

**ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS**

**DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA**



# **MEZNÍ PLASTICKÉ STAVY**

**CYRIL HÖSCHL**

**ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV**

**PRAHA 1983**

Autor podrobně vysvětluje základní poznatky teorie plasticity. Uvádí různé typy modelů pro znázornění reologických vlastností materiálů a odvozuje matematické modely pro materiály s idealizovanými deformačními vlastnostmi. Ukazuje jejich aplikaci v inženýrských úlohách.

Postupným zobecňováním vlastností reologických modelů se dospívá k axiomům teorie plasticity. Odvozují se věty z teorie mezních plastic-  
kých stavů, které umožňují určit dolní a horní hranici pro statické mezní zatížení kovových těles a konstrukcí. Zvláštní pozornost se věnuje přibližným metodám a výpočetním postupům, např. aplikaci nespojitých polí pro výpočet mezního zatížení, a numerickým metodám (metodě konečných prvků).

Sborník je určen konstruktérům a technologům, zvláště statickým, navrhovatelům staticky zatížených konstrukcí a tlakových nádob a těm, kteří pracují v oboru tváření kovů. Výběr látky tvoří ucelený základ k aplikacím i k dalšímu studiu. Předpokládají se znalosti matematiky, mechaniky a teorie pružnosti v rozsahu základního vysokoškolského studia.

## O b s a h

Předmluva .....	5
1. PRUŽNOST, PLASTICITA, VISKOZITA .....	7
2. KINEMATICKÝ MODEL ELASTICKOPLASTICKÉHO MATERIÁLU .....	10
3. PLASTICKÝ POTENCIÁL .....	19
4. ODEZVA A PŘIZPŮSOBENÍ ELASTICKOPLASTICKÉ KONSTRUKCE .....	24
5. TEORIE PLASTICKÝCH MEZNÍCH STAVŮ .....	33
6. RÁMOVÉ KONSTRUKCE .....	40
7. MEZNÍ ZATÍŽENÍ DESEK .....	49
8. ROTAČNĚ SOUMĚRNÁ VÁLCOVÁ SKOŘEPINA .....	57
9. VTILAČOVÁNÍ KOVADLA .....	63
10. SROVNÁNÍ S EXPERIMENTY .....	69
11. DRUCKERŮV POSTULÁT .....	72
12. PLASTICITA V METODĚ KONEČNÝCH PRVKŮ .....	79
13. PRANDTLOVY - REUSSOVY ROVNICE .....	85
14. DEFORMAČNÍ TEORIE PLASTICITY .....	89
Závěr .....	93
Literatura .....	94

"U mnoha inženýrů v praxi se naneštěstí projevuje sklon k tomu, že považují matematické teorie různých odvětví mechaniky pevných těles za příliš výlučné a komplikované, než aby jim mohly přinést užitek. A naopak mnoho teoretiků se domnívá, že relativně hrubý, často intuitivní přístup konstruktérů vede k úspěchu pouhou náhodou a že by měl být úplně nahrazen formálním matematickým postupem."

D. C. Drucker a W. F. Chen  
(Cambridge, 1968)

### Předmluva

Teorie lineární pružnosti, která je matematicky dokonale zpracována, vedla k pozoruhodným a plodným aplikacím ve stavitelství i ve stavbě strojů a je dodnes nejdůležitějším nástrojem při účelném dimenzování konstrukcí. Vychází z idealizované lineární závislosti tenzoru napjatosti na tenzoru přetvoření (a naopak). Avšak rostoucí požadavky na využití materiálů a na váhově úsporné konstrukce si vynucují další zpřesnění teorie, od které budeme požadovat, aby pokud možno věrně vystihla stavy konstrukce za mezí pružnosti. Zde přichází ke slovu nelineární pružnost, a zejména teorie plasticity, která postihuje nejen nelinearitu deformační charakteristiky při monotónním zatěžování, ale i hysterezi při opětném odlehčování a při obecně proměnném zatížení. Víme-li, jakým způsobem je konstrukce zatěžována, můžeme užitím teorie plasticity postihnout skutečnou odezvu přetížené konstrukce, sledovat její přízpusobením zatěžovacímu režimu, a konečně popsat podmínky, za nichž se konstrukce zhroutí, tj. popsat její mezní stav a tomu odpovídající mezní zatížení. Je samozřejmé, že tyto výpočty jsou věrohodné jenom v mezích platnosti přijatého deformačního modelu, kterým nahrazujeme deformační charakteristiku skutečného materiálu. Přes některá zjednodušení, která si vynucuje požadavek praktické řešitelnosti úlohy, znamená teorie plasticity a od ní odvozená teorie mezních plastických stavů významné zpřesnění předpovědí o chování konstrukce za mimořádných zatěžovacích režimů.

Jinou oblastí, kde se uplatňuje teorie plasticity, je tváření kovů. Přetvárné odpory se velmi často vyjadřují empirickými vzorci odvozenými ze zkoušek na modelech nebo na skutečných strojích. V některých případech, obzvláště jde-li o rovinné přetvoření, poskytuje teorie plasticity pro tyto vzorce racionální základ.

Teorii plasticity budeme vykládat od počátku. Budeme se přitom velmi často opírat o inženýrský názor a o jednoduché modely spíše než o teoretické premisy a dedukce. To však neznamená, že se vyhneme exaktním formulacím a matematickým metodám. Pokusíme se je však přiblížit konstruktérům a technologům z praxe tak, aby neměli dojem, že jde o komplikovanou a výlučnou teorii známou jen zasvěcencům, která jim nemůže přinést užitek.

Květen 1983

Cyril Höschl

## 1. PRUŽNOST, PLASTICITA, VISKOZITA

Představme si těleso, které je vzhledem k nějaké inerciální soustavě souřadnic v klidu. Nepůsobí na ně žádné síly a teplota v něm je rovnoměrně rozdělena. Nyní těleso rozdělíme libovolným počtem ideálních řezů. Za ideální považujeme takové řezy, které nezmění vlastnosti materiálu a které jsou nekonečně tenké. Jestliže se žádná z uvolněných částí nepřetvoří, je možné z nich sestavit původní těleso bez mezer a bez přesahů. O takovém tělese budeme říkat, že je v přirozeném stavu. Jestliže částí změní svůj tvar, popř. velikost, svědčí to o existenci vlastního pnutí v tělese, tj. o napětí, které působí v tělese nezatíženém žádnými vnějšími silami. Vlastní pnutí porušuje přirozený stav tělesa. Tento stav je pouhou idealizací, neboť v každém pevném tělese existuje určitá vlastní napjatost. Většinou však není podstatná a lze ji zanedbat. Také ideální řez je neuskutečnitelný. Větší význam má vlastní pnutí v soustavě těles, tj. v konstrukci jako celku. To ještě později podrobně vysvětlíme.

Zatížíme-li těleso při konstantní teplotě silami, jež mohou působit buď jako objemové, nebo jako povrchové, těleso se deformuje. Nezmění-li se tím funkční vlastnosti tělesa, je deformace nepodstatná a lze ji zanedbat. Mechanika tuhých těles vychází z této idealizace, považuje těleso za neporušitelné a nedeformovatelné.

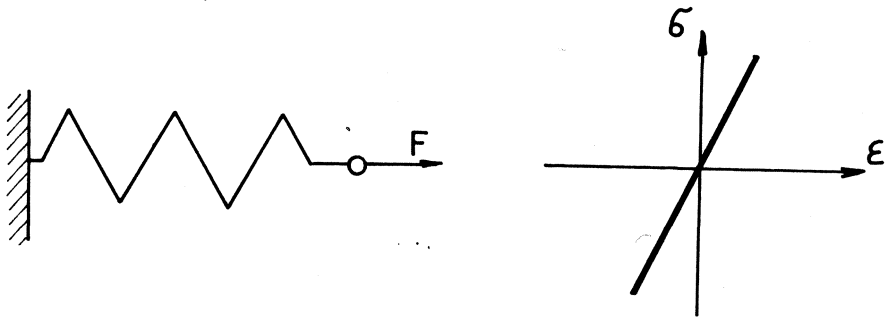
Je-li zatížení malé, jsou deformace vratné. Měníme-li zatížení tak pomalu, abychom mohli zanedbat setrvačné síly, jsou deformace zhruba úměrné působícímu zatížení a spolu s ním po odlehčení vymizí. Takové těleso je pružné (elastické). Platí-li úměrnost mezi deformací a zatížením dostatečně přesně, jde o lineární pružnost. V opačném případě jde o nelineární pružnost. S deformací jsou spojeny i změny termodynamického stavu tělesa. Mají-li být deformace dokonale vratné, nesmí dojít k disipaci energie, která by se např. projevovala postupným zmenšováním amplitud vlastního volného kmitání. Jsou-li deformace malé, lze zpravidla zanedbat změny teploty jimi vyvolané.

Překročí-li zatížení určitou hranici, vznikají nevratné, trvalé změny tvaru či velikosti. Na rozdíl od pružných deformací nezávisí trvalé změny jen na velikosti zatěžujících sil, ale obecně i na průběhu předchozího zatěžování, tj. na historii. Vyvoláme-li v tělese mechanickým působením konstantní deformaci, vznikne v něm určitá napjatost. Nezávisí-li tato napjatost na čase, pak se trvalá deformace - pokud vznikne - nazývá plastická deformace. Zmenšuje-li se napjatost při nezměněné deformaci s časem bez omezení k nule (takže se po dlouhé době obnovuje přirozený stav), jde o vazkou (viskózní) deformaci. Při obecném průběhu zatěžování zůstává závislost plastické deformace na historii zatěžování stejná, změníme-li libovolně měřítko času (čas je zde pouze "němý" parametr).

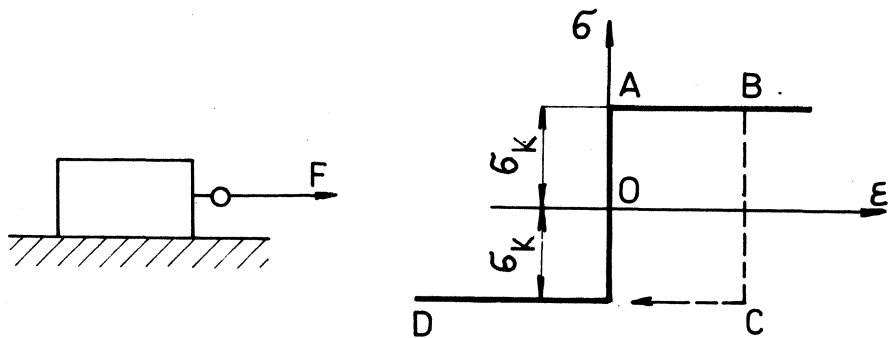
Vazká deformace však závisí na čase explicitně.

Trvalé deformace nemusí zasahovat celé těleso, ale jen jeho část, a výsledná deformace může být složena z různých deformací dílčích. Takové těleso pak označujeme složenými názvy, např. těleso tuhoplastické, pružnoplastické, vazkopružné (viskoelastické), viskoplastické atp.

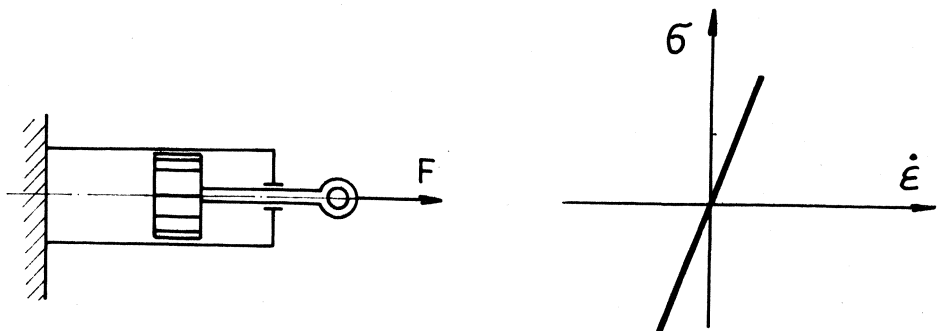
Reologickým modelem pružné deformace je deformace ideální pružiny (obr. 1). Plastické deformaci odpovídá posuv kinematické dvojice se smykovým třením (obr. 2). Vazkou deformaci si lze znázornit posuvem pístu v kapalinovém tlumiči (obr. 3).



OBR. 1



OBR. 2



OBR. 3

Na rozdíl od lineárně pružného materiálu, u kterého podle obr. 1 platí při jednoosé napjatosti Hookeův zákon  $\sigma = E\varepsilon$  jako vzájemně jednoznačná závislost mezi napětím a poměrným prodloužením, vykazuje plastický materiál podle obr. 2 nejednoznačnost a hysterezi. Téměř napětí  $\sigma = \sigma_k$ , resp.  $\sigma = -\sigma_k$  může příslušet libovolné poměrné prodloužení  $\varepsilon$ . Začneme-li model zatěžovat, mění se napětí a přetvoření tak, jak odpovídá čáře OAB. Při odlehčení v bodě B zůstane přetvoření tak dlouho konstantní, až napětí znovu dosáhne meze kluzu, tentokrát v tlaku. Odlehčení se tedy děje po čáře BCD. Při změně smyslu napětí se můžeme v kterémkoli bodě vrátit na horní větev charakteristiky. Při periodickém prodlužování a zkracování se v diagramu vytvoří hysterezní smyčka, jejíž obsah je mírou disipované energie. Charakteristika zakreslená na obr. 2 odpovídá ideálně plastic- kému materiálu, u něhož nastávají pouze plastické deformace, a to za konstantní meze kluzu (tj. při splnění podmínky  $|\sigma| = \sigma_k$ ). Jak jsme ukázali, závislost  $\varepsilon$  na  $\sigma$  není ani lineární, ani jednoznačná. Reologický model na obr. 2 umožňuje, aby poměrné prodloužení nabývalo v čase  $t$  libovolné hodnoty  $\varepsilon(t)$ , která však může být výsledkem různých zatěžovacích procesů  $\varepsilon(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ . Také napětí může nabývat libovolné hodnoty, avšak jen v intervalu  $-\sigma_k \leq \sigma \leq \sigma_k$ . Vždy je

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_k & \text{pro } \dot{\varepsilon} > 0 \\ -\sigma_k \leq \sigma \leq \sigma_k & & \text{pro } \dot{\varepsilon} = 0 \\ \sigma &= -\sigma_k & \text{pro } \dot{\varepsilon} < 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Přetížení  $|\sigma| > \sigma_k$  není možné (vedlo by k dynamické odezvě, kterou se nyní nechceme zabývat).

Lineární charakteristika vazkého materiálu na obr. 3 se liší od charakteristiky elastického materiálu tím, že na osu úseček vynášíme deformační rychlost  $\dot{\varepsilon}$ . Závislost  $\sigma - \varepsilon$  je tedy popsána diferenciální, nikoli algebraickou rovnicí. Při konstantním napětí  $\sigma$  dostaneme lineární časový průběh poměrného prodloužení

$$\varepsilon = a + bt \quad (1.2)$$

Konstanta  $b$  je přímo úměrná napětí  $\sigma$ . Není-li napětí konstantní, je odezva

$$\varepsilon(t) = k \int_0^t \sigma(\tau) d\tau + \varepsilon(0) \quad (1.3)$$

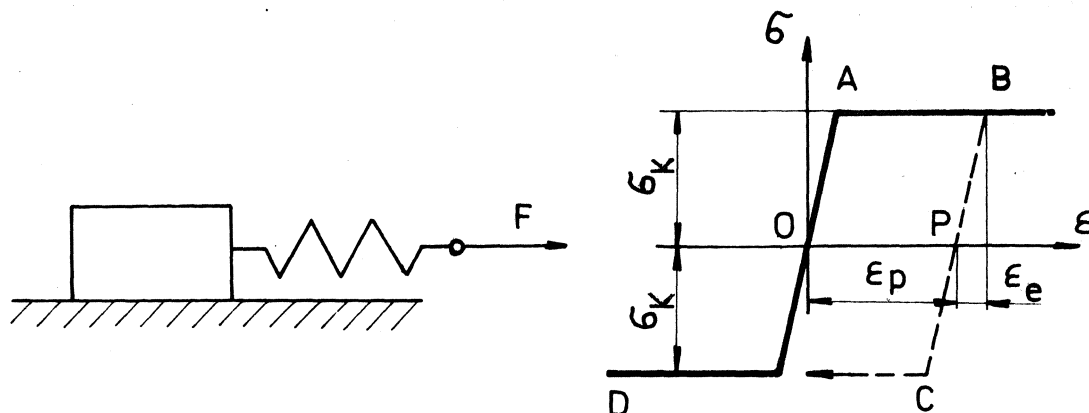
v okamžiku  $t$  funkcíálem závislým na historii  $\sigma(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , k němuž je přičtena počáteční hodnota  $\varepsilon(0)$ . Podle obr. 3 je totiž

$$\dot{\varepsilon} = k\sigma \quad (1.4)$$

kde  $k$  = konst (pro lineárně vazký materiál). Integrací (1.4) dostaneme (1.3).



Reologický model pružnoplastického (elastickoplastického) materiálu dostaneme, když spojíme kinematickou dvojici z obr. 2 s pružinou podle obr. 1. Výsledek je znázorněn na obr. 4.



OBR. 4

Zde již existuje kromě plastické deformace  $\epsilon_p$  ještě elastická deformace  $\epsilon_e$ . Jejich součet dává výslednou deformaci  $\epsilon$ . Je tedy

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (1.5)$$

Na obr. 4 jsou tyto hodnoty zakresleny pro bod B. Po odlehčení vymizí elastická deformace, kdežto plastická deformace zůstane (bod P).

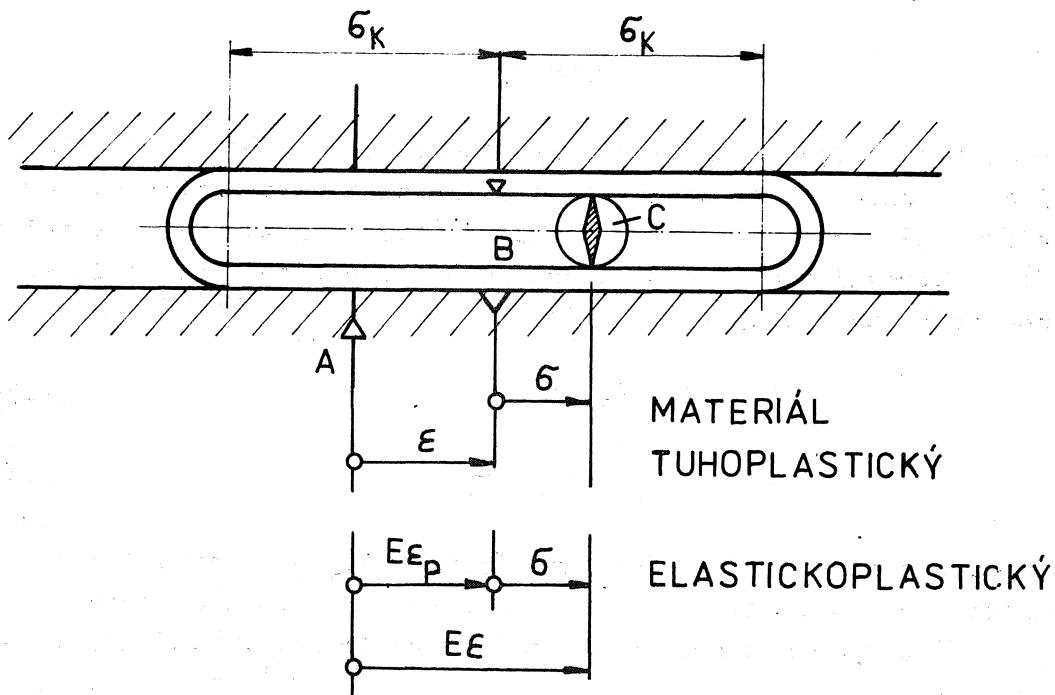
Zásadní rozdíl mezi viskózním a plastickým materiálem vysvitne ze srovnání vztahů (1.1) a (1.4). U ideálně plastického materiálu rozhoduje o velikosti napětí toliko znaménko deformační rychlosti  $\dot{\epsilon}$ ; na její velikosti přitom nezáleží. U viskózního materiálu je napětí  $\sigma$  funkcí  $\dot{\epsilon}$ .

## 2. KINEMATICKÝ MODEL ELASTICKOPLASTICKÉHO MATERIÁLU

Reologické modely znázorněné na obr. 1 až 4 lze považovat za dynamické modely v tom smyslu, že umožňují popsat závislost síly na posuvu (napětí na poměrné deformaci). Dávají názor na odezvu materiálu při jednoosé napjatosti a je nesnadné je zobecnit na případ složené napjatosti a

deformace. K tomu jsou výhodnější kinematické modely, které nyní uvedeme.

Obr. 5 znázorňuje kulisu B, v které se může volně pohybovat čep C. Celá kulisa i s čepem se může posouvat v pravítku A. Vzdálenost čepu C od ukazatele uprostřed kulisy B je mírou napětí. Krajiní poloze čepu odpovídá mezní hodnota napětí  $\sigma = \pm \sigma_k$ . Vzdálenost ukazatele na kulise B od ukazatele na pravítku A je mírou plastické deformace. Jde-li o tuhoplastický materiál, je tato vzdálenost jednoduše kótována v hodnotách poměrného prodloužení. Jde-li o materiál pružnoplastický, je tato vzdálenost kótována v hodnotách  $E \epsilon_p$ . Protože zároveň  $\sigma = E \epsilon_e$  a platí (1.5), je  $E$  -násobek celkové deformace dán vzdáleností ukazatelů AC.



OBR. 5

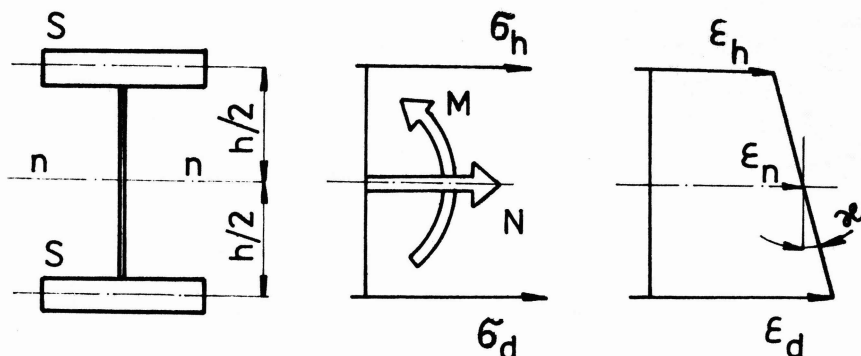
Na rozdíl od dynamického modelu na obr. 4 nedává kinematický model přímou představu o závislosti mezi napětím a přetvořením. Vystihuje však velmi názorně souvislost mezi historií  $\sigma(t)$  a  $\epsilon(t)$ . Ukazuje, že do okamžitého stavu daného momentální polohou kulisy a čepu by bylo možné se dostat různými způsoby a že dokud není funkce

$$F(\sigma) = \sigma^2 - \sigma_k^2 \quad (2.1)$$

rovna nule, nemůže plastická deformace nastat, kulisa se neposune. Vzhledem k (1.1) musí být

$$F \leq 0 \quad (2.2)$$

Model nyní zobecníme pro případ kombinovaného tahu a ohybu idealizovaného I-profilu (obr. 6). Budeme předpokládat, že lze zanedbat vnitř-



OBR. 6

ní síly přenášené stojnou, takže do hry vstoupí jen napětí v přírubách. Příruby jsou natolik tenké, že lze v nich zanedbat nerovnoměrnost napětí. Každá z přírub má plochu  $S$ . V horní přírubě bude napětí  $\sigma_h$ , v dolní přírubě  $\sigma_d$ . Střední vzdálenost přírub je  $h$ . Pro přenášenou sílu  $N$  a ohybový moment  $M$  bude tedy platit, že

$$N = S (\sigma_d + \sigma_h) \quad (2.3)$$

$$M = \frac{1}{2} S h (\sigma_d - \sigma_h) \quad (2.4)$$

Poměrná prodloužení budou v průřezu rozdělena v lineární závislosti na vzdálenosti od neutrální osy  $n-n$  (obr. 6).<sup>\*</sup> Jsou tedy určena dvěma konstantami, a to poměrným prodloužením  $\epsilon_n$  v neutrální rovině a křivostí nosníku  $\varkappa$ . Bude

$$\epsilon_n = \frac{1}{2} (\epsilon_d + \epsilon_h) \quad (2.5)$$

$$\varkappa = \frac{1}{h} (\epsilon_d - \epsilon_h) \quad (2.6)$$

O tom, že veličina  $\varkappa$  má význam křivosti nosníku, se přesvědčíme jednoduchou úvahou. Dva řezy kolmé ke střednici nosníku, které byly před deformací vzdáleny  $ds$ , budou na střednici vytínat po přetvoření vzdálenost  $(1 + \epsilon_n) ds$ . Budou se protínat ve středu křivosti, neboť ten je průsečíkem dvou souměrných (hlavních) normál, a budou spolu svírat úhel  $d\varphi$ . Proto  $(1 + \epsilon_n) ds = \varrho d\varphi$ , kde  $\varrho = 1/\varkappa$  je poloměr křivosti. V dolní přírubě bude

$$(1 + \epsilon_d) ds = (\varrho + \frac{h}{2}) d\varphi = (\frac{1}{\varkappa} + \frac{h}{2}) \varkappa (1 + \epsilon_n) ds$$

<sup>\*</sup>/ Jde o neutrální osu průřezu při čistém ohybu.

Srovnáním levé a pravé strany dostaneme

$$\varepsilon_d = \varepsilon_n + \frac{h}{2} \varkappa + \text{malé veličiny druhého řádu.}$$

Ponecháme-li v rovnici jen malé veličiny prvního řádu, pak s použitím (2.5) vyjde (2.6).

Rovnice (2.3) až (2.6) umožňují, abychom napjatost v nosníku určovali buď pomocí napětí  $\sigma_d$ ,  $\sigma_n$ , nebo pomocí zobecněných napětí  $N$ ,  $M$ . K nim přísluší buď poměrné deformace  $\varepsilon_d$ ,  $\varepsilon_n$ , nebo zobecněné poměrné deformace  $\varepsilon_n$ ,  $\varkappa$ . Oprávněnost názvů "zobecněná napětí" a "zobecněné poměrné deformace" je zřejmá ze srovnání výrazů pro virtuální práci  $\delta A$ , kterou při virtuálním přetvoření vykonají vnitřní síly v nosníku

$$\int (\sigma_n \delta \varepsilon_n + \sigma_d \delta \varepsilon_d) S ds = \delta A = \int (M \delta \varkappa + N \delta \varepsilon_n) ds \quad (2.7)$$

Levá i pravá strana se dají upravit na tvar

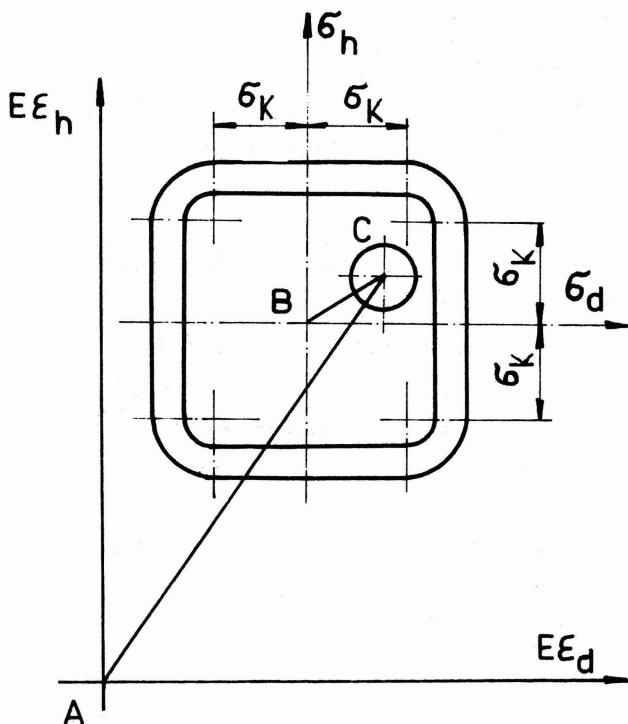
$$\delta A = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (2.8)$$

V prvním případě  $\{\sigma\} = [\sigma_n \ \sigma_d]^T$ ,  $\{\delta \varepsilon\} = [\delta \varepsilon_n \ \delta \varepsilon_d]^T$ ,  $dV = S ds$ .

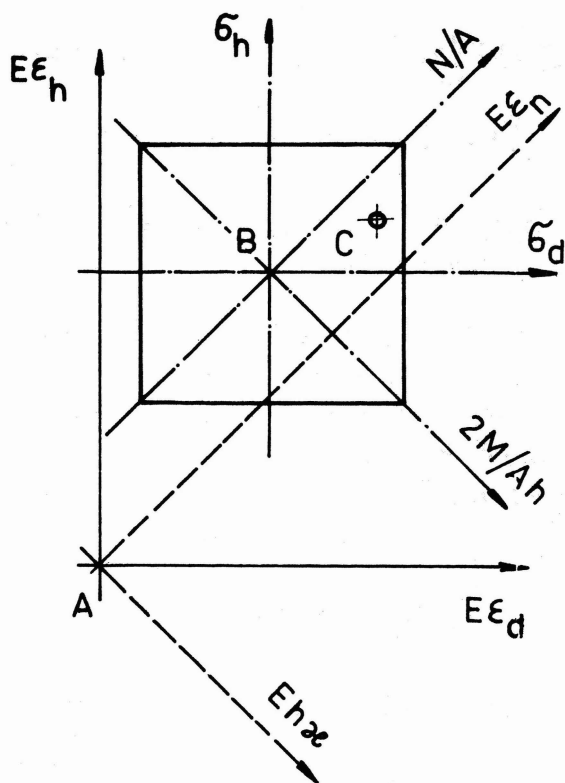
V druhém případě  $\{\sigma\} = [M \ N]^T$ ,  $\{\delta \varepsilon\} = [\delta \varkappa \ \delta \varepsilon_n]^T$ ,  $dV = ds$ .

Chceme-li pro nosník podle obr. 6 vytvořit kinematický model obdobný k tomu, který je na obr. 5, musíme model rozšířit o jednu dimenzi, neboť plastická deformace může nyní nastat nezávisle v každé z obou přírub. Dostaneme tak model znázorněný na obr. 7. Čep C se může uvnitř rámu pohybovat ve směrech souřadnicových os  $s$  vůlí  $\varepsilon_k$ . Když narazí na rám, může se ve stejném smyslu dál pohybovat už jen společně s rámem. Pohyb rámu znamená plastickou deformaci. Pohybuje-li se rám vpravo, vzniká plastická deformace jen v dolní přírubě. Pohybuje-li se vzhůru, vzniká deformace jen v horní přírubě. Pohybuje-li se šikmo, což nastane jen tehdy, je-li čep C v některém rohu, vznikají plastické deformace v obou přírubách zároveň. Vektor  $\vec{BC}$  je ukazatelem napětí v obou přírubách. Vektor  $\vec{AC}$  ukazuje  $E$ -násobek výsledné poměrné deformace. Tyto vektory budeme nazývat krátce vektor napětí, resp. vektor deformace. Konstrukci modelu budeme zakreslovat už jen jednoduchými čarami, takže místo obr. 7 dostaneme obr. 8.

