Základní matematické vzorce potřebné v FCHSS

Integrace

$$\int x^q dx = \frac{x^{q+1}}{q+1} + konst \quad \int_{x_1}^{x_2} x^q dx = \left[\frac{x^{q+1}}{q+1}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^{q+1}}{q+1} - \frac{x_1^{q+1}}{q+1} \quad q \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + konst \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{x_1}^{x_2} = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\int e^x dx = e^x + konst \quad \int_{x_1}^{x_2} e^x dx = [e^x]_{x_1}^{x_2} = e^{x_2} - e^{x_1}$$

První vzorce platí pro neurčitou, druhé pro určitou (v mezích x_1 x_2) integraci, *konst* je integrační konstanta. Písmeno *e* v posledním vzorci označuje základ přirozených logaritmů (označení *ln*) tj. 2,718282.

Úplný (totální) diferenciál, parciální derivace

Pro obecnou funkci dvou proměnných x a y *f=f(x,y)* píšeme výraz pro její diferenciál

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy = Mdx + Ndy$$

df je úplný diferenciál, pokud platí Maxwelovy vztahy, tj:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_x$$

V předcházejících rovnicích označuje $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ parciální (částečnou) derivaci funkce dvou proměnných *f* podle proměnné *x,* druhá proměnná *y* je chápána jako konstanta.

Př.: funkce $g=xy^3$

$$M = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y = y^3; N = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = 3xy^2$$

Protože platí Maxwelovy vztahy tj. $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = 3y^2 = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_x = 3y^2$

pak výraz: $dg = y^3 dx + 3xy^2 dy$ je úplný diferenciál funkce *g*.

Chceme-li určit změnu funkce *f* mající úplný diferenciál, mezi body [x_1,y_1] a [x_2,y_2], pak lze použít následující integraci:

$$\Delta f_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=y_1} dx; \Delta f_2 = \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=x_2} dy \quad \Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2$$

Tuto integraci lze použít i mezi body [x_1,y_1] a [x_2,y_1] tj. pro y = y_1=konst. Pak $\Delta f=\Delta f_1$

Př.: Integrací výrazu $dg = y^3 dx + 3xy^2 dy$ dostaneme

$$\Delta g_1 = \int_{x_1}^{x_2} y_1^3 dx = y_1^3(x_2 - x_1); \Delta g_2 = \int_{y_1}^{y_2} 3x_2 y^2 dy = 3x_2\left(\frac{y_2^3}{3} - \frac{y_1^3}{3}\right) \quad \Delta g = x_2 y_2^3 - x_1 y_1^3$$

Stejný vztah dostaneme dosazením obou bodů do funkce $g=xy^3$.

Př.: Z výrazu

$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$ dostaneme za P=konst. $\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT = \int_{T_1}^{T_2} C_P dT$