogii v STR, ačkoli zde hypotéza o prostředí, které signál přenáší, nevystupuje. Navíc v STR přistupuje transverzální Dopplerův jev, který analogii v akustice nemá a který lze experimentálně ověřovat.

Dalším dobře známým jevem je aberace světla, která způsobuje, že pohybující se pozorovatel obecně nevidí zdroj ve směru, v němž se skutečně nachází. Prvně ji našel Bradley (1727) celoročními astronomickými pozorováními polohy hvězd na obloze. Příčinou aberace hvězd je konečná rychlost světla. Při Bradleyho měřeních se projeví tím, že hvězdy opisují na obloze malé elipsy (pozorovatel se spolu se zemskou koulí pohybuje kolem Slunce), čímž tento jev komplikuje geometrické určení vzdálenosti hvězd pomocí jejich paralaxy. Také tento efekt má svou analogii, kterou známe z každodenní zkušenosti: šikmé stopy dešťových kapek na okně jedoucího vlaku.

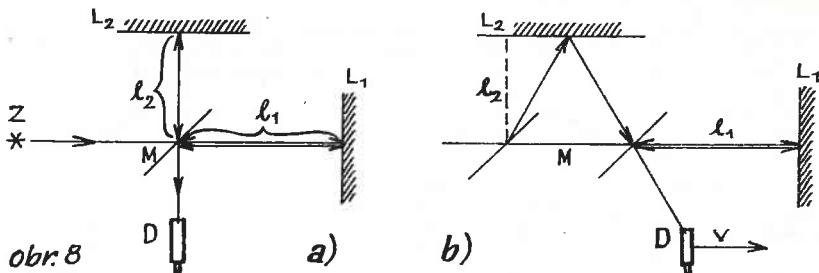
Vzniká dlouhá řada otázek na společném téma: Jak tyto a další jevy vysvětlí různé teorie prostoru a času? Která z nich umožní konzistentním způsobem objasnit všechna experimentálně ověřená fakta? Důležitě jsou v tomto směru experimenty určující v různých situacích rychlost světla.

Zmíníme se o Michelsonově pokusu, který nepochybně patří k nejproslulejším pokusům s negativním výsledkem. Poprvé byl uskutečněn v Postupimi. Po nezbytném zdokonalení a zvýšení přesnosti jej provedli Michelson a Morley roku 1887 v Clevelandu. Tento experiment byl později mnohokrát s obměnami opakován, přičemž technické uspořádání bylo stále komplikovanější a důmyslnější, než prosté principiální schéma.

Je pravda, že dnes je Michelsonův pokus častěji citován než podrobně vysvětlován. Někdy se proto objevují nedůvěřivé poznámky a dotazy, co vlastně bylo měřeno, jakým způsobem, s jakou přesností a s jakou interpretací. K prvnímu seznámení může posloužit zkrácená verze společného Michelsonova a Morleyho článku uvedená v /7, část I.3/, dále pak /1, kap. 7.4.3; 20, kap. III. 43/ s množstvím příkladů a citací.

Základem pokusu jsou Maxwellovy práce z r. 1879 upozorňující na nové možnosti měření rychlosti světla teoretickými metodami. Jde jednak o tzv. Maxwellův efekt, určující absolutní pohyb Slunce vůči éteru zpřesněním Römerových měření, jednak o experiment, který by měl určit rychlost Země vůči éteru. Ten provedli s dostatečnou přesností právě Michelson a Morley o osm let později.

Světlo zdroje Z dopadá pod úhlem 45° na polopropustné zrcátko M, kde se rozdělí na část odrazenou a propuštěnou. První z nich projde dráhu k bodu L_2 a odrazí se zpět na kolmém zrcátku, druhá se obdobně odrazí po průchodu dráhy k L_1 . V místě M světlo interferuje a vytváří proužky, které pozorujeme v dalekohledu D. Jejich poloha závisí na časovém rozdílu, který vznikne při průchodu paprsků jednotlivými rameny. Tento časový rozdíl lze vyjádřit pomocí rychlosti přístroje vůči éteru a rozdílu v délce ramen $l_1 - l_2$. Jestliže např.



obr. 8

Schema pokusu z hlediska soustavy klidné a pohybující se vůči hypotetickému éteru.

v nějaké poloze byla rychlost v přístroje rovnoběžná s ramenem l_1 , pak

$$\Delta t = t_1 - t_2 \quad , \quad \text{kde} \quad (4.1)$$

$$t_1 = \frac{l_1}{c - v} + \frac{l_1}{c + v} = \frac{2l_1 c}{c^2 - v^2} \approx 2l_1(1 + \beta^2)/c \quad , \quad \beta \equiv v/c; \quad (4.2)$$

$v \ll c$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 2l_2(1 + \beta^2/2)/c \quad , \quad (4.3)$$

takže při $l_1 = l_2 \equiv l$ (pro jednoduchost klademe délku ramen stejnou)

$$\Delta t = \beta^2 l / c \quad . \quad (4.4)$$

Po otočení přístroje o 90° se úloha obou ramen vymění, změní se tak znaménko ve (4.1)

$$\Delta t \rightarrow -\Delta t \quad (4.5)$$

a při nenulové rychlosti ($\beta \neq 0$) se tudíž posune poloha interferenčních proužků.

Pro dosažení potřebné přesnosti je třeba sestavit precizní přístroj s dostatečně velkou vzdáleností l . Michelson s Morleyem proto využili vícenásobného odrazu. Jinak by musel být přístroj neúnosně velký. Odrazná zrcátka byla uchycena ve třech bodech tak, že jejich poloha mohla být dorovnána. Polopropustné zrcátko M mělo přední stranu pokovenou, zatímco zadní k odrazu prakticky nepřispívalo. Vliv průchodu propuštěného světla vrstvou skla zrcadla M se kompenzoval destičkou skla umístěnou do cesty odraženému paprsku. Odrazná zrcátka byla umístěna po čtyřech v rozích masivní kamenné otočné plošiny. Pro zamezení otřesů a deformací tato plošina plavala na rtuti a zvolna rotovala kolem svislé osy jednou za šest

minut. V popisu technických detailů bychom mohli dlouho pokračovat. Podstatný je především výsledek: Při prvních měřeních byl posuv proužků alespoň dvacetkrát menší oproti očekávané hodnotě a nebyl nalezen ani dalšími více než tisíckrát přesnějšími metodami se zdroji světla pozemského i astronomického původu.

Závěrem experimentu je skutečnost, že pohyb Země nemá vliv na měřenou rychlost ani s přesností do členů řádu β^2 . Vysvětlením může být naprosté strhávání éteru pohybující se Zemí. V blízkosti pohybujícího se tělesa by se tedy éter pohyboval vůči celkovému pozadí. Tento názor je však v rozporu s měřeními vlivu rychle se pohybujících těles na světelné signály a s Michelsonovými pokusy prováděnými v různých nadmořských výškách /19, I, §15/.

Lorentz a Fitzgerald navrhli kontrakční hypotézu (zkracování délek), která spolu s dilatací (prodlužováním) času významně doplnila Lorentzovu elektronovou teorii. Podle této hypotézy nemůžeme předpokládat, že rozměry těles a chod hodin nezávisí na jejich pohybu vůči éteru, poněvadž elektromagnetické síly mezi nabitými částicemi, které tvoří těleso, jsou závislé na rychlosti. Jestliže se všechna tělesa ve směru své rychlosti zkracují $1/\gamma$ -krát (zde jsme zavedli označení $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$), nemůže pozorovatel pohybující se s tělesem kontrakci zjistit, neboť jeho měřítka se zkracují stejně jako všechna ostatní tělesa. Negativní výsledek Michelsonova pokusu je tím vysvětlen, protože obě ramena nemají ve skutečnosti stejnou délku l , rameno ve směru pohybu je kontrahováno oproti kolmému ramenu a jeho správný rozměr je l/γ .

Kdybychom provedli celý výpočet pro Michelsonův pokus s obecně nestejnými rameny $l_1 \neq l_2$, zjistili bychom, že ani kontrakční hypotéza nevyklučuje určení rychlosti v přístroje vůči éteru. To bylo obsahem Kennedyho-Thorndikeova pokusu (1932). Výsledek byl opět negativní, což podle Lorentzovy teorie bylo možné vysvětlit dilatací času v soustavě, jež je v pohybu vůči éteru.

Uvidíme, že kontrakce délek a dilatace času vystupují i v STR, ovšem se zcela odlišnou interpretací. Uvedenými pokusy, založenými na měření rychlosti světla, tudíž není nikterak možné určit rychlost Země vzhledem k éteru.

Teorie éteru má však i další obtíže. Polarizační experimenty potvrzují, že světlo má charakter příčného vlnění. Příčné vlny se mohou šířit pouze v látkách vykazujících tzv. tečná napětí (nikoli v kontinuu typu ideální plyn či kapalina). Takovou vlastnost mají pevné látky. Rychlost šíření vln plyne z teorie kontinua a je určena vlastnostmi prostředí. Vysoká rychlost světla vyžaduje, aby substance tvořící éter měla malou hustotu a, v případě tekutin, též vysoký tlak. Uvnitř těles musí být éter více kondenzován, neboť tam má světlo menší rychlost. Jeho mechanické vlastnosti jsou velice zvláštní, protože kmity s velkou frekvencí - světlo - přenášejí podobně jako pevná látka zvuk, zatímco pohybujícím se objektům neklade pozorovatelný odpor. Analogii můžeme nalézt

např. v chování skla: dobře přenáší zvukové vlny relativně vysoké frekvence, ale při pozvolném dlouhodobém zatížení, které může odpovídat poměrně pomalému pohybu kosmických těles, se deformuje a chová se jako kapalina. Mechanický odpor éteru by měl být ovšem prakticky nulový.

Velkou komplikací jsou podélné kmity, které vždy doprovázejí příčné. Opět z teorie kontinua plyne, že podélné kmity se šíří obecně jinou rychlostí než příčné a i kdybychom vytvořili vlnění s pouze příčnými kmity, podélné vzniknou automaticky při průchodu jakýmkoli rozhraním či odrazu na něm. Tyto kmity nebyly nikdy pozorovány.

Ačkoli na teorii éteru pracovala řada vynikajících vědců, nepodařilo se vytvořit teorii neodporující veškerým pozorováním. Dnes proto tyto představy považujeme za neuspokojivé, i když znamenaly veliký pokrok od hypotézy okamžitého působení na dálku.

