ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA

ÚVOD DO METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1976

OBSAH

	Str.
Úvod	7
1. Základní poznatky o maticích	7
2. Extrém funkce o několika proměnných. Lagrangeova metoda	12
3. Princip duality v teorii pružnosti	17
4. Deformační metoda řešení prutových soustav	30
5. Pružné kontinuum a struktura	34
6. Operátorová a variační formulace fyzikálních úloh	42
7. Některé metody přibližného řešení diferenciálních rovnic	45
8. Matematický základ metody konečných prvků	51
9. O volbě tvarových funkcí	72
10. Homogenní souřadnice	77
11. Prvky složitých tvarů, odvozené transformací z rodičovských elementů	80
12. Ohyb tenkých desek	97
13. Silová varianta metody konečných prvků při řešení rovinných úloh	100
14. Smíšená varianta metody konečných prvků	105
15. Pružná tělesa s počátečním přetvořením a počátečním napětím	109
16. Nelineární úlohy	114
Závěr	120

ÚVOD

Seminář o metodě konečných prvků pořádá Dům techniky ČVTS Praha z podnětu některých účastníků dřívějších seminářů o maticových metodách v pružnosti a pevnosti. Těm, kdo tyto semináře navštívili, není metoda konečných prvků ničím novým. Dnešní seminář však zaměříme poněkud obecněji. Nebudeme se tolik starat o maticovou algebru a o formální aparát jako dříve; místo toho se pokusíme vysvětlit metodu konečných prvků jako obecný matematický prostředek k řešení variačních úloh, popř. diferenciálních rovnic s okrajovými nebo počátečními podmínkami. Neztratíme však zájem ani o fyzikální obsah řešených úloh a o jejich technické využití. Budeme se snažit o největší názornost a srozumitelnost výkladu, což může být někdy na úkor exaktnosti a úplnosti.

Zastáváme názor, že účelem semináře je především propagace nových poznatků a metod. K tomu je nutné, aby účastníci dobře porozuměli podstatě těchto metod a měli jasnou představu o jejich aplikačních možnostech. Ke studiu těchto skript není třeba - podle autorova názoru - žádných zvláštních předběžných znalostí, překračujících rozsah běžného inženýrského vzdělání.

Úvodem opakujeme některé poznatky z matematiky a z mechaniky, jež budeme pro další výklad nejvíce potřebovat, a výklad doplňujeme mnoha řešenými ilustrativními příklady. Čtenáři doporučujeme, aby postup jejich řešení dobře promyslel a pak se jej pokusil samostatně reprodukovat. Zadání příkladů jsou zjednodušena tak, aby se při numerickém výpočtu vystačilo s kalkulačkami nebo malými stolními počítači. K praktickému využití metody konečných prvků ovšem potřebujeme střední nebo velký počítač. Způsobem programování úloh pro tyto počítače se nebudeme zabývat.

Je velkou zásluhou Domu techniky ČVTS Praha, že umožňuje šířit nové poznatky a zavádět je do praxe mnohem rychleji a účinněji, než by to bylo možné např. knižními publikacemi. Autor upřímně děkuje pracovníkům Domu techniky za vzornou organizaci semináře, zejména za pečlivé a včasné vydání těchto skript. Zvlášť děkuje Ing. Vladimíru Václavíkovi, který svými náměty přispěl k obsahovému zaměření semináře a vycházel přáním autora všemožně vstříc.

1. Základní poznatky o maticích

Význam jednotlivých symbolů je průběžně vysvětlován v textu. Pro potřebu těch, kteří se nezúčastnili nedávných seminářů o maticovém počtu, uvedeme zde některé poznatky a způsoby zápisu, které budeme dále používat.

Soubor n veličin sestavených do sloupce nazýváme vektorem a značíme společným symbolem ve složené závorce. Např.

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad ; \qquad \{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad . \tag{1}$$

Vektor $\{x\}$ by mohl být skutečně vektorem $\vec{x}$ v třírozměrném prostoru a měl by složky x_1 , x_2 , x_3 . K znázornění vektoru $\{y\}$ je však třeba čtyřrozměrného prostoru, pro který nemáme přímou geometrickou představu. Své poznatky však můžeme snadno zobecnit i pro tento případ; např. můžeme psát v obou případech formálně stejně vzorec pro délku vektoru, tj. pro jeho <u>absolutní hodnotu</u>:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad ; \qquad |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \quad . \tag{2}$$

Mezi vektory $\{x\}$ a $\{y\}$ může platit lineární transformace (zobrazení)

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + a_{14} y_4 \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + a_{24} y_4 \\ x_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + a_{34} y_4 \end{aligned} \tag{3}$$

To můžeme zkráceně zapsat takto:

$$\{x\} = [A]\,\{y\} \quad , \tag{4}$$

bude-li $[A]$ značit <u>matici</u>

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \tag{5}$$

a bude-li platit, že

$$x_i = \sum_{j=i}^{4} a_{ij}\, y_j \quad . \tag{6}$$

Rovnici (6) považujeme za definici <u>násobení matice</u> $[A]$ <u>zprava vektorem</u> $\{y\}$. Aby toto násobení mělo smysl, musí mít matice $[A]$ tolik sloupců, kolik má vektor $\{y\}$ prvků. Odtud plyne, že násobení $\{y\}[A]$ je nemožné. Pořadí činitelů tedy nelze - až na výjimky - v maticové algebře zaměnit.

