

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



UŽITÍ MALÝCH POČÍTAČŮ V DYNAMICE SOUSTAV

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1983

Probírají se různé metody vhodné k řešení úloh z dynamiky soustav tuhých, pružných i obecně poddajných těles užitím číslicových počítačů. Uvádějí se různé způsoby, jakými lze vytvářet náhradní diskrétní modely s konečným počtem stupňů volnosti. Pro ně se potom formulují zákony a principy mechaniky. Zdůrazňují se zejména variační principy, které jsou základem metody konečných prvků. Velká pozornost se věnuje metodě přenosových matic. Vysvětlují se příčiny možného selhání této metody i možnost nápravy užitím Riccatiho transformace. Tato metoda je zvlášť vhodná pro malé počítače. Výklad je zakončen ukázkou jedné integrační metody užívané k řešení nelineárních přechodových kmitů.

Předpokládají se běžné znalosti z mechaniky a matematiky (Newtonovy zákony, integrace lineárních diferenciálních rovnic, základy maticové algebry). Výklad je velmi podrobný a doplněný čtyřiceti řešenými příklady.

PŘEDMLUVA

Zanedlouho uplyne tři sta let od prvního vydání slavné Newtonovy knihy *Philosophiae naturalis Principia mathematica* (vyšla roku 1687) a necelých dvě stě let od vydání Lagrangeovy *Mécanique analytique* (vyšla roku 1788). Tato dvě díla se stala základem mechaniky, vědy bez níž by nemohla existovat žádná průmyslově vyspělá společnost. Jde tedy o vědu velmi mladou, jejíž bouřlivý vývoj byl v moderní době ovlivněn ještě přijetím teorie relativity a kvantové či vlnové mechaniky jako nástrojů dalekosáhle rozšiřujících naše znalosti fyzikálního mikro- a makrosvěta, a později vývojem počítačů s dosud netušenými aplikačními možnostmi.

Logická výstavba klasické mechaniky, která byla dovršena a s ne-
překonatelným půvabem geometricky interpretována zejména v pracích Hamiltonových (1805 až 1865) a Jacobiho (1804 až 1851), zůstává dodnes základním kamenem, na němž spočívají všechny metody moderní mechaniky. Praktickou aplikaci si dnes nedovedeme představit bez počítačové techniky, která člověka zbavuje zdlouhavé a vyčerpávající duševní námahy při uskutečňování složitých výpočtů a uvolňuje tak jeho tvůrčí schopnosti, podobně jako kdysi průmyslová revoluce osvobodila člověka od nadměrné námahy tělesné.

V tomto semináři se věnujeme výhradně úlohám z dynamiky mechanických soustav. V první části probereme teoretické poznatky, jež tvoří určitou nadstavbu nad látkou, která se běžně vykládá na středních a vysokých školách technického směru. V druhé části věnujeme pozornost početním metodám, které se nejlépe hodí pro malé číslicové počítače. Pokusili jsme se tedy o vyvážené zastoupení teorie a praxe, neboť se domníváme, že nelze dosáhnout větších úspěchů v aplikaci teoretických poznatků aniž důkladněji porozumíme samotné teorii. Cílem je vytvořit pevný základ k samostatnému studiu novodobých numerických metod, o nichž se běžně referuje v odborných časopisech, a dát čtenáři představu o aplikačních možnostech.

Protože výklad je určen nejen odborníkům z oboru mechaniky, ale také - snad převážně - konstruktérům a technikům různého zaměření, doprovázíme jej četnými instruktivními příklady. Doufáme, že se tím výklad stane přitažlivějším a jasnějším. Vzhledem k omezenému rozsahu skript bylo nutné pečlivě vážit volbu témat a způsob výkladu. Je proto možné,

že skripta některé čtenáře neuspokojí. Připojujeme pro ně seznam vybrané literatury, z níž mohou načerpat další informace.

Autor děkuje Ing. Vladimíru Václavíkovi za podnět k tomuto semináři a za pomoc při vydání těchto skript. Upřímně děkuje všem pracovníkům Domu techniky ČSVTS v Praze, kteří se na této práci podíleli. Doufá, že studium tohoto spisu pomůže čtenářům správně formulovat a řešit důležité praktické úlohy. Snad si přitom zároveň upevní a rozšíří teoretický základ svých znalostí. Radost, kterou přitom pocítím bude bohatou odměnou za vynaloženou studijní námahu. Vždyť právě mechaniku označil Leonardo da Vinci za ráj matematiky, v němž dozrávají její nejkrásnější plody.

OBSAH

	Str.
Předmluva	3
1. Mechanická soustava	7
2. Vazby v mechanické soustavě	14
3. Potenciálová funkce	17
4. Variace funkce a variace funkcionálu	22
5. Virtuální práce	29
6. D'Alembertův princip	32
7. Relativní pohyb	35
8. Hamiltonův princip	43
9. Lagrangeovy rovnice	47
10. Malé kmity kolem rovnovážné polohy	55
11. Tlumené kmity	65
12. Numerické metody v dynamice	69
13. Příčiny selhání metody přenosových matic	88
14. Riccatiho transformace	91
15. Přečhodové kmity nelineární soustavy	97
16. Závěr	104
Literatura	104

1. MECHANICKÁ SOUSTAVA

Pevné těleso se s vynaložením sil deformuje; síly přitom konají pozitivní práci A_1 . Ta se zčásti mění v kinetickou energii, zčásti ve vnitřní energii. Pokud můžeme zanedbat nevratné změny spojené s rozptylem energie, je vnitřní energie totožná s deformační energií při izoentropické změně. Zpravidla však vznikají i nevratné změny, takže při uvolnění působících sil se získá pouze práce $A_2 < A_1$. Nechtě několik takových těles tvoří soustavu, tj. seskupení vzájemně působících těles, jejichž vztahy k okolí nejsou buď žádné nebo jsou předem definovány (jako vstupní veličiny). Jestliže vzájemné působení těles je pouze silové a případné vazby omezující volnost pohybu jsou pouze kinematické, jde o mechanickou soustavu.

Nositelem kinetické energie mechanické soustavy je hmotnost. Vratná potenciální deformační energie je dána pružností tělesa. Rozptýlená nevratná energie závisí na disipačních vlastnostech tělesa. Tyto vlastnosti nejsou v tělesech stejně zastoupeny, často lze dvě z nich zanedbat. Soustava má pak prvky čistě hmotové (absolutně tuhá tělesa), čistě pružné (nehmotné pružiny) a čistě rozptylové (tlumiče). Soustava složená z těchto jednoduchých ideálních prvků se nazývá mechanická soustava s diskrétními (oddělenými) parametry nebo krátce diskrétní mechanická soustava. Opakem je soustava s kontinuálně (spojitě) rozdělenými parametry.

Pro diskrétní mechanickou soustavu je příznačné, že její pohyb je zcela určen konečným počtem parametrů závislých na čase $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$; zde n značí počet stupňů volnosti. Okamžitý pohybový stav je dán souborem parametrů q_i a jejich časových derivací \dot{q}_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Parametry q_i nazýváme zobecněné souřadnice. Obvykle mají geometrický význam, ale nemusí tomu tak být (viz příklad 3). Za diskrétní mechanickou soustavu považujeme i takovou, u níž nejsou vlastnosti jejích prvků odděleny, ale jejíž pohyb je přesto popsán jen konečným počtem parametrů (příklad 3). Soustavu se spojitými parametry lze považovat za limitní případ diskrétní soustavy pro $n \rightarrow \infty$ (příklad 9). Soustava s konečným počtem stupňů volnosti ji může modelovat jen přibližně. Z matematického hlediska je pohyb spojitého tělesa či soustavy popsán parciálními diferenciálními rovnicemi, kdežto pohyb diskrétní mechanické soustavy je popsán obyčejnými diferenciálními rovnicemi.

Příklad 1. Volné ohybové kmitání tenkého prizmatického nosníku v rovině x, z je popsáno parciální diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = - \frac{EJ}{S\rho} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \quad (1)$$

V této rovnici značí $W = W(x, t)$ průhyb ve směru osy z , EJ ohybovou tuhost, S průřez a ρ hustotu. Počáteční a okrajové podmínky prostě podepřeného nosníku nechť jsou

$$W(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \dot{W}(x, 0) = 0, \quad (2)$$

$$W(0, t) = 0; \quad W''(0, t) = 0; \quad W(l, t) = 0; \quad W''(l, t) = 0. \quad (3)$$

Počáteční průhyb $W(x, 0)$ jsme vyjádřili ve tvaru Fourierovy řady s nekonečným počtem členů. Počáteční rychlost $\dot{W}(x, 0)$ jsme zvolili nulovou. Okrajové podmínky (3) odpovídají prostému podepření a musí platit v každém čase. Vyjadřují, že v podpoře je nulový průhyb a nulový ohybový moment (tedy i křivost). Řešení rovnice (1) můžeme předpokládat ve tvaru

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\omega_k t - \varphi_k). \quad (4)$$

Derivováním a dosazením do (1) dostaneme po úpravě podmínku pro kruhovou frekvenci ω_k (pro k -tou harmonickou složku)

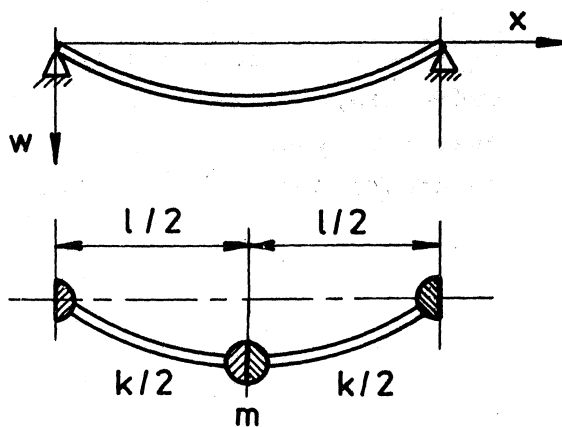
$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}} \quad (5)$$

Pro $k = 1$ dostaneme základní vlastní tvar kmitu podle (4) jako půl sinusovky. Základní vlastní kruhová frekvence podle (5) vyjde

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}} = \frac{9,870}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}} \quad (6)$$

Nyní tento nosník přibližně nahradíme diskrétní mechanickou soustavou s jedním stupněm volnosti. Rozdělíme jej na dvě stejné poloviny,

které budou představovat nehmotné pružiny. Hmotnost soustředíme do krajních bodů každé pružiny, takže dva hmotné body, každý o hmotnosti $S\ell\rho/4$, padnou do podpór $x = 0$ resp. $x = \ell$. Další dva hmotné body splynou v jeden o hmotnosti $m = S\ell\rho/2$ uprostřed nosníku $x = \ell/2$. Tuhost nosníku (pružinová konstanta) je $k = 48 EJ/\ell^3$. Takže pro model s jedním stupněm volnosti podle obr. 1 dostaneme kruhovou frekvenci vlastních kmitů



Obr. 1

$$\hat{\omega}_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{96}}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}} = \frac{4,798}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}} \quad (7)$$

Chyba vzorce (7) ve srovnání s přesným řešením (6) je 0,73 %.

V tomto diskrétním modelu je zobecněnou souřadnicí posuv osamělé hmoty uprostřed nosníku

$$q_1(t) = W\left(\frac{\ell}{2}, t\right) \quad (8)$$

Známe-li $q_1(t)$, známe celý pohyb, neboť nehmotný nosník se vždy prohne jen tak, jak by se prohýbal při statickém zatížení, takže

$$W(x, t) = \begin{cases} q_1(t) \frac{x}{\ell} \left(3 - 4 \frac{x^2}{\ell^2}\right) & \text{pro } x < \frac{\ell}{2}, \\ q_1(t) \left[\frac{x}{\ell} \left(3 - 4 \frac{x^2}{\ell^2}\right) + \left(2 \frac{x}{\ell} - 1\right)^3 \right] & \text{pro } x > \frac{\ell}{2}, \end{cases} \quad (9)$$

nezávisle na průběhu $q_1(t)$.

Protože diskrétní model podle obr. 1 jsme dostali soustředěním fyzikálních vlastností do oddělených členů soustavy, hovoříme o fyzikální diskretizaci.

Příklad 2. Nosník z příkladu 1 aproximujte diskrétním modelem se dvěma stupni volnosti. Nehmotný pružný nosník rozdělený na třetiny nese v místech $x = \ell/3$ resp. $x = 2\ell/3$ osamělé hmoty, z nichž každá má hmotnost $m = 5\ell\rho/3$. Zobecněné souřadnice jsou

$$q_1(t) = w(\ell/3, t), \quad q_2(t) = w(2\ell/3, t)$$

Ukažte, že vlastní kruhové frekvence takové soustavy vyjdou

$$\hat{\omega}_1 = \frac{9,859}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}}, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{38,184}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}}$$

Chyby těchto hodnot proti přesným hodnotám (5) jsou 0,11 % resp. 3,28 %.

Příklad 3. Nosník z příkladu 1 nahradíme diskrétní soustavou takovou, že zvolíme

$$w(x, t) = q_1(t)(\ell x - x^2) + q_2(t)(2x^3 - 3x^2\ell + x\ell^2). \quad (1)$$

Tato funkce splňuje okrajové podmínky $w(0, t) = 0$, $w(\ell, t) = 0$, ale zbývající okrajové podmínky ani parciální diferenciální rovnici (1) z příkladu 1 nespĺňuje. Může proto dát jen přibližné řešení úlohy.

Vypočteme deformační energii v nosníku

$$V = \frac{1}{2} EJ \int_0^\ell \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = 2EJ\ell q_1^2 + 6EJ\ell^3 q_2^2 \quad (2)$$

a jeho kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2} S\rho \int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{60} S\rho \ell^5 (\dot{q}_1)^2 + \frac{1}{420} S\rho \ell^7 (\dot{q}_2)^2. \quad (3)$$

Okolnost, že kvadratické formy (2) resp. (3) neobsahují smíšený součin $q_1 q_2$ resp. $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ svědčí o tom, že oba vlastní kmity budou separovány, takže je můžeme uvažovat zvlášť. Vzpomeneme-li, že při harmonickém pohybu popsaném rovnicemi

$$\begin{aligned} q_i &= q_{i0} \sin(\omega_i t - \psi_i), \\ \dot{q}_i &= \omega_i q_{i0} \cos(\omega_i t - \psi_i) \end{aligned} \quad (4)$$

se maximální hodnoty T_{max} a V_{max} sobě rovnají (potenciální energie se mění cyklicky v kinetickou a naopak), dostaneme pro $i = 1$ z prvních členů na pravých stranách (2) a (3)

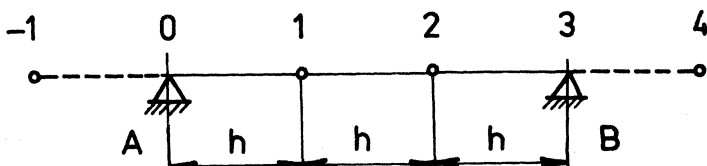
$$\hat{w}_1 = \frac{\sqrt{120}}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\varrho}} \doteq \frac{10,95}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\varrho}} \quad (5)$$

a obdobně z druhých členů pro $i = 2$

$$\hat{w}_2 = \frac{\sqrt{6,420}}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\varrho}} \doteq \frac{50,20}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\varrho}} \quad (6)$$

Chyby těchto hodnot jsou poměrně značné, totiž 10,99 % resp. 27 %. Je to dáno tím, že chyba odhadu (1) průhybové čáry se zveličila dvojnásobně derivací obsaženou v integrandu rovnice (2).

Příklad 4. Volné kmity nosníku z příkladu 1 budeme řešit diferenční metodou. Interval $(0, l)$ rozdělíme na tři stejné díly o délce $h = l/3$ (obr. 2). Čtvrtou derivací v rovnici (1) z příkladu 1 nahradíme diferenčním vzorcem



Obr. 2

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{w_{k-2} - 4w_{k-1} + 6w_k - 4w_{k+1} + w_{k+2}}{h^4} + O(h^2) \quad (1)$$

pro $k = 1$ resp. 2. Dostaneme přibližné vztahy

$$\frac{d^2 w_1}{dt^2} = -\frac{EJ}{S\varrho h^4} (w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 w_2}{dt^2} = -\frac{EJ}{S\varrho h^4} (w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4). \quad (3)$$

Uzlové body $k = -1$ a $k = 4$ jsou fiktivní, neboť skutečný nosník existuje jen mezi podporami A, B. Okrajové podmínky vyjadřují vymizení průhybu a ohybového momentu v obou podporách. Bude proto

$$\begin{aligned}
 W_0 &= 0, & W_3 &= 0, \\
 W_{-1} - 2W_0 + W_1 &= 0, & W_2 - 2W_3 + W_4 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

V posledních vztazích jsme využili diferenčních vzorců pro druhou derivaci, která vymizí zároveň s ohybovým momentem. Z posledních čtyř rovnic dostaneme $W_{-1} = -W_1$; $W_4 = -W_2$. Tyto hodnoty dosadíme do vztahů (2) a (3). Vyjde

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 W_1}{dt^2} &= -\frac{EJ}{S\rho h^4} (5W_1 - 4W_2), \\
 \frac{d^2 W_2}{dt^2} &= -\frac{EJ}{S\rho h^4} (-4W_1 + 5W_2).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Budeme předpokládat řešení ve tvaru

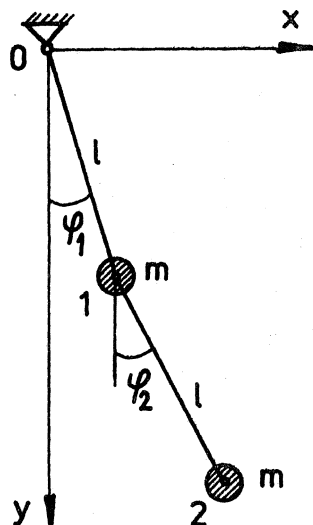
$$\begin{aligned}
 W_1 &= a_1 \sin(\omega t - \psi), \\
 W_2 &= a_2 \sin(\omega t - \psi).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Dosažením (6) do (5) dostaneme charakteristickou rovnici pro ω^2 a její kořeny

$$\hat{\omega}_1 = \frac{g}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}}, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{27}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{S\rho}}.
 \tag{7}$$

Chyba těchto hodnot je 8,81 % resp. 31,6 %. Zobecněné souřadnice jsou $q_1(t) = W_1$, $q_2(t) = W_2$.

Poznámka. V příkladech 3 a 4 jsme dospěli k náhradní soustavě o dvou stupních volnosti matematickou cestou. Jde tedy o matematickou diskretizaci. Mezi oběma příklady je však podstatný rozdíl. V třetím příkladu určovaly parametry q_1, q_2 tvar celé průhybové čáry, kdežto ve čtvrtém příkladu určovaly jen průhyby ve dvou uzlových bodech. Kdyby nás zajímal průhyb i mezi těmito body, musili bychom použít interpolačních vzorců, přičemž výběr těchto vzorců nevyplývá z použité metody. Je však rozumné požadovat, aby interpolace splňovala požadavek hladkosti průhybové čáry.



Obr. 3

Příklad 5. Dvojité matematické kyvadlo podle obr. 3 je složeno ze dvou stejných hmot zavěšených na stejně dlouhých vláknech. Za zobecněné souřadnice zvolíme $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$ (obr. 3). Poloha obou hmotných bodů je dána souřadnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \varphi_1, & x_2 &= l(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2), \\ y_1 &= l \cos \varphi_1, & y_2 &= l(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Určíme kinetickou a potenciální energii soustavy v homogenním gravitačním poli. Potenciální polohová energie je

$$V = -mg(y_1 + y_2) = -mgl(2\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \quad (2)$$

a kinetická energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} m \ell^2 [2\dot{\varphi}_1^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2]. \end{aligned} \quad (3)$$

Za zobecněné souřadnice jsme mohli zvolit také

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = y_1, \quad q_3 = x_2, \quad q_4 = y_2. \quad (4)$$

Tyto souřadnice by však nemohly být nezávislé. Byly by vázány dvěma podmínkami

$$q_1^2 + q_2^2 = \ell^2, \quad (q_3 - q_1)^2 + (q_4 - q_2)^2 = \ell^2 \quad (5)$$

vyjadřujícími neprodloužitelnost vláken 01 , 12 (obr. 3).

2. VAZBY V MECHANICKÉ SOUSTAVĚ

Nechť se mechanická soustava skládá z N hmotných bodů, jejichž pohyb není nijak v prostoru omezován. Poloha těchto bodů bude určena, budou-li známy souřadnice x_i , y_i , z_i každého z nich ($i = 1, 2, \dots, N$). Místo pravouhlé soustavy souřadnic můžeme zvolit jinou, v níž poloha všech bodů bude známa, budou-li dány všechny zobecněné souřadnice q_1, q_2, \dots, q_{3N} . Mezi oběma soustavami musí být vzájemně jednoznačné přiřazení

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}), \\y_1 &= f_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N}), \\&\vdots \\z_N &= f_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_{3N}).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Mezi hmotnými body mohou působit vazby omezující volný pohyb. Jsou-li např. první dva body spojeny absolutně tuhým tyčím o délce l , bude vazební podmínka

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.\tag{2.2}$$

Těchto podmínek může být několik. Kdyby např. třináct hmotných bodů bylo navzájem propojeno tuhými tyčemi tak, že by tvořily absolutně tuhé těleso, pak tři posuvy těžiště a tři úhly otočení by úplně určovaly polohu všech třinácti bodů (všech 39 souřadnic by se dalo vyjádřit funkcemi pouze šesti zobecněných souřadnic). Bylo by tedy 33 nezávislých vazebních podmínek.

Je-li N hmotných bodů a m vazebních podmínek, postačí k určení polohy všech hmotných bodů právě

$$n = 3N - m\tag{2.3}$$

zobecněných souřadnic. Soustava má n -stupňů volnosti. Eliminujeme-li přebytečné zobecněné souřadnice užitím vazebních podmínek

$$\varphi_k(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m,\tag{2.4}$$

dostaneme místo soustavy (2.1) jinou soustavu

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_n), \\&\vdots \\z_N &= f_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_n)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Někdy je výhodné eliminovat jenom některé zobecněné souřadnice a k soustavě typu (2.5) připojit zbyvající vazební podmínky, kterých je m

$$\begin{aligned} \psi_1(q_1, q_2, \dots, q_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \psi_m(q_1, q_2, \dots, q_n) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Máme pak soustavu (2.5) s vedlejšími podmínkami (2.6) a počet stupňů volnosti je $n' = n - m$.

Podmínky (2.6) jsou holonomní, neboť to jsou implicitní funkce zobecněných souřadnic. Někdy bývají předepsány vazební podmínky v diferenciálním tvaru. Např. rovnice

$$\psi(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (2.7)$$

může být dána ve tvaru

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial q_n} dq_n = 0. \quad (2.8)$$

Rovnici (2.8) lze integrací převést na tvar (2.7). Obě tyto rovnice představují holonomní podmínku. Je-li však dána vazba ve tvaru

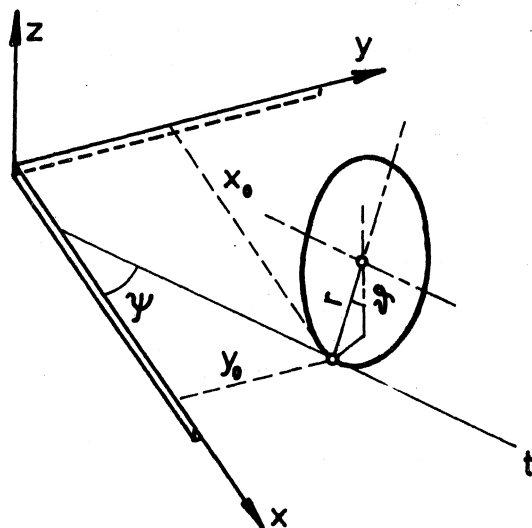
$$A_1 dq_1 + A_2 dq_2 + \dots + A_n dq_n = 0, \quad (2.9)$$

v níž A_i jsou známé funkce souřadnic q_k , nemusí se integrace obecně podařit. Takové neintegrabilné vazební podmínky se nazývají neholonomní.

Příklad 6. Tenký disk opatřený na obvodě břitem se valí po vodorovné rovině (obr. 4).

Za zobecněné souřadnice zvolíme souřadnice jeho středu x, y, z a tři úhly ψ, ϑ, φ . Úhel φ je otočení kolem osy rotační symetrie disku.

Souřadnice dotykového bodu označíme $x_0, y_0, 0$.



Obr. 4

Zřejmě

$$\begin{aligned}x_0 &= x + r \sin \vartheta \sin \psi, \\ y_0 &= y - r \sin \vartheta \cos \psi.\end{aligned}\tag{1}$$

Podmínky valení jsou

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \operatorname{tg} \psi,\tag{2}$$

$$-dx_0 \cos \psi + dy_0 \sin \psi = r d\varphi.\tag{3}$$

První z nich vyjadřuje, že valení se bude dít po přímce t , druhá vyjadřuje, že se kolo valí bez prokluzování. Z rovnic (1) až (3) můžeme souřadnice x_0 , y_0 vyloučit. Dostaneme dvě rovnice

$$\sin \psi dx - \cos \psi dy + r \cos \vartheta d\vartheta = 0,\tag{4}$$

$$\cos \psi dx + \sin \psi dy + r \sin \vartheta d\psi = r d\varphi\tag{5}$$

K nim přibude třetí

$$r \cos \vartheta = z.\tag{6}$$

Šest zobecněných souřadnic x , y , z , ϑ , ψ , φ je tedy vázáno třemi podmínkami (4), (5) a (6). Soustava má proto tři stupně volnosti. Podmínky (4) a (5) jsou neholonomní. Představují vazbu dvou nekonečně blízkých poloh disku. O polohách v konečné vzdálenosti nevyovídají nic. Podmínka (6) je však splněna ve všech polohách.