Skončíme na tomto místě odůvodňování principu relativity a principu konstantní rychlosti světla s tím, že teorie založené na preferenci některého systému, v nichž prostor a čas měly samostatný absolutní význam, jsou v rozporu s pozorováními a tedy nevyhovují. Podáme nyní nástin STR, která vychází z obou principů. Ještě připomeneme, že konstantní rychlost světla je důsledek principu relativity a Maxwellových rovnice elektromagnetického pole /2/. Maxwellova teorie, popisující chování nabitých částic a šíření elektromagnetických signálů, byla již neschůdněkrát experimentálně ověřována. Pro názornost se však požadavek na rychlost šíření světla často formuluje samostatně.

(Pokračování v příštím čísle)

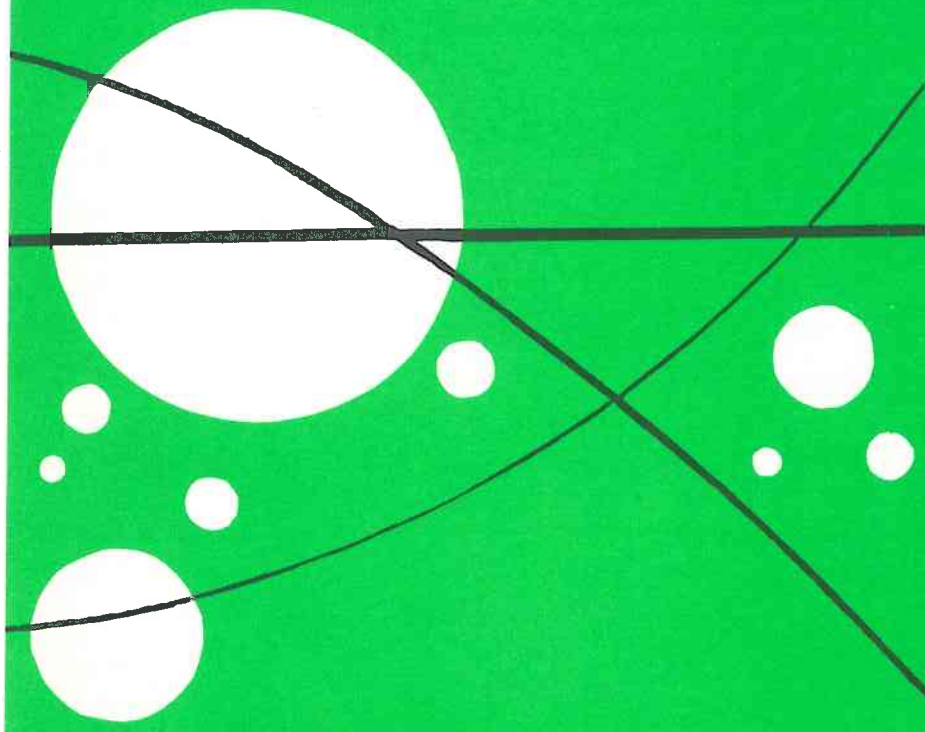
Rostislav Rajchl ml.

Dálkový průzkum Země

Dálkový průzkum Země je aplikovaná vědecká disciplína, která se zabývá snímáním odraženého elektromagnetického záření předmětů nejen na zemském povrchu, ale i nad ním a také v blízkých vrstvách pod ním.

Každý předmět (např. voda, les, sníh, asfaltová silnice) odráží, rozptyluje, polarizuje, ale i vysílá elektromagnetické záření o různé intenzitě v určitém oboru spektra. Říkáme, že se vyznačuje určitou spektrální charakteristikou. Změna spektrální charakteristiky je důsledkem fyziologických nebo fyzikálních procesů v živých či neživých objektech.

Studiem spektrálních charakteristik a jejich změn se zabývá dálkový průzkum Země, prostřednictvím obrazových informací, získaných detektory umístěnými na kosmických nebo letadlových nosičích, v porovnání s údaji pozemního průzkumu. Výsledky se využívají pro účely národního hospodářství jednotlivých zemí, zejména v oblastech zemědělství, lesnictví, geologie, hydrologie, ale i k ochraně životního prostředí.



KOSMICKÉ ROZHLEDY

ROČNÍK 23 (1985) ČÍSLO 3

NEPERIODICKÝ VĚSTNÍK ČESKOSLOVENSKÉ ASTRONOMICKÉ SPOLEČNOSTI PŘI ČSAV

KOSMICKÉ ROZHLEDY, neperiodický věstník Československé astronomické společnosti při Československé akademii věd

ročník 23 (1985) číslo 3

Vladimír Karas

Základní principy a výsledky speciální teorie
relativity. (Pokračování z č. 2/1985)

5. Lorentzova transformace a některé její důsledky

Nyní pohovoříme o Lorentzově transformaci (LT), tedy o transformaci, která udává vztah mezi souřadnicemi x^μ nějaké události pozorované z inerciálního systému S a souřadnicemi x'^μ téže události sledované z jiného inerciálního systému S' (x^1, x^2, x^3 jsou jako dříve prostorové souřadnice, $x^4 = ict$ časová). S odvozením této transformace se čtenář setká v úvodu učebnic STR; ve zjednodušeném případě v /8, kap. 1/, podrobně např. v /20, kap. IV/. Dva dříve uvedené postuláty STR doplníme z fyzikálních důvodů ještě požadavkem, že volné hmotné body se pohybují s nulovým zrychlením. Ten je již ostatně obsažen ve skutečnosti, že hledáme transformační vztah mezi IS.

Obecný tvar lineární transformace je

$$x'^\mu = \sum_{\nu=1}^4 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (5.1)$$

kde Λ_{ν}^{μ} jsou konstanty, jejichž velikost může záviset na vzájemné rychlosti systémů S a S' a na rychlosti šíření signálů o. Konstanty a^{μ} charakterizují pouze vzájemné posunutí počátků obou soustav (když jsou $x^{\mu}=0$, potom $x'^{\mu} = a^{\mu}$), a my se proto budeme věnovat pouze jednodušším transformacím s $a^{\mu} = 0$ (tzv. homogenní transformace).

Základní vlastnosti LT je možno demonstrovat na jejím nejsnazším příkladu - speciální Lorentzově transformaci (SLT). Tímto termínem označujeme LT, která splňuje předpoklady, že

1. osy x^1 a x'^1 splývají,
2. osy x^2 a x'^2 resp. x^3 a x'^3 jsou rovnoběžné a splývají v čase $t=t'=0$,
3. všechny osy mají stejnou orientaci (viz obr. 6).

SLT je tedy transformace od systému S k S', který se pohybuje ve směru osy x^1 rychlostí +v. Z postulátů STR a právě uvedených požadavků plyne tvar SLT:

$$x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (5.2)$$

$$tj. \quad x'^1 = \gamma(x^1 + i\beta x^4), x'^2 = x^2, x'^3 = x^3, x'^4 = \gamma(x^4 - i\beta x^1), \quad (5.3)$$

$$\text{kde } \beta = v/c, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}.$$

Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že princip relativity je skutečně splněn. Závislost nečárkovaných souřadnic na čárkovaných má totiž stejný tvar jako v (5.2) až na znaménko u rychlosti v , což vyjadřuje skutečnost, že orientace rychlosti systému S pozorovaného z S' je opačná oproti orientaci S' pozorovaného z S . Tato vlastnost inverzní transformace byla z hlediska Lorentzovy kontrakční hypotézy náhodná, v STR má však hlubší příčinu - princip relativity.

Podle rovnice (5.3) tedy víme, že při SLT mají konstanty Λ_j^i hodnoty

$$\Lambda_1^1 = \Lambda_4^4 = \gamma, \quad \Lambda_4^1 = -\Lambda_1^4 = i\beta\gamma, \quad \Lambda_2^2 = \Lambda_3^3 = 1,$$

ostatní jsou nulové. Dalším speciálním případem LT je prostoro-
vá rotace popsaná vztahy (2.1) + (2.3). Stačí ztotožnit

$$\Lambda_j^i = A_j^i, \quad \Lambda_4^4 = 1, \quad \Lambda_4^i = \Lambda_i^4 = 0 \quad \text{pro } i, j = 1, 2, 3.$$

Výhodnost zavedení souřadnice x^4 místo času t , který má přímý fyzikální význam, spočívá ve formální matematické podobnosti mezi prostorovou rotací a SLT. Povšimněme si, že platí

$$\gamma^2 + (i\beta\gamma)^2 = 1, \quad (5.4)$$

takže můžeme SLT (5.3) vyjádřit pomocí "úhlu" ψ definovaného vztahy

$$\gamma \equiv \cos \psi, \quad i\beta\gamma \equiv \sin \psi. \quad (5.5)$$

Pro přehlednost a s užitím nového značení přepíšeme vztah (2.1) vyjadřující prostorovou rotaci kolem osy x^2 o úhel φ , a (5.3) pro SLT ve směru osy x^1 na rychlost v vyjádřenou pomocí "úhlu" ψ :

$$\begin{array}{ll} x'^1 = x^1 \cos \varphi + x^3 \sin \varphi & x'^1 = x^1 \cos \psi + x^4 \sin \psi \\ x'^2 = x^2 & x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \cos \varphi - x^1 \sin \varphi & x'^3 = x^3 \\ x'^4 = x^4 & x'^4 = x^4 \cos \psi - x^1 \sin \psi \end{array} \quad (5.6)$$

V prvním případě mluvíme o prostorové rotaci v rovině (x^1, x^3) , ve druhém obrazně o "rotaci" v Minkowského rovině (x^1, x^4) . Každá událost je určena bodem v prostorověčas. Otočení v Minkowského rovině charakterizuje výsledky měření souřadnic téže události v souřadných systémech souvisejících navzájem pomocí SLT. Je třeba mít na paměti, že přes formální podobnost má imaginární souřadnice x^4 zcela odlišným význam než reálné prostorové souřadnice x^1, x^2, x^3 . Proto není možné rotaci v Minkowského rovině názorně zakreslit, jako tomu bylo u prostorové rotace (obr. 3). Existuje ovšem grafické

znázornění pomocí kosoúhlých souřadnic /20, kap. V/.