Do obr. 8 zakreslíme také osy pro zobecněné veličiny podle rovnic (2.3) až (2.6). Je zřejmé, že pro ně bude rám v poloze otočené o  $45^\circ$ . S použitím elastických poměrných deformací na mezi kluzu  $\varepsilon_k$ ,  $\varkappa_k$  a



OBR. 7



OBR. 8

s použitím mezních hodnot  $N_m$ ,  $M_m$  podle rovnic

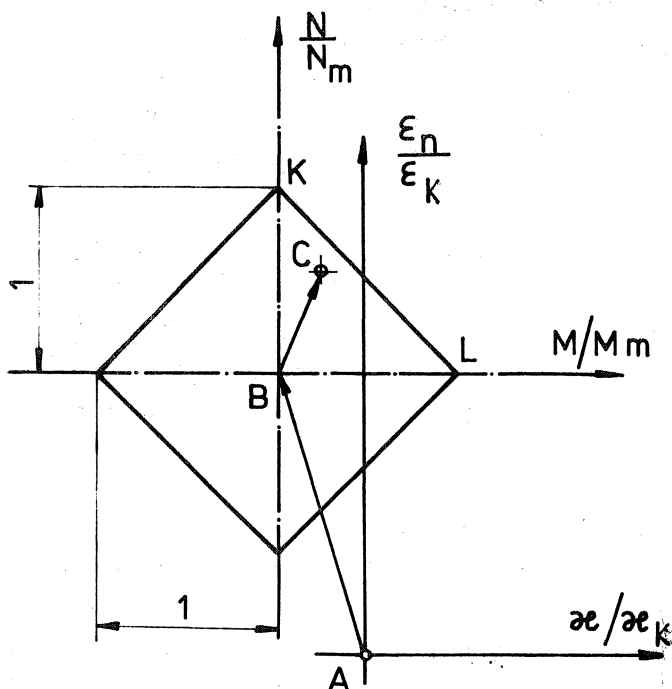
$$\epsilon_k = \sigma_k / E \quad \alpha_k = 2\epsilon_k / h \quad (2.9)$$

$$N_m = 2S\sigma_k \quad M_m = Sh\sigma_k \quad (2.10)$$

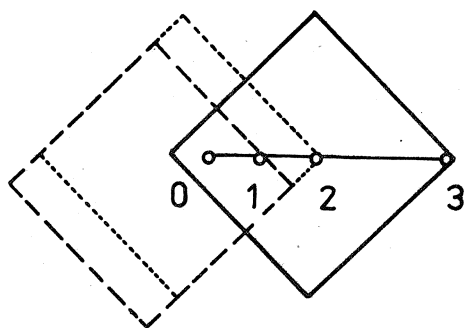
lze model zakreslit v bezrozměrových proměnných (obr. 9). Rám má nyní rozměr čtverce  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ . Dotkne-li se čep C některé strany rámu, může jej odtlačovat pouze kolmo k této straně. Jen je-li čep v rohu rámu, může rám odtlačovat v některém směru uvnitř úhlu sevřeného vnějšími normálami, které vedeme ke každé z obou stran, jež se v rohu protínají.

Vektor napětí  $\vec{BC}$  je v bezrozměrových proměnných zároveň vektorem elastické deformace. Vektor  $\vec{AB}$  je vektorem plastické deformace. Celková deformace je dána vektorovým součtem  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ . Sledujme, co se bude dít s modelem na obr. 9, když při konstantní síle  $N$  budeme zvětšovat ohybový moment  $M$ . Bod C se bude posouvat vpravo, až narazí na stranu čtverce KL, která má rovnici

$$\frac{N}{N_m} + \frac{M}{M_m} = 1 \quad (2.11)$$



OBR. 9



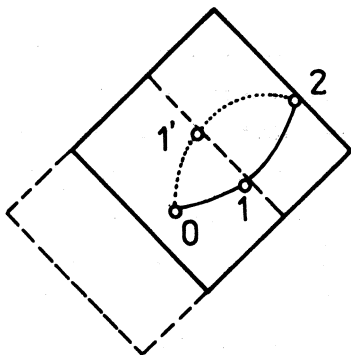
OBR. 10

v tlaku a dolní v tahu) a další vzrůst plastické složky poměrného prodloužení  $\epsilon_n$  ustane (bod 2 na obr. 10). Nadále poroste už jenom křivost  $\epsilon$  a síla  $N$  bude nulová. Úplně se eliminovala plastickými deformacemi. Výsledná zobecněná napjatost bude mít už jen jednu nenulovou složku, totiž ohybový moment  $M = M_m$ . Jde o mezní stav při čistém ohybu. Historie se už neuplatňuje, neboť byla zatěžovacím procesem 0-1-2-3 na obr. 10 ve fázi 2-3 eliminována.

Na obr. 11 je ukázáno, že do téhož stavu 2 deformace i napjatosti lze dospět z výchozího bodu 0 různými cestami (01'2, resp. 012). Konečný

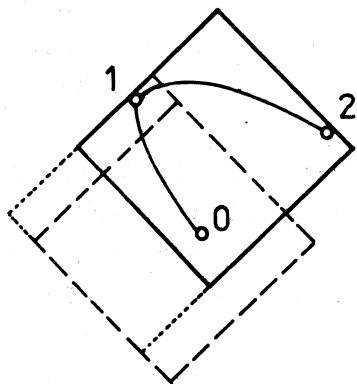
Podle obr. 8 poznáváme, že se do plastického stavu dostala pouze dolní příruba. Skutečně, dosazením z rovnic (2.10), (2.3) a (2.4) do (2.11) vyjde  $\sigma_d = \sigma_k$ . Tomu odpovídá bod 1 na obr. 10. Ohybový moment už dál nemůže vzrůstat, ledaže by zároveň klesala síla  $N$  tak, aby rovnice (2.11) zůstala v platnosti. Budeme-li ohybový moment dále zvětšovat, bude čep C odstrkovat rám vpravo nahoru, takže přírůstek vektoru  $\vec{AB}$  plastických deformací bude kolmý ke straně  $KL$  (obr. 9). Relativně k rámu se bude čep pohybovat podél strany  $KL$  k rohu  $L$ , takže přírůstek vektoru napětí  $\vec{BC}$  (a vektoru elastické deformace)

bude spadat do této strany. Předpokládejme, že bod  $C$  bude pokračovat ve svém přímočarém pohybu  $\epsilon_n = \text{konst.}$  Síla  $N$  bude klesat a moment  $M$  vzrůstat (čára 1-2 na obr. 10). Výsledná deformace  $\epsilon_n$  se sice nebude měnit, ale její plastická složka se bude zvětšovat v poměru k  $\epsilon_k$  stejně jako plastická složka křivosti v poměru ke  $\epsilon_k$ . Napětí ve zplastizované dolní přírubě bude konstatní, totiž  $\sigma_d = \sigma_k$ , kdežto elastické napětí v horní přírubě bude klesat. Až se čep  $C$  dostane do rohu  $L$ , budou obě příruby v plastickém stavu (horní



OBR. 11

stav je v tomto případě vždy týž, nezávislý na historii. Porovnáme-li obr. 11 a obr. 12, vidíme, že na obou obrázcích odpovídají body 0, resp. 2 stejné výchozí, resp. konečné celkové deformaci. Poloha rámu je však vzhledem k výchozí poloze pokaždé jiná, tj. různí se plastické složky deformace. Také poloha bodu 2 vzhledem ke konečné poloze rámu je jiná, tj. různí se i napjatosti, a tím i elastické deformace. Přestože jde o stejnou výslednou deformaci v obou případech, liší se její rozdělení na elastickou a plastickou složku podle historie zatěžování.



OBR. 12

Nyní vytvoříme kinematický model znázorňující kombinované namáhání v tahu a ve smyku pro případ elastickoplastického materiálu. Takové namáhání lze vyvodit v tenkostěnné trubce namáhané tahem a krutem. Podle Misesovy hypotézy vznikají plastické deformace jen tehdy, nabývá-li funkce

$$F = \sigma^2 + 3\tau^2 - \sigma_k^2 \quad (2.12)$$

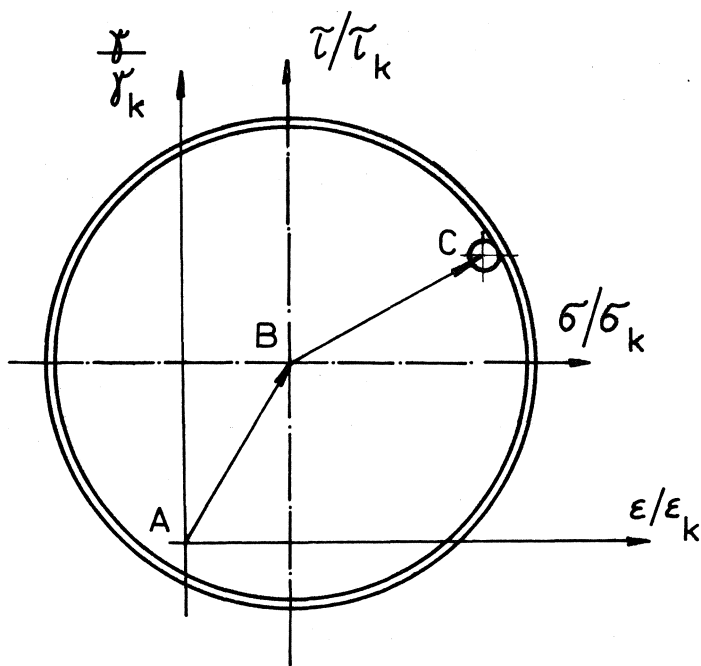
nulové hodnoty. Vždy je  $F \leq 0$ . Body uvnitř oblasti, pro něž  $F < 0$ , náleží elastickému stavu. Na mezní čáře  $F = 0$  mohou nastat plastické deformace. Případ  $F > 0$  je nepřipustný. Při jednosé napjatosti je  $\tau = 0$  a na mezi kluzu  $\sigma = \sigma_k$ . Při prostém smyku je  $\sigma = 0$  a na mezi kluzu  $\tau = \sigma_k / \sqrt{3} = \tau_k$ . S označením

$$\varepsilon_k = \sigma_k / E \quad \gamma = \tau_k / G \quad (2.13)$$

můžeme navrhnout kinematický model v bezrozměrových souřadnicích, jak je zakreslen na obr. 13. Rovnici mezní křivky (rámu na obr. 13) dostaneme anulováním funkce  $F$  z rovnice (2.12). Po úpravě bude

$$\frac{F}{\sigma_k^2} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^2 - 1 = 0 \quad (2.13)$$

V souřadnicích  $(\sigma / \sigma_k), (\tau / \tau_k)$  je to kružnice o jednotkovém poloměru. Vektor  $\vec{BC}$  jednotkové délky znázorňuje napjatost a zároveň elastickou vektorovou složku přetvoření. Vektor  $\vec{AC}$ , který není na obr. 13 zakreslen, znázorňuje výsledné přetvoření. Vektor  $\vec{AB}$  jeho plastickou vektorovou složku.



OBR. 13

Plastické deformace nevznikají, je-li bod C uvnitř rámu, tj. v elastické oblasti  $F < 0$ . Nevznikají však ani tehdy, je-li bod C na hranici  $F = 0$ , pokud se bude pohybovat ve směru tečny ke kružnici nebo směrem dovnitř. Bude-li se pohybovat jinak, bude "odstrkovat" kruhový rám vždy ve směru normály v dotykovém bodu C, tj. v tomto případě ve směru poloměru BC. Můžeme si představit, že rám je za pohybu vlečen po drsné podložce, tj. bez impulsu přenášeného z bodu C se nepohybuje, a že se čep C dotýká rámu

bez tření. Poměr bezrozměrových složek vektoru plastických deformačních rychlostí je tedy v daném okamžiku stejný jako poměr bezrozměrových složek vektoru napětí  $\vec{BC}$ , takže

$$\frac{\dot{\epsilon}_p}{\epsilon_k} : \frac{\dot{\gamma}_p}{\gamma_k} = \frac{\sigma}{\sigma_k} : \frac{\tau}{\tau_k} \quad (2.14)$$

Zde  $\dot{\gamma}_p$ ,  $\dot{\epsilon}_p$  značí rychlosti poměrných plastických deformací. Dosadíme-li za poměr  $\gamma_k/\epsilon_k = \tau_k E/\sigma_k G$  a za poměr  $E/G = 2(1+\mu) = 2 \cdot (1+0,5) = 3$  (při plastických deformacích je  $\mu = 0,5$ ), dostaneme z rovnice (2.14)

$$\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\gamma}_p} = \frac{\sigma}{3\tau} \quad (2.15)$$

Známe-li tedy napětí  $\sigma$ ,  $\tau$  na mezi plastických deformací, nedostaneme z kinematického modelu velikosti plastických deformací, ale jen poměr jejich přírůstků

$$\frac{d\epsilon_p}{d\gamma_p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \epsilon_p}{\Delta \gamma_p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\epsilon}_p \Delta t}{\dot{\gamma}_p \Delta t} = \frac{\sigma}{3\tau} \quad (2.16)$$

pro  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ . To nás nepřekvapuje. Vždyť ani při jednoosé napjatosti nevyplývá z hodnoty  $\sigma = \sigma_k$  v diagramu na obr. 4 žádná jednoznačně definovaná hodnota  $\epsilon$ . <sup>x/</sup>

<sup>x/</sup> Z rovnice (2.16) je zřejmé, že na měřítku času nezáleží.



Rovnice (2.15), resp. (2.16) nevyjadřuje nic jiného, než že vektor rychlostí plastických deformací, resp. vektor přírůstků plastických deformací má směr normály k mezní křivce v dotykovém bodu C. Je-li totiž rovnice mezní křivky  $F(\sigma, \tau) = 0$ , má normála směrové kosiny v poměru  $(\partial F / \partial \sigma) / (\partial F / \partial \tau) = \sigma / 3\tau$ . Úměru (2.16) můžeme tedy zapsat také jako

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_p \\ \dot{\gamma}_p \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \partial F / \partial \sigma \\ \partial F / \partial \tau \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

kde  $\lambda \geq 0$  je neurčitý parametr. <sup>x/</sup> Tato "neurčitost" je typická pro ideální plasticitu (bez zpevnění, o němž pojednáme později). Stručně můžeme rovnici (2.17) zapsat maticově ve tvaru

$$\{\dot{q}\} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \{Q\}} \quad (2.18)$$

Význam symbolů je zřejmý ze srovnání obou rovnic. Stačí definovat zobecněné veličiny

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_p \\ \gamma_p \end{Bmatrix} \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Všechny až dosud probrané případy kinematických modelů měly určité společné vlastnosti. Všechny byly konvexní, tj. úsečka spojující dva libovolné body mezní křivky ("rámu") nikdy neprocházela mimo uzavřenou oblast, kterou mezní křivka ohraničuje. Pokud čep C rám posouval, pak posuv rámu znamenající přírůstek plastických deformací nastal vždy ve směru normály k rámu v dotykovém bodu. Jestliže v tomto bodu existovaly dvě různé vnější normály (v limitě zprava a zleva), nastal pohyb v některém směru uvnitř nebo na hranici úhlu tvořeného těmito normálami. Jestliže vznikala plastická deformace (rám se pohyboval) a zároveň se měnila napjatost (čep se pohyboval po hranici rámu), pak vektor přírůstku napjatosti byl vždy kolmý k vektoru přírůstku plastické deformace. <sup>xx/</sup> První vektor měl vždy směr tečny k mezní čáře (k hranici rámu), druhý směr normály v dotykovém bodu. Podtržené věty v tomto odstavci lze považovat za axiomy teorie ideální plasticity.

<sup>x/</sup> / Není to žádná materiálová konstanta!

<sup>xx/</sup> Kolmost přírůstku napjatosti k přírůstku plastické deformace znamená, že změna napjatosti  $\{d\sigma\}$  ničím nepřispívá k disipaci energie při vzrůstu plastických deformací o  $\{d\epsilon_p\}$ . Přírůstky uvažujeme nekonečně malé.

### 3. PLASTICKÝ POTENCIÁL

Kinematický model ideálně plastického materiálu, navržený původně pro jednoosou napjatost (obr. 5), jsme induktivně zobecnili pro dvourozměrnou oblast (obr. 7 až 13). Nyní se pokusíme shrnout dosavadní poznatky a rozšířit je do  $n$ -rozměrného prostoru.

Nechť je dána zobecněná napjatost veličinami  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . K té přísluší zobecněné poměrné deformace  $q_1, q_2, \dots, q_n$  takové, že skalární součin

$$\delta \Lambda = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n \quad (3.1)$$

značí měrnou práci (hustotu energie), kterou vykonají zobecněná napětí při nekonečně malém virtuálním přetvoření tělesa.

U I - profilu na obr. 6 jsme měli jednak  $Q_1 = \sigma_n, Q_2 = \sigma_d, q_1 = \varepsilon_n, q_2 = \varepsilon_d$ , takže  $\Lambda$  je hustota deformační energie vztažená k jednotce objemu; jednak  $Q_1 = M, Q_2 = N, q_1 = \alpha, q_2 = \varepsilon_n$ , takže  $\Lambda$  je deformační energie obsažená v jednotkové délce nosníku. Pro model na obr. 13 jsme měli  $Q_1 = \sigma, Q_2 = \tau, q_1 = \varepsilon, q_2 = \gamma$ , takže  $\Lambda$  mělo význam hustoty deformační energie.

Plastické deformace mohou vzniknout, splňují-li zobecněná napětí podmínku plasticity

$$F(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0 \quad (3.2)$$

V  $n$ -rozměrném prostoru, v němž na souřadné osy vynášíme jednotlivá zobecněná napětí, představuje rovnice (3.2) mezní plochu (plochu plastického tečení). Tato plocha je zobecněním pohyblivého rámu z kinematických modelů na obr. 5 a 7 až 13.

Změní-li se nepatrně zobecněná napětí o diferenciální přírůstky  $dQ_1, dQ_2, \dots, dQ_n$  aniž dojde k odlehčení, tj. pohne-li se bod znázorňující zobecněnou napjatost nepatrně tak, že zůstane na mezní ploše  $F=0$ , musí být také  $dF=0$  čili

$$\frac{\partial F}{\partial Q_1} dQ_1 + \frac{\partial F}{\partial Q_2} dQ_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial Q_n} dQ_n = 0 \quad (3.3)$$

Protože vektor  $\{dQ_1, dQ_2, \dots, dQ_n\}^T$  spadá do tečné roviny k mezní ploše, musí mít vektor  $\{\partial F/\partial Q_1, \partial F/\partial Q_2, \dots, \partial F/\partial Q_n\}^T$  směr normály. Rovnice (3.3) je totiž podmínkou ortogonality obou vektorů (jejich skalární součin je nulový).

Z dřívějšího výkladu víme, že také vektor přírůstku plastických de-

formací  $\{dq_1^{(p)} dq_2^{(p)} \dots dq_n^{(p)}\}^T$  má směr normály, takže přírůstky zobecněných napětí nekonají na přírůstcích plastických deformací žádnou práci. Bude-li mezní plocha hladká, je v každém jejím bodě jediná tečná rovina a jediná normála. Pak složky  $dq_i^{(p)}$  musí být úměrné hodnotám derivací  $\partial F / \partial Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Tedy

$$dq_1^{(p)} = d\tilde{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Q_1}, \quad dq_2^{(p)} = d\tilde{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Q_2}, \quad \dots, \quad dq_n^{(p)} = d\tilde{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Q_n} \quad (3.4)$$

Přitom  $d\tilde{\lambda}$  je konstanta úměrnosti. Rovnice (3.4) představuje zákon plastického tečení materiálu. Zobecněná napětí vykonají při vzrůstu plastických deformací práci

$$\begin{aligned} Q_1 dq_1^{(p)} + Q_2 dq_2^{(p)} + \dots + Q_n dq_n^{(p)} &= \\ &= d\tilde{\lambda} \left( Q_1 \frac{\partial F}{\partial Q_1} + Q_2 \frac{\partial F}{\partial Q_2} + \dots + Q_n \frac{\partial F}{\partial Q_n} \right) > 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tato práce musí být kladná, neboť při plastických deformacích se mechanická energie nezískává, ale naopak vždy rozptyluje. Protože požadujeme, aby mezní plocha byla konvexní, musí být výraz v závorce ve vztahu (3.5) pozitivní. Počátek souřadnic v prostoru zobecněné napjatosti je totiž vždy uvnitř oblasti ohraničené mezní plochou a konvexnost této plochy vyžaduje, aby úhel mezi polohovým vektorem  $\{Q_1 Q_2 \dots Q_n\}^T$  a vektorem normály  $\{\partial F / \partial Q_1 \partial F / \partial Q_2 \dots \partial F / \partial Q_n\}^T$  byl ostrý. Výraz v oblé závorce (3.5) je kladný násobek kosinu tohoto úhlu (to vyplývá z vlastností skalárního součinu). Pozitivnost výrazu v závorce (3.5) znamená, že  $d\tilde{\lambda} > 0$ .

Rovnici (3.4) můžeme podělit diferenciálem času  $dt$  a dosadit  $\lambda = d\tilde{\lambda} / dt$ ,  $\dot{q}_i^{(p)} = dq_i^{(p)} / dt$ . Bude

$$\dot{q}_1^{(p)} = \lambda \frac{\partial F}{\partial Q_1}, \quad \dot{q}_2^{(p)} = \lambda \frac{\partial F}{\partial Q_2}, \quad \dots, \quad \dot{q}_n^{(p)} = \lambda \frac{\partial F}{\partial Q_n} \quad (3.6)$$

Protože disipovaný výkon  $Q_1 \dot{q}_1^{(p)} + Q_2 \dot{q}_2^{(p)} + \dots + Q_n \dot{q}_n^{(p)}$  je pozitivní a mezní plocha (3.2) konvexní, je  $\lambda > 0$ . Pouze tehdy, nevznikají-li žádné plastické deformace, je  $\lambda = 0$ . Tento parametr je tedy vždy nezáporný; u ideálně plastického materiálu zůstává jeho velikost neurčitá. Rovnice (3.4), resp. (3.6) určují pouze "mechanismus" plastického tečení a nikoli velikost plastického přetvoření. Pokud je mezní plocha hladká, je mezi mechanismem plastického tečení a zobecněnou napjatostí vzájemně jednoznačná korespondence. Funkce  $F$ , která tento mechanismus tečení generuje, je Misesův plastický potenciál.

Viděli jsme však, že hladkost mezní plochy nebude možné vždy předpokládat. Pripustíme tedy, že půjde pouze o hladkost po částech, tj. že mezní plocha, ač uzavřená a souvislá, může mít konečný počet hran a vrcholů (rohů). Její hladké části nechť mají rovnice

$$\begin{aligned} F_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \\ F_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \\ \hline F_k(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Elastickou napjatost představují body, které jsou uvnitř mezní plochy. Pro ně jsou všechny funkce (3.7) záporné. Na mezi plastických deformací je jedna nebo několik z těchto funkcí nulových a ostatní jsou záporné. Je-li napjatost dána např. bodem na průsečnici ploch  $F_1=0$ ,  $F_2=0$ , jsou funkce  $F_3$  až  $F_k$  záporné a pro rychlosti zobecněných plastických deformací bude platit

$$\begin{aligned} \dot{q}_1^{(p)} &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial Q_1} \\ \dot{q}_2^{(p)} &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial Q_2} \\ \hline \dot{q}_n^{(p)} &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial Q_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial Q_n} \end{aligned} \quad (3.8)$$

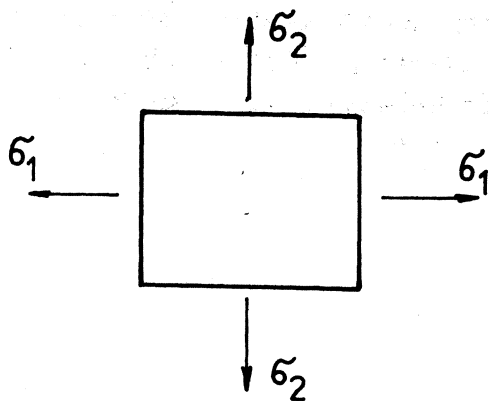
Obdobně i pro jiné případy. Rovnice typu (3.8) nastoupí místo (3.6). Parametry  $\lambda_1$  až  $\lambda_k$  jsou nezáporné. Funkce  $F_1, F_2, \dots, F_k$  představují Koiterův zobecněný plastický potenciál.

Ukážeme aplikaci plastického potenciálu na příkladu rovinné napjatosti (obr. 14). Jsou dána hlavní napětí  $\sigma_1, \sigma_2$  ( $\sigma_3=0$ ). Jím přísluší hlavní poměrná prodloužení  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . Misesova podmínka plasticity je

$$F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_k^2 = 0 \quad (3.9)$$

Zde  $\sigma_k$  představuje mez kluzu při jednoosé napjatosti. Z rovnice (3.6) dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1^{(p)} &= \lambda (2\sigma_1 - \sigma_2) \\ \dot{\epsilon}_2^{(p)} &= \lambda (2\sigma_2 - \sigma_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$



Mechanismus plastického tečení je dán poměrem

$$\frac{\dot{\epsilon}_1^{(p)}}{\dot{\epsilon}_2^{(p)}} = \frac{d\epsilon_1^{(p)}}{d\epsilon_2^{(p)}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1} \quad (3.11)$$

a je jednoznačně určen napjatostí  $\sigma_1, \sigma_2$ . Vypočteme-li z rovnic (3.10) obě hlavní napětí a dosadíme je do podmínky (3.9), vyjde vztah

OBR. 14

$$(\dot{\epsilon}_1^{(p)})^2 + (\dot{\epsilon}_2^{(p)})^2 + (\dot{\epsilon}_1^{(p)})(\dot{\epsilon}_2^{(p)}) = 3\sigma_k^2 \lambda^2 \quad (3.12)$$

Odtud vypočteme  $\lambda$  a dosadíme do vztahů (3.10). Pak vypočteme napětí. Vyjde

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_k}{\sqrt{3}} \frac{2\dot{\epsilon}_1^{(p)} + \dot{\epsilon}_2^{(p)}}{\sqrt{(\dot{\epsilon}_1^{(p)})^2 + (\dot{\epsilon}_2^{(p)})^2 + \dot{\epsilon}_1^{(p)}\dot{\epsilon}_2^{(p)}}} \quad (3.13)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_k}{\sqrt{3}} \frac{2\dot{\epsilon}_2^{(p)} + \dot{\epsilon}_1^{(p)}}{\sqrt{(\dot{\epsilon}_1^{(p)})^2 + (\dot{\epsilon}_2^{(p)})^2 + \dot{\epsilon}_1^{(p)}\dot{\epsilon}_2^{(p)}}}$$

Vztahy (3.13) jsou inverzní k rovnicím (3.11). Určí napjatost, která přísluší danému mechanismu plastického tečení. Ukázali jsme tím vzájemně jednoznačnou přiřazenost.

Pro objemovou hustotu disipovaného výkonu dostaneme

$$D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1^{(p)} + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2^{(p)} \quad (3.14)$$

S použitím (3.13) vyjde

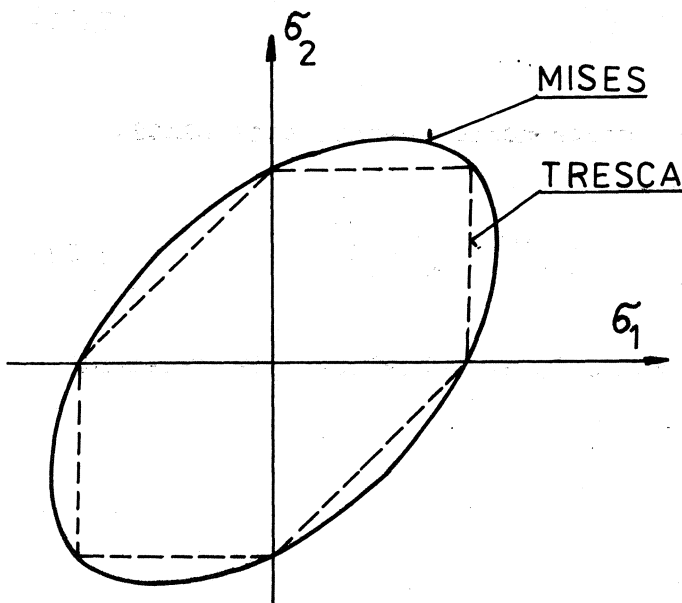
$$D = \frac{2\sigma_k}{\sqrt{3}} \sqrt{(\dot{\epsilon}_1^{(p)})^2 + (\dot{\epsilon}_2^{(p)})^2 + \dot{\epsilon}_1^{(p)}\dot{\epsilon}_2^{(p)}} \quad (3.15)$$

Je zřejmé, že disipovaný výkon je úplně určen, známe-li deformační rychlosti.

Na pravých stranách rovnic (3.13) jsou homogenní funkce deformačních rychlostí (nulového řádu). Proto se hodnoty těchto funkcí nezmění, změníme-li měřítko času.

Misesova mezní čára (3.9) je hladká, je to elipsa (obr. 15). Vyjde-li z Trescovy hypotézy, podle které vznikají plastické deformace, když  $\tau_{\max} = \tau_k = \sigma_k/2$ , bude mezní čára už jen po částech hladká. Zobecněný plastický potenciál tvoří soubor šesti funkcí

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma_1 - \sigma_k, & F_2 &= \sigma_2 - \sigma_k, & F_3 &= \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_k \\ F_4 &= -\sigma_1 - \sigma_k, & F_5 &= -\sigma_2 - \sigma_k, & F_6 &= -\sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_k \end{aligned} \quad (3.16)$$



Představme si například, že  $\sigma_1 = \sigma_k$ ,  $0 < \sigma_2 < \sigma_k$ . Pak se nule rovná jediné funkce  $F_1$ , kdežto ostatní funkce jsou záporné. Existuje proto jednoznačný mechanismus plastického tečení

$$\dot{\epsilon}_1^{(p)} = \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1} = \lambda_1 \quad (3.17)$$

$$\dot{\epsilon}_2^{(p)} = \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_2} = 0$$

Přitom  $\lambda_1 > 0$ . Jakmile se však bod znázorňující napjatost ocitne v některém rohu, nebude přiřazení plastického mechanismu

jednoznačné. Vezměme např.  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_k$ . Přitom se anulují funkce  $F_2$  a  $F_3$ . Podle (3.8) vyjde

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1^{(p)} &= \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_1} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial \sigma_1} = -\lambda_3 \\ \dot{\epsilon}_2^{(p)} &= \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_2} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial \sigma_2} = \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nyní máme dvě nezáporné konstanty  $\lambda_2, \lambda_3$  ; poměr

$$\frac{\dot{\epsilon}_1^{(p)}}{\dot{\epsilon}_2^{(p)}} = - \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} = - \frac{1}{1 + (\lambda_2/\lambda_3)} \quad (3.19)$$

obsahuje nyní jeden neurčitý parametr  $(\lambda_2/\lambda_3)$  , takže máme nekonečné jednoparametrické množství mechanismů plastického tečení, které může vyvolat táž napjatost  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_k$  . Pro měrný disipovaný výkon máme v prvním případě (za předpokladu platnosti Trescovy hypotézy)

$$D = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1^{(p)} + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2^{(p)} = \sigma_k \dot{\epsilon}_1^{(p)} \quad (3.20)$$

v druhém případě

$$D = \sigma_k \dot{\epsilon}_2^{(p)} \quad (3.21)$$

Lze ukázat, že ve všech případech, které mohou nastat, bude platit vztah

$$D = \frac{1}{2} \sigma_k (|\dot{\epsilon}_1^{(p)}| + |\dot{\epsilon}_2^{(p)}| + |\dot{\epsilon}_1^{(p)} + \dot{\epsilon}_2^{(p)}|) \quad (3.22)$$

Rovnice (3.20) a (3.21) jsou ve vztahu (3.22) obsaženy jako zvláštní případy.