Pravidlo (6) můžeme zobecnit i na případ <u>násobení matic</u>. Např. budeme násobit matici $[A]$ o velikosti 3 x 4 (tj. počet řádků x počet sloupců) zprava

maticí $[B]$ o velikosti 4 x 2. Výsledkem je matice $[C]$ o velikosti 3 x 2, jejíž prvky definujeme takto:

$$[C] = [A][B] ,$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} b_{jk} \quad ; \qquad i = 1,2,3 ; \qquad k = 1,2 . \tag{7}$$

Pravá matice musí mít tolik řádků, kolik má levá matice sloupců (v našem případě čtyři).

Rovnice (7) definuje násobení matic; dělení matic není definováno. Soustava rovnic (3), popř. (4) přiřazuje jednoznačně ke každému vektoru $\{y\}$ nějaký vektor $\{x\}$, avšak opačné zobrazení není jednoznačné, neboť ke každému $\{x\}$ lze nalézt nekonečně mnoho vektorů $\{y\}$ (alespoň jednu ze složek y_i lze libovolně zvolit). Je to tím, že rovnice (4) promítá vektor $\{y\}$ z čtyřrozměrného prostoru do třírozměrného. Kdyby oba prostory měly stejný počet rozměrů, mohlo by být zobrazení vzájemně jednoznačné. K tomu je nutné a postačující, aby determinant sestavený z prvků matice - v tomto případě nutně čtvercové - byl různý od nuly. Např. pro transformaci

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

musí platit, že determinant

$$D = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12} \neq 0 . \tag{9}$$

Pak rovnice (8), kterou můžeme zkráceně zapsat jako $\{u\} = [K]\{v\}$, má jednoznačné řešení

$$\{v\} = [K]^{-1}\{u\} . \tag{10}$$

Matici $[K]^{-1}$ nazýváme <u>inverzní</u> k matici $[K]$; její prvky můžeme dostat např. řešením lineární soustavy (8). V tomto případě dostaneme

$$[K]^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} \end{bmatrix} . \tag{11}$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$[K]^{-1}[K] = [K][K]^{-1} = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{12}$$

Matice $[I]$, která má na hlavní diagonále jednotky a jinak jen nuly, je jednotková matice. Hlavní diagonála vede zleva shora vpravo dolů. Má-li některá matice nenulové prvky jen na této diagonále, nazývá se diagonální. Jednotková matice $[I]$ je tedy zvláštní případ diagonální matice. Platí, že

$$[K][I] = [I][K] = [K] . \tag{13}$$

Zaměníme-li v matici $[K]$ sloupce a řádky, dostaneme transponovanou matici

$$[K]^T = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} . \tag{14}$$

Je-li matice $[K]$ souměrná, tj. platí-li, že $k_{ij} = k_{ji}$, je ovšem též $[K]^T = [K]$. Pro transpozici součinu platí pravidlo

$$\left([A][B]\right)^T = [B]^T[A]^T , \tag{15}$$

tj. při transpozici se mění pořadí činitelů. Transponovaný vektor $\{x\}^T$ je řádkovou maticí $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Sečítat a odčítat lze jen matice o stejných rozměrech. Pro součet

$$[C] = [A] + [B] \tag{16}$$

platí, že

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{17}$$

a pro jeho transposici

$$[C]^T = [A]^T + [B]^T . \tag{18}$$

Pořadí sčítanců lze ovšem zaměňovat. Rovnost $[A] = [B]$ platí jen tehdy, je-li $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna i, j. Podobně $\{x\} = \{y\}$ znamená, že $x_i = y_i$, $i = 1, 2 \ldots, n$.

Se čtvercovou souměrnou maticí lze definovat kvadratickou formu

$$U = \frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} , \tag{19}$$

kde $\{x\}^T$ je řádková matice $[x_1, x_2 \ldots x_n]$ vzniklá transposicí vektoru $\{x\}$. Matice U je jednoprvková, tedy skalár (proto nepřipojujeme závorky). Pro matici $[K]$ z rovnice (8) je

$$U = \frac{1}{2}\left[k_{11} x_1^2 + (k_{12} + k_{21}) x_1 x_2 + k_{22} x_2^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} k_{11} x_1^2 + k_{12} x_1 x_2 + \frac{1}{2} k_{22} x_2^2 . \qquad (20)$$

Derivaci skaláru U podle vektoru $\{x\}$ budeme definovat jako vektor

$$\frac{\partial U}{\partial \{x\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} \end{Bmatrix} . \qquad (21)$$

Pro rovnici (20)

$$\frac{\partial U}{\partial \{x\}} = \begin{Bmatrix} k_{11} x_1 + k_{12} x_2 \\ k_{21} x_1 + k_{22} x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

čili

$$\frac{\partial U}{\partial \{x\}} = \frac{\partial}{\partial \{x\}} \left(\frac{1}{2} \{x\}^T [K] \{x\} \right) = [K] \{x\} . \qquad (22)$$

Skalár můžeme dostat také násobením dvou vektorů o stejném počtu prvků, např.

$$W = \{x\}^T \{F\} = [x_1 x_2 x_3] \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 . \qquad (23)$$

Vektor, kterým se násobí zleva, musí být transponován. Je známé, že tento skalární součin dvou vektorů můžeme považovat za práci síly $\vec{F}$ o složkách F_1, F_2, F_3 (v pravoúhlých souřadnicích) při posuvu $\vec{r}$ jejího působiště o složkách x_1, x_2, x_3.