V případě infinitesimální SLT (transformace na malou rychlost $v \rightarrow 0$, tedy transformace nepatrně odlišná od identické) je β malé, takže

$$\begin{aligned} 1\beta\gamma &= \sin\phi \cong \phi, & \gamma &= \cos\phi \cong 1, \\ x'^1 &\cong x^1 + 1\beta x^4, & x'^4 &\cong x^4 - 1\beta x^1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Důležitost infinitesimálních LT spočívá v tom, že jejich postupným skládáním lze vytvářet konečné LT a že pro určení transformačních vlastností různých veličin postačuje znát jejich chování při infinitesimálních transformacích. Poznámeme také, že v prvním řádu rozvoje (5.7) podle malé veličiny β je sice $x'^1 = x^1$ - vt jako v Galileově transformaci, ale transformační předpis pro časovou souřadnici je od galileovského odlišný.

Nakonec ještě několik slov o tzv. intervalu. Tímto termínem označujeme kvadratickou formu vyjadřující časoprostorovou odlehlost dvou blízkých událostí $P_1(x^1, x^2, x^3, x^4)$ a $P_2(x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3, x^4+dx^4)$

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \text{ neboli} \\ ds^2 &= \sum_{\mu=1}^4 (dx^\mu)^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Slovo "odlehlost" vyjadřuje analogii se vzdáleností dvou bodů v Eukleidově prostoru: jestliže se jejich prostorové souřadnice liší o hodnoty dx^i ($i=1,2,3$), je čtverec vzdálenosti podle Pythagorovy věty

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Fyzikální význam intervalu ds ukážeme v části pojednávající o dilataci času. Zatím víme, že pokud $ds = 0$, jsou obě události světelně spojeny, neboť ze vztahu

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2 dt^2$$

plyne, že signál se mezi nimi šíří rychlostí světla c . Interval má důležitou vlastnost - je invariantní při LT, tzn. jeho velikost se zachovává ($ds^2 = ds'^2$). Naopak LT jsou jediné neregulární transformace $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu)$, které ponechávají ds^2 invariantní. Důsledkem této invariance je skutečnost, že světelné signály se v inerciálních soustavách spojených LT skutečně šíří vždy stejnou rychlostí ($c=c'$).

Pokud $ds^2 < 0$, říkáme, že interval má časový charakter a události P_1, P_2 mohou být spojeny signálem šířícím se rychlostí menší, než je rychlost světla. Pokud $ds^2 > 0$, jde o interval prostorového charakteru a obě události nejsou v kauzální souvislosti.

Všichni čtenáři se již nepochybně setkali s pojmy kontrakce délek, dilatace času či relativnost současnosti. Někdy se však objevují nesprávné interpretace těchto důsledků LT.

Budeme opět uvažovat dva systémy S a S' spojené pomocí SLT na rychlost $v < c$ ve směru osy x^1 . Připomenme, že v obou máme kartézský systém prostorových souřadnic sestavený z ideálních měřítka a v každém bodě prostoru je umístěn pozorovatel s ideálními hodinami. Hodiny systému S jsou navzájem synchronizovány světelnými signály či nekonečně pomalým přenosem. Analogicky je tomu s hodinami v S'.

Mějme měřítko položené podél osy x'^1 , které je v S' v klidu. Jeho konce tedy trvale padnou do nějakých bodů x_1^1, x_2^1 a délka $l' \equiv x_2^1 - x_1^1$ je označována jako tzv. vlastní (klidová) délka. Délku tohoto měřítka letícího v S určíme tak, že v předem stanoveném čase pozorovatelé, kolem nichž právě prolétá některý z konců měřítka, "zvednou praporek". Jejich synchronizované hodiny ukazují v tomto okamžiku čas $t_1 = t_2$. Podle SLT bude

$$l' \equiv x_2^1 - x_1^1 = \gamma (x_2^1 - x_1^1 - v(t_2 - t_1)) \equiv \gamma l. \quad (5.11)$$

Protože $\gamma > 1$, je $l < l'$. Odtud kontrakce délek - letící měřítko je skráčeno ve směru pohybu, největší délku má ve svém klidovém systému. Jak se toto měření jeví pozorovateli v S'? Platí

$$0 = t_2 - t_1 = \gamma (t_2' - t_1' + vl'/c^2), \text{ tj. } t_2' - t_1' = -vl'/c^2.$$

Podle něj tedy oba pozorovatelé nezvedli praporeky v též okamžik, a proto změřili odlišnou délku. Při $v \neq 0$ je $t_2' = t_1'$ pouze pro $l' = 0$, tzn. události mohou být současně v různých IS pouze tehdy, jsou-li zároveň souměrné.

Uvažme navíc další systém S'', který se pohybuje vůči S rychlostí $-v$ (v protisměru osy x^1). Dvě události současně v S ($t_1 = t_2$) nejsou současně v S' ($t_1' > t_2'$) ani v S'' ($t_1'' < t_2''$) a navíc při přechodu od S' k S'' se mění jejich pořadí. Matematicky v tomto tvrzení není paradox, neboť se jedná o údaje různých hodin. Protimluv by ovšem vznikl, kdyby byla porušena kauzalita, tj. kdyby mohlo dojít k záměně časového pořadí příčiny a následku přechodem z jednoho systému ke druhému. Necht' např. v S je v čase t_1 v bodě x_1^1 na ose x^1 vyslán signál, který v $t_2 > t_1$ dorazí do bodu x_2^1 . To jsou dvě evidentně kauzálně spojené události. Rychlost šíření signálu je $u \equiv (x_2^1 - x_1^1)/(t_2 - t_1)$. Pozorováno z S' je $t_2' - t_1' =$

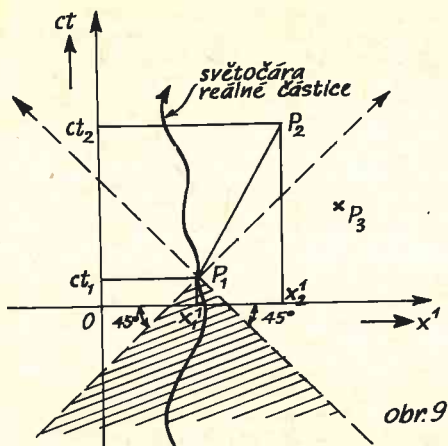
$$= \gamma (t_2 - t_1 - v(x_2^1 - x_1^1)/c^2). \text{ Příčinnost by byla porušena, kdyby se pořadí událostí obrátilo, tj. kdyby } t_1' > t_2'. \text{ Pak ovšem, uvážíme-li, že } \gamma > 1, |v| < c, \text{ by bylo}$$

$$0 > t_2' - t_1' = \gamma (t_2 - t_1 - v(x_2^1 - x_1^1)/c^2), \quad (5.12)$$

a tedy

$$uv > c^2, \quad |u| > c. \quad (5.13)$$

Signál by se musel šířit nadsvětelnou rychlostí. Situace je ukázána na obr. 9. Světlocáry signálu i všech fyzikálních těles,



znázorněné plnými čarami v rovině (x^1, ct) , leží uvnitř tzv. světelného kuželu a mají časový charakter. Tento kužel je světelná vlnoplocha elektromagnetického signálu vyslaného z P_1 . Jeho průnik s rovinou (x^1, ct) je vyznačen čárkovanými přímkami jdoucími pod sklonem 45° k ose x^1 . Události P_1 a P_3 stejně tak jako všechny události spojené prostorupodobnými křivkami (jejichž sklon k ose x^1 je menší než 45°) nejsou v kauzálním vztahu. Minulý světelný kužel vyznačený šrafováním obsahuje události, které mohly být v principu kauzálně spojeny s P_1 . Prakticky

to znamená, že není možné okamžité působení na dálku. Nemohou tedy existovat ideálně tuhá tělesa, u nichž by poloha jednoho konce okamžitě reagovala na změnu polohy konce druhého.

Další důležitý relativistický jev, tzv. dilatace času, je rovněž důsledkem LT. Budeme porovnávat chod hodin v S a S' . Lze to provést tím způsobem, že zvolíme jedny hodiny H' v systému S' , tzv. hodiny, které mají v tomto systému konstantní prostorové souřadnice x^1, x^2, x^3 . Porovnání jejich chodu s chodem hodin v S realizujeme tak, že budeme srovnávat údaj H' s údajem právě míjených hodin. Jinou možností je porovnávat údaj H' s údajem jedné z pevných hodin v S (např. pomocí dalekohledu). V tom případě je třeba provést ještě opravu o dobu, kterou potřeboval signál z H' k proletění příslušné vzdálenosti. Poněvadž hodiny v S jsou synchronizovány, vedou oba postupy ke stejným výsledkům. Vybereme si nyní např. první metodu. Souvislost mezi časovým intervalem dt a odpovídajícím dt' (dt' může představovat jeden tik hodin H') je podle SLT

$$dt = t_2 - t_1 = \gamma (t_2' - t_1' + v(x_2^1 - x_1^1)) = \gamma dt' \quad (5.14)$$

($x_1^1 = x_2^1$, protože S' je klidový systém H').

Hodiny v S' jdou tedy pomaleji. Důležitou veličinou je vlastní čas τ - čas měřený v klidové soustavě. Pro naše hodiny H' je $\tau \equiv t'$.

Časoprostorový interval ds je invariant LT a stačí jej tudíž vypočítat v jednom systému. Výpočet v S' , kde jsou prostorové souřadnice konstantní ($dx^i = 0, i=1,2,3$), dává

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (5.15)$$

Druhá mocnina intervalu ds^2 je tedy, až na faktor $-c^2$, rovna čtverci vlastního času $d\tau^2$.

Všechny předchozí úvahy můžeme díky naprosté rovnopráv-

nosti S a S', zajištěné vzájemnou reciprocitou vztahů STR, provést z opačného hlediska, tj. vypočítat dilataci času hodin H stojících v S vzhledem k hodinám systému S'. Zde někdy vzniká nejasnost, neboť výsledek prvního výpočtu (5.14) byl $dt = \gamma dt'$, zatímco nyní analogickým výpočtem dostáváme $dt' = \gamma dt$. Je však třeba si uvědomit rozdíl v obou situacích a tím i odlišný význam dt a dt' v prvním a druhém výpočtu. V prvním byly hodiny H' v klidu v systému S' a v pohybu vůči S. Jejich údaje t' jsme srovnávali s údaji řady synchronizovaných hodin systému S, které H' právě mijely. Při druhém výpočtu je tomu naopak. K prvému výsledku je třeba vždy dodat $x'^1 = \text{konst.}$, k druhému $x^1 = \text{konst.}$ (i=1,2,3).