#### 4. ODEZVA A PŘIZPŮSOBENÍ ELASTICKOPLASTICKÉ KONSTRUKCE

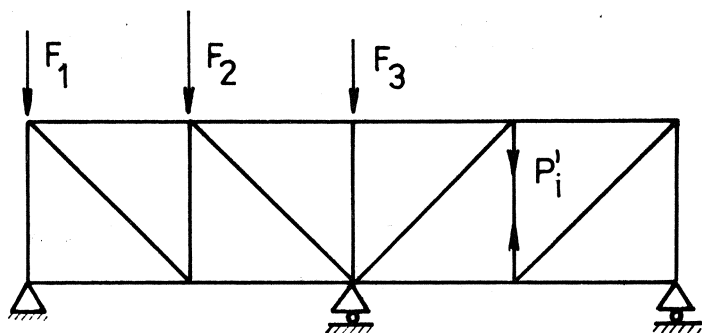
Na příkladu prutové konstrukce jednou staticky neurčitě uložené ukážeme zvláštnosti odezvy elastickoplastické konstrukce na statické namáhání. V soustavě znázorněné na obr. 16 mají pruty délku  $l_i$  , průřez  $S_i$  , modul pružnosti  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 17$ ). Prodloužení prutu účinkem síly  $P_i$  bude

$$\Delta l_i = a_i P_i \quad (4.1)$$

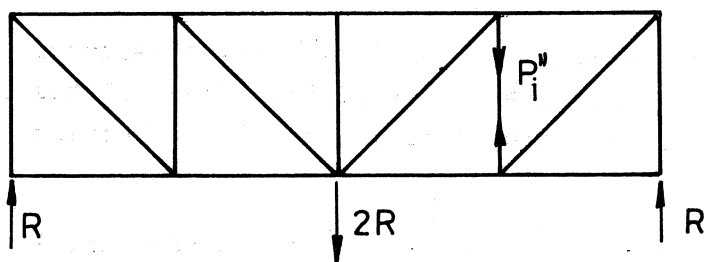
kde

$$a_i = \frac{l_i}{E_i S_i} \quad (4.2)$$

značí lineární poddajnost.



OBR. 16



OBR. 17

Nejprve určíme síly v prutech  $P_i'$  za předpokladu, že konstrukce je pružná (obr. 16). Potom určíme vlastní pnutí, které může existovat v nezatížené soustavě vlivem statické neurčitosti. Reakce jsou přitom v rovnováze (obr. 17) a síly v prutech jsou  $P_i''$ .

Předpokládejme, že na konstrukci působí  $\mu$ -násobek vnějších sil zakreslených na obr. 16 a také vlastní pnutí změníme na  $\nu$ -násobek stavu zachyceného na obr. 17. Pak síly v prutech budou dány součtem

$$P_i = \mu P_i' + \nu P_i'' \quad (4.3)$$

Rovnice (4.3) vystihuje všechny napěťové stavy, které mohou v pružné konstrukci nastat.

Deformační energie bude

$$\begin{aligned} U &= \sum \frac{1}{2} P_i \Delta l_i = \sum \frac{1}{2} a_i P_i^2 = \\ &= \sum \frac{1}{2} a_i (\mu P_i' + \nu P_i'')^2 = \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 \sum a_i P_i'^2 + \frac{1}{2} \nu^2 \sum a_i P_i''^2 + \\ &\quad + \mu \nu \sum a_i P_i' P_i'' \end{aligned} \quad (4.4)$$



Síly  $P_i''$  tvoří s reakcemi na obr. 17 rovnovážnou soustavu. Součin  $\mu a_i P_i'$  můžeme považovat za prodloužení prutů při virtuálním převoření konstrukce. Výraz  $\sum \mu a_i P_i' P_i''$  pak představuje celkovou virtuální práci, která musí být podle principu virtuálních prací nulová. Jinak řečeno, interakční energie při působení vnějších sil a vlastních pnutí je nulová (Colonettiho princip). Poslední člen v rovnici (4.4) tedy vymizí, takže

$$U = \frac{1}{2} \mu^2 \sum a_i P_i'^2 + \frac{1}{2} \nu^2 \sum a_i P_i''^2 \quad (4.5)$$

Zavedeme-li souřadnice

$$\xi = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum a_i P_i'^2} \quad \eta = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum a_i P_i''^2} \quad (4.6)$$

bude

$$U = \xi^2 + \eta^2 \quad (4.7)$$

V rovině  $\xi, \eta$  bude pak čtverec vzdálenosti od počátku udávat celkovou deformační energii v soustavě. Souřadnice  $\xi$  je přitom mírou velikosti vnějšího zatížení (je-li  $\xi = 0$ , jsou vnější síly nulové), souřadnice  $\eta$  je mírou vlastního pnutí.

Je-li vlastní pnutí neměnné, je  $\eta = \text{konst}$ . To je rovnice přímky rovnoběžné s osou úseček. Když se mění velikost vnějšího zatížení úměrně k parametru  $\mu$ , postupuje bod znázorňující napjatost po této rovnoběžce.<sup>x/</sup> Je-li naopak zatížení konstantní, je  $\xi = \text{konst}$ . Tato přímka, rovnoběžná s osou pořadnic, představuje různé rovnovážné stavy sil v prutech, které odpovídají danému konstantnímu zatížení. Z Ménabréova principu minima komplementární potenciální energie vyplývá, že se při postupném zatěžování konstrukce, která byla původně v přirozeném stavu, budeme pohybovat po ose  $\xi$ . Ze všech rovnovážných stavů  $(\xi, \eta)$  při daném  $\xi$  má totiž nejmenší vzdálenost od počátku právě bod  $(\xi, 0)$ . To platí tak dlouho, dokud v některém prutu nevznikne plastický stav.

Plastický stav znamená, že deformace prutu roste, aniž se mění síla v prutu. Je-li prut namáhán tahem, odpovídá vznik plastického stavu dosažení meze kluzu v materiálu. Pokud jde o tlak, chová se obdobně i prut namáhaný vzpěrem, je-li štíhlý a geometricky dokonalý. Je-li tlaková síla v něm menší než Eulerova vzpěrná síla, platí Hookeův zákon (4.1).

<sup>x/</sup> Nezaměňuj parametr  $\mu$  s Poissonovým číslem.

Jakmile dosáhneme této kritické síly, zůstane síla konstantní, i když se prut dál zkracuje. To ovšem platí jen za ideálních podmínek a pro deformace jen málo převyšující kritické zkrácení prutu. Nicméně pro posouzení odezvy prutové konstrukce lze v prvním přiblížení ztotožnit Eulerovu sílu s dolní mezí plastických deformací, pokud síla odpovídající mezi kluzu v tlaku nevyjde v absolutní hodnotě menší než Eulerova. Je tedy možné, že mez plastických deformací v tlaku  $P_i^-$  nebude v absolutní hodnotě stejná jako mez plastických deformací v tahu  $P_i^+$ . Budeme je proto rozlišovat. Síla v prutu pak může být pouze v intervalu

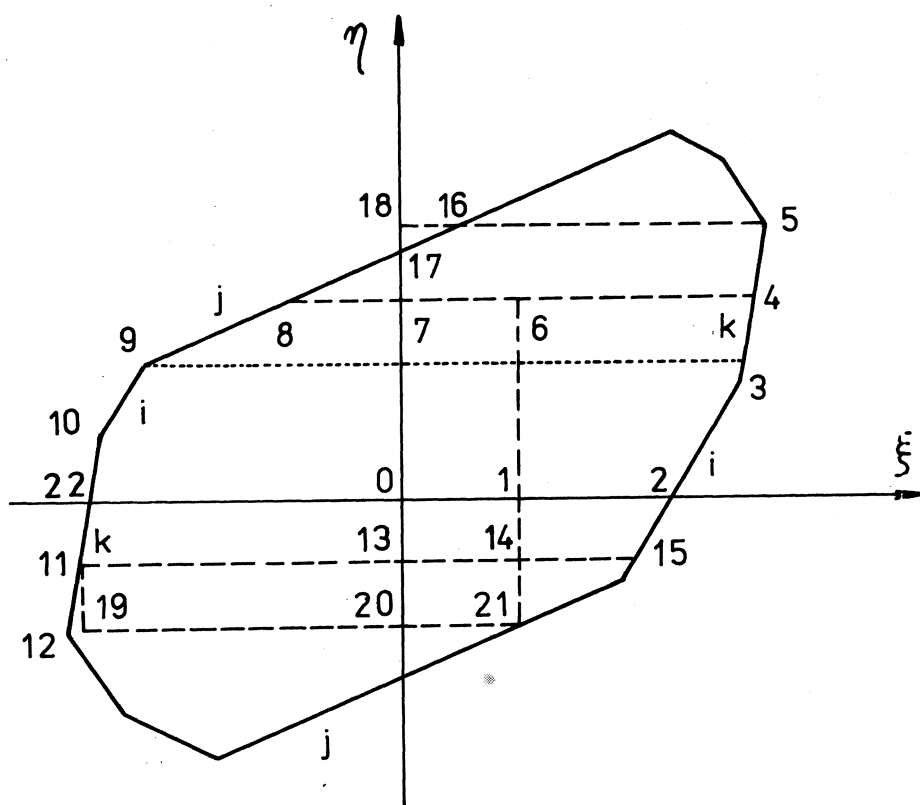
$$P_i^- \leq P_i \leq P_i^+ \quad (4.8)$$

Do vztahu (4.8) dosadíme za  $P_i$  z rovnice (4.3) a za  $\mu_i$  z rovnice (4.6). Vyjde

$$P_i^- \leq \xi \frac{P_i'}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum a_i P_i'^2}} + \eta \frac{P_i''}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum a_i P_i''^2}} \leq P_i^+ \quad (4.9)$$

Body  $(\xi, \eta)$ , které vyhovují nerovnostem (4.9), vyplňují nekonečný pás. Uvnitř tohoto pásu je také počátek souřadnic, neboť  $P_i^- < 0$ ,  $P_i^+ > 0$ . Těchto pásů je tolik, kolik je prutů. Jejich průnik je mnohoúhelník zakreslený na obr. 18. Napjatost v prutové soustavě může odpovídat jen bodům uvnitř nebo nejvýš na hranici tohoto mnohoúhelníku, neboť body vně mnohoúhelníku představují napjatost, při níž je nejméně v jednom prutu překročena mez plastických deformací, což nepřipouštíme. Počet rovnoběžných stran mnohoúhelníku se nemusí shodovat s počtem prutů, neboť některé pásy mohou být tak široké, že celý mnohoúhelník je v nich obsažen. Mnohoúhelník by byl k počátku souřadnic středově souměrný, kdyby  $-P_i^- = P_i^+$ . To však nemusí obecně platit.

Počátek 0 odpovídá přirozenému stavu konstrukce. Zvětšujeme-li zatížení úměrně parametru  $\xi$ , pohybujeme se po čáře 0-1-2. Celá konstrukce je v pružném stavu, než dosáhneme bodu 2. Tento bod je na hranici  $i$ -tého pásu, což znamená, že v  $i$ -tém prutu vznikne plastická deformace. Síla v tomto prutu nemůže dále růst, takže síly v prutech se musí při dalším růstu zatížení přeskupit. Bod znázorňující výsledné síly v prutech se bude nyní pohybovat po čáře 2-3, což znamená vznik vlastního prutu ( $\eta > 0$ ). Jakmile dospějeme do vrcholu 3, vznikne při dalším zatěžování plastická deformace v  $k$ -tém prutu, kterému přísluší pás 3-5, 10-12. Když postoupíme po čáře 3-4, dostaneme se do nitra předchozího pásu, který příslušel  $i$ -tému prutu, takže se tento prut vrátí do elastického stavu. Ačkoli tedy zatížení monotónně roste,  $i$ -tý prut je během zatěžování nejprve namáhán až do plastického stavu a pak v důsledku přeskupení sil



OBR. 18

opět odlehčen. Kdybychom pokračovali v zatěžování až do vrcholu 5, nemohla by souřadnice  $\xi$  dál růst. Dostali bychom se do mezního stavu, při kterém se konstrukce zhroutí. Jestliže jí předtím v bodě 4 odlehčíme, bude se souřadnice  $\xi$  zmenšovat za konstantního  $\eta$ , neboť odlehčování probíhá elasticky.

Dostaneme se do bodu 6, při němž je zatížení stejné jako bylo v bodě 1, avšak napjatost konstrukce je nyní jiná, liší se o soustavu sil příslušných vlastnímu pnutí. Je zřejmé, že se výsledné síly v prutech mohou i při stejném zatížení lišit a že záleží na historii zatěžování. Při úplném odlehčení se dostaneme do bodu 7. Jeho pořadnice ukazuje velikost vlastního pnutí, které bude v konstrukci existovat, ačkoli ta není vnějšími silami vůbec zatížena. Kdybychom změnili smysl působících sil, pokračovali bychom v rovině  $\xi, \eta$  po dráze 7-8-9-10-11-12. Bod 12 odpovídá opět meznímu stavu. Při pohybu po straně 9-10 bude v plastickém stavu opět  $i$ -tý prut, neboť tato strana je rovnoběžná se stranou 2-3. Podobně bude při pohybu po úsečce 10-11-12 v plastickém stavu  $k$ -tý prut, kdežto  $i$ -tý prut se vrátí do elastického stavu. Kdybychom v bodě 11 změnili

smysl zatěžování, dostali bychom se postupně do bodu 13, který představuje úplně odlehčenou konstrukci, pak do bodu 14, při němž je vnější zatížení stejné jako bylo v bodu 1 nebo 6, pak do bodů 15-2-3-4-5.

Podle rovnice (4.7) se čtverec vzdálenosti bodu od počátku rovná elastické deformační energii. To znamená, že např. úsečka 07 je odmocninou deformační energie vlastního pnutí zbylého v konstrukci po úplném odlehčení z bodu 4. Když budeme odlehčovat konstrukci z bodu 5, bude mít tuto vlastnost pořadnice bodu 17, která je menší než pořadnice bodu 5, neboť počínaje bodem 16 nastala při odlehčování změna vlastního pnutí. Pro některé účely je výhodné této změny nedbat a definovat fiktivní deformační energii vlastních pnutí existujících na počátku odlehčování, tj. v bodě 5. V tomto případě je to čtverec úsečky 0-18.

Nyní můžeme některé poznatky zobecnit. Pokud nenastane odlehčení, vznikne ze všech možných rovnovážných stavů ten, při němž je elastická deformační energie minimální; přitom napětí v konstrukci nikde nepřekročí mez plastických deformací (princip Haarův-Kármánův). Pojem odlehčení se vztahuje pouze na vnější síly. U vnitřních sil v prutech může odlehčení nastat, i když zatížení stoupá. To byl případ  $\dot{U}$ -tého prutu při pohybu po dráze 3-4. Mez plastických deformací představuje v daném případě mnohoúhelník na obr. 18.

Uvedený princip obměnili Prager a Symonds v tom smyslu, že požadavek minima celkové elastické deformační energie nahradili požadavkem, aby byla minimální fiktivní deformační energie vlastních pnutí.

Např. v bodě 4 vyplňují všechny přípustné stavy rovnováhy úsečku, kterou mnohoúhelník vytíná na přímce  $\xi = \xi_4$ . Skutečný stav odpovídá tomu bodu na této úsečce, který je nejbližší k počátku (podle Haara-Kármána), resp. který je nejbližší k ose úseček (podle Pragera-Symondse). V obou případech jde o bod 4.

Jakmile připustíme odlehčování, nebude možné stanovit jednoznačně hodnotu  $\eta$ , je-li dáno  $\xi$ . Např. pro  $\xi = \xi_1$  mohou nastat stavy 1, 6, 14 závisle na historii zatěžování. Pro tento obecný případ proměnlivého zatěžování platí princip Greenbergův: když se nepatrně posune přímka rovnovážných stavů ( $\xi = \text{konst}$ ) vlivem malé změny vnějšího zatížení ( $\xi \rightarrow \xi + d\xi$ ), pak se bod znázorňující výslednou napjatost posune po nejkratší dráze tak, aby neopustil ani přímku rovnovážných stavů, ani uzavřenou oblast mnohoúhelníka (oblast možných elastických a plastických stavů). Jinak řečeno: při nekonečně malé změně vnějšího zatížení nastane ze všech staticky přípustných změn napjatosti taková změna, která by sama o sobě (bez účasti vlastního pnutí) vykonala nejmenší elastickou deformační práci, aniž se přitom kdekoli přestoupí hranice plastických deformací.

Pokud jde o mezní stav 5, resp. 12, při němž se úplně vyčerpá nosnost konstrukce, je zajímavé, že mezní stav nezávisí na zatěžovací historii. Úsečka přípustných rovnovážných stavů se v něm zredukuje na pouhý bod. Z tohoto poznatku lze dedukovat Fajnbergovu větu: mezní stav nenastane, lze-li pro dané zatížení konstrukce nalézt nějaký rovnovážný stav elastické napjatosti.

Sledujeme nyní, co nastane, bude-li se zatížení periodicky měnit v mezích  $\xi_d \leq \xi \leq \xi_h$ . Necht' je např.  $\xi_d = \xi_n$ ,  $\xi_h = \xi_4$ . Pak na dráze 15-3-4 se budou plasticky přetvářet pruty  $i, k$  a na dráze 8-9-10-11 pruty  $j, v, l$ , z toho pruty  $i, k$  v opačném smyslu než dříve. Lze se domnívat, že opakovaná plastická deformace, ať už se její smysl mění, či nikoli, přivodí nakonec poruchu a zhroucení konstrukce. Kdybychom zvolili  $\xi_d = \xi_9$ ,  $\xi_h = \xi_4$ , přetvářely by se pruty  $k, j$  dokonce vždy jen ve stejném smyslu, takže by brzo nastaly velké deformace a posléze porucha.

Zcela jiný případ nastane, bude-li  $\xi_d = \xi_n$ ,  $\xi_h = \xi_1$ . Při prvním zpětném půlcyklu po dráze 1-0-22-11 nastane v poslední fázi plastická deformace  $k$ -tého prutu, ale další zatěžování probíhá už výhradně po dráze 11-13-14-13-11, tedy v elastické oblasti. Konstrukce se danému zatěžovacímu režimu přizpůsobila tak, že další zatěžování probíhá beze změn trvalých deformací a nebezpečí poruchy (v mezích platnosti daného modelu) nehrozí<sup>x/</sup>. Přizpůsobení konstrukce se dosáhlo vznikem vlastního pnutí daného pořadnicí bodu 13. Stejný efekt by mělo i vlastní pnutí dané kterýmkoli bodem na úsečce 13-20.

Schopnost konstrukce přizpůsobit se danému režimu periodického zatěžování je zřejmě dána tím, že je možné najít na nějaké přímce  $\eta = \text{konst.}$  otevřenou množinu bodů v intervalu  $\xi_d < \xi < \xi_h$ , která je celá v elastické oblasti. Jde tedy o úsečku mezi svislicemi  $\xi = \xi_d$ ,  $\xi = \xi_h$ , která je celá v elastické oblasti, až snad na koncové body; ty mohou být na hranici plastických deformací.

Znázornění stavů zatížení a napjatosti v rovině  $\xi, \eta$  na obr. 18 bylo možné, protože šlo o jednu staticky neurčitou konstrukci, u které existoval jen jeden systém sil v prutech nezatížené konstrukce, který tvořil vlastní pnutí.

Kdyby byla konstrukce dvakrát staticky neurčitá, byly by takové systémy dva. Kromě sil  $P_i$  odpovídajících elastické konstrukci bez vlast-

<sup>x/</sup> Přizpůsobení; rusky "prisposobljajemost",  
angl. "shake-down".

ních pnutí bychom měli ještě dvě vlastní pnutí tvořená soustavami sil  $P_i^I, P_i^{III}$ . Z principu virtuálních prací a z toho, že vlastní pnutí tvoří rovnovážný systém v nezatiženém tělese, bychom odvodili podmínky ortogonalit

$$\sum a_i P_i^I P_i^{II} = 0 \quad \sum a_i P_i^I P_i^{III} = 0 \quad \sum a_i P_i^{II} P_i^{III} = 0 \quad (4.10)$$

Takže by platilo

$$U = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (4.11)$$

kde

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda \sqrt{\frac{1}{2} \sum a_i P_i^{I2}} \\ \eta &= \mu \sqrt{\frac{1}{2} \sum a_i P_i^{II2}} \\ \zeta &= \nu \sqrt{\frac{1}{2} \sum a_i P_i^{III2}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Všechny rovnovážné stavy odpovídající danému vnějšímu zatížení  $\xi = \text{konst.}$  vyplňují v prostoru  $\xi, \eta, \zeta$  rovinu.

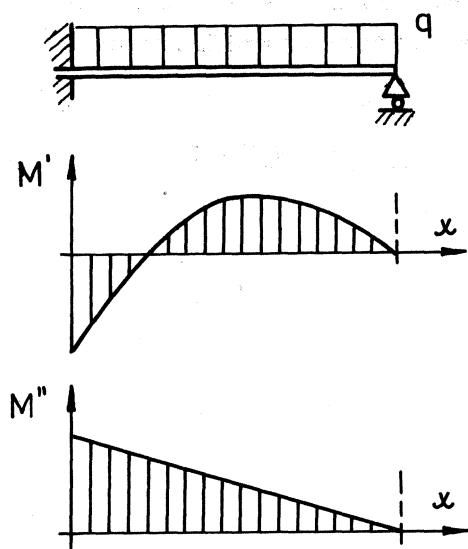
Místo mnohoúhelníku dají podmínky (4.8) pro

$$P_i = \lambda P_i^I + \mu P_i^{II} + \nu P_i^{III} \quad (4.13)$$

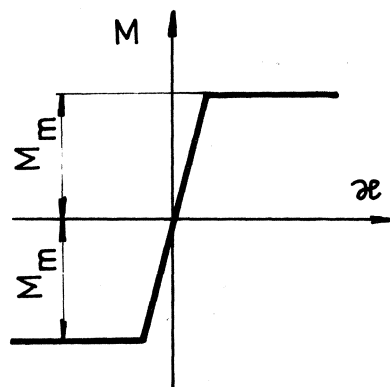
mnohostěn. Všechny uvedené věty by platily i pro tento prostorový případ. Kdyby byla konstrukce  $n$ -krát staticky neurčitá, potřebovali bychom k analogickému geometrickému znázornění  $(n+1)$  - rozměrný prostor.

Prutová soustava má konečný počet stupňů volnosti, neboť její přetvoření je úplně určeno posuvy styčniců, jichž je konečný počet. Avšak metodu, kterou jsme použili, můžeme snadno zobecnit i pro kontinuum, které má nekonečný počet stupňů volnosti. Ukážeme to na příkladu nosníku znázorněného na obr. 19. Budeme předpokládat, že má idealizovaný průřez podle obr. 6, takže jeho deformační charakteristika odpovídá reologickému modelu elastickoplastického materiálu (obr. 20). Nosník má jednotkovou délku ( $l = 1$  m) a je spojitě rovnoměrně zatížen. Ohybový moment pro elastický nosník zatěžovaný z přirozeného stavu je úměrný výrazu  $(-4x^2 + 5x - 1)$  a pro vlastní pnutí máme ohybový moment úměrný výrazu  $(-x + 1)$ . Výsledný ohybový moment bude

$$M = \lambda M^I + \mu M^{II} \quad (4.14)$$



OBR. 19



OBR. 20

kde jsme položili

$$M' = -4x^2 + 5x - 1 \quad M'' = -x + 1 \quad (4.15)$$

Elastická deformační energie v nosníku bez vlastního pnutí je

$$\xi^2 = \frac{\lambda^2}{2EJ} \int_0^1 M'^2 dx = \frac{1}{10} \frac{\lambda^2}{EJ} \quad (4.16)$$

Táží energie pro vlastní pnutí vyjde

$$\eta^2 = \frac{\mu^2}{2EJ} \int_0^1 M''^2 dx = \frac{1}{6} \frac{\mu^2}{EJ} \quad (4.17)$$

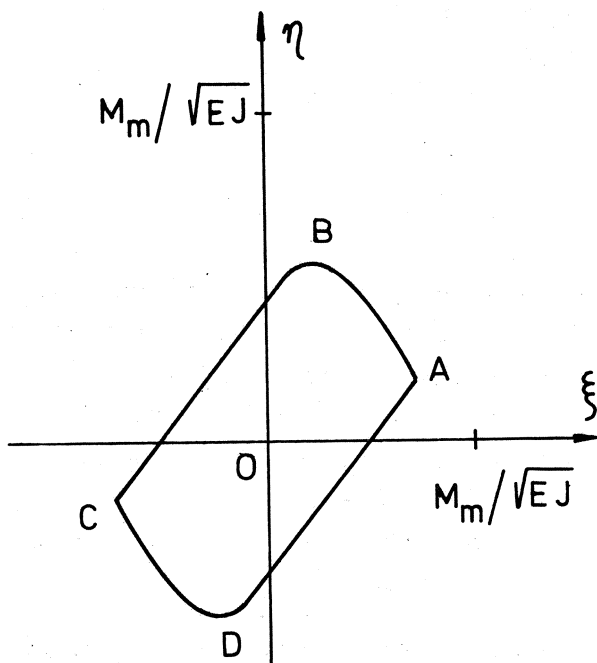
Pro ohybový moment platí nerovnost

$$-M_m \leq M \leq M_m \quad (4.18)$$

Dosadíme-li sem z rovnic (4.14), (4.16) a (4.17), dostaneme

$$-M_m \leq \xi \sqrt{10EJ} (-4x^2 + 5x - 1) + \eta \sqrt{6EJ} (-x + 1) \leq M_m \quad (4.19)$$

Tento vztah představuje pro  $x$  z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  nekonečně mnoho nekonečných pásmů v rovině  $\xi, \eta$ , jejichž průnik je zakreslen na obr. 21. Strany



OBR. 21

AB, CD jsou obálky přímek pro  $0 \leq x \leq 0,625$ , kdežto strany BC, DA odpovídají hodnotě  $x=0$ . Působí-li zatížení dolů, odpovídá mu mezní stav A s plastickými klouby v řezech  $x=0, x=0,625$ . Působí-li nahoru, vznikne mezní stav C s klouby v týchž místech.

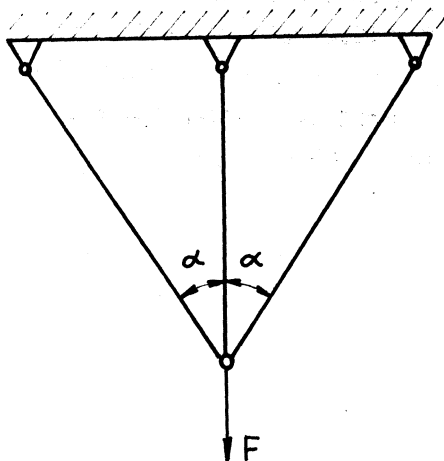
## 5. TEORIE PLASTICKÝCH MEZNÍCH STAVŮ

Na příkladech uvedených v minulé kapitole jsme ukázali, že mezní stav elastickoplastické konstrukce závisí jen na typu zatížení, ale nikoli na jeho časové historii. Mezní stav nastává, mohou-li plastické deformace narůstat při nezměněném zatížení. Toto mezní zatížení nemůže za podmínek statického zatěžování dále vzrůst, neboť přírůstek sil není konstrukce schopna přenést; vedl by ke zrychlení a zhroucení konstrukce.

Dříve běžný výpočet statických konstrukcí vycházel z koncepce dovolených napětí. Největší napětí v elastické konstrukci nemělo v absolutní hodnotě překročit určitou mez, zpravidla danou zlomkem  $\sigma_k / k$  meze kluzu  $\sigma_k$ , přičemž  $k$  je míra bezpečnosti vzhledem ke vzniku plastických deformací. Takový výpočet nerespektuje ani přizpůsobení konstrukce, ani její mezní stav. Míru bezpečnosti lze určovat také vzhledem k meznímu stavu jako poměr mezního zatížení ke skutečnému zatížení (za předpokladu, že se zatěžující síly mění proporcionálně). Označme tuto druhou míru



bezpečnosti  $\nu$ . Vždy bude  $\nu \geq k$ . Rozdíly mohou být značné. Budeme-li např. zatěžovat svislou silou tři pruty ze stejného pružnoplastického materiálu a se stejným průřezem (obr. 22), bude poměr obou hodnot



$$\frac{\nu}{k} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad (5.1)$$

Pro  $\alpha = 30^\circ$  je tento poměr jen asi 1,19, ale pro  $\alpha = 45^\circ$  je to už 1,41. To znamená, že by ke zhroucení konstrukce došlo při zatížení převyšujícím o 41 % hodnotu, při níž vznikly první plastické deformace. Snaha po využití této pevnostní rezervy, kterou poskytují plastické deformace, vedla k rozvíjení teorie mezních stavů, jíž se budeme nyní podrobněji zabývat.

OBR. 22

Budeme předpokládat, že napjatost v daném místě je dána vektorem zobecně-

ných napětí

$$\{Q\} = [Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n]^T \quad (5.2)$$

a příslušná přetvoření vektorem zobecněných deformací

$$\{q\} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T \quad (5.3)$$

takovým, že skalární součin

$$\delta \Lambda = \{\delta q\}^T \{Q\} \quad (5.4)$$

představuje práci zobecněných napětí při virtuálním přetvoření tělesa, vztáženou k jednotce objemu  $V$ .

Uvedli jsme již některé příklady, zde připojíme další. U rotačně souměrné tenké skořepiny má vektor zobecněných napětí čtyři prvky, totiž obvodový moment, meridiální moment, obvodovou sílu, meridiální sílu; vektor zobecněných deformací obsahuje změnu obvodové křivosti, změnu křivosti meridiánu, obvodové poměrné prodloužení a meridiální poměrné prodloužení (ve střední ploše skořepiny). Za element objemu  $dV$  se bere plošný element skořepiny. U krouceného hřídele se zobecněné napětí rovná krouticímu momentu a za zobecněnou deformaci bereme zkos. Element "objemu" je pak totožný s elementem délky hřídele. U rovinné napjatosti podle obr. 14

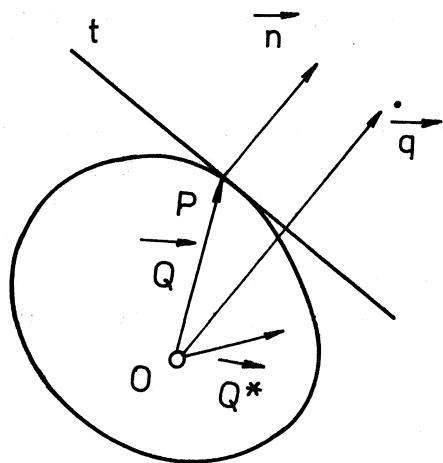
máme  $\{Q\} = [\sigma_1 \ \sigma_2]^T$ ,  $\{q\} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2]^T$  a element objemu je tentokrát skutečný objem elementu.

Vycházíme přitom z předpokladu, že plastické deformace nenastanou, dokud není splněna jistá podmínka plasticity

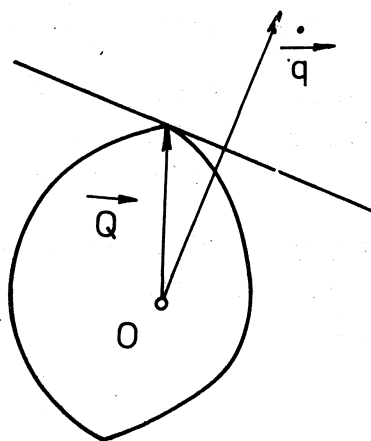
$$F(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0 \quad (5.5)$$

Tento předpoklad je značnou idealizací. Předpokládáme, že při  $F < 0$  žádné trvalé deformace nenastanou, žádné dislokace se neposunou, až najednou při hodnotě  $F = 0$  vznikne náhle jejich hromadný pohyb. Tato nespojitost je trochu nepřirozená. Byla proto navržena také endochronní teorie plasticity s použitím "skrytých" proměnných, která se obejde bez podmínky plasticity, ale tou se nebudeme zabývat <sup>x/</sup>.

