

ZÁKLADY KRYSTALOOPTIKY

Jiří Čtyrský

ctyroky@ufe.cz

Ústav fotoniky a elektroniky AV ČR, v.v.i.

2016

www.ufe.cz/cs/fjfi

UFE

1

Tensor a jeho transformace při rotaci souřadnicové soustavy

Vektor: $\mathbf{a} = a_x \mathbf{x}^0 + a_y \mathbf{y}^0 + a_z \mathbf{z}^0 = \sum_i a_i \mathbf{x}_i^0$, v „maticovém“ vyjádření $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Tensor 2. řádu: $\bar{\mathbf{T}} = \sum_i \sum_j T_{ij} \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0$. Dyadický součin vektorů: $\mathbf{ab} = \sum_i \sum_j a_i b_j \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0$

V maticovém vyjádření $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$.

Tensor 3. řádu: $\bar{\mathbf{r}} = \sum_i \sum_j \sum_k r_{ijk} \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0 \mathbf{x}_k^0$ Tensor 4. řádu: $\bar{\mathbf{c}} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l c_{ijkl} \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0 \mathbf{x}_k^0 \mathbf{x}_l^0$

Skalární součiny tenzorů: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \left(\sum_i \sum_j T_{ij} \mathbf{x}_i^0 \mathbf{x}_j^0 \right) \cdot \sum_k a_k \mathbf{x}_k^0 = \sum_i \sum_j \left(T_{ij} \mathbf{x}_i^0 \sum_k \mathbf{x}_j^0 \cdot \mathbf{x}_k^0 a_k \right)$
 $= \sum_i \sum_j \left(T_{ij} \mathbf{x}_i^0 \sum_k \delta_{jk} a_k \right) = \sum_i \sum_j T_{ij} a_j \mathbf{x}_i^0 = \sum_i b_i \mathbf{x}_i^0$,
 $b_i = \sum_j T_{ij} a_j$

UFE

2

Tenzor a jeho transformace při rotaci souřadnicové soustavy - II

Dvojný skalární součin: $\bar{\mathbf{T}} : \bar{\mathbf{S}} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l T_{ij} S_{kl} [\mathbf{x}_i^0 (\mathbf{x}_j^0 \cdot \mathbf{x}_k^0)] \cdot \mathbf{x}_l^0$
 $= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l T_{ij} S_{kl} \delta_{il} \delta_{jk} = \sum_i \sum_j T_{ij} S_{ji}$

Rotace souřadnic: původní soustava $\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \mathbf{x}_3^0$, pootočená $\mathbf{x}_1^{0'}, \mathbf{x}_2^{0'}, \mathbf{x}_3^{0'}$.

Matice směrových kosinů: $\alpha_{ij} = \mathbf{x}_i^{0'} \cdot \mathbf{x}_j^0 = \cos(x_i', x_j)$

Matice zpětné transformace $\beta_{ji} = \mathbf{x}_j^0 \cdot \mathbf{x}_i^{0'} = \cos(x_j, x_i') = \cos(x_i', x_j) = \alpha_{ij}$, $\alpha^{-1} = \alpha'$

Zřejmě $\mathbf{x}_i^{0'} = \sum_j (\mathbf{x}_i^{0'} \cdot \mathbf{x}_j^0) \mathbf{x}_j^0 = \sum_j \alpha_{ij} \mathbf{x}_j^0$, $\mathbf{x}_j^0 = \sum_i \beta_{ji} \mathbf{x}_i^{0'} = \sum_i \alpha_{ij} \mathbf{x}_i^{0'}$

Transformace vektoru: $\mathbf{a} = \sum_i a_i' \mathbf{x}_i^{0'} = \sum_j a_j \mathbf{x}_j^0 = \sum_j \sum_i \alpha_{ij} a_j' \mathbf{x}_i^{0'}$; $a_i' = \sum_j \alpha_{ij} a_j$

Analogicky $T_{ij}' = \sum_k \sum_l \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}$, $r_{ijk}' = \sum_l \sum_m \sum_n \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} r_{lmn}$,

$$c_{ijkl}' = \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq} c_{mnpq} \text{ atd.}$$

Sumační symbol se často vynechává, sčítá se přes opakující se symboly

Základy krystaloptiky

Šíření vln v anizotropním prostředí

Časově harmonicky proměnné pole bez zdrojů: $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \text{c.c.}\}, \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{2}\{\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \text{c.c.}\}$$

Šíření vln se řídí Maxwellovými rovnicemi $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$, $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}$,
 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Další dvě rovnice jsou přímým důsledkem prvních: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$.

Anizotropie je popsána vztahem mezi \mathbf{E} a \mathbf{D} : $\mathbf{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{E}$

Z obecných zákonů termodynamiky lze odvodit, že tenzor relativní permitivity $\boldsymbol{\epsilon}$ v bezeztrátovém prostředí je **hermitovský**; my se budeme zabývat prostředími popsanými **reálným symetrickým** $\boldsymbol{\epsilon}$.

Reálný symetrický tenzor $\boldsymbol{\varepsilon}$ je možno **diagonalizovat** rotací (volbou) souřadnicového systému; v nové souřadnicové soustavě má tenzor relativní permitivity $\boldsymbol{\varepsilon}$ **diagonální tvar**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}.$$

Z obecných vlastností symetrických matic plyne, že vlastní vektory tenzoru (*krystalografické osy* tenzoru) jsou tři a jsou **vzájemně ortogonální**.

Klasifikace anizotropních prostředí:

$\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}, n_1 \neq n_2 \neq n_3$	opticky dvojosé prostředí (nejobecnější; krystaly)
$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}, n_1 = n_2 \neq n_3$	opticky jednoosé prostředí (krystaly, polymery, ...)
$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}, n_1 = n_2 = n_3$	izotropní prostředí (většina pevných látek a kapalin)

Šíření rovinných vln v anizotropním prostředí

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{ik_0 \mathbf{l}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{H}_0 e^{ik_0 \mathbf{l}\cdot\mathbf{r}}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{k}}{k_0}, \quad |\mathbf{l}| = n^0$$

$$\text{Fázová rychlost šíření:} \quad v_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \mathbf{k}^0 = \frac{c}{|\mathbf{l}|} \mathbf{l}^0; \quad |\mathbf{l}| = n.$$

UFE

5

Vztahy mezi vektory pole

Analogicky s přechodem $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ lze snadno odvodit, že pro $e^{ik_0 \mathbf{l}\cdot\mathbf{r}} \quad \nabla \rightarrow ik_0 \mathbf{l}$

$$\text{Pak} \quad ik_0 \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 = i\omega \mu_0 \mathbf{H}_0, \quad ik_0 \mathbf{l} \times \mathbf{H}_0 = -i\omega \mathbf{D}_0, \quad \mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0.$$

$$\text{Odtud} \quad \mathbf{H}_0 = \frac{k_0}{\omega \mu_0} \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}{\mu_0} \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 = Y_0 \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0, \quad Y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}, \quad Z_0 = Y_0^{-1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

$$\mathbf{D}_0 = -\frac{k_0}{\omega} \mathbf{l} \times \mathbf{H}_0 = -\frac{1}{c} \mathbf{l} \times \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E}_0 = -\frac{k_0}{\omega \varepsilon_0} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{H}_0) = -Z_0 \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{H}_0).$$

Závěry: 1. Trojice vektorů $\mathbf{D}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{l}$ tvoří **pravotočivou ortogonální soustavu** vektorů;

2. Vektory \mathbf{E}_0 a \mathbf{H}_0 jsou vzájemně ortogonální;

3. Vektory \mathbf{D}_0 a \mathbf{E}_0 **nejsou** obecně **vzájemně rovnoběžné**;

4. Vektory $\mathbf{E}_0, \mathbf{D}_0, \mathbf{H}_0$ jsou vzájemně **soufázové**;

5. Směr šíření energie (Poyntingova vektoru) **není rovnoběžný s vlnovým vektorem**,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 = \frac{1}{2} Y_0 \mathbf{E}_0 \times (\mathbf{l} \times \mathbf{E}_0) = \frac{1}{2} Y_0 [1(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 (\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_0)].$$

$$|\mathbf{l}| = n.$$

UFE

6

„Disperzní“ (Fresnelova) rovnice pro anizotropní prostředí:

$$ik_0 \mathbf{1} \times \mathbf{H}_0 = ik_0 \mathbf{1} \times (Y_0 \mathbf{1} \times \mathbf{E}_0) = -i\omega \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0, \text{ resp. } \mathbf{1} \times (\mathbf{1} \times \mathbf{E}_0) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}.$$

To lze přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0 + \mathbf{1}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{E}_0) - (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1})\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \text{ neboli } \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1}\mathbf{1} - l^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}},$$

kde $\mathbf{a} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$ je **dyáda vektorů a, b**.

Fresnelova rovnice má explicitní tvar
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2 & \varepsilon_{xy} + l_x l_y & \varepsilon_{xz} + l_x l_z \\ \varepsilon_{xy} + l_x l_y & \varepsilon_{yy} - l_x^2 - l_z^2 & \varepsilon_{yz} + l_y l_z \\ \varepsilon_{xz} + l_x l_z & \varepsilon_{yz} + l_y l_z & \varepsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podmínkou existence netriviálního řešení \mathbf{E}_0 je nulovost determinantu

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = \det(\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1}\mathbf{1} - l^2 \mathbf{I}) = 0.$$

V osové poloze (diagonální $\boldsymbol{\varepsilon}$) je

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = (\varepsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2)(\varepsilon_{yy} - l_x^2 - l_z^2)(\varepsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2) + 2l_x^2 l_y^2 l_z^2 - l_x^2 l_z^2 (\varepsilon_{yy} - l_x^2 - l_z^2) - l_y^2 l_z^2 (\varepsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2) - l_x^2 l_y^2 (\varepsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2).$$

UFE

7

Po úpravě dostaneme

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = \varepsilon_{xx} l_x^4 + \varepsilon_{yy} l_y^4 + \varepsilon_{zz} l_z^4 + \varepsilon_{xx} l_x^2 (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{yy} l_y^2 (l_x^2 + l_z^2) + \varepsilon_{zz} l_z^2 (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (l_x^2 + l_z^2) - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}$$

$\Phi(\omega, \mathbf{l})$ je tedy **polynom 4. stupně** v každé z proměnných l_x, l_y, l_z , **symetrický** vůči inverzi os.

Řešením (např. l_z pro zadané l_x, l_y) jsou tedy 2 hodnoty $l_{z1,2}$ a 2 hodnoty $l_{z3,4} = -l_{z1,2}$.

Plocha $\Phi(\omega, \mathbf{l}) = 0$ je tedy **plochou 4. stupně**, tzv. **plochou vlnových vektorů**.

Ukážeme, že **energie se šíří kolmo k ploše vlnových vektorů**.

Směr šíření energie určuje grupová rychlost, $\mathbf{v}_g = \frac{1}{k_0} \nabla_1 \omega$, $v_{gx} = \frac{1}{k_0} \frac{\partial \omega}{\partial l_x}$ atd.

Poněvadž $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} d\omega + \nabla_1 \Phi \cdot d\mathbf{l} = 0$, $d\omega = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}} \nabla_1 \Phi \cdot d\mathbf{l}$, a tedy

$\mathbf{v}_g = -\frac{1}{k_0} \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}} \nabla_1 \Phi$. Směr šíření energie je tedy rovnoběžný s normálou k ploše vln. vektorů.

Vektory \mathbf{H}_0 i \mathbf{E}_0 jsou kolmé ke směru Poyntingova vektoru, tj. k normále plochy $\Phi = 0$.

\mathbf{H}_0 je navíc kolmý i k \mathbf{l} .

UFE

8

Alternativní popis chování vlny v anizotropním prostředí pomocí „elipsoidu indexů lomu“

Zavedeme **projektor** do podprostoru kolmého k \mathbf{l} jako tenzor $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{l}^0 \mathbf{l}^0$.

Ve složkách zřejmě platí

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - (l_x^0)^2 & -l_x^0 l_y^0 & -l_x^0 l_z^0 \\ -l_y^0 l_x^0 & 1 - (l_y^0)^2 & -l_y^0 l_z^0 \\ -l_z^0 l_x^0 & -l_z^0 l_y^0 & 1 - (l_z^0)^2 \end{pmatrix}$$

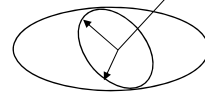
Poněvadž je \mathbf{D}_0 kolmé k \mathbf{l} , **projekcí** \mathbf{D}_0 do podprostoru kolmého k \mathbf{l} se tento vektor nemění:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{D}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{l}^0 \mathbf{l}^0) \cdot \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_0.$$

Pak se rovnice $\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{E}_0) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$ dá přepsat do tvaru ($\mathbf{l} = n \mathbf{l}^0$, $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{D}_0$)

$n^2 \mathbf{l}^0 \times \left(\mathbf{l}^0 \times \frac{1}{\varepsilon_0} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{D}_0 \right) + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}_0 = \mathbf{0}$, neboli $\left[(\mathbf{I} - \mathbf{l}^0 \mathbf{l}^0) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} - \frac{1}{n^2} \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{D}_0 = \mathbf{0}$, a tedy

$$\left[\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{P} - \frac{1}{n^2} \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{D}_0 = \mathbf{0}.$$



$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ je v podstatě **dvojrzměrný** tenzor v rovině kolmé na \mathbf{l} a rovnice je rovnicí elipsy v této rovině. Odtud plyne konstrukce elipsoidu indexů lomu a orientace vektorů \mathbf{D}_0 .

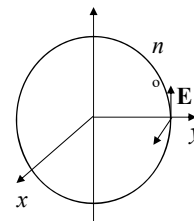
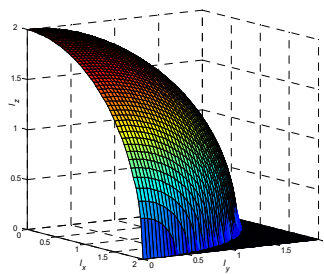
Úprava obecné disperzní relace

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, \mathbf{l}) = & \varepsilon_{xx} l_x^4 + \varepsilon_{yy} l_y^4 + \varepsilon_{zz} l_z^4 + \varepsilon_{xx} l_x^2 (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{yy} l_y^2 (l_x^2 + l_z^2) + \varepsilon_{zz} l_z^2 (l_x^2 + l_y^2) \\ & - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (l_x^2 + l_z^2) - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \end{aligned}$$

pro speciální případy:

V **izotropním prostředí** popisuje disperzní rovnice „dvojnásobně degenerovanou“ kulovou plochu.

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = \varepsilon_{xx} (\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_y^2 - l_z^2)^2 = 0.$$

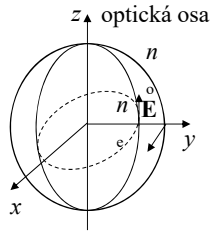


Jednoosé prostředí: $\Phi(\omega, \mathbf{l}) = (\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_y^2 - l_z^2) [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx} (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{zz} l_z^2] = 0.$

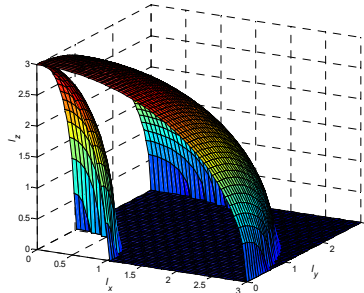
Rovnice kulové plochy (řádáná vlna): $\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_y^2 - l_z^2 = 0,$

Rotační elipsoid (mimořádná vlna): $\frac{l_x^2 + l_y^2}{\varepsilon_{zz}} + \frac{l_z^2}{\varepsilon_{xx}} = 1,$ neboli $\frac{l_x^2 + l_y^2}{n_e^2} + \frac{l_z^2}{n_o^2} = 1$

V rovině (x z) platí $n = |\mathbf{l}| = l = \frac{n_x n_z}{\sqrt{n_x^2 \sin^2 \theta + n_z^2 \cos^2 \theta}},$



kde θ je úhel vlnového vektoru \mathbf{l} od osy z .



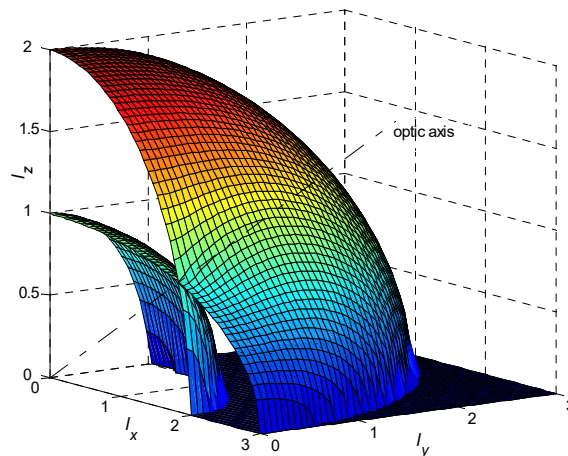
UFE

11

Dvojosé prostředí

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = \varepsilon_{xx} l_x^4 + \varepsilon_{yy} l_y^4 + \varepsilon_{zz} l_z^4 + \varepsilon_{xx} l_x^2 (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{yy} l_y^2 (l_x^2 + l_z^2) + \varepsilon_{zz} l_z^2 (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} (l_x^2 + l_z^2) - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} (l_y^2 + l_z^2) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz}$$

Plocha vlnových vektorů dvojosého prostředí s indexy lomu $n_x = 1, n_y = 2, n_z = 3$



UFE

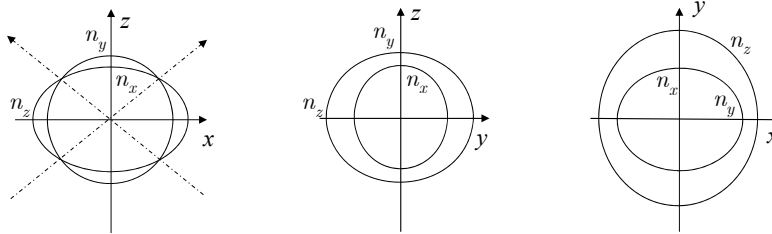
12

Pro dvojosé prostředí lze řezy plochy vlnových vektorů souřadnicovými rovinami l_x , l_y , l_z vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}
 l_x = 0: & \quad (\varepsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2) [\varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yy} l_y^2 - \varepsilon_{zz} l_z^2] = 0, \\
 l_y = 0: & \quad (\varepsilon_{yy} - l_x^2 - l_z^2) [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx} l_x^2 - \varepsilon_{zz} l_z^2] = 0, \\
 l_z = 0: & \quad (\varepsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2) [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} l_x^2 - \varepsilon_{yy} l_y^2] = 0,
 \end{aligned}$$

což je součin rovnice kružnice a rovnice elipsy.

Pro $n_x < n_y < n_z$



Prostředí s optickou aktivitou – *chirální prostředí*

Optická aktivita = stáčení roviny polarizace lineárně polarizované vlny.

Chirální prostředí je prostředí **bez translační symetrie**.

Konstituční relace pro chirální prostředí lze zavést různým způsobem. Jeden z možných je

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \frac{i}{c} \mathbf{g} \cdot \mathbf{H} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \frac{Y_0}{\omega} \mathbf{g} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \\
 \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \frac{i}{c} \mathbf{g} \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{H} - \frac{Z_0}{\omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \nabla \times \mathbf{H}
 \end{aligned}$$

\mathbf{g} je bezrozměrný symetrický tenzor 2. řádu, tzv. *chirální tenzor*

Šíření rovinné vlny v chirálním prostředí

Rovinnou vlnu popisují vztahy $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{l} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \mathbf{l} = \frac{\omega}{c} \mathbf{l} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{l}$.

Rotace dá

Dosazením do Maxwellových rovnic získáme

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = ik_0 \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, & \mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mathbf{H}_0 + i \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_0, \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= i\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = ik_0 \mathbf{l} \times \mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}; & -\mathbf{l} \times \mathbf{H}_0 &= \varepsilon \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot \mathbf{H}_0.
 \end{aligned}$$

Z prvé rovnice vypočítáme \mathbf{H}_0 : $\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_0)$.