Komplikovanější situace nastává, pokud se hodiny H' po čase opět vrátí do výchozího bodu v S, takže je možné jejich údaj porovnat podruhé s týmiž hodinami H. Této úloze je věnována kapitola 7.

Nyní ještě proberme případ, kdy pozorovatel v S přijímá signály od (např.) vzdalujících se hodin H', tj. porovnává údaje dvou hodin stojících ve dvou různých IS. Výsledek měření je ovlivněn relativistickým Dopplerovým jevem, který matematicky i fyzikálně elegantnějším způsobem odvodíme v kap.6. Nyní provedeme výpočet elementárním způsobem /21/. Interval mezi tiky hodin H' v jejich klidové soustavě S' označme opět dt' . Počátek prostorové osy x'^1 zvolíme v místě hodin H'. V okamžiku prvního tiky (událost P₁) je poloha H' v S (souvisjícím s S' přes SLT) rovna x_1^1

$$0 = x_1^1 = \gamma(x_1^1 - vt_1), \text{ tedy } x_1^1 = vt_1. \quad (5.16)$$

Signál se z události P₁ šíří rychlostí c a k pozorovateli v počátku doletí za dobu x_1^1/c . Na hodinách H umístěných v počátku S proto bude P₁ zaregistrováno v čase

$$t_1^{\text{obs}} = t_1 + x_1^1/c = x_1^1(v^{-1} + c^{-1}). \quad (5.17)$$

Také při druhém tiky P₂ je $x_2^1 = 0$,

$$x_2^1 = vt_2.$$

Označíme $dt' \equiv t_2' - t_1'$. Ze SLT máme

$$t_2 = \gamma t_2', \quad (5.19)$$

$$t_2' = dt' + x_1^1 / (\gamma v) \quad (5.20)$$

a porovnáním posledních dvou vztahů

$$t_2 = \gamma dt' + x_1^1 / v. \quad (5.21)$$

Čas pozorování druhého tiky je

$$t_2^{\text{obs}} = t_2 + x_2^1/c = \gamma dt' + x_1^1/v + \beta \gamma dt' + x_1^1/c. \quad (5.22)$$

Naměřená doba mezi tiky je tedy

$$dt^{\text{obs}} \equiv t_2^{\text{obs}} - t_1^{\text{obs}} = \gamma(1 + \beta)dt' =$$

$$= \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} dt' . \quad (5.23)$$

To je odlišné od vztahu $dt = \gamma dt'$, který jsme vypočetli dříve jakožto dilataci času. Rozdíl je způsoben Dopplerovým jevem. Vzorec (5.14) určuje souvislost údajů pohybujících se hodin H' s právě měřenými hodinami v S , zatímco (5.23) porovnává chod H' se stojícími hodinami H na jediném místě v S .

Přerušíme na tomto místě studium vlastností SLF, které by mohlo být obsahem samostatné knihy. Pouze ještě uvedeme užitečné vztahy pro transformaci rychlostí a zrychlení, které lze odvodit derivováním (5.2). Rychlost $u^1 = dx^1/dt$ resp. zrychlení $a^1 = du^1/dt$ vzhledem k S (ve směru osy x^1) souvisejí s rychlostí $u'^1 = dx'^1/dt'$ resp. zrychlením $a'^1 = du'^1/dt'$ vzhledem k S' vztahy

$$u^1 = \frac{u'^1 + v}{1 - u'^1 v/c^2} , \quad a^1 = \frac{1}{\gamma^3} \frac{a'^1}{(1 - u'^1 v/c^2)^3} , \quad (5.24)$$

neboli

$$u'^1 = \frac{u^1 + v}{1 + u^1 v/c^2} , \quad a'^1 = \frac{1}{\gamma^3} \frac{a^1}{(1 + u^1 v/c^2)^3} . \quad (5.25)$$

O něco komplikovanější vztahy platí také pro ostatní složky rychlosti a zrychlení. Je-li S' klidovým systémem tělesa ($u'^1 = 0$, $u^1 = v$), je podle (5.25)

$$a^1 = a'^1/\gamma^3 . \quad (5.26)$$

Nechť se těleso pohybuje nepravidelně a nechť S' je takový IS, v němž je těleso v daném čase v klidu. Za okamžik bude hrát roli S' jiný IS, který se pohybuje vůči S posměněnou rychlostí v . Zrychlený pozorovatel může nést s sebou hodiny a měřicí tyče a použít je pro vytvoření vlastního souřadného systému ve svém okolí. Jsou-li jeho hodiny vhodně konstruovány, nezávisí jejich chod na velikosti zrychlení. To není nikterak triviální skutečnost. Můžeme si představit např. elektrické hodiny, jejichž zdroj je připojen přes spínač rozpojovací obvod při různých otřesech a jiných neregulárnostech v pohybu. Takové hodiny se při zrychlení úplně zastaví. Ostatně i chod kyvadlových hodin je neregulárným pohybem ovlivněn. Na druhé straně stálost chodu atomových hodin byla ověřena až do extrémně vysokých hodnot jejich zrychlení. Tyto hodiny "tikají" v okamžitém IS stejně, jako jejich identická kopie, kterou si s sebou nese urychlený pozorovatel na tělese. Lze to ověřit právě při jejich vzájemném přiblížení.

Rovnoměrně zrychleným pohybem rozumíme v STR takový pohyb, při němž je zrychlení v okamžitém IS konstantní ($a'^1 = \text{konst.}$ v případě pohybu podél první osy). Můžeme jej realizovat tak, že těleso umístíme na raketu vyvíjející svými motory konstantní tah. Přesná analogie newtonovského rovnoměrně zrychleného pohybu, tj. pohybu s konstantním zrychlením a^1 v S, není možná z několika důvodů. Především jsme již uvedli, že rychlost světla je v STR mezní rychlostí, nad níž nelze žádné těleso urychlit, takže zrychlení nemůže být v jednom IS konstantní libovolně dlouhou dobu. Navíc ze vztahů (5.24), (5.25) vyplývá, že konstantnost zrychlení v jednom IS neznamená jeho konstantnost také v ostatních, je to relativní pojem. Zjednodušíme označení zavedením $a'^1 = a$. Integrací (5.26) dostaneme

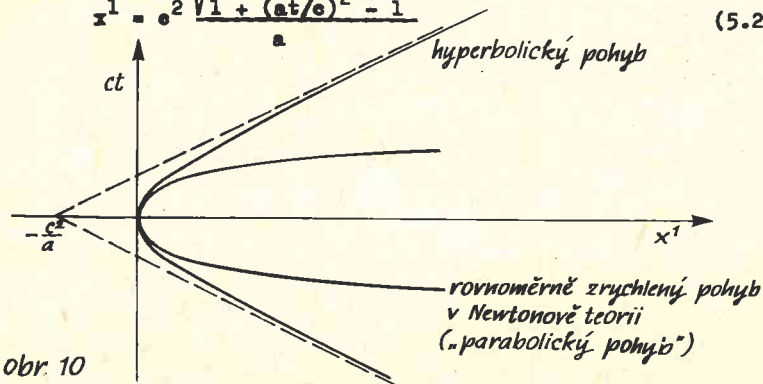
$$\gamma v = at \quad (5.27)$$

s počáteční podmínkou $v(t=0) = 0$ (připomeňme, že $v \equiv u^1$). (5.27) lze přepsat ve tvaru

$$v = at / \sqrt{1 + (at/c)^2} \quad (5.28)$$

Zřejmě po dostatečně dlouhé době ($t \rightarrow \infty$) se rychlost tělesa v S asymptoticky blíží rychlosti světla ($v \rightarrow c$). Integrací (5.28) s počáteční podmínkou $x^1(t=0) = 0$ nalezneme závislost dráhy na čase

$$x^1 = c^2 \sqrt{1 + (at/c)^2} - 1 \quad (5.29)$$



obr. 10

V rovině (x^1, ct) je světočárou tělesa hyperbola (obr. 10). Proto se rovnoměrně zrychlený pohyb v STR obvykle nazývá hyperbolický.

Zapamatujme si především skutečnost, že pohyb zrychlených těles je možné studovat v rámci STR. Nezávislost chodu atomových hodin byla metodami jaderné fyziky ověřena až do zrychlení převyšujících o 28 řádů zrychlení na zemském povrchu.

6. Další vztahy speciální teorie relativity

Dosud jsme pracovali s prostoro-časovým (3+1) zápisem vztahů STR. Přírozenější a po matematické stránce snazší je přístup, v němž čas vystupuje jako jedna ze souřadnic čtyřrozměrného časoprostoru. V newtonovské mechanice určujeme časovou závislost třírozměrných vektorů, skalárů a dalších veličin potřebných pro popis pohybu. Nyní budeme hledat jejich čtyřdimenzionální analogie - čtyřvektory a skaláry Minkowského časoprostoru.