Podmínka plasticity (5.5) se dá znázornit v  $n$ -rozměrném prostoru jako mezní plocha (v souřadnicích  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ). Bývá též nazývána plocha plastického tečení. V 2. kapitole jsme ukázali, že mezní plocha je konvexní. To znamená, že tečná rovina (nadrovina) vedená v bodu P, což je koncový bod vektoru napětí  $\vec{OP} = \{Q\}$ , neobsahuje žádný vnitřní bod oblasti  $F < 0$  uzavřené mezní plochou. Může však obsahovat body splňující podmínku  $F = 0$ . Mohou nastat tři případy znázorněné na obr. 23 až 25. Na obr. 23 existuje v bodě P jediná tečná rovina, mezní plocha je

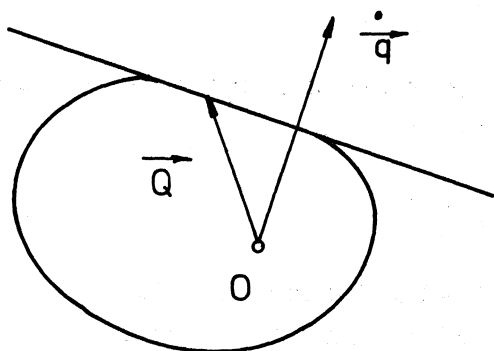


OBR. 23



OBR. 24

<sup>x/</sup> Viz K.C. Valanis ve sborníku Foundations of plasticity, red. A. Sawczuk, Noordhoff, Leyden 1973



OBR. 25

hladká. Znázorníme-li na těchto osách v jiné stupnici vektor poměrných plastických deformací  $\{\dot{q}\} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$ , musí být kolmý k tečné rovině. Skalární součin

$$D = \{\dot{q}\}^T \{Q\} \quad (5.6)$$

představuje výkon disipovaný plastickými deformacemi. Tečná rovina k mezní ploše je přitom jednoznačně určena vektorem  $\{\dot{q}\}$  (jednoznačnost vyplývá z konvexnosti mezní plochy a z požadavku, aby vektor rychlosti deformací měl směr i smy-

sl vnější normály v dotykovém bodu P). Můžeme proto psát, že

$$D = D(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (5.7)$$

Na tom se nic nezmění ani v případě, že mezní plocha má hrany a vrcholy, tj. že je hladká po částech (obr. 24). V bodu P nyní existuje celý svazek tečných rovin, ale jen jedna z nich splňuje požadavek kolmosti k vektoru  $\{\dot{q}\}$ . To znamená, že k danému vektoru napětí patří v tomto případě nekonečně mnoho možných plastických mechanismů, ale ke každému z nich patří vždy též vektor napjatosti. Vektor  $\{Q\}$  je tedy vektorem  $\{\dot{q}\}$  určen jednoznačně, opačné tvrzení však neplatí.

Na obr. 25 není sice přiřazení vektoru  $\{Q\}$  k vektoru  $\{\dot{q}\}$  jednoznačné, ale skalární součin (5.6) je přesto určen jednoznačně. Závislost (5.7) proto platí v každém případě.

Kdyby v tělese vznikla jakákoli napjatost  $\{Q^*\}$  pod mezí plastických deformací (znázorněná na obr. 23), platila by nerovnost zřejmá z geometrického názoru

$$\{\dot{q}\}^T \{Q^*\} < \{\dot{q}\}^T \{Q\} \quad (5.8)$$

Tato nerovnost vyjadřuje Misesův princip maxima hustoty disipovaného výkonu. Je-li dána nějaká soustava rychlostí plastických poměrných deformací, pak při skutečné napjatosti vzniká vždy větší hustota disipovaného výkonu než při jakékoli jiné, fiktivní napjatosti pod mezí plastických deformací.

Nechť vnější síly působící na těleso tvoří vektor zobecněných sil  $\{P\} = [P_1, P_2, \dots, P_N]^T$ .

Se zobecněnými rychlostmi  $\{\dot{p}\} = [\dot{p}_1 \dot{p}_2 \dots \dot{p}_N]^T$  lze vytvořit skalární součin

$$\{\dot{p}\}^T \{P\} = \sum_{i=1}^N P_i \dot{p}_i \quad (5.9)$$

který představuje celkový příkon dodávaný tělesu. Ten se musí rovnat výkonu spotřebovanému vnitřními silami, takže

$$\{\dot{p}\}^T \{P\} = \int_V \{\dot{q}\}^T \{Q\} dV \quad (5.10)$$

Rovnici (5.10) lze považovat za důsledek zákona zachování energie pro tuhohoplustické těleso (výkon elastických deformací neuvažujeme). Lze ji však chápat i obecněji. Soustava vnějších a vnitřních sil tvoří rovnovážný systém (zrychlení se neprojeví a byla zanedbána). Pro takový systém platí princip virtuálních prací. Zvolíme libovolné přetvoření tělesa, při němž vzniknou posuvy  $\{\delta p\}$  působišť sil  $\{P\}$  a přetvoření  $\{\delta q\}$ , na nichž vykonají práci vnitřní síly  $\{Q\}$ . Musí platit rovnost

$$\{\delta p\}^T \{P\} = \int_V \{\delta q\}^T \{Q\} dV \quad (5.11)$$

Deformace  $\{\delta q\}$  a posuvy  $\{\delta p\}$  volíme zcela nezávisle na napětích  $\{Q\}$  a na silách  $\{P\}$ . Jde o myšlenkový pokus, který probíhá při zastaveném čase. Nic nám však nebrání v tom, abychom tyto přírůstky považovali za výsledek skutečného pohybu rychlostmi  $\{\dot{q}\}, \{\dot{p}\}$  za dobu  $\delta t$ . Bude

$$\{\delta q\} = \{\dot{q}\} \delta t \quad \{\delta p\} = \{\dot{p}\} \delta t \quad (5.12)$$

Když (5.12) dosadíme do (5.11), dostaneme (5.10). Tentokrát však nepůjde o zákon zachování energie, neboť rychlosti posuvů a deformací nijak nesouvisejí se skutečnými silami a napětími. Můžeme si je vymyslet jakkoli, jde jen o to, aby spolu kinematicky souvisely. Pak rovnice (5.10) vyjadřuje princip virtuálních výkonů.

Kinematickou souvislostí zde rozumíme to, že poměrná přetvoření  $q_1, q_2, \dots, q_n$  i posuvy  $p_1, p_2, \dots, p_N$  jsou odvozeny z téhož vektorového pole posuvů, které má všechny derivace, jež se vyskytnou v kinematických vztazích pro poměrné deformace, spojitě. Takové pole posuvů nazýváme kinematicky přípustné.

Podobně pole napětí, které splňuje diferenciální rovnice rovnováhy a má spojitě všechny derivace, jež do těchto rovnic vstupují, a které je zároveň v rovnováze s vnějšími silami  $P_1, P_2, \dots, P_N$ , je staticky přípustné.

Derivací pole posuvů podle času dostaneme pole rychlosti posuvů.

Takové kinematicky přípustné pole rychlostí posuvů budeme nazývat nestabilním, bude-li mu příslušet větší příkon, než je disipovaný výkon.

Staticky přípustné pole napětí budeme považovat za stabilní, budou-li všechna napětí v celém tělese pod mezí plastických deformací.

Nyní již můžeme formulovat první větu limitující velikost mezního zatížení. Při daném zatížení tuhoplastického tělesa nemohou v něm vzniknout plastické deformace, lze-li pro ně nalézt stabilní, staticky přípustné pole napětí. To znamená, že mezní zatížení bude vždy vyšší než dané, na něž se vztahuje uvedená věta. Dané zatížení udává proto pro mezní zatížení dolní hranici.

Důkaz věty vedeme sporem. Budeme předpokládat, že opak je pravdou, tj. je-li dané zatížení  $\{P\}$ , je mezní zatížení  $\nu\{P\}$ ,  $0 < \nu < 1$ . Nechť tomuto meznímu zatížení odpovídá napjatost  $\{Q\}$ . Stabilní, staticky přípustné pole, které jsme našli pro zatížení  $\{P\}$ , je  $\{Q^*\}$ . To znamená, že za mezního stavu bude toto pole  $\nu\{Q^*\}$ . Pak musí platit princip virtuálních výkonů jednak pro rovnovážný systém  $\nu\{P\}, \{Q\}$ , jednak pro rovnovážný systém  $\nu\{P\}, \nu\{Q^*\}$ . Bude proto

$$\nu\{\dot{p}\}^T\{P\} = \int\{\dot{q}\}^T\{Q\}dV \quad (5.13)$$

$$\nu\{\dot{p}\}^T\{P\} = \nu\int\{\dot{q}\}^T\{Q^*\}dV \quad (5.14)$$

Odečtením dostaneme rovnost

$$\int\{\dot{q}\}^T\{Q\}dV = \nu\int\{\dot{q}\}^T\{Q^*\}dV \quad (5.15)$$

Odpovídá-li vektor rychlosti deformace meznímu stavu, je integrand na levé straně rovnice (5.15) podle (5.8) vždy větší než integrand na pravé straně. Proto také je integrál na levé straně větší než na pravé, ačkoli rovnice (5.15) říká opak (není  $\nu > 1$ ). Vzniká proto spor. Tím se potvrzuje platnost věty.

Druhá limitující věta je obdobná. Lze-li pro dané zatížení tuhoplastického tělesa nalézt nějaké nestabilní, kinematicky přípustné pole rychlostí posuvů, pak plastické deformace vždy vzniknou. To znamená, že mezní zatížení nemůže být větší než dané. To tedy udává pro mezní zatížení horní hranici.

Důkaz vedeme opět sporem. Dané zatížení je  $\{P\}$ , nestabilnímu, kinematicky přípustnému poli rychlostí posuvů příslušejí vektory  $\{\dot{q}\}, \{\dot{p}\}$ .

Kdyby věta nebyla pravdivá, mohlo by se zatížené těleso pohybovat také s napjatostí  $\{Q^*\}$ , která by byla s daným vnějším zatížením v rovnováze. Muselo by proto platit, že

$$\{\dot{p}\}^T \{P\} = \int \{\dot{q}\}^T \{Q^*\} dV \quad (5.16)$$

Avšak podle (5.10) a (5.8) nemůže rovnost (5.16) platit. Proto je věta pravdivá.

V další kapitole ukážeme, jak lze těchto vět, zdánlivě neužitečných, použít k přibližnému (a někdy i přesnému) výpočtu mezního zatížení pro ideálně tuhoplastická tělesa a jejich soustavy.

Věty uvedené v této kapitole se zakládají na nerovnosti (5.8), která se týká různých napjatostí při stejném poli časové derivace plastické deformace, a na rovnici (5.10), což je princip virtuálních výkonů pro tuhoplastické těleso. Ačkoli rovnice (5.8) platí i pro pružnoplastické těleso, odvozené věty se vztahují jen k tuhoplastickému tělesu vzhledem k omezení, jež platí pro rovnici (5.10). Vnucuje se proto otázka, lze-li pojem mezního stavu a mezního zatížení odvozený ve 4. kapitole pro pružnoplastické konstrukce rozšířit i na tuhoplastická tělesa a na jejich soustavy.

Při odvození obr. 18, popř. 21 jsme vycházeli z předpokladu, že pružná napjatost v konstrukci splňuje podmínky rovnováhy platné pro nedeformovaný tvar tělesa. To je možné jen tehdy, jsou-li deformace malé. Tento požadavek musí konstrukce splňovat pro všechna zatížení menší než mezní. O jeho splnění je nutné se přesvědčit případ od případu. Předpoklad tuhoplastického tělesa nepřipouští vůbec žádné deformace, dokud se nedosáhne mezního stavu. V tom je kvalitativní rozdíl.

Později ukážeme, jak se mohou v některých případech projevit velké pružné deformace a ovlivnit odezvu součásti na rostoucí zatížení. Většínou však nebývají malé deformace pružnoplastických konstrukcí při určování mezního stavu významné, takže lze vycházet z rovnic rovnováhy odvozených z tvaru nedeformovaného tělesa. Zůstává jen jedna důležitá otázka, zda totiž mezní stav pružnoplastických konstrukcí je totožný s mezním stavem tuhoplastických konstrukcí.

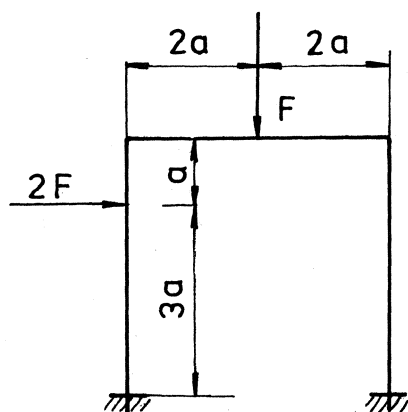
Tuto otázku lze zodpovědět tak, že znásobíme moduly pružnosti  $E$  pružnoplastické konstrukce nějakým parametrem  $\lambda > 1$  a přejdeme v limitě k nekonečnu. Přitom se bude měnit obrazec zakreslený na obr. 18, resp. 21 tak, že se budou měnit měřítka na stupnicích  $\xi, \eta$ , neboť podle definic (4.6) jsou čtverce těchto veličin rovny deformačním energiím a ty jsou nepřímo úměrné modulům pružnosti. Změnou měřítek se však na charakteru odezvy konstrukce nic nezmění, takže mezní stav pružnoplastického

tělesa je totožný s mezním stavem tuhoplastického tělesa. Důkaz tohoto tvrzení podal přesněji R. Hill roku 1951.

Při odvození vět v této kapitole jsme předpokládali spojitost derivací vstupujících do kinematických rovnic, popř. do diferenciálních rovnic rovnováhy. Tyto požadavky jsou velmi přísné. Věty odvozené v této kapitole platí i pro nespojitá pole, u nichž na hranicích nespojitostí existují pro derivace limity zleva a zprava. To lze dokázat tak, že se nespojitost nahradí spojitým průběhem v úzkém pásu, jehož šířka přejde v limitě k nule. Ukáže se, že odvozené vztahy zůstanou při tomto přechodu v platnosti.

## 6. RÁMOVÉ KONSTRUKCE

Vyšetříme mezní zatížení rámové konstrukce znázorněné na obr. 26.



OBR. 26

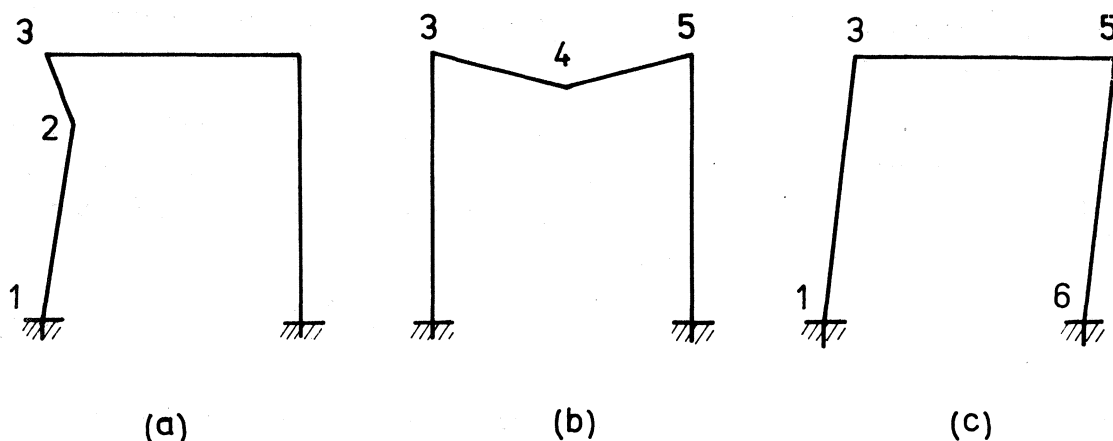
Budeme předpokládat, že je vyrobena z tuhoplastického materiálu a že mezní ohybový moment je ve všech průřezech týž. Křivost prutů v libovolném řezu je nulová, dokud je ohybový moment  $M_0$  v absolutní hodnotě menší než mezní moment  $M_m$ . Může být libovolná, je-li  $|M_0| = M_m$ . Nepřihlížíme tedy - prozatím - k tahové či k tlakové síle  $N$  v prutu.

Dostane-li se soustava do mezního stavu, vytvoří se plastický mechanismus s jedním stupněm volnosti, který je jednoznačně přiřazen typu daného

zatížení. Tento typ je dán poměrem zatěžujících sil, který se nemění. Všechny síly se tedy zvětšují proporcionálně k témuž parametru  $\nu$ . Ptáme se, při jakém  $\nu$  se dosáhne mezního stavu.

Při elastické napjatosti jsou největší absolutní hodnoty v rozích rámu, v působištích osamělých sil a v místech vetknutí. Mezi těmito lokálními extrémy probíhá ohybový moment lineárně. Lze proto předpokládat, že plastické klouby mohou vzniknout právě jen v těchto šesti místech.

Protože konstrukce je třikrát staticky neurčitá, můžeme užitím šesti kloubů vytvořit plastický mechanismus s jedním stupněm volnosti třemi lineárně nezávislými způsoby. Tyto tři mechanismy jsou zakresleny na obr. 27. V každém kloubu vzniká nekonečně velká změna křivosti (zlom) za sou-



OBR. 27

časného působení mezního momentu  $M_m$ . Za pozitivní úhlovou rychlost, s jakou se mění úhel ramen plastického kloubu, budeme brát takovou, která zvětšuje vnitřní úhel. Jednotky, v nichž měříme úhlové rychlosti, mohou být libovolné, neboť na měřítku času nemůže záležet. Proto jednoduše zvolíme v kloubu 1 na obr. 27 (a) úhlovou rychlost  $\omega_1 = -1$ . Posuv kloubu 2 vpravo bude  $v_2 = -3a\omega_1 = +3a$  a úhlová rychlost  $\omega_2 = -v_2/a = -3$ . Pak už snadno určíme  $\omega_3 = -(\omega_2 + \omega_1) = 4$ . Příkon  $P$  vnějších sil je přitom  $P = 2vFv_2 = 6vFa$  a disipovaný výkon  $D = M_m(|\omega_1| + |\omega_2| + |\omega_3|) = 8M_m$ . Tyto veličiny vypočteme obdobně i pro mechanismy znázorněné na obr. 27 (b) a (c). Výsledek je uveden v prvních třech řádcích tab. 6.1.

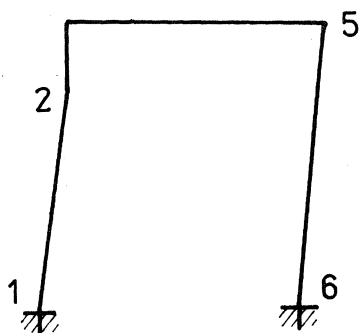
K výpočtu mezního stavu rámu podle obr. 26

Tab. 6.1

Mecha- nismus	$\omega$ v kloubu						$\frac{P}{vFa}$	$\frac{D}{M_m}$	$\frac{D}{P} \cdot \frac{vFa}{M_m}$
	1	2	3	4	5	6			
a	-1	4	-3	0	0	0	6	8	1,333
b	0	0	-1	2	-1	0	2	4	2,000
c	-1	0	1	0	-1	1	6	4	0,667
a+3c	-4	4	0	0	-3	3	24	14	0,583
c+b	-1	0	0	2	-2	1	8	6	0,750
c-b	-1	0	2	-2	0	1	4	6	1,500
a-c	0	4	-4	0	1	-1	0	10	$\infty$
a-3b	-1	4	0	-6	3	0	0	14	$\infty$



Kromě případů (a) až (c) je třeba zkoumat i jejich lineární kombinace. Z požadavku, aby vniklý mechanismus měl vždy jen jeden stupeň volnosti, vyplyne, že některá úhlová rychlost musí vymizet. Např. při superpozici (a) + 3(c) je to úhlová rychlost ve třetím kloubu. Tím se omezí počet možných lineárních kombinací; některé jsou uvedeny v řádcích 4 až 8 tabulky 6.1. Deformace příslušná plastickému mechanismu ze čtvrtého řádku je zakreslena na obr. 28. Klouby 3 a 4 zůstanou přitom tuhé.



OBR. 28

Kinematicky přípustné mechanismy jsou nestabilní, je-li  $P > D$ . Pro mechanismus (a) to znamená, že plastické deformace nastanou, kdykoli bude

$$\nu > 1,333 \frac{M_m}{Fa} \quad (6.1)$$

Hodnoty vypočtené v posledním sloupci tedy představují horní mez pro veličinu

$$\frac{\nu Fa}{M_m} = \frac{F_m a}{M_m} \quad (6.2)$$

Zde  $F_m = \nu F$  je mezní zatížení. Pravdě nejbližší bude proto nejmenší z hodnot uvedených v posledním sloupci tabulky. Je to hodnota  $7/12 \approx 0,583$  ve čtvrtém řádku tabulky, takže

$$F_m \leq \frac{7}{12} \frac{M_m}{a} \quad (6.3)$$

Nyní se pokusíme najít dolní mez pro stejnou veličinu. K tomu stačí nalézt stabilní staticky přípustné pole ohybových momentů. Rovnicím rovnováhy budou vyhovovat lineární průběhy ohybových momentů mezi jednotlivými body 1 až 6. Podle principu virtuálních výkonů musí platit pro  $j$ -tý řádek tab. 6.1.

$$\sum_{i=1}^6 M_i \omega_i^{(j)} = P^{(j)} \quad (6.4)$$

pro jakékoli tři lineárně nezávislé deformační mechanismy (např. pro  $j = 1, 2, 3$ ). Budeme-li vyšetřovat ohybové momenty pro plastický mechanismus podle obr. 28, který se podle dosavadního rozboru jeví jako nejvíce pravděpodobný, bude  $M_1 = -M_m$ ,  $M_2 = M_m$ ,  $M_5 = -M_m$ ,  $M_6 = M_m$ . Hledá se  $M_3$ ,  $M_4$  a  $\nu F$ . Pro  $j = 1, 2, 3$  dostaneme z rovnice (6.4) a tab. 6.1.

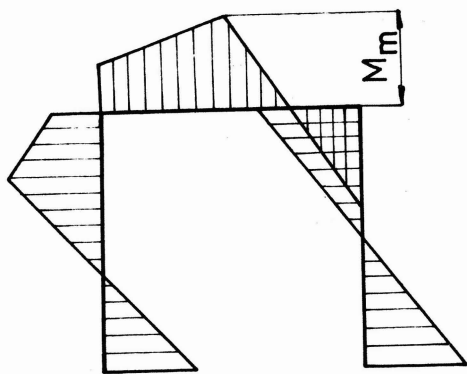
$$(-M_m)(-1) + (M_m)(4) + (M_3)(-3) = 6 \nu Fa$$

$$(M_3)(-1) + (M_4)(2) + (-M_m)(-1) = 2 \nu Fa$$

(6.5)

$$(-M_m)(-1) + (M_3)(1) + (-M_m)(-1) + (M_m)(1) = 6 \nu Fa$$

Odtud vypočteme  $M_3 = M_m/2$ ,  $M_4 = M_m/3$ ,  $\nu Fa = 7 M_m/12$  <sup>x/</sup>. Průběh ohybových momentů je tedy takový, jak je zakresleno na obr. 29. Ohybové momenty nikde nepřevyšují hodnotu mezního momentu a dosahují jí pouze v konečném počtu řezů. Zmenšíme-li proto  $\nu$  nepatrně pod hodnotu  $\nu = 7 M_m/12 Fa$ , budeme mít stabilní staticky přípustnou napjatost. Podle věty uvedené v předchozí kapitole tedy víme, že plastické deformace nemohou nastat.



Aby nastaly, musí být  $\nu \geq 7 M_m/12 Fa$ , tj.

$$F_m \geq \frac{7}{12} \frac{M_m}{a} \quad (6.6)$$

Ze srovnání s nerovností (6.3) plyne, že jsme našli přesnou hodnotu

$$F_m = \frac{7}{12} \frac{M_m}{a} \quad (6.7)$$

Nemělo by proto smyslu, kdybychom zkoumali ještě jiné plastické mechanismy. Kdybychom tuto zbytečnou práci přece podstoupili, dostali bychom např. pro mechanismus (c) ohraničení

$$\frac{4}{9} \frac{M_m}{a} \leq F_m \leq \frac{2}{3} \frac{M_m}{a} \quad (6.8)$$

Ponecháváme na čtenáři, aby se o tom přesvědčil.

Při odvození mezního zatížení (6.7) jsme zanedbali působení osové síly v prutu. Nyní se pokusíme tento nedostatek napravit. S působením

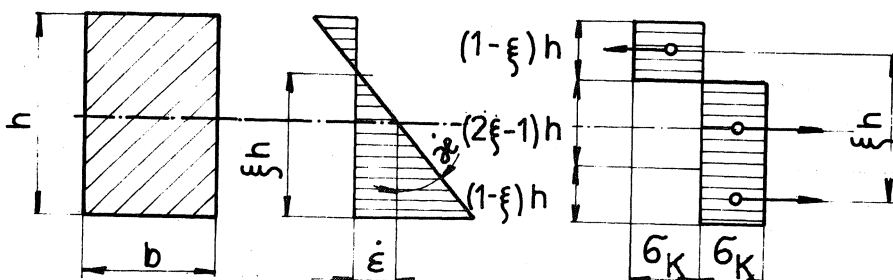
<sup>x/</sup> Ke stejnému výsledku dospějeme uvolněním jednotlivých členů mechanismu a nahrazením vzájemného působení vnitřními reakcemi.

osové síly jsme počítali už jednou, totiž u nosníku s idealizovaným I-profilem podle obr. 6. Dostali jsme pro něj model znázorněný na obr. 9. Mezní čára zde měla tvar čtverce.

Kdyby byl průřez obdélníkový (obr. 30), pak by za předpokladu zachování rovinnosti průřezu pro tuhoplastický materiál platilo, že

$$N = \sigma_K b h (2\xi - 1) \quad (6.9)$$

$$M = \sigma_K b h^2 \xi (1 - \xi) \quad (6.10)$$



OBR. 30

Tyto vzorce platí pro  $0 \leq \xi \leq 1$ . Je-li  $\xi > 1$ , je  $N = \sigma_K b h$ ,  $M = 0$ . Pro  $\xi < 0$  je  $N = -\sigma_K b h$ ,  $M = 0$ . Při čistém tahu, resp. při čistém ohybu je  $N = N_m$ , resp.  $M = M_m$ , kde

$$N_m = \sigma_K b h \quad (6.11)$$

$$M_m = \frac{1}{4} \sigma_K b h^2 \quad (6.12)$$

Když z rovnic (6.9) a (6.10) vyloučíme  $\xi$ , dostaneme s použitím (6.11) a (6.12)

$$F_1 = \left(\frac{N}{N_m}\right)^2 + \left(\frac{M}{M_m}\right) - 1 = 0 \quad (6.13)$$

Když změním smysl křivosti, změní se i smysl  $N$  a  $M$ , takže bude

$$F_2 = \left(-\frac{N}{N_m}\right)^2 + \left(-\frac{M}{M_m}\right) - 1 = 0 \quad (6.14)$$

Obě tyto rovnice lze shrnout do jednoho zápisu

$$\left(\frac{N}{N_m}\right)^2 + \left|\frac{M}{M_m}\right| - 1 = 0 \quad (6.15)$$

Mezní čára je v tomto případě složena z oblouků dvou parabol, jak je znázorněno na obr. 31. Paraboly jsou souměrné k ose  $M=0$ . Stupnice pro rychlosti přetvoření jsou zvoleny tak, aby skalární součin vektorů  $\vec{OA} \cdot \vec{AB}$  představoval měrný disipovaný výkon

$$D = \frac{M}{M_m} M_m \dot{\alpha} + \frac{N}{N_m} N_m \dot{\epsilon} = M \dot{\alpha} + N \dot{\epsilon} \quad (6.16)$$

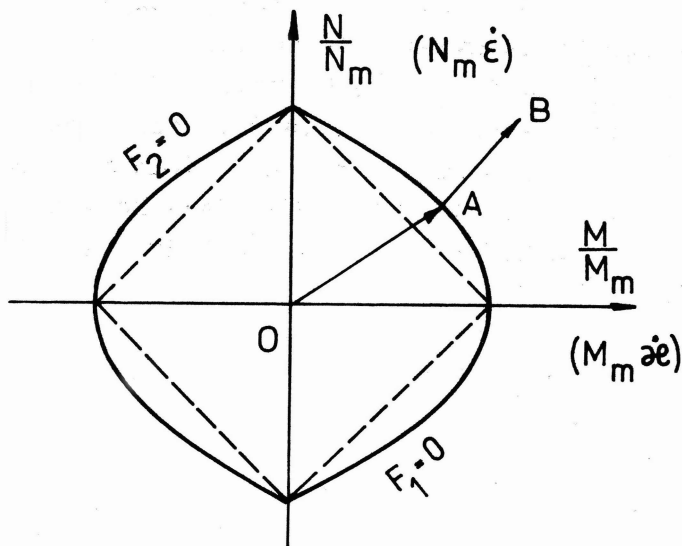
Pro zatížení znázorněné bodem A je plastický mechanismus dán směrnici vektoru  $\vec{AB}$ ; ten je kolmý k tečně v bodu A. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial F_1 / \partial N}{\partial F_1 / \partial M} = \frac{2N/N_m^2}{1/M_m} = 2 \frac{N}{N_m} \frac{M_m}{N_m} = \\ &= \left(\xi - \frac{1}{2}\right) h \end{aligned} \quad (6.17)$$

Rovnice mezní čáry pro profil podle obr. 6 je

$$\left|\frac{N}{N_m}\right| + \left|\frac{M}{M_m}\right| - 1 = 0 \quad (6.18)$$

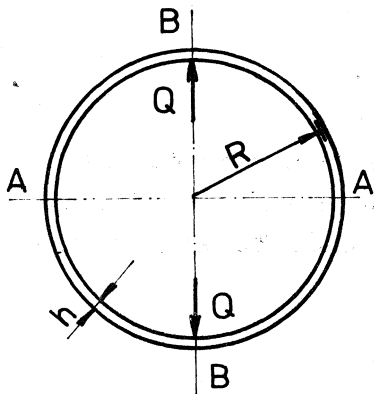
Je to čtverec vyznačený na obr. 31 čárkovaně. Je zřejmé, že tvar mezní čáry závisí na tvaru průřezu.



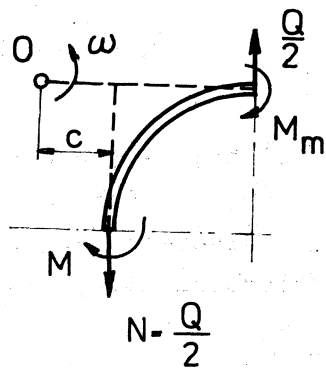
OBR. 31

Vyšetříme mezní sílu roztahující kruhovou obruč vyrobenou z prutu obdélníkového průřezu  $b \times h$ , přičemž  $b$  je tloušťka měřená kolmo ke střední rovině obruče (obr. 32). Mezní sílu jsme označili  $Q$ .