Dosazením do druhé rovnice dostaneme

$$-\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_0) = \epsilon \cdot \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{E}_0 - i \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_0)$$

Rovnici pak můžeme upravit do tvaru

$$[\mathbf{l}^2 \mathbf{I} - \mathbf{l}\mathbf{l} + i(\mathbf{l} \times \mathbf{g} + \mathbf{g} \times \mathbf{l}) - \epsilon + \underbrace{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}}_{\text{zanedbáme, člen malý 2. řádu}}] \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}, \text{ kde } \mathbf{l} \times \mathbf{g} = \sum_{m,n=1}^3 (\mathbf{l} \times \mathbf{x}_m^0) \mathbf{x}_n^0 g_{mn},$$

$$\mathbf{g} \times \mathbf{l} = \sum_{m,n=1}^3 \mathbf{x}_m^0 (\mathbf{x}_n^0 \times \mathbf{l}) g_{mn}.$$

V souřadnicové soustavě, v níž je ϵ diagonální, má rovnice tvar

$$\begin{bmatrix} l_y^2 + l_z^2 - \epsilon_{xx} & -l_y l_z + i[(g_{xx} + g_{yy})l_z - g_{xz}l_x - g_{yz}l_y] & -l_x l_z - i[(g_{xx} + g_{zz})l_y - g_{yx}l_x - g_{yz}l_z] \\ -l_x l_y - i[(g_{xx} + g_{yy})l_z - g_{xz}l_x - g_{yz}l_y] & l_x^2 + l_z^2 - \epsilon_{yy} & -l_y l_z - i[(g_{yy} + g_{zz})l_x - g_{xy}l_y - g_{xz}l_z] \\ -l_x l_z + i[(g_{xx} + g_{zz})l_y - g_{yx}l_x - g_{yz}l_z] & -l_y l_z + i[(g_{yy} + g_{zz})l_x - g_{xy}l_y - g_{xz}l_z] & l_x^2 + l_y^2 - \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Disperzní rovnice pro rovinnou vlnu v chirálním prostředí:

$$\det \mathbf{t} \cdot \mathbf{l} = 0 \dots \text{plocha 4. stupně v souřadnicích } (l_x, l_y, l_z).$$

Izotropní chirální prostředí

$$\mathbf{g} = g\mathbf{l}, \quad \epsilon = \epsilon\mathbf{I}; \quad \text{volme } \mathbf{l} = l_z \mathbf{z}^0 = l_z \mathbf{x}_3^0.$$

Pak disperzní rovnice přejde na tvar

Poslední rovnice má řešení $E_z = 0$.

$$\begin{pmatrix} l_z^2 - \epsilon & -2i g l_z & 0 \\ 2i g l_z & l_z^2 - \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Další dvě mají netriviální řešení, pokud

$$(l_z^2 - \epsilon)^2 - 4g^2 l_z^2 = 0,$$

Poněvadž prakticky vždy $g \ll \epsilon$,

získáme obecný vztah

$$l_z = \pm \sqrt{\epsilon + g^2} \pm g \approx \pm \sqrt{\epsilon} \pm g = \pm n \pm g; \quad \text{pro amplitudy pole získáme}$$

$$\frac{E_y}{E_x} \approx 2i \frac{g l_z}{l_z^2 - \epsilon} \approx \pm i.$$

Vlastní vlny izotropního chirálního prostředí jsou tedy *kruhově polarizované* a šíří se s indexem lomu $n \pm g$.

V izotropním prostředí lze za osu z zvolit libovolný směr;

plocha vlnových vektorů se tedy rozpadá na *dvě kulové plochy* o poloměrech $n \pm g$.

Stáčení roviny polarizace v izotropním chirálním prostředí

Je-li v místě $z = 0$ inzenzita elektrického pole lineárně polarizovaná, $\mathbf{E}(z = 0) = E_0 \mathbf{x}^0$, je ji možno vyjádřit jako superpozici dvou *kruhově polarizovaných vln*,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^+ e^{ik_0 l^+ z} + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0^- e^{ik_0 l^- z}, \text{ kde } \mathbf{E}_0^+ = E_0(\mathbf{x}^0 + i\mathbf{y}^0), \quad \mathbf{E}_0^- = E_0(\mathbf{x}^0 - i\mathbf{y}^0), \quad l^\pm = n \pm g.$$

$$\text{Pak } E_x = \frac{1}{2} E_0 (e^{ik_0 l^+ z} + e^{ik_0 l^- z}) = E_0 e^{ik_0 (l^+ + l^-) z / 2} \cos k_0 \frac{\Delta l}{2} z,$$

$$E_y = \frac{i}{2} E_0 (e^{ik_0 l^+ z} - e^{ik_0 l^- z}) = -E_0 e^{ik_0 (l^+ + l^-) z / 2} \sin k_0 \frac{\Delta l}{2} z.$$

Při šíření na vzdálenost L se polarizace pootočí o úhel $\varphi = k_0 \frac{\Delta l}{2} L = k_0 g L$.

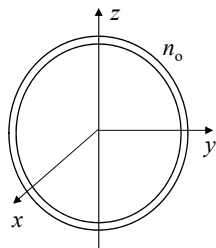
Chirální parametr g je tedy určen *specifickou stáčitostí* polarizace, $g = \frac{1}{k_0} \frac{\varphi}{L}$.

Specifická stáčitost a chirální parametr některých materiálů na vln. délce 632,8 nm:

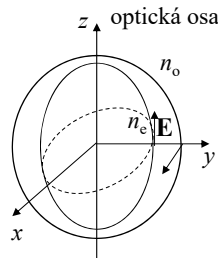
materiál	φ/L	g
křemen SiO_2	$22^\circ/\text{mm}$	3.85×10^{-5}
paratelurit TeO_2	$87^\circ/\text{mm}$	1.52×10^{-4}
$\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$	$20^\circ/\text{mm}$	3.5×10^{-5}

Vliv optické aktivity prostředí na tvar ploch vlnových vektorů

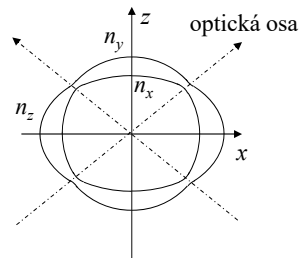
a) Izotropní prostředí



b) Jednoosé prostředí



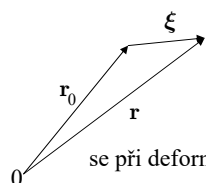
c) Dvojosé prostředí



Základy teorie šíření akustických vln v elastickém prostředí

Šíření akustické vlny v elastickém prostředí

(B.A.Auld: Acoustic fields and waves in solids I, II, J. Wiley 1973)



Deformace tělesa $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t)$
 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t)$ (elastická) výchylka bodu \mathbf{r}_0
 Element vzdálenosti mezi dvěma body vzdálenými o $d\mathbf{r}_0$,
 se při deformaci změní na $\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}_0 - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t) = d\mathbf{r}_0 + d\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t)$,

$$\text{kde } d\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t) = \sum_n \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_n} dx_n = \sum_{m,n,p} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} \underbrace{\mathbf{x}_m^0 \cdot \mathbf{x}_n^0 \cdot \mathbf{x}_p^0}_{\delta_{np}} dx_p = \nabla \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}_0, t) \cdot d\mathbf{r}_0,$$

$$\text{kde } \nabla \boldsymbol{\xi} = \sum_{m,n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} \mathbf{x}_m^0 \mathbf{x}_n^0 \text{ je gradient výchylky (dyáda).}$$

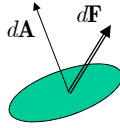
Pokud $d\boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{r}_0 = 0$, nezmění se velikost $d\mathbf{r}_0$. Pak nejde o deformaci, ale o pootočení tělesa:

$$d\boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{r}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{r}_0 = \sum_{m,n} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} dx_m dx_n = \frac{1}{2} \sum_{m,n} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_m} \right) dx_m dx_n = 0$$

Tenzor deformace se proto zavádí jako symetrická část tenzoru gradientu výchylky,

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{\xi} + (\nabla \boldsymbol{\xi})^T); \quad S_{mn} = S_{nm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_m} \right)$$

Silové působení v pevných látkách

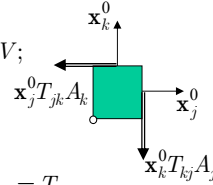


Síla působící na element plochy dA je $d\mathbf{F}$: $d\mathbf{F} = \bar{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{A}$

Síla působící na element *objemu* je

$$d\mathbf{F} = \iiint_{dA} \bar{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{A} = \int_{dV} \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} dV = \sum_j \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} \mathbf{x}_j^0 dV;$$

\mathbf{T} ... tenzor pnutí pevné látky



Poněvadž element pevné látky se „neotáčí“, na element tělesa *nepůsobí moment* síly, tenzor pnutí je tedy *symetrický*:

$$T_{jk} = T_{kj}$$

„Hookův zákon“: $T_{jk} = \sum_{lm} c_{jklm} S_{lm}$ Pro malé deformace platí **lineární vztah** mezi \mathbf{T} a \mathbf{S}

Ze symetrie \mathbf{T} a \mathbf{S} vyplývá $c_{jklm} = c_{kjml} = c_{jkm l}$

Lze ukázat, že s deformací je spojena hustota energie

$$dU = \mathbf{T} : d\mathbf{S} = \sum_{jk} T_{jk} dS_{jk} = \sum_{jklm} c_{jklm} dS_{jk} S_{lm} = \sum_{jklm} c_{jklm} S_{jk} dS_{lm}, \text{ a tedy } c_{jklm} = c_{lmjk}$$

Symetrie umožňuje zavést zkrácené značení $c_{\alpha\beta} = c_{jklm}$, $T_\alpha = T_{jk}$, $S_\alpha = \begin{cases} S_{jj} \\ 2S_{jk}, j \neq k \end{cases}$
(Voigtův zápis) $\alpha = 1, 2, \dots, 6$

Dynamics of elastic media; propagation of acoustic waves

The analogue of Newton's equation $\mathbf{F} = m \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ for an element of a medium

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho \boldsymbol{\xi} dV = \iiint_A \mathbf{T} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV, \text{ a tedy } \rho \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} = \sum_k \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k}. \text{ Substituting for } \mathbf{T}$$

and considering the symmetry of \mathbf{S} we obtain the wave equation $\rho \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} = \sum_{klm} c_{jklm} \frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x_k \partial x_l}$.

Acoustic plane wave: $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)}$, $\mathbf{K} = \frac{\Omega}{v_a} \mathbf{n}^0$, $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$. By substitution we get

$$\sum_m \left(\sum_{kl} c_{jklm} n_k n_l - \rho v_a^2 \delta_{jm} \right) \xi_{0m} = 0 \dots \text{system of 3 linear equations for 3 components of } \boldsymbol{\xi}_0.$$

In other words: an eigenvalue task for eigenvalues ρv_a^2 and eigenvectors $\boldsymbol{\xi}_0$ of a real symmetric

matrix with elements $\sum_{kl} c_{jklm} n_k n_l \Rightarrow$ 3 eigenvalues and 3 mutually orthogonal eigenvectors.

For each direction \mathbf{n}^0 there exist 3 acoustic waves mutually orthogonally “polarized”, propagating with different phase velocities.

Některé vlastnosti akustických vln

Z energetické bilance elastických kmitů lze odvodit výraz pro akustický Poyntingův vektor

$$\mathbf{\Pi} = -\mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}$$

Grupová rychlost šíření \mathbf{v}_g je rovnoběžná s $\mathbf{\Pi}$, přičemž platí $\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}^0 = v_a \Rightarrow |\mathbf{v}_g| \geq v_a$ (!!!)

V izotropním prostředí $c_{11} = c_{22} = c_{33}$, $c_{12} = c_{13} = c_{23}$, $c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$

Volme pro jednoduchost $\mathbf{n}^0 = \mathbf{z}^0$. Pak

$$\begin{pmatrix} c_{44} - \rho v_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} - \rho v_a^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} - \rho v_a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{a\parallel} = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \quad v_{a\perp} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} < v_{a\parallel}$$

Normovaný akustický vlnový vektor \mathbf{l}_a , $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 e^{i\Omega(\mathbf{l}_a \cdot \mathbf{r} - t)}$, $\sum_m \left(\sum_{kl} c_{jklm} l_k l_l - \rho \delta_{jm} \right) \xi_{0m} = 0$,

$\det \left[\left(\sum_{kl} c_{jklm} l_k l_l - \rho \delta_{jm} \right) \right] = 0$ je rovnice plochy vlnových vektorů (6. stupně!)

Teoretické základy akustooptické interakce

Elastická deformace $\bar{\mathcal{S}}$ způsobí změnu tenzoru (elektrické) impermitivity $\bar{\eta} = \bar{\varepsilon}^{-1}$,

$$\Delta \bar{\eta} = \bar{\mathcal{P}} : \bar{\mathcal{S}}, \quad \Delta \bar{\varepsilon} = -\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\mathcal{P}} : \bar{\mathcal{S}} \cdot \bar{\varepsilon}, \quad \text{kde } \bar{\mathcal{P}} \text{ je tenzor fotoelastických konstant.}$$

Poněvadž $\bar{\mathcal{S}}$ i $\bar{\varepsilon}$ jsou symetrické tenzory 2. řádu, musí být $\bar{\mathcal{P}}$ tenzor 4. řádu, *symetrický vůči záměně prvních dvou a/nebo druhých dvou indexů*, $P_{ijkl} = P_{jikl} = P_{ijlk} = P_{jilk}$.

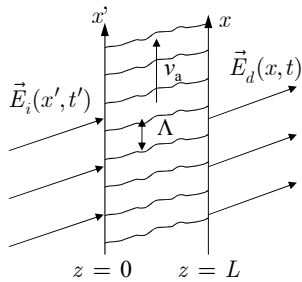
Pokud se v materiálním prostředí šíří rovinná akustická vlna s vektorem elastické výchylky

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_0 \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r} - i\Omega t), \text{ dojde k modulaci permitivity dané reálným výrazem}$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\varepsilon}(\vec{r}, t) &= -\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\mathcal{P}} : \left\{ \frac{1}{2} \nabla \left(\vec{\xi}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t)} \right) + c.c. \right\} \cdot \bar{\varepsilon} \\ &= \frac{\Omega}{v_a} \bar{\varepsilon} \cdot \bar{\mathcal{P}} : \vec{n} \vec{\xi}_0 \cdot \bar{\varepsilon} \sin(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t) = \Delta \bar{\varepsilon} \sin(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t). \end{aligned}$$

Modulace permitivity způsobená akustickou vlnou má tedy tvar rovinné postupné vlny.

Difrakce rovinné vlny na postupné akustické vlně v izotropním prostředí



V lineárním prostředí musí obecně platit

$$\vec{E}_d(x, z = L, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \vec{T}(x, x', t, t') \cdot \vec{E}(x', z = 0, t') dt' dx'$$

Akustická vlna je periodická v souř. x s periodou Λ a v čase s periodou Ω a šíří se rychlostí v_a .

$$\vec{T}(x, x', t, t') = \sum \vec{T}_q(x - x', t - t') e^{iq(K_x x - \Omega t)}$$

Pro rovinnou dopadající vlnu $\vec{E}_i(x', z = 0, t') = \vec{E}_0 e^{i(k_{ix} x' - \omega_i t')}$ má difraktované pole tvar

$$\begin{aligned} \vec{E}_d(x, z = L, t) &= \sum_q \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \vec{T}_q(\xi, \tau) \cdot \vec{E}_0 e^{-i(k_{ix} \xi - \omega_i \tau)} d\xi d\tau e^{i[(k_{ix} + qK_x)x - (\omega_i + q\Omega)t]} \\ &= \sum_q \vec{E}_q e^{i[(k_{ix} + qK_x)x - (\omega_i + q\Omega)t]} \end{aligned}$$

na výstupu je tedy superpozice rovinných vln, jejichž x -ové složky vlnových vektorů jsou

$$k_{d,qx} = k_{ix} + qK_x.$$

Elastooptický a fotostrikční efekt

Předchozí analýza brala v úvahu pouze působení akustické vlny na optické záření a nikoli naopak.

Celková změna vnitřní energie objemové jednotky látky při současném působení

elektrického pole a elastické deformace je $dU = \vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{T} : d\vec{S}$.

$$\text{Zřejmě } \vec{D} = \epsilon_0 (\bar{\epsilon} + \Delta\bar{\epsilon}) \cdot \vec{E} = \epsilon_0 (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon} \cdot \bar{p} : \bar{S} \cdot \bar{\epsilon}) \cdot \vec{E}.$$

Zavedeme nový termodynamický potenciál $V = U - \vec{E} \cdot \vec{D}$, $dV = -\vec{D} \cdot d\vec{E} + \vec{T} : d\vec{S}$.

V musí tedy mít nezávislé proměnné \vec{E} a \vec{S} . Pak ale

$$\frac{\partial V}{\partial E_j \partial S_{lm}} = -\frac{\partial D_j}{\partial S_{lm}} = \epsilon_0 \epsilon_{jr} \epsilon_{ks} p_{rslm} E_k = \frac{\partial T_{lm}}{\partial E_j}; \quad \text{integraci získáme}$$

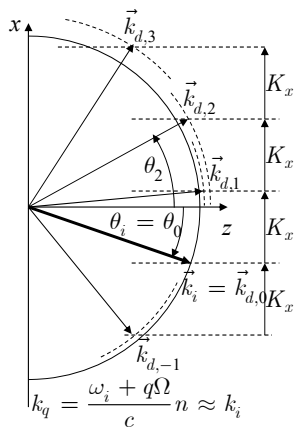
$$T_{rs} = \underbrace{c_{rslm} S_{lm}}_{\text{elastická deformace}} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{jl} \epsilon_{km} p_{lmrs} E_j E_k \quad \text{fotostrikce (stimulovaný Brillouinův jev)}$$

$\epsilon \approx 2$, $p \approx 0.2$, $c \approx 10^{10} \div 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$. Pro typické hodnoty $S \approx 10^{-6}$, $E \approx 10^6 \text{ V.m}^{-1}$

je 1. člen řádu 10^4 až 10^5 , druhý řádu 10^{-1} až 10^0 ; je tedy zanedbatelný.

Konstrukce difraktovaných vln na výstupu ze sloupce akustické vlny

Diagram vlnových vektorů



Frekvenční posuv difraktovaných vln:

$$\omega_{d,q} = \omega_i + q\Omega \approx \omega_i$$

Vlnové vektory difraktovaných vln:

$$k_{d,qx} = k_{ix} + qK_x, \quad k_{d,qz} = \sqrt{k_q^2 - (k_{ix} + qK_x)^2} \approx \sqrt{k_0^2 n^2 - (k_{ix} + qK_x)^2}$$

Výstupní úhly difraktovaných vln

$$\sin \theta_q \approx \sin \theta_0 + q \frac{K_x}{k_0 n} = \sin \theta_0 + q \frac{\lambda}{n \Lambda}$$

Účinnost AO interakce v přiblížení teorie vázaných vln

Vlnová rovnice pro intenzitu elektrického pole

$$\nabla \nabla \cdot \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\vec{\epsilon}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)]; \text{ pro } \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{y}^0 E(x, z, t) \text{ platí}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(x, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ [n^2(x, t)] E(x, z, t) \} = 0;$$

Výchozí předpoklady teorie vázaných vln:

$$E(x, z, t) \approx \sum_{q=-\infty}^{\infty} E_q(z) e^{i[(k_{ix} + qK)x + k_{qz}z - (\omega_i + q\Omega)t]}$$

$$E_q(z) \text{ je pomalu proměnná komplexní amplituda, } \left| \frac{\partial^2 E_q(z)}{\partial z^2} \right| \ll k^2 E_q(z), \quad k \frac{\partial E_q(z)}{\partial z}$$

$$n(x, t) = \sqrt{n^2 + \Delta \epsilon} \sin(Kx - \Omega t) \approx n + n_1 \sin(Kx - \Omega t),$$

$$n_1 \approx \frac{\Delta \epsilon}{2n} \approx -\frac{1}{2} n^3 p S_0 \ll n.$$

Zavedeme parametry

$$\Delta\varphi = \frac{k_0 n_1 L}{\cos\theta_i}, \quad Q = \frac{2\pi\lambda L}{n\Lambda^2 \cos\theta_i}, \quad \alpha = -\frac{k}{K} \sin\theta_i = -\frac{n\Lambda}{\lambda} \sin\theta_i.$$

Dosazením rozvoje do vlnové rovnice dostaneme po zanedbání malých členů vyšších řádů soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\frac{\partial E_q(z)}{\partial z} = \frac{\Delta\varphi}{2L} (E_{q+1}(z) - E_{q-1}(z)) + \frac{iqQ}{2L} (2\alpha - q) E_q(z), \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pro přehlednost soustavu rozepíšme:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \vdots \\ E_{-1} \\ E_0 \\ E_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(2\alpha + 2) \frac{Q}{2L} & \frac{\Delta\varphi}{2L} & 0 & \dots & \dots \\ -\frac{\Delta\varphi}{2L} & -i(2\alpha + 1) \frac{Q}{2L} & \frac{\Delta\varphi}{2L} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\Delta\varphi}{2L} & -i2\alpha \frac{Q}{2L} & \frac{\Delta\varphi}{2L} & 0 \\ \dots & 0 & -\frac{\Delta\varphi}{2L} & -i(2\alpha - 1) \frac{Q}{2L} & \frac{\Delta\varphi}{2L} \\ \dots & \dots & 0 & -\frac{\Delta\varphi}{2L} & -i(2\alpha - 2) \frac{Q}{2L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ E_{-1} \\ E_0 \\ E_1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Ramanův-Nathův a Braggův režim difrakce

Ze soustavy rovnic vyplývá, že jsou vzájemně vázány **vždy jen sousední difrakční řády**. To je důsledek *čistě sinusového* charakteru modulace.