Derivací (23) podle vektoru $\{x\}$ - s přihlédnutím k (21) - vyjde

$$\frac{\partial W}{\partial \{x\}} = \frac{\partial}{\partial \{x\}} \left(\{x\}^T \{F\} \right) = \{F\} . \qquad (24)$$

Protože jednoprvková matice je vždy souměrná, je podle (15)

$$\{x\}^T \{F\} = \{F\}^T \{x\} ,$$
$$\{x\}^T [K] \{x\} = \{x\}^T [K]^T \{x\} . \qquad (25)$$

2. Extrém funkce o několika proměnných. Lagrangeova metoda

Z nauky o pružnosti známe Ménabréovu větu, podle které mají staticky neurčité veličiny v lineárně pružné soustavě takovou velikost, že potenciální energie napjatosti je minimální. Věta platí jen pro soustavy, pro něž platí princip superpozice. Jde tedy o extrém skalární veličiny U vzhledem k proměnným staticky neurčitým veličinám $\{X\}$. Podmínky pro extrém můžeme - s použitím (21) - napsat formálně takto:

$$\frac{\partial U}{\partial \{X\}} = \{0\}. \tag{26}$$

Přitom $\{0\}$ značí vektor, jehož prvky jsou nulové.

V této souvislosti budeme často vyhledávat extrém nějaké spojité funkce

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{27}$$

Soustavu nutných podmínek

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{28}$$

můžeme, jak jsme již ukázali, zapsat také jako

$$\frac{\partial f}{\partial \{x\}} = \{0\}. \tag{29}$$

Rovnice (28) určují souřadnici bodu, v němž extrém nastává, jen tehdy, leží-li tento bod uvnitř vyšetřované oblasti (nikoli na hranici). K zjištění, zda skutečně jde o extrém (a nikoli snad jen o inflexi či o sedlový bod), a k posouzení druhu extrému by bylo nutné počítat další derivace. Proto budeme obecněji hovořit jen o stacionární hodnotě funkce v tomto bodu, což znamená, že funkce se změní o malou veličinu druhého nebo vyššího řádu, pohneme-li se z bodu libovolným směrem o malou vzdálenost prvního řádu. Přírůstek funkce prvního řádu

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \tag{30}$$

je totiž - podle (28) - nulový.

Často se stává, že veličiny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nejsou vzájemně nezávislé, že tedy mezi nimi platí nějaké vztahy *)

---

*) Např. podmínky rovnováhy pro soustavu sil nebo podmínky kompatibility pro složky přetvoření.

$$
\begin{aligned}
&g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\\
&g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&g_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Můžeme postupovat jednoduše tak, že z rovnic (31) vypočteme m veličin (např. x_{n-m+1} , x_{n-m+2} , ..., x_n) a dosadíme do (27). Dostaneme tak funkci o ($n - m$) proměnných, které už nejsou vázány žádnou podmínkou.

Při volbě proměnných, které vyloučíme z funkce (27) dosazením z rovnic (31), nejsme nijak vázáni, můžeme vybrat kterýchkoli m proměnných. Kdyby se nás někdo zeptal, proč jsme zvolili právě ty a ne jiné, uvedlo by nás to do rozpaků. Sice jsme nepostupovali ohybně, přece však cítíme, že jsme "zvýhodnili" některé proměnné proti jiným a že jsme pro tento výběr neměli dostatečný důvod.

Zvláštní cit pro tyto detaily vedl Lagrange k tomu, že se rozhodl ponechat ve funkci f všechny proměnné jako rovnocenné a nezávislé. Podmínky (31) nejprve diferencoval, takže dostal - pro $i = 1, 2, \ldots, m$ -

$$
\frac{\partial g_i}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial g_i}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots \frac{\partial g_i}{\partial x_n}\,dx_n = 0 \tag{32}
$$

a λ_i -násobky těchto rovnic připojil k totálnímu diferenciálu (30), o němž víme, že se rovná nule. Připojení nuly k nule se může jevit jako triviální úkon. Ale není tomu tak. Nejde totiž o nulu, ale o nulový součet konečného počtu sčítanců, které přeskupíme a jednotlivé diferenciály vytkneme takto:

$$
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_i}\right)dx_i = 0\,. \tag{33}
$$

V rovnici (33) je tedy n sčítanců. Parametry λ_1 až λ_m zvolíme nyní tak, aby posledních m oblých závorek v tomto součtu vymizelo. (To však znamená, že tyto parametry mohou obecně záviset na souřadnicích x_1 až x_n). Tento obrat nás zbaví nutnosti eliminovat m diferenciálů závisle proměnných. Zbude pak už jenom ($n - m$) členů, takže místo (33) budeme mít

$$
\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_i}\right)dx_i = 0\,. \tag{34}
$$

Nyní však jsou oblé závorky násobeny už jenom nezávislými - tj. libovolnými - diferenciály. Má-li (34) platit, musí i tyto oblé závorky vymizet. Celkem tedy musí být

$$
\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0 \tag{35}
$$

pro jakékoli $i = 1, 2, \ldots, n$. Rovnice (35) platí tak, jako by všech n proměnných bylo skutečně nezávislých. Lze ukázat, že soustava rovnic (35) je podmínkou pro existenci stacionární hodnoty funkce

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_m g_m . \tag{36}$$

Derivací podle x_i vyjde totiž

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} g_1 + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \lambda_m}{\partial x_i} g_m + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0 . \tag{37}$$