Vzniknou čtyři plastické klouby označené na obr. 32 A, B. Zaměříme pozornost na levý horní kvadrant podle obr. 33. V kloubech B nepůsobí žádná normálová síla, takže je tam podle obr. 31



OBR. 32



OBR. 33

$N = 0$ ,  $M = M_m$ ,  $\dot{\epsilon} = 0$ . V kloubech A vznikne plastický mechanismus podle rovnice (6.17), totiž

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\partial \epsilon} = \frac{Q}{N_m} \frac{M_m}{N_m} = \frac{Q}{4\sigma_k b} \quad (6.19)$$

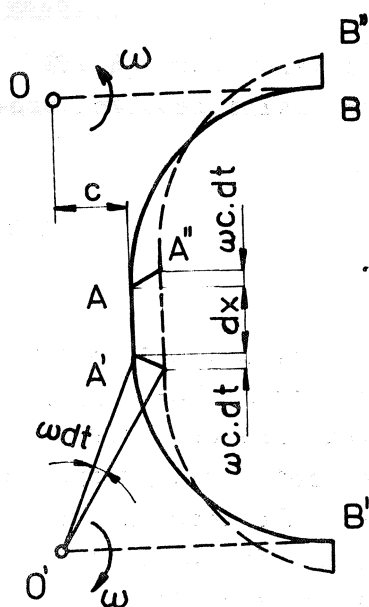
Síla  $N = \frac{1}{2} Q$ , takže ohybový moment v kloubu A je podle (6.13)

$$M = M_m \left(1 - \frac{N^2}{N_m^2}\right) = \frac{1}{4} \sigma_k b h^2 - \frac{Q^2}{16\sigma_k b} \quad (6.20)$$

Nyní vyšetříme pohyb kvadrantu na obr. 33 jako tuhého celku. Kloub B v působišti vnější síly se bude pohybovat svisle, takže pól pohybu O bude na kolmici vedené bodem B. Předpokládejme, že jeho vzdálenost od bodu B bude  $R+c$ . V kloubu A zvolíme dva nekonečně blízké řezy vzdálené  $dx$  (obr. 34). Řez A bude patřit k hornímu kvadrantu, řez A' k dolnímu. Prodloužení úsečky  $\overline{AA'} = dx$  bude  $2\omega c dt$ , takže  $\dot{\epsilon} = 2\omega c/dx$ . Řezy se vzájemně pootočí o úhel  $2\omega dt = d\alpha/dx$ , takže  $\dot{\epsilon} = 2\omega/dx$ .<sup>x/</sup> Tedy - s přihlédnutím k (6.19)

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\partial \epsilon} = c = \frac{Q}{4\sigma_k b} \quad (6.21)$$

<sup>x/</sup> Správněji bychom měli úsečku  $\overline{AA'}$  označit  $\Delta x$  a teprve potom přejít v limitě k nule.



OBR. 34

Nyní již můžeme napsat energetickou bilanci pro předpokládaný plastický mechanismus. V plastických kloubech B se dissipuje výkon  $M_m \cdot 2\omega$ , v kloubech A výkon  $M \cdot 2\omega + N \cdot 2\omega c = 2\omega(2M_m - M)$ . Tento výraz jsme upravili s použitím (6.20). Celkem

$$D = 4M_m\omega + 4\omega(2M_m - M) = \quad (6.22)$$

$$= 4\omega(3M_m - M)$$

Příkon je

$$P = 2Q \cdot \overline{BB''} = 2Q\omega(R+c) = \quad (6.23)$$

$$= 2Q\omega R + \frac{Q^2\omega}{2G_k b}$$

Do rovnice (6.22) dosadíme za  $M$  hodnotu (6.20) a porovnáme  $P=D$ . Dostaneme tak kvadratickou rovnici pro  $Q$ . Po úpravě

$$3Q^2 + 8G_k b R \cdot Q - 8G_k^2 b^2 h^2 = 0 \quad (6.24)$$

Význam má jenom kladný kořen. Vyjde

$$Q = \frac{4}{3} G_k b R \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{h^2}{R^2}} \right] \quad (6.25)$$

Výraz pod odmocninou rozvineme v řadu a za  $G_k b h^2$  dosadíme z rovnice (6.12). Dostaneme tak

$$Q = \frac{4M_m}{R} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{h}{R} \right)^2 + \frac{9}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^4 - \frac{135}{512} \left( \frac{h}{R} \right)^6 + \dots \right] \quad (6.26)$$

Pro malá  $h/R$  řada rychle konverguje. U velmi tenkých prutů je  $Q = 4M_m/R$ . Právě tolik bychom dostali, kdybychom zanedbali vliv normálové síly  $N$  na vznik plastického kloubu a předpokládali v kloubech A rovněž  $M = M_m$ .

Rovnice (6.26) byla odvozena z kinematicky přípustných deformací na mezi stability. Hodnota  $Q$  proto představuje dolní hranici pro mezní zatížení. Protože však napjatost v prutu nikde nepřesahuje mezní čáru (6.15), je to zároveň horní hranice, tedy přesné řešení. Platí pro daný fyzikální model (ideální tuhoplastický materiál). Platí i pro ideální pružnoplastický materiál, avšak s tím omezením, že mezního stavu nelze

úplně dosáhnout s malými deformacemi.

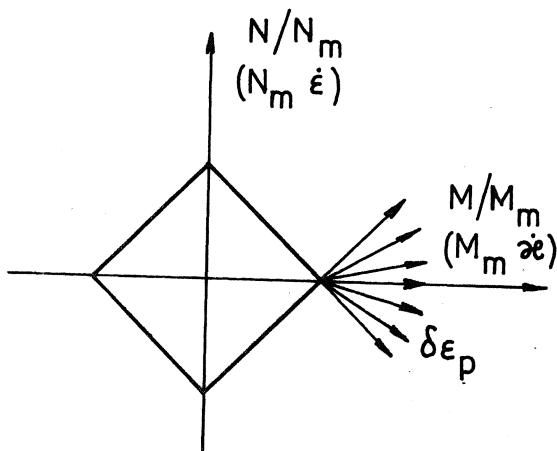
Kdybychom předpokládali průřez podle obr. 6 a mezní čáru (6.18) vyznačenou na obr. 31 čárkovaně, dostali bychom pro mezní zatížení vzorec

$$Q_I = \frac{4M_m}{R} \left[ 1 - \frac{h}{2R} + \frac{h^2}{4R^2} - \dots \right] \quad (6.27)$$

#### Poznámka

Když vycházíme z plně vytažené mezní čáry na obr. 31, platné pro obdélníkový průřez, pak ze skutečnosti, že  $N=0$  v kloubu B ihned vyplývá, že je tam také  $\dot{\epsilon}=0$ . Pro čárkovaně vytaženou mezní čáru není taková implikace možná. V bodě  $N=0, M=M_m$  má mezní čára hrot a vektor rychlosti plastických deformací nemusí spadat do osy úseček. Může ležet kdekoli v úhlu  $\pm 45^\circ$  (obr. 35). To, že  $\dot{\epsilon}=0$ , musíme v tom případě přijmout jako samostatný předpoklad nijak nevyplývající z teorie plasticity.

Jak se může čtenář přesvědčit, výpočet pro mezní čáru podle obr. 35 a rovnice (6.18) je poněkud jednodušší. Proto se často při řešení praktických úloh mezní čára, resp. plocha nahrazuje jinou, jednodušší, která je do "správné" mezní čáry, resp. plochy vepsaná.



OBR. 35

## 7. MEZNÍ ZATÍŽENÍ DESEK

Nejprve se budeme zabývat rotačně souměrnými tenkými deskami, u nichž převládají radiální a obvodové napětí  $\sigma_r, \sigma_\varphi$  nad osovým napětím  $\sigma_z$  a smykovým napětím  $\tau_{rz}$ . Ostatní napětí jsou rovna nule. Napětí vztahujeme k válcovým souřadnicím  $r, \varphi, z$ , přičemž osa  $z$  je osou rotační symetrie. Za těchto předpokladů existuje v desce rovinná napjatost a napětí  $\sigma_r, \sigma_\varphi$  jsou hlavní. K nim přísluší rychlosti poměrných deformací  $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\varphi$  vázané s časovými derivacemi hlavních křivostí střední plochy  $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\varphi$  rovnicemi

$$\dot{\epsilon}_r = z \dot{\epsilon}_r \quad \dot{\epsilon}_\varphi = z \dot{\epsilon}_\varphi \quad (7.1)$$

které vyplývají z Navierovy deformační hypotézy.

Budeme předpokládat, že pro vznik plastických deformací platí Trescova hypotéza. Měrný disipovaný výkon je pak dán vztahem - podle (3.22) -

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \sigma_k (|\dot{\epsilon}_r| + |\dot{\epsilon}_\varphi| + |\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi|) \quad (7.2)$$

Je to výkon vztažený k jednotce objemu. Dosadíme-li (7.1) do (7.2) a zintegrujeme po tloušťce desky, dostaneme měrný disipovaný výkon vztažený k jednotce střední plochy

$$D = \frac{1}{2} M_m (|\dot{\epsilon}_r| + |\dot{\epsilon}_\varphi| + |\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi|) \quad (7.3)$$

kde

$$M = \frac{1}{4} \sigma_k b h^2 \quad (7.4)$$

Výkon  $D$  podle (7.3) je časovou derivací práce, kterou konají ohybové momenty  $M_r, M_\varphi$ . Musí proto být

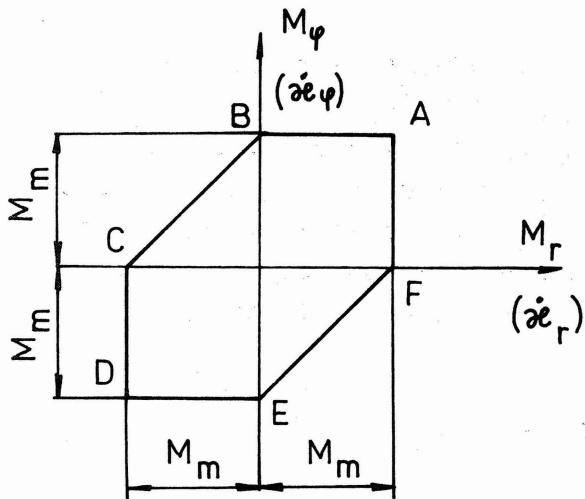
$$D = M_r \dot{\epsilon}_r + M_\varphi \dot{\epsilon}_\varphi \quad (7.5)$$

Srovnáním (7.3) a (7.5) dostaneme

$$\frac{1}{2} M_m (|\dot{\epsilon}_r| + |\dot{\epsilon}_\varphi| + |\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi|) = M_r \dot{\epsilon}_r + M_\varphi \dot{\epsilon}_\varphi \quad (7.6)$$

Protože křivosti se mohou různě a nezávisle měnit, musí se sobě rovnat koeficienty u  $\dot{\epsilon}_r$  a rovněž i u  $\dot{\epsilon}_\varphi$ . Přitom je třeba rozlišovat různé případy podle toho, zda je ta či ona křivost kladná, záporná nebo nulová. Srovnáním koeficientů dostaneme, čemu se rovnají ohybové momenty. Výsledky jsou shrnuty do tabulky 7.1. Poslední sloupec tabulky obsahuje údaj





OBR. 36

o tom, kde je koncový bod vektoru zobecněných napětí (obr. 36). Mezní čára na obr. 36 odpovídá přijaté Trescově hypotéze o maximálních tečných napětích (při plastických deformacích je  $\tau_{max} = \tau_k = konst.$ ). Koncový bod vektoru zobecněných napětí je tuž na nějaké straně, nebo v některém vrcholu.

Mezní zobecněné napjatosti tuhoplastické desky

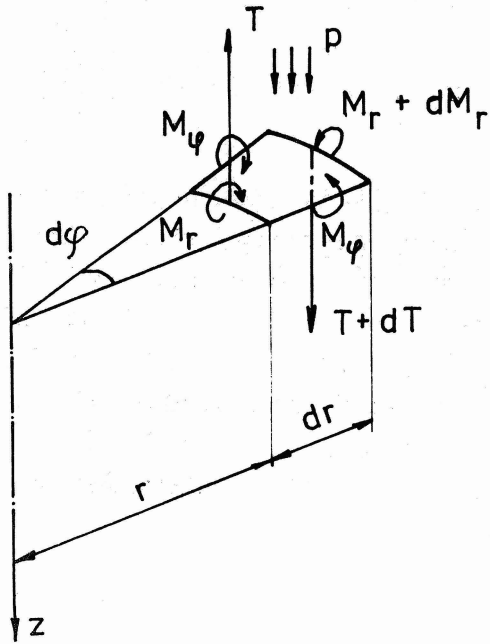
Tab. 7.1

Rychlost deformace	Ohybový moment		Napjatost (obr. 36)
	$M_r$	$M_\phi$	
$\dot{\alpha}_r > 0, \dot{\alpha}_\phi > 0$	$M_m$	$M_m$	A
$\dot{\alpha}_r = 0, \dot{\alpha}_\phi > 0$	$0 < M_r < M_m$	$M_m$	AB
$0 < -\dot{\alpha}_r < \dot{\alpha}_\phi$	0	$M_m$	B
$0 < -\dot{\alpha}_r = \dot{\alpha}_\phi$	$M_r - M_\phi = -M_m$ $-M_m < M_r < 0$	$0 < M_\phi < M_m$	BC
$-\dot{\alpha}_r > \dot{\alpha}_\phi > 0$	$-M_m$	0	C

Pro element desky ve tvaru mezikružové výseče znázorněné na obr. 37 musí platit tyto diferenciální rovnice rovnováhy

$$\frac{d}{dr} (rT) + r\rho = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{d}{dr} (rM_r) - M_\phi - rT = 0 \quad (7.8)$$



OBR. 37

V těchto rovnicích značí  $T$  posouvající sílu. Působení osamělé síly ze svých úvah vyloučíme, neboť porušuje předpoklad o zanedbatelnosti napětí  $\sigma_z, \tau_{rz}$ . Integrací rovnice (7.7) pak dostaneme

$$T = -\frac{1}{r} \int_0^r \varrho p(\varrho) d\varrho \quad (7.9)$$

kde  $\varrho$  je pomocná proměnná. Dosazením tohoto výrazu do rovnice (7.8) dostaneme

$$\frac{d}{dr} (r M_r) - M_\varphi = - \int_0^r \varrho p(\varrho) d\varrho \quad (7.10)$$

Kromě toho musí platit kinematické vztahy mezi rychlostí posuvů  $v$  a derivacemi křivostí

$$\dot{\alpha}_r = -\frac{d^2 v}{dr^2} \quad \dot{\alpha}_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \quad (7.11)$$

Platí za předpokladu, že se průhybová plocha jen málo liší od roviny a že kladný průhyb směřuje dolů.

Při mezním zatížení desky se může stát, že různé části desky budou ve stavu různé zobecněné napjatosti (odpovídající různým bodům na mezní čáře). Hranice  $\Gamma$  mezi těmito částmi budou vzhledem k rotační symetrii kruhové. Budou oddělovat části odpovídající různým řádkům v tab. 7.1.

Na hranicích  $\Gamma$  musí být bezpodmínečně spojitá posouvající síla  $T$ , radiální ohybový moment  $M_r$  i rychlost posuvu  $v$ , neboť jinak by byla porušena rovnováha nebo souvislost desky. Ostatní veličiny mohou být na jednotlivých hranicích nespojitě.

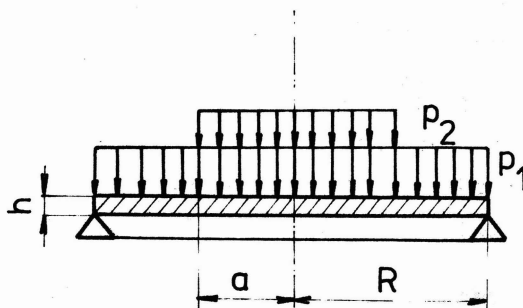
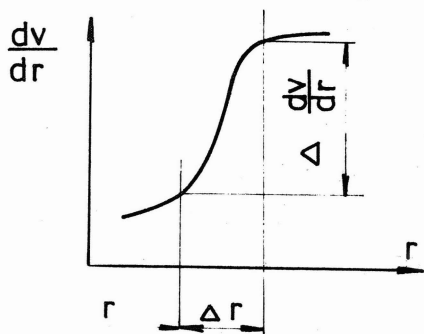
Sledujeme-li čáru na obr. 36, vidíme, že spojitá změna veličin  $M_\varphi, \dot{\alpha}_r, \dot{\alpha}_\varphi$  na hranici  $\Gamma$  může nastat jen tehdy, je-li zobecněná napjatost po jedné straně hranice dána některým vrcholem. Kdyby např. po jedné straně  $\Gamma$  byla dána nějakým bodem uvnitř strany AB, kdežto zobecněná napjatost po druhé straně hranice by odpovídala vnitřnímu bodu na BC, nutně by to znamenalo nespojitost na hranici  $\Gamma$ , a to i pro radiální moment  $M_r$ , což je fyzikálně nepřípustné. Dokonce i tehdy, připustíme-li nespojitost  $\dot{\alpha}_r$ , ale požadujeme spojitost  $\dot{\alpha}_\varphi$  (tedy hladkost průhybové

plochy), musí být napjatost po jedné straně hranice ve stavu znázorněném vrcholem. Přitom stačí, aby byla v tomto stavu jen ve velmi blízkém okolí, prakticky pouze na hranici. Je možné si totiž představit, že daná hranice vznikla limitním přechodem nějakého úzkého mezikruhového pásu, jehož hranice nakonec splynuly.

Připustíme-li na hranici  $\Gamma$  nespojitost  $\dot{\alpha}_\varphi$  (tedy zlom v průhybové ploše), bude tato hranice představovat kružnicový plastický kloub. Lze si jej představit jako úzký mezikruhový pás, v němž se derivace  $dv/dr$  velmi rychle, ale spojitě mění (obr. 38). Je-li rozdíl  $\Delta (dv/dr)$  konstantní a  $\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta r \rightarrow 0$ , je  $\lim (d^2v/dr^2) \rightarrow \infty$ , a tedy také  $\lim (\dot{\alpha}_r/\dot{\alpha}_\varphi) \rightarrow \infty$ . Vrcholy mezní čáry, ve kterých je takovýto plastický mechanismus možný, jsou pouze vrcholy A, C, F, D. Stačí uvažovat vrcholy A, C, neboť F, D odpovídají stejnému zatížení desky, ale v opačném smyslu (nahoru místo dolů). Proto musí být  $|Mr| = M_m$  (tab. 7.1).

Je dána např. kruhová deska o poloměru  $R$ , na okraji kloubově podepřená, zatížená tak, že

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 & \text{pro} & \quad 0 \leq r < a \\ p &= p_1 & \text{pro} & \quad a < r \leq R \end{aligned} \tag{7.12}$$



OBR. 38

OBR. 39

Deska je znázorněna na obr. 39. Podle zkušeností lze soudit, že v desce takto podepřená a zatížená budou oba ohybové momenty kladné. To znamená, že plastické deformace mohou odpovídat jen vnitřním bodům na úsečkách FA nebo AB anebo vrcholu A (obr. 36). Na úsečce FA by bylo  $\dot{\alpha}_\varphi = 0$ ,  $\dot{\alpha}_r > 0$ . To však není možné, neboť podle (7.11) předpoklad  $\dot{\alpha}_\varphi = 0$  implikuje  $\dot{\alpha}_r = 0$ .

Tedy úsečka FA nepřichází v úvahu. Ve vrcholu A je zase  $M_r = M_\varphi = M_m$ , což nespĺňuje rovnici rovnováhy (7.10) na žádném konečném intervalu  $r$  (posouvající síla by tam musela být nulová). Uvedená podmínka je splněna pouze v bodě  $r=0$ , tj. na ose symetrie. Zbývá tedy jediná možnost, že totiž zobecněná napjatost (mimo střed na ose symetrie) odpovídá vnitřním bodům na úsečce AB.<sup>x/</sup> Pak nutně platí, že

$$M_\varphi = M_m \quad \text{pro} \quad 0 \leq r \leq R \quad (7.13)$$

Budeme nyní určovat, jaká je míra bezpečnosti  $\nu$  desky vzhledem k meznímu zatížení. Tohoto zatížení dosáhneme, zvětšíme-li dané zatížení (7.12)  $\nu$ -krát. Dosadíme-li tento výraz, jakož i (7.13) do rovnice (7.10), dostaneme

$$M_r = M_m - \frac{1}{6} \nu (p_1 + p_2) r^2 \quad \text{pro} \quad 0 \leq r \leq a \quad (7.14)$$

$$M_r = M_m - \frac{1}{6} \nu p_1 r^2 - \frac{1}{6} \nu p_2 (3a^2 - 2\frac{a^3}{r}) \quad \text{pro} \quad a \leq r \leq R$$

Protože deska je na poloměru  $r=R$  prostě podepřená, je tam  $M_r = 0$ . Odtud dostaneme

$$\nu = \frac{6M_m}{p_1 R^2 + p_2 a^2 (3 - 2\frac{a}{r})} \quad (7.15)$$

Řešení (7.15) jsme našli tak, že jsme našli staticky přípustné pole zobecněných napětí, které vyhovuje rovnici rovnováhy (7.10) a které nikde nedosáhne meze plastických deformací, zvolíme-li  $\nu$  o málo menší než (7.15).<sup>xx/</sup> To tedy znamená, že míra bezpečnosti  $\nu$  může být také větší než odpovídá rovnici (7.15). Vztah (7.15) bychom tedy měli psát jako nerovnost. Abychom se přesvědčili, že vskutku platí rovnost, musíme najít nějaké stabilní, kinematicky přípustné pole deformačních rychlostí, které dá pro  $\nu$  horní mez. Z tab. 7.1 odečteme pro úsečku AB, že  $\dot{\alpha}_r = 0, \dot{\alpha}_\varphi > 0$ . Podle první z rovnic (7.11) musí být proto  $\nu$  lineární funkcí poloměru, tedy

$$\nu = \nu_0 (1 - \frac{r}{R}) \quad (7.16)$$

<sup>x/</sup> Vnitřními body rozumíme otevřenou množinu bodů, do níž nepatří koncové body úsečky.

<sup>xx/</sup> Dosadíme-li totiž (7.15) do (7.14), absolutní hodnota  $|M_r|$  nikde nepřesáhne mezní hodnotu  $M_m$ .

Tento vztah vyhovuje podmínice podepření desky  $v(r=R)=0$ . Když (7.16) dosadíme do (7.11), bude

$$\ddot{x}_r = 0 \quad \ddot{x}_\varphi = \frac{v_0}{Rr} \quad (7.17)$$

Když tyto hodnoty dosadíme do (7.3), vyjde

$$\bar{D} = \int_0^R \frac{M_m v_0}{Rr} \cdot 2\pi r dr = 2\pi M_m v_0 \quad (7.18)$$

Příkon vyjde

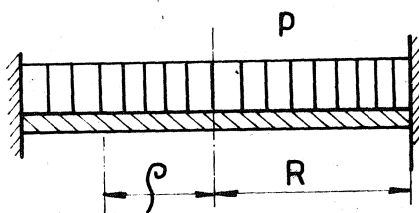
$$P = 2\pi v \int_0^R p(r)v(r)r dr = \frac{\pi}{3} v v_0 \left[ p_1 R^2 + p_2 a^2 \left(3 - 2 \frac{a}{R}\right) \right] \quad (7.19)$$

Ze srovnání  $P = \bar{D}$  vyjde opět (7.15). Je to tedy přesná hodnota odpovídající fyzikálnímu modelu.

### Poznámka

Kdybychom ignorovali napětí  $\sigma_{z1}$ ,  $\tau_{zr}$  i v případě osamělé síly  $Q$  působící v ose desky, dostali bychom pro její mezní hodnotu  $Q = 2\pi M_m$ . Stačilo by dosadit  $Q = v p_2 \pi a^2$ ,  $p_1 = 0$  a pak přejít ve vzorci (7.15) k limitě  $a \rightarrow 0$ .

Uvažme nyní případ vetknuté desky, která bude rovnoměrně zatížena tlakem  $p$  (obr. 40). V místě vetknutí bude zřejmě  $M_r < 0$ , takže deska



OBR. 40

nemůže být celá ve stavu zobecněné napjatosti AB. Předpokládejme, že v desce budou dvě oblasti oddělené hranicí  $\Gamma$  o poloměru  $\varrho$ . Vnitřní oblast bude zřejmě ve stavu AB, vnější BC. Hranice sama bude odpovídat bodu B. Je-li tento předpoklad správný, pak v intervalu  $\varrho < r \leq R$  musí být  $\ddot{x}_r = -\ddot{x}_\varphi$  (tab. 7.1, napjatost BC). Podle (7.11) je v tomto intervalu

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = 0 \quad (7.20)$$

Odtud

$$v = C \ln \frac{R}{r} \quad (7.21)$$

Funkce (7.21) splňuje okrajovou podmínku  $v(r=R)=0$ , ale nedává na tomto okraji nulový sklon, neboť pro  $C \neq 0$

$$v'(r=R) = -\frac{C}{R} \neq 0 \quad (7.22)$$

To znamená, že na poloměru  $r=R$  bude zlom, tedy kružnicový plastický kloub a  $M_r(r=R) = -M_m$ . Ve vnitřní oblasti  $0 \leq r \leq \varrho$  bude podle dřívějšího výkladu

$$M_r = M_m - \frac{1}{6} \nu p r^2 \quad (7.23)$$

Na kružnici  $r=\varrho$  (bod B) musí být  $M_r = 0$ , takže

$$\varrho = \sqrt{\frac{6M_m}{\nu p}} \quad (7.24)$$

Ve vnější oblasti (BC, tab. 7.1) je  $M_\varphi = M_m + M_r$ . Když tuto hodnotu dosadíme do rovnice rovnováhy (7.10), dostaneme pro oblast  $\varrho \leq r \leq R$

$$M_r = M_m \ln \frac{r}{\varrho} - \frac{1}{4} \nu p (r^2 - \varrho^2) \quad (7.25)$$

Tato rovnice již vyhovuje okrajové podmínce  $M_r(r=\varrho) = 0$ . Musí však vyhovovat také další okrajové podmínce  $M_r(r=R) = -M_m$ . Když sem z rovnice (7.25) dosadíme, dostaneme spolu s rovnicí (7.24) dvě rovnice pro neznámé  $\nu, \varrho$ . Vyloučením  $\nu$  z těchto rovnic vyjde transcendentní rovnice pro poměr  $x = R/\varrho$ , a to

$$1 + \ln x = \frac{3}{2} (x^2 - 1) \quad (7.26)$$

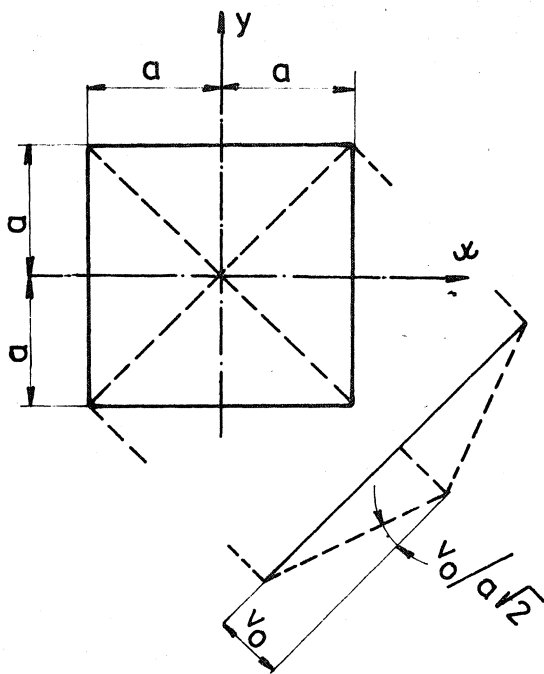
Numerickým řešením získáme kořen  $x = 1,369\ 840$  a míru bezpečnosti

$$\nu = 35,3705 M_m / Q \quad (7.27)$$

kde  $Q = \pi R^2 p$  je celková síla působící na desku. Abychom dokázali, že tato hodnota je přesným řešením, musíme najít kinematicky přípustné stabilní pole deformačních rychlostí a ukázat, že hodnota (7.27) je na mezi jeho stability. To už přenecháváme čtenáři.

Mnohem obtížnější je úloha o mezním stavu desky, která není rotačně souměrná. K ohybovým momentům přibude ještě krouticí moment a významná napětí např. ve čtvercové desce podle obr. 41 jsou tři, totiž  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  a  $\tau_{xy}$ . Směr hlavních napětí předem neznáme, čímž Trescova hypotéza ztrácí jednoduchost. Vzdáme-li se snahy nalézt přesné řešení, můžeme snadno získat pro toto řešení alespoň dolní a horní mez.

Předpokládejme, že deska je zatížena rovnoměrně tlakem  $p$  a že je na okrajích kloubově podepřena. Navrhne nějaké kinematicky přípustné pole deformačních rychlostí. Vnucuje se představa, že se deska přetvoří do tvaru čtyřstěnu, do jakési pyramidy, jejíž vrchol bude mít rychlost  $v_0$ . Úhlopříčky čtverce se stanou hranami pláště této pyramidy. Budou to plas-



tické klouby s mezním ohybovým momentem  $M_m = \sigma_k h^2/4$ . Budou čtyři, každý o délce  $a\sqrt{2}/2$ , a trojúhelníkové boční stěny, které se v nich stýkají, se budou vzájemně otáčet úhlovou rychlostí  $2v_0/a\sqrt{2}$ . To platí samozřejmě jen zpočátku, dokud jsou deformace malé. Protože předpokládáme tuhoplastický materiál, dosáhneme mezního stavu při nekonečně malých deformacích. Proto můžeme vycházet z předpokladu, že úhly stěn pyramidy se základnou budou velmi malé. Disipovaný výkon tedy bude

$$D = 4 (M_m a\sqrt{2}) \left( \frac{2v_0}{a\sqrt{2}} \right) = 8 M_m v_0 \quad (7.28)$$

OBR. 41

Příkon bude dán součinem tlaku  $p$  a rychlosti, s jakou se mění objem pyramidy

$$P = v p \frac{1}{3} 4 a^2 v_0 \quad (7.29)$$

Na hranici stability bude  $P = D$ . Odtud

$$v \leq \frac{6 M_m}{p a^2} = v_h \quad (7.30)$$

To je horní mez pro přesnou míru bezpečnosti, proto jsme vztah (7.30) zapsali jako nerovnost.

Abychom zjistili dolní mez, musíme najít nějaké staticky přípustné pole zobecněné napjatosti, které nikde nepřekročí mez plastických deformací a splní podmínky rovnováhy. Pro desku v pravouhlých souřadnicích je diferenciální rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -v p \quad (7.31)$$

Protože pole zobecněných napětí nemusí nijak souviset s polem deformačních rychlostí, které jsme použili dříve, máme značnou volnost při jeho volbě. Zvolíme např.  $M_{xy} = 0$  a ostatní dva momenty ve tvaru kvadratických funkcí splňujících okrajové podmínky  $M_x = 0$  pro  $x = \pm a$ ,  $M_y = 0$  pro  $y = \pm a$ .

Bude

$$\begin{aligned}M_x &= c (a^2 - x^2) \\M_y &= c (a^2 - y^2)\end{aligned}\tag{7.32}$$

Konstantu  $c$  zvolíme tak, aby byla splněna rovnice (7.31). Vyjde  $c = p/4$ . Protože jsme zvolili  $M_{xy} = 0$ , jsou ohybová napětí  $\sigma_x, \sigma_y$  hlavní. Pro ohybové momenty (7.32) můžeme tedy použít Trescovu hypotézu a mezní čáru zakreslenou na obr. 36, kde  $M_r, M_\varphi$  zaměníme za  $M_x, M_y$ . Na mezi plastických deformací bude  $c a^2 = M_m$ . Tehdy totiž uprostřed desky nastane mezní zobecněná napjatost znázorněná na obr. 36 vrcholem A. Ze srovnání s hodnotou  $c$  dostaneme

$$v \cong \frac{4 M_m}{p a^2} = v_d\tag{7.33}$$

Je to dolní mez, takže celkem máme

$$\frac{4 M_m}{p a^2} \leq v \leq \frac{6 M_m}{p a^2}\tag{7.34}$$

## 8. ROTAČNĚ SOUMĚRNÁ VÁLCOVÁ SKOŘEPINA

Na obr. 31 jsou zakresleny dvě mezní čáry. Plně vytažená se týká obdélníkového průřezu, čárkovaná se týká idealizovaného I profilu podle obr. 6. Dostaneme jej z obdélníkového průřezu, když zanedbáme podíl vnitřních vláken nosníku na přenosu namáhání. Je to stejné, jako kdybychom prohlásili za mezní plastickou napjatost v celém průřezu tu, při které nastanou plastické deformace právě jen ve vnějších vláknech (buď jen na jedné straně obdélníka, nebo na dvou protějších stranách). Jestliže připustíme takovou nepřesnost, můžeme použít čtvercovou mezní čáru i pro obdélníkový průřez. Výpočet se zjednoduší, neboť vektor rychlosti plastické deformace bude mít v regulárních bodech jen dva možné plastické mechanismy odpovídající směrům tohoto vektoru  $\pm 45^\circ$ .