Příklad 7. Dokažte, že rovnici (2.9) lze integrovat, platí-li vztahy

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_j} = \frac{\partial A_j}{\partial q_i}$$

pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, n$.

3. POTENCIÁLOVÁ FUNKCE

Je-li soustava složena z N nezávislých (volných) hmotových bodů a působí-li na každý bod o souřadnicích x_i , y_i , z_i síla o složkách X_i , Y_i , Z_i , vykonají tyto síly při nekonečně malé změně souřadnic práci

$$d\bar{A} = \sum_{i=1}^N (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) \quad (3.1)$$

Jestliže použijeme zobecněné souřadnice, dostaneme užitím vztahů (2.5) po úpravě výrazy

$$d\bar{A} = F_1 dq_1 + F_2 dq_2 + \dots + F_n dq_n \quad (3.2)$$

Součinitele F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nazveme zobecněné síly. Změní-li se q_i o dq_i , vykonají všechny akční síly dohromady elementární práci $F_i dq_i$.

Diferenciální forma (3.2) může být (v příznivém případě) integrovatelná. Pak jde o totální diferenciál nějaké funkce a pruh nad symbolem můžeme vynechat.

Bude

$$dA = dU, \quad U = U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (3.3)$$

Pak tedy

$$\sum \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i = \sum F_i dq_i \quad (3.4)$$

a porovnáním koeficientů dostaneme

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (3.5)$$

Existuje-li tato skalární funkce U , nazývá se potenciálová funkce.*) Zpravidla se místo ní do výpočtů zavádí potenciální energie $V = -U$, takže

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (3.6)$$

*) Rusky "silovaja funkcija", anglicky "work function".

Vykonají-li síly F_i práci $\sum F_i dq_i$, klesne potenciální energie o dV . Spotřebuje-li se tato práce právě jen na vzrůst dT kinetické energie T , bude $dT + dV = 0$ a

$$E = T + V = \text{konst.} \quad (3.7)$$

Poslední rovnice vyjadřuje zákon zachování celkové energie mechanické soustavy. Platí pro konzervativní mechanické soustavy.

Později (v 9. kap.) ukážeme, že zákony (3.6) a (3.7) platí za předpokladu $V = -U$ jen tehdy, je-li T kvadratickou formou zobecněných rychlostí \dot{q}_i , tedy

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3.8)$$

a potenciální energie V je na těchto rychlostech nezávislá. Žádná z těchto funkcí nesmí záviset explicitně na čase, což znamená, že soustava je skleronomní.^{x)}

Explicitní závislost na čase dostaneme, když některé parametry nebo vazební podmínky závisí na čase (např. závěs kyvadla koná předepsaný pohyb). Po eliminaci se čas dostane jako nezávislá proměnná i do vztahů (2.5). Bude-li např.

$$x_1 = f_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (3.9)$$

vyjde derivováním

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f_1}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Protože kinetická energie je dána vztahem

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad (3.11)$$

^{x)} Součinitele m_{ij} se však mohou měnit v závislosti na zobecněných posuvech (tj. s konfigurací soustavy). Viz příklad 27, rovnice (5).

dostaneme ve výrazu pro T nejen kvadratické členy obsahující součiny \dot{q}_i, \dot{q}_j , ale také lineární členy a dokonce členy, které na rychlostech vůbec nezávisí. Vztahy (3.4) a (3.5) sice platí, ale zákon zachování celkové energie \dot{E} neplatí. Jde o reonomní soustavu, která energii buď hromadí nebo rozptyluje.^{x)} Síly v reonomní soustavě mohou mít potenciálovou funkci, ale přesto nejsou konzervativní. Na druhé straně síly udržující valení (příklad 7) splňují zákon zachování energie, ale potenciálovou funkci nemají.

Je-li soustava skleronomní, avšak potenciálová funkce závisí také na zobecněných rychlostech

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n), \quad (3.12)$$

je třeba definovat potenciální energii výrazem

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - U, \quad (3.13)$$

aby zákon (3.7) platil (příklad 8). U reonomní soustavy s potenciálovou funkcí

$$U = U(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) \quad (3.14)$$

nemá smysl potenciální energii definovat, neboť taková soustava není konzervativní. Platí-li (3.12) nebo (3.14), jsou zobecněné síly dány vztahem

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (3.15)$$

bez ohledu na to, je-li soustava konzervativní či ne. Je zřejmé, že potenciálová funkce U a nikoli potenciální energie V je primární skalární funkcí, která generuje zobecněné síly. To se v učebnicích mechaniky velmi často nedoceňuje.

Potenciálová funkce závisí na zobecněných rychlostech v relativistické mechanice. Příkladem síly, kterou lze odvodit podle vzorce (3.15) z potenciálové funkce typu (3.14), je Lorentzova elektromagnetická síla působící na nabitou částici v elektrickém a magnetickém poli.

^{x)} Název "holonomní" resp. "neholonomní" soustava zavedl H. Hertz (1857 až 1894). Názvy "skleronomní" resp. "reonomní" pocházejí od L. Boltzmann (1844 až 1906).

Příklad 8. Dokážeme, že pro potenciálovou funkci U podle (3.12) platí zákon zachování celkové energie (3.7) jen tehdy, definujeme-li potenciální energii vztahem (3.13).

Lagrangeovu funkci $L = T + U$ dosadíme do Lagrangeových rovnic (viz příklad 13 a kap. 9)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1)$$

Tuto rovnici znásobíme $dq_i = \dot{q}_i dt$, sečteme podle $i = 1, 2, \dots, n$ a zintegrujeme v mezích od t_1 do t_2 . První člen integrujeme per partes. Vyjde po snadné úpravě (meze nejsou vyznačeny)

$$\left[\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] - \int \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \int \sum \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \left[\sum \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] = 0. \quad (2)$$

Má-li kinetická energie tvar (3.8), dá první člen na levé straně (2) $[2T]$, druhý člen $-[T]$. Třetí člen obsahuje v integrandu totální diferenciál dU , takže celkem bude

$$\left[2T - T - U + \sum \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right]_{t=t_1}^{t=t_2} = 0. \quad (3)$$

Protože t_2 volíme libovolně, musí být výraz uvnitř hranaté závorky nezávislý na čase.

Takže

$$T - U + \sum \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \text{konst}, \quad (4)$$

což je ekvivalentní rovnicím (3.7) a (3.13). Mají-li tyto vztahy platit, musí být systém skleronomní a kinetická energie musí mít kvadratickou formu (3.8).

Příklad 9. Průhyb rovnoměrně zatíženého, prostě podepřeného nosníku lze popsat rovnicí

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \sin \frac{k\pi x}{e}. \quad (1)$$

Jde o Fourierovu řadu, jejíž koeficienty $q_k(t)$ zvolíme za zobecněné souřadnice. Jaké jim přísluší zobecněné síly?

Změní-li se q_k o dq_k , vykonají elementární síly $p dx$ na průhybu $(\partial W / \partial q_k) dq_k$ práci

$$d^2 A_k = p dx \cdot dq_k \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (2)$$

Na celém nosníku bude tato práce

$$dA_k = p dq_k \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{pl dq_k}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] \quad (3)$$

Výraz v hranaté závorce vymizí pro sudé k , takže

$$dA_k = \begin{cases} \frac{2pl}{k\pi} dq_k & \text{pro } k = 1, 3, 5, \dots, \\ 0 & \text{pro } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4)$$

Srovnáním s výrazem (3.2) vyjde

$$\begin{aligned} F_k &= 2pl/k\pi && \text{pro liché } k, \\ F_k &= 0 && \text{pro sudé } k. \end{aligned} \quad (5)$$

Integrací (4) dostaneme potenciálovou funkci $U = A = \sum \int dA_k$

$$U = \frac{2pl}{\pi} \sum_{k=1,3,5} \frac{1}{k} q_k \quad (6)$$

a potenciální energii

$$V = -\frac{2pl}{\pi} \left(q_1 + \frac{1}{3} q_3 + \frac{1}{5} q_5 + \dots \right). \quad (7)$$

Příklad 10. Bude-li nosník z příkladu 9 zatížen uprostřed osamělou silou P (místo rovnoměrného zatížení p), vyjdou zobecněné síly $F_k = P \sin(k\pi/2)$, tj. pro $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} F_{2n-1} &= (-1)^{n-1} P, \\ F_{2n} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

4. VARIACE FUNKCE A VARIACE FUNKCIONÁLU

Nechť je dána spojitá a hladká funkce

$$z = f(x, y) \quad (4.1)$$

popisující určitý terén, v němž se pohybuje pozorovatel. Pak x , y jsou souřadnice pozorovatele v půdorysu (na mapě), z je nadmořská výška. Cesta vede přes temeno hory, na jejímž nejvyšším místě stojí rozhledna. Její souřadnice jsou x_0 , y_0 , z_0 . Zřejmě

$$z_0 = f(x_0, y_0) = z_{max}. \quad (4.2)$$

Představme si, že by tam rozhledna dosud nestála a že bychom si přáli určit její souřadnice rozbořem vlastností známé funkce (4.1). Vykročili z místa, kde má být rozhledna postavena, nemůžeme jít ani do kopce ani s kopce. Kdybychom šli do kopce, nebyli bychom na nejvyšším místě. Kdybychom šli s kopce, mohli bychom se obrátit a v protisměru jít do kopce, neboť plocha $z = f(x, y)$ má v bodě x_0 , y_0 podle předpokladu jedinou tečnou rovinu. Ať tedy změním souřadnice x_0 , y_0 o jakékoli nekonečně malé přírůstky δx , δy , musí vyjít δz nulové. Tedy

$$\delta z = f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0) = 0. \quad (4.3)$$

Užitím Taylorovy řady dostaneme

$$\delta z = \delta f + \frac{1}{2} \delta^2 f + \dots, \quad (4.4)$$

kde první resp. druhá variace funkce $f(x, y)$ v bodě x_0 , y_0 , je

$$\delta f = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0 \delta y, \quad (4.5)$$

$$\delta^2 f = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_0 \delta x^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_0 \delta x \delta y + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_0 \delta y^2. \quad (4.6)$$

Protože výraz (4.6) je o řád menší než (4.5), můžeme jej v limitě zanedbat. Ze stejného důvodu zanedbáme i další členy na pravé straně (4.4), tedy všechny členy kromě prvního. Potom se musí rovnat nule variace δf podle (4.5). Přírůstky δx , δy jsme volili libovolně. Musí proto být

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (4.7)$$

pro $x = x_0$ a $y = y_0$. Z těchto rovnic lze souřadnice x_0 , y_0 lokálního extrému určit. Tím je však zaručena pouze existence stacionární hodnoty. O její povaze nevíme dosud nic. Může jít o maximum, minimum nebo o sedlový bod. Buď-li druhá variace (4.6) záporná pro jakékoli δx , δy , tj. buď-li tato kvadratická forma negativně definitní, půjde o maximum (všechny cesty směrem od rozhledny povedou v jejím okolí s kopce).

Jaký je rozdíl mezi variací δf a diferenciálem df funkce $f(x, y)$? Půjdeme-li přes rozhlednu po cestě (předpokládejme, že tam vede nějaká cesta) nebudou přírůstky souřadnic libovolné, budou odpovídat skutečnému pohybu pozorovatele. Půjde o diferenciály, pro něž platí

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (4.8)$$

Variace představuje myšlenkový experiment; neodpovídá žádnému skutečnému pohybu pozorovatele. K vymyšleným změnám δx , δy vypočteme δz a zkoumáme zda $\delta z = 0$, přičemž

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \quad (4.9)$$

Z hlediska matematických operací jsou rovnice (4.8) a (4.9) totožné. Jejich význam je však různý. Skutečné přírůstky dx , dy , dz mohou vzniknout jen za časový interval dt při pohybu pozorovatele. Virtuální přírůstky δx , δy , δz mohou vzniknout okamžitě, neboť nepopisují žádný skutečný pohyb.

Základní úlohou variačního počtu je vyhledání stacionární hodnoty určitého integrálu

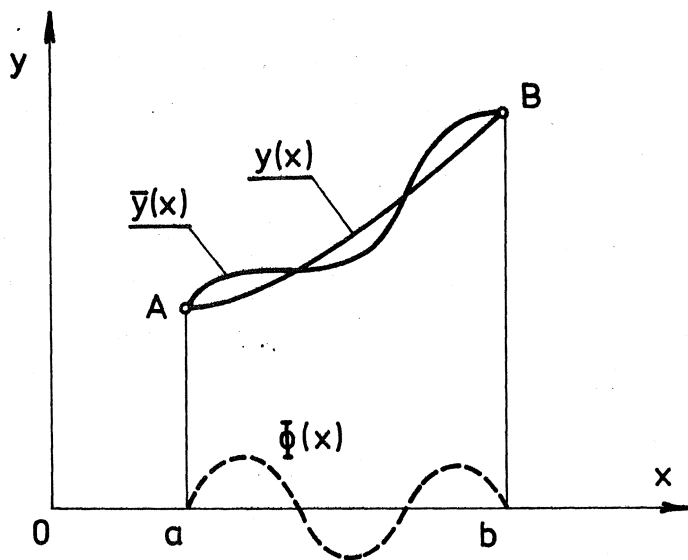
$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (4.10)$$

v němž $y = y(x)$, $y' = dy/dx$. Vztah (4.10) představuje funkcionál, neboť k funkci $y(x)$ přiřazuje (reálné) číslo I . Funkci $y = y(x)$ změním o variaci $\delta y = \varepsilon \phi(x)$, přičemž $\phi(x)$ je libovolná "rozumná" funkce a $\lim \varepsilon \rightarrow 0$ (obr. 5). Místo funkce $y(x)$ pak budeme mít

(4.11)

variovanou funkci $\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon \bar{\phi}(x)$. Potom také $\bar{y}'(x) = y'(x) + \varepsilon \bar{\phi}'(x)$. Hodnota integrálu I se změní o jeho variaci

$$\delta I = \int_a^b F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (4.11)$$



Obr. 5

Užitím prvních členů Taylorovy řady dostaneme pro malá ε

$$F(x, \bar{y}, \bar{y}') = F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \varepsilon \bar{\phi}(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \varepsilon \bar{\phi}'(x). \quad (4.12)$$

Dosazením do (4.11)

$$\delta I = \varepsilon \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \bar{\phi} dx + \varepsilon \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \bar{\phi}' dx. \quad (4.13)$$

Druhý člen na pravé straně (4.13) zintegrujeme per partes. Bude

$$\delta I = \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \bar{\phi}(x) dx + \varepsilon \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \bar{\phi}(x) \right]_a^b. \quad (4.14)$$

Hodnota I bude stacionární právě tehdy, když variace δI vymizí. Protože funkce $\bar{\phi}(x)$ je volena libovolně, musí v integrandu vymizet hranatá závorka, takže

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.15)$$

To je Eulerova rovnice variačního problému. Dosazením (4.15) do (4.14) dostaneme

$$\delta I = \varepsilon \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \bar{\Phi}(x) \right]_a^b = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b. \quad (4.16)$$

Zvolíme-li $\bar{\Phi}(a) = 0$, $\bar{\Phi}(b) = 0$, vymizí i tento okrajový člen a bude $\delta I = 0$. Zbude pak jediná podmínka (4.15) jakožto diferenciální rovnice pro hledanou funkci $y(x)$ s předepsanými okrajovými hodnotami $y(a)$, $y(b)$. Funkce $\bar{\Phi}(x)$ na obr. 5 byla již tak volena, aby v okrajových bodech A, B byla nulová variace. Kdyby tomu tak nebylo, musili bychom požadovat ještě vymizení okrajového členu (4.16).

Tímto způsobem se zkoumají extrémální vlastnosti různých funkcio-nálů. Úlohami tohoto druhu se zabývali lidé od nepaměti. Intuitivně vyhledáváme nejkratší cestu, když jdeme ráno do práce. Svá přání se snažíme prosazovat cestou nejmenšího odporu. Veřejné osvětlení navr-hujeme tak, aby ztráty byly minimální, aby osvětlení mělo největší účinnost.

Příklad 11. Dokážeme, že variace a derivace funkce jsou záměnné ope-race. Nechť $y = y(x)$ a $\delta y = \varepsilon \bar{\Phi}(x)$, $\lim \varepsilon \rightarrow 0$. Variovaná funkce je $y + \delta y$. Potom

$$\frac{d}{dx} \delta y = \frac{d}{dx} \varepsilon \bar{\Phi}(x) = \varepsilon \frac{d\bar{\Phi}}{dx} = \varepsilon \bar{\Phi}'(x). \quad (1)$$

Naopak

$$\delta \frac{dy}{dx} = \delta y' = [y' + \varepsilon \bar{\Phi}'(x)] - [y'] = \varepsilon \bar{\Phi}'(x) = \frac{d}{dx} \delta y. \quad (2)$$

Proto

$$\frac{d}{dx} \delta y = \delta \frac{dy}{dx}. \quad (3)$$

Ponecháváme na čtenáři, aby dokázal, že

$$\delta \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \delta F(x) dx. \quad (4)$$

Funkce $F(x)$ musí být na intervalu (a, b) spojitá.

Příklad 12. Odvoďte podmínku pro existenci stacionární hodnoty integrálu

$$I = \int_a^b F(y, y', y'', x) dx. \quad (1)$$

Integrace per partes je nutno použít dvakrát. Vyjde Eulerova rovnice

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0 \quad (2)$$

a okrajový člen

$$\delta I = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right]_a^b. \quad (3)$$

Příklad 13. Najdeme podmínku pro stacionární hodnotu určitého integrálu

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt, \quad (1)$$

v němž L je Lagrangeova funkce a $q_i(t)$ jsou zobecněné souřadnice.

Obměníme-li pouze jedinou funkci q_k ($1 \leq k \leq n$), dostaneme podle (4.15) podmínku

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (2)$$

platnou pro $t_1 \leq t \leq t_2$, přičemž δq_k na koncích tohoto intervalu vymizí. Protože pro nekonečně malé změny platí princip superpozice, bude^{x)}

x) Vzpomeňme např., že rovnice (4.9) je v přírůstcích δx , δy , δz lineární, ačkoli funkce $Z = f(x, y)$ je nelineární. Pro nekonečně malé přírůstky proto platí princip superpozice.

$$\delta I = \delta_1 I + \delta_2 I + \dots + \delta_n I. \quad (3)$$

Zde $\delta_k I$ značí variaci δI vzhledem ke $q_k(t)$.

Výrazy vymizí, jestliže se budou rovnat nule všechny členy. Pak rovnice (2) musí platit pro všechna $k = 1, 2, \dots, n$. Představuje proto soustavu simultánních pohybových diferenciálních rovnic.

Lagrangeova funkce (1) obsahuje explicitně také čas t . To je však nezávisle proměnná, která variaci nepodléhá.

Příklad 14. Najdeme podmínku pro stacionární hodnotu funkcionálu

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) dt \quad (1)$$

s předepsanými vazebními podmínkami

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Přitom $1 \leq m < n$. Mohli bychom m zobecněných souřadnic z rovnic (2) vypočítat a dosadit do (1). Pak bychom postupovali stejně jako v příkladu 13, měli bychom však pouze $n - m$ stupňů volnosti.

Místo toho můžeme Lagrangeovu funkci rozšířit přidáním nulových členů

$$L' = L + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m. \quad (3)$$

Zde λ_i značí Lagrangeovy součinitele. Nyní bude

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L' dt. \quad (4)$$

Samozřejmě $L' = L$ vzhledem k (2), takže hodnota (4) je stejná jako (1). Variací funkcionálu (4) však dostaneme n rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} = 0. \quad (5)$$

Jestliže bychom z rovnic (2) vypočítali q_{m+1} až q_n a dosadili do (5), dostali bychom soustavu n rovnic pro q_1 až q_{n-m} a λ_1 až λ_m . Dostali bychom tedy nejen souřadnice $q_k(t)$, ale také součinitele $\lambda_i(t)$.

Budeme-li považovat $\lambda_i(t)$ za funkce podrobené variaci, dostaneme z Eulerových rovnic podmínky

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ čili } f_i = 0 \text{ pro } i = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Rovnice (2) tak samy vyplynou z řešení stacionární hodnoty funkcionálu (4).

Příklad 15. Pohyb s jedním stupněm volnosti je dán funkcí $q = q(t)$. Variaci této funkce $\delta q = \varepsilon \Phi(t)$ můžeme ve zvláštním případě volit tak, že bude odpovídat skutečné změně, tj. $\delta q = dq = \dot{q} dt$. Stačí zvolit $\varepsilon = dt$ a $\Phi(t) = \dot{q}(t)$. Avšak i v tomto případě bude mezi derivací a variací rozdíl. V prvním případě

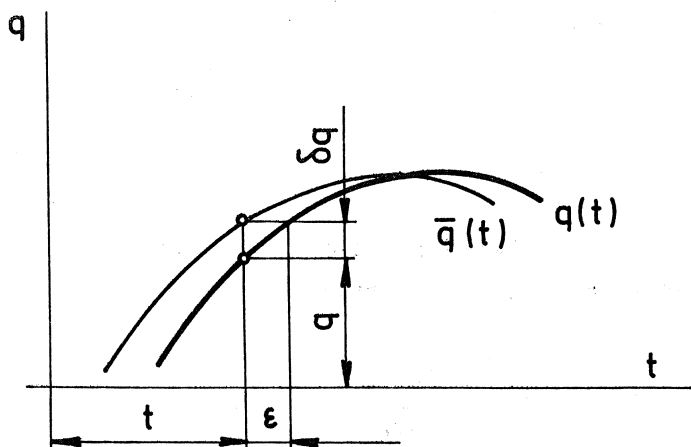
$$q(t) + dq = q(t) + \dot{q}(t)dt = q(t+dt). \quad (1)$$

V druhém případě

$$q(t) + \delta q = q(t) + \dot{q}(t)\varepsilon = \bar{q}(t). \quad (2)$$

Zřejmé

$$\bar{q}(t) = q(t + \varepsilon), \quad (3)$$



Obr. 6

takže obě křivky jsou shodné, vzájemně posunuté o ε (obr. 6). Variace nastává při nezměněném čase t [rovnice (2)], neboť ten variaci nepodléhá. Derivace vyjadřuje funkční přírůstek při změně času [rovnice (1)].

5. VIRTUÁLNÍ PRÁCE

Problém rovnováhy řešil Newton tak, že z mechanické soustavy uvolnil jednotlivá hmotná tuhá tělesa. Jejich vzájemné působení nahradil reakcemi a požadoval, aby výslednice akčních sil i reakcí (výsledná síla a výsledná silová dvojice) byly na každém tělese nulové. Jde-li o poddajná tělesa, musí být v rovnováze každá jejich elementární část, kterou lze považovat za hmotný bod. Podmínky rovnováhy pak dostáváme v diferenciální formě.

Místo těchto vektorových rovnic lze napsat jedinou rovnici pro virtuální práci $\overline{\delta A}$, kterou všechny síly vykonají při nepatrné (nekonečně malé) změně konfigurace, jakou připouštějí vazební podmínky. Tato práce za rovnováhy vymizí, takže

$$\overline{\delta A} = F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + \dots + F_n \delta q_n = 0. \quad (5.1)$$

Do této rovnice vstupují pouze akční síly, neboť práce ostatních sil, které udržují předepsané vazby mezi jednotlivými hmotnými body v tělese a mezi tělesy, je nulová.

Uvažme rozdíl mezi balvanem z pískovce a hromadou písku. Kdybychom chtěli poznat vazební síly, které uvnitř balvanu udržují jeho hmotné částice v nezměněné relativní poloze odpovídající tuhému tělesu, musili bychom tento balvan rozdrobit. Virtuální pohyb však můžeme uskutečnit i bez tohoto rozdrobení, takže rozdíl mezi balvanem a hromadou písku odpadne. Z rovnic rovnováhy, které takto dostaneme, však budou reakční vazební síly předem vyloučeny. Nemůžeme je tedy tímto způsobem vypočítat.

Podíváme-li se na rovnici (5.1) z geometrického hlediska, dojdeme k závěru, že n -rozměrový vektor sil $\vec{F} \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ je ortogonální k vektoru virtuálních posuvů $\vec{\delta q} = \{\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n\}$. Podmínkou rovnováhy tedy není vymizení zobecněných sil, ale jen jejich ortogonalita ke všem vektorům virtuálních posuvů.^{x)} Protože neexistuje vektor, který by mohl být zároveň kolmý ke všem směrům, musí síly F_i vymizet. Předepíšeme-li však m kinematických vazeb mezi zobecněnými souřadnicemi ($m < n$), nemusí síly F_i vymizet. Stačí, když jsou ortogonální k vektorům virtuálních posuvů v $(n - m)$ -rozměrném podprostoru.

x) Vektory \vec{A} a \vec{B} jsou ortogonální, je-li jejich skalární součin $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^n A_i B_i$ roven nule.

Mají-li síly F_i potenciál, bude se $\bar{\delta A}$ rovnat $\bar{\delta A} = \delta A = \delta U = -\delta V$ a rovnice (5.1) přejde v požadavek vymizení variace potenciální energie

$$\delta V = 0. \quad (5.2)$$

Je to podmínka pro stacionární hodnotu potenciální energie za statické rovnováhy tělesa. Tato rovnováha je stabilní, je-li $\delta^2 V > 0$, takže jde o minimum.