Připomeníme ještě jednou pojem (kontravariantního) tenzoru. Tenzorem nultého řádu - skalárem ϕ - jsme označili veličinu, která je při transformaci souřadnic $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu)$ neměnná, tj. $\phi(x^\mu) = \phi(x'^\mu)$. Příkladem může být ds^2 . Zavedeme veličiny

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \eta'^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} -1 & \text{pro } \mu = \nu = 0 \\ 1 & \text{pro } \mu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{pro } \mu \neq \nu \end{cases} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$$a \text{ ct} \equiv x^0. \quad (6.2)$$

Pak lze (5.8) přepsat ve tvaru

$$ds^2 = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (6.3)$$

Starý zápis ds^2 je ekvivalentní s novým, pouze je třeba mít na paměti převodní vztah (6.2), z něhož plyne $dx^4 = idx^0$. Jejich použití rozeznáme např. podle toho, jakých hodnot nabývají indexy (1,2,3,4 resp. 0,1,2,3). Tenzor 1. řádu v Minkowského časoprostoru - čtyřvektor \underline{V} - je veličina, jejíž komponenty V^μ se transformují podle vektoru

$$V'^\mu = \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} V^\beta. \quad (6.4)$$

Skalár můžeme vytvořit ze dvou čtyřvektorů \underline{V} a \underline{W} skalárním součinem

$$\underline{V} \cdot \underline{W} = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V^1 W^1 + V^2 W^2 + V^3 W^3 - V^0 W^0. \quad (6.5)$$

Ve třírozměrném prostoru vyjadřoval skalární součin vektoru s ním samým (2.20) jeho délku a byl roven nule pouze tehdy, když byly nulové všechny složky vektoru. V Minkowského časoprostoru je tomu díky znaménku minus v (6.5) jinak - nulový vektor nemusí mít všechny komponenty nulové. Důležitým příkladem čtyřvektoru nám může být čtyřrychlost \underline{U} tělesa. Je-li jeho pohyb popsán rovnicí světočáry $x^\mu \equiv x^\mu(\tau)$, kde τ je vlastní čas tělesa podél světočáry, jsou složky čtyřrychlosti

$$U^\mu \equiv dx^\mu(\tau)/d\tau. \quad (6.6)$$

\underline{U} má skutečně správné transformační vlastnosti, neboť $dx^\mu(\tau)$

je čtyřvektor, zatímco $d\tau$ je skalár. Ze vzorce pro dilataci času máme $dt = \gamma d\tau$, takže můžeme vyjádřit komponenty čtyřrychlosti ve tvaru

$$U^j = dx^j/d\tau = \gamma dx^j/dt = \gamma u^j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6.7)$$

$$U^0 = c dt/d\tau = \gamma c,$$

kde u^j jsou obvyklé složky vektoru rychlosti \vec{u} . Často se používá zápis

$$U^\mu = \gamma(c, \vec{u}) \quad (6.8)$$

Snadno vypočteme "délku" čtyřrychlosti

$$U^2 = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \gamma^2 (u^2 - c^2) = -c^2. \quad (6.9)$$

Tato veličina je konstantní, záporná, a čtyřrychlost je proto časového charakteru. Čtyřzrychlení je definováno přirozeně jako

$$A^\mu \equiv dU^\mu/d\tau. \quad (6.10)$$

Z (6.9) plyne

$$d(\sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu)/d\tau = 2 \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} U^\mu A^\nu = 0, \text{ tj. } \underline{U} \cdot \underline{A} = 0. \quad (6.11)$$

To je analogie podmínky pro kolmost vektorů. Poznamenejme ještě, že není a priori zřejmé, zda A a všechny další veličiny odvozené derivováním čtyřvektoru x^μ jsou opět čtyřvektory. Přímy výpočet ukazuje, že tomu tak je, pokud uvažujeme lineární transformace, mezi něž LT patří:

$$\begin{aligned} A^\mu &= dU^\mu/d\tau = d\left(\sum_{\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} U^\alpha\right)/d\tau = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dU^\alpha}{d\tau} + \sum_{\alpha, \beta} U^\alpha \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dalšími důležitými čtyřvektory, které jsou analogiemi newtonovských veličin, jsou čtyřhybnost, čtyřproud a čtyřsíla. S vektory, které známe z Newtonovy teorie, souvisejí následujícím způsobem.

Čtyřhybnost

$$p^\alpha \equiv mU^\alpha = \gamma m(c, \vec{u}), \quad (6.1)$$

kde m je tzv. klidová hmotnost tělesa (hmotnost určená v IS, ve kterém je těleso v klidu - tedy zřejmý skalár). Zjevně podle (6.9)

$$p^2 = -m^2 c^2. \quad (6.1)$$

Prostorovou část \underline{p} lze zapsat ve tvaru

$$\vec{P} = M\vec{u}, \text{ kde } M = \gamma m. \quad (6.15)$$

Faktor $\gamma > 1$ vyjadřuje známý vzrůst hmotnosti částice oproti hmotnosti určené v jejím klidovém IS. Čtyřproud vytvořený tokem nabitých částic

$$J^\mu = \rho U^\mu = (\tilde{\rho} c, \vec{j}), \text{ kde } \tilde{\rho} = \rho\gamma, \quad (6.16)$$

\vec{j} je hustota proudu a $\tilde{\rho} = q\delta(x^m(\tau) - x^m)$ je hustota náboje tělesa, které v tomto případě představuje bodová částice s nábojem q . Proto je ve vzorci Diracova δ -funkce vyjadřující nenulovost hustoty náboje pouze v jediném bodě - tam, kde je částice právě lokalizována - přičemž celkové množství náboje je $\int \tilde{\rho} dV = q$. O tomto lze viz např. /20/. Kdybychom neuvážovali jedinou bodovou částici, ale spojitě rozložený náboje v nějaké oblasti prostoru, psali bychom $\tilde{\rho}(x^\mu)$. Rozdíl $\tilde{\rho} - \rho$ vyjadřuje další důsledek LT - vzrůst hustoty náboje v pohybujícím se tělese.

Konečně tenzor druhého řádu je veličina, která se transformuje podle pravidla

$$F^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta}} F^{\alpha\beta}. \quad (6.17)$$

Zde je důležitým příkladem tenzor elektromagnetického pole, který lze vyjádřit pomocí složek vektoru elektrické intenzity \vec{E} a magnetické indukce \vec{B} /2/

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Pro tento tenzor je možné zapsat rovnice, které poprvé formuloval Maxwell. Jejich objev je jedním z vrcholů lidského bádání, neboť jednotně vysvětlují chování elektromagnetického pole a spojují tak jevy elektrické s magnetickými. Mezi jejich nejdůležitější důsledky patří zákon zachování elektrického náboje, zákon zachování energie v elektromagnetickém poli a rovnice pro šíření elektromagnetických vln. Plyne z nich, že rychlost šíření elektromagnetického vlnění - světla - ve vakuu je konstantní. Tvar rovnic je invariantní při LT (nikoli při Galileově transformaci).

Zbývá napsat relativistickou analogii Newtonova zákona - pohybovou rovnici. Newtonova teorie postuluje tuto rovnici ve druhém zákoně (3.1). Tvar čtyřsíly F je třeba, stejně jako tomu bylo v Newtonově teorii, nalézt nezávislým postupem. Hmotnosti M_S odpovídá v STR veličina M ; (v klidovém IS je $M=m$). V případě gravitační interakce dvou částic s hmotnostmi M_S a m_S má newtonovská síla tvar (3.7)

$$\vec{F}_{\text{grav.}} = -G \frac{M_S m_S}{r^2} \vec{r}_0. \quad (6.19)$$

Ukazuje se, že podobně jako není správnou teorií gravitace teorie Newtonova, nelze gravitační působení popsat ani v rámci STR. Ponechme proto nyní gravitační interakci stranou.

Na částici s elektrickým nábojem q umístěnou v elektromagnetickém poli působí Lorentzova síla

$$\vec{f}_{\text{emg}} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (6.20)$$

(vektorový součin je v kartézských souřadnicích definován vztahem

$$\vec{u} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} u^2_B{}^3 - u^3_B{}^2 \\ u^3_B{}^1 - u^1_B{}^3 \\ u^1_B{}^2 - u^2_B{}^1 \end{pmatrix} .$$

Pohybová rovnice STR má tvar

$$F^\mu = dp^\mu/d\tau \quad (6.21)$$

Vzorec (6.20) neplatí pouze pro částice pohybující se pomalu ($u \ll c$), ale i pro relativistické částice ($u \rightarrow c$). To je experimentálně ověřený fakt a musíme jej vzít v úvahu při výběru vhodného tvaru čtyřsíly F_μ . Lorentzovsky invariantní pohybová rovnice, jejíž prostorová část je identická se vztahem (6.20), má tvar

$$dp^\mu/d\tau = q \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} U^\alpha F^{\mu\beta}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (6.22)$$

Čtenář se o tom může přesvědčit dosazením z (6.18) pro $\mu = 1, 2, 3$. Nulová komponenta dává po rozepsání

$$\frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{u}, \quad \text{tj.} \quad \frac{d(Mc^2)}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{u} \quad (6.23)$$

Pravá strana má význam změny energie tělesa (působením elektromagnetického pole). Veličinu

$$E = Mc^2 \quad (6.24)$$

interpretujeme jako jeho celkovou energii. Od své nejmenší hodnoty $E_{\text{klid.}} = mc^2$, kterou nabývá v klidovém IS, se liší o kinetickou energii $E_{\text{kin.}} = (M-m)c^2 = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{1}{2} mu^2$.

Pomocí již dříve zmíněného Taylorova vzorce jsme tak dospěli ke známému výrazu pro kinetickou energii tělesa, který ovšem platí pouze při $u \ll c$. V nerelativistické fyzice žádný obecný vztah mezi energií a (setrvačnou) hmotností tělesa není, zcela nezávisle platí zákon zachování energie a zákon zachování hmoty. Experimentální ověření (6.24) přinesla fyzika elementárních částic. Za obvyklých podmínek je totiž odchylka celkové energie makroskopických těles od klidové energie neměřitelná. Teprve pokusy na urychlovačích udělujících

částicím vysoké rychlosti ukázaly, že setrvačná hmotnost skutečně závisí na rychlosti podle vztahu $M = \gamma m$ a že platí

$$\gamma = \frac{E}{E_{\text{klid.}}} = \frac{E_{\text{klid.}} + E_{\text{kin.}}}{E_{\text{klid.}}} \quad (6.25)$$

Nelze proto urychlováním částice dosáhnout rychlosti $u \geq c$. Další ověření (6.24) plyne z tzv. hmotového defektu: rozdíl Δm mezi hmotností atomového jádra a součtem klidových hmotností protonů a neutronů, které jádro tvoří, se uvolní při jeho vzniku ve formě záření s energií $\Delta m c^2$.