U rotačně souměrné skořepiny je situace obdobná jako u nosníku s obdélníkovým průřezem. V rovnoběžkových a meridiánových hlavních řezech jsou

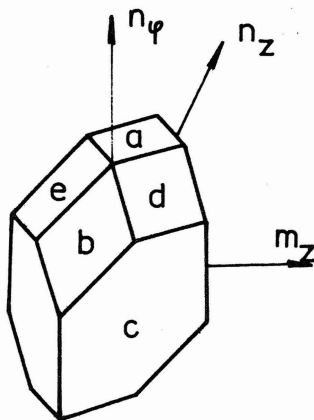


ohybové momenty  $M_z, M_\varphi$  a normálové síly  $N_z, N_\varphi$ . V rovnoběžkových řezech působí ještě posouvající síla  $T$ , avšak smyková napětí, která jejím působením vznikají, zanedbáváme. Souřadnicová osa  $Z$  je osou rotační symetrie. Jde-li o válcovou skořepinu, bude mít malá deformace meridiánu (povrchové přímky válce) zanedbatelný vliv na změnu křivosti skořepiny v obvodovém směru. Rychlost změny obvodové křivosti  $\dot{\chi}_\varphi$  můžeme proto považovat za nulovou.<sup>x/</sup> To pak znamená, že ohybový moment  $M_\varphi$  nemůže ničím přispět k disipaci energie, takže jej lze zanedbat. Zbývají tedy tyto relevantní veličiny (v bezrozměrovém tvaru)

$$n_z = \frac{N_z}{N_m} \quad n_\varphi = \frac{N_\varphi}{N_m} \quad m_z = \frac{M_z}{M_m} \quad (8.1)$$

Přítom  $N_m = \sigma_k h, \quad M_m = \frac{1}{4} \sigma_k h^2.$

Přijmeme-li Trescovu hypotézu a tvar mezní plochy zjednodušený na mnohostěn užitím předpokladu, že mezní napjatost ve vnějším vláknu znamená mezní napjatost v celé stěně, bude mít mezní plocha tvar dváctistěnu znázorněného na obr. 42. Označené stěny mají rovnice



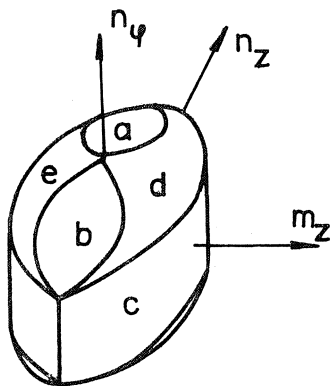
- a)  $n_\varphi = 1$
  - b)  $n_\varphi - n_z = 1$
  - c)  $n_z - m_z = -1$
  - d)  $2n_\varphi - n_z + m_z = 2$
  - e)  $2n_\varphi - n_z - m_z = 2$
- (8.2)

Rovnice a) vyjadřuje mezní napjatost, když  $n_\varphi \geq n_z \pm m_z \geq 0$ . Rovnice b), když  $n_\varphi > n_z, m_z = 0$ . Podobně i ostatní případy odpovídají vždy nějaké posloupnosti hlavních napětí (ve vnějším vláknu) seřazených podle velikosti. Na mezi plastických deformací je pak vždy  $\tau_{max} = \tau_k = \sigma_k / 2$ .

OBR. 42

Kdybychom vycházeli ze skutečných mezních stavů napjatosti v celém průřezu (obdobně jako na obr. 30), dostali bychom mezní plochu omezenou zčásti rovinami, zčásti pa-

<sup>x/</sup> Kdyby se element meridiánu pouze otočil o malý úhel  $\psi$ , změnila by se křivost  $\chi_\varphi = 1/R$  o  $\Delta \chi_\varphi = 1/R - \cos \psi / R \doteq \psi^2 / 2R \approx 0$ . Kdyby se radiálně posunul o malou hodnotu  $u$ , bylo by  $\Delta \chi_\varphi = (1/R) - 1/(R+u) \doteq u/R^2 \approx 0$ .



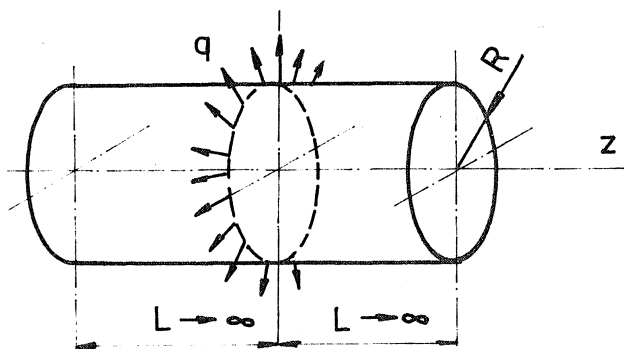
OBR. 43

parabolickými plochami (obr. 43). Označené stěny by měly rovnice

- a)  $n_\varphi = 1$
- b)  $n_\varphi - n_z = 1$
- c)  $m_z = 1 - n_z^2$  (8.3)
- d)  $m_z = \frac{1}{2} [2 - (2n_\varphi - 1)^2 - (2n_\varphi - 2n_z - 1)^2]$
- e)  $m_z = -\frac{1}{2} [2 - (2n_\varphi - 1)^2 - (2n_\varphi - 2n_z - 1)^2]$

Stěny a) b) jsou rovinné, stěna c) je parabolický válec, stěny d) e) jsou tvořeny paraboloidy.

Jako příklad uvedeme rozpínání nekonečné válcové skořepiny radiální silou  $q$  rovnoměrně rozdělenou po rovnoběžkové kružnici v řezu  $z=0$  (obr. 44). Osová síla je nulová, takže  $n_z=0$ . Z mnohostěnu znázorněného na obr. 42 se proto uplatní jen řez zakreslený na obr. 45.



OBR. 44

pásů, v nichž se derivace měnila sice značně, avšak spojitě. Úhlová rychlost, s jakou se mění úhel přiléhajících přímých částí meridiánu, má v řezech  $z = \pm c$  absolutní velikost  $v_0/c$  a v řezu  $z=0$  je  $2v_0/c$ . Měrný disipovaný výkon (připadající na jednotku délky obvodu) je proto

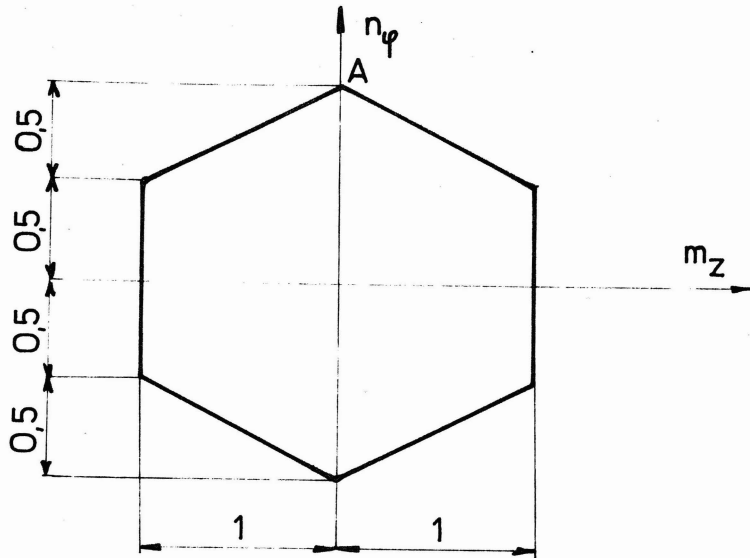
$$D_1 = 4 M_m v_0 / c \quad (8.5)$$

V řezech  $0 \leq |z| < c$  vzniká mimoto obvodové prodloužení, jehož rychlost je  $v_0 |z| / cR$ . Protože jde o přímé části, je zde  $\mathcal{K}_z = \mathcal{K}_\varphi = 0$ , a tedy též

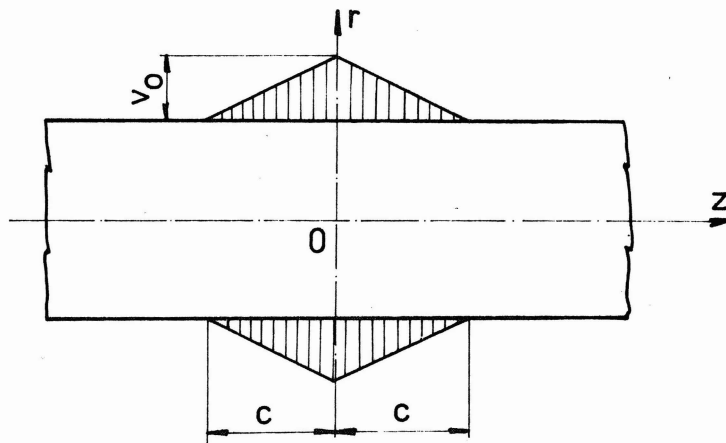
Nejprve navrhne kinematically přípustné pole deformačních rychlostí. Podle obr. 46 např. zvolíme rychlost radiálních posuvů

$$\begin{aligned} v &= v_0 \left(1 - \left|\frac{z}{c}\right|\right) & \text{pro } |z| < c \\ v &= 0 & \text{pro } |z| \geq c \end{aligned} \quad (8.4)$$

V řezech  $z=0$ ,  $z=\pm c$  vzniknou plastické klouby, o nichž si můžeme myslet, že vznikly limitním přechodem z úzkých



OBR. 45



OBR. 46

$m_z = 0$  . To odpovídá vrcholu A mezní čáry na obr. 45, takže  $N_\psi = N_m$  .  
 Výkon disipovaný obvodovým prodlužováním bude celkem

$$D_2 = 2 N_m \frac{v_0}{cR} \int_0^c z dz = \frac{N_m v_0 c}{R} \quad (8.6)$$

Měrný příkon bude  $P = \nu q v_0 = D_1 + D_2$  . Z tohoto vztahu dostaneme pro horní mez parametru  $\nu$

$$v_h = \frac{4 M_m}{q c} + \frac{N_m c}{q R} \quad (8.7)$$

Je zřejmé, že délku musíme volit tak, aby tato horní mez vyšla co nejmenší, tedy

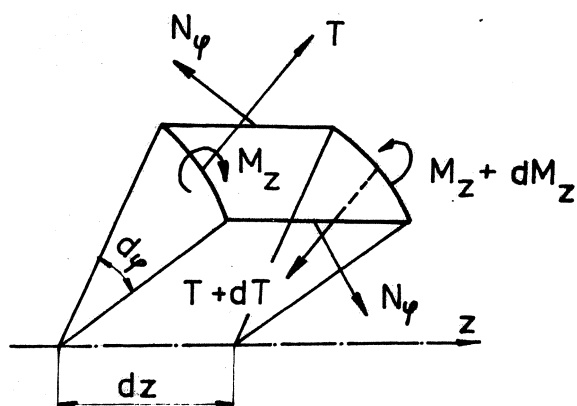
$$c = \sqrt{\frac{4 M_m R}{N_m}} = \sqrt{R h} \quad (8.8)$$

Když výraz (8.8) dosadíme do (8.7), dostaneme po úpravě horní mez pro míru bezpečnosti

$$v_h = 2 \frac{N_m}{q} \sqrt{\frac{h}{R}} \quad (8.9)$$

Nyní jde o to, najít dolní mez. Pro element skořepiny zakreslený na obr. 47 platí rovnice rovnováhy

$$\frac{dM_z}{dz} = T \quad \frac{dT}{dz} = -\frac{N_\varphi}{R} \quad (8.10)$$



OBR. 47

Posouvající síla  $T$  má těsně vpravo od řezu  $z=0$  velikost  $vq/2$ . Proto moment  $M_z$  nemůže být konstantní. Vyloučíme-li posouvající sílu z rovnic (8.10), dostaneme rovnici rovnováhy

$$\frac{d^2 M_z}{dz^2} = -\frac{N_\varphi}{R} \quad (8.11)$$

Předpokládejme, že síla  $N_\varphi = N_1 = \text{konst.}$  Rovnici (8.11) pak můžeme integrovat s okrajovými podmínkami  $M_z(0) = -M_1$  (tento moment bude záporný, což vyplývá z názoru),  $M_z'(0) = vq/2$ . Vyjde

$$M_z = -M_1 + \frac{1}{2} vq z - \frac{1}{2} N z^2 / R \quad (8.12)$$

Maximální hodnotu dostaneme v řezu  $z = z_1$  ( $z$  podmínky  $M_z'(z_1) = 0$ ), přičemž

$$z_1 = \frac{vq R}{2 N_1} \quad (8.13)$$

Maximální moment v řezu  $z = z_1$  by neměl přestoupit hodnotu  $M_1$  v řezu  $z=0$ .

Odtud vyjde

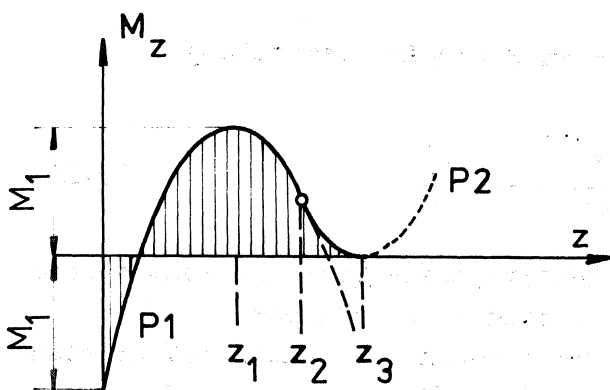
$$v = \sqrt{\frac{16 M_1 N_1}{q^2 R}} = v_d \quad (8.14)$$

Když za  $v q^{1/2}$  dosadíme z rovnice (8.14) do (8.13), dostaneme

$$z_1 = \sqrt{\frac{4 M_1 R}{N_1}} \quad (8.15)$$

Rovnici (8.12) pak můžeme upravit na tvar

$$M_z = M_1 - \frac{N_1}{2R} (z - z_1)^2 \quad (8.16)$$

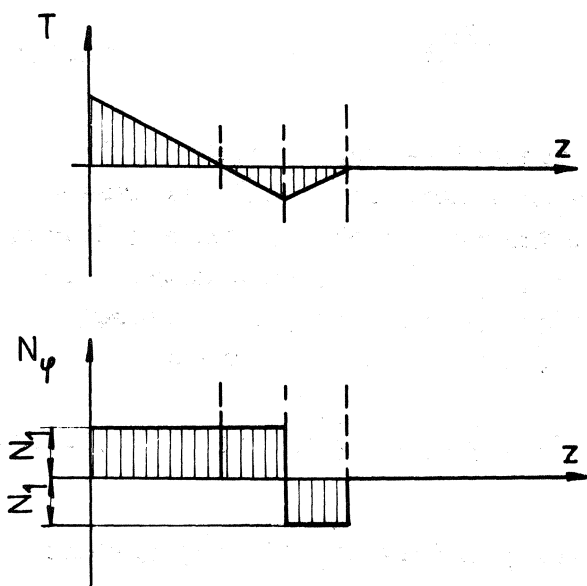


Odtud je ihned zřejmé, že vrchol paraboly má souřadnici  $z = z_1$ . Platnost paraboly (8.16) se může vztahovat jen k intervalu  $0 \leq z \leq z_2$ , kde  $z_1 < z_2 < \infty$ . Z řezu  $z = z_2$  se musíme dostat nějakým hladkým přechodem k nulovým veličinám  $M_z = 0, T = 0$  pro  $z \geq z_3$  (obr. 48).

Parabolu P1 podle (8.16) proto spojíme s parabolou P2, která má rovnici

$$M_z = \frac{N_1}{2R} (z - z_3)^2 \quad (8.17)$$

ta bude platit v intervalu  $z_2 \leq z \leq z_3$ . Z podmínky hladké návaznosti obou parabol dostaneme, že  $z_2 = 1,5 z_1$ ,  $z_3 = 2 z_1$ . Veličiny  $T, N_\varphi$  odvozené užitím rovnic (8.10), jsou rovněž zakresleny v obr. 48. Pro  $z > z_3$  jsou všechny silové veličiny nulové.



OBR. 48

Nalezli jsme tak napjatost, která může dosáhnout mezní čáru jen v řezech  $z = 0$  a  $z = z_1$ . Odpovídající složky zobecněné napjatosti

$m_1 = M_1 / M_m$ ,  $n_1 = N_1 / N_m$  musí splňovat podmínku plasticity buď

$$2 |n_1| + |m_1| = 2 \quad (8.18)$$

nebo

$$2 |n_1| < 1 \quad |m_1| = 1 \quad (8.19)$$

To odpovídá hraničním mezní čáry na obr. 45. Maximum hodnoty parametru  $\nu_d$  podle (8.14) dostaneme, když bude maximální součin  $m_1 n_1$ . Podle (8.18) a (8.19) to bude tehdy, zvolíme-li  $m_1 = 1$ ,  $n_1 = 0,5$ . Pak

$$\nu_d = \sqrt{2} \frac{N_m}{q_f} \sqrt{\frac{h}{R}} \quad (8.20)$$

Míra bezpečnosti  $\nu$  bude tedy v mezích

$$\sqrt{2} \frac{N_m}{q_f} \sqrt{\frac{h}{R}} \leq \nu \leq 2 \frac{N_m}{q_f} \sqrt{\frac{h}{R}} \quad (8.21)$$

Přesné řešení, které dává model plasticity podle obr. 42, je

$$\nu = 1,73 \frac{N_m}{q_f} \sqrt{\frac{h}{R}} \quad (8.22)$$

Pro model podle obr. 43 je přesně

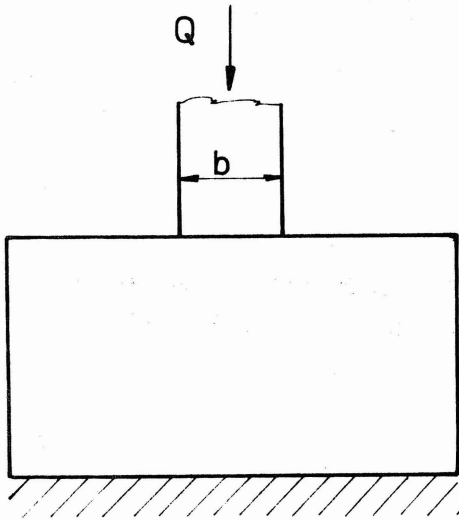
$$\nu = 1,82 \frac{N_m}{q_f} \sqrt{\frac{h}{R}} \quad (8.23)$$

Odvození přesných výsledků, při němž se musí důsledně respektovat návaznost kinematického a statického pole, je mnohem pracnější, a nebudeme je proto uvádět.

## 9. VTLAČOVÁNÍ KOVADLA

Předpokládejme, že do tělesa ve tvaru kvádrů bude vtlačován absolutně tuhý hrenol za podmínek rovinného přetvoření (obr. 49). To znamená, že bude  $\varepsilon_z = 0$ , tedy

$$\sigma_z = \mu (\sigma_x + \sigma_y) = \mu (\sigma_1 + \sigma_2)$$



OBR. 49

Zde  $\mu$  je Poissonovo číslo. Pro mezní sílu  $Q$ , která působí při plastických deformacích, najdeme přibližné řešení.

Protože třetí hlavní napětí  $\sigma_3 = \sigma_z$  je podle (9.1) vždy uprostřed mezi hodnotami  $\sigma_1, \sigma_2$  (za plastických deformací je  $\mu = 0,5$ ), bude podle Trescovy hypotézy

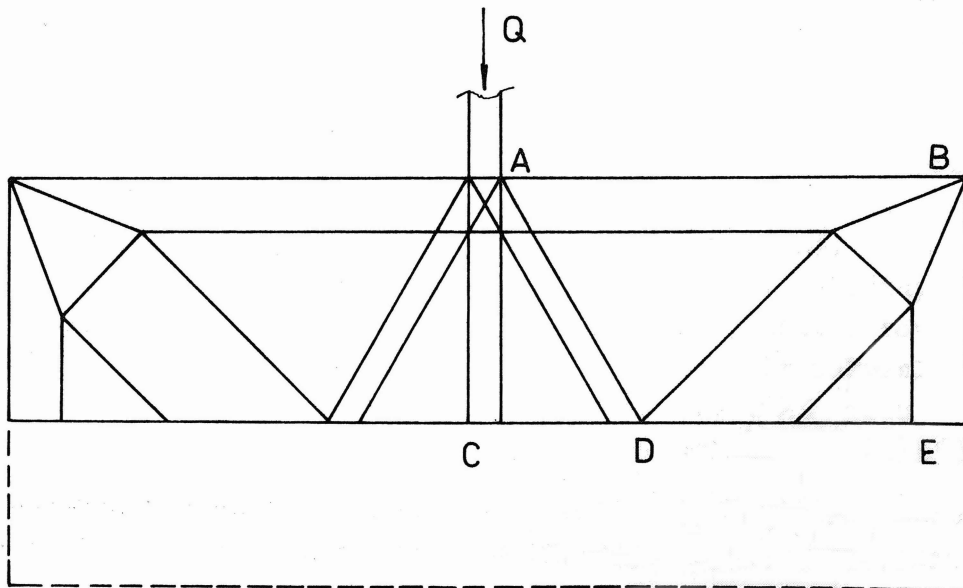
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{1}{2} \sigma_k = k \quad (9.2)$$

Najdeme staticky přípustné pole napětí ve stlačovaném bloku, které nepřekročí nikde mezní čáru popsanou rovnicí (9.2).

Musí tedy platit, že

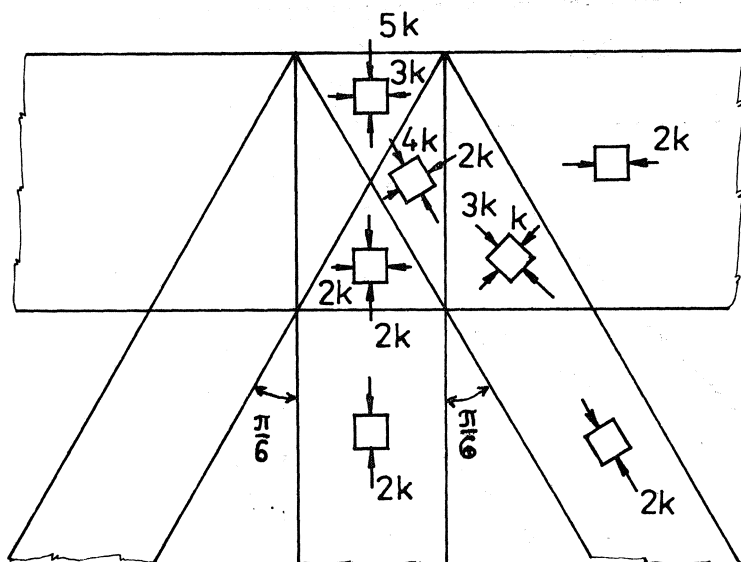
$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2k \quad (9.3)$$

Využijeme poznatku, že napěťové pole nemusí být spojité. Jedno z možných napěťových polí je zakresleno na obr. 50. Čárkovaně naznačená část je absolutně tuhá. Nad ní je z bloku vyňata prutová konstrukce skládající se z prutů AC, AD, AB, BD, BE a z prutů souměrných. Mezi pruty je nezátížený



OBR. 50

materiál. Plně vytažené čáry jsou tedy čárami nespojitostí. Uzly A, resp. B jsou zakresleny zvlášť na obr. 51, resp. 52. Můžeme se přesvědčit, že



OBR. 51

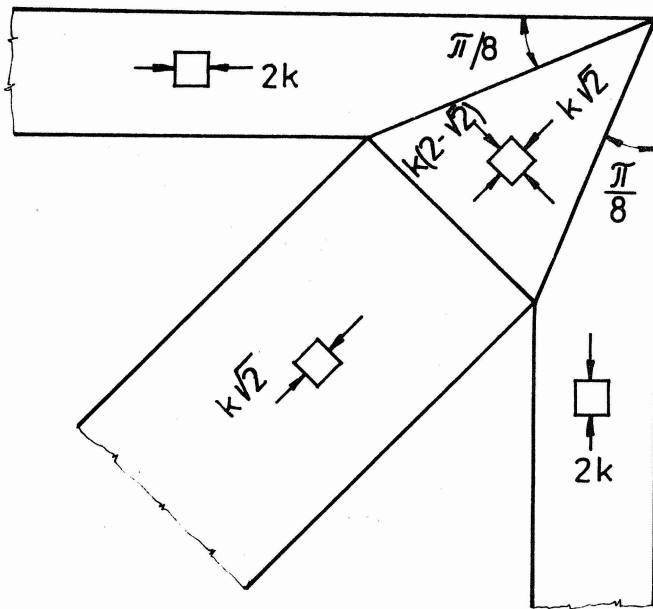
na čárách nespojitosti jsou splněny podmínky akce a reakce (tečné napětí je z obou stran stejné, normálové rovněž). Protože podle obr. 51 vyvozuje razník tlak  $5k$ , je dolní hranice pro mezní sílu  $Q$  rovna

$$Q_d = 5kb = 2,56kb \quad (9.4)$$

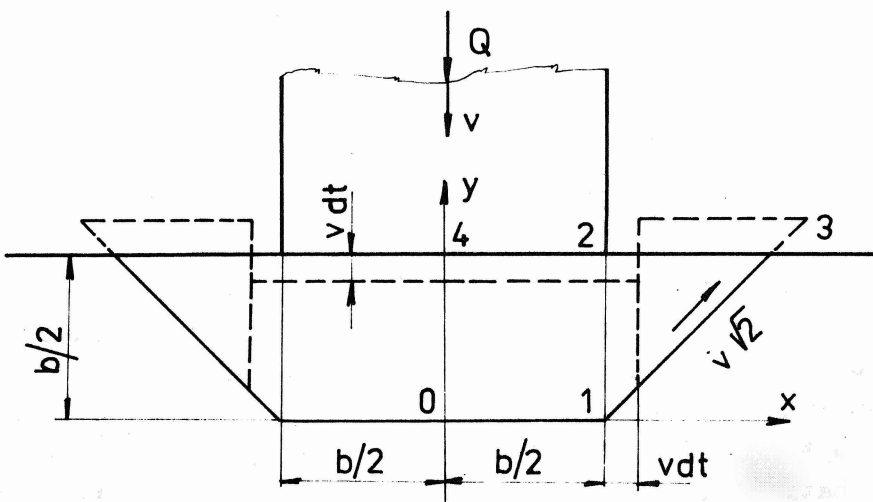
Je vztažena k jednotkové tloušťce bloku (desky) na obr. 49.

Abychom našli horní hranici, vymyslíme si nějaké kinematické přípustné pole deformačních rychlostí. Jedna z možností je zakreslena na obr. 53. Obdélníková část pod kovadlem se ve svislém směru stlačuje a ve vodorovném roztahuje tak, aby se objem nezměnil. Trojúhelníkové boční části jsou tím vytlačovány do strany a vzhůru. Model musí být geometricky kompatibilní, ale pole napjatosti, které odpovídá poli deformačních rychlostí, nemusí vůbec splňovat podmínky rovnováhy. Tak, jako jsme se při hledání staticky přípustného pole napjatosti nemusili starat o pole rychlostí posuvů či přetvoření, nemusíme se nyní starat ani o pole napětí. Jediné, na čem záleží, je správný výpočet disipova-





OBR. 52



OBR. 53

ného výkonu a příkonu pro přijatý kinematically přípustný model.

V poli deformačních rychlostí budou existovat čáry nespojitosti (kluzové čáry), o kterých můžeme předpokládat, že vznikly degenerací úzkých pásů, v nichž napjatost splňuje Trescovu podmínku plasticity ( $\tau_{max} = k$ ), ale nepodléhá podmínkám rovnováhy. Při relativní skluzové rychlosti  $\Delta v$  se na délce  $ds$  těchto čar disipuje výkon  $k b ds \Delta v$ . To platí bez zřetele na velikost hlavních napětí, o která se nepotřebujeme starat.

Na obr. 53 máme obdélníkovou část, která se v jednom směru zkracuje a v druhém prodlužuje. Její pravou polovinu jsme označili 0124. Můžeme o ní předpokládat, že je ve směru osy  $x$  roztahována napětím  $\sigma_x = 2k - p$ , přičemž  $\sigma_y = -p$ ,  $\tau_{xy} = 0$ . Při plastických deformacích je změna objemu nulová, takže hydrostatická složka napjatosti  $-p$  nekoná žádnou práci. Můžeme ji proto v bilanci výkonů vynechat a představit si, že jde o prostý tah  $\sigma_x = 2k$ ,  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$ . Disipovaný výkon při přetváření této oblasti bude (na stěně 12)

$$D_1 = \underbrace{(2k)\left(\frac{b}{2}\right)}_{\text{síla}} \cdot \underbrace{(v)}_{\text{rychlost}} = k b v \quad (9.5)$$

Čáry, podél nichž dochází k relativnímu kluzu, můžeme si myslit jako zdegenerované úzké pásy namáhané čistým smykem o velikosti  $\tau = k$ . Výkon disipovaný na straně 01, kde je relativní rychlost kluzu  $\Delta v_x = 2 v_x / b$ , bude

$$D_2 = \int_0^{b/2} \frac{2v_x}{b} k dx = \frac{1}{4} k b v \quad (9.6)$$

Na straně 12 je  $\Delta v_y = v + 2 v_y / b$ , takže

$$D_3 = \int_0^{b/2} (v + 2 v_y / b) k dy = \frac{3}{4} k b v \quad (9.7)$$

Konečně na straně 13 je

$$D_4 = k \frac{b}{2} \sqrt{2} \cdot v \sqrt{2} = k b v \quad (9.8)$$

Je-li stěna 24 hladká, nedochází na ní k disipaci energie. Je-li drsná, vzniká zde rovněž kluz spojený s disipací výkonu stejnou jako na stěně 01, tj.

$$D_5 = D_2 = \frac{1}{4} k b v \quad (9.9)$$

Příkon je

$$P = Q v \quad (9.10)$$

Bilance výkonu a příkonu dává pro hladký povrch

$$P = 2(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) \quad (9.11)$$

a pro drsný povrch

$$P = 2(D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5) \quad (9.12)$$

Odtud vyjde horní hranice  $Q_h$  pro sílu  $Q$

$$\left. \begin{aligned} Q_h &= 6 k b = 3 \sigma_k b && \text{(povrch hladký)} \\ Q_h &= 6,5 k b = 3,25 \sigma_k b && \text{(povrch drsný)} \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Celkem tedy pro hladký povrch bude

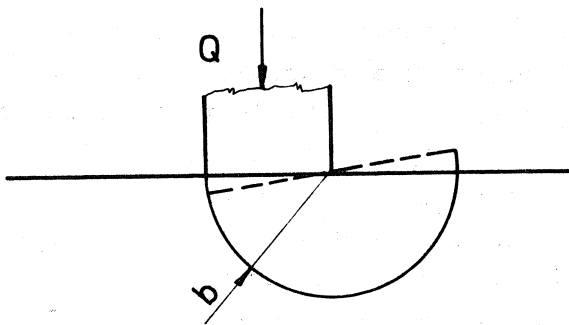
$$2,5 \sigma_k b \leq Q \leq 3 \sigma_k b \quad (9.14)$$

Přesné řešení, které odpovídá tomuto případu, je

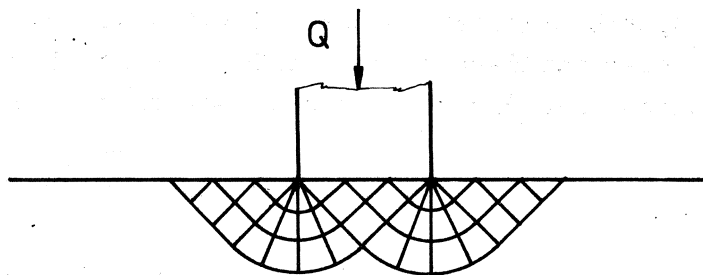
$$Q = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \sigma_k b \doteq 2,57 \sigma_k b \quad (9.15)$$

#### Poznámka

Bylo ovšem možné vytvořit i jednodušší modely než podle obr. 50 a 53. Omezující interval by však vyšel širší než (9.14). Např. kinematicky přípustné pole deformačních rychlostí zakreslené na obr. 54 dá  $P = Q \omega b / 2$ ,  $D = \pi b k \cdot \omega b = \pi \omega k b^2$ , takže vyjde  $Q_h = 2\pi k b \doteq 3,14 \sigma_k b$ . Pole kluzových čar pro přesné řešení je zakresleno na obr. 55. Řešení lze najít v každé učebnici plasticity. Naším cílem nebylo podat toto přesné řešení, které je ostatně možné jen v několika málo jednoduchých případech rovinného plastického přetváření, ale ukázat možnosti přibližného, vždy dostupného řešení.