Poznámka. Podmínka rovnováhy (5.2) byla odvozena za předpokladu, že každý virtuální posuv δq_i lze obrátit na $-\delta q_i$. Kdyby tomu tak nebylo, tj. kdyby nějaká vazba bránila změně q_i o $-\delta q_i$, ale umožňovala změnu $+\delta q_i$, mohla by být potenciální energie V minimální, i kdyby za pohybu $+\delta q_i$ vzrostla. Rovnici (5.2) by pak bylo třeba nahradit nerovností

$$\delta V \geq 0. \quad (5.3)$$

Příklad 16. Nechť akčním silám F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) přísluší potenciální energie V . Mezi zobecněnými souřadnicemi q_i ať platí kinematická podmínka

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0. \quad (1)$$

Podmínka (5.2) se nenaruší, když místo potenciální energie V zavedeme

$$\bar{V} = V + \lambda f, \quad (2)$$

neboť $f = 0$ podle (1). Zdálo by se, že jde o pouhou matematickou hříčku. Potenciální energie \bar{V} má však zcela jiný fyzikální význam než V . Zahrnuje totiž i vazební síly udržující mechanickou soustavu v polohách vyhovujících požadavku (1). Příslušné zobecněné síly jsou $\bar{F}_i = -\partial \bar{V} / \partial q_i$, kde

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial q_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} + f \frac{\partial \lambda}{\partial q_i}. \quad (3)$$

Poslední člen odpadá vzhledem k (1). První člen na pravé straně rovnice (3) značí zápornou akční sílu $-F_i$. Zbývá tedy reakční složka i -té zobecněné síly

$$R_i = -\lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (4)$$

Příklad 17. Předpokládejme, že vzájemné působení dvou hmotných bodů závisí pouze na rozdílu jejich souřadnic

$$\xi = x_2 - x_1, \quad \eta = y_2 - y_1, \quad \zeta = z_2 - z_1 \quad (1)$$

Potenciálová funkce je pak $U = U(\xi, \eta, \zeta)$. Pro složky sil působících na oba body dostaneme

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}, & F_{2x} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \\ F_{1y} &= \frac{\partial U}{\partial y_1} = -\frac{\partial U}{\partial \eta}, & F_{2y} &= \frac{\partial U}{\partial y_2} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ F_{1z} &= \frac{\partial U}{\partial z_1} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta}, & F_{2z} &= \frac{\partial U}{\partial z_2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Platí tedy třetí Newtonův zákon

$$F_{1x} = -F_{2x}, \quad F_{1y} = -F_{2y}, \quad F_{1z} = -F_{2z} \quad (3)$$

Síly $\vec{F}_1 = \{F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}\}$ a $\vec{F}_2 = \{F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}\}$ však nemusí mít společnou nositelku, mohou vytvářet silovou dvojici.

Bude-li mít funkce U speciální tvar

$$U = U(r), \quad (4)$$

kde $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ je vzdálenost obou hmotných bodů, vyjde např.

$$F_{1x} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\xi}{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \cos \alpha = -F \cos \alpha, \quad (5)$$

kde $\cos \alpha$ je směrový kosinus spojnice obou hmotných bodů. Podobné výrazy dostaneme i pro ostatní složky, takže

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_1,$$

$$\vec{F} = \{ F \cos \alpha, F \cos \beta, F \cos \gamma \}. \quad (6)$$

Vzájemné působení je v tomto případě dáno silou ležící na spojnici obou bodů. Síly \vec{F}_1 , \vec{F}_2 jsou stejně velké, opačného smyslu a netvoří dvojici.

6. D'ALEMBERTŮV PRINCIP

Newtonův pohybový zákon pro hmotný bod

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \quad (6.1)$$

dává pro konstantní hmotnost $m = \text{konst}$ vztah

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (6.2)$$

Vztah (6.1) resp. (6.2) lze formálně nahradit dvěma rovnicemi

$$\vec{F} + \vec{S} = 0, \quad (6.3)$$

$$\vec{S} = -\frac{d}{dt} (m\vec{v}) \quad \text{resp.} \quad \vec{S} = -m\vec{a}. \quad (6.4)$$

\vec{S} značí setrvačnou sílu, která byla do rovnice (6.3) zavedena pouhou matematickou spekulací. Je to fiktivní síla, která obnovuje rovnováhu porušenou účinkem síly \vec{F} . Jestliže takto doplníme setrvačné síly ke všem hmotným bodům, převedli jsme úlohu o zrychleném pohybu soustavy na úlohu o rovnováze a přešli jsme tak z oboru dynamiky zpět do oboru statiky. K vyjádření podmínek rovnováhy soustavy akčních a setrvačných sil můžeme nyní použít třeba principu virtuálních prací. Tento geniální obrat zavedl do mechaniky znamenitý francouzský matematik a filosof d'Alembert (1717 až 1785).

Místo pohybových rovnic můžeme tedy psát podmínky statické rovnováhy. To však neznámá, že jejich řešení bude stejné jako ve staticce.

Tentokrát totiž nejde o algebraické rovnice, ale o rovnice diferenciální. Se statikou je společný pouze způsob jejich odvození.

Budeme-li mít soustavu N hmotných bodů, dá princip virtuálních prací ve spojení s d'Alembertovým principem rovnici

$$\sum_{k=1}^N (\vec{F}_k + \vec{S}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0, \quad (6.5)$$

kde $\delta \vec{r}_k$ je virtuální posuv k -té hmoty.

S přihlédnutím k (6.4) můžeme psát

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^N m_k \vec{a}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \quad (6.6)$$

Mají-li akční síly potenciál, bude na levé straně (6.6) variace skalární potenciálové funkce U

$$\delta U = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \quad (6.7)$$

Výraz na pravé straně (6.6) však takto vyjádřit obecně nelze; setrvačné síly jsou polygenní. Výraz $dA = \sum m_k \vec{a}_k \cdot d\vec{r}_k$ není úplným diferenciálem a nelze jej proto integrovat (leđa výjimečně).

Zavedeme-li potenciální energii $V = -U$, dá rovnice (6.6) s přihlédnutím k (6.7)

$$\delta V + \sum m_k \ddot{\vec{r}}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (6.8)$$

Variaci nyní ztotožníme se skutečnou změnou konfigurace pohybující se soustavy. Bude

$$dV + \sum m_k \ddot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k dt = 0 \quad (6.9)$$

a po integraci

$$V + \sum \frac{1}{2} m_k |\dot{\vec{r}}_k|^2 = \text{konst.} \quad (6.10)$$

To je však zákon zachování energie (3.7)

$$E = V + T = \text{konst.} \quad (6.11)$$

Za jakých předpokladů jsme jej vlastně odvodili? Položili jsme $\delta \vec{r}_k = d\vec{r}_k$. Přitom $\vec{r}_k = \{x_k, y_k, z_k\}$. Je-li mezi těmito souřadnicemi a zobecněnými souřadnicemi q_1, q_2, \dots, q_n vztah

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_n), \quad (6.12)$$

pak ztotožnění $\delta q_i = dq_i$ při virtuálním pohybu vede zároveň k ztotožnění $\delta \vec{r}_k = d\vec{r}_k$. Kdyby však platilo

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_n; t), \quad (6.13)$$

což platí v reonomní soustavě, bylo by

$$d\vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt, \quad (6.14)$$

kdežto variace by dala

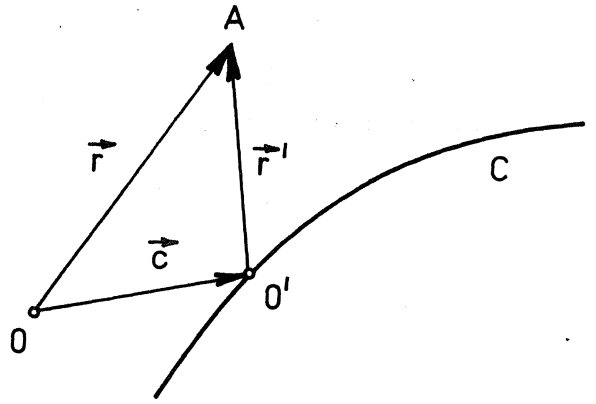
$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (6.15)$$

a $\delta \vec{r}_k \neq d\vec{r}_k$. Proto uvedený postup a zákon (6.11) platí pouze pro skleronomní soustavu.

Poznámka: variace se uskutečňuje okamžitě (přestože by tomu odpovídalo nekonečné zrychlení), kdežto skutečný pohyb se děje v čase spojitě. Při variaci se berou všechny síly, tedy i setrvačné, jako konstantní. Variace představuje pouze matematický experiment, nezávislý na skutečném pohybu (kap. 4).

7. RELATIVNÍ POHYB

Nejprve probereme relativní posuvný pohyb. Jedna soustava s počátkem v bodě O je inerciální, druhá se k ní rovnoběžně posouvá tak, že její počátek O' opisuje křivku C zrychleným pohybem (obr. 7). Pro polohu bodu A platí, že



Obr. 7

$$\vec{r} = \vec{c} + \vec{r}' \quad (7.1)$$

Tedy také

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{c}} + \ddot{\vec{r}}' \quad (7.2)$$

Tuto rovnici znásobíme $-m$ a zavedeme setrvačnou sílu podle (6.4). Vyjde

$$\vec{S} = -m\ddot{\vec{c}} + \vec{S}' \quad (7.3)$$

K akční síle \vec{F} připojujeme v inerciální soustavě d'Alembertovu setrvačnou sílu \vec{S} . Ta má podle (7.3) dvě složky. Jedna je setrvačnou silou vzhledem k unášené soustavě souřadnic a odpovídá pohybu měřenému relativně k této "čárkované" soustavě, druhá je zjevná síla či zjevená síla (apparent force, síla, která se objeví v unášené soustavě souřadnic vlivem unášivého pohybu).

$$\vec{Z} = -m\ddot{\vec{c}} \quad (7.4)$$

Ta vzniká výlučně nerovnoměrností relativního pohybu obou soustav. Efektivní výsledná síla, která vstoupí podle d'Alembertova principu do podmínek rovnováhy, je tedy

$$\vec{F}_{ef} = \vec{F} + \vec{S} = \vec{F} + \vec{Z} + \vec{S}' \quad (7.5)$$

Výraz na pravé straně můžeme interpretovat buď tak, že se o zjevnou sílu \vec{Z} zvětší setrvačná síla \vec{S}' a akční síla \vec{F} se nezmění nebo sílu \vec{Z} přičteme k akční síle a pak už můžeme ignorovat unášivý pohyb čárkované soustavy. Tato dvojí možnost výkladu působení zjevné

síly \vec{Z} vedla Einsteina k vyslovení principu ekvivalence mezi zdánlivými a gravitačními silami.^{x)}

Nyní budeme uvažovat dvě soustavy se společným počátkem, ale čárkovaná soustava souřadnic bude k inerciální nečárkované obecně rotovat úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}(t)$. Vzhledem k společnému počátku se polohové vektory shodují, takže

$$\vec{r} = \vec{r}' \quad (7.6)$$

Rychlosti a zrychlení se však neshodují, neboť změna polohového vektoru se bude jevit v každé soustavě souřadnic jinak. Představme si vektor \vec{p} , který je konstantní v čárkované soustavě a rotuje spolu s ní. Po uplynutí času dt změní pozorovatel v inerciální nečárkované soustavě přírůstek

$$d\vec{p} = (\vec{\Omega} \times \vec{p}) dt \quad (7.7)$$

vznikly relativní rotací obou soustav. Proto

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{p}, \quad \text{kdežto} \quad \frac{d'\vec{p}}{dt} = 0 \quad (7.8)$$

Symbol d'/dt značí, že se derivace vztahuje k pohybu v čárkované soustavě. Není-li vektor \vec{p} konstantní, bude zřejmě

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d'\vec{p}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{p}. \quad (7.9)$$

Protože tento vztah musí platit také pro polohový vektor (7.6), dostaneme transformační zákon pro rychlosti

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'. \quad (7.10)$$

Derivací podle času dostaneme vztahy pro zrychlení

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (7.11)$$

x) Věhlasný matematik a teoretický fyzik Cornelius Lanczos navrhl, aby zjevná síla \vec{Z} nesla Einsteinovo jméno.

S použitím (7.9) můžeme tuto rovnici dále upravit na

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\Omega} \times \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \\ &+ \vec{\Omega} \times \left(\frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \right). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Avšak $d'\vec{r}'/dt = \vec{v}'$, takže

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'. \quad (7.13)$$

Násobením $(-m)$ zavedeme do (7.13) setrvačné síly

$$\vec{S} = \vec{S}' - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'. \quad (7.14)$$

Pokusíme se o fyzikální interpretaci zdánlivých sil, které se objevují jako druhý až čtvrtý člen na pravé straně rovnice (7.14). Čárky pro stručnost vynecháme a budeme pamatovat, že všechny veličiny se nadále vztahují k čárkované (unášené) soustavě.

Třetí člen na pravé straně lze napsat jako

$$\vec{Q} = m\Omega^2 \vec{r}_\perp, \quad (7.15)$$

kde \vec{r}_\perp je složka polohového vektoru kolmá k vektoru $\vec{\Omega}$. Je to odstředivá síla, která má potenciální energii

$$\Phi = -\frac{1}{2} m\Omega^2 r_\perp^2. \quad (7.16)$$

Druhý člen

$$\vec{C} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} \quad (7.17)$$

je Coriolisova síla. Konečně poslední člen, který odpadá, je-li $\vec{\Omega} = \text{konst.}$, je Eulerova síla

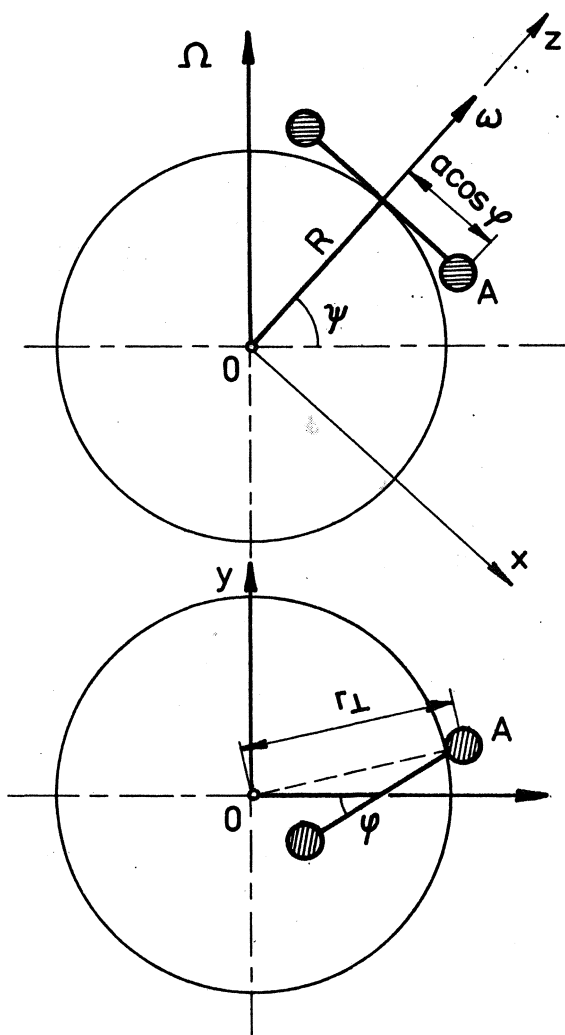
$$\vec{E} = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}. \quad (7.18)$$

Efektivní síla v rotující soustavě je pak podle (7.14)

$$\vec{F}_{\text{ef}} = \vec{F} + \vec{S}' + \vec{Q} + \vec{C} + \vec{E}. \quad (7.19)$$

Chce-li tedy pozorovatel v rotující soustavě použít d'Alebertova principu, musí k akčním silám připojit síly setrvačné a dále síly zjevné, což jsou síly odstředivé (příslušné unášivému pohybu), Coriolisovy a Eulerovy.

Příklad 18. Vynikající maďarský fyzik Eötvös uspořádal pokus s analytickými vahami. Sňal z nich obě misky a umístil je na vodorovný stůl, který rotoval kolem svislé osy úhlovou rychlostí ω . Když nastavil tuto rychlost tak, aby se rovnala kruhové frekvenci vlastních kmitů ramene vah, rameno se rozkývalo. Ukážeme, že jeho pokus demonstruje rotaci Země.



Obr. 8

Zvolíme souřadnice x, y, z spjaté se Zemí. Osa z spadá do osy rotace stolu, osa x je v meridiánové rovině. Počátek O je ve středu Země, která má poloměr R . Úhel ψ je zeměpisná šířka, φ značí otočení ramene o délce a vzhledem k meridiánové rovině (obr. 8). Rameno vah budeme předpokládat bez hmotnosti, hmotnost soustředíme na konci ramen do dvou hmotných bodů. Nejprve vypočteme setrvačné a zjevné síly působící na hmotu v bodě A .

Souřadnice bodu A jsou $x = a \cos \psi, y = a \sin \psi, z = R$. Tedy

$$\vec{r} = \{ a \cos \psi, a \sin \psi, R \}. \quad (1)$$

Derivací podle času dostaneme rychlost

$$\vec{v} = \{ -\omega a \sin \psi, \omega a \cos \psi, 0 \}. \quad (2)$$

Unášivá úhlová rychlost je

$$\vec{\Omega} = \{ -\Omega \cos \psi, 0, \Omega \sin \psi \}. \quad (3)$$

Setrvačná odstředivá síla (v soustavě spjaté se Zemí) vyjde

$$\begin{aligned} \vec{S} &= -m \cdot \vec{a} = -m \frac{d\vec{v}}{dt} = \\ &= \{ m\omega^2 a \cos\varphi, m\omega^2 a \sin\varphi, 0 \} \end{aligned} \quad (4)$$

Zjevná odstředivá síla vyjde

$$\vec{Q} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \{ Q_x, Q_y, Q_z \}, \quad (5)$$

kde

$$Q_x = m\Omega^2 a \sin^2\psi \cos\varphi + m\Omega^2 R \sin\psi \cos\psi,$$

$$Q_y = m\Omega^2 a \sin\varphi,$$

$$Q_z = m\Omega^2 a \sin\psi \cos\psi \cos\varphi + m\Omega^2 R \cos^2\psi.$$

Vektorové součiny se řídí pravidlem

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Můžeme se přesvědčit, že výsledek (5) souhlasí se vzorcem (7.15).

Z obr. 8 je totiž

$$\vec{r}_\perp = \{ \xi, \eta, \xi \}, \quad (7)$$

kde

$$\xi = (R \cos\psi + a \cos\varphi \sin\psi) \sin\varphi,$$

$$\eta = a \sin\varphi,$$

$$\xi = (R \cos\psi + a \cos\varphi \sin\psi) \cos\varphi$$

Coriolisova síla vyjde podle (7.17) a (6)

$$\vec{C} = \{ 2m\Omega\omega a \sin\psi \cos\varphi, 2m\Omega\omega a \sin\psi \sin\varphi, 2m\Omega\omega a \cos\psi \cos\varphi \}. \quad (8)$$

Eulerova síla je nulová, neboť $\vec{\Omega} = \text{konst.}$

Když složíme síly působící na obě hmoty, dostaneme konstantní silovou výslednici \vec{Q}_0

$$\vec{Q}_0 = \{ 2m\Omega^2 R \sin\psi \cos\psi, 0, 2m\Omega^2 R \cos^2\psi \}, \quad (9)$$

kteřá se skládá v závěsu ramene vah s gravitační silou. Je to korekce tíhy se zřetelem k rotaci Země. Kromě toho vzniknou dvě silové dvojice s periodickým časovým průběhem. Jedna působí kolem osy \bar{z} a vede k nerovnoměrnosti záběrového momentu pohánějícího stůl. Její moment je

$$M_2 = m\Omega^2 a \cos^2\psi \sin(2\omega t). \quad (10)$$

Druhá působí rozkývání ramene vah. Má moment

$$M_C = 2m\Omega^2 a^2 \sin\psi \cos\psi \cos\psi + 4m\Omega\omega a^2 \cos\psi \cos\psi \quad (11)$$

Protože Ω je velmi malé ($\Omega = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), můžeme členy obsahující Ω^2 zanedbat. Zbývá pouze

$$M_C \approx 4m\Omega\omega a^2 \cos\psi \cos\omega t. \quad (12)$$

Je to moment vzniklý působením vertikálních složek Coriolisových zdánlivých sil. Ačkoli je velmi malý, postačí k vybuzení rezonančního kmitání, jsou-li váhy dost citlivé. Budicí moment M_C je podle (12) úměrný úhlové rychlosti rotace Země. Eötvösův pokus by nejméně probíhal na rovníku ($\psi = 0$). Na pólech by bylo $\psi = \pm \pi/2$, a tedy $M_C = 0$.

„Příklad 19. Koná-li relativní pohyb tuhé těleso, lze si je představit složené z hmotných bodů. Zvolíme souřadnicový systém x, y, z tak, aby osy souřadnic byly hlavními centrálními osami tělesa. Protože tuhé těleso se nedeformuje a soustava souřadnic je spjata s tělesem, jsou druhotné rychlosti a zrychlení nulové. V rovnici (7.19) proto odpadá setrvačná síla \vec{S}' i Coriolisova síla \vec{C} . Protože počátek souřadnic je totožný s těžištěm, je $\sum m_i \vec{r}_i = 0$. Výslednice zjevných odstředivých sil \vec{Q} a Eulerových sil \vec{E} je potom nulová. Zbývá tedy výslednice $\sum \vec{F}$ akčních sil \vec{F} a výslednice $\sum \vec{Z}$ zjevných sil \vec{Z} podle (7.4). Ty odpovídají zrychlení \vec{p} relativního pohybu počátku dané souřadnicové soustavy vzhledem k inerciální soustavě, a tedy urychlení těžiště \vec{a}_T . Bude proto

$$\sum \vec{F} = \sum m \cdot \vec{a}_T. \quad (1)$$

To je známá věta o těžišti. Těžiště se pohybuje jako hmotný bod, v němž je soustředěna hmotnost celého tělesa, za působení výslednice všech akčních sil.

Označíme-li momenty setrvačnosti

$$\begin{aligned} I_x &= \sum m(y^2 + z^2), \\ I_y &= \sum m(z^2 + x^2), \\ I_z &= \sum m(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (2)$$

dostaneme pro výsledné momenty dvojic odstředivých zdánlivých sil \vec{Q} podle (7.15)

$$\begin{aligned} M_{Q_x} &= (I_y - I_z) \omega_y \omega_z, \\ M_{Q_y} &= (I_z - I_x) \omega_z \omega_x, \\ M_{Q_z} &= (I_x - I_y) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Pro Eulerovy síly (7.18) vyjde

$$M_{E_x} = -I_x \dot{\omega}_x, \quad M_{E_y} = -I_y \dot{\omega}_y, \quad M_{E_z} = -I_z \dot{\omega}_z. \quad (4)$$

Označíme-li složky výsledného momentu $\vec{M} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$ akčních sil $\{M_x, M_y, M_z\}$, dá požadavek vymizení součtu (7.19) (tj. požadavek "rovnováhy" momentů všech sil podle d'Alembertova principu) soustavu Eulerových pohybových rovnic

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x &= M_y, \\ I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Zde ω_x , ω_y , ω_z jsou složky vektoru $\vec{\Omega}$ unášivé úhlové rychlosti.

Příklad 20. Uvedli jsme, že složky d'Alembertovy setrvačné síly nelze obecně odvodit derivacemi nějaké skalární funkce. Gauss však přesto dokázal dát d'Alembertovu principu takový tvar, aby vedl k minimalizačnímu principu.

Pro polohový vektor \vec{r} v čase $t + \tau$ můžeme pro malé τ psát Taylorovu řadu

$$\vec{r}(t + \tau) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)\tau + \frac{1}{2} \vec{a}(t)\tau^2 + \dots \quad (1)$$

Nyní ponecháme \vec{r} a \vec{v} beze změny a uskutečnime variaci pouze zrychlení \vec{a} , jako kdyby šlo o volnou proměnnou.

Dostaneme

$$\delta \vec{r}(t+\tau) = \frac{1}{2} \tau^2 \delta \vec{a}(t). \quad (2)$$

Podle d'Alembertova principu (6.5)

$$\sum_{k=1}^N (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (3)$$

Zvolíme-li nyní $\delta \vec{r}_k$ shodně s výrazem (2) pro čas $t+\tau$, bude

$$\sum_{k=1}^N (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{a}_k = 0. \quad (4)$$

Protože síly \vec{F}_k variaci nepodléhají, platí identita

$$\delta (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) = -m_k \delta \vec{a}_k \quad (5)$$

Tento vztah podělíme $(-m_k)$ a dosadíme za $\delta \vec{a}_k$ do rovnice (4). Vyjde

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) = 0 \quad (6)$$

čili

$$\delta W = 0, \quad (7)$$

kde

$$W = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} |\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k|^2. \quad (8)$$

Protože $W \geq 0$, je rovnice (7) podmínkou minima funkce W . Pohybové rovnice se tedy najdou vyhledáním minima váženého součtu čtverců absolutních hodnot efektivních sil $(\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k)$ podle (8).

Jsou-li hmotné body v soustavě volné, je $W_{min} = 0$, neboť

$$\vec{F}_k = m_k \vec{a}_k \quad (9)$$

platí pro všechna $k = 1, 2, \dots, N$. Je-li jejich pohyb omezen nějakou vazbou, je $W_{min} > 0$. Gaussův princip se proto nazývá princip nejmenšího přinucení (omezení). Jeho aplikaci ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 21. Hmotný bod se pohybuje po ploše $z = f(x, y)$ za působení síly $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$. Užitím Gaussova principu najdeme pohybové rovnice. Dvojitě derivací podle času vyjde

$$\ddot{z} = f_x \ddot{x} + f_y \ddot{y} + f_{xx} \dot{x}^2 + 2f_{xy} \dot{x}\dot{y} + f_{yy} \dot{y}^2. \quad (1)$$

Gaussova funkce

$$W = \frac{1}{2m} [(F_x - m\ddot{x})^2 + (F_y - m\ddot{y})^2 + (F_z - m\ddot{z})^2] \quad (2)$$

má být minimální vzhledem k \ddot{x} , \ddot{y} , jestliže platí (1).