V této rovnici však odpadnou členy s derivacemi $\partial \lambda_j / \partial x_i$, neboť tyto derivace jsou násobeny podle (31) nulami, takže rovnice (37) jsou totožné se soustavou (35). Protože derivace parametrů odpadnou, můžeme i tyto parametry považovat formálně za nezávisle proměnné. Podmínky

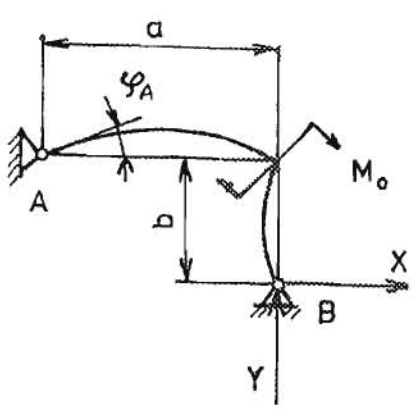
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0 , \quad \cdots , \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} = 0 \tag{38}$$

dávají pak znovu soustavu vedlejších podmínek (31).

Vyhledání stacionární hodnoty funkce f s vedlejšími podmínkami $g_i = 0$ jsme tak převedli na touž úlohu pro funkci F podle (36), v níž jsou všechny proměnné nezávislé.

Poznámka: J. L. Lagrange (1736 až 1813) patří k nejpozoruhodnějším osobnostem osmnáctého století. Ve své knize Mécanique Analytique, vydané v roce 1788, dokázal, že pohybové rovnice mechanické soustavy lze formulovat pomocí dvou skalárních veličin (tedy veličin nezávislých na systému souřadnic), totiž pomocí kinetické a potenciální energie. Zavedením zobecněných souřadnic a sil dosáhl pozoruhodného zjednodušení výpočtů, v nichž je celá soustava brána jako celek, tedy bez nutnosti uvolňovat jednotlivé členy. Hamilton, který sám patřil k věhlasným učencům první poloviny devatenáctého století, nazýval Lagrange "Shakespearem matematiky" pro mimořádnou krásu, eleganci a myšlenkovou hloubku jeho metod.

1. příklad



Obr. 1

Je dán kloubově podepřený pravoúhlý rám podle obr. 1, zatížený v rohu momentem M_o. Ohybová tuhost rámu je EJ = konst. Vypočtěte reakce.

Řešení

Uvolníme rám v kloubu B a jeho působení nahradíme reakcemi X , Y . Tyto reakce nejsou nezávislé, neboť musí splňovat podmínku momentové rovnováhy kolem kloubu A , tj. musí platit, že

$$g(X,Y) = bX + aY - M_o = 0 . \qquad (a)$$

Energie napjatosti působená ohybem je

$$U = \int \frac{M^2}{2EJ}\,ds = \frac{1}{2EJ}\left[\int_o^b (Xy)^2 dy + \int_o^a (Xb + Y\xi - M_o)^2 d\xi = U(X,Y) = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2EJ}\left[\left(\frac{1}{3}b + a\right)b^2X^2 + XYa^2b + \frac{1}{3}a^3Y^2 - 2abM_oX - a^2M_oY + M_o^2a\right)\right] . \qquad (b)$$

Pomocí (a) vyloučíme jednu proměnnou, např. Y , a dostaneme

$$U = \frac{1}{2EJ}\left[\frac{1}{3}b^2(a+b)X^2 - \frac{2}{3}abM_oX + \frac{1}{3}aM_o^2\right] = f(X) . \qquad (c)$$

Z podmínky $\partial f / \partial X = 0$, totiž z rovnice

$$\frac{2}{3}b^2(a+b)X - \frac{2}{3}abM_o = 0$$

vyjde

$$X = \frac{aM_o}{b(a+b)} \qquad (d)$$

a s použitím (a)

$$Y = \frac{bM_o}{a(a+b)} . \qquad (e)$$

"Nesouměrnost" ve výpočtu, vzniklou zvolením Y za závisle proměnnou, odstraňuje Langrangeova metoda. Místo minimalizace funkce $U = U[X, Y(X)] = f(X)$ budeme minimalizovat funkci

$$F(X, Y, \lambda) = U(X,Y) + \lambda g(X,Y) . \qquad (f)$$

Dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X} &= \frac{1}{2EJ}\left[\left(\frac{2}{3}b^3 + 2ab^2\right)X + a^2bY - 2abM_o\right] + \lambda b = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial Y} &= \frac{1}{2EJ}\left[a^2bX + \frac{2}{3}a^3Y - a^2M_o\right] + \lambda a = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= bX + aY - M_o = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