OBR. 54



OBR. 55

## 10. SROVNÁNÍ S EXPERIMENTY

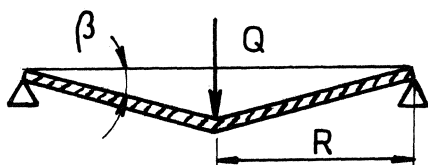
Výpočet mezních plastických stavů platí pro ideální tuhoplastický materiál bez zpevnění. Očekáváme, že bude platit i pro skutečný materiál, jestliže má výraznou mez kluzu a žádné nebo jen velmi malé zpevnění. Někdy však dochází k odchýlkám vlivem toho, že pružné deformace přivodí natolik významnou změnu geometrické konfigurace, že se mezní stav vyvíjí za podmínek odpovídajících tomuto deformovanému tvaru, a nikoli původnímu tvaru, jak se předpokládalo.

Proto např. u příčně zatížené tenké desky mohou vzniknout velké plastické deformace ještě dříve, než se dosáhne mezního tvaru vypočítaného pro tuhoplastickou desku. Do hry totiž vstoupí membránová napětí, kte-

rá v tuhoplastické desce před započítáním plastických deformací nepůsobila, a velké plastické deformace se začnou vyvíjet při menších ohybových momentech, než je  $M_m = \sigma_k h^2 / 4$ . Např. bylo zjištěno, že u prostě podepřené kruhové ocelové desky zatížené silou  $Q$  uprostřed začnou vznikat větší plastické deformace už při síle asi 80 až 85 % teoretické mezní síly, je-li  $R/h = 5$ , avšak jen asi 65 %, je-li  $R/h = 20$ . To však ještě neznamená, že nosnost desky je vyčerpána. Není vyčerpána dokonce ani u desky z ideálně tuhoplastického materiálu, dosáhne-li se mezního stavu. Vlivem změny tvaru se změni i plastický mechanismus a deska je schopna přenést i větší zatížení, než je teoretická mezní hodnota. Skutečná nosnost desky je však omezená i tehdy, a to vyčerpáním možnosti rozvíjet bez porušení plastické deformace. Praktický význam výpočtu únosnosti podle mezních plastických stavů je tedy závislý nejen na vlastnostech materiálu, ale i na typu konstrukce, především na tom, jak rozvíjející se deformace přispívají ke změně plastického mechanismu.

Způsob přibližného ocenění vlivu deformací ukážeme na příkladu kruhové desky zatížené příčnou silou uprostřed. Deska je prostě podepřená s možností radiálního posuvu v podporách a mezní síla vychází

$$Q_m = 2\pi M_m = \frac{\pi}{2} \sigma_k h^2 \quad (10.1)$$



OBR. 56

Deska se přitom deformuje do tvaru kuželové skořepiny (obr. 56). Bod na střední ploše desky, který byl na poloměru  $r$ , bude nyní na poloměru  $r \cos \beta$ , pokud se střední plocha nebude radiálně roztahovat. Tomu odpovídá obvodové poměrné prodloužení

$$\epsilon_\varphi = \frac{r \cos \beta - r}{r} \doteq -\frac{1}{2} \beta^2 \quad (10.2)$$

Křivost v obvodovém směru bude

$$\kappa_\varphi = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \beta \doteq \frac{\beta}{r} \quad (10.3)$$

Pohybuje-li se působitě síly dolů rychlostí  $v$ , je úhel  $\beta = \omega t = vt/R$ , takže

$$\dot{\epsilon}_\varphi = -\beta \dot{\beta} = -\frac{v^2}{R^2} t \quad (10.4)$$

$$\dot{\kappa}_\varphi = \frac{\dot{\beta}}{r} = \frac{v}{R} \frac{1}{r} \quad (10.5)$$

Plošná hustota disipovaného výkonu je

$$D = \sigma_k \int_{-h/2}^{h/2} |\dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\alpha}_\varphi z| dz = \sigma_k \left( \frac{\dot{\epsilon}_\varphi^2}{|\dot{\alpha}_\varphi|} + |\dot{\alpha}_\varphi| \frac{h^2}{4} \right) \quad (10.6)$$

Vzorec (10.6) dostaneme, když podle obr. 57 vezmeme

$$D = \sigma_k \int_{-h/2}^{\xi} (-\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\alpha}_\varphi z) dz + \sigma_k \int_{\xi}^{h/2} (\dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\alpha}_\varphi z) dz$$

kde  $\xi = -\dot{\epsilon}_\varphi / \dot{\alpha}_\varphi$  vyznačuje polohu neutrální osy.<sup>x/</sup> Celková disipovaná energie je [s použitím (10.4) až (10.6)]

$$P_D = 2\pi \int_0^R r D(r) dr = 2\pi \sigma_k \frac{v h^2}{4} + \frac{2}{3} \pi \sigma_k v^3 t^2$$

kdežto příkon je

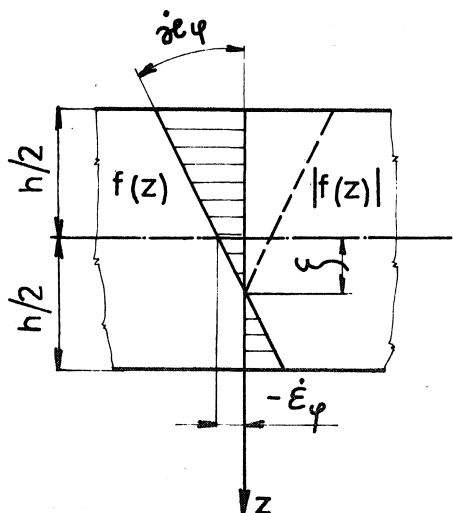
$$P_p = Q v$$

Srovnáním obou výrazů dostaneme

$$Q = 2\pi \sigma_k \frac{h^2}{4} + \frac{2}{3} \pi \sigma_k v^2 t^2$$

Za posuv působitě síly dosadíme  $\delta = vt$  a za mezní ohybový moment  $M_m = \sigma_k h^2 / 4$ . Vyjde

$$Q = 2\pi M_m \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{\delta^2}{h^2} \right)$$

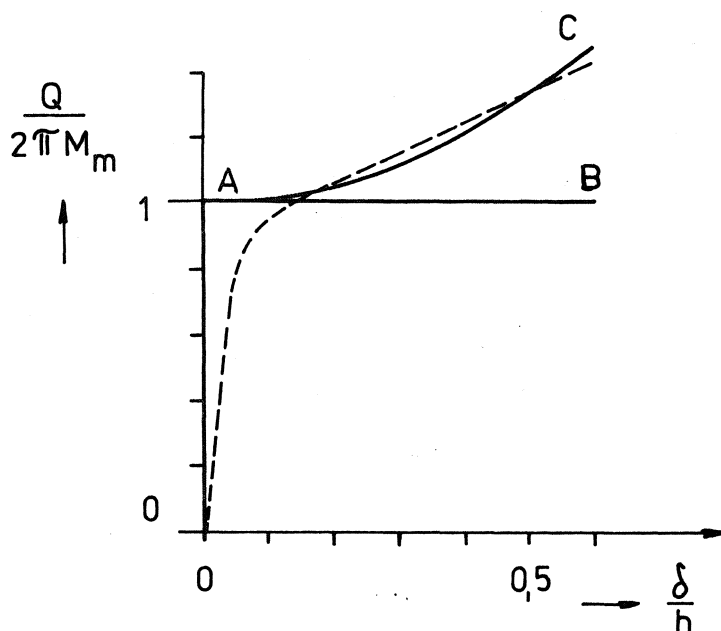


OBR. 57

Tento vztah je znázorněn parabolou AC na obr. 58. Čára AB odpovídá meznímu stavu ( $\delta = 0$ ). Čárkovaně je vyznačen ex-

perimentálně zjištěný průběh pro desku o poměru  $R/h = 5$ , vyrobenou z měkké oceli. Pro ideální tuhoplastický materiál by platila lomená čára OAB. Průběh OAC odpovídá korekci podle vztahu (10.11).

x/ Připomeňme, že obvodové poměrné prodloužení vlákna ve vzdálenosti z od střední plochy je  $\epsilon_\varphi + \alpha_\varphi z$ .



OBR. 58

## 11. DRUCKERŮV POSTULÁT

V závěru druhé kapitoly jsme uvedli, že vektor  $\{d\varepsilon_p\}$  přírůstků plastických přetvoření je u ideálně plastického materiálu (bez zpevnění) vždy kolmý k vektoru  $\{d\sigma\}$  přírůstku vektoru napětí. Vznikají-li totiž plastické deformace, je rám kinematického modelu ideálně plastického materiálu "odstrkován" čepem ve směru normály v dotykovém bodu, kdežto dotykový bod (a tedy čep) se může pohybovat jen ve směru tečny. Mohl by se ovšem pohybovat i dovnitř, ale to by se obnovil elastický stav a plastické deformace by se nemohly tvořit. Dráha čepu je zároveň dráhou koncového bodu vektoru napětí. Může ovšem nastat případ, že je čep v některém rohu rámu (tedy ve vrcholu mezní čáry či plochy). Tehdy není směr vektoru přírůstků plastických přetvoření jednoznačně dán. Pokud se čep vzhledem k rámu nepohybuje, je přírůstek vektoru napětí nulový. Začne-li se pohybovat, pomine tato mnohoznačnost a opět bude platit pravidlo ortogonalit (Misesův zákon normality)

$$\{d\varepsilon_p\}^T \{d\sigma\} = 0 \quad (11.1)$$

Rovnice (11.1) platí tedy pro ideálně plastický materiál za všech okolností.

Můžeme si představit, že v daném místě tělesa existuje napjatost  $\{\sigma\}$  na mezi plastických deformací. Změníme ji nepatrně o přírůstek  $\{d\sigma\}$  tak, aby i nadále byla na této mezi. To znamená, že  $\{d\sigma\}$  bude mít směr tečny k mezní čáře. Pak tento přírůstek vykoná práci (kterou musíme dodat)

$$d_1 A = \{d\varepsilon\}^T \{d\sigma\} \quad (11.2)$$

Podle (1.5) bude

$$d_1 A = (\{d\varepsilon_e\}^T + \{d\varepsilon_p\}^T) \{d\sigma\} \quad (11.3)$$

V tomto výrazu není obsažena práce, kterou přitom vykonají napětí  $\{\sigma\}$ . Je to práce pouze přírůstků napětí vykonaná na přírůstcích deformací jimi vyvolaných. Když přírůstky napětí opět odejmeme (zmenšíme k nule), získáme práci

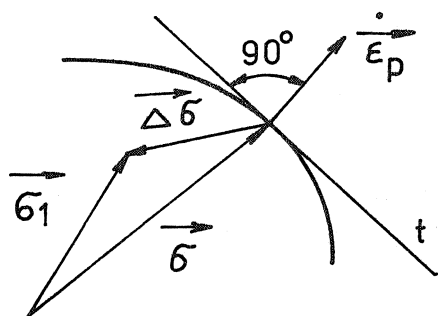
$$d_2 A = \{d\varepsilon_e\}^T \{d\sigma\} \quad (11.4)$$

neboť odlehčování probíhá elasticky. Disipovaná práce tedy bude

$$dA = d_1 A - d_2 A = \{d\varepsilon_p\}^T \{d\sigma\} \quad (11.5)$$

Podle (11.1) je tato práce nulová, což je ve shodě s druhým axiomem uvedeným v závěru druhé kapitoly.

Změníme-li mezní napjatost  $\{\sigma\}$  znázorněnou vektorem  $\vec{\sigma}$  na obr. 59 na nějakou jinou napjatost



$$\{\sigma_1\} = \{\sigma\} + \{\Delta\sigma\} \quad (11.6)$$

pak z požadavku konvexnosti mezní plochy vyplývá, že úhel vektorů  $\vec{\Delta\sigma}$ ,  $\vec{\dot{\varepsilon}}_p$  nemůže být ostrý (jak víme,  $\vec{\dot{\varepsilon}}_p$  má směr normály). Pak tedy

$$\{\dot{\varepsilon}_p\} \{\Delta\sigma\} \leq 0 \quad (11.7)$$

OBR. 59

Rovnost může platit, jen je-li nová napjatost rovněž na mezi



plastických deformací. V takovém případě v limitě dostaneme

$$\{d\sigma\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{\dot{\sigma}\} \Delta t = \{\dot{\sigma}\} dt \quad (11.8)$$

$$\{d\varepsilon_p\} = \{\dot{\varepsilon}_p\} dt \quad (11.9)$$

takže podle (11.1) bude

$$\{\dot{\varepsilon}_p\}^T \{d\sigma\} = 0 \quad (11.10)$$

Vznikají-li plastické deformace, je  $\{\dot{\varepsilon}_p\} \neq \{0\}$  a  $\{d\sigma\} = \{\dot{\sigma}\} dt$  má směr tečny k mezní čáře (ploše), tj. napjatost  $\{\sigma\} + \{d\sigma\}$  zůstává na mezní čáře (ploše). Musí proto platit, že

$$F(\{\sigma\}) = 0 \quad (11.11)$$

$$F(\{\sigma\} + \{d\sigma\}) = 0 \quad (11.12)$$

Avšak

$$F(\{\sigma\} + \{d\sigma\}) = F(\{\sigma\}) + \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} \{d\sigma\} \quad (11.13)$$

Zde jsme použili označení

$$\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_6} \right] \quad (11.14)$$

které platí pro šest složek vektoru napětí.  $\sigma_1 = \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = \sigma_y$ ,  $\sigma_3 = \sigma_z$ ,  
 $\sigma_4 = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_5 = \tau_{yz}$ ,  $\sigma_6 = \tau_{zx}$ . Dosazením (11.13) a (11.11) do (11.12) vyjde

$$\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} \{d\sigma\} = 0 \quad (11.15)$$

Porovnáme-li (11.15) s rovnicí (11.1), vidíme, že vektory  $\partial F / \partial \{\sigma\}$  a  $\{d\varepsilon_p\}$  musí být rovnoběžné (oba jsou kolmé ke stejnému vektoru, který může mít libovolný směr v tečné rovině  $t$  na obr. 59). Bude tedy

$$\{d\varepsilon_p\} = d\tilde{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (11.16)$$

V této rovnici poznáváme vztah (3.4). Přejdeme-li od přírůstků k rychlostem (přírůstky podělíme  $dt$ ), dostaneme místo rovnice (11.1)

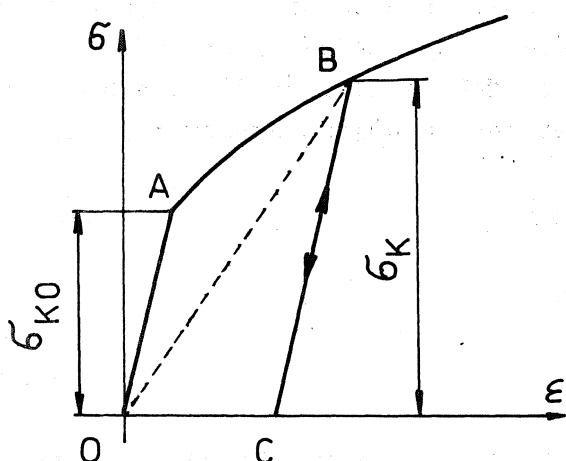
$$\{\dot{\varepsilon}_p\}^T \{\dot{\sigma}\} = 0 \quad (11.17)$$

a místo (11.16)

$$\{\dot{\epsilon}_p\} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (11.18)$$

Přitom jsme označili - stejně jako dříve -  $\tilde{\lambda} = \lambda$ . Je to nezáporný neurčitý parametr.

Vztah (11.1) nebo (11.17) platí pro materiál bez zpevnění. Deformační charakteristika takového materiálu při jednoosé napjatosti je znázorněna na obr. 4. Materiál se zpevněním má pracovní diagram znázorněný na obr. 60. Roste-li zatížení v mezích  $0 \leq \sigma \leq \sigma_{k0}$ , platí přímá úměrnost mezi napětím a prodloužením (Hookeův zákon). Když hodnotu  $\sigma_{k0}$  překročíme, vzniknou kromě elastických také plastické deformace. Odlehčíme-li zkušební tyč např. v bodě B (obr. 60), zůstane tyč trvale prodloužená a její trvalé poměrné prodloužení  $\epsilon_p = \overline{OC}$ . Když tyč znovu zatížíme, bude se deformovat pružně po čáře CB. Teprve když napětí dosáhne hodnoty  $\sigma_k$  odpovídající bodu B, mohou se vytvářet při dalším zatěžování přírůstky plastických deformací. Materiál se tedy nyní jeví tak, jako kdyby jeho mez kluzu byla zvýšena,



OBR. 60

$\sigma_k > \sigma_{k0}$ . Toto zvýšení se může projevit i tenkrát, změníme-li smysl zatěžování. Obvykle však bude nová mez kluzu v tlaku menší než mez kluzu v tahu, někdy i menší, než byla původně. Zpevnění se tedy většinou projeví jen při stejném smyslu zatěžování. Při změně smyslu zatěžování se zpevnění nemusí projevit, materiál se může jevit dokonce jako změkčený (Bauschingerův efekt).

U materiálu se zpevněním se tedy mez plastických deformací mění v závislosti na plastickém poměrném přetvoření, kdežto u ideálně plastického materiálu se nemění. Další rozdíl je v tom, že u materiálu se zpevněním je při monotónním zatěžování poměrné prodloužení  $\epsilon$  jednoznačnou funkcí  $\sigma$ .

Drucker zobecnil vztah (11.1) i na pružnoplastické materiály se zpevněním. Požadoval, aby disipovaná práce přírůstků napětí  $\{d\sigma\}$  byla během úplného cyklu přetížení - odlehčení nezáporná, tedy aby platilo, že

$$\{\dot{\epsilon}_p\}^T \{\dot{\sigma}\} \geq 0 \quad (11.19)$$

Tomu je ekvivalentní požadavek, aby

$$\{\dot{\epsilon}_p\}^T \{\dot{\sigma}\} \geq 0 \quad (11.20)$$

Tento Druckerův postulát nezápornosti disipované práce připomíná druhou termodynamickou větu. Víme už, že pro ideálně plastický materiál platí ve vztazích (11.19) a (11.20) rovnost, Druckerův postulát tedy platí pro materiály se zpevněním i pro materiály bez zpevnění (ideálně plastické).

Zobecníme-li poznatky ze zkoušky tahem na prostorovou napjatost, musíme připustit možnost, že se mezní čára, resp. mezní plocha může v závislosti na plastickém přetvoření měnit. Nebude-li záviset na smyslu ani směru zatěžování, bude zpevnění záviset jen na nějaké skalární funkci

$$\kappa = \kappa(\{\epsilon_p\}) \quad (11.21)$$

takže rovnice mezní čáry (plochy) bude

$$F(\{\sigma\}, \kappa) = 0 \quad (11.22)$$

Je to jednoparametrická množina stejnolehých křivek (ploch) představující izotropní zpevnění. Plastickým tvářením se však materiál může stát anizotropním, takže mezní plocha změni tvar (protáhne se v některém směru a zkrátí v jiném směru). Pak  $F$  bude záviset na každé složce plastického přetvoření jednotlivě, takže

$$F(\{\sigma\}, \{\epsilon_p\}) = 0 \quad (11.23)$$

Konečně mohou nastat oba případy zároveň. Obecná konzistentní podmínka plasticity je pak

$$F(\{\sigma\}, \{\epsilon_p\}, \kappa) = 0 \quad (11.24)$$

Z Druckerova postulátu (11.19) vyplývá, že mezní plocha je konvexní. Vektor  $\{\dot{\epsilon}_p\}$  má totiž směr normály a vektor přitížení  $\{\dot{\sigma}\}$  spadá buď do tečné roviny, nebo svírá s vektorem  $\{\dot{\epsilon}_p\}$  ostrý úhel. Každý jiný směr vektoru  $\{\dot{\sigma}\}$  znamená návrat do elastické oblasti. To znamená, že v okolí každého bodu mezní plochy leží body představující elastickou napjatost jen po jedné straně tečné roviny. Obálkou všech těchto tečných rovin je proto konvexní těleso.

Tvoří-li se plastické deformace, nemůže bod znázorňující napjatost  $\{\sigma\}$  (obecně v šestirozměrném prostoru) opustit mezní plochu (11.24). Bude stále  $F=0$ , tedy také

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} \{d\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}^T} \{d\varepsilon_p\} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (11.25)$$

Dělíme-li tuto rovnici diferenciálem času, dostaneme ekvivalentní vztah

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} \{\dot{\sigma}\} + \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}^T} \{\dot{\varepsilon}_p\} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (11.26)$$

Nyní mohou nastat tyto tři případy:

(1) Odlehčení (materiál se vrací do elastického stavu). Během odlehčování se ani plastické deformace, ani zpevnění nemění. Bude tedy

$$\{\dot{\varepsilon}_p\} = \{0\} \quad \dot{\kappa} = 0 \quad (11.27)$$

Návrat do elastického stavu ze stavu plastického znamená, že bude

$$F = 0 \quad \dot{F} < 0 \quad (11.28)$$

Se zřetelem k rovnicím (11.26) a (11.27) můžeme (11.28) nahradit vztahem

$$F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} \{\dot{\sigma}\} < 0 \quad (11.29)$$

(2) Přetížení (tvoří se nové plastické deformace za současného zpevnění)

$$F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} \{\dot{\sigma}\} > 0 \quad (11.30)$$

(3) Neutrální změna napjatosti (bod znázorňující napjatost se pohybuje po mezní ploše, plastické deformace ani zpevnění se nemění)

$$F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} \{\dot{\sigma}\} = 0 \quad (11.31)$$

Znaménko funkce  $F$  je třeba volit tak, aby vždy platila nerovnost  $F \leq 0$ ; pak  $\partial F / \partial \{\sigma\}$  má směr vnější normály k mezní ploše  $F=0$ .

Tvoří-li se nové plastické deformace, splňuje napjatost stále podmínku  $F=0$  (přetížení z plastického stavu vede k jinému plastickému stavu). Proto také platí (11.26). Do tohoto vztahu dosadíme z rovnice (11.21)

$$\dot{\kappa} = \frac{\partial \kappa}{\partial \{\varepsilon_p\}^T} \{\dot{\varepsilon}_p\} \quad (11.32)$$

S použitím (11.18) pak dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} \{\dot{\sigma}\} + \lambda \left( \frac{\partial F}{\partial \{\epsilon_p\}^T} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \{\epsilon_p\}^T} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right) = 0 \quad (11.33)$$

Odtud vypočteme  $\lambda$  a dosadíme do (11.18). Vyjde zákon plastického tečení ve tvaru

$$\{\dot{\epsilon}_p\} = C \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}^T} \cdot \{\dot{\sigma}\} \quad (11.34)$$

kde

$$C = - \frac{1}{\left( \frac{\partial F}{\partial \{\epsilon_p\}^T} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \{\epsilon_p\}^T} \right) \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}} \quad (11.35)$$

Na rozdíl od ideální plasticity není už  $\lambda$  neurčitý parametr. Z rovnice (11.34) je zřejmé, že rychlosti poměrných plastických přetvoření jsou lineárními kombinacemi rychlostí napětí nebo - což je totéž - přírůstky plastických přetvoření jsou lineárními funkcemi přírůstků složek napjatosti. Teorie plasticity odvozená z Druckerova postulátu se proto nazývá přírůstková (inkrementální) teorie.

### 1. poznámka

Druckerův postulát neplatí pro nestabilní stavy materiálu, kdy se trvalé deformace spontánně vyvíjejí za současného poklesu napětí (na horní mezi kluzu u materiálů s prodlevou v pracovním diagramu).

### 2. poznámka

Z Druckerova postulátu (11.19) lze odvodit zároveň oba axiomy teorie plasticity, tj. konvexnost mezní plochy a kolmost vektoru přírůstků plastických přetvoření k mezní ploše. Pro skalární součin vektorů  $d\vec{\sigma}$  a  $d\vec{\epsilon}_p$  totiž platí, že

$$d\vec{\sigma} \cdot d\vec{\epsilon}_p = |d\vec{\sigma}| |d\vec{\epsilon}_p| \cos \psi \quad (11.36)$$

Tento součin bude nezáporný, jen když úhel  $\psi$  mezi oběma vektory bude v mezích  $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$ . Počáteční bod vektoru  $d\vec{\sigma}$  je někde uvnitř nebo na povrchu mezní plochy; koncový bod je regulárním bodem mezní plochy, k němuž náleží daný přírůstek  $d\vec{\epsilon}_p$ . Všechny možné vektory  $d\vec{\sigma}$  tedy vyplňují "trs" ohraničený kolmicemi k vektoru  $d\vec{\epsilon}_p$ . Ty vyplňují rovinu, která je zároveň tečnou rovinou k mezní ploše. Všechny body oblasti ohraničené mezní plochou jsou zřejmě jen po jedné straně tečné roviny (část mezní plochy však může spadat do tečné roviny). Není-li dotykový bod regulární (tj. jde-li o bod na hraně nebo ve vrcholu mezní plochy), nahradíme okolí bodu regulární křivou plochou, např. válcovou nebo kulovou, jejíž poloměr křivosti pak klesá v limitě k nule.

### 3. poznámka

Jde-li o ideálně plastický materiál, je rovnice (11.33) identicky splněna. První člen na levé straně rovnice je totiž podle (11.17) a (11.18) nulový. Také výraz v oblé závorce (11.33) bude nulový, neboť zpevnění neexistuje. Parametr  $\lambda$  proto nelze vypočítat, jeho velikost je neurčitá. Vzorce (11.34) a (11.35) pak nelze použít.

## 12. PLASTICITA V METODĚ KONEČNÝCH PRVKŮ

V metodě konečných prvků se skutečné pole posuvů aproximuje po částech (po prvcích konečných rozměrů) polynomy tak, aby všechny posuvy byly definovány, jsou-li dány zobecněné posuvy  $\{q\} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  na vybrané množině uzlových bodů. Bude tedy

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z; t) \\ v(x, y, z; t) \\ w(x, y, z; t) \end{array} \right\} \equiv \{\bar{u}(x, y, z; t)\} = [A(x, y, z)] \{q(t)\} \quad (12.1)$$

Vektor poměrných přetvoření  $\{\varepsilon\}$  odtud dostaneme derivacemi podle známých Cauchyho vztahů. Má složky

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (12.2)$$

S použitím (12.1) odtud vyjde vztah

$$\{\varepsilon(x, y, z; t)\} = [B(x, y, z)] \{q(t)\} \quad (12.3)$$

Vektory a matice v tomto vzorci jsou postupně typu  $6 \times 1$ ,  $6 \times n$ ,  $n \times 1$ . Na těleso působí povrchové síly  $\{p\}$ , objemové síly  $\{f\}$  a zobecněné osamělé síly v uzlech  $\{Q\}$ . Těleso má objem  $V$  a povrch  $S$ . Princip virtuálních prací dává tuto podmínku rovnováhy

$$\{\delta q\}^T \{Q\} + \int_S \{\delta \bar{u}\}^T \{p\} ds + \int_V \{\delta \bar{u}\}^T \{f\} dV = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (12.4)$$

S použitím (12.1) a (12.3) odtud dostaneme

$$\{\delta q\}^T (\{Q\} + \int_S [A]^T \{p\} ds + \int_V [A]^T \{f\} dV) = \{\delta q\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV \quad (12.5)$$

Protože tento vztah musí platit pro jakékoli virtuální posunutí  $\{\delta q\}$ , je

$$\{Q\} + \int_S [A]^T \{p\} ds + \int_V [A]^T \{f\} dV = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV \quad (12.6)$$

K objemovým silám  $\{f\}$  přičteme i setrvačné síly (podle d'Alembertova principu)

$$-\rho \{\ddot{u}\} = -\rho [A] \{\ddot{q}\} \quad (12.7)$$

takže dostaneme

$$[M] \{\ddot{q}\} + \int_V [B]^T \{\sigma\} dV = \{\tilde{Q}\} \quad (12.8)$$

kde

$$\{\tilde{Q}\} = \{Q\} + \int_S [A]^T \{p\} ds + \int_V [A]^T \{f\} dV \quad (12.9)$$

značí vektor zobecněných sil v uzlech, do kterého byly zahrnuty i síly plošné a objemové (je to tedy výsledná diskrétní soustava vnějších sil). Přitom

$$[M] = \int_V \rho [A]^T [A] dV \quad (12.10)$$

je matice hmotnosti. Rovnice (12.8) je klíčem k řešení jakékoli statické i dynamické úlohy pro lineárně i nelineárně pružný nebo pružnoplastický materiál. Jde-li o statické úlohy, je  $\{\ddot{q}\} = \{0\}$  a první člen v rovnici (12.8) vymizí. Zbývá určit  $\{\sigma\}$  v závislosti na  $\{\varepsilon\}$ , a tedy i na  $\{q\}$ , což je hledaný vektor posuvů. Jde-li o lineárně pružný materiál, je podle Hookeova zákona

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad (12.11)$$

kde  $[E]$  je matice elastických modulů. S použitím (12.3) vyjde

$$\{\sigma\} = [E][B] \{q\} \quad (12.12)$$

takže rovnici (12.8) lze dále zjednodušit. Bude

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{\ddot{Q}\} \quad (12.13)$$

kde

$$[K] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (12.14)$$

značí matici tuhosti. Rovnici (12.13) někdy doplňujeme členem představujícím tlumení, takže základní rovnice mechaniky vychází ve tvaru

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{\ddot{Q}\} \quad (12.15)$$

Pro nelineární kontinuum však musíme vycházet z původního tvaru rovnice (12.8), neboť závislost (12.11) neplatí, konstituční rovnice materiálu jsou nelineární.