To vede k podmínkám

$$\begin{aligned} F_x - m\ddot{x} + (F_z - m\ddot{z})f_x &= 0, \\ F_y - m\ddot{y} + (F_z - m\ddot{z})f_y &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

To jsou hledané pohybové rovnice.

8. HAMILTONŮV PRINCIP

V d'Alembertově principu (6.5) se vyskytují síly dvojí povahy. Jednak akční síly \vec{F} , které obvykle mají potenciál a jsou tedy monogenní, jednak setrvačné síly \vec{S} , které jsou polygenní. Integrací podle času lze však i k těmto silám přiřadit integrální veličinu a tím odstranit uvedený rozdíl. Vyjdeme ze vztahu (6.1), který platí i tehdy, závisí-li hmotnost na čase. D'Alembertův princip spojíme s principem virtuálních prací, takže pro soustavu hmotných bodů dostaneme

$$\delta A = \sum [\vec{F} - \frac{d}{dt}(m\vec{v})] \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (8.1)$$

Součet se vztahuje na všechny hmotné body dané mechanické soustavy. Rovnici (8.1) znásobíme dt a zintegrujeme na intervalu $t_1 \leq t \leq t_2$. Budeme přitom předpokládat, že akční síly mají potenciálovou funkci U nezávislou na rychlostech a že jde o skleronomní soustavu. Pak existuje potenciální energie $V = -U$. První člen na pravé straně (8.1) po integraci dává

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt. \quad (8.2)$$

S využitím příkladu 11 můžeme pravou stranu (8.2) upravit. Bude

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} dt = - \delta \int_{t_1}^{t_2} V dt. \quad (8.3)$$

Druhý člen na pravé straně (8.1) budeme integrovat per partes. Znaménko \sum na okamžik pro stručnost vynecháme. Vyjde

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m\vec{v}) \cdot \delta \vec{r} dt = [m\vec{v} \cdot \delta \vec{r}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r} dt. \quad (8.4)$$

Zvolíme-li $\delta \vec{r} = 0$ pro $t = t_1$ i pro $t = t_2$, tj. zvolíme-li pevný počáteční a koncový bod, vymizí "okrajový člen" v hranaté závorce ve vztahu (8.4). Zbývá poslední člen, v němž zaměníme pořadí integrace a variace a dosadíme $d\vec{r}/dt = \vec{v}$. Budeme mít

$$\int_{t_1}^{t_2} m\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \vec{r} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{v} \cdot \delta \vec{v} dt = \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} m |\vec{v}|^2 dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt. \quad (8.5)$$

Připojíme opět znaménko \sum a uvědomíme si, že

$$T = \sum \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \quad (8.6)$$

Je kinetická energie soustavy. Dosazením (8.3) a (8.5) do rovnice (8.1) vyjde

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0. \quad (8.7)$$

Přebytek kinetické energie nad potenciální se nazývá Lagrangeova funkce a označuje se

$$L = T - V. \quad (8.8)$$

Rovnice (8.7) pak vyjadřuje Hamiltonův princip. Podle něho nabývá integrál

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (8.9)$$

stacionární hodnoty vzhledem k libovolné možné variaci konfigurace mechanické soustavy, je-li počáteční a konečná konfigurace daná.^{x)}

Při odvození Lagrangeova principu jsme se omezili na konzervativní soustavy. To však není nutné. Lze předpokládat obecnější tvar potenciálové funkce (3.12) nebo (3.14). Zobecněné síly jsou pak dány rovnicí (3.15) a Lagrangeova funkce má tvar

$$L = T + U \quad (8.10)$$

místo (8.8).

Hamiltonův princip je ekvivalentní s d'Alembertovým principem, jsou-li akční síly monogenní. Takové tedy musí být také udržující vazby, pokud jsou předepsány. Vazební podmínky musí být proto holonomní. Nic jiného se však nežadá, takže síly nemusí být konzervativní (soustava nemusí být skleronomní).

Přestože jsou za uvedených podmínek oba principy v podstatě ekvivalentní, je v jejich formě významný rozdíl. D'Alembertův princip vypovídá jaká je hra akčních a setrvačných sil zvláště v každém okamžiku. Hamiltonův princip pojímá hru těchto sil (a tedy i pohyb) ve všech okamžicích jako celek.

^{x)} Hamiltonovi vděčíme za jasnou formulaci principu, který byl v podstatě znám už Eulerovi a Lagrangeovi. Jeho pojmenování po Hamiltonovi navrhl Jacobi.

Příklad 22. U kmitajícího štíhlého prizmatického nosníku je kinetická energie

$$T = \frac{1}{2} m_1 \int_0^{\ell} (\dot{w})^2 dx \quad (1)$$

a potenciální deformační energie

$$V = \frac{1}{2} EJ \int_0^{\ell} (w'')^2 dx. \quad (2)$$

Přitom $w(x, t)$ značí průhyb, m_1 hmotnost připadající na nosník jednotkové délky, EJ ohybová tuhost. Podle (8.7) má být

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{w}^2 - \frac{1}{2} EJ w''^2 \right) dx = 0. \quad (3)$$

V prvním členu budeme nejprve integrovat podle času a dosadíme

$$\frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{w}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{w} \delta \dot{w} dt = [\dot{w} \delta w]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt. \quad (4)$$

Druhý člen v rovnici (3) budeme nejprve integrovat per partes podle x . Bude

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta \int_0^{\ell} (w'')^2 dx &= \int_0^{\ell} w'' \delta w'' dx = [w'' \delta w']_0^{\ell} - \int_0^{\ell} w''' \delta w' dx = \\ &= [w'' \delta w']_0^{\ell} - [w''' \delta w]_0^{\ell} + \int_0^{\ell} w^{(iv)} \delta w dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Zvolíme-li $\delta w = 0$ pro $t = t_1$ resp. $t = t_2$, odpadne člen v hranaté závorce v rovnici (4). Podobně odpadnou hranaté závorky v rovnici (5), budou-li vhodně voleny okrajové podmínky pro $x = 0$ resp. $x = \ell$ (předepsaný průhyb nebo nulová posouvající síla resp. předepsaný sklon nebo nulový ohybový moment). Dosazením (4) a (5) do (3) získáme vztah

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt \int_a^b (m_1 \ddot{w} + EJ w^{(iv)}) \delta w dx = 0. \quad (6)$$

Vzhledem k libovolnosti s jakou můžeme zvolit $\delta W(x, t)$ musí výraz v oblé závorce vymizet.

Musí tedy být

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = - \frac{EJ}{m_1} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}. \quad (7)$$

To je pohybová rovnice volně kmitajícího nosníku. Použili jsme ji v příkladu 1.

9. LAGRANGEOVY ROVNICE

Podle Hamiltonova principu nabývá integrál (8.9) stacionární hodnoty. Podle (4.10) a (4.15) resp. podle příkladu 13 dostáváme z tohoto principu Eulerovu diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (9.1)$$

která musí být splněna pro jakékoli $i = 1, 2, \dots, n$. Podmínky (9.1) představují soustavu pohybových rovnic. Jsou odvozeny z jediné skalární funkce $L = T + U$ [resp. $L = T - V$, pokud platí (3.3)]. Protože tato funkce má fyzikální význam nezávislý na volbě souřadnicového systému, budou rovnice (9.1) platit i tehdy, nahradíme-li zobecněné souřadnice q_i jinými souřadnicemi \bar{q}_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Změní se sice forma, kterou je Lagrangeova funkce určena, ale hodnota této skalární funkce bude v obou soustavách souřadnic stejná. Lze ukázat, že se situace nezmění ani když vztah mezi soustavami souřadnic bude záviset na čase. Lagrangeovy pohybové rovnice (9.1) platí ve stejném tvaru i tehdy, když se nová soustava souřadnic vzhledem k staré pohybuje. Tato invariantnost skalární funkce L , která obsahuje veškerou informaci o pohybu dané mechanické soustavy, je nejvýznačnější vlastností Lagrangeových rovnic.

Dosadíme-li (8.10) do (9.1), dostaneme po úpravě

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (9.2)$$

Levá strana této rovnice představuje i -tou složku zobecněné setrvačné síly (se záporným znaménkem). Pravá strana představuje i -tou složku

zobecněné akční síly. Nezávisí-li U na zobecněných rychlostech, odpadne první člen na pravé straně. Potenciální funkce U se pak obvykle nahrazuje potenciální energií $-V$.

Rovnici (9.2) nyní znásobíme $dq_i = \dot{q}_i dt$ a zintegrujeme. Na levé straně vyjde

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i dt - \int \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \int \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \int \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i \quad (9.3)$$

Nezávisí-li kinetická energie T explicitně na čase, je totální diferenciál dT dán výrazem

$$dT = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i \right). \quad (9.4)$$

Sečteme-li výrazy (9.3) pro $i = 1, 2, \dots, n$, dostaneme vzhledem k (9.4)

$$\sum \int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i dt - \sum \int \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + \text{konst.} \quad (9.5)$$

Obdobný výraz dostaneme na pravé straně (9.2), takže

$$\sum \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T+U) = \text{konst.} \quad (9.6)$$

S použitím (8.10) a se substitucí

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (9.7)$$

dostaneme z rovnice (9.6) zákon zachování

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = \text{konst.}, \quad (9.8)$$

který je obecnější než (3.7) a platí pro jakoukoli formu Lagrangeovy funkce. Jediným požadavkem je, aby Lagrangeova funkce nezávisela explicitně na čase. Veličina (9.7) je \dot{q}_i -tá složka zobecněné hybnosti.

Rovnice (9.8) platí tedy pro skleronomní soustavy. Závisí-li na zobecněných rychlostech pouze kinetická energie a nikoli potenciálová funkce a je-li nadto kinetická energie vyjádřena kvadratickou formou

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (9.9)$$

je podle (9.7) $p_i = \sum_j m_{ij} \dot{q}_j$ a

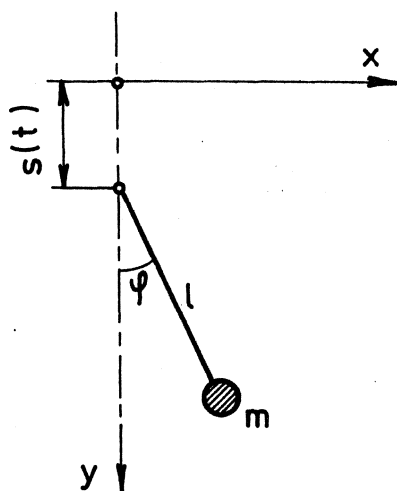
$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T, \quad (9.10)$$

takže (9.8) dá

$$2T - T - U = T - U = T + V = \text{konst.} \quad (9.11)$$

To je však rovnice (3.7).

Levou stranu (9.8) můžeme interpretovat jako celkovou energii obecné skleronomní mechanické soustavy.



Obr. 9

Příklad 23. Jak se změní pohybové rovnice matematického kyvadla, bude-li umístěno ve výtahu s nerovnoměrným pohybem?

Dráha výtahu nechť je $\dot{s} = s(t)$ podle obr. 9. Souřadnice hmoty m jsou

$$\begin{aligned} x &= l \sin \varphi, \\ y &= l \cos \varphi + s. \end{aligned} \quad (1)$$

Rychlosti vyjdou

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{y} &= -l \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{s}. \end{aligned} \quad (2)$$

Kinetická energie

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^2 - 2l \dot{s} \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{s}^2). \quad (3)$$

Z obou funkcí $\varphi(t)$, $s(t)$ je pouze $\varphi(t)$ zobecněnou souřadnicí. Kinetická energie proto nemá kvadratickou formu (obsahuje lineární a absolutní člen v proměnné $\dot{\varphi}$). Jde o reonomní soustavu, pro niž neplatí zákon zachování celkové energie.

Potenciální polohová energie se s rostoucím y zmenšuje, takže

$$V = -mgy = -mg(l\cos\varphi + s). \quad (4)$$

Z výrazů (3) a (4) vytvoříme Lagrangeovu funkci $L = T - V$ a dosadíme do (9.1); přitom $q_i = \varphi(t)$.

Vyjde pohybová rovnice

$$l\ddot{\varphi} + (g - \ddot{s})\sin\varphi = 0. \quad (5)$$

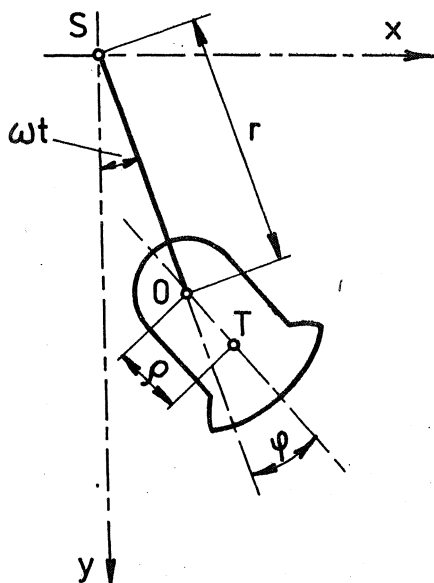
Při rovnoměrně zrychleném pohybu $s = \frac{1}{2}at^2$, takže $\ddot{s} = a$. Pro malé výchylky $\sin\varphi \approx \varphi$. Potom

$$l\ddot{\varphi} + (g - a)\varphi = 0 \quad (6)$$

a doba kyvu vyjde

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}. \quad (7)$$

Ve stavu beztlíže ($a = g$) vyjde podle (6) $\ddot{\varphi} = 0$, tj. kyvadlo bude rovnoměrně rotovat nebo stát.



Obr. 10

Příklad 24. Na obvodu rovnoměrně rotujícího kotouče je připojeno kladivo, které může volně kývat kolem závěsu O (obr. 10). Vypočteme dobu kyvu kladiva, jehož hmotnost je m a moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm J_T .

Rychlost těžiště kladiva má složky

$$v_x = \omega r \cos \omega t + (\omega + \dot{\varphi})\rho \cos(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

$$v_y = -\omega r \sin \omega t - (\omega + \dot{\varphi})\rho \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Kinetická energie vyjde

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_T (\omega + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \\ &= \frac{1}{2} J_0 (\omega + \dot{\varphi})^2 + mr\rho\omega (\omega + \dot{\varphi}) \cos\varphi + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2, \end{aligned} \quad (3)$$

kde

$$J_0 = J_T + m\rho^2 \quad (4)$$

značí moment setrvačnosti k závěsné ose kyvadla. Pro malé výchylky můžeme dosadit

$$\cos\varphi \doteq 1 - \frac{1}{2} \varphi^2. \quad (5)$$

Potenciální energie odpadá, pokud se neuplatní tíhové pole. Tehdy bude $L = T$ a z rovnice (9.1) vyjde pro $q_i = \varphi(t)$ pohybová rovnice

$$J_0 \ddot{\varphi} + mr\rho\omega^2 \varphi = 0. \quad (6)$$

Doba kyvu tedy vyjde

$$t = \frac{\pi}{\omega} \sqrt{\frac{J_0}{mr\rho}}. \quad (7)$$

Příklad 25. Pohyb planety kolem Slunce popíšeme v polárních souřadnicích s počátkem ve středu Slunce. Uvažujeme pouze gravitační potenciál Slunce. Dostaneme

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \quad (1)$$

$$V = -\frac{\alpha m M}{r}. \quad (2)$$

Z Lagrangeových rovnic vyjde

$$m\ddot{r} + \alpha m M / r^2 = 0, \quad (3)$$

$$2mr\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} = 0. \quad (4)$$

Integrací rovnice (4) dostaneme

$$mr^2 \dot{\varphi} = \text{konst}, \quad (5)$$

což je matematická forma Keplerova zákona o rovnosti ploch opsaných průvodičem za stejné doby. Integrací rovnice (3) pak dostaneme - s přihlédnutím k (1) a (5) - zákon zachování celkové energie $T + V = \text{konst}$.

Příklad 26. Jsou-li předepsány neholonomní vazební podmínky, např. podmínka (2.9), lze je do výpočtu zahrnout užitím Lagrangeových součinitelů. Předpokládejme jednu takovou podmínku. V rovnici

$$d\bar{U} = A_1 dq_1 + A_2 dq_2 + \dots + A_n dq_n = 0 \quad (1)$$

mají součinitele A_i význam zobecněných sil, jejichž elementární práce $d\bar{U}$ vymizí. Protože (1) nelze integrovat, jde o polygenní síly. Monogenní síly zahrneme do Lagrangeovy funkce L . Hamiltonův princip lze nyní vyjádřit jen jako podmínku vymizení variace

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt - \int_{t_1}^{t_2} \lambda \delta \bar{U} dt = 0. \quad (2)$$

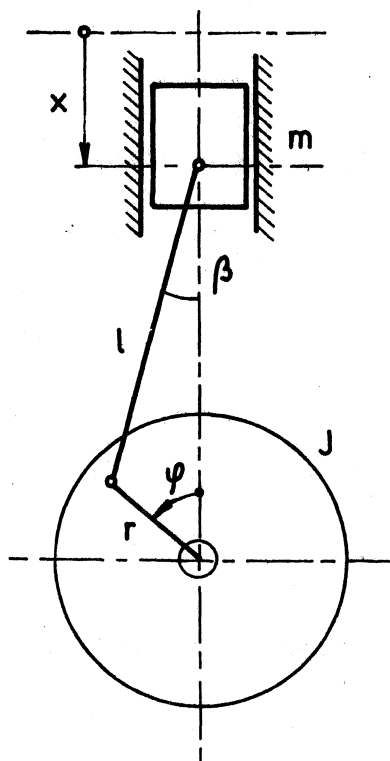
Za virtuální práci $\delta \bar{U}$ dosadíme výraz $\sum A_i \delta q_i$. Podle pravidla o variaci integrálu (4.14) vyjde z rovnice (2)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i - \lambda \delta \bar{U} \right\} dt = 0. \quad (3)$$

Protože δq_i volíme nezávisle, představuje rovnice (3) soustavu pohybových rovnic ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = P_i, \quad (4)$$

kde $P_i = \lambda A_i$ je polygenní síla udržující neholonomní vazbu (1). Rovnice (1) spolu s n podmínkami (4) postačí k určení neznámých $q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda$.



Obr. 11

Příklad 27. K rotujícímu kotouči, jehož moment setrvačnosti je J , je připojena nehmotná tuhá ojnice pohybující pístem o hmotnosti m (obr. 11). Budeme předpokládat, že mechanismus se pohybuje volně a bez tření. Jaký pohyb bude kotouč konat?

Dráha pístu z horní úvrati je

$$x = r(1 - \cos \varphi) + l(1 - \cos \beta), \quad (1)$$

kde

$$\beta = \arcsin \left(\frac{r}{l} \sin \varphi \right). \quad (2)$$

Je-li ojnice dlouhá, je poměr r/l malý a $\beta \approx 0$. Druhý člen v rovnici (1) pak odpadne. Zbývá

$$x = r(1 - \cos \varphi). \quad (3)$$

Derivací získáme rychlost pístu

$$\dot{x} = r\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (4)$$

Kinetická energie soustavy vyjde

$$T = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi. \quad (5)$$

Z Lagrangeovy rovnice pro volný pohyb ^{x)}

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \quad (6)$$

dostaneme po malé úpravě

$$(1 - \varepsilon \cos 2\varphi) \ddot{\varphi} + \varepsilon \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = 0, \quad (7)$$

^{x)} Při volném pohybu $U = 0$, takže $L = T$.

kde

$$\varepsilon = \frac{mr^2}{2J + mr^2} \quad (8)$$

představuje malou veličinu, není-li píst příliš těžký. Volný pohyb setrvačnicku rozdělíme na rovnoměrnou složku ωt a na periodickou složku $\psi(t)$, takže dosadíme

$$\varphi = \omega t + \psi. \quad (9)$$

Pro $|\psi| \ll 1$ bude

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos 2\omega t - 2\psi \sin 2\omega t, \\ \sin 2\varphi &= \sin 2\omega t + 2\psi \cos 2\omega t. \end{aligned} \quad (10)$$

Dosazením do rovnice (7) vyjde nelineární diferenciální rovnice pro ψ

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon \cos 2\omega t + 2\varepsilon\psi \sin 2\omega t) \ddot{\psi} + \\ + \varepsilon(\omega^2 + 2\omega\dot{\psi} + \dot{\psi}^2)(\sin 2\omega t + 2\psi \cos 2\omega t) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Spokojíme-li se s lineární aproximací, můžeme nelineární členy v rovnici (11) zanedbat. Zanedbáme také malé veličiny obsahující součiny $\varepsilon\dot{\psi}$, $\varepsilon\dot{\psi}^2$. Potom zbývá

$$(1 - \varepsilon \cos 2\omega t) \ddot{\psi} + \varepsilon \omega^2 \sin 2\omega t = 0. \quad (12)$$

Protože $\varepsilon \ll 1$, bude

$$\ddot{\psi} \doteq -\varepsilon \omega^2 \sin 2\omega t (1 + \varepsilon \cos 2\omega t) \doteq -\varepsilon \omega^2 \sin 2\omega t. \quad (13)$$

Dvojitou integrací vyjde

$$\psi = \frac{1}{4} \varepsilon \sin 2\omega t. \quad (14)$$

Integrační konstanty odpadají vzhledem k periodicitě funkce $\psi(t)$. Dostali jsme tedy - jako první aproximaci - k rovnoměrnému pohybu superponovanou druhou harmonickou složkou s periodou $T = \pi/\omega$ ($\omega = \text{konst}$). Celkem

$$\varphi = \omega t + \frac{1}{4} \varepsilon \sin 2\omega t. \quad (15)$$

Ve skutečnosti bude řešení obsahovat ještě další harmonické složky. Přesné řešení rovnice (11) nelze získat v uzavřeném tvaru. Je samozřejmé, že řešení (15) dává úhel φ v radiánech.

10. MALÉ KMITY KOLEM ROVNOVÁŽNÉ POLOHY

Pohybové rovnice, které dostáváme užitím Lagrangeových rovnic, bývají nelineární. Jestliže se omezíme na nekonečně malé okolí rovnovážné polohy, tak se linearizují. Má to dvě velké výhody. První, že řešení těchto rovnic má stejnou formu, ať je počet stupňů volnosti jakýkoli, a druhou, že platí princip superpozice. Z požadavku "nekonečně malého" okolí rovnovážné polohy slevíme na požadavek "dostatečně malého" okolí, při němž nebude mít odchylka od lineární teorie ještě žádný významný vliv na výsledky výpočtu z hlediska jejich technického využití.

Potenciální energie V je obecně nelineární funkcí zobecněných souřadnic q_i . Rozvineme ji kolem rovnovážné polohy q_{i0} ($i = 1, 2, \dots, n$) do Taylorovy řady. Vyjde

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots \quad (10.1)$$

Za rovnováhy je podle (5.2)

$$\delta V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (10.2)$$

a tedy $\partial V / \partial q_i = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Potom druhý člen na pravé straně (10.1) vymizí. Na prvním členu nezáleží, neboť je to konstanta, která při derivování odpadne. Můžeme proto volit $V_0 = 0$. Budou-li odchylky $q_i(t)$ od rovnovážné polohy malé, budeme moci zanedbat všechny členy řady (10.1) třetího a vyššího řádu. Zbude

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j, \quad (10.3)$$

kde

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 \quad (10.4)$$

už nezávisí na souřadnicích q_i . Máme tedy kvadratickou formu (10.3) s konstantními součiniteli (10.4). Můžeme ji napsat maticově ve tvaru

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\}, \quad (10.5)$$

kde

$\{q\} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$ je vektor posuvů,
 $[K]$ je matice tuhosti.

Matice tuhosti je souměrná, jak vyplývá z rovnice (10.4) (záměnou pořadí derivace se hodnota nezmění). Kmitání je možné jenom kolem stabilní nebo marginálně stabilní (indiferentní) rovnovážné polohy, takže $\delta^2 V \geq 0$. To znamená, že matice tuhosti je pozitivně semidefinitní. Je singulární jenom v tom případě, může-li se celá soustava rovnoměrně pohybovat bez působení vnějších sil.^{x)}

Zcela obdobně můžeme napsat i výraz pro kinetickou energii, která závisí na zobecněných rychlostech \dot{q}_i .

Dostaneme

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (10.6)$$

kde

$$m_{ij} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_0. \quad (10.7)$$

V maticovém tvaru

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}, \quad (10.8)$$

kde $[M]$ značí matici hmotnosti. Je rovněž souměrná, pozitivně definitní. Kinetická energie nemůže být totiž záporná. Jen tehdy, zanedbáme-li hmotnost příslušnou některé zobecněné souřadnici, vyjde matice $[M]$ singulární.

Pro Lagrangeovu funkci $L = T - V$ dostaneme z rovnice (9.1) soustavu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}\}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \{q\}} = \{0\} \quad (10.9)$$

^{x)} Např. hřídel s kotouči se může rovnoměrně otáčet. Pak existuje netriviální řešení soustavy $[K]\{q\} = \{0\}$.

