

## AERODYNAMICKÝ ODPOR PŘI OBTĚKÁNÍ GOLFOVÉHO MÍČKU

### *Aerodynamic Drag at Flow past a Golf Ball*

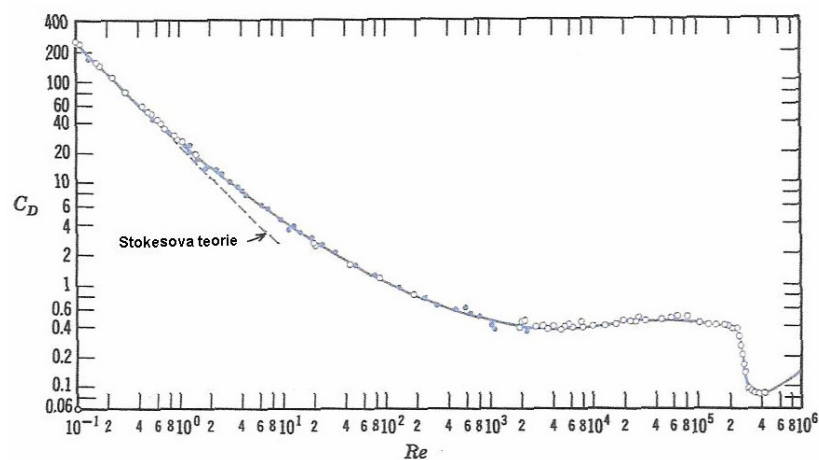
Martin Miczán, Jiří Nožička, Pavel Šafařík

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, Ústav mechaniky tekutin a energetiky, Odbor mechaniky tekutin a termodynamiky, Praha, Česká Republika

Teoretické práce ukazují, že při obtékání koule ideální tekutinou je odpor nulový (d'Alembertovo paradoxon) a toto proudění se vyznačuje dokonalým kontaktem proudící tekutiny s povrchem koule. Při obtékání koule reálnou tekutinou se projevuje vliv viskozity, když se tečná napětí v mezní vrstvě na povrchu obtékané koule projeví ve výsledku jako třecí odpor a dále když odtržení proudu od povrchu koule se vznikem vířivé oblasti se projeví ve výsledku jako tlakový odpor.

Experimenty ukazují, že až do oblasti Reynoldsova čísla,  $Re = \frac{\rho v d}{\eta}$ ,  $Re = 300000$

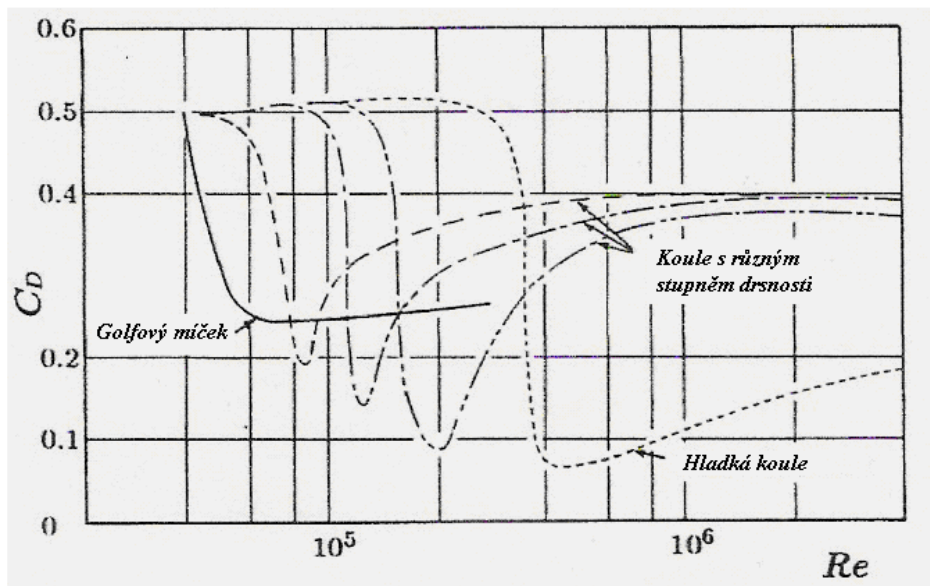
je mezní vrstva na povrchu hladké koule při obtékání laminární a odtržení nastává v poloze asi  $82^\circ$  úhlu měřeného od stagnačního bodu. Takové proudění nazýváme podkritické. Při nadkritickém proudění dochází k přechodu mezní vrstvy, která se stane v přední části koule turbulentní. To sice způsobí zvýšení třecího odporu, ale vyšší odolnost turbulentní mezní vrstvy způsobí posunutí bodu odtržení do polohy asi  $120^\circ$ , což vede k podstatnému snížení hodnoty tlakového odporu a potom i celkového odporu, obr. 1 [1].