Přímým důsledkem vybudované teorie je také existence Dopplerova jevu a aberace. Ze vztahu (6.14) plyne vyjádření čtyřvektoru \underline{P} pomocí jednotkového vektoru $\vec{n} = \underline{P}/|\underline{P}|$, který má směr vektoru hybnosti \underline{P} :

$$P^\alpha = |\underline{P}| \left(\sqrt{1 + m^2 c^2 / |\underline{P}|^2}, \vec{n} \right) \quad (6.26)$$

V dalším použijeme fundamentální výsledek kvantové teorie /např. 8, kap. 3/, podle níž je možné chápat elektromagnetické vlnění též jako proud částic - fotonů - s energií $E = h\nu$ a hybností $|\underline{P}| = h\nu/c$ (ν je frekvence záření a $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konstanta). Ostatně i tyto vztahy jsou těsně spjaty s Einsteinovým jménem, neboť stojí v základu jeho objasnění fotoelektrického jevu. Fotony se pohybují rychlostí c , a proto pro ně $m = 0$,

$$P^\alpha = \frac{h\nu}{c} (1, \vec{n}) \quad , \quad \underline{P}^2 = 0 \quad (6.27)$$

Mějme tedy foton elektromagnetického záření popsaný v S čtyřhybností (6.27). Přijme-li jej pozorovatel v S' související s S přes SLT, bude pozorovat záření s pozměněnou čtyřhybností

$$P'^\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_\beta^\alpha P^\beta \quad (6.28)$$

kde $\Lambda_0^0 = \Lambda_1^1 = \gamma$, $\Lambda_1^0 = \Lambda_0^1 = -\beta\gamma$, $\Lambda_2^2 = \Lambda_3^3 = 1$ a ostatní

nulové. Důsledkem této prosté transformace čtyřvektoru \underline{P} je změna frekvence $\nu \rightarrow \nu'$ a směru šíření $\vec{n} \rightarrow \vec{n}'$:
Z časové komponenty čtyřhybnosti nalezneme

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{c}{h} P'^0 = \frac{c}{h} \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_\beta^0 P^\beta = \frac{c}{h} \gamma (P^0 - \beta P^1) = \\ &= \gamma \nu (1 - \beta n^1). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Pohybuje-li se foton v kladném resp. záporném směru osy x^1 , je $\beta > 0$ resp. $\beta < 0$,

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, takže (6.29) přejde na tvar

$$\nu' = \nu \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{1/2} \quad (6.30)$$

V prvním přiblížení (pro $\beta \ll 1$)

$$\nu' \cong \nu (1 - \beta), \text{ tj. } \frac{\Delta \nu}{\nu} \cong \beta = \frac{v}{c}, \quad (6.31)$$

což odpovídá posuvu frekvence k rudému resp. modrému konci spektra. Tento vztah, který má základní význam v astronomii, jsme odvodili již v kap. 5, kde bylo $\nu = 1/dt'_{\text{obs}}$, $\nu' = 1/dt'$ (srov. (5.23)). Formuli pro aberaci dostaneme transformací prostorové části \underline{P} .

$$n^i = \frac{c}{h\nu'} P^i = \frac{c}{h\nu'} \sum_{\alpha=0}^3 \Lambda_{\alpha}^i P^{\alpha}, \quad i=1,2,3. \quad (6.32)$$

Odtud užitím (6.27), (6.29)

$$\begin{aligned} n^{,1} &= \frac{c}{h\nu\gamma(1-\beta n^1)} \gamma (P^1 - \beta P^0) = \frac{n^1 - \beta}{1 - \beta n^1}, \\ n^{,2} &= \frac{c}{h\nu\gamma(1-\beta n^1)} P^2 = \frac{n^2}{\gamma(1-\beta n^1)}, \\ n^{,3} &= \frac{n^3}{\gamma(1-\beta n^1)}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Zvolíme-li pro ilustraci směr pohybu fotonu v S tak, že

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\cos \\ -\sin \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ tj. v rovině } (x^1, x^2), \quad (6.34)$$

dostaneme pro jeho směr v S'

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta}, \quad \sin \vartheta' = \frac{\sin \vartheta}{\gamma(1 + \beta \cos \vartheta)}. \quad (6.35)$$

Neméně zajímavé důsledky plynou z transformace tenzoru elektromagnetického pole (6.18). Zvolme jednoduchý případ: v S existuje pouze elektrostatické pole ve směru osy x^2 , tj.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F^{02} = -F^{20} = E/c. \text{ Pak}$$

v S' změříme

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \sum_{\alpha,\beta} \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} F^{\alpha\beta} = (\Lambda_0^{\mu} \Lambda_2^{\nu} - \Lambda_2^{\mu} \Lambda_0^{\nu}) E/c = \\ &= E \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma/c & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ -\gamma/c & \beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Vektor elektrické intenzity v S' je

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma E \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a navíc se objevilo magnetické pole}$$

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta\gamma E \end{pmatrix}.$$

Magnetické pole, které bylo původně studováno odděleně od elektrického, je podle STR vlastností pohybujících se elektrických nábojů. Např. magnetické pole v okolí vodiče protékajícího proudem je způsobeno pohybem elektronů ve vodiči. V klidovém IS elektronů pozorujeme pouze jejich elektrostatické Coulombovo pole.

7. Paradox hodin

...Paradox hodin může být plně vyřešen v termínech speciální teorie relativity. Správně aplikována dává teorie jedinou a jednoznačnou hodnotu relativního opožďování dvou hodin. Zdánlivý paradox může vzniknout pouze užitím "rychlosti" pohybujících se hodin bez zřetele na skutečný význam takto vyjádřené veličiny. Princip ekvivalence je zcela irelevantní k analýze a diskusi relativní retardace hodin, pokud není třeba uvažovat skutečné gravitační pole, a s výjimkou tohoto případu nemůže obecná teorie relativity přidat nic fyzikálně podstatného k popisu provedenému správně s užitím speciální teorie relativity.

G. Builder

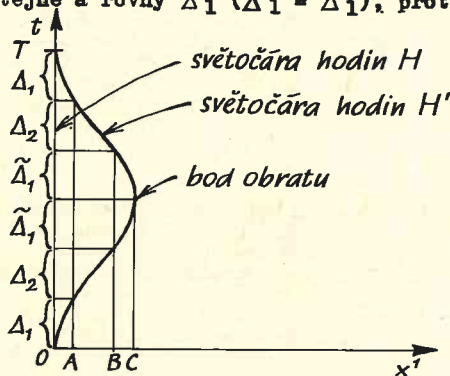
V této kapitole se budeme věnovat jednomu z nejproslulejších fyzikálních problémů, který byl nesčetněkrát s různými obměnami formulován a nesčetněkrát (s různými výsledky) řešen. Diskuse přerostly okruh vědců zabývajících se teorií relativity a pokračují dodnes, i když konjunktura z konce padesátých let již opadla. Tehdy uvedly časopisy Nature, American Journal of Physics, Australian Journal of Physics a další řadu článků na toto téma. V zajímavě napsané monografii /9/ (u nás je dostupná v ruském překladu) nalezneme čtenář vysvětlení mnoha otázek a navíc 325 citací na další práce.

Shrňme podstatu problému: Dva pozorovatelé vybavení hodinami H a H' se nejprve nalézají v počátku jednoho inerciálního systému a svoje hodiny mohou tedy snadno synchronizovat. V okamžiku $t = t' = 0$ se hodiny H' začnou pohybovat v kladném směru osy x^1 inerciálního systému spojeného s H . Jejich světočára je znázorněna na obr. 11. Předpokládejme pro zjednodušení výpočtů, že zrychlení a hodiny H' je konstantní, tzn. že pro jejich pohyb platí vztahy rovnoměrně zrychleného (hyperbolického) pohybu z konce 5. kapitoly. Když

po čase Δ_1 (měřeno v IS hodin H) dosáhnou bodu A na ose x^1 , přestane urychlující síla působit a hodiny se až do bodu B pohybují rovnoměrně přímočaře. Jejich rychlost je podle (5.28)

$$v = a\Delta_1 / \sqrt{1 + (a\Delta_1/c)^2}, \quad a = \text{konst.} > 0. \quad (7.1)$$

V bodě B začne působit zrychlení $-a$, tentokrát proti směru pohybu, takže po čase $\tilde{\Delta}_1$ se pohyb H' vůči H v bodě C zastaví a hodiny se počnou stejným způsobem vracet. Časové intervaly odpovídající pohybu mezi body $O \rightarrow A$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow B$, $A \rightarrow O$ jsou stejné a rovny Δ_1 ($\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1$), protože pro jednoduchost



obr. 11

předpokládáme konstantní, vždy stejnou velikost zrychlení ("stálý tah motorů"). Analogicky časový interval Δ_2 odpovídá pohybu mezi body $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$. Celková doba pohybu měřená hodinami H je tudíž dána součtem

$$T = 4\Delta_1 + 2\Delta_2. \quad (7.2)$$

Hodiny H' budou při opětovném porovnání s H v bodě O ukazovat

$$T' = 4\Delta_1' + 2\Delta_2'. \quad (7.3)$$

(Intervaly Δ_1' odpovídají údajům naměřeným hodinami H' během jejich zrychleného pohybu, Δ_2' během rovnoměrného přímočarého pohybu). Dosazením (7.1) do vzorce pro dilataci času $dt = \gamma dt'$ (vztah (5.14)) a integrací dostaneme

$$\Delta_1' = \int_0^{\Delta_1} dt/\gamma = \int_0^{\Delta_1} dt/\sqrt{1 + (at/c)^2} = \frac{c}{a} \operatorname{argsh} \frac{a\Delta_1}{c}. \quad (7.4)$$

Ze (7.4) a (7.1) plyne

$$\operatorname{sh} \frac{a\Delta_1'}{c} = \frac{a\Delta_1}{c} = \beta\gamma. \quad (7.5)$$