Diferenciální rovnici pro E_q je možné v limitních případech $Q \ll 1$ a $Q \gg 1$ řešit analyticky:

1. $Q \ll 1$ – Ramanův – Nathův režim
2. $Q \gg 1$ – Braggův režim

$Q \ll 1$: **Ramanův-Nathův režim**. Pro $Q = 0$ má soustava rovnic analytické řešení

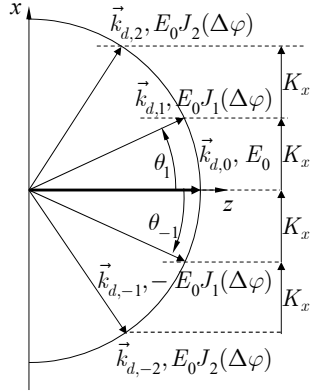
$$E_q(L) = E_0 J_q(\Delta\varphi), \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

To je možno fyzikálně snadno interpretovat jako *fázovou modulaci dopadající vlny na sloupce akustické vlny*:

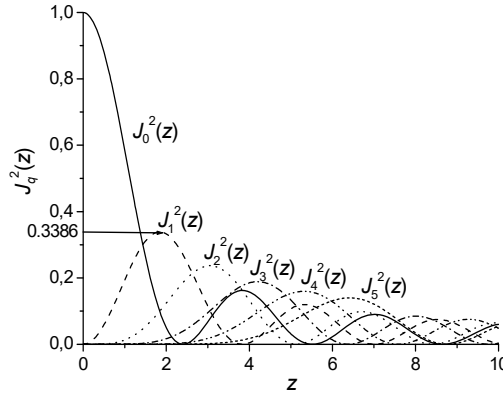
$$E(x, L, t) = E_0 e^{i(k_{ix} - \omega_i t)} e^{i\Delta\varphi \sin(Kx - \Omega t)} = E_0 \sum_q J_q(\Delta\varphi) e^{i[(k_{ix} + qK)x - i(\omega_i + q\Omega)t]}.$$

Přesnější řešení soustavy s $Q \ll 1$, $q \ll \alpha$ dá $E_q(L) = E_0 J_q \left[\Delta\varphi \frac{\sin(Q\alpha/2)}{Q\alpha/2} \right]$.

Ramanův-Nathův režim:



Difrakce do mnoha řádů, difrakční účinnost v jednotlivých řádech je dána kvadráty Besselovy funkce $J_n^2(\Delta\varphi)$, podobně jako u tenkého amplitudového hologramu se sinusovou modulací amplitudové propustnosti.



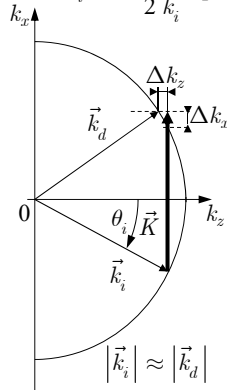
Braggův režim

Braggův režim nastává pro $Q \gg 1$, prakticky pro $Q \geq 10$.

Pak lze zanedbat vazbu do ostatních řádů kromě případu, kdy $q \approx 2\alpha$, tj. pro $q = \pm 1$

$$\sin \theta_i \approx \pm \frac{1}{2} \frac{K}{k_i} \quad \text{pro } q = \pm 1. \quad \text{Pak } \frac{Q}{2}(1 - 2\alpha) = \frac{2\pi\lambda L}{2n\Lambda^2 \cos \theta_i} (1 + 2 \frac{n\Lambda}{\lambda} \sin \theta_i) =$$

$$= \frac{KL}{2k \cos \theta_i} (K + 2k \sin \theta_i) \cong L \tan \theta_i \Delta k_x = \Delta k_z L.$$



Rovnice vázaných vln jsou pak

$$\frac{dE_{d,0}}{dz} = \frac{\Delta\varphi}{2L} E_{d,1},$$

$$\frac{dE_{d,1}}{dz} = -\frac{\Delta\varphi}{2L} E_{d,0} + i \frac{\Delta k_z}{2L} E_{d,1};$$

Řešení s počáteční podmínkou $E_{d,0}(0) = E_0$, $E_{d,1}(0) = 0$ je

$$E_{d,1}(L) = E_0 \frac{\Delta\varphi}{2\sigma} e^{-i \frac{\Delta k_z L}{2}} \sin \sigma, \quad \text{kde } \sigma = \sqrt{\left(\frac{\Delta k_z}{2} L\right)^2 + \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2}.$$

$$\text{Tedy } |E_{d,1}(L)|^2 = E_0^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2\sigma}\right)^2 \sin^2 \sigma.$$

Braggův režim

Difrakční účinnost

Fázový synchronismus:

$$\eta = \left| \frac{E_{d,1}(L)}{E_{d,0}(0)} \right|^2 = \left(\frac{\Delta\varphi}{2\sigma} \right)^2 \sin^2 \sigma \quad \Delta k_z L \approx 0, \text{ t.j. } \vec{k}_i \pm \vec{K} \approx \vec{k}_d$$

(podmínka zachování kvaziimpulsu).

Platí $\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{2\pi n_1}{2\lambda \cos \theta_i} L \approx \frac{\pi}{2\lambda} n^3 p S_0 L$. S_0 můžeme vyjádřit jako $S_0 = \sqrt{\frac{2\Pi}{\rho v_a^3}}$,

kde $\Pi = \frac{1}{2} \rho v_a^3 S_0^2$ [W.m⁻²] je hustota akustického výkonu. Pak

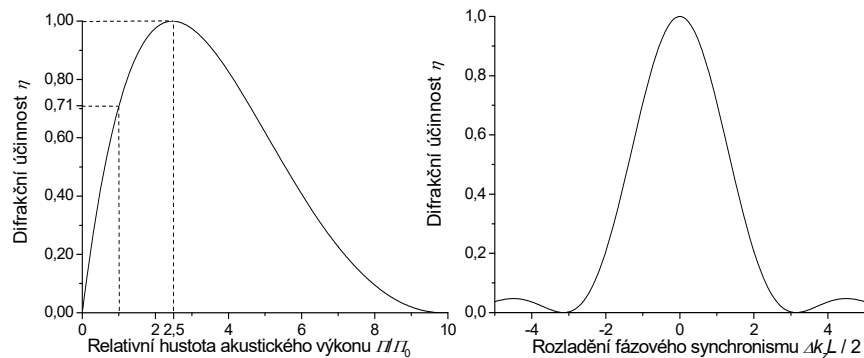
$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2\lambda} n^3 p S_0 L = \sqrt{\frac{n^6 p^2 \pi^2 L^2}{\rho v_a^3 2\lambda^2}} \Pi = \sqrt{\frac{\Pi}{\Pi_0}}, \text{ kde } \Pi_0 = \frac{2\lambda^2}{\pi^2 L^2 M_2}, \text{ a}$$

$$M_2 = \frac{p^2 n^6}{\rho v^3} \text{ je činitel akustooptické kvality materiálu.}$$

Při fázovém synchronismu $\Delta k_z L = 0$ je difrakční účinnost $\eta = \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = \sin^2 \sqrt{\frac{\Pi}{\Pi_0}}$,

pro $\eta \leq 0.7$ lze v dobrém přiblížení psát $\eta \approx \frac{\Pi}{\Pi_0} \left(\frac{\sin(\Delta k_z L / 2)}{\Delta k_z L / 2} \right)^2$.

Účinnost difrakce v Braggově režimu



Při hustotě akustického výkonu $\Pi = \Pi_0$ dosahuje účinnost 71%;

100% účinnosti dosáhneme až při $\Pi = 2.47 \Pi_0$.

Typická účinnost akustooptických prvků pracujících v Braggově režimu bývá proto 70–90%, vyšší spíš jen výjimečně.

Technické aplikace akustooptických prvků

Dělení podle účelu:

1. Deflektory laserového svazku: úhel vychýlení je funkcí frekvence
2. Modulátory laserového svazku: účinnost závisí na akustickém výkonu
3. Akustooptické laditelné filtry: fázový synchronismus je spektrálně citlivý
4. Akustooptické prvky pro zpracování (elektronických) signálů

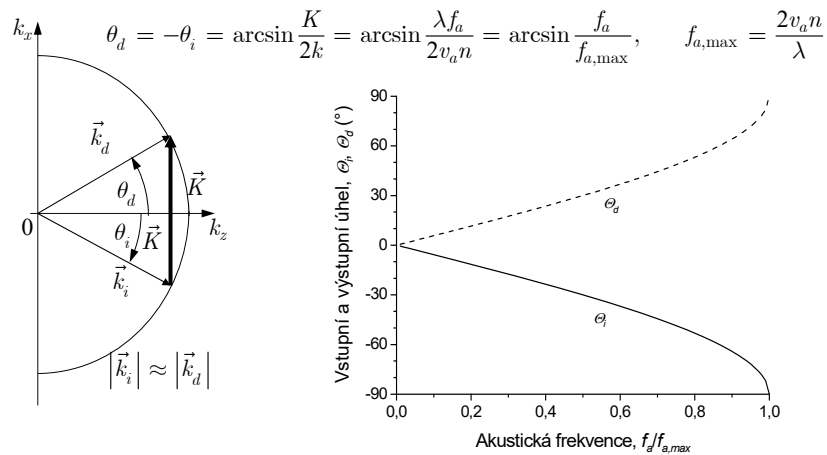
Dělení podle typu interakce

1. Prvky využívající izotropní AO interakce (v opticky izotropním prostředí)
 - a) se soufázovým akustickým měničem
 - b) s fázovanou řadou měničů (rovinná řada, stupňovitá řada)
2. Prvky využívající anizotropní interakce (v opticky anizotropním a opticky aktivním prostředí)
3. Prvky využívající difrakce na stojaté akustické vlně

Dělení podle konstrukce

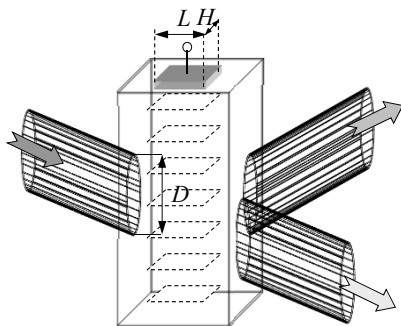
1. Objemové prvky
2. Vlnovodné prvky (integrovane-optické)

Akustooptická interakce v Braggově režimu v izotropním prostředí



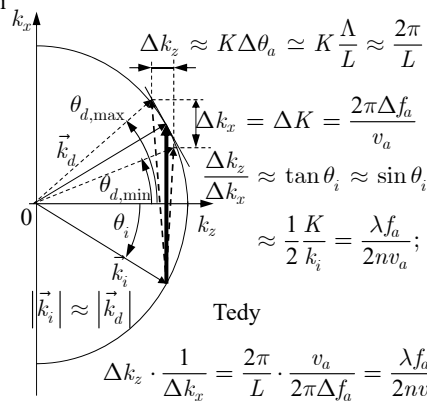
Akustooptické deflektory laserového svazku: vychylování změnou frekvence f_a

AO vychylování v izotropním prostředí



$$\sin \theta_d \approx \sin \theta_i + \frac{K}{k}; \quad \theta_d \approx \theta_i + \frac{\lambda f_a}{v_a};$$

Úhel vychýlení je přibližně lineárně závislý na frekvenci akustické vlny.



Tedy

$$\Delta k_z \cdot \frac{1}{\Delta k_x} = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{v_a}{2\pi \Delta f_a} = \frac{\lambda f_a}{2nv_a};$$

$$\text{Úhel rozmitání } \Delta \theta_d \approx \frac{\lambda}{v_a} \Delta f_a.$$

Počet rozlišitelných bodů deflektoru:

$$N = \frac{\Delta \theta_d}{\Delta \theta_{opt}} \approx \frac{\lambda \Delta f_a}{v_a} \frac{D}{\lambda} = \frac{D}{v_a} \Delta f_a = \tau \cdot \Delta f_a, \quad \text{tedy } \boxed{N = \tau \cdot \Delta f_a}$$

Počet rozlišitelných bodů deflektoru je dán součinem časové konstanty a frekvenčního zdvihu

Frekvenční zdvih je omezen maximálním přípustným narušením fázového synchronismu:

$$\Delta f_a \leq \frac{2nv_a^2}{\lambda f_a L} \implies \text{délka oblasti AO interakce by měla být co nejmenší}$$

Avšak: deflektor musí pracovat v Braggově režimu, jinak má malou difrakční účinnost:

$$Q = \frac{2\pi \lambda L}{n\Lambda^2 \cos \theta_i} \approx \frac{2\pi \lambda L f_a^2}{nv_a^2} \geq 4\pi \implies L \text{ musí být dostatečně velké. Odtud plyne podmínka}$$

$$\frac{2nv_a^2}{\lambda f_a^2} = L_{\min} \leq L \leq L_{\max} = \frac{2nv_a^2}{\lambda f_a \Delta f_a} \text{ pro délku interakční oblasti. Tedy } \Delta f_a \leq f_a.$$

Ovládací akustický výkon deflektoru

$$P_a = L \cdot H \cdot \Pi_0 = \frac{2\lambda^2}{\pi^2 M_2} \cdot \frac{H}{L} \implies \text{pro malý výkon musí být poměr } H/L \text{ co nejmenší.}$$

V každém AO materiálu se akustická vlna šíří s útlumem, $\alpha \approx \Gamma f_a^2$.

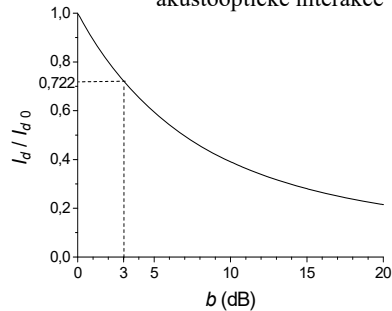
Difrakce na tlumené akustické vlně:

1. pokles účinnosti difrakce vlivem útlumu, $E_d(x) \sim \bar{S}(x) = \bar{S}_0 e^{-\alpha x}$, tedy
2. zvětšení úhlové divergence difraktovaného svazku $E_d(x) \approx E_{d,0} e^{-\alpha x}$, vlivem nehomogenního rozložení amplitudy.

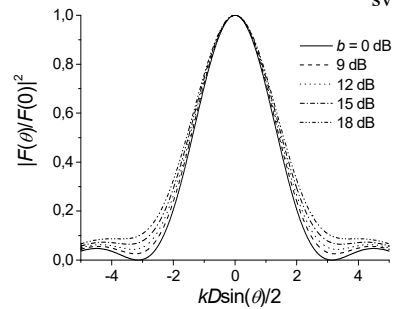
$$I_d = I_{d,0} \int_0^D e^{-2\alpha x} dx = I_{d,0} \frac{1 - e^{-2\alpha D}}{2\alpha D}, \quad e^{-2\alpha D} = 10^{-b/10}; \quad b = 20\alpha D / \ln 10, \\ 2\alpha D = b \ln 10 / 10.$$

$$|F(\theta)|^2 = \left| \int_0^D e^{-\alpha x} e^{-ikx \sin \theta} dx \right|^2 = \frac{1 + e^{-2\alpha D} - 2e^{-\alpha D} \cos(kD \sin \theta)}{(\alpha D)^2 + (kD \sin \theta)^2}.$$

Vliv útlumu akustické vlny na účinnost akustooptické interakce



Vliv útlumu na divergenci difraktovaného svazku



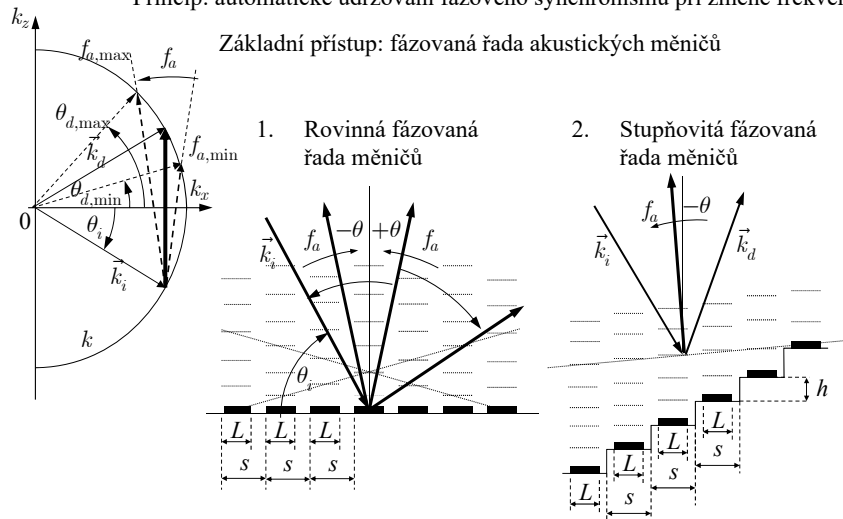
Technické řešení pro velký počet rozlišitelných bodů:

1. Silně eliptický optický svazek s velkým poměrem D/H (složitá optická soustava vyžadující soustavu hranolů nebo válcové čočky)
2. Použití materiálu s malou akustickou rychlostí, ale malým akustickým útlumem (??)
3. Zajištění účinné generace akustické vlny ve velkém frekvenčním pásmu

Rozšíření pásma AO interakce: deflektory s řízeným akustickým svazkem

Princip: automatické udržování fázového synchronismu při změně frekvence

Základní přístup: fázovaná řada akustických měničů



UFE

41

Difrakční účinnost v přiblížení malých účinností (Gordonova-Dixonova metoda)

$$\eta \approx \frac{\pi^2}{2\lambda^2} M_2 \Pi_a L^2 \underbrace{\left(\frac{\sin(K\theta L/2)}{K\theta L/2} \right)^2}_{\text{vyzařovací charakteristika segmentu měniče}} \underbrace{\left(\frac{\sin[\frac{1}{2} N_m (K\theta s - \varphi)]}{\frac{1}{2} N_m (K\theta s - \varphi)} \right)^2}_{\text{vyzařovací charakteristika fázované řady měničů}}$$

$$\theta = \theta_i + \frac{\lambda f_a}{2n v_a} = \frac{\lambda}{2n v_a} (f_a - f_{a0}) \quad \text{úhel difrakce (předpokládáme malé úhly, } \sin \theta \approx \theta)$$

φ je relativní fázový posuv mezi sousedními segmenty,
pro rovinnou řadu nejčastěji $\varphi = \pi$, pro stupňovitou řadu $\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi f_a h}{v_a}$

Směr „difrakčních maxim“ $\pm\theta = \pm \frac{v_a}{2s f_a}$ pro rovinnou řadu,

stupňovitá řada má jediné hlavní maximum $\theta = \frac{h}{s} \pm \frac{v}{2s f_a}$.

Rovinná řada využívá pouze polovinu akustického výkonu, stupňovitá celý výkon.