čili

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}. \quad (10.10)$$

Použili jsme přitom známého pravidla pro derivaci kvadratické formy podle vektoru, podle kterého např.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \{q\}} &= \frac{\partial}{\partial \{q\}} (\{q\}^T [K] \{q\}) = \\ &= ([K]^T + [K])\{q\} = 2[K]\{q\}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Síly, které udržují soustavu v rovnováze, jsme zahrnuli do potenciálu V . Ostatní síly, které rovnováhu porušují, musíme připojit zvlášť. Vyjde

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}, \quad (10.12)$$

kde $\{f\}$ je vektor budících sil. Bude-li

$$\{f\} = \{f_0\} e^{i\omega t}, \quad (10.13)$$

kde $\{f_0\} = \text{konst}$, vznikne v soustavě vynucené harmonické kmitání

$$\{q\} = \{q_0\} e^{i\omega t}. \quad (10.14)$$

Po dosazení (10.13) a (10.14) do (10.12) dostaneme

$$\{q\} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \{f_0\}. \quad (10.15)$$

Výchyly porostou do nekonečna, bude-li determinant výrazu v oblé závorce nulový. Vznikne rezonance. Anulováním determinantu soustavy rovnic (10.15) dostaneme charakteristickou rovnici

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0, \quad (10.16)$$

kteřá má kořeny $\omega^2 = \Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_n^2$ (některé mohou splynout). Jsou to čtverce vlastních kruhových frekvencí volného kmitání. Jsou to zároveň čtverce rezonančních kruhových frekvencí netlumené soustavy.^{x)}

^{x)} U kmitavých pohybů nerozlišujeme kladnou a zápornou hodnotu kruhové frekvence $\pm \Omega$; zpravidla počítáme jen s kladnými hodnotami.

Volné kmity představují netriviální obecné řešení rovnice (10.10), které existuje právě tehdy, platí-li (10.16). Předpokládejme, že všechny kořeny Ω_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou navzájem různé. Nejsou-li, můžeme je oddělit malou změnou matic $[K]$ resp. $[M]$ a pak se vrátit limitním přechodem k původním hodnotám. Pro volné kmity platí homogenní soustava rovnic

$$(-\Omega_i^2 [M] + [K]) \{u\}_i = \{0\} \quad (10.17)$$

Ke každému kořenu Ω_i^2 rovnice (10.16) vyjde jeden vlastní vektor $\{u\}_i$. Tyto vektory jsou navzájem $[M]$ - resp. $[K]$ - ortogonální, neboť^{x)}

$$\{u\}_i^T [M] \{u\}_j = 0 \quad \text{pro } i \neq j, \quad (10.18)$$

$$\{u\}_i^T [K] \{u\}_j = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$

Vlastní vektory jsou určeny až na multiplikační konstantu. Můžeme je normovat podmínkou

$$\{u\}_i^T [M] \{u\}_j = \delta_{ij} \quad (10.19)$$

(Kroneckerovo delta) a sestavit z nich modální matici

$$[U] = [u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_n]. \quad (10.20)$$

Pak

$$\begin{aligned} [U]^T [M] [U] &= [I], \\ [U]^T [K] [U] &= [\Lambda]. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Matice $[\Lambda]$ je diagonální a obsahuje na diagonále čtverce vlastních kruhových frekvencí

$$[\Lambda] = \Gamma \Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_n^2 \Gamma \quad (10.22)$$

x) Důkaz sporem viz např. /7/, str. 138.

Použijeme-li modální matici (10.20) k transformaci

$$\{q\} = [U]\{x\}, \quad (10.23)$$

dostaneme pohybové rovnice (10.12) ve tvaru

$$\{\ddot{x}\} + [\Lambda]\{x\} = \{r\}, \quad (10.24)$$

kde

$$\{r\} = [U]^T \{f\}. \quad (10.25)$$

V soustavě (10.24) jsou všechny proměnné separovány, neboť matice $[\Lambda]$ je diagonální. Bude

$$\ddot{x}_i + \Omega_i^2 x_i = r_i(t) \quad (10.26)$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$. Řešení rovnice (10.26) lze napsat ve tvaru součtu partikulárního a obecného řešení

$$x_i = x_{i \text{ part}} + x_{i \text{ obecné}}, \quad (10.27)$$

kde

$$x_{i \text{ part}} = \frac{1}{\Omega_i} \int_0^t r_i(\tau) \sin \Omega_i (t - \tau) d\tau, \quad (10.28)$$

$$x_{i \text{ obecné}} = A_i \sin \Omega_i t + B_i \cos \Omega_i t. \quad (10.29)$$

Na pravé straně rovnice (10.28) je Duhamelův integrál. Tuto rovnici lze odvodit metodou variací konstant nebo z fyzikálních úvah (ze superpozice účinků elementárních impulsů v intervalu $0 \leq \tau \leq t$). Je-li buzení harmonické

$$r_i(t) = r_{i0} e^{i\omega t}, \quad \omega \neq \Omega_i, \quad (10.30)$$

bude odezva rovněž harmonická

$$x_{i \text{ part}} = \frac{r_{i0}}{\Omega_i^2 - \omega^2} e^{i\omega t}. \quad (10.31)$$

Transformace (10.23) představuje rozklad výsledného vynuceného kmitání na jednotlivé vlastní tvary, které dostaneme při volném kmitání. Podle (10.23) je totiž vektor zobecněných posuvů lineární kombinací vlastních vektorů splňujících rovnici (10.17). Zatím co vektor $\{q\}$ se mění zároveň v prostoru i v čase, dostaneme na pravé straně rovnice (10.23) součin matice $[U]$, která obsahuje prostorové funkce, v čase neměnné, a vektoru $\{x\}$, který se mění pouze v čase. Jde tedy o rozdělení funkcí zcela obdobné tomu, které se používá při řešení parciálních diferenciálních rovnic (Fourierova či d'Alembertova metoda).

Vraťme se nyní k soustavě pohybových rovnic (10.12). První člen na levé straně představuje (až na znaménko) vektor setrvačných sil. Druhý člen lze ztotožnit s vektorem elastických vratných sil. Na pravé straně je vektor budících sil. Kdyby šlo o statickou úlohu, bylo by $\{f\} = \text{konst}$, $\{q\} = \text{konst}$, $\{\dot{q}\} = \{0\}$. Výchylky bychom získali řešením lineární soustavy algebraických rovnic

$$[K]\{q\} = \{f\} \quad (10.32)$$

Máme-li naproti tomu periodické buzení, vznikne periodický pohyb. Ten můžeme vyšetřit pro každou harmonickou složku zvlášť a výsledky superponovat. Pro jednu harmonickou složku dostaneme užitím (10.13) a (10.14) soustavu rovnic pro amplitudy vynuceného kmitání

$$[\hat{K}]\{q_0\} = \{f_0\}, \quad (10.33)$$

jestliže označíme

$$[\hat{K}] = [K] - \omega^2 [M] \quad (10.34)$$

jako matici dynamické tuhosti. Ustálené periodické vynucené kmitání můžeme tedy řešit formálně shodně s úlohami statickými. Jediný rozdíl je v tom, že matice $[\hat{K}]$ již není pozitivně definitní. Pro $\omega = \Omega_i$ se stane singulární a řešení soustavy (10.33) selhává. To je případ rezonance, který musíme z řešení vynuceného kmitání vyloučit.

Řešení rovnice (10.33) můžeme potom napsat ve tvaru

$$\{q_0\} = [\hat{C}]\{f_0\}, \quad (10.35)$$

kde

$$[\hat{C}] = [\hat{K}]^{-1} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \quad (10.36)$$

je matice dynamické poddajnosti. Jde-li o statické zatížení, je $\omega = 0$ a matice (statické) poddajnosti

$$[C] = [K]^{-1} \quad (10.37)$$

má za prvky příčinkové činitele C_{ij} .

Příklad 28. Na dvojitě kyvadlo podle obr. 3 (příklad 5) působí v horním závěsu 0 střídavý moment $M = M_0 \sin \omega t$. Jaké budou kmity obou kyvadel?

Pro malé výchylky φ_1, φ_2 bude $\cos \varphi_i \doteq 1 - \varphi_i^2/2$, $\sin \varphi_i \doteq \varphi_i$, takže

$$V = mgl (\varphi_1^2 + \varphi_2^2/2), \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} ml^2 [2\ddot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2] \quad (2)$$

Protože $L = T - V$, vyjdou pohybové rovnice ze vztahu (10.9) ve tvaru

$$ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} + mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

To je rovnice (10.12). Vynucené ustálené kmitání je pak dáno rovnicí (10.14) a (10.15). Tedy

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}_{\text{part}} = \frac{\sin \omega t}{mgl} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2 l}{g} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} M_0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Vlastní frekvence najdeme z rovnice (10.16). Označíme zkráceně

$$p = \frac{\omega^2 l}{g} \quad (5)$$

a dostaneme

$$\begin{bmatrix} 2-2p & -p \\ -p & 1-p \end{bmatrix} = p^2 - 4p + 2 = 0. \quad (6)$$

Odtud

$$p = 2 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} 0,58579, \\ 3,4142. \end{cases}$$

Je tedy

$$\Omega_1 = 0,76537 \sqrt{\frac{e}{g}}, \quad \Omega_2 = 1,8478 \sqrt{\frac{e}{g}}. \quad (7)$$

Z rovnice (10.17) najdeme vlastní tvary kmitů. Soustava (10.17) dá pro první tvar

$$\begin{aligned} [2 - 2(2 - \sqrt{2})] \varphi_1 - (2 - \sqrt{2}) \varphi_2 &= 0, \\ -(2 - \sqrt{2}) \varphi_1 + [1 - (2 - \sqrt{2})] \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Po úpravě dají obě rovnice totéž, totiž

$$\sqrt{2} \varphi_1 - \varphi_2 = 0. \quad (9)$$

Řešení $\varphi_1 = c$, $\varphi_2 = c\sqrt{2}$ normujeme podmínkou (10.19), takže požadujeme, aby platilo

$$me^2 [c \quad c\sqrt{2}] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ c\sqrt{2} \end{Bmatrix} = 1. \quad (10)$$

Odtud $c = 0,38268 / e\sqrt{m}$. Je tedy

$$\{u\}_1 = \frac{1}{e\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0,38268 \\ 0,54120 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Pro druhý vlastní tvar kmitu dostaneme obdobně

$$\{u\}_2 = \frac{1}{l\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0,92388 \\ -1,30656 \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Modální matice vyjde podle (10.20)

$$[U] = \frac{1}{l\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,38268 & 0,92388 \\ 0,54120 & -1,30656 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Můžeme se přesvědčit, že tato matice splňuje podmínky (10.21).
K vynucenému kmitání (4) se připojí vlastní kmitání ve tvaru

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}_{\text{obecné}} = C_1 \{u\}_1 \sin(\Omega_1 t - \psi_1) + C_2 \{u\}_2 \sin(\Omega_2 t - \psi_2) \quad (14)$$

Integrační konstanty C_1 , C_2 , ψ_1 , ψ_2 se volí tak, aby se vyhovělo počátečním podmínkám; Ω_1 , Ω_2 jsou dány rovnicemi (7).

Separované rovnice podle (11.24) vyjdou

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} = \frac{g}{l} \begin{bmatrix} 0,58579 & 0 \\ 0 & 3,4142 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{M}{l\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0,38268 \\ 0,92388 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Rozepsáním

$$\ddot{x}_1 + 0,58579 \frac{g}{l} x_1 = 0,38268 \frac{M}{l\sqrt{m}} \quad (16)$$

$$\ddot{x}_2 + 3,4142 \frac{g}{l} x_2 = 0,92388 \frac{M}{l\sqrt{m}} \quad (17)$$

To je soustava (10.26). Partikulární řešení vyjdou

$$x_{1\text{part}} = \frac{0,38268 M_0 / l\sqrt{m}}{0,58579 g/l - \omega^2} \sin \omega t, \quad (18)$$

$$x_{2\text{part}} = \frac{0,92388 M_0 / l\sqrt{m}}{3,4142 g/l - \omega^2} \sin \omega t. \quad (19)$$

Obecná řešení jsou

$$x_1 \text{ obecné} = A_1 \sin(\Omega_1 t - \psi_1), \quad (20)$$

$$x_2 \text{ obecné} = A_2 \sin(\Omega_2 t - \psi_2). \quad (21)$$

A_1, A_2, ψ_1, ψ_2 jsou integrační konstanty, které se volí podle počátečních podmínek. Původní souřadnice dostaneme užitím vztahu (10.23). Bude

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell \sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,38268 & 0,92388 \\ 0,54120 & -1,30656 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Snadno se přesvědčíme, že dosazením (18) a (19) do (22) dostaneme (4), totiž

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}_{\text{part}} = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} \left\{ \frac{1-p}{p} \right\} \frac{M_0}{mg\ell} \sin \omega t. \quad (23)$$

Zde p_1, p_2 jsou kořeny rovnice (6). Z rovnice (23) je zřejmé, že pro $p = 1$ vymizí kmity první hmoty, takže bude

$$\psi_{1\text{part}} = 0, \quad (24)$$

$$\psi_{2\text{part}} = -\frac{M_0}{mg\ell} \sin \omega t. \quad (25)$$

V tomto případě funguje druhá hmota jako absorber kmitů první hmoty.

Vlastní kmity (obecné řešení) mají význam jenom pro popis přechodových dějů. U skutečných konstrukcí vlastní kmity vlivem tlumení časem pomínou.

Poznamenejme ještě, že proměnné x_i v separovaných rovnicích (15) mají fyzikální rozměr $[m\sqrt{kg}]$, kdežto původní souřadnice ψ_i jsou bezrozměrné $[\text{rad}]$.

Příklad 29. Najdeme matici dynamické poddajnosti pro dvojité kyvadlo z příkladu 28.

Podle rovnice (10.36) vyjde

$$[\hat{C}] = \frac{1}{mgl} \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 2-2p \end{bmatrix} \quad (1)$$

Zde

$$p = \omega^2 l / g, \quad p_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad p_2 = 2 + \sqrt{2}.$$

11. TLUMENÉ KMITY

Vznikají-li malé kmity kolem rovnovážné polohy, platí pro ně lineární teorie z kapitoly 10. Tuto teorii můžeme zobecnit i na případy kmitů lineárně tlumených. K potenciální energii V a kinetické energii T přidáme ještě disipační funkci

$$D = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^T [B] \{ \dot{q} \} \quad (11.1)$$

a Lagrangeovu rovnici (10.9) upravíme na tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{ \dot{q} \}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \{ \dot{q} \}} + \frac{\partial V}{\partial \{ q \}} = \{ f \}. \quad (11.2)$$

Místo rovnice (10.12) nyní dostaneme

$$[M] \{ \ddot{q} \} + [B] \{ \dot{q} \} + [K] \{ q \} = \{ f \}. \quad (11.3)$$

Poznamenáváme, že rovnice (11.2) není Eulerovou rovnicí žádného variačního principu. Vznikla pouhým formálním rozšířením rovnice (10.9).

Užijeme-li nyní substituce (10.23), přičemž modální matici vypočteme pro netlumený pohyb popsany rovnicí (10.10), dostaneme

$$\{ \ddot{x} \} + [U]^T [B] [U] \{ \dot{x} \} + [\Lambda] \{ x \} = \{ \gamma \}. \quad (11.4)$$

Na rozdíl od (10.24) nejsou tyto rovnice separovány, pokud matice $[U]^T [B] [U]$ nevyjde diagonální. Aby tomu tak bylo, musí mít matice

$[M]^{-1}[B]$ a $[M]^{-1}[K]$ stejné hlavní osy. Pak budou komutativní, takže

$$[B][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[B]. \quad (11.5)$$

Protože mají stejné hlavní osy, budou se obě zároveň diagonalizovat. Rovnice (11.5) je splněna pro

$$[B] = \alpha [M] + \beta [K], \quad (11.6)$$

kde α , β jsou konstanty. Vyhovuje-li matice tlumení rovnici (11.6), jde o Rayleighovo tlumení. Separované rovnice (11.4) lze v tom případě zapsat ve tvaru

$$\ddot{x}_i + 2\Omega_i \xi_i \dot{x}_i + \Omega_i^2 x_i = r_i(t). \quad (11.7)$$

Obecné řešení zkrácené rovnice dostaneme ve tvaru (pro $r_i = 0$; index "i" pro stručnost vynecháme)

$$x \text{ obecné} = e^{-\xi\Omega t} [A \sin \hat{\omega} t + B \cos \hat{\omega} t], \quad (11.8)$$

kde

$$\hat{\omega} = \Omega \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (11.9)$$

Partikulární řešení můžeme opět napsat užitím Duhamelova integrálu

$$x_{\text{part}} = \frac{1}{\hat{\omega}} \int_0^t r(\tau) e^{-\xi\Omega(t-\tau)} \sin \hat{\omega}(t-\tau) d\tau. \quad (11.10)$$

Výsledné řešení je součtem (11.8) a (11.10). Této superpozice lze užít, protože soustava rovnic (11.4) je lineární.

Rozepíšeme-li rovnici (11.3), dostaneme pro i -tý řádek

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j) = f_i. \quad (11.11)$$

Odtud poznáme význam koeficientů m_{ij} , b_{ij} a k_{ij} . Zvolíme např. všechna q_i , \dot{q}_i nulová pro $i = 1, 2, \dots, n$. Jediné nenulové zrychlení nechť je $\ddot{q}_j = 1 \text{ ms}^{-2}$. Pak $f_i = m_{ij} \cdot 1$. To znamená, že m_{ij} představuje i -tou zobecněnou sílu (reakci), která vznikne, udělíme-li

j -té zobecněné souřadnici jednotkové zrychlení, přičemž ostatní souřadnice zůstanou nulové.

Podobně b_{ij} představuje i -tou reakci vzbuzenou jednotkovou rychlostí $q_j = 1 \text{ ms}^{-1}$. Ostatní rychlosti, jakož i zrychlení a výchylky jsou přitom nulové. Konečně k_{ij} představuje i -tou reakci vyvolanou jednotkovým posuvem $q_j = 1 \text{ m}$. Ostatní posuvy, rychlosti a zrychlení jsou nulové.

Tyto definice představují opět jen myšlenkový experiment; sotva bychom mohli popsané podmínky realizovat. Nejsnáze bychom mohli uskutečnit statické zatížení, avšak nikoli pro $q_j = 1 \text{ m}$. Pak bychom mohli zvolit např. $q_j = 1 \text{ mm}$ a i -tá reakce by vyšla $10^{-3} k_{ij}$. Při každém takovém pokusu bychom musili dbát o to, abychem nepřekročili rozsah platnosti lineární teorie.

Řešení vlastních kmitů (11.8) umožňuje posoudit, kdy vlastní kmity prakticky zaniknou. Bude to v čase

$$t > \frac{3}{\xi \Omega} \quad (11.12)$$

Tehdy bude mít jejich amplituda méně než 5 % počáteční velikosti.

Poznámka. Pro Rayleighovo tlumení (11.6) dostaneme v rovnici (11.4) součin $[U]^T [B] [U]$ jako diagonální matici. Jestliže chceme dostat disipační člen v separovaných rovnicích podle (11.7), musíme dosadit

$$\{u\}_i^T [B] \{u_j\} = 2 \Omega_i \xi_j \delta_{ij}, \quad (11.13)$$

kde $\delta_{ij} = 1$ pro $i=j$, jinak nula (Kroneckerovo delta). Hovoříme pak o proporcionálním tlumení; činitel $2 \Omega_i \xi_i$ je při konstantním ξ_i úměrný (proporcionální) vlastní kruhové frekvenci Ω_i .

Příklad 30. Odvodíme rovnici (11.10) metodou variace konstant. Rovnice (11.7) bez pravé strany

$$\ddot{x} + 2 \Omega \xi \dot{x} + \Omega^2 x = 0 \quad (1)$$

má řešení

$$x = a e^{i \omega t} \quad (2)$$

Dosadíme-li (2) do (1), dostaneme podmínku pro kruhovou frekvenci ω

$$-\omega^2 + 2i\omega\Omega\xi + \Omega^2 = 0, \quad (3)$$

odkud vyjdou dva komplexně sdružené kořeny

$$\omega = (i\xi \pm \sqrt{1 - \xi^2})\Omega. \quad (4)$$

Máme tedy dvě řešení, které můžeme s použitím Eulerových vzorců rozepsat do tvaru

$$x = e^{-\xi\Omega t} (A \sin \hat{\omega}t + B \cos \hat{\omega}t), \quad (5)$$

$$\hat{\omega} = \Omega \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (6)$$

Rovnice (5) představuje obecné řešení (11.8). Nyní najdeme partikulární integrál rovnice

$$\ddot{x} + 2\Omega\xi\dot{x} + \Omega^2x = r(t). \quad (7)$$

Budeme předpokládat, že má tvar (5), avšak konstanty A , B budou nyní závislé na čase.

Tedy

$$x = e^{-\xi\Omega t} [A(t) \sin \hat{\omega}t + B(t) \cos \hat{\omega}t]. \quad (8)$$

Utvoříme první derivaci podle času a členy obsahující derivace \dot{A} , \dot{B} anulujeme. Dostaneme podmínku

$$\dot{A} \sin \hat{\omega}t + \dot{B} \cos \hat{\omega}t = 0. \quad (9)$$

Zbývající členy derivujeme ještě jednou a vše dosadíme do rovnice (7). Členy s nulovými derivacemi A , B se zruší [neboť (5) je řešením rovnice (1)] a zbude

$$e^{-\xi\Omega t} [(-\xi\Omega\dot{A} - \hat{\omega}\dot{B}) \sin \hat{\omega}t + (-\xi\Omega\dot{B} + \hat{\omega}\dot{A}) \cos \hat{\omega}t] = r(t). \quad (10)$$

Z rovnice (9) a (10) dostaneme

$$\dot{A} = \frac{1}{\hat{\omega}} e^{\xi\Omega t} r(t) \cos \hat{\omega}t, \quad \dot{B} = -\frac{1}{\hat{\omega}} e^{\xi\Omega t} r(t) \sin \hat{\omega}t. \quad (11)$$

Integrací vyjde

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\hat{\omega}} \int_0^t e^{\xi \Omega \tau} r(\tau) \cos \hat{\omega} \tau d\tau, \\ B &= -\frac{1}{\hat{\omega}} \int_0^t e^{\xi \Omega \tau} r(\tau) \sin \hat{\omega} \tau d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Integrační konstanty jsme zvolili nulové, neboť jsme je již dříve zavedli do obecného řešení (11.8). Dosazením (12) do (8) vyjde rovnice (11.10).

12. NUMERICKÉ METODY V DYNAMICE

Numericky řešíme vždy soustavy s konečným počtem stupňů volnosti. Pro pružná tělesa je získáme fyzikální nebo matematickou diskretizací.

Oddělením hmotnosti a pružnosti získáme náhradní fyzikální model osamělých absolutně tuhých hmot spojených nehmotnými pružinami (příklady 1 a 2).

Nedokončením limitního přechodu při vytváření derivací dostaneme diferenční vzorce, kterými nahradíme derivace v pohybových rovnicích. Získáme tak soustavu rovnic pro neznámé funkční hodnoty v uzlových bodech sítí (příklad 4).

Nejužívanější metody jsou metoda konečných prvků a metoda přenosových matic. Vysvětlíme nejprve první z nich, a to na příkladu rovinné pružné oblasti (obr. 12). Rozdělíme ji na trojúhelníky. Jeden takový trojúhelník (konečný prvek) má vrcholy 1, 2, 3. V těchto vrcholech zavedeme zobecněné posuvy

$$\{q\} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]^T$$

ve směrech os x , y . Pomocí interpolačních polynomů

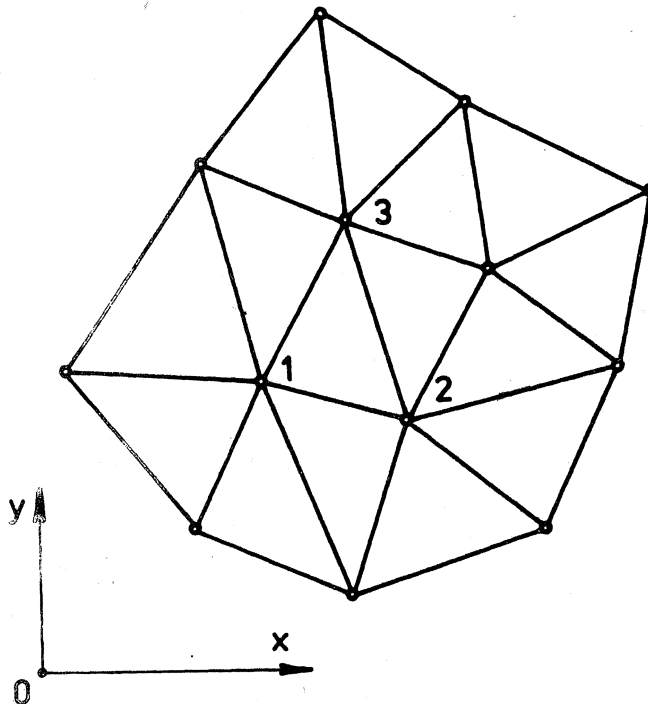
$$\Phi(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (12.1)$$

definovaných tak, aby pro $i, j = 1, 2, 3$ platilo

$$\Phi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad (12.2)$$

najdeme aproximaci posuvů uvnitř trojúhelníku

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 \end{bmatrix} \{q\} \quad (12.3)$$



Obr. 12

Zkráceně

$$\{u\} = [A] \{q\} \quad (12.4)$$

Známe-li posuvy $u(x,y)$, $v(x,y)$, můžeme pomocí Cauchyho vzorců vypočítat poměrná přetvoření $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$. Dostaneme je rovněž závislé na vektoru posuvů

$$\{\varepsilon\} = [B] \{q\} \quad (12.5)$$

Hookeův zákon zapíšeme ve tvaru

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad (12.6)$$

kde $[E]$ je matice elastických modulů a $\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$.
 Zavedeme ještě vektor objemových sil (vztažených na jednotku tloušťky desky) $\{p\} = [X, Y]^T$ a vektor zobecněných sil v uzlových bodech

$$\{\bar{f}\} = [F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, F_{3x}, F_{3y}]^T.$$

Potenciální energie je

$$V = \frac{1}{2} \int_s \{\epsilon\}^T \{\sigma\} ds - \int_s \{u\}^T \{p\} ds - \{q\}^T \{\bar{f}\} \quad (12.7)$$

a kinetická energie (v desce jednotkové tloušťky)

$$T = \frac{1}{2} \int_s \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} ds. \quad (12.8)$$

S použitím (12.4) až (12.6) odtud dostaneme

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T \int_s [B]^T [E] [B] ds \{q\} - \{q\}^T \int_s [A]^T \{p\} ds - \{q\}^T \{\bar{f}\}, \quad (12.9)$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \int_s \rho [A]^T [A] ds \{\dot{q}\}. \quad (12.10)$$

S označením

$$[K] = \int_s [B]^T [E] [B] ds, \quad (12.11)$$

$$[M] = \int_s \rho [A]^T [A] ds, \quad (12.12)$$

$$\{\hat{f}\} = \int_s [A]^T \{p\} ds \quad (12.13)$$

vyjde z Lagrangeovy rovnice (10.9) soustava rovnic

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{\bar{f}\} + \{\hat{f}\}. \quad (12.14)$$

Platí pro jeden trojúhelník 123 na obr. 12. Sečteme-li však podíly z jednotlivých trojúhelníků, s jakými vytvářejí potenciální a

kinetickou energii, dostaneme z Lagrangeovy rovnice soustavu rovnic, která bude mít formálně tvar (12.14), bude však zahrnovat všechny síly i posuvy (ve všech uzlových bodech). Objemové síly $\{\hat{f}\}$ i zobecněné síly $\{f\}$ můžeme sloučit do jediného vektoru zobecněných sil $\{f\} = \{\hat{f}\} + \{f\}$ a přidat disipační člen. Bude pak

$$[M]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}. \quad (12.15)$$

Metodu konečných prvků lze různě modifikovat a zobecňovat. Podstatným jejím rysem je, že hledané pole aproximujeme po částech v síti konečných prvků. Používáme k tomu s výhodou polynomy, protože se snadno na počítači generují a snadno s nimi splníme i požadavek (12.2). Ten zaručuje, že posuvy uzlů patří do hledaného pole posuvů, takže např. $u_1 = u(x_1, y_1)$ apod. Aproximace musí vyhovovat určitým požadavkům spojitosti a jednoznačnosti, o kterých se lze poučit v literatuře (např. Zienkiewicz, viz připojený seznam).