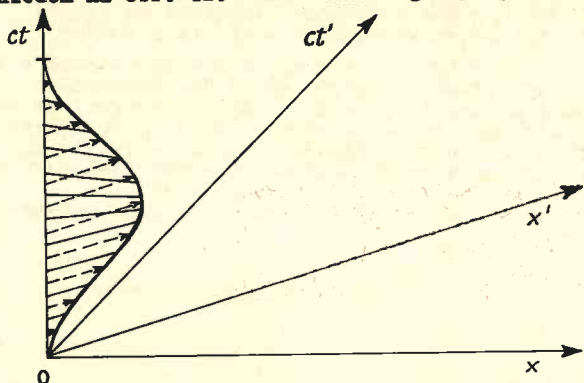
Stejně tak dostaneme z (5.14) vztah pro časové intervaly, kdy $v = \text{konst.}$

$$\Delta_2 = \gamma \Delta'_2 \quad (7.6)$$

Vztah mezi výslednými údaji hodin T a T' dostaneme dosazením (7.5) a (7.6) do (7.2) a (7.3). Provedeme-li ve vzorcích (7.5) a (7.6) limitní přechod pro $a \rightarrow \infty$, $v = \text{konst.}$, tj. zkusíme-li jejich chování v případě, že maximální dosažená rychlost je pevně dána, ale zrychlení a se zvyšuje (zkracuje se doba, po kterou zrychlení působí), zjistíme, že $\Delta_1 \rightarrow 0$, $\Delta'_1 \rightarrow 0$, $\Delta_2 = \gamma \Delta'_2$. Vztah mezi výslednými údaji hodin je v tom případě

$$T = \gamma T' \quad (7.7)$$

Tento výsledek je příčinou uvedeného množství diskusí. Především zdůrazňujeme, že jde o řešení v rámci STR a není pravda, že by tuto úlohu bylo třeba odsunout až do OTR pouze proto, že pozorovatel nesoucí hodiny H' se v některých fázích nepohybuje rovnoměrně (vztahy pro hyperbolický pohyb či záření urychlených nábojů patří právě k důležitým výsledkům STR). Z výsledku také neplatí, že by v okamžiku obrátky pozoroval kosmonaut nesoucí na raketě hodiny H' nějaké zvláštní úkazy, kdyby na dálku kontroloval chod hodin H (např. jestliže by dalekohledem pozoroval jejich obíhající ručičky nebo přijímal sekundové signály rádiem). Dobře si celou situaci vyjasníme pohledem na obr. 12. Pravidelné signály vysílané hodinami H



obr. 12

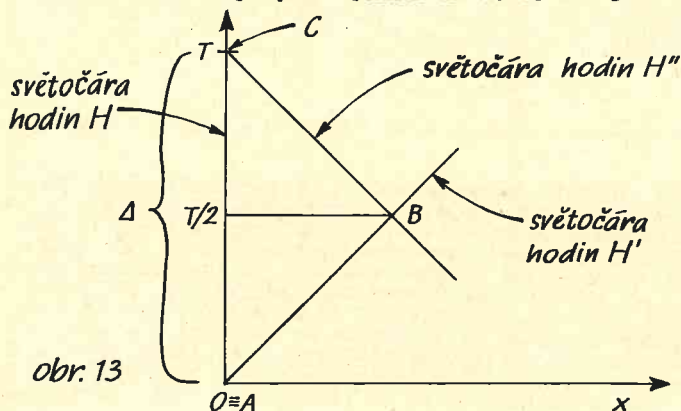
se v tomto diagramu pohybují pod 45° a jsou znázorněny čárkovaně. Plné šikmé čáry spojují některé události současné z hlediska čárkovaného pozorovatele. Jejich rovnice plyne ze SLT, která určuje vztah mezi klidovými systémy S a S' obou hodin v průběhu rovnoměrného pohybu. Osa Ox' je tvořena množinou událostí, pro něž $x' = 0$. V první fázi pohybu, tj. při vzdalování rychlostí $+v$, je podle SLT (5.2) její rovnice $x = vt$, takže v našem diagramu je to přímka se směrnicí $\beta = v/c$. Analogicky osa Ox je tvořena událostmi, pro které je $t' = 0$ a její rovnice je $x = c^2 t / v$ (směrnice $1/\beta$). Přímky $x - c^2 t / v = \text{konst.}$ jsou rovnoběžné s Ox' a představují linie současnosti

systému S' , neboť odpovídají čarám $t' = \text{konst.}$ Vztahy pro druhou fázi pohybu, přibližování, bychom dostali sámenou $v \rightarrow -v$. Vztahy pro období s konstantním zrychlením plynou ze vsorod pro hyperbolický pohyb /25/. Je vidět, že v přijímaných signálech není během obrátky žádná nespojitost - neustále se šíří po přímkách se směrnice 45° a jedinou změnou je posuv frekvence v důsledku Dopplerova jevu. Rychlá změna, která se dotýká pouze pojmu současnosti, se kosmonautovi na jeho obrátce neprojeví pozorovatelným způsobem. Zjistí ji po návratu při porovnání hodin H s H' .

Při výpočtu jsme tedy zjistili, že nesymetričnost výrazu (7.7) vzhledem k údajům hodin H oproti H' závisí na době jejich vzájemného rovnoměrného pohybu (rozdíl $T-T'$ se bude zvyšovat, ponecháme-li fázi zrychlení beze změny a bude-li přitom prodlužovat dobu Δ_2 resp. Δ_1 rovnoměrného pohybu, tj. poletí-li pozorovatel s hodinami H' ke vzdálenějším hvězdám). Z toho důvodu se výsledek ilustruje na situaci, kterou obdržíme, provedeme-li ve výpočtech limitu $a \rightarrow \infty$.

Možnost libovolně zkrátit doby Δ_1 resp. Δ_2 zvětšením zrychlení není nikterak samozřejmá, ale je dána tím, že chod ideálních hodin závisí pouze na jejich rychlosti (viz dilatace času), nikoli na zrychlení. Tato skutečnost byla experimentálně ověřena pomocí atomových hodin do obrovských zrychlení $a > 10^{28} \text{ m/s}^2$. Má-li ovšem s hodinami cestovat na raketě kosmonaut, musí být zrychlení mnohem menší, $a \sim 10 \text{ m/s}^2$.

Zvyšováním zrychlení jsme dospěli k idealizované situaci, která je velmi ilustrativní, a proto ji prozkoumáme podrobněji. Troje hodiny H , H' a H'' (téže konstrukce) se nacházejí v počátečních inerciálních soustav S , S' a S'' , které se pohybují navzájem rovnoměrně přímočaře podél splývajících os x , x' a x'' . Časoprostorový diagram z hlediska soustavy S je na obr. 13. S' se vzhledem k S pohybuje rychlostí $+v$ v kladném směru osy x , S'' rychlostí $-v$, tj. v opačném směru.



obr. 13

LT od systému S k S' resp. od S k S'' má tvar (5.1), kde Λ, γ jsou dříve určené konstanty pro přechod na rychlost +v resp. -v. Hodiny H a H' seřídíme při jejich vzájemném setkání na nulu (událost A), takže LT mezi S a S' má tvar (5.2)

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad t' = \gamma(t - vx/c^2). \quad (7.8)$$

V čase $t = T/2$ se míjejí hodiny H' s H'' (událost B). V systému S má B souřadnice $x = vT/2$, $t = T/2$, v S' $x' = 0$, $t' = \gamma(T - v^2T/c^2)/2 = T/(2\gamma)$. V tomto okamžiku seřídíme údaje hodin H' a H'', takže v S'' má B souřadnice $x'' = 0$, $t'' = t'$. Transformace od S k S'' má tvar

$$x'' = \gamma(x + vt) + a^1, \quad t'' = \gamma(t + vx/c^2) + a^0. \quad (7.9)$$

Konstanty a^0 , a^1 nyní určíme dosazením souřadnic B:

$$0 = \gamma vT + a^1, \quad T/(2\gamma) = \gamma T(1 + \beta^2)/2 + a^0. \quad (7.10)$$

Po dosazení zpět do (7.9) tedy

$$x'' = \gamma(x + v(t - T)), \quad t'' = \gamma(t + vx/c^2 - \beta^2 T). \quad (7.11)$$

Při setkání H s H'' (událost C) ukazují H čas T. C má proto souřadnice

$$x = 0, \quad t = T, \quad x'' = 0, \quad t'' = T/\gamma. \quad (7.12)$$

To je výsledek odpovídající (7.7) v předchozím výpočtu. Hodiny H' jsme nyní nahradili hodinami H'' resp. H'' pro první resp. druhou fázi pohybu (vzdalování resp. přibližování), abychom nezapomněli, že IS S' není identický s S'' a pojmy současnosti v nich nesouhlasí navzájem, ani s pojmem současnosti v S. Právě zanedbání relativnosti současnosti vede ke známému "paradoxu hodin": prohlásí se (pravdivě), že trvání zrychleného pohybu lze libovolně skrátit vzhledem k trvání rovnoměrného přímočarého pohybu a dále se (již nesprávně) ztotožní systémy S' a S''. Poněvadž jde o inerciální systémy, prohlásí se výsledný systém za rovneprávný s S a tím se dospěje k nesouhlasu - není jasné, které hodiny se mají při opětovném setkání opožďovat a které předcházet. Poněvadž jsme nyní postupovali pozorněji, k žádnému paradoxu jsme nedospěli (srov. též text za (5.15)).

Další příčinou častých sporů je otázka, zda právě popsaný problém s údaji ideálních hodin ("paradox hodin") je identický s úlohou, v níž hodiny představuje člověk nebo jiný živý organismus ("paradox dvojčat"). Výsledek, který jsme odvodili, říká, že kosmonaut vybavený atomovými hodinami a pohybující se s raketou po uzavřené dráze zjistí po svém návratu, že jeho hodiny se opoždily oproti identickým hodinám ponechaným v IS v místě startu. Není nikterak snadné rozhodnout, zda lze živé organismy považovat za ideální hodiny. Je odůvodněné předpokládat, že i biologické procesy se řídí vlastním časem soustavy. Jiná otázka je však, zda stáří organismů je objektivním ukazatelem tohoto času (lze si například představit, že kosmonaut předčasně zežehdívá z předsta-

vy, že se vrátí na Zemi mladší než jeho vrstevníci, zatímco pozemšťan omládne radostí, že se jeho výpočty chodu atomových hodin potvrdily). To však je již samostatný komplikovaný problém, který nepatří k tématu tohoto článku.

Na závěr kapitoly ještě poněkud akademická poznámka. Při skutečné cestě ke hvězdám by zřejmě bylo výhodné co možná nejvíce prodloužit dobu urychlování a brzdění a naproti tomu vypustit část letu s vypnutými motory, aby se během letu dosáhlo co nejvyšší rychlosti. Položíme-li v (7.2) - (7.6)

$$\Delta_2 = \Delta_2' = 0, \text{ dostaneme}$$

$$T = \frac{1}{w} \operatorname{sh}(wT'), \quad \text{kde } w \equiv \frac{a}{4c}. \quad (7.13)$$

Maximální vzdálenost, do které raketa doletí, je podle vztahu hyperbolického pohybu (5.29)

$$C = 2c^2 \frac{\sqrt{1 + (wT)^2} - 1}{a}. \quad (7.14)$$

Odtud

$$T = 2\sqrt{\frac{C^2}{c^2} + \frac{4C}{a}}. \quad (7.15)$$

Dosažením (7.15) do (7.13) a vyjádřením T' dostaneme

$$T' = \frac{1}{w} \operatorname{argsh}(wT) = \frac{1}{w} \operatorname{argsh}\left(2w\sqrt{\frac{C^2}{c^2} + \frac{4C}{a}}\right). \quad (7.16)$$

Z vlastností hyperbolometrických funkcí plyne

$$T' < T. \quad (7.17)$$

při libovolných hodnotách zrychlení a .