Obr.1 Součinitel odporu  $C_D$  v závislosti na Reynoldsově čísle [1]

Další výzkumy prokázaly vliv turbulence vnějšího proudu na hodnoty kritického Reynoldsova čísla [1]. Podobně byl prokázán vliv drsnosti povrchu koule na zmenšení hodnoty kritického Reynoldsova čísla [2] a bylo ukázáno snížení hodnoty součinitele odporu obtékané koule. V souladu s těmito poznatky jsou výsledky výzkumu aerodynamického odporu modelu golfového míčku s důlky na povrchu [3]. Podstatné snížení hodnoty kritického Reynoldsova čísla a hodnoty součinitele odporu pro golfové míčky s důlky je zřejmé z obr.2. Snížení hodnoty součinitele odporu pro golfové míčky s důlky znamená, že let golfového míčku za stejných podmínek odpalu je delší. Podle [4] až o 70%. Snížení součinitele celkového odporu u golfového míčku s důlky je oproti hladké kouli bezpochyby spojeno s vlivem důlků na přechod mezní vrstvy na turbulentní, na posunutí bodu odtržení od povrchu míčku a na zmenšení úplavu za míčkem.

Předmětem této práce [5] bylo ověřit vlastním experimentem předpoklad menší hodnoty součinitele odporu  $C_D$  u golfového míčku než pro hladkou kouli a ověřit charakteristiku součinitele odporu  $C_D$  na Reynoldsově čísle při obtékání golfového míčku a hladké koule (obr. 2).



Obr.2 Součinitel odporu  $C_D$  v závislosti na Reynoldsově čísle [2]

V teoretické části práce [5] je zpracována metoda řešení výpočtu volného pádu a letu golfového míčku a hladké koule ve vzduchu, tj. řešení trajektorie letu s odporem prostředí. Po zadání počátečních podmínek je určená metoda připravena k určení letu golfového míčku nebo koule a pozdějšímu vyhodnocení vypočtených hodnot a určení balistické křivky. Lze měnit počáteční rychlost, úhel odpalu golfového míčku nebo koule a zjistit tak výšku letu nebo dráhu letu.

V reálném prostředí ovlivňuje volný pád odpor prostředí (= odporová síla prostředí). Znamená to, že padající míček se nepohybuje pohybem rovnoměrně zrychleným po celou dobu, ale že se jeho rychlost po určité době ustálí na jisté maximální hodnotě. Tuto maximální rychlost dosaženou při volném pádu míčku ve vzduchu nazýváme *konečná rychlost při volném pádu* (též *terminální pádová rychlost = asymptotická rychlost*). Míček po dosažení této rychlosti již dále nezrychluje, ale pohybuje se pohybem rovnoměrným. Síly působící na míček (tíhová síla a odporová síla prostředí) jsou v ten okamžik v rovnováze.

Odpor prostředí je vyjádřen vztahem pro aerodynamickou odporovou sílu:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_D, \quad (1)$$

Pro volný pád koule i golfového míčku můžeme napsat pohybovou rovnici:

$$a_D = \frac{dv}{dt} = g - \frac{F_D}{m}, \quad (2)$$

V této práci předpokládáme u golfového míčku menší součinitel odporu  $C_D$  než u koule. Při výpočtu volného pádu s odporem prostředí pro  $C_D = konst.$  vycházíme z rovnice (2) a z této rovnice odvozujeme z podmínky rovnováhy  $mg = F_D$  a dostáváme:

$$mg = \frac{1}{2} \rho v_{\max}^2 A C_D \quad (3)$$

Uvažujeme obsah průřezu koule i golfového míčku kolmo ke směru pohybu  $A = \frac{\pi d^2}{4}$  a po zavedení veličin:

$$b = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi d^2}{4} \frac{C_D}{m} \quad (4)$$

pak platí

$$g = b v_{\max}^2, \quad (5)$$

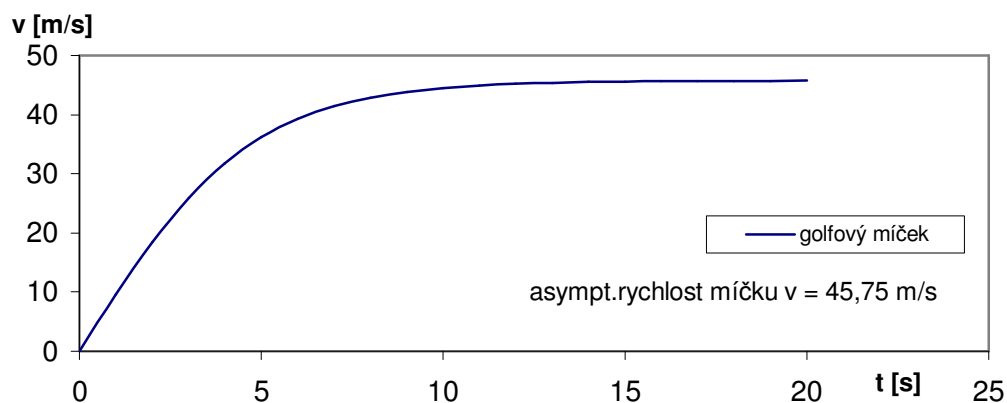
kde

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{8 m g}{\pi C_D \rho d^2}}. \quad (6)$$