Pro maximální celkovou délku měniče lze odvodit $L_{tot, max} = N_m s \leq \frac{16n v_a^2}{\lambda f_a \Delta f_a}$,

měníč je možno prodloužit $2 \left(\frac{f_0}{\Delta f} \right)^2 \approx 4 \div 8 \times$.

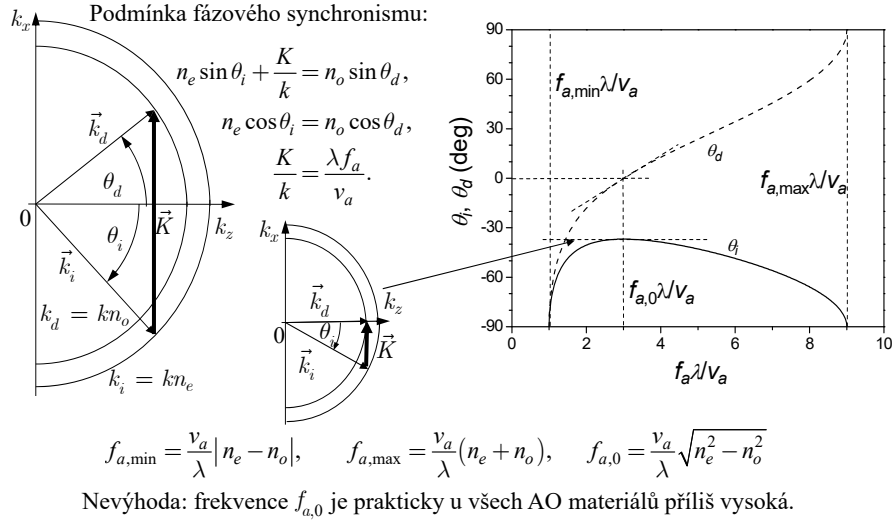
Úspora akustického výkonu: u rovinné řady až **čtyřnásobná**, u stupňovité řady až **osminásobná**.

UFE

42

Akustooptická interakce v anizotropním prostředí

Interakce v jednoosém prostředí v rovině kolmé k optické ose se změnou polarizace

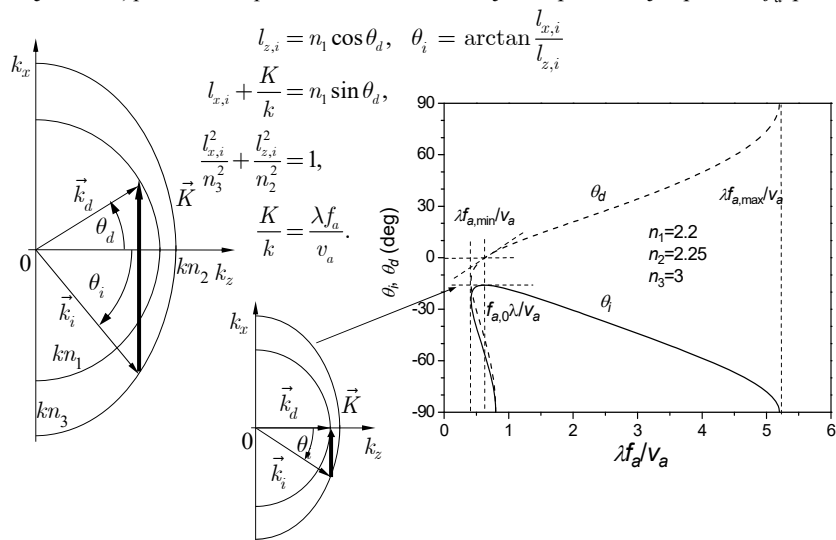


UFE

43

Abnormální akustooptická interakce v anizotropním prostředí

(jednoosé) prostředí s optickou aktivitou; ve dvojosém prostředí je zpravidla f_a příliš velká



UFE

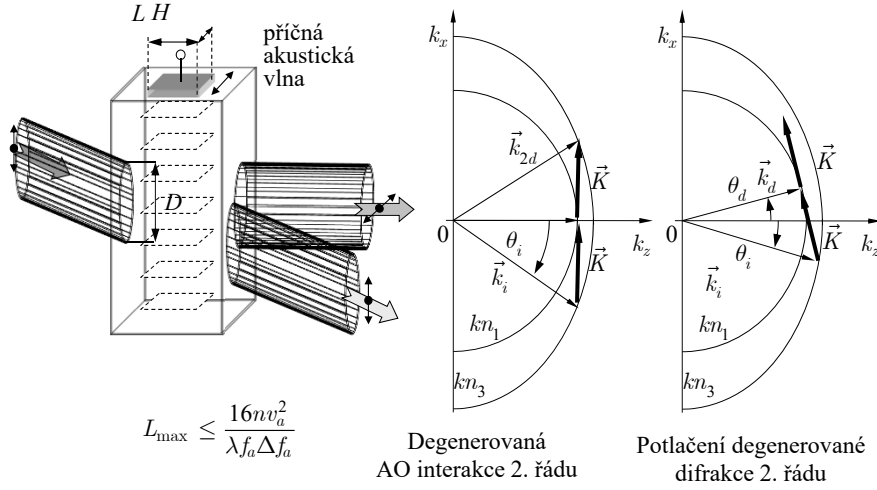
44

AO vychylování v anizotropním prostředí

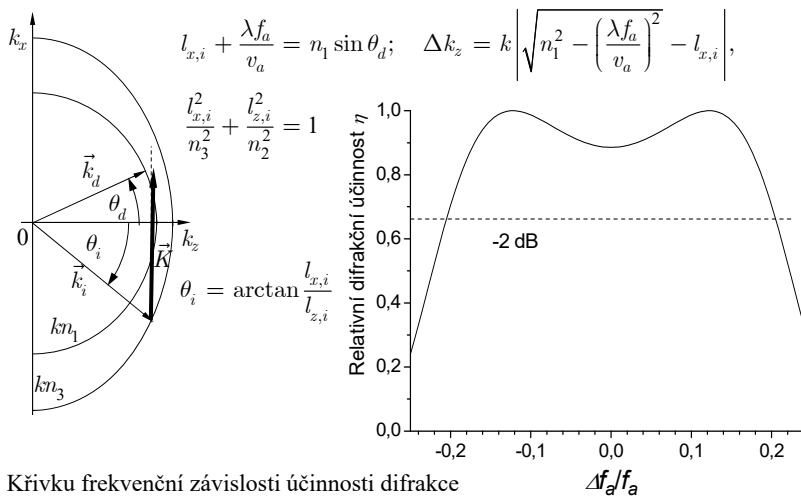
Výhody: snížení úhlové selektivity interakce \Rightarrow prodloužení interakční délky \Rightarrow snížení výkonu

Difrakce na příčné akustické vlně \Rightarrow nižší akustická rychlost

\Rightarrow zvětšení počtu rozlišitelných bodů, *polarizační rozlišení* difraktované vlny



Frekvenční závislost difrakční účinnosti při optimální konfiguraci abnormální AO interakce

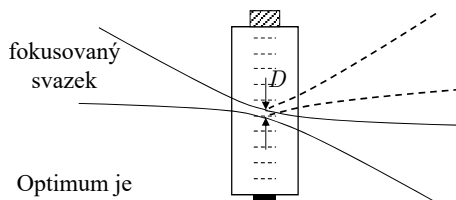
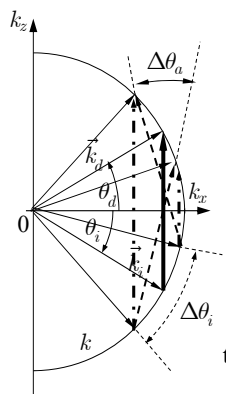


Křivku frekvenční závislosti účinnosti difrakce je možno tvarovat nastavením úhlu dopadu

Akustooptická modulace

Komplementární problém k akustooptickému vychylování:

K modulaci (intenzity) dojde *pouze tehdy*,
když se frekvenčně posunuté svazky prostorově překrývají.



Optimum je

$$\Delta\theta_a \approx \Delta\theta_i,$$

tedy $\frac{\Lambda_a}{L} = \frac{v_a}{f_a L} \approx \frac{\lambda}{nD}$. Odtud $\tau \approx \frac{D}{v_a}$, $\Delta f_a \approx \frac{1}{\tau} \approx \frac{v_a}{D}$.

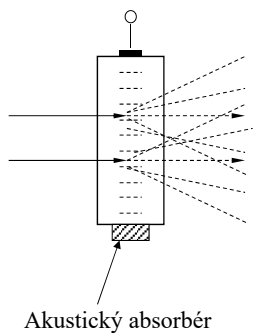
Pro délku měniče dostáváme opět $L_{\min} = \frac{2nv_a^2}{\lambda f_a^2} < L \approx \frac{nv_a^2}{\lambda f_a \Delta f_a}$, tedy $\Delta f_a < f_a / 2$.

Pro $\Delta f_a = 50$ MHz, $\tau \approx 20$ ns je $D \approx \frac{v_a}{\Delta f_a} \approx \frac{3 \times 10^3}{50 \times 10^6} = 60 \mu\text{m}$.

Akustooptické modulátory pro klíčování jakosti a synchronizaci vidů

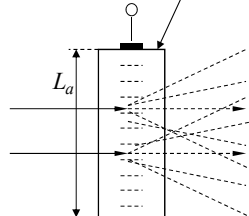
Ramanův-Nathův nebo Braggův režim; cílem je dostatečný pokles intenzity 0. řádu

Klíčování jakosti: difrakce na *běžící* akustické vlně



Synchronizace vidů v dutině laseru: difrakce na *stojaté* vlně:

$$f_{a,0} = \frac{2qv_a}{L_a} = \frac{c}{nl_{\text{laser}}}$$



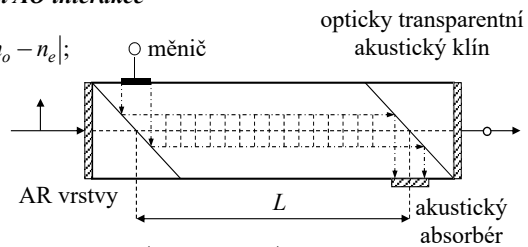
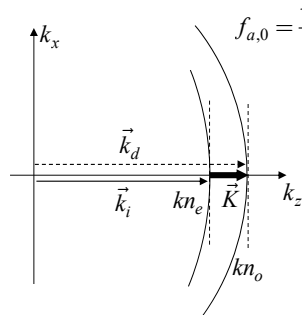
Intenzita prošlé vlny je modulována **dvojnásobnou frekvencí** akustické vlny.

$$\Delta \bar{\varepsilon}(\vec{r}, t) = \Delta \bar{\varepsilon} \left[\sin(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega t) - \sin(\vec{K} \cdot \vec{r} + \Omega t) \right] = -2\Delta \bar{\varepsilon} \cos(\vec{K} \cdot \vec{r}) \sin \Omega t.$$

$$I_0 = I_0 \left[(\Delta \varepsilon)^2 \right] = f \left[\sin^2(\Omega t) \right] = f \left[(1 - \cos 2\Omega t) / 2 \right] = g(2\Omega t).$$

Akustooptické laditelné filtry

Základní konfigurace: *kolineární AO interakce*



$$\Delta k_z L = \Delta \left(\frac{2\pi}{\lambda} L |n_o - n_e| \right) \approx \frac{2\pi}{\lambda^2} L |n_o - n_e| \Delta \lambda$$

$$\Delta k_z L / 2 \leq \pi / 2 \Rightarrow \Delta \lambda \approx \frac{\lambda_0^2}{2|n_o - n_e| L}$$

Přeladitelnost:

$$\lambda = \frac{v_a}{f_a} |n_o(\lambda) - n_e(\lambda)| \approx \frac{v_a}{f_a} |n_o(\lambda_0) - n_e(\lambda_0)|$$

Výhody kolineární interakce:

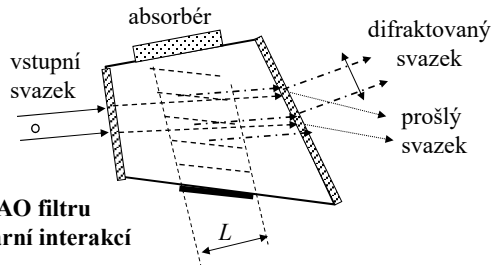
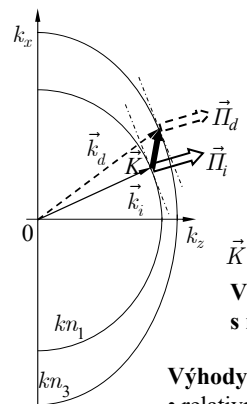
- úzké spektrální pásmo
- relativně velká úhlová apertura

Nevýhody:

- relativně vysoký střední akustický kmitočet
- složité uspořádání

Akustooptické filtry s nekolineární AO interakcí

Uspořádání AO filtru s nekolineární diffrakcí



Vlastnosti AO filtru s nekolineární interakcí

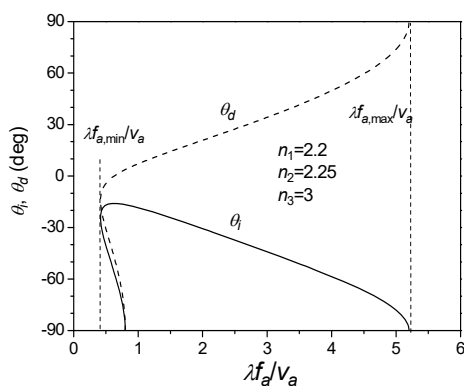
Výhody:

- relativně velká úhlová apertura
- směry šíření energie dopadající i difraktované vlny v krystalu jsou stejné a tedy interakce je účinná
- „odfiltrovaný“ svazek se liší polarizací i směrem šíření na výstupu
- velká flexibilita uspořádání změnou konfigurace

Nevýhody:

- menší selektivita, šířka pásma roste s kvadrátem vln. délky

Optimální konfigurace nekolineárního AO laditelného filtru s minimální frekvencí



Akustická frekvence filtru je v blízkosti minimální frekvence pro nekolineární AO interakci.

Parametry typického filtru v TeO_2 :

- $\Delta\lambda \approx 10 \div 100 \text{ nm}$
- $f_{a,0} \approx 40 \div 200 \text{ MHz}$
- $NA \approx 10' \div 20^\circ$
- $P_a \leq 0,2 \div 2 \text{ W}$
- $\lambda \approx 0,4 \div 10 \text{ }\mu\text{m}$

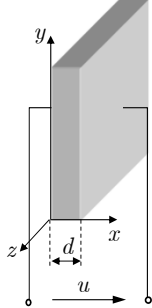
Vybrané akustooptické materiály

Materiál	optická propust. (μm)	n (n_o, n_e)	$M_2 \times 10^{15}$	v_a (km/s)	Z_a ($\text{kg/m}^2\text{s}$)	Akust. polarizace
Tavený křemen	0,2 4,5	1,457	1,56 0,47 \perp	5,96 3,76	13,12	L
Sklo SF59	0,46 2,5	1,95	19,1	3,26	20,5	L
LiNbO_3	0,5 4,5	2,202 2,286	7	6,57	30,6	L
PbMoO_4	0,4 5,5	2,262 2,386	36,3 36,1 \perp	3,63	25,22	L
TeO_2	0,35 5	2,26 2,412 opt. akt.	34,5 \perp 25,6 1200	4,2 0.616	25,2 3,7	L S
Hg_2Cl_2	0,4 30	1,97 2,65	506 640	1,62 0.34	11,6 2,4	L S
GaP	0,6 10	3,31	44,6	6,32	26,1	L

Buzení akustické vlny piezoelektrickým měničem (1)

Měnič jako akustický rezonátor

Piezoelektrické prostředí:



$$\vec{T} = \vec{c}^D : \vec{S} - \vec{h} \cdot \vec{D},$$

$$\vec{E} = -\vec{h} : \vec{S} + \vec{\eta}^S \cdot D,$$

$$\vec{\eta}^S = (\vec{\epsilon}^S)^{-1}, \quad \vec{h} = \vec{\eta}^S \cdot \vec{e},$$

$$c_{jklm}^D = c_{jklm}^E + \eta_{pr}^S e_{pj} e_{rkm},$$

$\vec{c}^D = \vec{c}^E + \vec{e} \cdot \vec{\eta}^S \cdot \vec{e}$ je „piezoelektricky zpevněný“ tenzor elastických konstant,

\vec{e} je piezoelektrický tenzor (3. řádu).

V konfiguraci podle obrázku při diagonálním tenzoru $\vec{\eta}^S$ má \vec{E} i \vec{D} pouze složku x , t.j. 1.

Zavedeme akustickou rychlost $\vec{u} = \frac{d\vec{\xi}}{dt}$. Pak $\frac{dS_{jk}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_j}{dx_k} + \frac{du_k}{dx_j} \right)$.

Časová derivace rovnic dá po doplnění Newtonovou silovou rovnicí soustavu rovnic

Buzení akustické vlny piezoelektrickým měničem (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} &= c_{\alpha\alpha}^D \frac{\partial u_l}{\partial x} - h_{l\alpha} \frac{\partial D_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_1}{\partial t} &= -h_{l\alpha} \frac{\partial u_l}{\partial x} + \eta_{11}^S \frac{\partial D_1}{\partial t}, \quad \alpha = \begin{cases} 1 = (11) \text{ pro } l = 1, \\ 6 = (12) \text{ pro } l = 2, \\ 5 = (13) \text{ pro } l = 3. \end{cases} \\ \frac{\partial T_a}{\partial x} &= \rho \frac{\partial u_l}{\partial t}, \end{aligned}$$

v závislosti na „polarizaci“
(směru kmitání)
akustické vlny.

Pro harmonický časový průběh $e^{j\Omega t}$ všech veličin můžeme soustavu rovnic integrovat od $x = 0$ do $x = d$ s okrajovými podmínkami $T_\alpha(0) = T_1$, $T_\alpha(d) = T_2$, $u_l(0) = u_1$, $u_l(d) = u_2$.

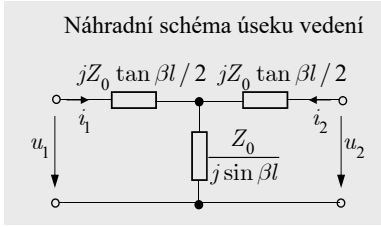
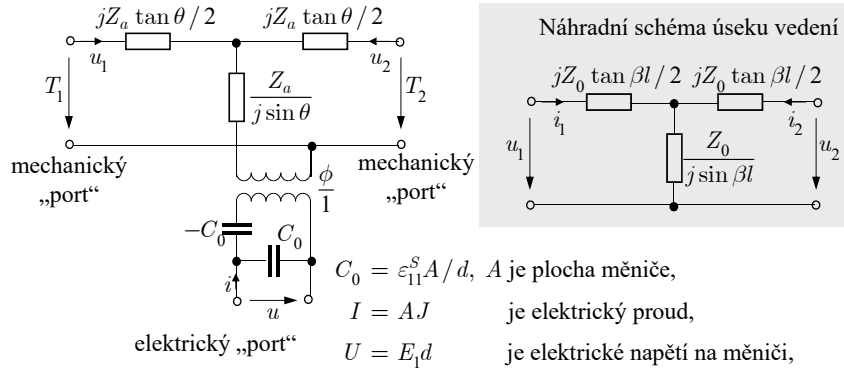
Po formálních úpravách můžeme výsledek zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Z_a}{j \tan \theta} u_1 + \frac{Z_a}{j \sin \theta} u_2 + \frac{h_{1\alpha}}{j\Omega} J Z_a = \sqrt{c_{\alpha\alpha}^D \rho} = \rho v_a \text{ je akustická impednace,} \\ T_2 &= \frac{Z_a}{j \sin \theta} u_1 + \frac{Z_a}{j \tan \theta} u_2 + \frac{h_{1\alpha}}{j\Omega} J, \quad J = j\Omega D_1 \text{ je hustota indukčního proudu,} \\ J &= j\Omega \epsilon_{11}^S E_1 - h_{1\alpha} \epsilon_{11}^S u_1 - h_{1\alpha} \epsilon_{11}^S u_2, \quad \theta = \Omega d / v_a = K_a d = \pi \Omega / \Omega_0, \\ f_0 &= \Omega_0 / 2\pi = v_a / 2d \text{ je půlvlnný rezonanční kmitočet} \end{aligned}$$

Buzení akustické vlny piezoelektrickým měničem (3)

Předchozí soustavu rovnic lze interpretovat pomocí náhradního elektrického obvodu:

Masonovo náhradní elektrické schéma piezoelektrického tloušťkového měniče



$$C_0 = \varepsilon_{11}^S A / d, \quad A \text{ je plocha měniče,}$$

$$I = AJ \quad \text{je elektrický proud,}$$

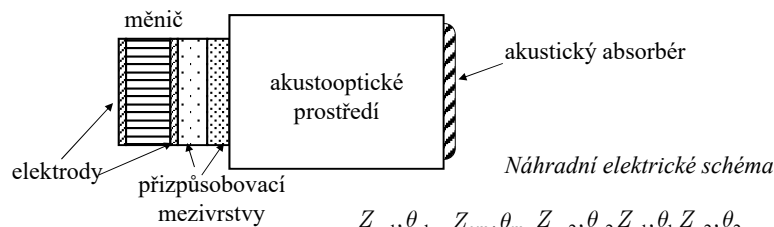
$$U = E_1 d \quad \text{je elektrické napětí na měniči,}$$

$$\phi = k \sqrt{Z_a \Omega_0 C_0} / \pi A \text{ je převodní poměr transformátoru,}$$

$$k = h_{1\alpha} / \sqrt{\eta_{11}^S c_{\alpha\alpha}^D} \text{ je číselník elektromechanické vazby.}$$

Buzení akustické vlny piezoelektrickým měničem (4)

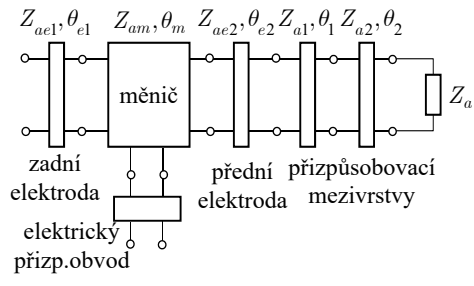
Frekvenční přenosovou charakteristiku měniče připojeného na akustooptické prostředí je možno analyzovat (optimalizovat) standardními metodami teorie elektrických obvodů.