Metoda přenosových matic je v podstatě metoda počátečních parametrů v maticovém tvaru. Hodí se pro statické úlohy a pro konstrukce s harmonickým kmitáním (volným nebo vynuceným). Zejména pro takové konstrukce, které se skládají z členů řazených za sebou a jen málo větvených. Deformační a silové veličiny v libovolném řezu takového členu sestavíme do vektoru stavových veličin $\{\bar{z}\}$. Dostaneme pro něj diferenciální rovnici

$$\frac{\partial \{\bar{z}\}}{\partial x} = [A]\{\bar{z}\} + \{f\}, \quad (12.16)$$

kde $[A]$ ani $\{f\}$ nezávisí na x . Tato rovnice má řešení

$$\{\bar{z}\} = e^{[A]x} \{\bar{z}_1\} + \{\hat{z}\}, \quad (12.17)$$

kde $\{\hat{z}\}$ je partikulární řešení, které vymizí v řezu 1 ($x = 0$). Dále $\{\bar{z}_1\}$ je vektor počátečních hodnot. Pro exponenciálu v rovnici (12.17) platí vzorec

$$e^{[A]x} = [I] + [A]x + \frac{1}{2!} [A]^2 x^2 + \frac{1}{3!} [A]^3 x^3 + \dots \quad (12.18)$$

Podle Cayleyho-Hamiltonovy věty nejsou všechny členy v rovnici (12.18) lineárně nezávislé. Je-li n řád matice $[A]$, lze libovolnou mocninu $[A]^k$ vyjádřit polynomem nejvýše $(n-1)$ -ního stupně. Proto bude mít řada (12.18) obecně jen n lineárně nezávislých členů, takže

$$e^{[A]x} = c_0 [I] + c_1 [A]x + c_2 [A]^2 x^2 + \dots + c_{n-1} [A]^{n-1} x^{n-1}. \quad (12.19)$$

V těchto rovnicích $[I]$ značí jednotkovou matici. Každá matice splňuje svou vlastní charakteristickou rovnici

$$|\lambda [I] - [A]| = 0. \quad (12.20)$$

Má-li tato rovnice kořeny $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, musí být splněna soustava rovnic

$$e^{\lambda_i x} = C_0 + C_1 \lambda_i x + \dots + C_{n-1} \lambda_i^{n-1} x^{n-1} \quad (12.21)$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$. Odtud získáme neznámé hodnoty C_0 až C_{n-1} jako funkce x . Výsledek označíme

$$[U(x)] = e^{[A]x} \quad (12.22)$$

a rovnici (12.17) zapíšeme ve tvaru

$$\{\bar{z}(x)\} = [U(x)] \{\bar{z}_1\} + \{\hat{z}(x)\}. \quad (12.23)$$

Je-li uvažovaný člen dlouhý l , bude stavový vektor na jeho konci

$$\{\bar{z}_2\} = [U_{21}] \{\bar{z}_1\} + \{\hat{z}_1\}. \quad (12.24)$$

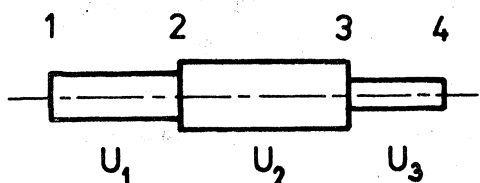
Matice $[U_{21}] = [U(l)]$ ve vztahu (12.24) je přenosová (kaskádní) matice. Umožňuje vypočítat vektor $\{\bar{z}_2\} = \{\bar{z}(l)\}$ na konci členu, známe-li vektor $\{\bar{z}_1\} = \{\bar{z}(0)\}$ na jeho začátku. Přitom $\{\hat{z}_1\} = \{\hat{z}(l)\}$.

Rovnici (12.24) můžeme upravit na výhodnější tvar užitím submatic

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{z}_2 \\ 1 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} U_{21} & \hat{z}_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{z}_1 \\ 1 \end{array} \right\}. \quad (12.25)$$

Zkráceně tuto rovnici zapíšeme takto

$$\{z_2\} = [U_1] \{z_1\}. \quad (12.26)$$



Obr. 13

Navazují-li za sebou členy např. 12, 23, 34 (obr. 13), bude pro ně platit soustava rovnic

$$\begin{aligned}
 \{z_2\} &= [U_1] \{z_1\}, \\
 \{z_3\} &= [U_2] \{z_2\}, \\
 \{z_4\} &= [U_3] \{z_3\}.
 \end{aligned}
 \tag{12.27}$$

Tuto soustavu můžeme řešit buď vcelku jako

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} U_1 & -I & 0 & 0 \\ \hline 0 & U_2 & -I & 0 \\ \hline 0 & 0 & U_3 & -I \end{array} \right] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \tag{12.28}$$

nebo po předběžné eliminaci vektorů $\{z_2\}$ a $\{z_3\}$

$$\{z_4\} = [U_3][U_2][U_1]\{z_1\}.
 \tag{12.29}$$

Výhoda soustavy (11.29) je malý řád matice, která vyjadřuje vztah mezi počátečním a konečným vektorem celého řetězce. Nevýhoda je horší numerická podmíněnost ve srovnání se soustavou (12.28). Rovnici (12.29) zapíšeme zkráceně jako

$$\{z_4\} = [\hat{U}]\{z_1\}
 \tag{12.30}$$

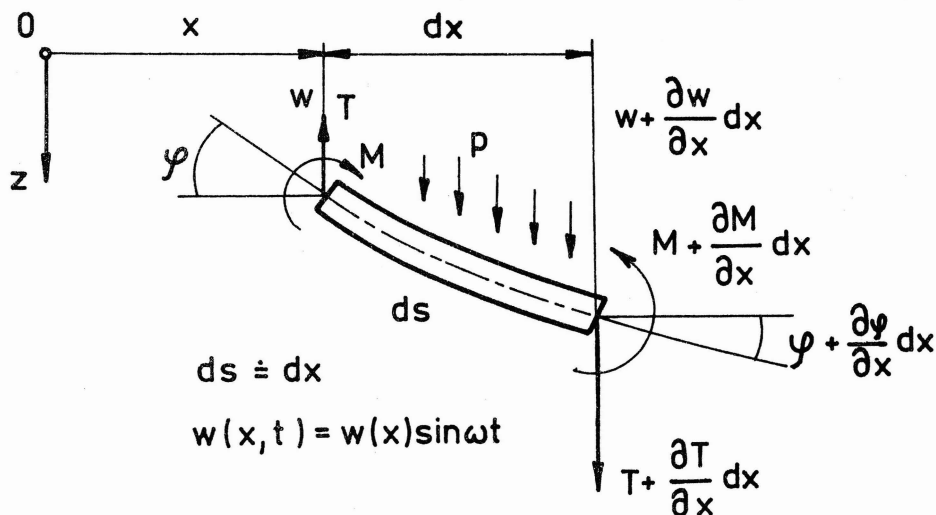
Okrajové podmínky zpravidla připisují nulovou hodnotu některým složkám vektoru $\{z_4\}$ a také některým složkám vektoru $\{z_1\}$. Nuly ve vektoru $\{z_1\}$ můžeme vynechat, vypustíme-li z matice zároveň sloupce, které se jimi násobí. Zbývající rovnice dají řešení dané úlohy.

Rovnice (12.28) resp. (12.29) platí, jestliže jednotlivé členy na sebe navazují tak, že stavový vektor na levé straně daného dělicího bodu se rovná stavovému vektoru na pravé straně téhož bodu. Jestliže tomu tak není, musíme do součinu přenosových matic vložit ještě "bodo-ovou" (uzlovou) matici $[B]$, která transformuje levý vektor v pravý. To ukážeme na příkladech.

Metoda přenosových matic není zdaleka tak obecná a mnohostranná jako metoda konečných prvků. Její podstatnou výhodou však je, že pracuje s maticemi malých řádů a je proto vhodná pro malé počítače. Byly publikovány atlasy přenosových matic (Pestel-Leckie popř. Pilkey-Chang, viz seznam literatury). Práce s nimi je velmi efektivní.

Příklad 31. Odvodíme přenosovou matici pro kmitající štíhlý prizmatický nosník. Je-li průhyb nosníku $W(x,t) = w(x) \sin \omega t$ a jeho spojité zatížení $p(x)$, platí s přihlédnutím k obr. 14 pro ohyb v rovině x, z tyto rovnice

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{M}{EJ}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = T, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -p - \mu \omega^2 w. \quad (1)$$



Obr. 14

První z těchto rovnic je kinematická (geometrická) podmínka, druhá představuje Hookeův zákon a poslední dvě jsou statické podmínky rovnováhy elementu na obr. 14. Nosník kmitá s kruhovou frekvencí ω , takže na element délky dx o hmotnosti μdx připadá setrvačná síla o amplitudě $\mu \omega^2 w(x) dx$.^{x)}

Rovnici (1) přepíšeme do maticového tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mu \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -p \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

x) Je-li $W(x,t) = w(x) \sin \omega t$, je $\ddot{W}(x,t) = -\omega^2 w(x) \sin \omega t$. Setrvačná síla je pak $\mu dx (-\ddot{W}) = \mu \omega^2 w(x) dx \sin \omega t$. Do rovnice vstupují pouze amplitudy veličin.

To je rovnice (12.16). Charakteristická rovnice (12.20) dá čtyři kořeny

$$\lambda_{1,2} = \pm \beta, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\beta, \quad \text{kde} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EJ}}. \quad (3)$$

Soustava rovnic (12.21) má řešení

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} (\cosh \beta x + \cos \beta x), & c_2 &= \frac{1}{2\beta^2} (\cosh \beta x - \cos \beta x), \\ c_1 &= \frac{1}{2\beta} (\sinh \beta x + \sin \beta x), & c_3 &= \frac{1}{2\beta^3} (\sinh \beta x - \sin \beta x) \end{aligned} \quad (4)$$

Rovnice (12.19) pro $n = 4$ vede k výsledku (12.22) ve tvaru

$$[U(x)] = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & -c_2/EJ & -c_3/EJ \\ \beta^4 c_3 & c_0 & -c_1/EJ & -c_2/EJ \\ -\beta^4 EJ c_2 & -\beta^4 EJ c_3 & c_0 & c_1 \\ -\beta^4 EJ c_1 & -\beta^4 EJ c_2 & \beta^4 c_3 & c_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

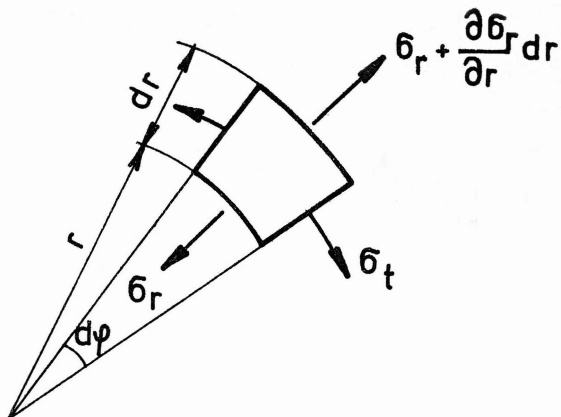
Partikulární integrál $\{\hat{z}\}$ dostaneme integrací rovnic (1) pro $\omega = 0$, $p = \text{konst}$ ve tvaru

$$\{\hat{z}\} = \begin{bmatrix} px^4/24 EJ \\ px^3/6 EJ \\ -px^2/2 \\ -px \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Je-li nosník zatížen pouze staticky, dosadíme $\lim \omega \rightarrow 0$ a dostaneme

$$[U(x)] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -x^2/2EJ & -x^3/6EJ \\ 0 & 1 & x/EJ & x^2/2EJ \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Příklad 32. Odvodíme přenosovou matici pro rotující mezikruhový kotouč $r_0 \leq r \leq r_1$, který má konstantní tloušťku h a rotuje s konstantní kruhovou frekvencí ω . Radiální posuv je u . Na vnitřním i vnějším obvodu může být zatížen, avšak pouze rotačně souměrným radiálním napětím.



Obr. 15

Máme k dispozici rovnici rovnováhy (obr. 15)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1}{r} (\sigma_t - \sigma_r) + \omega^2 \rho r = 0 \quad (1)$$

a Hookeův zákon pro rovinnou napjatost (tenký kotouč)

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r), \quad \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_t). \quad (2)$$

Z těchto rovnic vyloučíme σ_t a dostaneme dvě rovnice

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= -\mu \frac{u}{r} + \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_r, \\ \frac{d\sigma_r}{dr} &= E \frac{u}{r^2} - (1-\mu) \frac{1}{r} \sigma_r - \omega^2 \rho r. \end{aligned} \quad (3)$$

Tyto rovnice zapíšeme maticově

$$\frac{d}{dr} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu/r & (1-\mu^2)/E \\ E/r^2 & -(1-\mu)/r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma_r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega^2 \rho r \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

To je rovnice (12.16). Je zřejmé, že matice $[A]$ bude stejná pro rotující i nerotující kotouče. To znamená, že vliv rotace je zahrnut pouze do partikulárního řešení, kdežto obecné řešení odpovídá staticky zatíženému kotouči. Vyjde

$$[U(r)] = \begin{bmatrix} \frac{r}{r_0} \left[1 - \frac{1+\mu}{2} \frac{r^2-r_0^2}{r^2} \right] & \frac{1-\mu^2}{E} \frac{r^2-r_0^2}{r} \\ \frac{E}{2r_0 r^2} (r^2-r_0^2) & 1 - \frac{1-\mu}{2} \frac{r^2-r_0^2}{r^2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Partikulární řešení dostaneme integrací rovnic (3) s nulovými počátečními podmínkami. Vyjde

$$\{\hat{z}\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1-\mu^2}{\theta} \frac{\omega^2 \rho}{E} \frac{(r^2-r_0^2)^2}{r} \\ -(r^2-r_0^2) \frac{\omega^2 \rho}{4} \left[(1+\mu) + \frac{1+\mu}{2} \frac{r^2+r_0^2}{r^2} \right] \end{array} \right\} \quad (6)$$

Poznámka. Stavový vektor sestavujeme zpravidla tak, aby souměrně umístěné prvky tvořily komplementární dvojice. U nosníku to jsou dvojice (W, T) , (φ, M) . U rotujícího kotouče máme pouze jednu takovou dvojici (u, σ_r) . Součin prvků komplementárních dvojic má stejný fyzikální rozměr. U nosníku je to $[Nm]$. U kotouče je tato práce vztažena na jednotku tloušťky kotouče a na jednotku délky obvodu. Má tedy rozměr $[Nm^{-1}]$.

Příklad 33. Najdeme kruhové frekvence volného ohybového kmitání osazovaného prutu podle obr. 13. Do matice $[U(x)]$ odvozené v příkladu 31, rovnice (5), dosadíme $x = \ell_i$, $J = J_i$, tedy též $\beta = \beta_i$, $i = 1, 2, 3$. Dostaneme tak tři přenosové matice $[U_{i2}]$, $[U_{i3}]$ a $[U_{i4}]$. Partikulární řešení $\{\hat{z}_i\}$ odpadají, neboť $p = 0$ (nosník není zatížen). Dostaneme rovnice

$$\{\bar{z}_2\} = [U_{21}]\{\bar{z}_1\}, \quad \{\bar{z}_3\} = [U_{32}]\{\bar{z}_2\}, \quad \{\bar{z}_4\} = [U_{43}]\{\bar{z}_3\}, \quad (1)$$

z nichž plyne

$$\{\bar{z}_4\} = [U_{43}][U_{32}][U_{21}]\{\bar{z}_1\} \quad (2)$$

Tuto rovnici rozepíšeme. Po vynásobení přenosových matic dostaneme

$$\begin{Bmatrix} W_4 \\ \varphi_4 \\ M_4 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\alpha\alpha} & u_{\alpha\beta} & u_{\alpha\gamma} & u_{\alpha\delta} \\ u_{\beta\alpha} & u_{\beta\beta} & u_{\beta\gamma} & u_{\beta\delta} \\ u_{\gamma\alpha} & u_{\gamma\beta} & u_{\gamma\gamma} & u_{\gamma\delta} \\ u_{\delta\alpha} & u_{\delta\beta} & u_{\delta\gamma} & u_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \varphi_1 \\ M_1 \\ T_1 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Protože jsou oba konce volné, bude $M_1 = 0$, $T_1 = 0$, $M_4 = 0$, $T_4 = 0$. Z rovnice (3) tak zůstane

$$\begin{Bmatrix} W_4 \\ \varphi_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\alpha\alpha} & u_{\alpha\beta} \\ u_{\beta\alpha} & u_{\beta\beta} \\ u_{\gamma\alpha} & u_{\gamma\beta} \\ u_{\delta\alpha} & u_{\delta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Poslední dva řádky rovnice (4) dají homogenní soustavu rovnic, která má netriviální řešení jen tehdy, je-li determinant soustavy nulový

$$D = \begin{vmatrix} u_{\gamma\alpha} & u_{\gamma\beta} \\ u_{\delta\alpha} & u_{\delta\beta} \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Vyhledáme proto kořeny rovnice

$$D(\omega^2) = u_{\gamma\alpha} u_{\delta\beta} - u_{\delta\alpha} u_{\gamma\beta} = 0 \quad (6)$$

a dostaneme hledané frekvence. Zpravidla postupujeme tak, že přenosové matice v rovnici (2) násobíme numericky pro zvolenou hodnotu ω^2 a sledujeme průběh funkce $D(\omega^2)$.

Příklad 34. Vypočteme deformace a namáhání spojitého nosníku podle obr. 16.

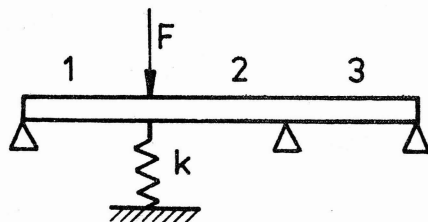
Pod působišťem síly F je umístěna pružina s konstantou tuhosti k . Ostatní podpory jsou nepoddajné.

Nosník rozdělíme na tři části a zavedeme stavové vektory

$$\{z_1\}, \{z_2^L\}, \{z_2^P\}, \{z_3^L\}, \{z_3^P\} \quad \text{a} \quad \{z_4\}$$

Indexy L resp. P značí levou resp. pravou stranu příslušného řezu rozdělujícího nosník. Pro každou část nosníku vypočteme přenosovou matici, takže budeme mít

$$\begin{aligned} \{z_2^L\} &= [U_1] \{z_1\}, \\ \{z_3^L\} &= [U_2] \{z_2^P\}, \\ \{z_4\} &= [U_3] \{z_3^P\} \end{aligned} \quad (1)$$



Obr. 16

Chybí nám vztahy mezi levostrannými a pravostrannými vektory v řezech 2 a 3. Tyto řezy oddělují první a druhou resp. druhou a třetí část nosníku. V řezu 2 vzroste skokem posouvající síla o hodnotu $kw_2 - F$. Tomu odpovídá bodová matice

$$[B]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Zřejmě pak bude platit, že

$$\{z_2^P\} = [B_2] \{z_2^L\} \quad (3)$$

O řezu 3 víme pouze, že je tam nulový průhyb, kdežto posouvající síla se mění skokem o neznámou hodnotu. Abychom tuto nesnáz obešli, "vypůjčíme" si podmínku nulového průhybu na konci 4. Přenosovou matici $[U_3]$ rozepíšeme

$$[U_3] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Protože třetí část nosníku nenese vnější zatížení, jsou prvky u_1 až u_4 nulové. Z podmínky nulového průhybu $w_4 = 0$ dostaneme

$$u_{11} w_3 + u_{12} \varphi_3 + u_{13} M_3 + u_{14} T_3^P = 0 \quad (5)$$

a odtud

$$T_3^P = -\frac{u_{11}}{u_{14}} w_3 - \frac{u_{12}}{u_{14}} \varphi_3 - \frac{u_{13}}{u_{14}} M_3 \quad (6)$$

Splnění této podmínky zajistíme užitím bodové matice

$$[B_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_{11}/u_{14} & -u_{12}/u_{14} & -u_{13}/u_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Potom zajisté bude

$$\{z_3^p\} = [B_3] \{z_3^l\} \quad (8)$$

Z rovnic (1), (13) a (18) dostaneme

$$\{z_4\} = [U_3][B_3][U_2][B_2][U_1]\{z_1\} \quad (9)$$

Tuto rovnici zapíšeme zkráceně jako

$$\{z_4\} = [\hat{U}]\{z_1\} \quad (10)$$

Prvky matice $[\hat{U}]$ označíme indexy $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$, ..., $\delta\epsilon$. Protože $w_1 = 0$, $M_1 = 0$, můžeme první a třetí sloupec matice $[\hat{U}]$ vynechat.

Bude

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \psi_4 \\ 0 \\ T_4 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\alpha\beta} & u_{\alpha\delta} & u_{\alpha\epsilon} \\ u_{\beta\beta} & u_{\beta\delta} & u_{\beta\epsilon} \\ u_{\gamma\beta} & u_{\gamma\delta} & u_{\gamma\epsilon} \\ u_{\delta\beta} & u_{\delta\delta} & u_{\delta\epsilon} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ T_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Tato rovnice obsahuje čtyři neznámé. Zdánlivě máme k dispozici čtyři nezávislé rovnice. Ve skutečnosti jsme však už podmínku $w_4 = 0$ použili, takže první řádek ze soustavy (11) nemůžeme potřebovat (je lineárně závislý na ostatních řádcích). Místo toho však máme k dispozici podmínku $w_3 = 0$. Vypočteme proto ještě

$$\{z_3^l\} = [U_2][B_2][U_1]\{z_1\} \quad (12)$$

Prvky matice $[U_2][B_2][U_1]$ označíme indexy aa , ab , ..., de . Uvedenou podmínku dostaneme anulováním prvního řádku (12)

$$u_{ab}\psi_1 + u_{ad}T_1 + u_{ae} = 0 \quad (13)$$

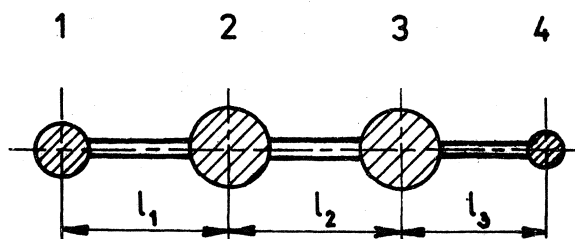
K tomu přistoupí rozepsaný třetí řádek (11)

$$u_{\gamma\beta} \varphi_1 + u_{\gamma\delta} T_1 + u_{\gamma\varepsilon} = 0. \quad (14)$$

Řešením (13) a (14) získáme φ_1 , T_1 a tím i všechny ostatní veličiny, které nás mohou zajímat.

Příklad 35. Kmitání prutu z příkladu 33 budeme řešit znovu užitím fyzikální diskretizace. Budeme předpokládat, že v bodech 1 až 4 budou soustředěny osamělé hmoty

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} \rho S_1 \ell_1, \\ m_2 &= \frac{1}{2} \rho (S_1 \ell_1 + S_2 \ell_2), \\ m_3 &= \frac{1}{2} \rho (S_2 \ell_2 + S_3 \ell_3), \\ m_4 &= \frac{1}{2} \rho S_3 \ell_3 \end{aligned} \quad (1)$$



Obr. 17

a že tyto hmoty budou spojeny nehmotnými pružnými pruty s ohybovými tuhostmi EJ_1 až EJ_3 . V rovnicích (1) značí ρ hustotu, S_i průřez, ℓ_i délku příslušné části prutu ($i = 1, 2, 3$). Tento diskrétní náhradní model zachycuje obr. 17.