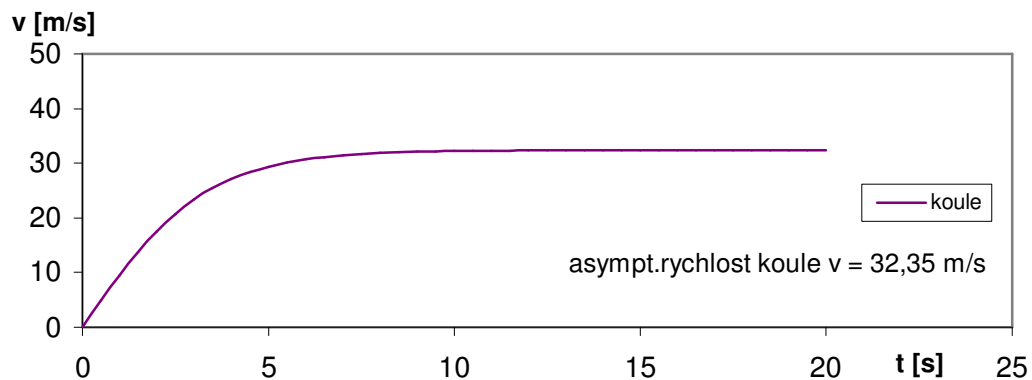
Po úpravě a dosazením do vztahu (2) dostáváme upravenou diferenciální rovnici, kterou analyticky řešíme. Řešení této diferenciální rovnice pro  $b = \text{konst.}$  při počáteční podmínce  $t_0 = 0, v_0 = 0$  je vztah pro výpočet volného pádu s odporem prostředí upraven na:

$$v(t) = v_{\max} \operatorname{tgh}(b v_{\max} t). \quad (7)$$

Použitím této rovnice (7) počítáme analyticky průběh rychlosti při volném pádu golfového míčku nebo koule s odporem prostředí obr. 3 a obr. 4, s konstantním součinitelem odporu  $C_D = \text{konst.} \neq 0$ .



Obr.3 Volný pád golfového míčku,  $C_D = 0,25$



Obr. 4 Volný pád koule o stejné hmotnosti a průměru jako golfový míček,  $C_D = 0,5$

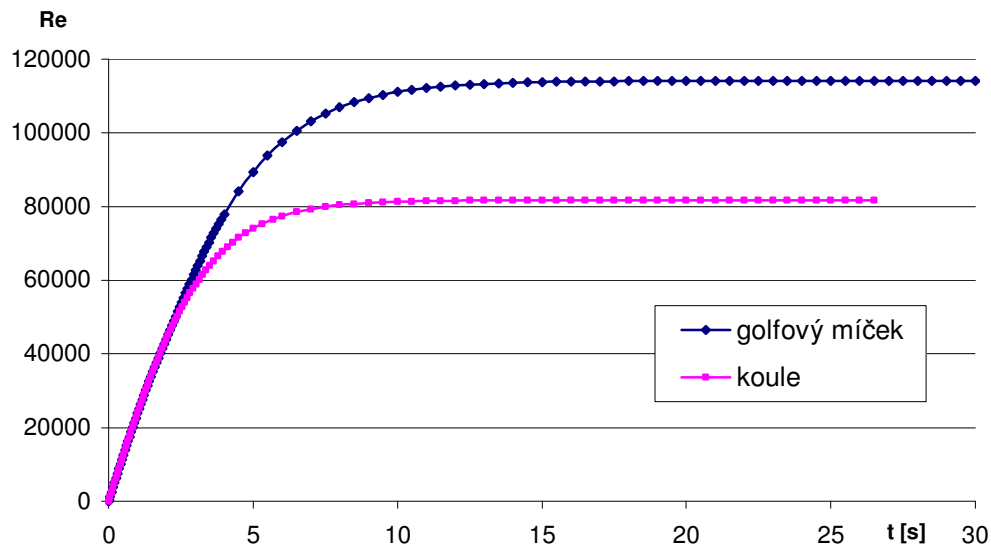
Při výpočtu volného pádu koule, kde  $C_D \neq konst.$ , jsme z [4], pro golfový míček z [3] převzali závislosti pro určení hodnoty součinitele odporu koule  $C_D$  na Reynoldsově čísle, které jsou typu  $C_D = K Re^{-n}$ . Potom diferenciální rovnice (2) dostane tvar

$$\frac{dv}{dt} = g - K v^{2-n}, \quad (8)$$

kde  $K = \frac{1}{8} \frac{\rho \pi}{m} k \left( \frac{\eta}{\rho} \right)^n d^{2-n}$  a je určena ze závislosti odporu na Reynoldsově čísle.