Poslední rovnice je totožná s (a), takže jsme ji ani nemusili psát. První z těchto rovnic dělíme b , druhou a a odečteme. Tím vyloučíme parametr λ . Vyjde

$$(\tfrac{2}{3}b^2 + ab)X + \tfrac{1}{3}a^2 Y - aM_o = 0. \qquad (h)$$

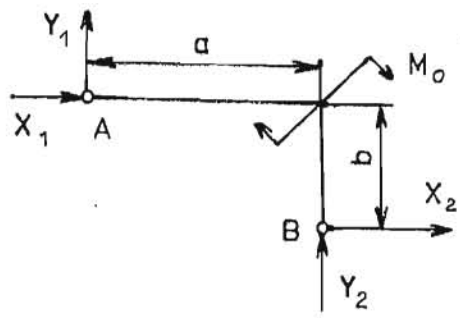
Spolu s poslední z rovnic (g) dává (h) lineární soustavu pro výpočet neznámých X , Y . Vyjde opět (d) a (e). V soustavě (g) jsou obě proměnné X , Y úplně rovnocenné. Vypočteme-li také parametr λ , zjistíme, že

$$\lambda = \frac{1}{6EJ}\,\frac{ab M_o}{(a+b)} . \qquad (i)$$

Je zajímavé, že je to právě velikost úhlu otočení tečny ke střednici rámu v kloubu A , tj. $\lambda = \varphi_A$ (obr. 1), tedy v tom kloubu, k němuž vztahujeme momentovou podmínku rovnováhy (a). Lze dokázat, že to není náhoda. Fyzikální význam Lagrangeova parametru vždy nějak souvisí s fyzikálním významem vedlejších podmínek. Později se o tom přesvědčíme ještě na jiných příkladech. */

Při řešení téže úlohy je však možno postupovat mnohem volněji, můžeme uvolnit oba klouby a nahradit jejich působení podle obr. 2. Energie ohybové napjatosti je

$$U = \frac{1}{6EJ}\left[b^3 X_2^2 + a^3 Y_1^2\right] \qquad (j)$$



Obr. 2

a vedlejší podmínky jsou

$$\begin{aligned} g_1 &= X_1 + X_2 = 0, \\ g_2 &= Y_1 + Y_2 = 0, \\ g_3 &= bX_2 + aY_2 - M_o . \end{aligned} \qquad (k)$$

Budeme tedy minimalizovat funkci

$$F(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = U(X_2, Y_1) + \lambda_1 (X_1 + X_2) + \\ + \lambda_2 (Y_1 + Y_2) + \lambda_3 (bX_2 + aY_2 - M_o). \qquad (l)$$

*/ Nejde tedy jen o čistě "formální" parametr. Viz též 3. příklad.

Derivováním získáme

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \lambda_2 = 0 \,, \qquad \frac{\partial U}{\partial X_2} = \frac{1}{3EJ} b^3 X_2 + \lambda_2 + \lambda_3 b = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1} = \frac{1}{3EJ} a^3 Y_1 + \lambda_1 = 0 \,, \qquad \frac{\partial U}{\partial Y_2} = \lambda_1 + \lambda_3 a = 0 \,. \tag{m}$$

Odtud vypočteme

$$\lambda_1 = -\frac{a^3}{3EJ} Y_1 \,, \qquad \lambda_2 = 0 \,, \qquad \lambda_3 = \frac{b^2}{3EJ} X_2$$

a po vyloučení těchto parametrů ze soustavy (m) dostaneme rovnici

$$a^2 Y_1 = b^2 X_2 \,, \tag{n}$$

která spolu s podmínkami (k) dává

$$X_1 = -X_2 = -\frac{aM_0}{b(a+b)} \,, \tag{o}$$

$$Y_1 = -Y_2 = -\frac{bM_0}{a(a+b)} \,, \tag{p}$$

tedy totéž, co vyšlo dříve, jak poznáme ze srovnání s rovnicemi (d) a (e).

V tomto případě jsme odstranili i nesymetrii postupu způsobenou tím, že jsme při prvním řešení uvolňovali jen kloub B (a nikoli A). Nyní jsou oba klouby - a také všechny reakce - rovnocenné. Vzhledem k tomu, že rovnice (j) obsahuje na pravé straně jen dva členy, je poslední způsob výpočtu dokonce snazší než oba předchozí.

3. Princip duality v teorii pružnosti

Podle Lagrangeova principu virtuálních prací lze podmínky rovnováhy (jichž je obecně pro každé uvolněné těleso šest) nahradit jediným požadavkem, aby celková práce při libovolném virtuálním pohybu byla nulová. Virtuálním pohybem se rozumí libovolný, ale nekonečně malý pohyb, který umožňují vazební podmínky. Nezajímají-li nás vnitřní reakce, nemusíme přitom tělesa ze soustavy uvolňovat. Je-li tento pohyb nekonečně malý, můžeme při něm zanedbat změnu působících sil vzniklou posuvem, takže síly považujeme za konstantní. Princip virtuálních prací je tedy vyjádřen rovnicí $\sum Q_i \delta q_i = 0$, v níž δq_i značí nekonečně malou změnu složky posuvu působiště síly Q_i do směru této síly.

Přitom máme na mysli zobecněné posuvy a síly, takže mezi ně zahrnujeme např. i silovou dvojici a virtuální úhel otočení působiště této dvojice.

U pružných těles je virtuálním posuvem také přetvoření tělesa, při němž vzniká změna energie napjatosti δU. Je to práce spotřebovaná, proto vstupuje do pracovní bilance s opačným znaménkem než virtuální práce vnějších sil

$$\delta U - \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0 . \tag{39}$$

Zvolíme-li jen jeden z přírůstků δq_i různý od nuly a připomeneme-li si definici parciální derivace, dostaneme (pro $\delta q_j = 0, j \neq i$)

$$Q_i = \frac{\delta U}{\delta q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} . \tag{40}$$

Opět by se mohlo zdát, že Lagrangeův princip je zcela triviální, neboť je-li výslednice sil působících na nějaké těleso nulová, je ovšem nulová i práce těchto sil při virtuálním pohybu. Ve skutečnosti to není tak samozřejmé, neboť jde o součet prací jednotlivých sil a nikoli o práci výslednice. Význam principu je především v tom, že nás osvobozuje od závislosti na soustavě souřadnic, že místo složkových a momentových rovnic ke třem osám souřadnic počítáme nyní s jedinou skalární veličinou - s virtuální prací, která na souřadnicích nezávisí (tj. s použitím kterýchkoli souřadnic dostaneme při témž virtuálním posuvu touž virtuální práci). Poznamenejme, že rovnice (40) platí i pro nelineárně pružná tělesa.