8. Princip ekvivalence (paradox hodin a obecná teorie relativity)

Když se fyzik zasní a svalí se ze skály, neobává se o svůj binokl, neboť ví, že padá hned vedle něj.

H. Bondi

V Newtonově teorii vystupuje dodatečný postulát o vzájemné rovnosti setrvačné hmotnosti M_S a gravitační hmotnosti M_G všech těles. Poprvé se jím zabýval Galilei, který jej experimentálně ověřoval pozorováním volného pádu dřevěných a olověných závaží z věže v Pise. Skutečnost, že gravitační hmotnost M_G (určená např. vážením na vahách) a setrvačná hmotnost (vystupující ve 2. Newtonově zákonu) jsou si rovny

$$M_S = M_G. \quad (8.1)$$

platí nezávisle na materiálu, ze kterého jsou tělesa vyrobena. Tento fakt je důmyslnými pokusy s rostoucí přesností ověřován dodnes, neboť stojí v základu Einsteinovy teorie gravitace. V jeho důsledku totiž není možné odlišit klidový systém tělesa, na něž působí setrvačná síla vyvolaná jeho zrychleným pohybem, od systému tělesa, které je vystaveno působení gravitace. Oba systémy jsou si ekvivalentní. Povšimněme si lokálního charakteru tohoto tvrzení. Gravitáční pole může být nehomogenní (např. pole Země), takže měřeními na velkých vzdálenostech jej lze odlišit od pole setrvačných sil. Lokálně toto odlišení možné není. Rovnost (8.1) ovšem nezaručuje nerozlišitelnost pomocí mechanických (např. elektromagnetických) jevů. Naprostá nerozlišitelnost je obsahem principu ekvivalence (PE), který se experimentálně plně potvrzuje. Můžeme tedy tvrdit že v každém bodě časoprostoru lze přejít do lokálně inerciálního systému, ve kterém mizí gravitační síla (systém "padajícího výtahu") a v němž platí zákony STR.

Uvedeme (poněkud nepřesnou) ilustraci PE na gravitačním rudém posuvu (změna frekvence záření v důsledku gravitačního působení): V homogenním gravitačním poli se zrychlením a se energie E fotonu mění s výškou l podle vztahu $\Delta E = ma\Delta l$, kde $m = E/c^2$, $E = h\nu$, a $\Delta l = \Delta\varphi$ je změna gravitačního potenciálu. Odtud

$$\Delta\nu = \nu a\Delta l/c^2, \text{ tj. } \Delta\nu/\nu = \Delta\varphi/c^2. \quad (8.2)$$

Tento jev způsobuje červenání světla vycházejícího z povrchu velmi hmotných hvězd a kolabujících objektů (kde spolupůsobí Dopplerův jev). Naposledy uvedený vztah můžeme odvodit také užitím PE. Foton stoupající v homogenním gravitačním poli odpovídá fotonu, který se pohybuje v "padajícím výtahu". Dráhu Δl urazí foton za čas $\Delta t = \Delta l/c$. Za tuto dobu se ovšem výtah urychlí o rychlost $\Delta v = a\Delta t$, což způsobí dopplerovský posuv

$$\Delta\nu/\nu \cong \Delta v/c = a\Delta l/c^2 = \Delta\varphi/c^2.$$

Pomocí PE můžeme nově formulovat paradox hodin. Nastíjíme výpočet podle /24, §79/, který bývá označován jako řešení paradoxu hodin v rámci OTR. Je však třeba si uvědomit, že se při něm používá pouze PE. Samotné Einsteinovy rovnice gravitačního pole potřeba nejsou. Význam PE spočívá v tom, že umožňuje jevy v přítomnosti gravitačního pole vyjádřit pomocí zrychlených referenčních systémů v jeho nepřítomnosti a tím převést problém do oblasti STR. Opačný postup spíše zastírá přímou použitelnost STR a přitom používá její výsledky.

Analogicky dřívějšímu označení máme hodiny H volně padající spolu se souřadným systémem S . Působení homogenního gravitačního pole nemůže v důsledku PE pozorovatel v S objevit, neboť žádnou sílu nepocituje ("cestující ve výtahu po přetržení lana"). Nechtě opět urychlující síla působí po krátké intervaly, mezi nimiž je naše fiktivní gravitační pole "vypnuto" a vzájemný pohyb je rovnoměrný přímočarý. V počátku pohybu jsou oboje hodiny na téměř stejném gravitačním potenciálu a rozdíl v jejich chodu při počátečním urychlování a konečném

brzdění je sanedbatelný. Pedstatné je zavedení gravitačního pole ve střední části pehybu, kdy jsou hodiny daleko od sebe a rozdíl jejich potenciálů $\Delta\varphi = a\Delta l$ je velký. Rozdíl v číou hodin pak plyne se vztahu (8.2). Konečně v období rovnoměrného pehybu působí efekt obvyklé dilatace času. Výpočet, který je ovšem s formální matematické stránky poměrně zdlouhavý, vede opět k výsledku (7.7). Čtenář jej nalezne např. ve /27/. Snazší přibližný výpočet se uvádí ve /24/.

Literatura

Následující seznam není nikterak systematický či ucelený. Přesto může posloužit jako zdroj řady informací a odkazů na další práce.

1. Horák Z., Krupka F.: Fyzika, 1976 (SNTL, Alfa, Bratislava)
2. Kvasnica J.: Fyzikální pole, 1964 v edici Populární přednášky o fyzice (SNTL, Praha)
3. Ginsburg V.L.: Astrofyzika, 1983 (Alfa, Bratislava)
4. Československý časopis pro fyziku, 24, č. 5, 1974
5. Landau L.D., Rumer J.B.: Co je to teorie relativity, 1971, 1972 (Albatros, Praha)
6. Závěrka F.: Einsteinův princip relativity a teorie gravitační, 1925 (Praha)
7. Pearce L.W. (ed.): Relativity Theory, 1968 (John Wiley and Sons)
8. Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, 1978 (Academia, Praha)
9. Marder L.: Time and Space Traveller, 1971 (George Allen and Unwin LTD, London), rus.překl.:Paradoks časov, 1974 (Mir, Moskva)
10. Hladík A.: Teoretická mechanika, 1964, skripta MFF UK (SPN Praha)
11. Kohout V.: Diferenciální geometrie, 1971 (SNTL, Praha)
12. Kuchař K.: Základy obecné teorie relativity, 1968 (Academia, Praha)
13. Trkal V.: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa, 1956 (Nakladatelství ČSAV, Praha)
14. Leech J.W.: Klasická mechanika, 1970 (SNTL, Praha)
15. Sommerfeld A.: Mechanics, 1952 (Academic Press Inc. N.Y.)
16. Trautman A.: v Perspectives in Geometry and Relativity, 1966 (Indiana Univ. Press)
17. Zeldovič Ia.B., Novikov I.D.: Strojenije i evolucija v selennoj, 1975 (Nauka, Moskva)
18. Peebles P.J.E.: The Large Scale Structure of the Universe, 1980 (Princeton Univ. Press), ruský překl.: Struktura selennoj v bošich masštabach, 1983 (Mir, Moskva)
19. Born M.: Ejnštejnovskaja teorija otnositeľnosti, 1964 (Mir, Moskva)

20. Votruba V.: Základy speciální teorie relativity, 1977 (Academia, Praha)
21. Geake W.J.: v Lecture Notes on Introductory Theoretical Astrophysics (ed. A.D.Pacholczyk), 1976 (Packert Corp., Tucson)
22. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.: Gravitation, 1973 (Freeman and Co.), ruský překlad: Gravitacija, 1977 (Mir, Moskva)
23. Einstein A.: The Meaning of Relativity, 1950 (Methuen and Co.LTD., London)
24. Tolman R.C.: Relativity, Thermodynamics and Cosmology, 1934 (Clarendon Press, Oxford)
25. Builder G.: Austral.J.Phys. 10, 246 (1957)
26. Fek V.A.: Teorija prostranstva, vremeni i t'jagoteni'ja, 1955 (Moskva)
27. Moller C.: The Theory of Relativity, 1972 (Clarendon Press, Oxford), ruský překlad: Teorija otnositelnosti, 1975 (Atomizdat, Moskva)

Jindřich Šilhán

Konjunkce Jupitera se Saturnem

Tento článek by byl mnohem užitečnější před 5 lety. Tehdy nás velká konjunkce Jupitera se Saturnem čekala, kdežto dnes je za námi a do další zbývá více než čtvrt tisíciletí.

Na počátku byl jeden z pořadů Čs. rozhlasu. V předvánočním vysílání Meteoru r. 1982 bylo pásmo o hvězdě betlémské. Pisatel si všiml několika chybných údajů. I oprášíl několik let starou sločku týkající se vánočních zásraků a do Rozhlasu napsal. Dostalo se mu vysvětlení, že údaje byly několikrát přebírány a že původně pocházejí od astronomů Griffithova planetaria v Los Angeles, kteří je pořídili ve spolupráci s výpočetním střediskem NASA. Na potvrzení obsahoval dopis několik dalších údajů, které mi při poslechu programu ušly a z nichž nejméně jeden byl také na první pohled chybný. Začal jsem jejich kontrolou. Zvědavost a výpočetní prostředky donedávna nedostupné však způsobily, že nakonec vznikla daleko více čísel, než by byla potřeba na pokračování v korespondenci. Snad je někteří členové sledující zajímavými, i když nemají v plánu žít 300 let.

Hvězda betlémská je jev na pomezí nejméně tří oblastí, které jsou navíc v resperu (náboženství, astronomie, historie), proto byla (a bude) diskutována z nejrůznějších hledisek. Podle bible to byl nebeský úkaz nepřiliš přesně popsany, který se udál v roce Kristova narození. Kristus není historicky doložen. Jeho současníci nám o něm nezanechali ani jedinou písemnou správu, ačkoliv v Palestině a všude kolem se tehdy hodně psalo.