Pro výpočet volného pádu s proměnlivým součinitelem odporu  $C_D$  pro kouli a golfový míček (obr. 5) byla na řešení diferenciální rovnice (8) použita Rungeova-Kuttaova numerická metoda.

Golfový míček dosáhne své asymptotické rychlosti za čas  $t = 38,5$  s a koule za čas  $t = 26,5$  s. Asymptotická rychlost koule je tedy o 30% menší oproti golfovému míčku.



Obr. 5 Volný pád golfového míčku a koule o stejném průměru a hmotnosti,  $C_D \neq konst.$

Při výpočtu trajektorie letu ve golfového míčku a koule je zanedbáván vztlak, tj. vliv rotace míčku nebo koule. Vycházíme z rovnic:

$$\ddot{x} = -\frac{\rho A}{2m} \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) (C_D \cos \delta + C_L \sin \delta) \quad (9)$$

$$\ddot{y} = \frac{\rho A}{2m} \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) (C_L \cos \delta - C_D \sin \delta) - g, \quad (10)$$

kde  $\delta$  je argument vektoru rychlosti  $\delta = \arctg \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ .

Tyto dvě rovnice 2. řádu (9), (10) popisují let a trajektorii letu golfového míčku. Jde o druhý Newtonův pohybový zákon, kde vystupují upravené dvě rovnice: složky silových účinků ve směru osy x (9) a složky silových účinků ve směru osy y (10). Jestliže zanedbáváme vztlak ( $C_L = 0$ ), rovnice (9) a (10) lze přepsat do tvaru

$$\ddot{x} = -K_1 \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) C_D \cos \delta \quad (11)$$

$$\ddot{y} = -K_1 \left( \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) C_D \sin \delta - g, \quad (12)$$

kde

$$K_1 = \rho \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{2m}. \quad (13)$$

Ve výpočtu trajektorie letu golfového míčku a koule ve vzduchu je uvažován konstantní součinitel odporu  $C_D = 0,5$  pro kouli a  $C_D = 0,3$  pro golfový míček. Při výpočtu je zanedbávána vztlaková síla  $C_L = 0$ . Je popsán soustavou diferenciálních rovnic 2. řádu (11) a (12), které můžeme upravit na soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu.

$$\dot{p} = -K_1 C_D \sqrt{p^2 + q^2} p, \quad (14)$$

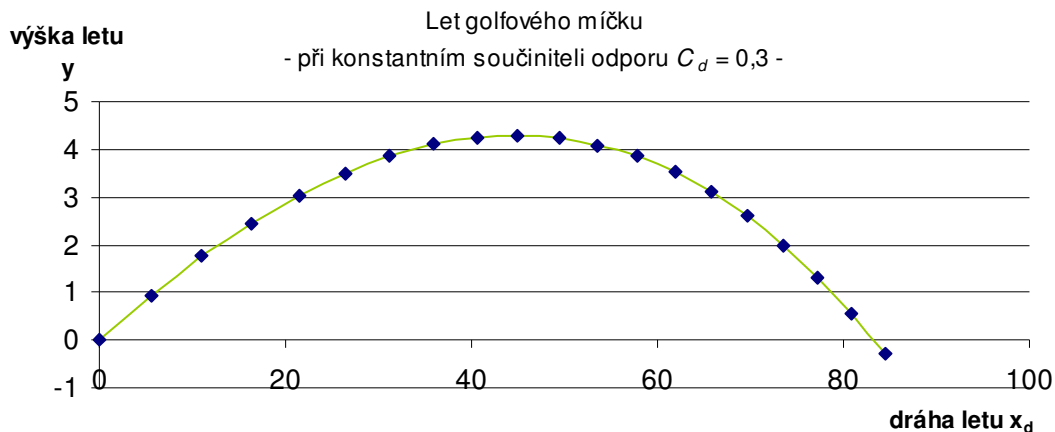
$$\dot{q} = -K_1 C_D \sqrt{p^2 + q^2} q - g, \quad (15)$$

$$\dot{x} = p, \quad (16)$$

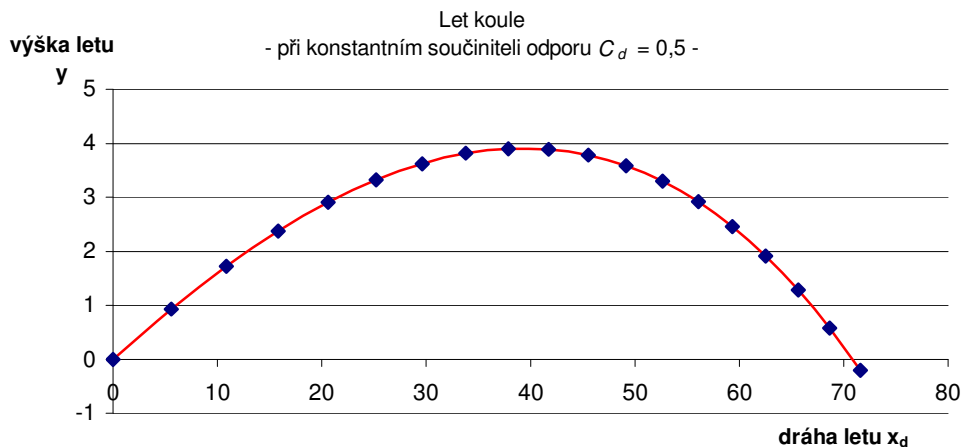
$$\dot{y} = q, \quad (17)$$

kde  $K_1$  je určeno rovnicí (13).