Výsledná frekvenční charakteristika AO prvku

$$|F_{AO}(\Omega)|^2 = |F_{el}(\Omega)|^2 \cdot |F_{em}(\Omega)|^2 \cdot \eta_{AO}(\Omega)$$

el.přizp. obvod měnič +vrstvy účinnost AO prvku



Vlastnosti vybraných piezoelektrických a akustických materiálů

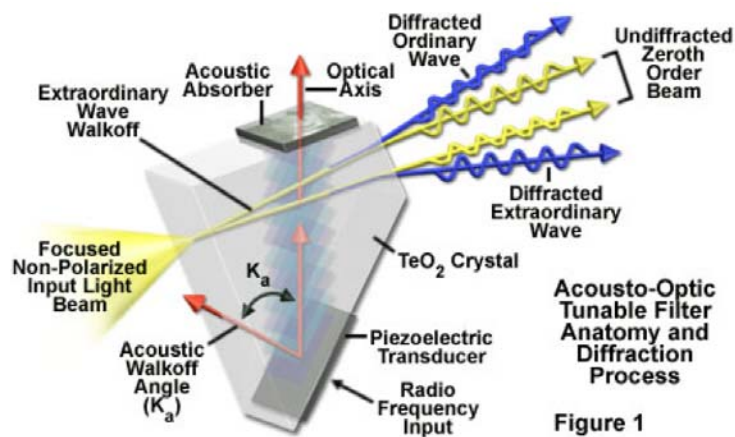
Materiál	ρ (g/cm ³)	mód	orientace	k	ϵ_r	v_a (km/s)	$Z_a = \rho \cdot v_a$
α -SiO ₂ 32	2.65	L	X	0.098	4.58	5.75	15.2
		S	Y	0.137	4.58	3.85	10.2
LiNbO ₃ 3m	4.64	L	36°Y	0.49	38.6	7.4	33.9
		S	163°Y	0.62	42.9	4.56	20.8
LiTaO ₃ 3m	7.45	L	47°Y	0.29	42.7	7.2	55.2
		S	X	0.44	42.6	4.22	31.4
ZnO 6mm	5.68	L	Z	0.282	8.84	6.40	36.4
		S	43°Y	0.322	8.63	3.21	18.4
In	7.3	L				2.3	16.8
		S				1.44	10.5
Au	19	L				3.24	62.5
		S				1.20	22.8
Ag	10.5	L				3.65	38.0
		S				1.61	16.7
Sn	7.2	L				3.32	23.9
		S				1.67	12.0

UFE

57

Akustooptický laditelné filtry v konfokální mikroskopii (OLYMPUS)

Nekolineární filtr na bázi TeO₂

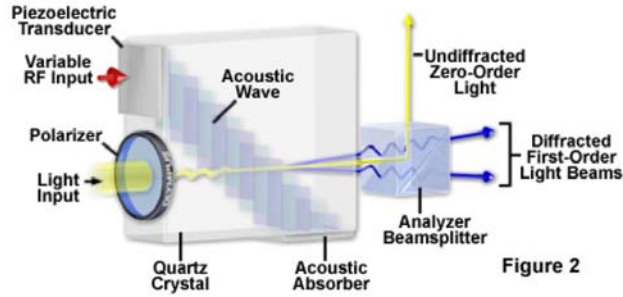


UFE

58

Akustooptický laditelný filtr v konfokální mikroskopii (OLYMPUS)

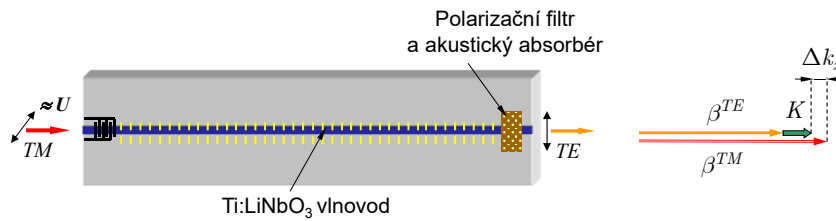
Kolineární filtr na bázi krystalického křemene



Komerční výrobce akustooptických zařízení: ISOMET, www.isomet.com

Integrovaně-optické akustooptické prvky

Kolineární interakce



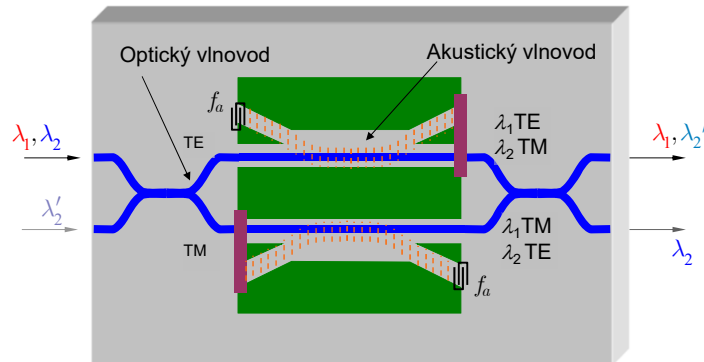
Účinnost akustooptické interakce

$$\eta = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + (\Delta k_z / 2)^2} \sin^2(\sqrt{\kappa^2 + (\Delta k_z / 2)^2} L),$$

$$\kappa \sim \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}^{TM}(x, y) \cdot \Delta \varepsilon(x, y) \cdot \vec{e}^{TE}(x, y) dx dy = \frac{\pi}{2L_c}$$

Polarizačně nezávislý akustoopticky laditelný začleňovací/vydělovací demultiplexor v LiNbO₃

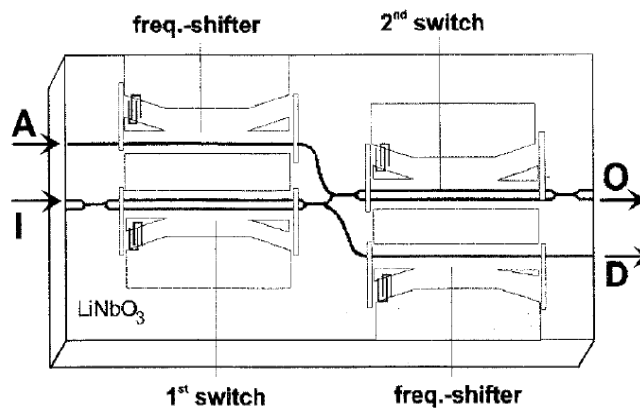
Princip: kolineární AO TE-TM konverze



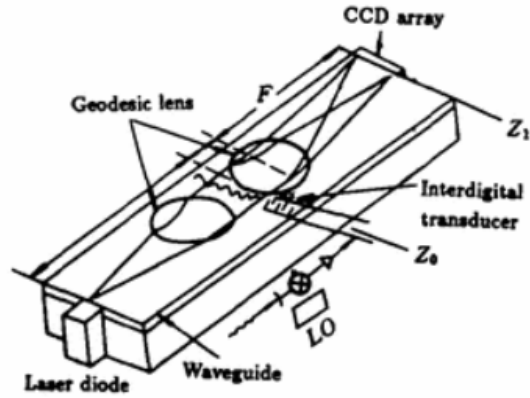
Střední vlnová délka $\lambda_c = 1,55 \mu\text{m}$,
vzdálenost kanálů $< 1 \text{ nm}$, přeladitelnost $\Delta\lambda \approx 70 \text{ nm}$

Zlepšení charakteristik add-drop multiplexoru kaskádním řazením filtrů a kompenzací frekvenčního posuvu

(Uni Paderborn, D, ECOC 1997)



Integrovaně-optický akustooptický spektrální analyzátor RF signálů

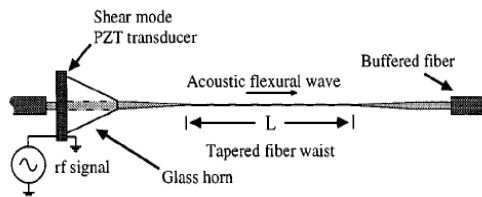


UFE

63

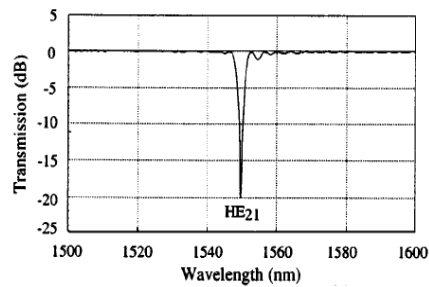
Akustooptický zářezový („notch“) filtr v optickém vlákně

(Photonics Technol. Lett., Sept. 2000)

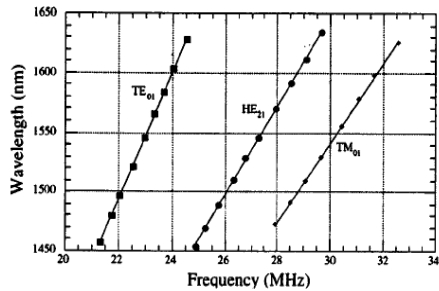


Příčná akustická vlna vytváří periodické mikroohyby, které způsobují vazbu do plášťových vidů vlákna

Přenosová spektrální charakteristika



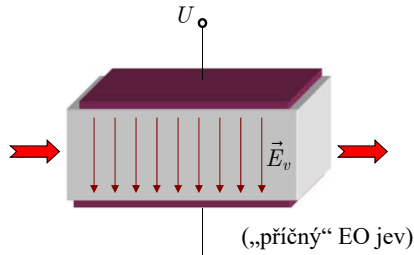
Ladící křivka



UFE

64

Teoretické základy elektrooptického jevu



Přiložením elektrického pole na materiál dochází ke změně jeho optické permitivity (impermitivity).
 Je-li závislost změny na velikosti pole *lineární*, jde o *lineární (Pockelsův) elektrooptický jev*, je-li kvadratická, jde o *kvadratický (Kerrův) elektrooptický jev*.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \bar{\epsilon} \cdot \vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\eta} \cdot \vec{D}, \quad \bar{\eta} = \bar{\epsilon}^{-1}.$$

$$\bar{\eta}(\vec{E}_v) = \bar{\eta}(\vec{0}) + \underbrace{\tilde{r} \cdot \vec{E}_v}_{\text{lineární jev (Pockelsův)}} + \underbrace{\bar{s} : \vec{E}_v \vec{E}_v}_{\text{kvadratický jev (Kerrův)}}$$

Lineární (Pockelsův) jev nastává pouze v materiálech, jejichž fyzikální vlastnosti nejsou invariantní vůči záměně směru souřadnicových os (*necentrosymetrický materiál*).

$$\bar{\eta} + \Delta\bar{\eta} = (\bar{\epsilon} + \Delta\bar{\epsilon})^{-1}; \quad \bar{\eta} \cdot \Delta\bar{\epsilon} = -\Delta\bar{\eta} \cdot \bar{\epsilon};$$

$$(\bar{\eta} + \Delta\bar{\eta}) \cdot (\bar{\epsilon} + \Delta\bar{\epsilon}) = \bar{I}; \quad \Delta\bar{\epsilon} = -\bar{\eta}^{-1} \cdot \Delta\bar{\eta} \cdot \bar{\epsilon};$$

$$\underbrace{\bar{\eta} \cdot \bar{\epsilon}}_{\bar{I}} + \bar{\eta} \cdot \Delta\bar{\epsilon} + \Delta\bar{\eta} \cdot \bar{\epsilon} + \underbrace{\Delta\bar{\eta} \cdot \Delta\bar{\epsilon}}_{\text{malý člen 2. řádu}} = \bar{I}; \quad \Delta\bar{\epsilon} = -\bar{\epsilon} \cdot \Delta\bar{\eta} \cdot \bar{\epsilon}$$

Teoretické základy elektrooptického jevu (2)

Poněvadž $\bar{\epsilon}$ je symetrický tenzor, musí být tenzor invariantní vůči záměně

první dvojice indexů, $r_{jkl} = r_{kjl}$,

a tenzor \bar{s} invariantní vůči záměně indexů v první a druhé dvojici,

$$s_{jklm} = s_{jkml} = s_{kjlm} = s_{kjml}$$

To umožňuje zavést zkrácenou Voigtovu notaci

$$r_{jkl} \Rightarrow r_{\alpha l}, \quad s_{jklm} = s_{\alpha\beta},$$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3$ pro (11), (22), (33),

$\alpha, \beta = 4, 5, 6$ pro (23) \equiv (32), (13) \equiv (31), (12) \equiv (21).

Poněvadž $\Delta\bar{\eta} = \tilde{r} \cdot \vec{E}_v + \bar{s} : \vec{E}_v \vec{E}_v$, jednotky elektrooptických tenzorů jsou

$$[\tilde{r}] = \text{m/V (prakticky pm/V)}, \quad [\bar{s}] = \text{m}^2 / \text{V}^2$$

Vlastnosti některých významných elektrooptických materiálů (1)

Dielektrické krystaly skupiny ADP
pěstované z vodního roztoku, hygroskopické
bodová grupa symetrie $\bar{4}2m$

$$\text{ADP: } r_{41} = 23.11 \text{ pm/V}, \quad n_o = 1.522$$

$$r_{63} = 8.5 \text{ pm/V}, \quad n_e = 1.4773$$

$$\text{KDP: } r_{41} = 8 \text{ pm/V}, \quad n_o = 1.5074$$

$$r_{63} = 11 \text{ pm/V}, \quad n_e = 1.4661$$

$$\text{DKDP: } r_{41} = 26 \text{ pm/V}, \quad n_o = 1.502$$

$$r_{63} = 24.1 \text{ pm/V}, \quad n_e = 1.462$$

$$\left(r_{\alpha j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}$$

Vlastnosti některých významných elektrooptických materiálů (2)

Polovodičové krystaly typu $A^{III}B^V$ (GaAs, InP)
bodová grupa symetrie $\bar{4}3m$

$$\text{GaAs: } \lambda = 1.15 \mu\text{m}$$

$$r_{41} = 1.43 \text{ pm/V}, \quad n = 3.43$$

$$\left(r_{\alpha j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix}$$

Feroelektrické krystaly typu LiNbO_3 (LiTaO_3)
bodová grupa symetrie $3m$

$$\text{LiNbO}_3: r_{22} = 6.8 \text{ pm/V}, \quad n_o = 2.286$$

$$r_{13} = 10 \text{ pm/V}, \quad n_e = 2.202$$

$$r_{33} \doteq 30 \text{ pm/V},$$

$$r_{51} \doteq 32 \text{ pm/V}$$

$$\text{LiTaO}_3: \quad n_o = 2.176$$

$$\quad \quad \quad n_e = 2.180$$

$$\left(r_{\alpha j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Šíření rovinné vlny v elektrooptickém materiálu s přiloženým vnějším polem (1)

Změna optické permitivity při přiložení vnějšího pole je $\Delta\bar{\epsilon} = -\bar{\epsilon} \cdot (\tilde{r} \cdot \vec{E}_v) \cdot \bar{\epsilon}$;

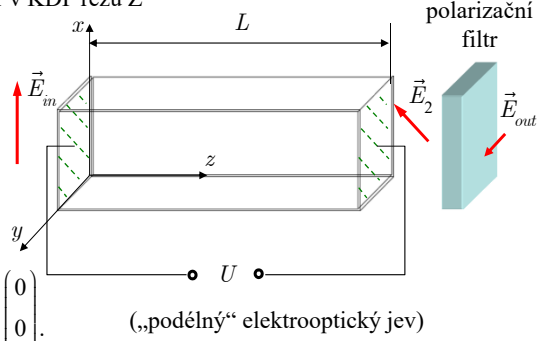
Rovnice pro rovinnou vlnu je pak $[\vec{l}^2 \bar{T} - \vec{l}\vec{l} - \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} \cdot (\tilde{r} \cdot \vec{E}_v) \cdot \bar{\epsilon}] \cdot \vec{E}_0 = \vec{0}$.