Levá strana (39) může být považována za variaci celkové potenciální energie

$$L = U(q_i) - \sum Q_i q_i , \tag{41}$$

považujeme-li síly Q_i za neměnné (dané). Nulová hodnota variace $\delta L = \delta U - \sum Q_i \delta q_i$ je podmínkou existence stacionární hodnoty celkové potenciální energie L . */ Je zřejmé, že veličiny Q_i (síla) a q_i (posuv) nemají v rovnici (41) rovnocenné postavení. Protějškem tohoto "nesouměrného" vztahu by mohl být výraz

$$L^* = U^*(Q_i) - \sum q_i Q_i , \tag{42}$$

---

*/ Součet $W = -\sum Q_i q_i$ značí potenciál vnějších sil. Rovnici (41) lze psát také jako součet potenciální energie napjatosti a potenciálu vnějších sil, tj. $L = U + W$. Odtud název pro L .

při jehož variaci by zůstávaly konstantní posuvy q_i . Budeme jej nazývat komplementární celkovou potenciální energií a hodnotu U^* komplementární energií napjatosti. Anulováním variace δL^* dostaneme

$$\delta L^* = \delta U^* - \sum q_i \delta Q_i = 0 \tag{43}$$

a odtud

$$q_i = \frac{\partial U^*}{\partial Q_i} \tag{44}$$

Mezi vztahy (39) a (43) je podstatný rozdíl. První člen v rovnici (39) značí elementární deformační práci vnějších sil a má fyzikální význam, kdežto obdobný člen v rovnici (43) vznikl pouhou matematickou spekulací. Ač má také fyzikální rozměr práce, žádná skutečná práce to není, neboť při nulovém posuvu působiště síly se nemůže konat žádná fyzikální práce, a to ani tehdy ne, mění-li se síla. */ Podobně energie napjatosti

$$U = \int \Lambda \, dV, \quad \text{kde} \quad \Lambda = \int \{\sigma(\{\varepsilon\})\}^T \{d\varepsilon\} , \tag{45}$$

je skutečnou potenciální energií napjatosti a závisí na posuvech působišť sil, takže $U = U(q_i)$, kdežto komplementární energie napjatosti

$$U^* = \int \Lambda^* dV, \quad \text{kde} \quad \Lambda^* = \int \{\varepsilon(\{\sigma\})\}^T \{d\sigma\}, \tag{46}$$

nemá žádný přímý fyzikální význam a je funkcí působících sil, $U^* = U^*(Q_i)$. Proto

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i , \qquad \delta U^* = \sum \frac{\partial U^*}{\partial Q_i} \delta Q_i . \tag{47}$$

Dualita mezi těmito vztahy je na první pohled zřejmá. Pro lineárně pružné těleso je $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$, takže

$$\Lambda = \int \{\sigma\}^T \{d\varepsilon\} = \int \{\varepsilon\}^T [C]^T \{d\varepsilon\} = \int \{\varepsilon\}^T [C] \{d\varepsilon\} = \int \{\varepsilon\}^T \{d\sigma\} = \Lambda^* ,$$

a tedy i $U = U^*$. Z rovnice (44) pak dostáváme

$$q_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i} , \tag{44a}$$

*/ To však neznamená, že se nemůže unavit sval, předepjatý určitou silou, i když nekoná žádnou fyzikální práci. V lékařství se rozlišuje práce izotonická, při níž sval koná fyzikální práci stálou silou, a práce izometrická, při které se udržuje konstantní délka svalu (a tedy dráha). V tom případě však jde jen o disiponovanou energii.

což je známá Castiglianova věta, platící jen pro lineárně pružná tělesa. Rovnice (40) a (44) však platí i pro tělesa nelineárně pružná.

Význam slova "komplementární" vyplyne z této úvahy: vytvořme součet variací celkové a komplementární celkové potenciální energie

$$\delta \tilde{W} = -\sum (Q_i \delta q_i + q_i \delta Q_i) + \delta U(q_i) + \delta U^*(Q_i) . \tag{48}$$

Tento součet lze považovat za variaci energie

$$\tilde{W} = \sum Q_i q_i + U(q_i) + U^*(Q_i) \tag{49}$$

se dvěma posloupnostmi nezávisle proměnných Q_i , q_i . Podmínky pro existenci stacionární hodnoty nyní jsou

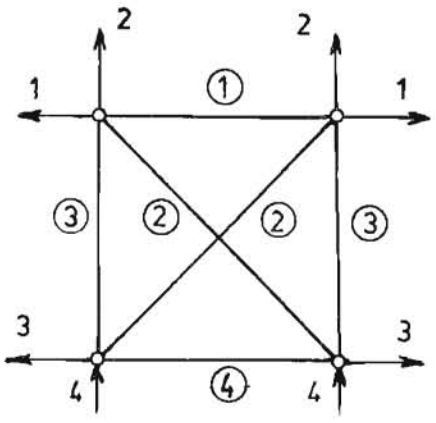
$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q_i} &= -Q_i + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 , \\ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial Q_i} &= -q_i + \frac{\partial U^*}{\partial Q_i} = 0 . \end{aligned} \tag{50}$$

To jsou však rovnice (40) a (44). Doplněním celkové energie o energii komplementární (= doplňkovou) jsme dosáhli úplné symetrie v postavení obou proměnných Q_i , q_i . Tato symetrie je základem principu duality v teorii pružnosti.