Počáteční podmínky jsou  $x(0)=0$ ,  $y(0)=0$ ,  $p(0)=v_0 \cos \alpha$ ,  $q(0)=v_0 \sin \alpha$ . Za těchto podmínek je soustava rovnic (14), (15), (16), (17) numericky řešitelná Rungeovou-Kuttaovou metodou. Řešení bylo provedeno pro počáteční rychlost  $v_0 = 57,9 \text{ m/s}$  a  $\alpha = 10^\circ$  se součinitelem odporu pro kouli  $C_D = 0,5$  (obr. 7) a  $C_D = 0,3$  pro golfový míček (obr. 6).



Obr. 6 Let golfového míčku  
-  $v_0 = 57,9 \text{ m/s}$ , elevační úhel  $\alpha = 10^\circ$  -  
-  $x_d = 84,46 \text{ m}$ ,  $y_{max} = 4,29 \text{ m}$  -



Obr. 7 Let koule  
-  $v_0 = 57,9 \text{ m/s}$ , elevační úhel  $\alpha = 10^\circ$  -  
-  $x_d = 71,5 \text{ m}$ ,  $y_{max} = 3,9 \text{ m}$  -

Dolet golfového míčku je o 20 % větší než u koule a výška o 15 % větší než u koule, při počáteční rychlosti  $v_0 = 57,9 \text{ m/s}$  a úhlu odpalu  $10^\circ$ .

V části experimentu byla navržena velmi jednoduchá metodika měření součinitele odporu  $C_D$  při obtékání golfového míčku nebo koule v závislosti na Reynoldsově čísle. Metodika spočívala v měření odporové síly v aerodynamickém tunelu na základě posunutí obtékaného tělesa a následném přepočtení na skutečnou hodnotu. Byla navržena metoda zavěšení měřeného tělesa (obr. 8) v aerodynamickém tunelu a metodika výpočtu součinitele odporu z měření.

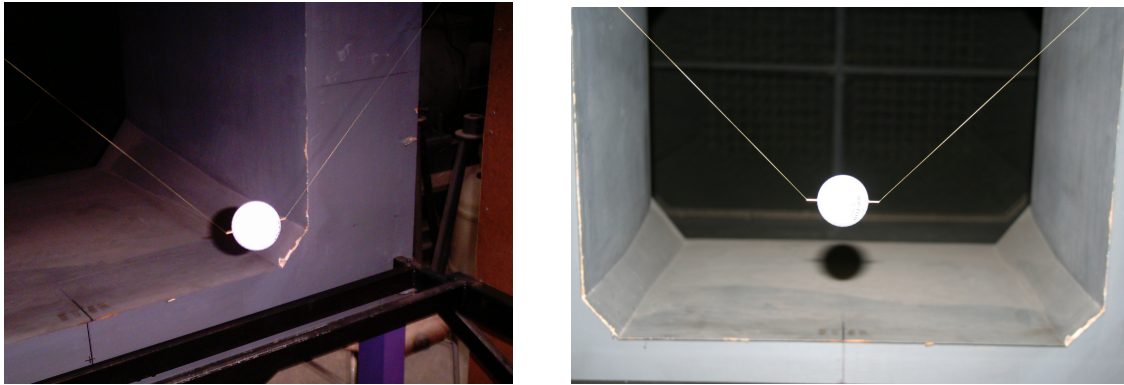


Obr. 8 Zavěšení měřeného golfového míčku

Metoda výpočtu součinitele odporu  $C_D$  z měření nakonec spočívala v silové rovnováze tíhy, aerodynamické odporové síly a výsledné síly v závěsu lanka.

Navržená metodika zavěšení golfového míčku a koule na lanko přinesla nový problém. Jednalo se o zamezení pohybu měřeného posunu golfového míčku a koule v příčném směru (kolmo na svislou rovinu osy aerodynamického tunelu). Tento problém jsme se snažili vyřešit zavěšením lanka do aerodynamického tunelu pod co největším úhlem (= rozpětí zavěšení) obr. 9.