Máme-li nějakou nelineární funkci  $f(x,y)$  dvou proměnných  $x, y$ , pak pro diferenciální přírůstky  $df, dx, dy$  platí lineární rovnice

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (12.16)$$

To platí pro jakýkoli počet proměnných. Řešení nelineární rovnice (12.8) proto přejde v posloupnost lineárních úloh, přejdeme-li ke vztahu mezi přírůstky  $\{d\varepsilon\}$  a  $\{d\sigma\}$ . Obecně budeme moci napsat, že

$$\{d\sigma\} = [E_t]\{d\varepsilon\} \quad (12.17)$$

kde  $[E_t]$  je tečná matice elastickoplastických modulů. Přejdeme-li v rovnici (12.8) k přírůstkům a zanedbáme-li změnu matice  $[B]$  (což lze, jsou-li posuvy malé), bude pro statické úlohy

$$\int_V [B]^T \{\Delta\sigma\} dV = \{\Delta\ddot{Q}\} \quad (12.18)$$

Vlnovku nad symbolem  $Q$  budeme napříště pro stručnost vynechávat. Přírůstky  $\{\Delta\sigma\}, \{\Delta Q\}$  nejsou ovšem nekonečně malé, takže rovnice

$$\{\Delta\sigma\} \cong [E_t]\{\Delta\varepsilon\} \quad (12.19)$$

bude platit jen přibližně. Protože podle (12.3)

$$\{\Delta\varepsilon\} = [B]\{\Delta q\} \quad (12.20)$$



vyjde z rovnic (12.18) až (12.20)

$$[K_t] \{\Delta q\} \cong \{\Delta Q\} \quad (12.21)$$

kde

$$[K_t] = \int_V [B]^T [E_t] [B] dV \quad (12.22)$$

značí tečnou matici tuhosti. Nespĺňuje-li napjatost podmínku (11.30) pro vznik plastických deformací, je  $[E_t] = [E]$  a vztah (12.22) se nahradí vztahem (12.14). Je-li materiál v daném místě v plastickém stavu, představuje tečná elastickoplastická matice tuhosti  $[K_t]$  vazbu (12.19) mezi celkovými přírůstkami přetvoření a přírůstkami napětí.

Podle (1.5) je

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon_e\} + \{d\varepsilon_p\} \quad (12.23)$$

Pro elastické přírůstky platí Hookeův zákon a pro plastické přírůstky platí Misesův zákon normality (11.16). Tedy

$$\{d\varepsilon\} = [E]^{-1} \{d\sigma\} + d\tilde{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (12.24)$$

Sloupcový vektor složený z parciálních derivací funkce  $F$  podle jednotlivých složek vektoru napětí označme pro stručnost  $\{a\}$ . Bude

$$\{a\} = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (12.25)$$

Rovnici (11.25) napíšeme ve tvaru

$$dF = \{a\}^T \{d\sigma\} - A d\tilde{\lambda} = 0 \quad (12.26)$$

kde

$$A = - \left( \frac{\partial F}{\partial \{\varepsilon_p\}^T} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \{\varepsilon_p\}^T} \right) \{a\} \quad (12.27)$$

Chceme-li, aby odvozené vztahy - na rozdíl od rovnic (11.34) a (11.35) - platily i pro materiál bez zpevnění, nesmíme veličinou  $A$  nic dělit, ani žádnou rovnici násobit, neboť pro tento materiál bude  $A=0$ . Nemůžeme proto postupovat stejně jako v předchozí kapitole.

Rovnici (12.24) znásobíme zleva řádkovou maticí  $\{a\}^T [E]$ . Vyjde

$$\{a\}^T [E] \{d\varepsilon\} = \{a\}^T \{d\sigma\} + d\tilde{\lambda} \{a\}^T [E] \{a\} \quad (12.28)$$

Za  $\{a\}^T \{d\sigma\}$  sem dosadíme z rovnice (12.26), takže

$$\{a\}^T [E] \{d\varepsilon\} = (A + \{a\}^T [E] \{a\}) d\tilde{\lambda} \quad (12.29)$$

Pro materiál bez zpevnění bude  $A=0$  a vztah (12.29) nebude vyjadřovat nic jiného než identitu konzistentní s Misesovým zákonem.

Z rovnice (12.29) můžeme  $d\tilde{\lambda}$  vypočítat a dosadit do (12.24). Předtím však tuto rovnici znásobíme maticí  $[E]$ . Vyjde po snadné úpravě

$$\{d\sigma\} = [E_t] \{d\varepsilon\} \quad (12.30)$$

kde

$$[E_t] = [E] - \frac{1}{A + \beta} \{b\} \{b\}^T \quad (12.31)$$

$$\beta = \{a\}^T \{b\} \quad (12.32)$$

$$\{b\} = [E] \{a\} \quad (12.33)$$

Rovnice (12.30) je totožná s rovnicí (12.17), takže (12.31) dává hledanou tečnou matici pro elastickoplastické deformace.

Nyní jsme tedy schopni vypočítat z rovnice (12.22) tečnou matici tuhosti. Z rovnice (12.21) vyjde pro daný přírůstek zatížení  $\{\Delta Q\}$  přibližná hodnota přírůstků posuvů v uzlech  $\{\Delta q\}$ , z rovnice (12.20) odpovídající pole přírůstků přetvoření  $\{\Delta \varepsilon\}$  a ze vztahu (12.19) přibližně i pole přírůstků napětí  $\{\Delta \sigma\}$ . To by mělo splňovat rovnici (12.18). Ta však přesně splněna nebude, neboť pracujeme s přírůstkem konečných velikostí. Vypočteme reziduální vektor

$$\{r\} = \{\Delta Q\} - \int_V [B]^T \{\Delta \sigma\} dV \quad (12.34)$$

který by měl být správně nulový, a zavedeme korekci  $\{\Delta \tilde{\sigma}\}$  takovou, že rovnice (12.18) bude splněna pro součet  $\{\Delta \sigma\} + \{\Delta \tilde{\sigma}\}$ . Tedy

$$\int_V [B]^T \{\Delta \sigma\} dV + \int_V [B]^T \{\Delta \tilde{\sigma}\} dV = \{\Delta Q\} \quad (12.35)$$

Když obě poslední rovnice navzájem odečteme, dostaneme

$$\int_V [B]^T \{\Delta \tilde{\sigma}\} dV = \{r\} \quad (12.36)$$

Tato rovnice je analogická k rovnici (12.18). To znamená, že pro opravy, které musíme připočítat k dříve vypočteným hodnotám  $\{\Delta q\}$ ,  $\{\Delta \varepsilon\}$ ,  $\{\Delta \sigma\}$ ,

použijeme stejných rovnic jako dříve [tj. rovnic (12.19) až (12.21)]. Jen místo vektoru  $\{\Delta Q\}$  dosadíme reziduální vektor  $\{r\}$ . Nejsou-li tyto opravy malé, můžeme korektivní proces opakovat, a to tak dlouho, až bude norma reziduálního vektoru  $\|\{r\}\|$  pod zvolenou mezí.

Nesmíme však zapomenout, že přetížení z plastického stavu materiálu vede opět k plastickému stavu, takže po každé iteraci kontrolujeme splnění podmínky plasticity

$$F(\{\sigma\}, \{\epsilon_p\}, \kappa) = 0 \quad (12.37)$$

Překročíme-li tuto podmínku, musíme vypočtená napětí redukovat násobením koeficientem menším než 1 tak, aby podmínka (12.37) byla splněna.

Předpokládáme, že čtenář je natolik obeznámen s metodou konečných prvků, že nepotřebujeme vysvětlovat, jak objemové integrály nahrazujeme součtem integrálů nad jednotlivými prvky a jak je celý algoritmus výpočtu uspořádán. Nezmiňujeme se ani o metodách numerické integrace, které se v metodě konečných prvků, obzvláště v nelineárních úlohách používá. Zájemce o další podrobnosti odkazujeme na speciální literaturu podle připojeného seznamu.

Při praktickém řešení je třeba ještě uvážit, jak se projeví polynomiální aproximace. Používáme-li jako "násové funkce" lineární polynomy, je pole přetvoření, popř. pole napětí po prvcích konstantní. To znamená, že každý z konečných prvků je celý v elastickém stavu nebo přejde celý do plastického stavu. Používáme-li polynomů vyšších stupňů, může se stát, že část prvku je elastická, část plastická. Když vyčíslujeme objemový integrál v rovnici (12.22) např. Gaussovou numerickou metodou, pak bychom měli pro integrační body v elastické oblasti používat matice elastických modulů  $[E]$ , v plastické oblasti pak tečnou elastickoplastickou matici  $[E_t]$ . Přitom se může vyskytnout případ, že pro zvolený přírůstek  $\{\Delta Q\}$  vyjde celkové napětí v daném místě v plastické oblasti, kdežto počáteční stav byl ještě v elastické oblasti. Pro část přírůstku  $\{\Delta \sigma\}$  by se tedy mělo použít matice  $[E]$  a teprve pro zbytek matice  $[E_t]$ .

Je-li efektivní poměrné prodloužení v daném místě na počátku integračního kroku  $\bar{\epsilon}_A$  a na konci - za předpokladu, že materiál je elastický -  $\bar{\epsilon}_B$ , kdežto na mezi plastických deformací vypočteme  $\bar{\epsilon}_p$ , bude elastická část přírůstků dána zlomkem

$$m = \frac{\bar{\epsilon}_p - \bar{\epsilon}_A}{\bar{\epsilon}_B - \bar{\epsilon}_A} \quad (12.38)$$

Pak místo (12.31) použijeme interpolované hodnoty

$$[E_t] = [E] - \frac{1-m}{A+\beta} \{b\}^T \{b\} \quad (12.39)$$

Této hodnoty použijeme k výpočtu tečné matice tuhosti a teprve pak začneme s výpočtem skutečné hodnoty  $\{\Delta\sigma\}$  pro daný krok  $\{\Delta Q\}$ . Interpolací (12.39) můžeme v dalších krocích iteračního procesu zpřesnit. Elastická část přírůstku vektoru napětí je přitom  $m [E] \{\Delta \varepsilon\}$ .

### 13. PRANDTLIOVY - REUSSOVY ROVNICE

Jak známo, tenzor napjatosti má obecně šest složek; zapíšeme jej ve tvaru matice

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

Z teorie pružnosti je známo, že vždy lze nalézt takovou polohu souřadných os v daném bodě, že se matice (13.1) stane diagonální. Na diagonále budou hlavní napětí  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , která dostaneme řešením kubické sekulární rovnice

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (13.2)$$

Když tento determinant rozepíšeme, dostaneme rovnici

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0 \quad (13.3)$$

kde

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (13.4)$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy} \tau_{yx} - \tau_{yz} \tau_{zy} - \tau_{zx} \tau_{xz} \quad (13.5)$$

$$J_3 = |\sigma| = \det [\sigma] \quad (13.6)$$

Protože hodnoty hlavních napětí nemohou záviset na volbě souřadné soustavy, nemohou na ní záviset ani koeficienty  $J_1, J_2, J_3$  rovnice (13.3). Jsou to tedy invarianty. Každá funkce těchto invariantů je rovněž invariant. Neexistují invarianty napětí, které by nemohly být vyjádřeny jako funkce uvedených tří invariantů.

Z pokusů je známo, že odezva tělesa na hydrostatický tlak je vždy elastická. Proto se od dané napjatosti odečítá její hydrostatická složka

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} J_1 \quad (13.7)$$

Vzniklá napjatost se nazývá deviátor napětí  $[\Delta]$ . Je tedy

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (13.8)$$

Zřejmě  $\Delta_{11} = \sigma_x - \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)$ ,  $\Delta_{12} = \tau_{xy}$  atd.  
Invarianty deviátoru napětí jsou<sup>x/</sup>

$$I_1 = 0 \quad (13.9)$$

$$I_2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2 \quad (13.10)$$

$$I_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \quad (13.11)$$

Lze ukázat, že invarianty deviátoru jsou zároveň invarianty i původní napjatosti, neboť

$$I_2 = J_1^2 - 3J_2 \quad I_3 = J_3 - \frac{1}{3} J_1 J_2 + \frac{2}{27} J_1^3 \quad (13.12)$$

Obrácené tvrzení neplatí.

R. von Mises formuloval podmínku plasticity užitím druhého invariantu deviátoru napětí

$$F(\{\sigma\}, \kappa) = \sqrt{I_2} - \bar{\sigma}(\kappa) \quad (13.13)$$

<sup>x/</sup> Kdybychom druhý invariant deviátoru odvozovali obdobně jako (13.5), tj. jako koeficient u  $\Delta$  v sekulární rovnici, dostali bychom  $-I_2/3$ . Výraz (13.10) je jeho násobkem.

Při plastických deformacích je  $F=0$ ; parciální derivace jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} &= \frac{3\beta_{11}}{2\bar{\sigma}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} &= \frac{3\beta_{22}}{2\bar{\sigma}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} &= \frac{3\beta_{33}}{2\bar{\sigma}} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{3\beta_{12}}{\bar{\sigma}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{3\beta_{23}}{\bar{\sigma}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}} &= \frac{3\beta_{31}}{\bar{\sigma}} \end{aligned} \quad (13.14)$$

Tyto výrazy snadno odvodíme užitím pravidla o derivaci složených funkcí.

Jde-li o jednoosou napjatost, je  $\sqrt{I_2} = \sigma_x$ , takže při plastických deformacích bude platit, že

$$\sigma_x = \bar{\sigma}(\kappa) \quad (13.15)$$

To tedy znamená, že napětí  $\bar{\sigma}(\kappa)$  má význam proměnlivé "meze kluzu"  $\sigma_k$  na obr. 60. Je-li známa (z pokusu) závislost této hodnoty na poměrném plastickém prodloužení  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}_p)$ , bude

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \kappa} = - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \kappa} = - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}_p} \frac{\partial \bar{\epsilon}_p}{\partial \kappa} \quad (13.16)$$

Za parametr zpevnění se zpravidla bere měrná práce vykonaná při plastickém přetváření, takže při jednoosé napjatosti bude

$$d\kappa = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}_p \quad (13.17)$$

Když tento výraz dosadíme do rovnice (13.16), bude

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}_p} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} \quad (13.18)$$

Pruhem označujeme veličiny vztažené na zkoušku tahem (jednoosou napjatost). Podle vztahu (1.5) bude celková deformace součtem deformace plastické a elastické, takže

$$d\bar{\epsilon} = d\bar{\epsilon}_p + d\bar{\epsilon}_e \quad (13.19)$$

Když tuto rovnici podělíme diferenciálem napětí  $d\bar{\sigma}$ , dostaneme

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_e} \quad (13.20)$$

kde  $E_t = d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon}$  je tečný modul

$E_p = d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon}_p$  je modul plasticity

$E_e = d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon}_e = E$  je Youngův modul pružnosti

Rovnici (13.18) nyní můžeme upravit na tvar

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = - \frac{E_p}{\bar{\sigma}} \quad (13.21)$$

Vraťme se k výrazu (12.27). Protože funkce  $F$  má nyní tvar (13.13), bude

$$A = - \frac{1}{d\tilde{\lambda}} \left( \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa \right) = \frac{E_p}{\bar{\sigma}} \frac{d\kappa}{d\tilde{\lambda}} \quad (13.22)$$

Působí-li jednoosé napětí ve směru osy  $x$ , je  $\sqrt{I_2} = \bar{\sigma}_x$ , takže  $F = \bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}$  a poměrné plastické prodloužení vyjde

$$d\varepsilon_{xp} \equiv d\bar{\varepsilon}_p = d\tilde{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_x} = d\tilde{\lambda} \quad (13.23)$$

S použitím (13.17) a (13.23) dá rovnice (13.22)

$$A = E_p \quad (13.24)$$

Zároveň platí, že  $d\bar{\varepsilon}_p = d\bar{\sigma} / E_p$ . U materiálu bez zpevnění je  $d\bar{\sigma} = 0$ ,  $E_p = 0$ , takže  $d\bar{\varepsilon}_p$  se stává neurčitým parametrem.

Zanedbáme-li poměrnou změnu objemu, tj. položíme  $\Delta V/V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ , zjednoduší se podstatně tvar Hookeova zákona. Tenzor přetvoření se pak shoduje s deviatorem přetvoření a ten je násobkem deviatoru napětí. Tenzor přetvoření je definován vztahem

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (13.25)$$

Za uvedeného předpokladu lze Hookeův zákon napsat s použitím deviatoru napětí (13.8) takto:

$$\Delta_{ij} = 2G (\varepsilon_{ij})_e \quad \text{resp.} \quad d\Delta_{ij} = 2G (d\varepsilon_{ij})_e \quad (13.26)$$

Indexem u závorky jsme vyznačili, že jde o elastické přetvoření. Pro přírůstek plastického přetvoření máme podle (11.16), (13.23) a (13.24)

$$(d\varepsilon_{ij})_p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\sigma}}{E_p \bar{\sigma}} \Delta_{ij} \quad (13.27)$$

Celkem tedy bude

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} d\Delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\sigma}}{E_p \bar{\sigma}} \Delta_{ij} \quad (13.28)$$

nebo

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{\Delta}_{ij} + \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{E_p \bar{\sigma}} \Delta_{ij} \quad (13.29)$$

Vztahy (13.28) a (13.29) jsou navzájem rovnocenné. Půjde-li o materiál bez zpevnění, dosadíme za poměr  $d\bar{\sigma}/E_p$  přírůstek  $d\bar{\varepsilon}_p$  a za poměr  $\bar{\sigma}/E_p$  hodnotu  $\bar{\varepsilon}_p$ .

Rovnice (13.28), popř. (13.29) jsou známé Prandtlovy-Reussovy rovnice teorie plasticity. Jak jsme ukázali, jde o zvláštní případ obecnější inkrementální teorie.

#### 14. DEFORMAČNÍ TEORIE PLASTICITY

Sestavíme-li složky deviatóru napjatosti a tenzoru přetvoření do vektorů tak, že bude

$$\{\Delta\} = [\Delta_{11} \quad \Delta_{22} \quad \Delta_{33} \quad \Delta_{12} \quad \Delta_{23} \quad \Delta_{31}]^T \quad (14.1)$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31}]^T \quad (14.2)$$

budeme moci rovnici (13.27) zapsat ve vektorové formě

$$\{d\varepsilon_p\} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \{\Delta\} d\bar{\varepsilon}_p \quad (14.3)$$

Na rozdíl od dřívějšího textu obsahuje nyní vektor deformace ve čtvrtém až šestém řádku poloviční zkosa. Bude-li nyní platit, že napětí zůstávají ve stejném poměru po celou dobu zatěžování (proporcionální nebo prosté zatěžování), bude

$$\{\Delta\} = c \{\Delta\}_0 \quad \bar{\sigma} = c \bar{\sigma}_0 \quad (14.4)$$

takže poměr  $\{\Delta\}/\bar{\sigma}$  bude stálý. Rovnici (14.3) lze pak integrovat, takže

$$\{\varepsilon_p\} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \{\Delta\} \bar{\varepsilon}_p \quad (14.5)$$

To znamená, že celkové plastické poměrné deformace jsou úměrné deviatóru napětí. Dostáváme tak vztah mezi plastickým přetvořením a napjatostí,



který inkrementální teorie neposkytuje. Tuto výhodu jsme získali za cenu, že jsme se vzdali možnosti zahrnout do naší nové teorie libovolnou historii zatěžování; deformační teorie platí jen pro proporcionální zatěžování.

Pro jednoosou napjatost bude poměr napětí a plastického poměrného prodloužení

$$\frac{\sigma_x}{\epsilon_{xp}} = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x - \sigma_x/E} = \frac{E \left( \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} \right)}{E - \left( \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} \right)} = \frac{E E_s}{E - E_s} \quad (14.6)$$

kde  $E_s = \sigma_x/\epsilon_x$  je sečnový (sekantový) modul. Je to směrnice úsečky OB čárkovane vyznačené na obr. 60. Z rovnice (14.6) můžeme vypočítat poměrné plastické prodloužení  $\epsilon_{xp}$  způsobené napětím  $\sigma_x$ . Protože se při plastických deformacích objem nemění, je

$$-\epsilon_{xp} + \epsilon_{yp} + \epsilon_{zp} = 0 \quad (14.7)$$

Při jednoosé napjatosti je zřejmé

$$\epsilon_{yp} = \epsilon_{zp} = -\frac{1}{2} \epsilon_{xp} \quad (14.8)$$

tj. Poissonovo číslo je  $\mu_p = 0,5$ . Proto při obecné tříosé napjatosti bude

$$\begin{aligned} \epsilon_{xp} &= \frac{E - E_s}{E E_s} \left( \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z \right) \\ \epsilon_{yp} &= \frac{E - E_s}{E E_s} \left( \sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_z - \frac{1}{2} \sigma_x \right) \\ \epsilon_{zp} &= \frac{E - E_s}{E E_s} \left( \sigma_z - \frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right) \end{aligned} \quad (14.9)$$

Podobně odvodíme, že

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{G - G_s}{G G_s} \tau_{xy} = \frac{3(E - E_s)}{E E_s} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{3(E - E_s)}{E E_s} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{3(E - E_s)}{E E_s} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (14.10)$$

Je totiž  $E = 2(1 + \mu_p)G = 3G$  a podobně  $E_s = 3G_s$ . Rovnice (14.9) a (14.10) můžeme shrnout do jednoho maticového zápisu užitím vektorů napětí a deformace. Bude

$$\{ \epsilon_p \} = [ \Phi ] \{ \sigma \} \quad (14.11)$$

Pro elastické poměrné deformace platí vztah

$$\{\varepsilon_e\} = [E]^{-1} \{\sigma\} \quad (14.12)$$

takže pro celkové poměrné deformace dostaneme

$$\{\varepsilon\} = ([\Phi] + [E]^{-1}) \{\sigma\} \quad (14.13)$$

Inverzní vztah je

$$\{\sigma\} = [E_s] \{\varepsilon\} \quad (14.14)$$

kde

$$[E_s] = ([\Phi] + [E]^{-1})^{-1} \quad (14.15)$$

značí sekantovou tuhostní matici pro izotropní materiál.

V pružném stavu  $[\Phi] = [0]$ ,  $[E_s] = [E]$ . Je-li v plastickém stavu  $E_s \ll E$  (velmi malé zpevnění), je přibližně

$$[E_s] \cong \frac{E_s}{E} [E] \quad (14.16)$$

Abychom mohli použít vztahu (14.14), potřebujeme vědět, jak závisí sekantový modul  $E_s$  na celkovém efektivním prodloužení  $\bar{\varepsilon}$ . Tuto závislost získáme při zkoušce tahem. Musíme však vědět, jakou hodnotu  $\bar{\varepsilon}$  přiřadíme obecnému prostorovému přetvoření. Základem srovnání zde může být druhý invariant deviatoru tenzoru přetvoření, který utvoříme stejně, jako jsme utvořili hodnotu  $I_2$  podle (13.10). Invariant znásobíme takovou konstantou, aby při jednoosé napjatosti  $\sigma_x = \bar{\sigma}$  dávala plastická přetvoření (14.8) hodnotu  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{xp}$ . Vyjde

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\bar{\mu})} \left[ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]^{1/2} \quad (14.17)$$

Protože  $\bar{\varepsilon}$  je celkové efektivní poměrné prodloužení, bude v něm zahrnuta část elastická i plastická.<sup>x/</sup> Pro Poissonovo číslo  $\bar{\mu}$  bude proto platit nerovnost

$$\mu \leq \bar{\mu} < \mu_p = 0,5 \quad (14.18)$$

<sup>x/</sup> Dosadíme-li do (14.17)  $\bar{\mu} = 0,5$ , dostaneme tzv. intenzitu přetvoření. Podobně výraz  $\sqrt{I_2}$  se nazývá intenzita napětí.

K jeho výpočtu použijeme hypotézy, podle které se nemění modul objemové pružnosti  $K = p / (\Delta V / V) = E / 3(1 - 2\mu)$ . Bude tedy

$$\frac{E_s}{3(1 - 2\bar{\mu})} = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad (14.19)$$

Odtud

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} - \frac{E_s}{E} \left( \frac{1}{2} - \mu \right) \quad (14.20)$$

Hodnota  $\mu$  platí pro elastický stav.

Protože pracujeme s efektivním napětím a s efektivním poměrným prodloužením, což jsou definitivně kladné veličiny, nemůže deformační teorie postihnout Bauschingerův efekt. Zahrnuje pouze izotropní zpevnění.

Výpočet metodou konečných prvků se obzvlášť zjednoduší, lze-li použít přibližného vztahu (14.16). Pak totiž bude sekantová matice tuhosti

$$[K_s] = \frac{E_s}{E} [K] = \left( 1 - \frac{E - E_s}{E} \right) [K] \quad (14.21)$$

Když tento výraz rozepíšeme, dostaneme

$$[K_s] = [K] - [H] \quad (14.22)$$

kde

$$[H] = \frac{E - E_s}{E} [K] \quad (14.23)$$

Základní rovnice

$$[K_s] \{q\} = \{Q\} \quad (14.24)$$

se tím rozdělí tak, že nelineární člen bude vpravo

$$[K] \{q\}_{i+1} = \{Q\} - [H]_i \{q\}_i \quad (14.25)$$

Matice  $[H]$  závisí na  $\bar{\epsilon}$ , tedy na  $\{q\}$ . Indexy u závorek naznačují, jak lze uskutečnit iterační proces.

Rozdíl mezi rovnicemi (14.12) a (14.13) je pouze v tom, že čtvercová matice v oblé závorce (14.13) závisí na efektivním poměrném prodloužení, kdežto čtvercová matice v rovnici (14.12) je konstantní. Rovnice (14.12) představuje zákon lineární pružnosti (Hookeův), rovnicí (14.13)

můžeme považovat za zákon nelineární pružnosti. Skutečně mezi deformační teorií plasticity a nelineární elasticitou není rozdíl, pokud nenastane odlehčení. Pro odlehčení platí totiž lineární Hookeův zákon. U nelineárně pružného tělesa se odlehčení děje podle stejných zákonů jako zatížení (trvalé deformace nevznikají).

## Z á v ě r

Uvedli jsme velmi podrobný výklad základních poznatků a principů teorie plasticity se zaměřením k výpočtu mezních stavů při statickém zatížení. Omezený rozsah nám nedovolil probírat všechny aplikace, které jsou pro strojního inženýra důležité (vynechali jsme např. teorii kování, válcování, protahování, protlačování). Dali jsme přednost tomu, vytvořit pevný základ znalostí zákonů a principů na úrovni současných znalostí mechaniky kontinua, s jehož pomocí čtenář snadno porozumí speciálním statím uveřejňovaným v odborné literatuře a v monografiích, jejichž seznam připojujeme. Vycházíme ze zkušenosti, že se teorie plasticity na strojních fakultách buď neprobírá vůbec, nebo se probírá jen nedostatečně. Teorie plasticity je přitom natolik odlišná od teorie pružnosti, že ji většina inženýrů považuje za obtížnou a neužitečnou. Smyslem těchto skript bylo tento nesprávný dojem opravit a mezeru ve vzdělání překlenout.

Ve svém výkladu jsme proto použili co nejjednodušších prostředků. Vyhnuli jsme se tenzorové formulaci, která by umožnila zestručnit zápis, ale která je většinou techniků a inženýrů cizí. Použili jsme maticové symboliky, která je dnes - vzhledem k rozšíření digitálních počítačů - nezbytnou součástí inženýrských znalostí ve všech odvětvích technických věd. Vyhnuli jsme se zavedení pojmů, které nebylo třeba nezbytně zavádět. Vynechali jsme teorii kluzových čar při rovinném přetváření, neboť tato teorie je snadno srozumitelná a lze ji najít v každé učebnici plasticity. Místo toho jsme uvedli aplikaci nespojitých polí k určení horní a dolní hranice mezního zatížení, neboť tato teorie má širší použití. V závěrečných kapitolách jsme naznačili, jak lze úlohy z plasticity řešit numericky metodou konečných prvků.

Cílem, který jsme si vytkli, bylo vytvořit srozumitelné a pevné základy, na nichž spočívá teorie plasticity, ukázat její užitečnost a podnítit účastníky semináře k dalšímu samostatnému studiu.

Tato práce by nebyla vznikla bez iniciativy a vytrvalého přátelského nátlaku, kterým na autora působil Ing. Vladimír Václavík. Jemu i všem pracovníkům Domu techniky ČSVTS Praha, kteří se na přípravě skript a semináře podíleli, patří upřímný autorův dík.

#### LITERATURA

- /1/ BEZUCHOV, N.I.: Osnovy teorii uprugosti, plastičnosti i polzučesti. Vysšaja škola, Moskva 1961
- /2/ Constitutive Equations in Plasticity. Red.: A.S. Argon. The Massachusetts Inst. of Technology Press, Cambridge, Mass., 1975.
- /3/ COOK, R.D.: Concept and Applications of Finite Element Analysis. 2. vyd. John Wiley, New York 1981.
- /4/ Engineering Plasticity. Red.: J. Heyman a. F. A. Leckie. Cambridge Univ. Press 1968.
- /5/ Foundations of Plasticity. Red.: A. Sawczuk. Noordhoff, Leyden 1973.
- /6/ FUNG, Y.C.: Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1965.
- /7/ HAUPT, P.: Viskoelastizität und Plastizität. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1977.
- /8/ HILL, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford 1950.
- /9/ JOHNSON, W. - MELLOR, P.B.: Plasticity for Mechanical Engineers. Van Nostrand, London 1962.
- /10/ ILJUŠIN, A.A.: Plastičnost. Gostěchizdat, Moskva 1948.
- /11/ KAČANOV, L.M.: Osnovy teorii plastičnosti. Gostěchtěoretizdat, Moskva 1956.
- /12/ LUBANN, J.D. - FELGAR, R.D.: Plasticity and Creep of Metals. John Wiley, New York 1961.

- /13/ MAREK, P.: Mezní stavy kovových stavebních konstrukcí. Rudné doly  
Jeseník/SNTL, Praha 1981.
- /14/ MOSOLOV, P.P. - MJASNIKOV, V.P.: Mechanika žestkoplastičeskich sred.  
Nauka, Moskva 1981.
- /15/ MRÁZIK, A. - ŠKALLOUD, M. - TOCHÁČEK, M.: Navrhování ocelových  
konstrukcí podle teorie plasticity. SNTL, Praha 1980.
- /16/ PEŠINA, E.: Základy užité teorie plasticity. SNTL/SVTL, Praha 1966.
- /17/ PISARENKO, G.S. - MOŽAROVSKIJ, N.S.: Uravněniya i krajevyje zadači  
těoriji plastičnosti i polzučesti. Naukova Dumka,  
Kijev 1981.
- /18/ PRAGER, W.: Probleme der Plastizitätstheorie. Birkhäuser-Verlag,  
Basel-Stuttgart 1955.
- /19/ PROCENKO, A. M.: Těoriya uprugo-plastičeskich sistem. Nauka,  
Moskva 1982.
- /20/ RUSINKO, K. N.: Těoriya plastičnosti. Višča škola, Lvov 1981.
- /21/ THOMAS, T.: Plastic Flow and Fracture in Solids. Academic Press,  
New York 1961.
- /22/ ZIENKIEWICZ, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science.  
McGraw-Hill, New York 1971.

<b>Název:</b>	<b>Stavba strojů 90</b> <b>MEZNÍ PLASTICKÉ STAVY</b>
<b>Autor:</b>	<b>Prof. Ing. Cyril Höschl, Ústav termo- mechaniky ČSAV</b>
<b>Počet stran:</b>	<b>96</b>
<b>Náklad:</b>	<b>150 výtisků</b>
<b>Formát:</b>	<b>A4</b>
<b>Číslo publikace:</b>	<b>60-644-83/2561/</b>
<b>Vydal a rozmožil:</b>	<b>Dům techniky ČSVTS Praha</b> <b>Praha 1, Gorkého náměstí 23</b>
<b>Rok vydání:</b>	<b>1983</b>
<b>Cena publikace:</b>	