Příklad 1: Amplitudový modulátor v KDP řezu Z

$$\begin{aligned} \vec{l} &= l_z \vec{z}^0; \vec{E}_v = E_v \vec{z}^0; \\ \tilde{r} \cdot \vec{E}_v &= r_{63} (\vec{x}^0 \vec{y}^0 + \vec{y}^0 \vec{x}^0); \\ \Delta\epsilon_{12} &= \Delta\epsilon_{21} = -n_o^4 r_{63} E_v. \end{aligned}$$

Rovnice pro vlastní vlny je

$$\begin{pmatrix} l_z^2 - n_o^2 & n_o^4 r_{63} E_v & 0 \\ n_o^4 r_{63} E_v & l_z^2 - n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & -n_e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Amplitudový modulátor v KDP řezu Z (2)

Disperzní rovnice je $(l_z^2 - n_o^2)^2 - (n_o^4 r_{63} E_v)^2 = 0$, která má řešení

$$l_{z,1,2} = \sqrt{n_o^2 \pm n_o^4 r_{63} E_v} \cong n_o \pm \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_v = n_o \pm \Delta n, \quad \Delta n = \frac{1}{2} n_o^3 r_{63} E_v.$$

Vlastní vlny musejí splňovat rovnici $\begin{pmatrix} l_z^2 - n_o^2 & n_o^4 r_{63} E_v \\ n_o^4 r_{63} E_v & l_z^2 - n_o^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, neboli

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{n_o^4 r_{63} E_v}{l_z^2 - n_o^2} = \mp 1; \text{ vlastní vlny jsou tedy lineárně polarizované pod úhlem } 45^\circ \text{ vůči souřadnicovým osám}$$

Vstupní polarizace $\vec{E}_{in} = E_0 \vec{x}^0$ se tak rozloží na dvě složky s polarizacemi $\vec{e}_{1,2}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{x}^0 \pm \vec{y}^0)$,

$\vec{E}_{in} = E_0 \vec{x}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 (\vec{e}_1^0 + \vec{e}_2^0)$. Šíření na vzdálenost z je pak popsáno vztahem

$$\vec{E}(z) = \frac{e^{ik_0 n_o z}}{\sqrt{2}} E_0 (\vec{e}_1^0 e^{ik_0 \Delta n z} + \vec{e}_2^0 e^{-ik_0 \Delta n z}) = e^{ik_0 n_o z} E_0 (\vec{x}^0 \cos k_0 \Delta n z + i \vec{y}^0 \sin k_0 \Delta n z).$$

Na výstupu za polarizátorem propouštějícím složku \vec{y}^0 se tak objeví intenzita záření

$$I(L) = |E_y(L)|^2 = E_0^2 \sin^2 k_0 \Delta n L = I(0) \sin^2 k_0 \Delta n L.$$

Amplitudový modulátor v KDP řezu Z (3)

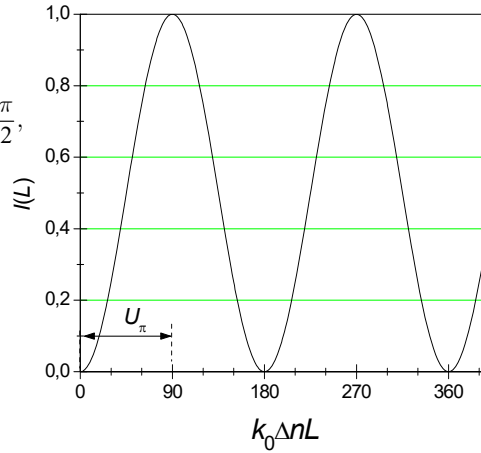
„Půlvlnné“ napětí modulátoru:

$$k_0 \Delta n L = \frac{\pi}{2}, \quad \text{t.j.} \quad \frac{1}{2} k_0 n_o^3 r_{63} E_v L \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2},$$

$$U_\pi = E_v L = \frac{\pi}{k_0 n_o^3 r_{63}} = \frac{\lambda}{2 n_o^3 r_{63}} \quad (L)$$

Pro KDP $U_\pi \doteq 9.3 \text{ kV}$

Při „podélném“ EO jevu nezávisí půlvlnné napětí na délce ani na příčných rozměrech modulátoru

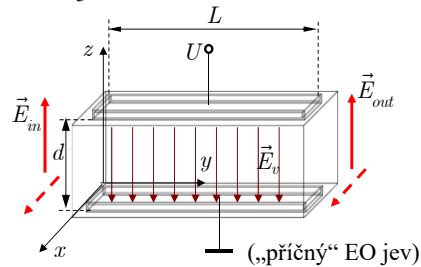


Příklad 2: Fázový modulátor v LiNbO₃ (1)

$$\vec{l} = l_y \vec{y}^0, \quad \vec{E}_v = E_v \vec{z}^0,$$

$$\Delta \vec{\epsilon} = -\vec{\epsilon} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{z}^0 E_v) \cdot \vec{\epsilon} =$$

$$= \begin{pmatrix} -n_o^4 r_{13} E_v & 0 & 0 \\ 0 & -n_o^4 r_{13} E_v & 0 \\ 0 & 0 & -n_e^4 r_{33} E_v \end{pmatrix}.$$



$$\begin{pmatrix} l_y^2 - n_o^2 + n_o^4 r_{13} E_v & 0 & 0 \\ 0 & -n_o^2 + n_o^4 r_{13} E_v & 0 \\ & & l_y^2 - n_e^2 + n_e^4 r_{33} E_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_y \equiv 0$$

V závislosti na vstupní polarizaci (E_x nebo E_z) je

$$\Delta n_o \doteq -\frac{1}{2} n_o^3 r_{13} E_v, \quad \Delta n_e \doteq -\frac{1}{2} n_e^3 r_{33} E_v.$$

Fázový modulátor v LiNbO₃ (2)

Změna fáze při průchodu úsekem délky L vlivem přiloženého napětí je pro různé polarizace

$$E_x(L) = E_0 e^{ik_0 n_o L} e^{-i \frac{1}{2} k_0 n_o^3 r_{13} E_v L}, \quad \Delta \varphi_o = -\frac{1}{2} k_0 n_o^3 r_{13} L E_v,$$

$$E_z(L) = E_0 e^{ik_0 n_e L} e^{-i \frac{1}{2} k_0 n_e^3 r_{33} E_v L}, \quad \Delta \varphi_e = -\frac{1}{2} k_0 n_e^3 r_{33} L E_v.$$

Na rozdíl od „podélného“ EO jevu je nyní $E_v = U/d$, kde d je vzdálenost elektrod.

Půlvlňné napětí je definováno jako napětí potřebné pro dosažení změny fáze o π :

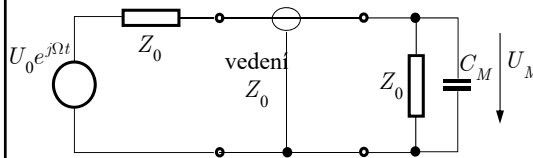
$$U_\pi = E_v d = \frac{\lambda}{n_o^3 r_{13}} \frac{d}{L} \quad \text{pro } E_{in} = E_x, \quad \text{Pro LiNbO}_3 \quad U_\pi \approx 5.3 \frac{d}{L} \text{ [kV] pro } E_x,$$

$$U_\pi = E_v d = \frac{\lambda}{n_e^3 r_{33}} \frac{d}{L} \quad \text{pro } E_{in} = E_z. \quad U_\pi \approx 2.2 \frac{d}{L} \text{ [kV] pro } E_z.$$

Rychlost EO modulace (modulační šířka pásma)

Vlastní EO jev má časové konstanty velmi krátké, řádu $10^{-14} \div 10^{-15}$ s.

Omezení vzniká vlivem časové konstanty elektrického obvodu ovládajícího modulátor



Kapacita elektrod

$$C_m = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{el} A}{d} \approx 2 \div 5 \text{ pF}$$

Napájecí vedení má obvykle impedanci

$$Z_0 = 50 \Omega$$

Přenosová funkce obvodu

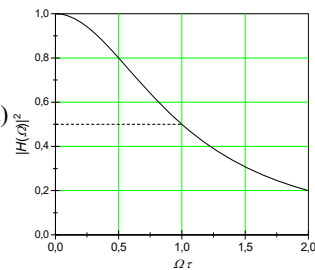
$$H(\Omega) = \frac{U_m}{U_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega C_m Z_0 / 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega \tau},$$

$$\tau = C_m Z_0 / 2.$$

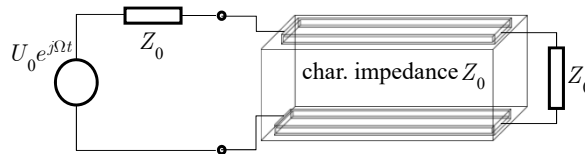
$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + (\Omega \tau)^2}.$$

Pokles o 3 dB (na polovinu) nastane při $\Omega \tau \approx 1$, t.j.

$$\Omega_{\max} \approx \frac{1}{\tau}, \quad f_{\max} = B = \frac{1}{\pi C_m Z_0} \approx 3 \text{ GHz}.$$



Rozšíření pásma modulační vlny pomocí elektrod s postupnou vlnou



Optická vlna: $E_{opt} = E_0 \exp[j(\omega t - k_0 n_{eff} y)]$,

Modulační vlna: $E_{mod} = E_m \exp[j(\Omega t - k_0 n_m y)]$.

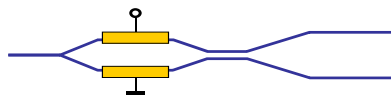
Lze ukázat, že účinnost modulační je $\eta_{mod} \sim \left[\frac{\sin \frac{\Omega}{2c} (n_m - n_{eff}) L}{\frac{\Omega}{2c} (n_m - n_{eff}) L} \right]^2$;

Šířka pásma pro pokles účinnosti modulační o 4 dB je

$$B \cdot L \approx \frac{\Omega_{max}}{2\pi} L = \frac{c}{2(n_m - n_{eff})} \approx 10 \text{ GHz} \cdot \text{km}$$

Příklady elektrooptických a akustooptických součástek

Lineární modulátor pro kabelovou TV: MZ modulátor + směrová odbočnice



GENERAL SPECIFICATIONS

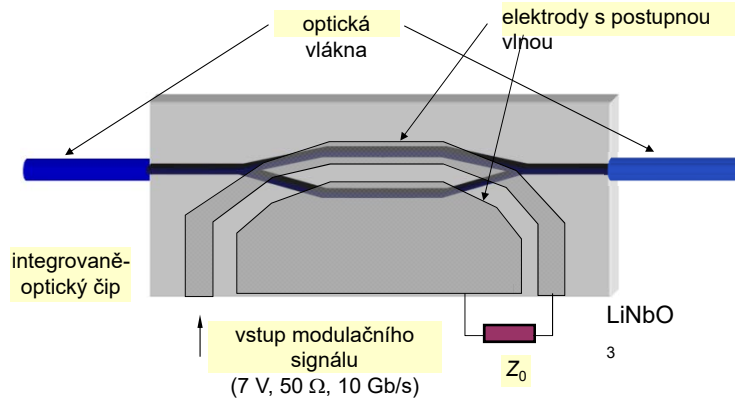
Material	LiNbO ₃
Crystal orientation	x-cut, y-propagating
Electrical connectors (package)	SMA connectors
Operating wavelength	1535 - 1550nm
Fiber Options (1 meter fiber pigtailed)	1. Fujikura SM 15-P-8/125-UV/UV-400 2. 3M FS-PM-7621 3. Corning SMF 28 4. Custom Fiber ² (Customer supplied)

ABSOLUTE SPECIFICATIONS

Input optical power	200 mW maximum
Operating temperature	-25°C minimum, 75°C maximum
Storage temperature	-45°C minimum, 90°C maximum
Bias Port	
Applied DC Voltage	± 15 V maximum
RF Port	
Applied DC Voltage	0 V maximum
Applied RF Power	+ 27 dBm maximum

Elektroopticky řízený MZ interferometrický modulátor

Externí modulátor pro optické komunikační systémy s přenosovou rychlostí ≥ 2.5 Gb/s

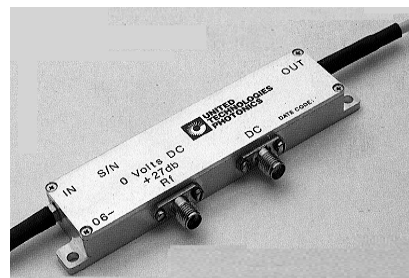
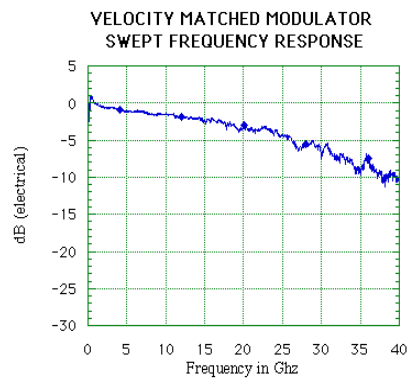


Pravděpodobně nejužívanější elektrooptická součástka

UFE

77

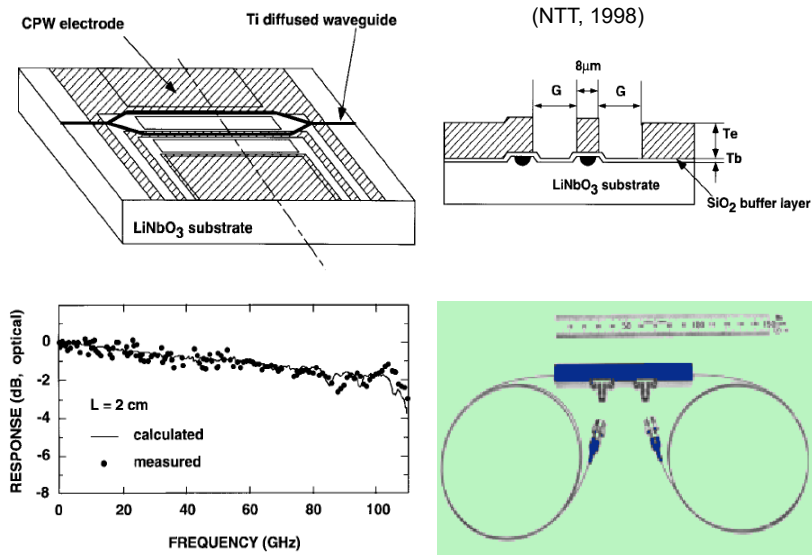
Vlastnosti MZ elektrooptického modulátoru



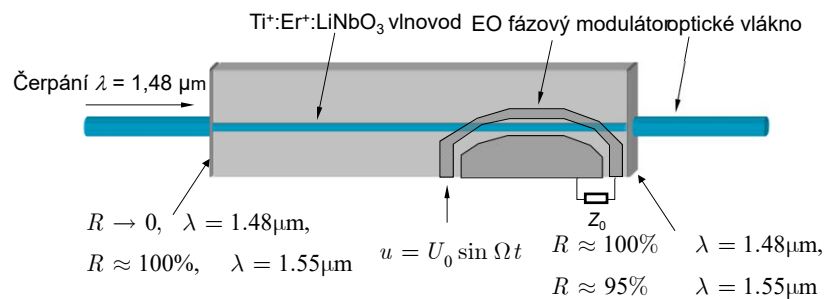
UFE

78

100 GHz LiNbO₃ modulátor s ovládacím napětím 5,1 V



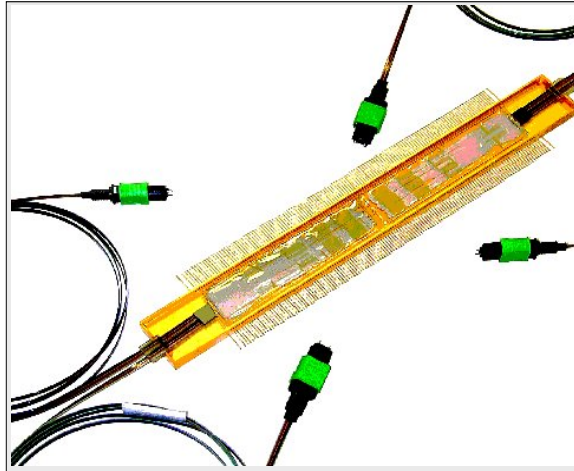
Vlnodivný Ti:Er:LiNbO₃ laser s integrovaným elektrooptickým modulátorem pro synchronizaci vidů



Ultrakrátké pulsy ($\leq 10 \text{ ps}$), opakovací frekvence $\approx 20 \text{ GHz}$

„Prostorový“ přepínač 16×16 v Ti:LiNbO₃ (2×20×5 mm)

„Neblokující“ architektura, 480 DOS přepínačů. $U = \pm 45$ V, $IL < 15$ dB,
 $\tau \cong 5$ ns, PMD < 1 ps, kompenzace PMD křemennou $\lambda/4$ destičkou

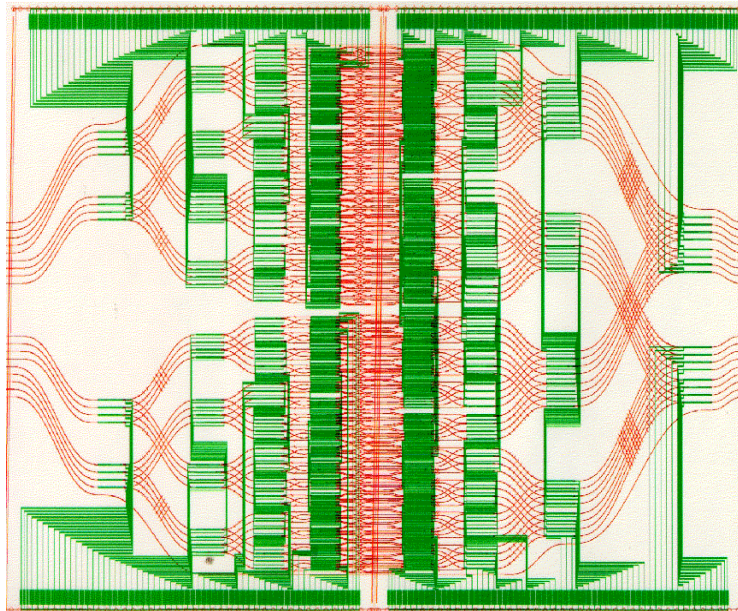


(Lucent, 2000)

UFE

81

Layout optických vlnodů a elektrodové struktury přepínače



UFE

82

Elektrooptické amplitudové modulátory (Newport)

	4102NF	4104NF	4101NF	4103
Type ⁽¹⁾	Broadband AM	Broadband AM	Resonant AM	Resonant AM
Operating Frequency	DC-200 MHz	DC-200 MHz	0.01-250 MHz	0.01-250 MHz
Wavelength Range	500-900 nm	900-1600 nm	500-900 nm	900-1600 nm
Material	LiNbO ₃	LiNbO ₃	LiNbO ₃	LiNbO ₃
Maximum V _n ⁽²⁾	160 V @ 532 nm	300 V @ 1000 nm	16 V @ 532 nm	30 V @ 1000 nm
On:Off Extinction Ratio ⁽³⁾	50:1	50:1	50:1	50:1
Maximum Optical Intensity ⁽⁴⁾	0.5 W/mm ² @ 532 nm	1 W/mm ² @ 1300 nm	0.5 W/mm ² @ 532 nm	1 W/mm ² @ 1300 nm
Aperture Diameter	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm
Insertion Loss ⁽⁵⁾	<0.3 dB	<0.3 dB	<0.3 dB	<0.3 dB
RF Bandwidth	200 MHz	200 MHz	2-4% freq.	2-4% freq.
RF Connector	SMA	SMA	SMA	SMA
Input Impedance	10 pF	10 pF	50 Ω	50 Ω
Maximum RF Power	10 W	10 W	1 W	1 W
VSWR	NA	NA	<1.5	<1.5



UFE

83

Elektrooptické fázové modulátory (Newport)

	4006	4002	4004	4005	4001NF	4003NF
Type ⁽¹⁾	Broadband	Broadband	Broadband	Resonant	Resonant	Resonant
Operating Frequency	DC-100	DC-100 MHz	DC-100 MHz	0.01-250	0.01-250 MHz	0.01-250 MHz
Wavelength Range	360-500 nm	500-900 nm	900-1600 nm	360-500 nm	500-900 nm	900-1600 nm
Material	MgO:LiNbO ₃	MgO:LiNbO ₃	MgO:LiNbO ₃	MgO:LiNbO ₃	MgO:LiNbO ₃	MgO:LiNbO ₃
Modulation Depth	40 mrad/V @ 364 nm	30 mrad/V @ 532 nm	15 mrad/V @ 1000 nm	0.27 - 0.8 rad/V @ 364 nm	0.2 - 0.6 rad/V @ 532 nm	0.1 - 0.3 rad/V @ 1000 nm
Maximum V _n ⁽²⁾	79 V @ 364 nm	105 V @ 532 nm	210 V @ 1000 nm	3.8 - 11.7 V @ 364 nm	5 - 16 V @ 532 nm	10 - 31 V @ 1000 nm
Maximum Optical Intensity ⁽⁴⁾	0.1 W/mm ² @ 364 nm	2 W/mm ² @ 532 nm	4 W/mm ² @ 1064 nm	0.1 W/mm ² @ 364 nm	2 W/mm ² @ 532 nm	4 W/mm ² @ 1064 nm
Aperture Diameter	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm	2 mm
RF Bandwidth	100 MHz	100 MHz	100 MHz	2-4% freq.	2-4% freq.	2-4% freq.
RF Connector	SMA	SMA	SMA	SMA	SMA	SMA
Input Impedance	20 pF	20 pF	20 pF	50 Ω	50 Ω	50 Ω
Maximum RF Power	10	10 W	10 W	1	1 W	1 W
VSWR	NA	NA	NA	NA	<1.5	<1.5



UFE

84

Elektrooptické modulátory



LEADER IN
ELECTRO-OPTIC
INNOVATIONS



- Home
- About Us
- New Products
- Pulse Shaping / Regen Switching / Pulse Extraction / Pulse Picking
- Q-Switches / Electro-Optic Modulators / Pockels Cells
- Q-Switch Drivers & Systems
- HV Pulsers / Amplifiers
- Optical Isolators & Faraday Effect Devices
- Mechanical Gimbals and Accessories
- Technical Notes / Publications / Instrument Manuals
- Map and Directions
- Contact Us
- International Representatives