Obr. 9 Metodika zavěšení golfového míčku a koule v aerodynamickém tunelu

Při měření v aerodynamickém tunelu, kde měření nedosahovalo vysokých Reynoldsových čísel, byla místo lanka použita kevlarová nit, která má pevnost 5 kg na 10 m. Kontrolní výpočet potvrdil, že při rychlostech, které v tomto tunelu můžeme dosáhnout, bude pevnost nitě dostačující. Pro měření při vyšších Reynoldsových číslech jsme použili nerezové ocelové lanko o průměru 0.5 mm. Náhrada kevlarové nitě za nerezové ocelové lanko byla z důvodu větší pevnosti nerezového lanka, které zaručovalo větší bezpečnost při měření v aerodynamickém tunelu. Při těchto rychlostech by mohlo dojít k přetrhnutí nitě a odfouknutí golfového míčku nebo koule do podtlakové nádrže.

Pro jedno z měření v aerodynamickém tunelu se musel vyrobit i model těžšího golfového míčku (obr. 10) a koule. Z originálního golfového míčku se odstranilo jádro a naplnilo se olověnými broky, které jsme zajistili proti posuvu zalitím epoxidovou pryskyřicí (obr. 11). Pro výrobu koule byl použit míček na stolní tenis, který má svými rozměry skoro stejný průměr jako golfový míček.

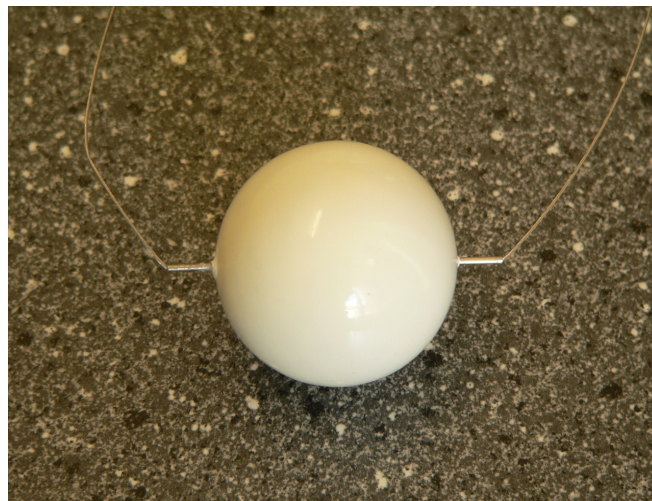
Má hrubší povrch, ale pomocí speciálního nátěru můžeme povrch koule považovat za hladký. Míček na stolní tenis má průměr 40 mm, což je asi o 2,5 mm méně než golfový míček. Výroba byla stejná jako u výroby modelu těžšího golfového míčku. Dvě půlky byly naplněny olověnými broky a zality epoxidovou pryskyřicí a pak byly slepeny k sobě (obr. 12).



Obr. 10 Konečný model těžšího golfového míčku s olověnými broky a zalité epoxidovou pryskyřicí



Obr. 11 Golfový míček s větší hmotností s ocelovou trubičkou



Obr. 12 Model vyrobené hladké koule

Byl odvozen matematický popis řešení součinitele odporu na Reynoldsově čísle pro navrženou metodiku zavěšení – metodika posunu míčku v rovině – posun v ose  $x$  vztažený k délce zavěšení  $R$  golfového míčku nebo koule v závislosti na odporové síle (1) a tíze míčku nebo koule  $G = m g$ .

$$\frac{x}{R} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2mg}{\rho v^2 C_D A}\right)^2 + 1}}, \quad (18)$$

kde

$x$  posun v ose  $x$

$R$  délka zavěšení

$\frac{1}{2} \rho v^2 C_D A$   $F_d$  odporová síla prostředí (1)

$C_D$  součinitel odporu golfového míčku a koule

$m g$   $G$  gravitační síla,

$m$  hmotnost golfového míčku nebo koule

$A$  plocha průmětu obtékaného tělesa do roviny kolmé na vektor rychlosti nabíhajícího proudu  $A = \frac{\pi d^2}{4}$

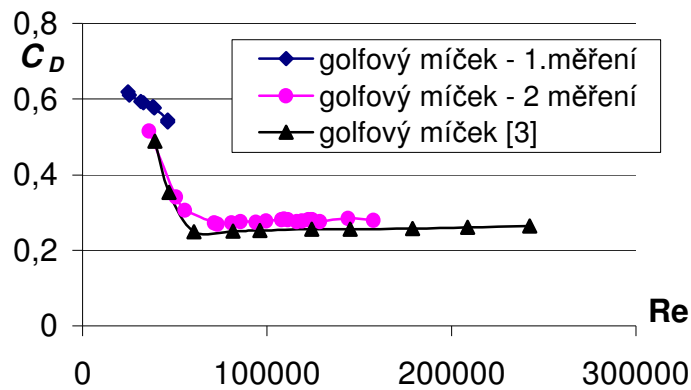
Byl určen i matematický vztah pro určení teoretického vychýlení golfového míčku nebo koule:

$$\gamma = \arctg \left( \frac{C_D \rho v^2 A}{2 m g} \right) \quad [^\circ] \quad (19)$$