Použijeme přenosové matice (7) z příkladu (31), neboť bezhmotový nosník se bude prohýbat stejně jako statický. Dosadíme postupně $x = l_1$, $J = J_1$, pak $x = l_2$, $J = J_2$ a konečně $x = l_3$, $J = J_3$ a dostaneme $[U_{21}]$, $[U_{32}]$ a $[U_{43}]$. Tyto matice budou čtvrtého řádu, neboť při volném kmitání odpadá partikulární integrál. Pak budou platit rovnice

$$\begin{aligned} \{z_2^L\} &= [U_{21}] \{z_1^P\}, \\ \{z_3^L\} &= [U_{32}] \{z_2^P\}, \\ \{z_4^L\} &= [U_{43}] \{z_3^P\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Setrvačné síly o amplitudách $\omega^2 w_i m_i$ zavedeme užitím bodových matic. O tyto síly se skokem změni posouvající síly. Takže (pro $i = 1, 2, \dots, 4$)

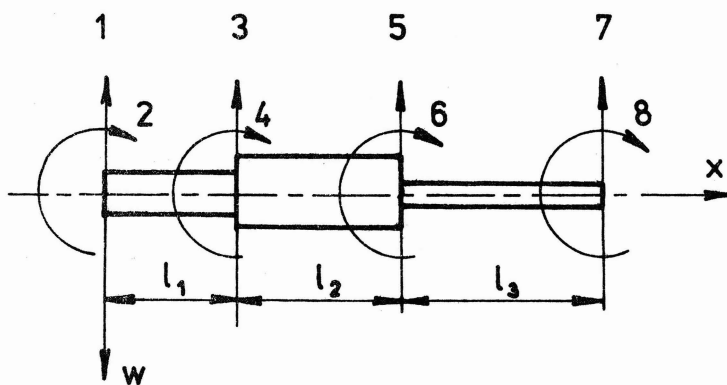
$$[B_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m_i \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Výsledná rovnice, která odpovídá vztahu (2) v příkladu (33) je

$$\{z_4^p\} = [B_4][U_{43}][B_3][U_{32}][B_2][U_{21}][B_1]\{z_1^L\} \quad (4)$$

Další postup je stejný jako v příkladu 33. Rozdíl je v tom, že nyní máme soustavu pouze se čtyřmi stupni volnosti. Dvě nejnižší vlastní frekvence jsou nulové (odpovídají rovnoměrnému pohybu prutu jako tuhého celku). Zbývají tedy jen dvě nenulové vlastní frekvence. V příkladu 33 jsme jich měli spočetně nekonečné množství. Počet vypočtených frekvencí bychom mohli snadno zvýšit, kdybychom prut rozdělili na menší díly. Výhodou řešení v tomto příkladu je, že charakteristická rovnice má tvar polynomu v proměnné ω^2 , takže se její kořeny hledají snáze a rychleji. V příkladu 33 byla charakteristická rovnice transcendentní. Představovala sice exaktní řešení pro nekonečně mnoho vlastních frekvencí, ale praktický výpočet velmi vysokých vlastních frekvencí nemá smysl. Jednak proto, že při nich už neplatí dostatečně přesně Bernoulliho teorie, jednak pro numerické selhání vlivem zaokrouhlovacích chyb. Bernoulliho teorii bychom mohli nahradit nějakou přesnější teorií. Druhá potíž je proto mnohem závažnější. O příčinách numerického selhání metody přenosových matic pojednáme v příští kapitole.

Příklad 36. Kmitání prutu z příkladu 33 budeme řešit metodou konečných prvků. Prut rozdělíme na tři prizmatické části (elementy) a zavedeme osm zobecněných souřadnic podle obr. 18.



Obr. 18

Průhyb W v rozsahu $0 \leq x \leq l_1$ vyjádříme ve tvaru analogickém k rovnici (12.3)

$$W(x, t) = \sum_{i=1}^4 q_i(t) \Phi_i(x), \quad (1)$$

kde

$$\Phi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}x^2 + a_{3i}x^3 \quad (2)$$

Koeficienty a_{0i} až a_{3i} vybereme tak, aby platily podmínky obdobné k rovnici (12.2)

$$\begin{aligned} \Phi_1(0) &= 1, & \Phi_2(0) &= 0, & \Phi_3(0) &= 0, & \Phi_4(0) &= 0, \\ \Phi_1'(0) &= 0, & \Phi_2'(0) &= 1, & \Phi_3'(0) &= 0, & \Phi_4'(0) &= 0, \\ \Phi_1(l_1) &= 0, & \Phi_2(l_1) &= 0, & \Phi_3(l_1) &= 1, & \Phi_4(l_1) &= 0, \\ \Phi_1'(l_1) &= 0, & \Phi_2'(l_1) &= 0, & \Phi_3'(l_1) &= 0, & \Phi_4'(l_1) &= 1. \end{aligned}$$

Označíme-li $\xi = x/l_1$, dostaneme

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ \Phi_2(x) &= l_1(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ \Phi_3(x) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \Phi_4(x) &= l_1(-\xi^2 + \xi^3). \end{aligned} \quad (3)$$

Rovnici (1) zapíšeme maticově

$$W(x, t) = [\Phi] \{q\}, \quad (4)$$

kde

$$[\Phi] = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4] \quad \{q\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T.$$

Potenciální energie prvního elementu je rovna deformační energii

$$V_1 = \frac{1}{2} EJ_1 \int_0^{l_1} (W''')^2 dx = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_1] \{q\}, \quad (5)$$

kde

$$[K_1] = EJ_1 \int_0^{l_1} [\Phi'']^T [\Phi''] dx. \quad (6)$$

Čárkami označujeme derivace podle x . Vyčíslením tohoto vztahu dostaneme matici tuhosti

$$[K_1] = \frac{EJ_1}{l_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Kinetická energie prvního elementu o průřezu S_1 vyjde

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho S_1 \int_0^{l_1} (\dot{w})^2 dx = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M_1] \{\dot{q}\}, \quad (8)$$

kde

$$[M_1] = \rho S_1 \int_0^{l_1} [\Phi]^T [\Phi] dx. \quad (9)$$

Vyjde

$$[M_1] = \frac{\rho S_1 l_1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_1 & 54 & -13l_1 \\ 22l_1 & 4l_1^2 & 13l_1 & -3l_1^2 \\ 54 & 13l_1 & 156 & -22l_1 \\ -13l_1 & -3l_1^2 & -22l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Až dosud jsme počítali s jediným elementem. Obdobně vypočteme i matice tuhosti a hmotnosti zbývajících dvou elementů. Uvážíme-li, že např. zobecněné posuvy q_3 , q_4 jsou společné pro první a druhý element, a že v tomto řezu jsou pro oba elementy společné i vnitřní statické účinky, dojdeme k závěru, že stačí matice jednotlivých elementů načítat (superponovat) do společného pole 8×8 . Označíme-li prvky matice $[K_1]$ symbolem $k_{ij}^{(1)}$ a obdobně i ostatní prvky, bude celková (globální) matice tuhosti

$k_{11}^{(1)}$	$k_{12}^{(1)}$	$k_{13}^{(1)}$	$k_{14}^{(1)}$				
$k_{21}^{(1)}$	$k_{22}^{(1)}$	$k_{23}^{(1)}$	$k_{24}^{(1)}$				
$k_{31}^{(1)}$	$k_{32}^{(1)}$	a	b	$k_{13}^{(2)}$	$k_{14}^{(2)}$		
$k_{41}^{(1)}$	$k_{42}^{(1)}$	b	c	$k_{23}^{(2)}$	$k_{24}^{(2)}$		
		$k_{31}^{(2)}$	$k_{32}^{(2)}$	d	e	$k_{13}^{(3)}$	$k_{14}^{(3)}$
		$k_{41}^{(2)}$	$k_{42}^{(2)}$	e	f	$k_{23}^{(3)}$	$k_{24}^{(3)}$
				$k_{31}^{(3)}$	$k_{32}^{(3)}$	$k_{33}^{(3)}$	$k_{34}^{(4)}$
				$k_{41}^{(3)}$	$k_{42}^{(3)}$	$k_{43}^{(3)}$	$k_{44}^{(3)}$

(11)

kde

$$a = k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(2)},$$

$$d = k_{33}^{(2)} + k_{11}^{(3)},$$

$$b = k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(2)},$$

$$e = k_{34}^{(2)} + k_{12}^{(3)},$$

$$c = k_{44}^{(1)} + k_{22}^{(2)},$$

$$f = k_{44}^{(2)} + k_{22}^{(3)}.$$

Nevyplněná místa v matici (11) jsou nuly. Matice je pásová. Protože prut není podepřen, může se pohybovat jednak posouváním, jednak rotací jako absolutně tuhý celek. To znamená, že

$$[K]\{q_p\} = \{0\}, \quad [K]\{q_r\} = \{0\}, \quad (12)$$

kde

$$\{q_p\} = [1, 1, \dots, 1]^T,$$

$$\{q_r\} = [0, 1, 2, \dots, 7]^T.$$

První ze vztahů (12) znamená, že součet prvků v každém řádku matice musí být nulový. Podobně druhá podmínka říká, že pro $i = 1$ až 8 platí vztah

$$k_{i2} + 2k_{i3} + 3k_{i4} + \dots + 7k_{i8} = 0.$$

Těchto vztahů lze využít ke kontrole správnosti sestavení matice $[K]$.

Stejnou maticí tuhosti (11) bychom dostali, kdybychom nejprve sečetli potenciální energii všech tří elementů

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (13)$$

a pak vypočetli prvky matice (11) ze vztahu (10.4), totiž

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (14)$$

pro $i, j = 1, 2, \dots, 8$.

Obdobně sestavíme i matici hmotnosti $[M]$. Připomeňme, že tato matice nezahrnuje rotační setrvačnost průřezů, přestože počítáme s úhlovými deformacemi. Kinetickou energii (8) jsme totiž počítali jen pomocí rychlostí posuvů $\partial w / \partial t$ a nikoli pomocí úhlových rychlostí $\partial^2 w / \partial x \partial t$. Výpočet bychom mohli snadno zobecnit.

Výsledkem je pak rovnice typu (12.14). Buzení je nulové, takže

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (15)$$

Pro volné kmity

$$\{q(t)\} = \{u\} e^{i\Omega t} \quad (16)$$

Dosazením (16) do (15) vyjde problém vlastních hodnot

$$([K] - \lambda[M])\{u\} = \{0\}, \quad (17)$$

když označíme $\lambda = \Omega^2$. Vlastní kruhové frekvence $\Omega = \sqrt{\lambda}$ dostaneme řešením rovnice

$$|[K] - \lambda[M]| = 0. \quad (18)$$

Je to algebraická rovnice osmého stupně.

Protože vektory $\{q_p\}$, $\{q_r\}$ jsou lineárně nezávislé, nemůže být hodnota matice $[K]$ větší než 6. Skutečně, matice $[K]$ je singularní. Porovnáme-li rovnice (12) a (19) vidíme, že dvě vlastní hodnoty vyjdou nulové a že jim příslušné vlastní vektory jsou právě $\{q_p\}$ a $\{q_r\}$. Dostaneme tedy jen šest nenulových vlastních hodnot. Protože volbou tvaru průhybovky (1) jsme omezili deformační volnost prutu, dostaneme tímto výpočtem vždy poněkud větší hodnoty vlastních frekvencí

než podle exaktního výpočtu analytickými metodami. Chyba bude u nejnižších frekvencí malá, u vysokých může být velká. Chceme-li i tyto vysoké frekvence dostat přesněji, musíme prut rozdělit na větší počet konečných elementů nebo zvýšit přesnost aproximace (1). Mohli bychom třeba zvolit jako další zobecněné souřadnice křivosti (tedy druhé derivace) v uzlových bodech a použít místo (2) polynom pátého stupně. Výhodnější je však volba většího počtu elementů, neboť celý výpočet pak probíhá podle stejného algoritmu. Úprava programu je přitom stejně snadná jako hra se stavebnicí.

13. PŘÍČINY SELHÁNÍ METODY PŘENOSOVÝCH MATIC

V příkladu 31 jsme odvodili přenosovou matici pro prizmatický nosník (5), do níž vstupovaly funkce (4) s parametrem β podle (3).^{x)} Dostali jsme tak matici $[U(x; \beta(\omega^2))]$. Ze zkušenosti víme, že metoda přenosových matic selhává, chceme-li počítat vlastní frekvence příliš vysokých řádů. Abychom mohli posoudit příčinu takového selhání, vypočteme hodnotu

$$[\tilde{U}] = [U(l; \beta(\omega^2))]_{\omega \gg 1} \quad (13.1)$$

Použijeme přitom vzorců platných pro velké argumenty x

$$\cosh x \doteq \sinh x \doteq e^{x/2} \gg 1 \quad (13.2)$$

a dostaneme

$$[\tilde{U}] = \frac{e^{\beta l}}{4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta^2 EJ} & -\frac{1}{\beta^2 EJ} \\ \beta & 1 & -\frac{1}{\beta EJ} & -\frac{1}{\beta^2 EJ} \\ -\beta^2 & -\beta & 1 & \frac{1}{\beta} \\ -\beta^3 & -\beta^2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

^{x)} Funkce (4) jsou známé Krylovovy funkce.

S překvapením zjišťujeme, že tato matice je singulární a má hodnotu 1. Všechny subdeterminanty řádu druhého, třetího nebo čtvrtého jsou rovné nule. To je tedy příčina, proč metoda přenosových matic selhává při výpočtu vysokých vlastních frekvencí. Obdobná příčina znemožňuje aplikaci přenosových matic na příliš dlouhé nosníky na pružném podkladu nebo na příliš dlouhé rotačně souměrné skořepiny.

Jiná příčina selhání metody přenosových matic tkví v povaze rovnice (12.29). Bude-li za sebou řazeno N členů, bude

$$\{z_{N+1}\} = [U_N][U_{N-1}] \dots [U_1]\{z_1\}. \quad (13.4)$$

Předpokládejme, že všechny členy budou stejné a rovné $[U]$. Potom

$$\{z_{N+1}\} = [U]^N\{z_1\}. \quad (13.5)$$

Pro velká N se však mocnina $[U]^N$ přenosové matice $[U]$ stává špatně podmíněnou. Abychom to ukázali, vyřešíme nejprve problém vlastních hodnot

$$[U]\{x\} = \lambda\{x\}. \quad (13.6)$$

Anulováním determinantu této soustavy

$$|[U] - \lambda[I]| = 0 \quad (13.7)$$

dostaneme vlastní hodnoty. Budeme předpokládat, že matice $[U]$ je n -tého řádu a že má jednoduchou strukturu s navzájem různými vlastními hodnotami λ_1 až λ_n , které sestavíme do pořadí

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|. \quad (13.8)$$

Vlastní vektory $\{x_1\}$ až $\{x_n\}$ tvoří modální matici

$$[V] = [x_1 | x_2 | \dots | x_n] \quad (13.9)$$

a vlastní hodnoty diagonální matici

$$[\Lambda] = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n]. \quad (13.10)$$

Pak platí rozklad

$$[U] = [V][\Lambda][V]^{-1}. \quad (13.11)$$

Odtud dostaneme umocněním

$$[U]^N = [V][\Lambda]^N[V]^{-1}, \quad (13.12)$$

kde

$$[\Lambda]^N = \begin{bmatrix} \lambda_1^N & & \\ & \lambda_2^N & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n^N \end{bmatrix}. \quad (13.13)$$

Kondiční číslo je definováno poměrem největší a nejmenší absolutní vlastní hodnoty^{x)}

$$\text{cond}([U]^N) = \text{cond}([\Lambda]^N) = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right|^N. \quad (13.14)$$

Pro $N \rightarrow \infty$ je $\text{cond}([U]^N) \rightarrow \infty$, neboť platí (13.8).

Např. matice

$$[U] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (13.15)$$

má vlastní čísla $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ a modální matici

$$[V] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (13.16)$$

Proto $[U]$ má kondiční číslo 3, ale např.

$$[U]^{10} = \begin{bmatrix} 29525 & 29524 \\ 29524 & 29525 \end{bmatrix} \quad (13.17)$$

má kondiční číslo 59049. Vidíme, že prvky matice (13.17) se liší až cifrou na pátém místě a že při výpočtu determinantu mohou vzniknout podstatné zaokrouhlovací chyby, nebudeme-li počítat alespoň na šest platných cifer.

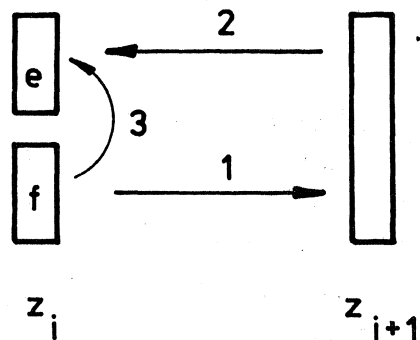
x) Čím je kondiční číslo větší, tím větší je nebezpečí zveličení zaokrouhlovacích chyb.

14. RICCATIHO TRANSFORMACE

Podstatou metody přenosových matic je transformace počátečního stavového vektoru $\{z_1\}$ v konečný vektor $\{z_{N+1}\}$

$$\{z_1\} \xrightarrow{[U]} \{z_{N+1}\} \quad (14.1)$$

Okrajové podmínky máme předepsány na obou koncích, takže při jejich uplatnění musíme použít transformace (14.1) v obou směrech. Je-li daný řetězec příliš složitý a dlouhý, může to vést k selhání metody vlivem příliš "dlouhé" transformační cesty. Tuto nesnáz můžeme překonat tím, že budeme hledat vztah mezi dvěma subvektory téhož stavového vektoru. To je vyznačeno na obr. 19. Transformace 1, 2 se zkrátí na 3. Původní transformaci napíšeme pomocí submatic



Obr. 19

$$\left\{ \begin{array}{c} e_{i+1} \\ f_{i+1} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} U_{\alpha\alpha}^i & U_{\alpha\beta}^i \\ \hline U_{\beta\alpha}^i & U_{\beta\beta}^i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} e_i \\ f_i \end{array} \right\} \quad (14.2)$$

Subvektory e_i , f_i obsahují veličiny, které jsou na levém okraji nulové. Takového seřazení prvků lze vždy docílit vhodným přeskupením řádků a sloupců přenosové matice. Nová transformace bude mít tvar

$$\{e_i\} = [S_i] \{f_i\} \quad (14.3)$$

Soustavu (14.2) rozepíšeme a dosadíme (14.3). Vyjde

$$\{e_{i+1}\} = ([U_{\alpha\alpha}^i][S_i] + [U_{\alpha\beta}^i]) \{f_i\}, \quad (14.4)$$

$$\{f_{i+1}\} = ([U_{\beta\alpha}^i][S_i] + [U_{\beta\beta}^i]) \{f_i\} \quad (14.5)$$

Z rovnice (14.5) vypočteme $\{f_i\}$ a dosadíme do (14.4). Pro větší přehlednost vynecháme závorky, které vyznačují matice a vektory. Dostaneme

$$e_{i+1} = (U_{\alpha\alpha}^i S_i + U_{\alpha\beta}^i) (U_{\beta\alpha}^i S_i + U_{\beta\beta}^i)^{-1} \cdot f_{i+1} \quad (14.6)$$

Porovnáním tohoto vztahu s definicí (14.3) dojdeme k rekurentnímu vzorci

$$S_{i+1} = (U_{\alpha\alpha}^i S_i + U_{\alpha\beta}^i)(U_{\beta\alpha}^i S_i + U_{\beta\beta}^i)^{-1}. \quad (14.7)$$

Známe-li matici S_i , můžeme odtud vypočítat S_{i+1} . Protože $e_1 = 0$, $f_1 \neq 0$, je $S_1 = 0$ (nulová matice). Můžeme tedy vypočítat S_2 , S_3 , ..., S_{N+1} . Pro poslední stavový vektor bude platit vztah

$$e_{N+1} = S_{N+1} f_{N+1}. \quad (14.8)$$

Nyní uplatníme okrajové podmínky z pravého konce a vypočteme tak neznámé stavové veličiny. Jde-li o případy vlastního kmitání resp. vzpěru, dostaneme pro neznámé stavové veličiny homogenní soustavu rovnic. Má-li mít netriviální řešení, musí mít nulový determinant. To je charakteristická rovnice, z níž vypočteme vlastní kruhovou frekvenci resp. kritické zatížení.

Ostatní veličiny vypočítáme nyní ve zpětném chodu pomocí vzorců

$$f_i = T_i f_{i+1} \quad (14.9)$$

kde podle (14.5)

$$T_i = (U_{\beta\alpha}^i S_i + U_{\beta\beta}^i)^{-1}. \quad (14.10)$$

Celá procedura připomíná Gaussův eliminační proces řešení lineárních soustav algebraických rovnic (triangulaci a zpětný chod).

Riccatiho transformaci (14.3) lze zobecnit i na nehomogenní úlohy typu (12.24), které zapíšeme pomocí submatic takto

$$\begin{Bmatrix} e_{i+1} \\ f_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha}^i & U_{\alpha\beta}^i \\ U_{\beta\alpha}^i & U_{\beta\beta}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_i \\ f_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_i \\ h_i \end{Bmatrix} \quad (14.11)$$

Místo (14.3) bude

$$e_i = S_i f_i + P_i, \quad (14.12)$$

$$P_{i+1} = (U_{\alpha\alpha}^i P_i + g_i) - S_{i+1} (U_{\beta\alpha}^i P_i + h_i), \quad (14.13)$$

$$f_i = T_i f_{i+1} + Q_i, \quad (14.14)$$

$$Q_i = -T_i (U_{\text{Box}}^i P_i + h_i). \quad (14.15)$$

Ostatní vzorce se nezmění. Vektor $P_1 = 0$.

Příklad 37. Vypočteme vlastní kruhové frekvence ohybového kmitání volného prutu z obr. 13 (příklad 33). Na levém konci je $M_1 = 0$, $T_1 = 0$, takže

$$\{e\} = \left\{ \begin{matrix} M \\ T \end{matrix} \right\}, \quad \{f\} = \left\{ \begin{matrix} W \\ \varphi \end{matrix} \right\}. \quad (1)$$

Přenosovou matici (5) z příkladu 31 tedy přeskupíme tak, aby platilo (14.2), tedy

$$\left\{ \begin{matrix} M \\ T \\ W \\ \varphi \end{matrix} \right\}_{i+1} = \left[\begin{array}{cc|cc} c_0 & c_1 & -\beta^4 E J c_2 & -\beta^4 E J c_3 \\ \beta^4 c_3 & c_0 & -\beta^4 E J c_1 & -\beta^4 E J c_2 \\ \hline -\frac{c_2}{EJ} & -\frac{c_3}{EJ} & c_0 & c_1 \\ -\frac{c_1}{EJ} & -\frac{c_2}{EJ} & \beta^4 c_3 & c_0 \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} M \\ T \\ W \\ \varphi \end{matrix} \right\}_i. \quad (2)$$

Přitom jsme dosadili $x = \ell_i$ ($i = 1, 2, 3$). Se submaticemi z rovnice (2) můžeme vypočítat matice $[S_1]$ až $[S_4]$, popř. $[T_1]$ až $[T_3]$. Na pravém konci bude platit rovnice (14.8) ve tvaru

$$\left\{ \begin{matrix} M_4 \\ T_4 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} W_4 \\ \varphi_4 \end{matrix} \right\}. \quad (3)$$

Levá strana je nulový vektor (volný konec nosníku). Proto musí být

$$S_{11} S_{22} - S_{21} S_{12} = 0. \quad (4)$$

To je charakteristická rovnice pro ω^2 . Ke každému kořenu $\omega^2 = \Omega_i^2$ nalezneme vlastní vektor $\{f_4\} = [W_4^{(i)} \varphi_4^{(i)}]^T$ a užitím matic (14.10) dostaneme všechny deformační veličiny. S nimi jsou vázány i silové veličiny podle (14.3). Všechny tyto veličiny můžeme určit až na multiplikační konstantu.

Je-li program pro Riccatiho transformaci vhodně uspořádán, pak k výpočtu potřebujeme jen o málo víc než polovinu paměti a výpočet probíhá téměř dvakrát rychleji než při běžné metodě přenosových matic. Je zároveň mnohem spolehlivější vzhledem k zaokrouhlovacím chybám.

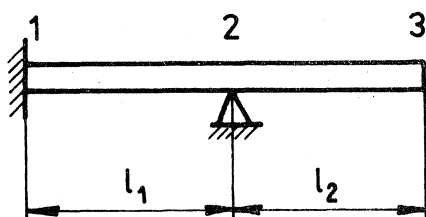
Příklad 38. Jak se změní výpočet z příkladu 37, bude-li pravý konec prutu kloubově podepřen?