Poznámka: V literatuře najdeme pro rovnice (40) a (44) rovněž označení "Castiglianovy věty". Italský konstruktér železnic, A. Castigliano, je uveřejnil asi před sto lety, avšak jen pro lineárně pružná tělesa. Pojem komplementární energie neznal, ten zavedli do výpočtu až F. Z. Engesser a H. M. Westergaard. Věta (40) je - jak jsme ukázali - formou Lagrangeova principu virtuálních prací (v úpravě pro pružná tělesa).

2. příklad

Princip duality vysvětlíme ještě na příkladu řešení staticky neurčité, lineárně pružné prutové soustavy podle obr. 3. Soustava se deformuje souměrně k vertikální ose (osa není na obrázku vyznačena).



Obr. 3

Řešení

Postačí, budeme-li uvažovat čtyři složky posuvů q_1 až q_4 a sil Q_1 až Q_4 . Energii napjatosti vypočteme pomocí sil v prutech P_1 až P_4 a prodloužení prutů p_1 až p_4 .

Pruty ② a ③ jsou v soustavě zastoupeny dvakrát. Napíšeme rovnice platné pro tuto prutovou soustavu jednak v deformační, jednak v silové variantě; označení rovnic pro silovou variantu rozlišíme hvězdičkou.

Konstituční rovnice jsou

$$P_i = k_i p_i \quad , \qquad p_i = c_i P_i \quad . \tag{a, a*}$$

Potenciál vnějších sil (každá je v soustavě podle obr. 3 zastoupena dvakrát)

$$W = -2(Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + Q_3 q_3 + Q_4 q_4) = W(q_i) . \tag{b}$$

Potenciál vnějších deformací

$$W^* = -2(q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + q_3 Q_3 + q_4 Q_4) = W^*(Q_i) . \tag{b*}$$

Záporné znaménko v rovnici (b) vyjadřuje zmenšení vnější "zásoby" práce (tj. potenciálu) o práci vykonanou vnějšími silami. Obdobně je tomu u rovnice (b*).

Potenciální energie napjatosti (tj. "zásoba" vnitřní deformační práce)

$$U = \frac{1}{2} \sum P_i p_i = \frac{1}{2} (k_1 p_1^2 + 2k_2 p_2^2 + 2k_3 p_3^2 + k_4 p_4^2) . \tag{c}$$

Komplementární energie napjatosti

$$U^* = \frac{1}{2} \sum p_i P_i = \frac{1}{2} (c_1 P_1^2 + 2c_2 P_2^2 + 2c_3 P_3^2 + c_4 P_4^2) . \tag{c*}$$

Vztah mezi prodloužením prutů a posuvy (s označením $\alpha = 1/\sqrt{2}$)

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} . \tag{d}$$

Vztah mezi vnějšími silami a silami v prutech:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} . \tag{d*}$$

Matice v posledních dvou rovnicích jsou singulární, tj. posuvy nevyplývají jednoznačně z prodloužení prutů a síly v prutech nevyplývají jednoznačně z vnějších sil, takže matice nelze invertovat. Prodloužení prutů nejsou

nezávislá, platí mezi nimi geometrický vztah (podmínka kompatibility)

$$p_1 - 2\sqrt{2}\,p_2 + 2p_3 + p_4 = 0 . \qquad (e)$$

Mezi vnějšími silami podobně platí podmínka rovnováhy

$$Q_2 + Q_4 = 0 . \qquad (e^*)$$

Ostatní podmínky rovnováhy jsou vzhledem k souměrnosti vždy splněny. Rovnice (e), (e*) vyjadřují lineární závislost v soustavách (d), (d*) a jsou podmínkou řešitelnosti těchto soustav. */

Z podmínek

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(W + U) = 0 , \text{ popř. } \frac{\partial}{\partial Q_i}(W^* + U^*) = 0 \quad (f), (f^*)$$

dostaneme soustavy rovnic pro neznámé q_i , popř. Q_i . Pro stručnost nyní zvolíme $k_i = c_i = 1 = \text{konst.}$ S použitím pravidla pro derivaci složené funkce

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial U}{\partial p_j}\,\frac{\partial p_j}{\partial q_i}$$

dostaneme pro deformační metodu (po krácení dvěma) z rovnic (f), (b) a (c)

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} . \qquad (g)$$

S překvapením zjistíme, že matice je singulární, takže soustavu rovnic (g) nelze řešit. Je to způsobeno tím, že jsme dosud nevyloučili posuv soustavy jako tuhého celku ve svislém směru (ve vodorovném ano, neboť vodorovný posuv celé soustavy např. vlevo by odporoval předpokládané souměrnosti). Soustava má tedy dosud jeden stupeň volnosti. Předepíšeme proto okrajovou podmínku $q_4 = 0$ a vynecháme v soustavě (g) čtvrtý řádek (čtvrtou rovnici). Zároveň vynecháme i čtvrtý sloupec v matici, neboť se násobí hodnotou $q_4 = 0$.