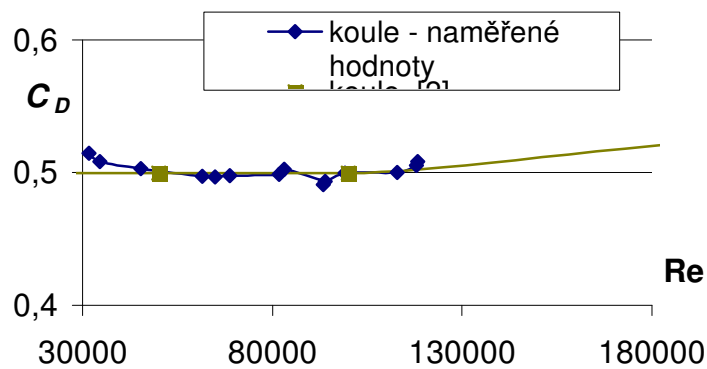
a vztah pro výpočet součinitele odporu  $C_D$  při posunu míčku v ose  $x$  v závislosti na délce zavěšení  $R$ .

$$C_D = \frac{\frac{x}{R}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} \frac{2 m g}{\rho v^2 A} \quad (20)$$

Při dvou měření v aerodynamických tunelech (Cirkulační aerodynamický tunel obr. 13) byly naměřeny a přepočítány pro golfový míček a hladkou kouli tyto hodnoty součinitele odporu  $C_D$  a Reynoldsova čísla  $Re$  (obr. 13), (obr. 14).



Obr. 13 Naměřené hodnoty součinitele odporu  $C_D$  pro golfový míček



Obr. 14 Naměřené hodnoty součinitele odporu  $C_D$  pro hladkou kouli

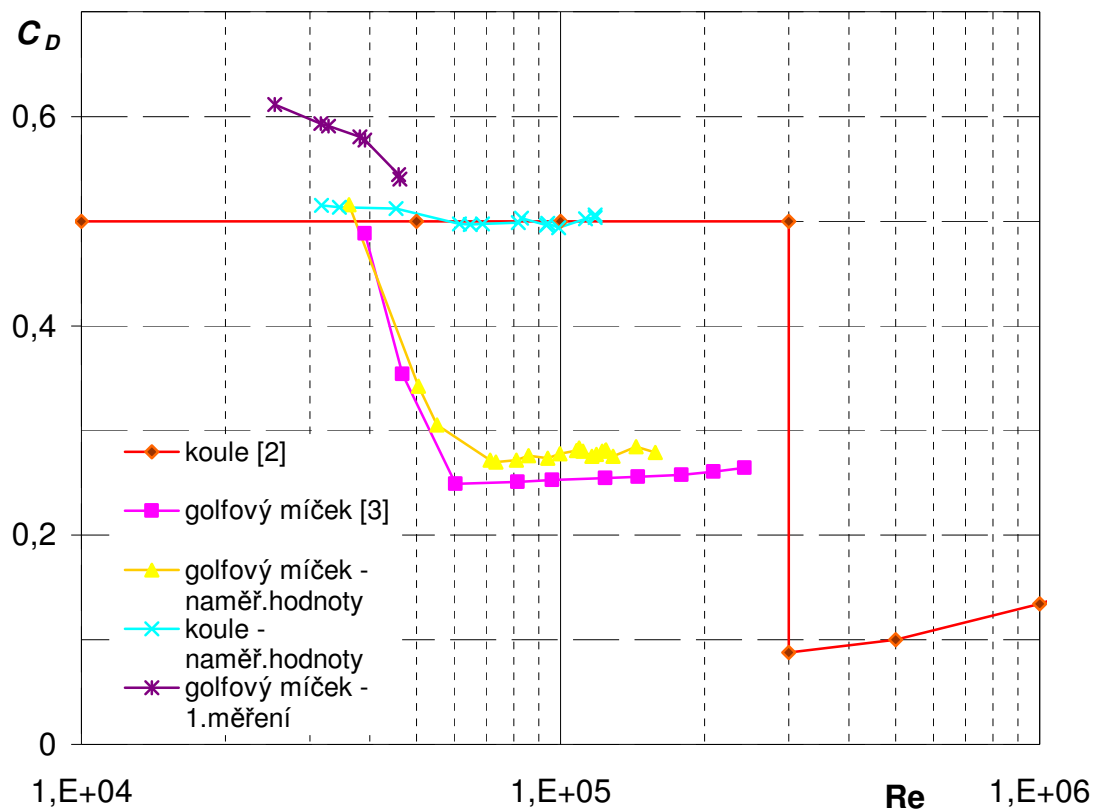
Závěry:

Byla navržena původní metodika experimentálního vyšetřování odporu golfových míčků v aerodynamickém tunelu, která je jednoduchá a je založena na zavěšení obtékaného tělesa. Prokázala se být dosti spolehlivá pro možné budoucí použití v praxi.