V tom případě bude $M_4 = 0$, $W_4 = 0$, takže místo rovnice (3) budeme mít

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{22} \end{bmatrix} \varphi_4 \quad (1)$$

Charakteristická rovnice je

$$S_{12} = 0 \quad (2)$$



Obr. 20

Příklad 39. Užitím Riccatiho transformace vypočítáme vlastní frekvence ohybového kmitání nosníku uloženého podle obr. 20 (staticky neurčitě). Protože na levém konci je $W_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, bude

$$\{e_1\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix}, \quad \{f_1\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ T_1 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Užitím přenosové matice (5) z příkladu 31 vypočteme stavový vektor v řezu těsně vlevo od podpory 2

$$\begin{Bmatrix} e_2^L \\ f_2^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Přenosová matice byla vypočtena pro část l_2 nosníku ($x = l_1$). Protože $\{e_1\} = \{0\}$, vyjde

$$\begin{Bmatrix} e_2^L \\ f_2^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} \{f_1\} \quad (3)$$

Rozepsáním a eliminací vektoru $\{f_1\}$ dostaneme

$$\{e_2^L\} = [S_2^L] \{f_2^L\} \quad (4)$$

kde

$$[S_2^L] = [U_{12}][U_{22}]^{-1}. \quad (5)$$

Nyní potřebujeme podobný vztah dostat i pro stavový vektor v řezu těsně vpravo od podpory 2. Oba stavové vektory se budou lišit skokovým přírůstkem posouvající síly. Tuhou podporu nahradíme pružnou podporou o tuhosti k , takže bude

$$\begin{Bmatrix} W_2^P \\ \varphi_2^P \\ M_2^P \\ T_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2^L \\ \varphi_2^L \\ M_2^L \\ T_2^L \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Označíme-li submatici

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

budeme moci rovnici (6) zapsat symbolicky jako

$$\begin{Bmatrix} e_2^P \\ f_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \alpha & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_2^L \\ f_2^L \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

Rozepsáním a úpravou s použitím (4) dostaneme (po eliminaci $\{f_2^L\}$)

$$\{e_2^P\} = [S_2^P]\{f_2^P\}, \quad (9)$$

$$[S_2^P] = ([S_2^L][\alpha] + [I])^{-1}[S_2^L]. \quad (10)$$

Nyní se vrátíme k představě absolutně tuhé podpory limitním přechodem $k \rightarrow \infty$. Bude-li

$$[S_2^L] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

vyjde z rovnice (10) a (7)

$$[S_2^P] = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} S_{12}k + 1 & 0 \\ S_{22}k & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{S_{22}}{S_{12}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{S_{21} S_{12} - S_{11} S_{22}}{S_{12}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Konečně pro část 2P-3 nosníku dostaneme

$$\begin{Bmatrix} e_3 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha} & U_{\alpha\beta} \\ U_{\beta\alpha} & U_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_2^P \\ f_2^P \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

V této rovnici byla přenosová matice vypočtena pro pole 2-3 nosníku, tj. pro $x_2 = l_2$. To je rovnice typu (14.2), takže matici můžeme vypočítat podle (14.7)

$$[S_3] = ([U_{\alpha\alpha}][S_2^P] + [U_{\alpha\beta}])([U_{\beta\alpha}][S_2^P] + [U_{\beta\beta}])^{-1} \quad (14)$$

Bude

$$\{e_3\} = [S_3]\{f_3\}. \quad (15)$$

Protože na volném konci je $\{f_3\} = \{0\}$, musí být nulový determinant matice $[S_3]^{-1}$, má-li existovat netriviální řešení. Charakteristická rovnice tedy je

$$|([U_{\beta\alpha}][S_2^P] + [U_{\beta\beta}])| = 0. \quad (16)$$

Na tomto příkladu jsme ukázali, že tuhou podporu je možné zahrnout do výpočtu užitím Riccatiho transformace jako limitní případ pružné podpory, tedy jinak než při obvyklém způsobu výpočtu metodou přenosových matic (srovnej s příkladem 34).

Oba tyto způsoby, jakými respektujeme přechodové podmínky v dané soustavě, komplikují sestavení algoritmu. Postup sestavení matice (7) z příkladu 34 nebo limity (12) z tohoto příkladu lze však shrnout pro nejběžnější případy do tabulek. Výpočet se tím usnadní a zrychlí /10/, /11/. x)

Poznámka. Také při obvyklém způsobu užití přenosových matic (jaký jsme ukázali v příkladu 34) by bylo možné zahrnout vliv tuhé podpory uvnitř spojitého nosníku užitím bodové matice pro pružnou podporu a

x) O Riccatiho transformaci je zmínka pouze v publikaci /11/.

předpokladem $\lim k \rightarrow \infty$. Na rozdíl od rovnice (12) z příkladu 39 bychom však nedostali podmínku nezávislou na hodnotě k . Charakteristická rovnice pro nosník z příkladu 39 by měla tvar

$$k f_1(\omega^2) + f_2(\omega^2) = 0. \quad (17)$$

Pro $\lim k \rightarrow \infty$ musí být $f_1(\omega^2) = 0$, neboť $f_2(\omega^2)$ lze zanedbat. Kdybychom počítali s celou rovnicí (17) (tedy bez úpravy výpočetního programu), musili bychom zvolit tak velkou hodnotu k , aby člen $f_2(\omega^2)$ byl zanedbatelný, ale ne zase tak velkou, aby došlo k přehlcení počítače. Postup vyložený v příkladu 39 těmito obtížím předchází, avšak za cenu složitějšího algoritmu.

15. PŘECHODOVÉ KMITY NELINEÁRNÍ SOUSTAVY

Neperiodické lineární kmity lze řešit buď spektrálním rozkladem do řady vlastních kmitů a pak užitím Duhamelova integrálu (kap. 10) nebo přímou integrací rovnice

$$[M]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}. \quad (15.1)$$

Někdy se k této rovnici přidává identita

$$[M]\{\dot{q}\} - [M]\{\dot{q}\} = \{0\} \quad (15.2)$$

Obě tyto rovnice lze pak zapsat jako jednu užitím submatic. Vyjde soustava rovnic prvního řádu, avšak s dvojnásobným počtem neznámých funkcí

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix}. \quad (15.3)$$

Budeme mít

$$[A]\{\dot{v}\} + [B]\{v\} = \{0\}, \quad (15.4)$$

kde

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & | & M \\ -M & | & B \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -M & | & 0 \\ 0 & | & K \end{bmatrix}. \quad (15.5)$$

Dosazením (15.3) a (15.5) do (15.4) dostaneme rovnici, která je totožná s rovnicemi (15.1) a (15.2). Úprava (15.4) pohybových rovnic bývá výhodná, nejsou-li matice v rovnici (15.1) diagonalizovatelné a máme-li k dispozici program řešící soustavu lineárních diferenciálních rovnic.

Jde-li o nelineární úlohy, nelze použít principu superpozice, tedy ani Duhamelova integrálu. Je však vždy možné použít numerické integrace rovnic (15.1) nebo (15.4). Nelinearita se zde projevuje tím, že matice tuhosti resp. tlumení nejsou konstantní. Nejčastěji závisí matice tuhosti na zobecněných posuvech $\{q\}$. Disipační člen nebývá v praktických úlohách dominantní, takže matici tlumení lze často považovat za konstantní nebo dokonce za nulovou, aniž vzniknou příliš velké chyby.

Nelineární soustavu diferenciálních rovnic (15.1) budeme řešit inkrementální (přírůstkovou) metodou. Budeme předpokládat, že během jednoho integračního kroku

$$t \leq t + \tau \leq t + \Delta t, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t$$

se čtvercové matice v rovnici (15.1) nezmění, kdežto vektory označené složenými závorkami vzrostou o přírůstky $\{\Delta \ddot{q}\}$, $\{\Delta \dot{q}\}$, $\{\Delta q\}$ a $\{\Delta f\}$. Takže

$$[M]\{\Delta \ddot{q}\} + [B]\{\Delta \dot{q}\} + [K]\{\Delta q\} = \{\Delta f\}. \quad (15.6)$$

Nechť např. jen matice tuhosti $[K]$ závisí na $\{q\}$, kdežto $[M]$ a $[B]$ jsou konstantní. Pak za $[K]$ můžeme v daném intervalu dosadit buď počáteční hodnotu $[K(\{q(t)\})]$ nebo přesněji průměrnou hodnotu

$$[K] = \frac{1}{2} ([K\{q(t)\}] + [K\{q(t+\Delta t)\}]). \quad (15.7)$$

V tomto druhém případě získáme hodnotu matice tuhosti v okamžiku $t + \Delta t$ iteracemi (opakováním řešením a postupným přibližováním).

Abychom se vyhnuli zvětšování chyb derivacemi odhadnutých funkcí, budeme za základní neznámou funkci považovat přírůstek zrychlení $\{\Delta \ddot{q}\}$. Zvolíme nějakou aproximaci $\{\ddot{q}(\tau)\}$ v daném integračním kroku. Počáteční hodnotu (pro $\tau = 0$) označíme

$$\{\ddot{q}(t)\} = \{\ddot{q}_0\}. \quad (15.8)$$

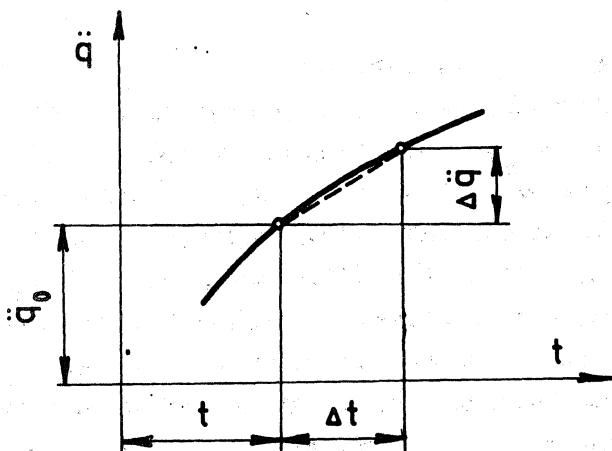
Při lineární aproximaci budeme mít

$$\{\ddot{q}(\tau)\} = \{\ddot{q}_0\} + \frac{\tau}{\Delta t} \{\Delta\ddot{q}\}, \quad (15.9)$$

kde $\{\Delta\ddot{q}\}$ nezávisí na čase τ (obr. 21). Integrací rovnice (15.9) dostaneme

$$\{\dot{q}(\tau)\} = \{\dot{q}_0\} + \tau \{\ddot{q}_0\} + \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{\Delta t} \{\Delta\ddot{q}\}, \quad (15.10)$$

$$\{q(\tau)\} = \{q_0\} + \tau \{\dot{q}_0\} + \frac{1}{2} \tau^2 \{\ddot{q}_0\} + \frac{1}{6} \frac{\tau^3}{\Delta t} \{\Delta\ddot{q}\}. \quad (15.11)$$



Obr. 21

Pro přírůstky za čas $\tau = \Delta t$ odtud dostaneme vztahy

$$\{\Delta\dot{q}\} = \Delta t \{\ddot{q}_0\} + \frac{1}{2} \Delta t \{\Delta\ddot{q}\}, \quad (15.12)$$

$$\{\Delta q\} = \Delta t \{\dot{q}_0\} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{q}_0\} + \frac{1}{6} \Delta t^2 \{\Delta\ddot{q}\}. \quad (15.13)$$

Z rovnice (15.13) vyjde

$$\{\Delta\ddot{q}\} = \frac{6}{\Delta t^2} \{\Delta q\} - \frac{6}{\Delta t} \{\dot{q}_0\} - 3 \{\ddot{q}_0\}. \quad (15.14)$$

To dosadíme do (15.12). Vyjde

$$\{\Delta\dot{q}\} = \frac{3}{\Delta t} \{\Delta q\} - \frac{1}{2} \Delta t \{\ddot{q}_0\} - 3 \{\dot{q}_0\}. \quad (15.15)$$

Nyní z rovnic (15.14) a (15.15) dosadíme do (15.6).

Dostaneme po úpravě

$$[\tilde{K}]\{\Delta q\} = \{\Delta \tilde{f}\}, \quad (15.16)$$

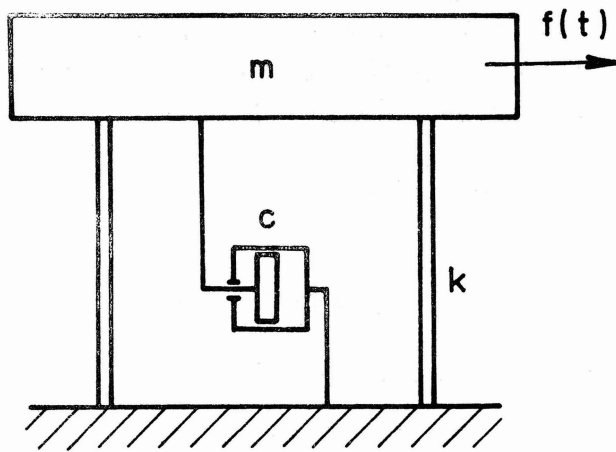
kde

$$[\tilde{K}] = [K] + \frac{3}{\Delta t} [B] + \frac{6}{\Delta t^2} [M], \quad (15.17)$$

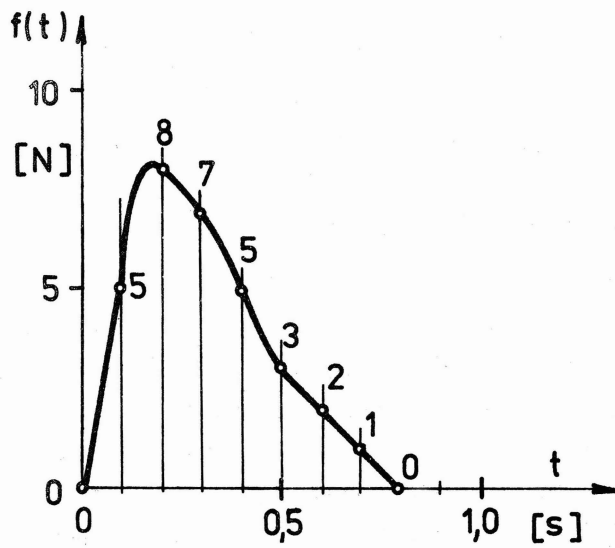
$$\{\Delta \tilde{f}\} = \{\Delta f\} + [M] \left(\frac{6}{\Delta t} \{\dot{q}_0\} + 3\{\ddot{q}_0\} \right) + [B] \left(3\{\dot{q}_0\} + \frac{1}{2} \Delta t \{\ddot{q}_0\} \right). \quad (15.18)$$

Postupně počítáme $\{\Delta q\}$ z rovnice (15.16), $\{\Delta \dot{q}\}$ z rovnice (15.15) a $\{\Delta \ddot{q}\}$ z rovnice (15.14). Tyto přírůstky přičítáme k vektorům $\{q\}$, $\{\dot{q}\}$ a $\{\ddot{q}\}$. Tak dostaneme hodnoty těchto neznámých funkcí pro čas odstupňovaný po krocích Δt . Časový krok nemůže být příliš velký, nemá-li vzniknout větší nepřesnost nebo dokonce numerická nestabilita. Nemůže být ani příliš malý, nemá-li být výpočet neúměrně nákladný. U nelineární soustavy je volba integračního kroku věcí zkušenosti. U lineární soustavy lze snadno určit mez numerické stability, která může být vodítkem při volbě vhodného integračního kroku (viz např. knihu /2/ Bathe, K.J. - Wilson, E.L., citovanou v seznamu literatury). Je pochopitelné, že nepřesnost numerického řešení se zvětšuje s počtem integračních kroků. To však zpravidla nevádí, neboť u přechodových kmitů dochází k největším výchylkám a namáháním obvykle jen krátce po začátku děje.

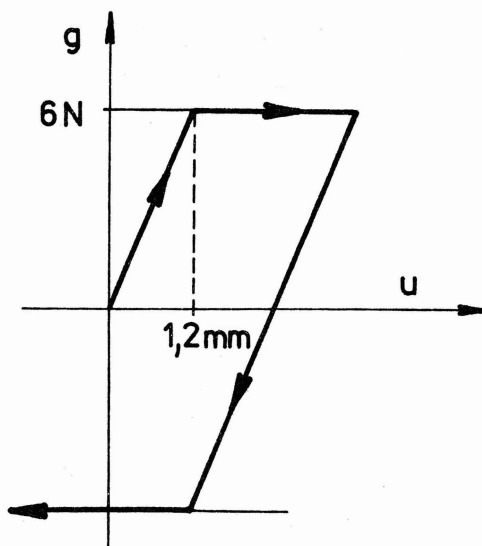
Příklad 40. Vypočítáme odezvu mechanické soustavy o jednom stupni volnosti (obr. 22) na působení síly s časovým průběhem $f(t)$ (obr. 23). Pružina má nelineární deformační charakteristiku $q(u)$ podle obr. 24. Přitom q znamená vratnou sílu pružiny, u posuv hmoty m . Konstanta lineárního útlumu je C . Dáno: $m = 100 \text{ kg}$, $C = 200 \text{ N m}^{-1} \text{ s}$, $k_0 = 5000 \text{ N m}^{-1}$ (tuhost pružiny pro $|q| < 6 \text{ N}$, obr. 24). Charakteristika pružiny odpovídá ideálnímu pružno-plastickému materiálu. Zadání je idealizováno pro snazší výpočet a jeho kontrolu. Zvolíme $\Delta t = 0,1 \text{ s}$.



Obr. 22



Obr. 23



Obr. 24

Protože jde o soustavu s jedním stupněm volnosti, jsou matice v rovnici (15.1) jednoprvkové. Dosazením daných hodnot do rovnic (15.17) a (15.18) vyjde v jednotkách SI

$$\tilde{k} = k + 66\,000, \quad (1)$$

$$\tilde{\Delta f} = \Delta f + 6600\dot{u} + 310\ddot{u}. \quad (2)$$

Z rovnic (15.14) až (15.16) vyjde

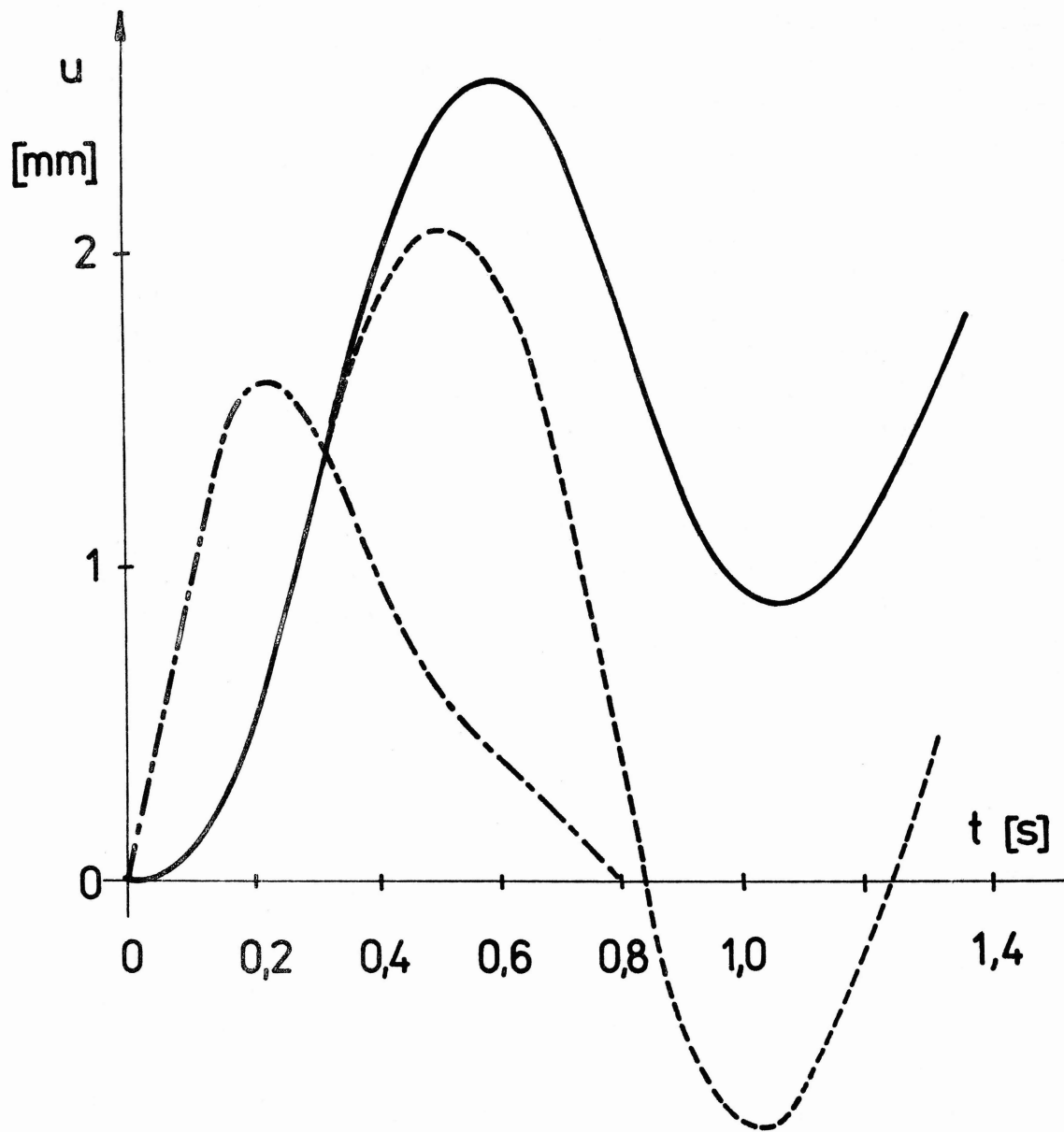
$$\Delta\ddot{u} = 600\Delta u - 60\dot{u} - 3\ddot{u}, \quad (3)$$

$$\Delta\dot{u} = 30\Delta u - 3\dot{u} - 0,05\ddot{u}, \quad (4)$$

$$\Delta u = (\Delta f + 6600\dot{u} + 310\ddot{u}) / (k + 66\,000). \quad (5)$$

Za k dosazujeme v pružné oblasti $k = k_0 = 5\,000 \text{ N m}^{-1}$, v plastické oblasti $k = 0$.

Předpokládáme, že počáteční výchylka a rychlost jsou nulové. Po integraci dostaneme průběh výchylky v závislosti na čase vyznačený plnou čarou na obr. 25. Plastické deformace nastávají pouze v intervalu $0,3 \text{ s} < t < 0,6 \text{ s}$. Pro $t < 0,3 \text{ s}$ je $q < 6 \text{ N}$, pro $t = 0,6 \text{ s}$ vyjde $\Delta u < 0$ (začátek odlehčování, tedy návrat do elastické oblasti). Výsledkem plastických deformací je trvalá deformace pružin. Abychom posoudili její vliv, zopakujeme výpočet ještě jednou pro čistě elastické pružiny ($k = k_0$ nezávisle na velikosti působící síly). Vyjde průběh vyznačený na obr. 24 čárkovaně. Čerchovaně je vyznačen statický průhyb (pro elastické pružiny a nehmotnou soustavu).



Obr. 25

ZÁVĚR

Předpokladem úspěšného řešení úloh z dynamiky je volba vhodně idealizovaného modelu skutečné mechanické soustavy a volba výpočtové metody, jež dává přijatelně přesná řešení užitím výpočetní techniky, kterou máme k dispozici. Zvolíme-li nevhodnou idealizaci, např. považujeme-li některou poddajnou podporu za tuhou, zanedbáme-li některé vazby s okolím, vůle apod., pak ani přesné matematické řešení nemůže dát uspokojivý výsledek.

Autor vycházel ze zkušenosti, že nelze dobře aplikovat metodu, které špatně rozumíme. Proto věnoval tolik pozornosti základním principům dynamiky, na nichž spočívají všechny metody řešení. Podrobně komentované řešené příklady výklad doplnily a často i rozšířily. Snad se tak podařilo vytvořit základ, který dá pozornému čtenáři sebevěru k promyšlení a řešení složitých úloh z dynamiky, s nimiž se v praxi setká.

Připojený seznam literatury obsahuje některé prameny, které pomohou čtenáři při sestavování výpočtových programů (/1/, /2/, /9/ až /12/). Této otázce jsme v našem semináři nevěnovali pozornost, neboť byla nedávno probírána na jiných seminářích a kursech pořádaných v rámci ČSVTS.

LITERATURA

- /1/ BATHE, K.J.: Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1982.
- /2/ BATHE, K.J. - WILSON, E.L.: Numerical methods in finite element analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1976.
- /3/ BOBROVNICKIJ, Ju.I. aj.: Rasprostraneniye voln v konstrukcijach iz tonkich stěržněj i plastin. Nauka, Moskva 1975.
- /4/ CLOUGH, R.W. - PENZIEN, J.: Dynamics of structures. McGraw-Hill, New York 1975.
- /5/ HÖSCHL, C.: Maticové metody v pevnostních výpočtech. Část I až III. Dům techniky ČSVTS Praha, Praha 1973 až 1974.

- /6/ KANDIDOV, V.P. - ŠESNOKOV, S.J. - VYSLOUCH, V.A.: Metod koněčných elementov v zadačach dinamiki. Moskovskij universitět, Moskva 1980.
- /7/ KOŽEŠNÍK, J.: Kmitání mechanických soustav. Academia, Praha 1979.
- /8/ LANCZOS, C.: The variational principles of mechanics. (4. ed.) University of Toronto Press, Toronto 1970.
- /9/ OKROUHLÍK, M. - LOUCKÝ, K.: Algoritmizace a programování výpočtů v mechanice využitím maticové algebry. Dům techniky ČSVTS Praha, Praha 1982.
- /10/ PESTEL, E.C. - LECKIE, F.A.: Matrix methods in elastomechanics. McGraw-Hill, New York 1963.
- /11/ PILKEY, W.D. - CHANG, Pin Yu: Modern formulas for statics and dynamics. McGraw-Hill, New York 1978.
- /12/ RICE, J.R.: Matrix computations and mathematical software. McGraw-Hill, New York 1981.
- /13/ ZIENKIEWICZ, O.C.: The finite element method in engineering and science. McGraw-Hill, New York 1971.

Druh publikace:	Sborník
Název:	Stavba strojů 86 UŽITÍ MALÝCH POČÍTAČŮ V DYNAMICE SOUSTAV
Autor:	Höschl
Počet stran:	106
Náklad:	160 výtisků
Formát:	A4
Číslo publikace:	60 - 643 - 83 (DT 2420)
Vydal a rozmnožil:	Dům techniky ČSVTS Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23
Rok vydání:	1983 -DT 01 - 67/83

Tato publikace nebyla jazykově upravena.