Q-Switches / Electro-Optic Modulators / Pockels Cells

KD*P Pockels Cells

- 1040 SERIES** POCKELS CELL ELECTRO-OPTIC LIGHT MODULATORS
- 1058 SERIES** ELECTRO-OPTIC Q-SWITCHES
- 1059 SERIES** ELECTRO-OPTIC Q-SWITCHES
- 1070 SERIES** 50 OHM IMPEDANCE ELECTRO-OPTIC MODULATORS
- MODELS 1111 / 1112** PICOSECOND POCKELS CELLS
- 1145 SERIES** POCKELS CELL ELECTRO-OPTIC Q-SWITCHES
- 1148 SERIES** 1" DIAMETER DKDP POCKELS CELL ELECTRO-OPTIC Q-SWITCHES

RTP Cells

- 1147 SERIES** RTP ELECTRO-OPTIC MODULATORS AND Q-SWITCHES

BBO Cells

- 1150 SERIES** BBO POCKELS CELL Q-SWITCHES

Transverse Field KD*P Modulator

- 3079 SERIES** LOW VOLTAGE LIGHT MODULATORS

Aktuality v oblasti akustooptických a elektrooptických součástek

Isomet Corporation, Springfield, USA – tradiční výrobce akustooptických součástek
<http://www.isomet.com>

AO modulátory
pro UV a viditelnou
oblast

Model	Operating Wavelength Range	Crystal Material	Active Aperture (mm)	Typical Risetime (ns)	Modulation Bandwidth (MHz)	Center Freq. (MHz)
M1134-FS80L	UV	Fused Silica	3	55	10	80
1211-5-UV	UV	Quartz	5	113	5	110
M1088-FS110L	UV	Fused Silica	3	55	10	110
1211-UV	UV	Quartz	2	57	20	150
1212-2-949	UV	Quartz	2	25	20	150
1212	UV	Quartz	1	10	30	175
1212-248	UV	Quartz	1	10	30	200

1201E-1	VIS	Glass	1.7	46	7	40
1201E-964	VIS	Glass	3	93	10	70
QAM1060	VIS	TeO2 (S)	2	1000	0.2	80
M1115-FS80L-3	VIS	Fused Silica	3(H)x14(W)	170	10	80
1205C-x	VIS	PbMo04	1 / 2 / 3	25	15	80
M1133-aQ80L	VIS	Quartz	1.5 / 2	114	10	80
QAM1020	VIS	TeO2 (S)	3	1000	0.2	110
1211	VIS	Quartz	2	57	10	110
1211-3-985	VIS	Quartz	2.7	57	20	110
1206C	VIS	PbMo04	1	15	25	110
1206C-833	NUV, VIS	TeO2	1	15	25	110
1206C-2-1002	NUV, VIS	TeO2	2	30	25	110
1250C-829A	NUV, VIS	TeO2	0.45	9	50	260
1250C	VIS	PbMo04	0.75	10	50	200
1250C-848	VIS	TeO2	0.5	7	50	200
1250C-974	VIS	TeO2	0.4	7	50	200
M1067-T200L	VIS	TeO2	0.2	7	50	200
1260-1044	VIS	TeO2	0.2	6	100	350

AO modulátory pro infračervenou oblast

Model	Operating Wavelength Range	Crystal Material	Active Aperture (mm)	Typical Rise time (ns)	Modulation Bandwidth (MHz)	Center Freq. (MHz)
1201E-2	NIR	Glass	1.7	93	3.8	40
1202-4	NIR	Glass	4(H)x14(W)	350	10	40
M1137-SF40L	NIR	Glass	1.5	191	10	40
1205C-x-NIR	NIR	PbMoO4	1 / 2	25	15	80
1205C-1023	NIR	PbMoO4	0.6	25	15	80
1205C-843	NIR	PbMoO4	0.5	25	15	80
M1142-SF80L	NIR	Glass	0.5	40	15	80
M1080-T80L	NIR	TeO2	1.5	77	15	80
M1135-T80L	NIR	TeO2	3	245	15	80
1206C-NIR	NIR	PbMoO4	1	15	25	110
1250C-868	NIR	TeO2	0.5	7	25	150
1250C-NIR	NIR	PbMoO4	0.75	10	50	200

1207B-3	IR	Ge	3	70	8	40
1210	mid-IR	Ge	4	500	10	81 / 105
1208-6-4(M)	mid-IR	Ge	6(H)x14(W)	500	10	50
1207B-6	IR	Ge	6	700	10	40
1208-6-955M	IR	Ge	6(H)x14(W)	700	10	40
1209-7-993M	IR	Ge	7(H)x14(W)	830	10	40
1209-7-1064M	IR	Ge	7(H)x14(W)	830	10	40
1209-7-1112M	IR	Ge	7(H)x14(W)	830	10	40
1209-9-1010M	IR	Ge	9(H)x20(W)	830	2.5	40
AQM6x0-H	IR	Ge	7(H)x30(W)	830	10	40 / 50

Mnohokanálové AO modulátory

Model	Channels	Spectral Range (µm)	Material	Active Aperture (mm)	Typical Rise time (ns)	Information Bandwidth (MHz)	Center Freq. (MHz)
M1140	4	0.45-0.67	PbMoO4	0.7	25	15	110
8080	8	0.45-0.67	PbMoO4	0.7	36	9	80
M8080C	8	0.488-0.633	PbMoO4	0.5	55	6	80
M9080C	8, collinear	0.45-0.67	PbMoO4	0.7	36	9	90
G7060	6	2.5-11.0	Ge	0.8	70	5	70

UFE

87

AO deflektory

Model	Operating Wavelengths	Material	Resolution	Time Aperture (µs)	Sweep Bandwidth (MHz)	Center Freq. (MHz)
1211-5BS-1045	UV	Quartz	35	0.87	40	110
D1155-T75S	405nm	TeO2 (S)	140	14.5	10	75

1205C-2	VIS	PbMoO4	16	0.55	30	80
LS55-V	VIS	TeO2 (S)	450	11.3	40	80
LS110-VIS	VIS	TeO2 (S)	1100	22.7	50	100
LS110A-VIS-XY	VIS	TeO2 (S)	750x750	15	50	100
OAD948	488nm	TeO2 (S)	600	12.3	50	100
OAD1020	532nm	TeO2 (S)	600	12.3	50	100
1206C-1002	NUV, VIS	TeO2	35	0.7	50	110
OPP834	VIS	PbMoO4	520	5.2	100	200
1250C-BS-960A	VIS	PbMoO4	192	1.6	120	190

OAD1550-XY	1550nm	TeO2 (S)	200x200	10	20	40
LS110-NIR	NIR	TeO2 (S)	1100	22.7	25	50
LS110A-NIR-XY	NIR	TeO2 (S)	375x375	15	25	50
1205C-x-804B	NIR	PbMoO4	66	1.6	40	80
OAD1121-XY	810nm	TeO2 (S)	500x500	13	40	80
LS55-NIR	NIR	TeO2 (S)	450	11.3	40	80
D1135-T110L	NIR	TeO2	35	0.7	50	110
1250-BS-926	NIR	PbMoO4	70	1	70	145
1250C-BS-943A	NIR	PbMoO4	190	1.6	120	185

1208-6BS-955M	IR	Ge	50	2.5	20	40
1209-7BS-986	IR	Ge	50	2.5	20	40
AQM6x0-H	IR	Ge	100	5.5	20	40 / 50
LS50XY	IR	Ge	50x50	1.27	40	70
LS600-1011	IR	Ge	436	10.9	40	70
LS600-4	IR	Ge	545	13.6	40	70

UFE

88

AO posouvače frekvence

Model	Operating Wavelengths	Material	Active Aperture (mm)	Center Frequency (MHz)	Frequency Range (MHz)
OAM1059-V31	633nm	TeO2 (S)	1.5	10	+/- 0.5
OAM1059A	633nm	TeO2 (S)	1.5	15	+/- 1.0
1201E-1	VIS	Glass	1.7	40	+/- 7.0
1201E-2	NIR	Glass	1.7	40	+/- 7.0
OAM1141-T40-2	633nm	TeO2 (S)	2	40	+/- 1.0

OAM1141-T80-2	633nm	TeO2 (S)	2	80	+/- 1.0
1205-1054	VIS	PbMo04	1	80	+/- 5
1205-1069	VIS	PbMo04	1	160	+/- 5
M1141-P80-1	VIS	PbMo04	1	80	+/- 5
1205-1118	VIS	PbMo04	2	80	+/- 5
1205C-1-869	VIS,NIR	PbMo04	1 / 2	80	+/- 20

1206C	VIS,NIR	PbMo04	1	110	+/- 25
1250C	VIS,NIR	PbMo04	0.75	200	+/- 50
1250C-829A	NUV,VIS	TeO2	0.45	260	+/- 50
OPP-1	VIS	PbMo04	1.5	300	+/- 100

1210	mid-IR	Ge	4	81 / 105	+/- 10
1207B-6	IR	Ge	6	40	+/- 10
1207B-3-80	IR	Ge	3	80	+/- 2.5

AO Q-spínače

Model	Cooling	Centre Frequency (MHz)	Material	Active Aperture (mm)	Max RF Power (W)	Damage Threshold (MW/cm2)
Q1072-SF24L	Conduction	24	SF10	1.5	5	>300
Q1058C-SFxxL-H	Conduction	24/27	SF10	1.0/1.5	5	>300
Q1025-TxxL-H	Conduction	27/80	TeO2	1.0	3	>250
Q1025-SFxxL-H	Conduction	41/80	SF10	1.0	3	>300
Q1080C-TxxL-H	Conduction	41/ 68 / 80	TeO2	1.5	4	>250
Q1087-aQ80L	Conduction	80	Quartz	1.0	6	>500
Q1137-SFxxL-H	Conduction	41/80	SF57	1.0 / 1.5	6	>300
Q1162-SFxxL-H	Conduction	41/80	SF10	1.0	6	>300
-						
Q1119-aQxxL-H	Conduction	41/ 80	Quartz	1.0 / 1.5	10	>500
Q1119-FSxxL-H	Conduction	41/ 80	Fused Silica	1.0 / 1.5	10	>500
Q1133-aQxxL-H	Conduction	41/ 68 / 80	Quartz	1.0 to 2.0	10	>500
Q1133-FSxxL-H	Conduction	41/ 68 / 80	Fused Silica	1.0 / 1.5	10	>500
-						
Q1062-FSxxL-H	Water	24/ 27	Fused Silica	1.5 to 6.0	60	>500
Q1062-FSxxS-H	Water	24/ 27	F.Silica (Shear)	1.5 to 5.5	60	>500
Q1083-FSxxL-H	Water	24/ 27 / 41	Fused Silica	1.5 to 6.0	60	>500
Q1083-FSxxS-H	Water	24/ 27 / 41	F.Silica (Shear)	1.5 to 5.5	60	>500

AO laditelné filtry

Model	Spectral Range (µm)	Active Aperture (sq. mm)	Acceptance Angle (Deg.)	Optical Bandwidth (nm)	Drive Frequency (MHz)
AOLF-615-1049	VIS	2.5x2.5	3.5 - 4.5	1.0 - 6.0	109 - 65
AOLF-615-1082	VIS	2.5x2.5	3.5 - 4.5	1.0 - 6.0	109 - 65
AOTF614-08	VIS,NIR	5x5	3.5 - 6.0	1.0 - 22.0	140 - 35
AOTF614-16	VIS,NIR	5x5	2.5 - 4.2	0.6 - 11.0	140 - 35
AOTF614-24	VIS,NIR	5x5	3.5 - 6.0	0.4 - 7.0	140 - 35
AOTF920-14	NIR	5x5	3.4 - 6.1	2.0 - 27.0	95 - 26
AOTF920-20	NIR	5x5	2.6 - 4.9	1.5 - 18.5	95 - 26
AOTF920-24	NIR	5x5	2.8 - 5.0	1.0 - 15.5	95 - 26
AOTF1331	mid-IR	7x7	5	30 - 50	24 - 39
AOTF1550-SLS	1550nm	3x3	-	2	81 - 84
AOTF1110-VB	VIS,NIR	10x10	5.7 (nominal)	Variable	80 - 50
OSTF	VIS-NIR	5x5	4 (nominal)	1.0 - 12	110 - 45

UFE

91

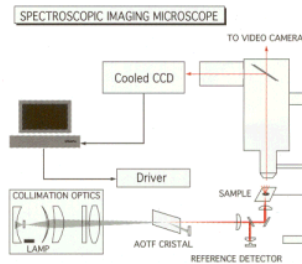


ELECTRO-OPTICAL PRODUCTS CORPORATION

62-40 Forest Avenue, 2nd Floor • Ridgewood, NY 11385, USA • Tel: 718-456-8000 • Fax: 718-456-8050 • www.eopp.com

AO laditelné filtry

AOTF MODEL	OPTICAL RANGE (nm)	LIGHT SOURCE [1/N]:Laser /lines [2]:Lamp	OPTICAL TRANS. (%)	APERTURE (mm ²)	FIELD OF VIEW	AO EFF. (%) linear pol.	SPECTRAL RES. (nm) -3dB	MAX RF POWER
AOTFnC-UV	350-430	[1]	70-90	2x2	1°	85	1-2	2
AOTF-1	360-530	[2]	70-90	2x2	1.5°	85	1.5-5	0.2xN
AOTF-2	360-530	[1/4] or [2]	80-90	2x2	1.5°	85	1.5-5	0.2xN
AOTF-3	400-700	[2]	>90	5x5	5°	80	5-30	2
AOTF-5	480-620	[2]	>95	5x5	8°	80	3-10	2
AOTF-6	500-850	[1/1] or [2]	>95	5x5	3°	80-60	1-3	1
AOTF-7	600-900	[1/1] or [2]	>95	5x5	4°	70	<4	1.5
AOTF-7A	600-900	[1/1] or [2]	>95	10x10	4°	70	7-10	2
AOTF-8	800-1800	[1/1] or [2]	>95	5x5	4°	60	2-15	2



UFE

92

AO laditelný filtr v KDP pro UV oblast

Parameters of KDP Crystal

Parameter

At Wavelength	633 nm	480 nm	350 nm	220 nm	200 nm
Index of Refraction n_o	1.507	1.515	1.532	1.596	1.622
n_e	1.467	1.470	1.487	1.543	1.562

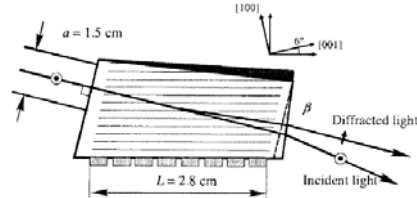
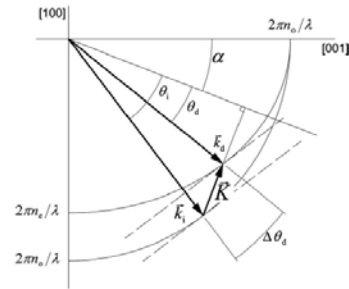
Density

Effective photoelastic coefficient at 12° relative to Z axis in XZ plane, $p_{\text{eff}} = 0.067$
 Acoustic phase velocity at 6° relative to X axis in XZ plane, $v = 1.66 \times 10^5$ cm/s
 AO figure of merit $M_2 = 4.6 \times 10^{16}$ s²/g

$\rho = 2.34$ g/cm³

$v = 1.66 \times 10^5$ cm/s

$M_2 = 4.6 \times 10^{16}$ s²/g



Spectral range, 220–480 nm
 Spectral passband A at 350 nm, 2 nm; at 633 nm, 67 nm
 Rf range, 60–164 MHz
 Linear aperture, 1.5 × 1.5 cm²
 Angular aperture, 1.2°
 Applied power, 2.0 W
 Transmission coefficient, 60%

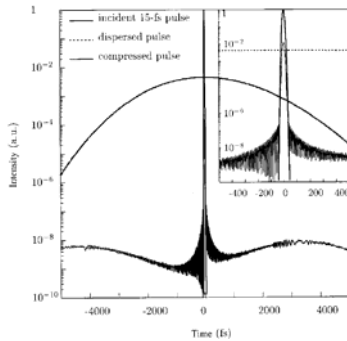
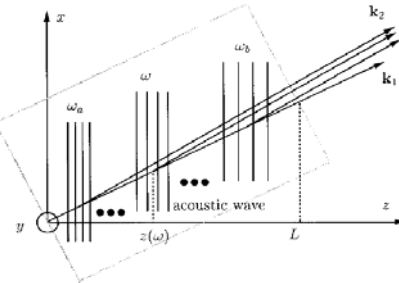
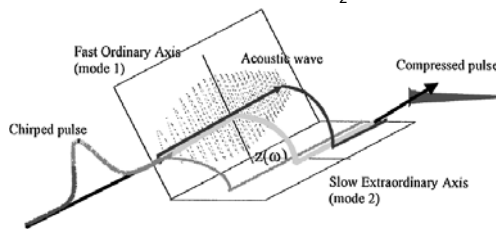
N. Gupta, V. Voloshinov, APPLIED OPTICS, Vol. 43, No. 13, pp. 2752-2759, 2004

UFE

93

Akustooptické řízení disperse ultrakrátkých optických signálů

Kvazikolineární interakce v TeO₂



$$E_{\text{dif}}(\omega) \sim E_{\text{inc}}(\omega) \cdot S(\omega \Delta n v_a / c)$$

$$E_d(t) \sim E_i(t) * \mathcal{F}(ct / (\Delta n v_a))$$

obecný lineární filtr;
 vhodnou volbou časového průběhu ovládacího napětí piezoelektrického měniče je možné v širokých mezích ovládat časový průběh difraktovaného záření

F. Verluise, V. Laude, J.-P. Huignard, P. Tournois, A. Migus, J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 17, 138-145, 2000
 F. Verluise, V. Laude, Z. Cheng, Ch. Spielmann, P. Tournois, Optics Letters Vol. 25, 575-577, 2000

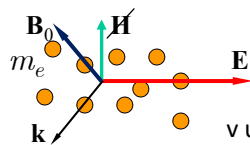
UFE

94

Základy magnetooptiky

Drudeho model magnetooptického prostředí

„Volný“ elektronový plyn v elektromagnetickém poli za přítomnosti stálého magnetického pole



Newtonova pohybová rovnice náboje q o hmotnosti m :

$$-m\ddot{\mathbf{r}} - m\gamma\dot{\mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{0}$$

Pro časově harmonické elmg. pole $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ v ustáleném stavu, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t)$ zřejmě platí:

$$m\omega^2\mathbf{r}_0 + im\gamma\omega\mathbf{r}_0 + q(\mathbf{E}_0 - i\omega\mathbf{r}_0 \times \mathbf{B}_0) = \mathbf{0}.$$

Zvolme směr konstantního magnetického pole za souř. osu z a rozepišme rovnici:

$$\begin{pmatrix} m(\omega^2 + i\gamma\omega) & i\omega q B_0 & 0 \\ -i\omega q B_0 & m(\omega^2 + i\gamma\omega) & 0 \\ 0 & 0 & m(\omega^2 + i\gamma\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = -q \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Susceptibilita prostředí v magnetickém poli

Drobná úprava dá

$$\begin{pmatrix} \omega^2 + i\gamma\omega & i\omega\omega_c & 0 \\ -i\omega\omega_c & \omega^2 + i\gamma\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 + i\gamma\omega \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_0 = -\frac{q}{m} \mathbf{E}_0,$$

$\omega_c = qB_0/m$ je cyklotronová frekvence.

Zřejmě

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{q}{m} \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{E}_0,$$

$$\mathbf{P}_0 = qm\mathbf{r}_0 = -\frac{q^2 n}{m} \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{E}_0,$$

$$\boldsymbol{\chi} = -\frac{q^2 n}{m\varepsilon_0} \mathbf{M}^{-1} = -\omega_p^2 \mathbf{M}^{-1}, \quad \omega_p = |q| \sqrt{\frac{n}{m\varepsilon_0}} \quad \dots \text{ plazmová frekvence.}$$

Explicitní výpočet inverzní matice a zobecnění na materiály s permitivitou

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty \quad \text{dává} \quad \varepsilon = \varepsilon_\infty (\mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\chi}}),$$

UFE

Permitivita prostředí v magnetickém poli

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & i\varepsilon_{xy} & 0 \\ -i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_\infty \left[1 - \frac{\omega_p^2 (\omega + i\gamma)}{\omega [(\omega + i\gamma)^2 - \omega_c^2]} \right],$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_\infty \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega [(\omega + i\gamma)^2 - \omega_c^2]}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_\infty \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega + i\gamma)} \right].$$

Pokud srážková frekvence $\gamma \ll \omega$ a $\omega_c < \omega$, $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_{zz}$,

prostředí je *bezeztrátové s hermitovskou permitivitou*,

$$\varepsilon_{xy} \simeq \frac{\varepsilon_\infty q^3 n}{\varepsilon_0 m^2 \omega^3} B_0 \quad \text{lineárně závisí na vnějším magnetickém poli.}$$

Pro jednoduchost se budeme dále zabývat jen takovým prostředím.