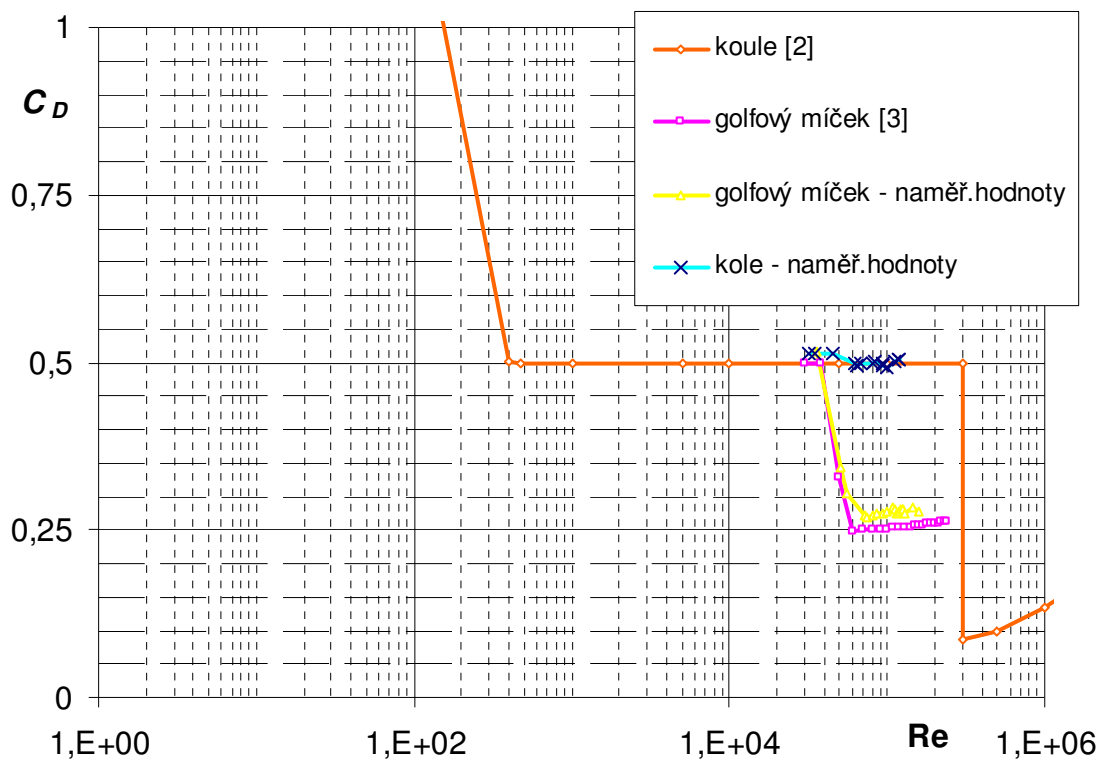
Navrženou metodikou jsme vyšetřili aerodynamický odpor  $C_D$  golfového míčku a koule při experimentu v aerodynamických tunelech (obr. 15), (obr. 16). V navržené metodice i experimentu počítáme součinitel odporu  $C_D$  pouze v závislosti na velikosti odporové síly. Zanedbáváme vliv rotace a vztlaku na vyšetřovaný součinitel odporu  $C_D$ . Vliv rotace i vztlaku by měl být dalším směrem výzkumu.

Bylo prokázáno, že golfový míček je za určitých podmínek výhodnější (má nižší součinitel odporu  $C_D$ ), součinitel odporu  $C_D$  se sníží v důsledku snížení tlakového odporu až o polovinu, než je hodnota součinitele odporu pro hladkou kouli.

Snížení je dosaženo účinkem důlků na povrchu golfového míčku, na předčasný přechod mezní vrstvy na turbulentní a tím na oddálení místa odtržení proudu od povrchu míčku.



Obr. 15 Porovnání výsledků z obou měření s literaturou v rozsahu Reynoldsových čísel pro let golfových míčků



Obr. 16 Porovnání výsledků z měření s literaturou pro celou oblast Reynoldsových čísel

#### Literatura

- [1] H. Schlichting: Boundary-Layer Theory, Mc Graw-Hill, New York, 1979
- [2] E. Achenbach: The Effects of Surface Roughness and Tunnel Blockage on the Flow past Spheres, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 65, 1974, str. 113-125
- [3] P.W. Bearman and J.K. Harvey: Golf Ball Aerodynamics, Aeronautical Quartley, May 1976, str. 112-122
- [4] R.W. Fox, A.T. McDonald : Introduction to Fluid Mechanics, John Wiley&Sons, Inc., New York, 1994
- [5] M.Miczán : Aerodynamický odpor při obtékání golfového míčku, bakalářská práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Praha, 2007

Práce byla podpořena v rámci projektu Grantové agentury AVČR č. IAA200760504 a činnosti Výzkumného centra MŠMT reg.č.1M06059 PTSE.