UFE

Šíření rovinné vlny v izotropním magnetooptickém prostředí

„Rigorózní“ analýza s pomocí Fresnelova disperzního vztahu pro *obecné* anizotropní prostředí

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - l_y^2 - l_z^2 & i\varepsilon_{xy} + l_x l_y & l_x l_z \\ -i\varepsilon_{xy} + l_x l_y & \varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_z^2 & l_y l_z \\ l_x l_z & l_y l_z & \varepsilon_{zz} - l_x^2 - l_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha je rotačně symetrická vzhledem ke směru magnetického pole z , stačí analýza v rovině xz , tedy pro $l_z = 0$.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - l_z^2 & i\varepsilon_{xy} & l_x l_z \\ -i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_z^2 & 0 \\ l_x l_z & 0 & \varepsilon_{zz} - l_x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pro reálná prostředí a magnetická pole $B_0 \leq 1 \text{ T}$, $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_{zz}$ a $|\varepsilon_{xy}| \ll \varepsilon_{xx}$.

Plochy vlnových vektorů

Disperzní rovnice je pak

$$\left[(\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_z^2)(\varepsilon_{xx} - l_z^2) - \varepsilon_{xy}^2 \right] (\varepsilon_{zz} - l_x^2) - (\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_z^2) l_x^2 l_z^2 = 0,$$

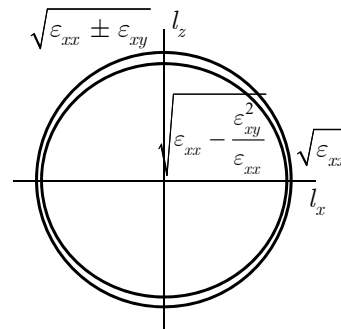
což se pro $\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_{zz}$ zredukuje na

$$\varepsilon_{xx} (\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_z^2)^2 - \varepsilon_{xy}^2 (\varepsilon_{xx} - l_x^2) = 0.$$

To je bikvadratická rovnice pro l_z s řešením

$$l_z = \pm \sqrt{\varepsilon_{xx} - l_x^2} \pm \varepsilon_{xy} \sqrt{\frac{\varepsilon_{xx} - l_x^2}{\varepsilon_{xx}}}.$$

Plochy vlnových vektorů jsou pak „téměř kružnice“:



„Vlastní vlny“

Šíření **podél magnetického pole**: $l_x = 0$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx} \mp \varepsilon_{xy} & i\varepsilon_{xy} & 0 \\ -i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx} \mp \varepsilon_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy $E_{0z} = 0$, $E_{0x} = \pm iE_{0y}$... **kuhově polarizované vlny**.

Chirální prostředí:

Magnetooptické prostředí:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - l_z^2 & 2i gl_z & 0 \\ -2i gl_z & \varepsilon - l_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - l_z^2 & i\varepsilon_{xy} & 0 \\ -i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} - l_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

V obou prostředích dochází ke stáčení roviny polarizace, ale chirální prostředí je reciproké, zatímco **magnetooptické prostředí nikoli**.
Při šíření opačnými směry se polarizace stáčí stejným směrem.

„Vlastní vlny“

Šíření **kolmo ke směru magnetického pole**, $l_z = 0$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & i\varepsilon_{xy} & 0 \\ -i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} - l_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} - l_x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vlna polarizovaná ve směru z se šíří s konstantou šíření $l_z = \sqrt{\varepsilon_{xx}}$

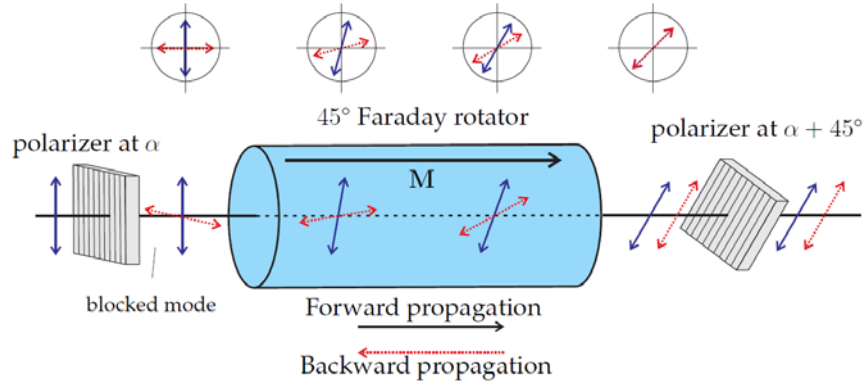
Druhá vlna se šíří s konstantou šíření $l_x = \sqrt{\varepsilon_{xx} - \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}}}$,

má nenulovou, i když velmi malou **podélnou složku** pole E_x ,

$$\frac{E_x}{E_y} = -i \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}, \quad \left| \frac{E_x}{E_y} \right| \ll 1.$$

Konstanta šíření této vlny závisí na **kvadrátu** magnetické indukce, je tedy **stejná** pro oba vzájemně opačné směry šíření.

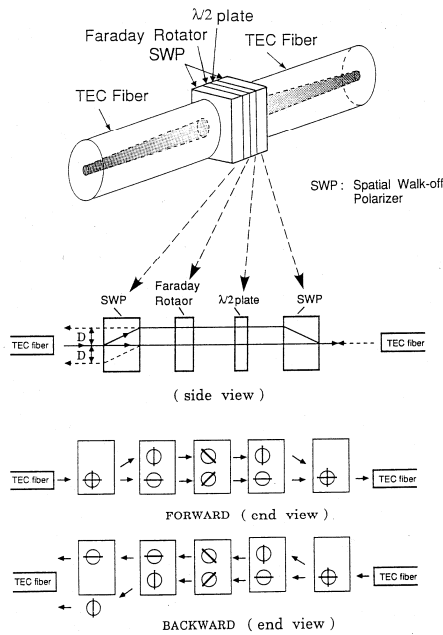
Princip optického izolátoru



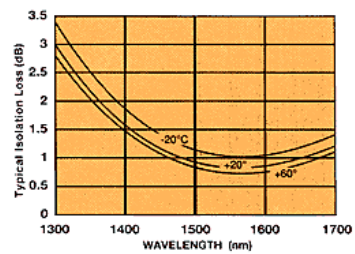
UFE

103

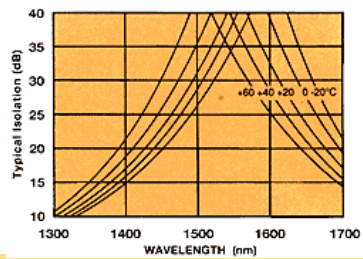
Vláknový polarizačně nezávislý optický izolátor



Vložný útlum



Izolační poměr



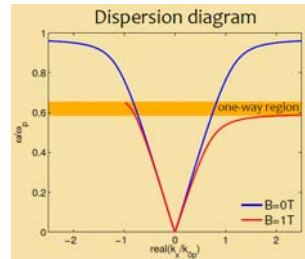
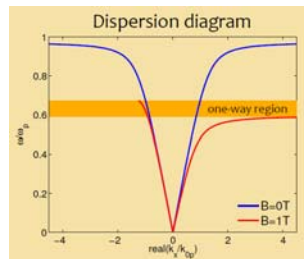
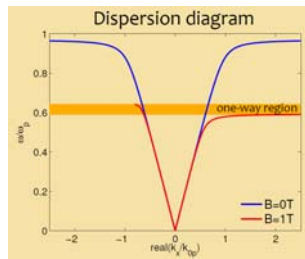
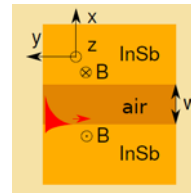
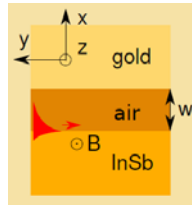
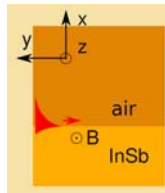
UFE

104

Vlnovodné izolátory a pod.

Faradayův jev nelze efektivně využít – *krátká dráha*, polarizační závislost.
Příčný MO jev v *asymetrickém vlnovodu*,

MO rozštěpení disperzních charakteristik povrchových plazmonů,....



ÚFE

105

Úvod do základů teorie hyperbolických (meta)materiálů

ÚFE

106

Elementární teorie efektivního prostředí (EMT)

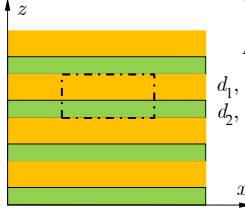
Vrstevnaté prostředí s parametry ϵ_1, d_1 a ϵ_2, d_2 , $d_1, d_2 \ll \lambda$

Střední hodnota elektrické indukce pro elektrické pole rovnoběžné s vrstvami :

$$E_{x1} = E_{x2} = E, \quad \bar{D}_x = \frac{D_{x1}d_1 + D_{x2}d_2}{d_1 + d_2} = \frac{\epsilon_1 d_1 + \epsilon_2 d_2}{d_1 + d_2} E = \epsilon_{\parallel} E \quad f = \frac{d_1}{d_2}$$

$$\frac{d_1}{d_1 + d_2} = f, \quad \frac{d_2}{d_1 + d_2} = 1 - f, \quad 0 \leq f \leq 1. \quad \text{Tedy} \quad \epsilon_{\parallel} = f\epsilon_1 + (1 - f)\epsilon_2,$$

Střední hodnota intenzity elektrického pole pro elektrickou indukci kolmou k vrstvám :



$$D_{z1} = D_{z2} = D, \quad \bar{E}_z = \frac{D_{z1}d_1 + D_{z2}d_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2}{d_1 + d_2} D_z = \frac{1}{\epsilon_{\perp}} D_z,$$

$$\text{Tedy} \quad \frac{1}{\epsilon_{\perp}} = \frac{1}{\epsilon_1} f + \frac{1}{\epsilon_2} (1 - f), \quad \epsilon_{\perp} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{f\epsilon_2 + (1 - f)\epsilon_1},$$

Efektivní prostředí je anizotropní, jednoosé, s tenzorem permitivity

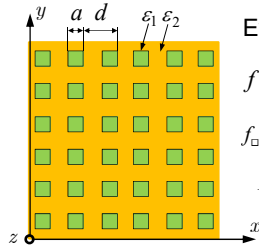
$$\epsilon_{eff} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

J. C. Maxwell Garnett, "Colours in metal glasses and in metallic films,"
Philosophical Transaction of the Royal Society London **203**, 385-420 (1904).

UFE

107

„Duální“ („nanodrátové“) efektivní prostředí



Evidentně,

$$f = \frac{a}{d},$$

$$f_{\square} = f^2$$

$$\epsilon_{\parallel} = f^2 \epsilon_1 + (1 - f^2) \epsilon_2, \quad \epsilon_{eff} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{\perp} \approx f \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{f\epsilon_2 + (1 - f)\epsilon_1} + (1 - f)\epsilon_2$$

Efektivní anizotropní jednoosé prostředí

Ideální (bezeztrátové) metalo-dielektrické (efektivní) prostředí:

$$\epsilon_1 = \epsilon_m, \quad \epsilon_m < 0, \quad \epsilon_2 = \epsilon_d, \quad \epsilon_d > 0,$$

Příklad: Ag/SiO₂ na vln. délce 700 nm: $\epsilon_m \doteq -22 + i0.67$, $\epsilon_d \doteq 2.12$

f	ϵ_{\parallel}	ϵ_{\perp}
0.2	-2.70	2.71
0.5	-9.94	4.69
0.7	-14.76	9.12
0.8	-18.38	31.14

UFE

Fresnelova disperzní formule pro jednoosé prostředí:

$$\Phi(\omega, \mathbf{l}) = (\varepsilon_{xx} - l_x^2 - l_y^2 - l_z^2) [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx} (l_x^2 + l_y^2) - \varepsilon_{zz} l_z^2] = 0.$$

Pro (bezeztrátové) vrstevnaté prostředí $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\parallel} < 0$, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\perp} > 0$.

Tedy

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = \varepsilon_{\parallel} < 0, \quad \frac{l_x^2 + l_y^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{l_z^2}{\varepsilon_{\parallel}} = 1, \quad \text{neboli } l_x^2 + l_y^2 = \varepsilon_{\perp} + \frac{\varepsilon_{\perp}}{|\varepsilon_{\parallel}|} l_z^2$$

„Řádná“ evanescentní (tlumená) vlna –
objemový plazmon (nešifivá vlna)

Mimořádná vlna - jednodílný rotační hyperboloid

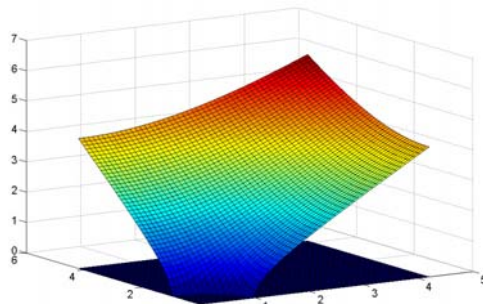
Pro (bezeztrátové) „drátové“ prostředí $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{\perp} > 0$, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel} < 0$.

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = \varepsilon_{\perp}, \quad \frac{l_x^2 + l_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{l_z^2}{\varepsilon_{\perp}} = 1, \quad \text{neboli } l_x^2 + l_y^2 = \frac{|\varepsilon_{\parallel}|}{\varepsilon_{\perp}} (l_z^2 - \varepsilon_{\perp}).$$

„Řádná“ „šifivá“ (netlumená) vlna –
polaritonový mód

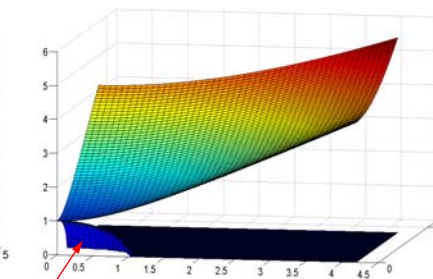
Mimořádná vlna - dvojdílný rotační hyperboloid
(poloměr je kladný jen pro $|l_z| > \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$).

Hyperbolické plochy vlnových vektorů



Jednodílný rotační hyperboloid

$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



polaritonový mód (kulová plocha)

Dvojdílný rotační hyperboloid

$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}$$

Řezy hyperbolickými plochami vlnových vektorů

$$l_x^2 + l_z^2 = \varepsilon_{xx}, \quad \frac{l_x^2}{\varepsilon_{zz}} + \frac{l_z^2}{\varepsilon_{xx}} = 1;$$

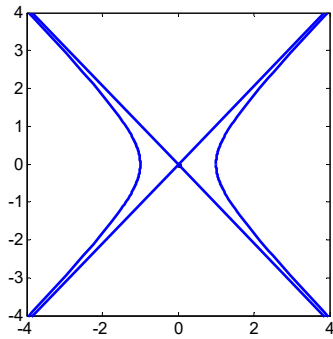
$$l_{x,o} = \sqrt{\varepsilon_{xx}} \cos \varphi, \quad l_{z,o} = \sqrt{\varepsilon_{xx}} \sin \varphi,$$

$$l_{x,e} = a \cos \varphi; \quad l_{z,e} = a \sin \varphi;$$

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{zz} + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz}) \cos^2 \varphi}};$$

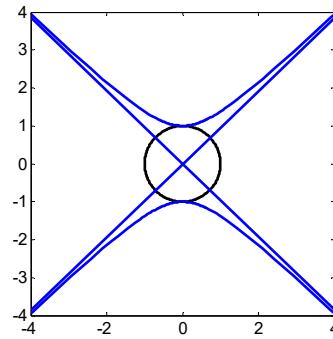
Jednodílný rotační hyperboloid

$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Dvojdílný rotační hyperboloid

$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}$$



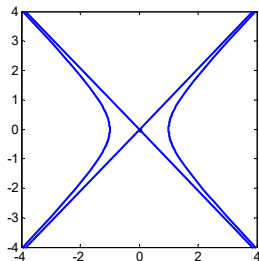
UFE

111

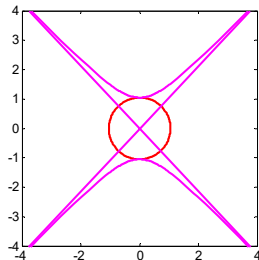
Hyperbolické plochy komplexních vlnových vektorů

Jednodílný rotační hyperboloid

$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



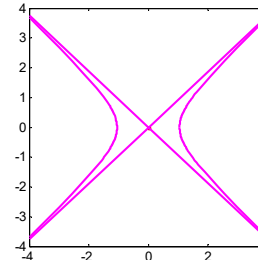
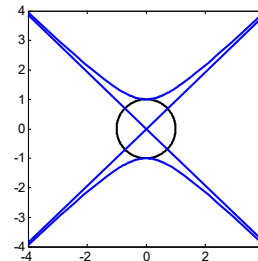
$\text{Re}\{l_x\}, \text{Re}\{l_z\}$



$\text{Im}\{l_x\}, \text{Im}\{l_z\}$

Dvojdílný rotační hyperboloid

$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}$$



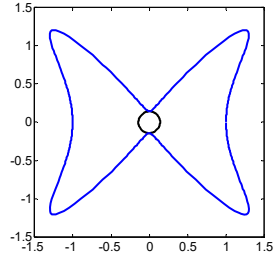
UFE

112

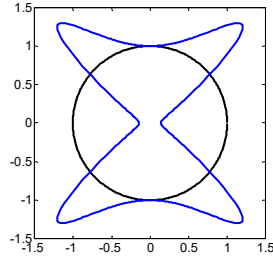
Plochy komplexních vlnových vektorů ve ztrátovém hyperbolickém prostředí

$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} -1.1+0.3i & 0 & 0 \\ 0 & -1.1+0.3i & 0 \\ 0 & 0 & 1+0.2i \end{pmatrix}$$

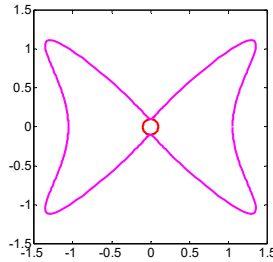
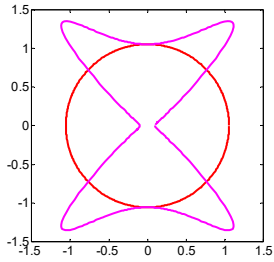
$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} 1+0.2i & 0 & 0 \\ 0 & 1+0.2i & 0 \\ 0 & 0 & -1.1+0.3i \end{pmatrix}$$



$\text{Re}\{l_x\}, \text{Re}\{l_z\}$

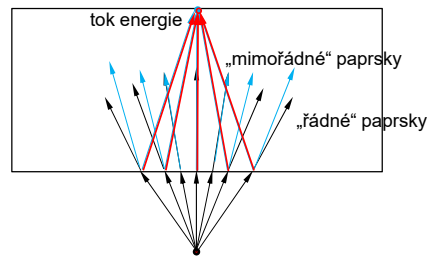
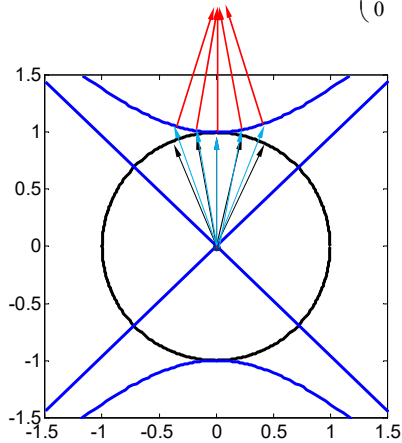


$\text{Im}\{l_x\}, \text{Im}\{l_z\}$



Možné potenciální aplikace: zobrazování planární čočkou z hyperbolického materiálu

$$\varepsilon_{eff} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 < 0$$



... a některé další...