---

*/ Bližší poučení o řešení přeurčených nebo neurčitých soustav lineárních rovnic jsme podali na třetím semináři Maticové metody v pevnostních výpočtech, Dům techniky ČVTS v Praze (1973).

Dostaneme tak zmenšenou soustavu

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}, \qquad (h)$$

z níž vyjde vektor posuvů $\{q\}$ pro dané síly $\{Q\}$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}. \qquad (i)$$

Síla Q_4 je nyní reakcí v dolních kloubech, které se nemohou svisle pohybovat, a plyne buď ze čtvrté rovnice (g) pro $q_4 = 0$, nebo kratčeji z (e^{*}).

Čtvercová matice v rovnici (h) je <u>maticí tuhosti</u>, v rovnici (i) <u>maticí poddajnosti</u> (je složena z příčinkových činitelů). Při silové metodě nemůžeme z rovnic (c^{*}) jednoznačně vyloučit síly P_i v prutech pomocí (d^{*}), neboť soustava (d^{*}) má jeden "stupeň volnosti". Má nekonečně mnoho řešení, která můžeme napsat takto:

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_1 + X, & P_3 &= Q_2 + X, \\ P_2 &= -X\sqrt{2}, & P_4 &= Q_3 + X. \end{aligned} \qquad (d^{**})$$

Parametr X může nabývat kterékoli hodnoty. Po dosazení ze soustavy (d^{**}) do (c^{*}) (pro $c_i = 1$) dostaneme

$$U^{*} = \left(\tfrac{1}{2}Q_1^2 + Q_2^2 + \tfrac{1}{2}Q_3^2\right) + (Q_1 + 2Q_2 + Q_3)X + 4X^2 \qquad (c^{**})$$

a z rovnice (f^{*}) s použitím vedlejší podmínky (e^{*})

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 - q_4 \\ q_3 \\ \hline 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right]\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 = -Q_4 \\ Q_3 \\ \hline X \end{Bmatrix}. \qquad (g^{*})$$

Poslední řádek jsme dostali tím, že jsme považovali parametr X za další - pátou - proměnnou sílu a napsali podmínku

$$\frac{\partial}{\partial X}(W^{*} + U^{*}) = \frac{\partial U^{*}}{\partial X} = 0.$$

Eliminací X a dosazením $q_4 = 0$ dostaneme *)

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 12 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} . \qquad (h^*)$$

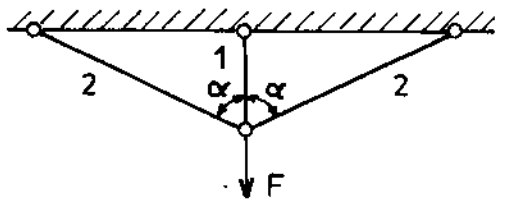
Řešením této soustavy dostaneme vnější síly $\{Q\}$ vzniklé posunutím uzlů o dané posuvy $\{q\}$

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} . \qquad (i^*)$$

Srovnáme-li obě metody, vidíme, že deformační metoda je jednodušší, neboť vyjádříme-li užitím (d) všechny deformace pomocí posuvů $\{q\}$, dostaneme vždy kompatibilní přetvoření (nezávisle na stupni statické neurčitosti). Vypočteme-li podle rovnice (d) prodloužení prutů $\{p\}$, snadno se přesvědčíme, že vedlejší podmínka (e) je splněna. Silová metoda však musí počítat se stupni volnosti v řešení soustavy (d^*), kterých je tolik, kolik má mechanická soustava stupňů statické neurčitosti, ale její výhodou je, že nepotřebujeme řešit případ až do konce. Zpravidla totiž nejsou dány posuvy, ale vnější síly, takže vše, co nás zajímá, bývá obsaženo již v soustavě (h^*), kterou proto nepotřebujeme řešit. Soustava (i^*) nás již nezajímá.

Při aplikaci číslicových počítačů převažuje výhoda principiální jednoduchosti deformační metody nad nevýhodou eventuální větší pracnosti, takže se nyní téměř výhradně používá deformační varianta výpočtu. Silová metoda je naopak vhodnější pro ruční výpočty. Proto se až do nedávna používala v technické praxi a mnoho rutinních metod, uváděných v učebnicích o stavbě ocelových a jiných konstrukcí, bylo odvozeno právě ze silové metody výpočtu.

3. příklad



Obr. 4

Tři vlákna podle obr. 4 jsou bez vůle spojena ve společném uzlu a zatížena v rovině souměrnosti silou Q. Platí pro ně nelineární konstituční rovnice $p_1 = P_1^2$, $p_2 = 2P_2^2$, kde p_i jsou absolutní prodloužení vláken a P_i jimi přenášené síly, $i = 1, 2$. Vztahy platí číselně (nikoli rozměrově); zavedli jsme je pro zkrácení zápisu a větší přehlednost. Úhel $\alpha = 60°$.

*) Síla X je vnitřní, a proto není zastoupena v potenciálu W^*.

Řešení deformační metodou

$$W = -Qq , \tag{a}$$

(q = svislý posuv uzlu),

$$U = \frac{2}{3} p_1^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\, p_2^2 . \tag{b}$$

Vedlejší podmínky (kompatibilita)

$$\begin{aligned} f_1 &= p_1 - 2p_2 = 0 , \\ f_2 &= q - p_1 = 0 . \end{aligned} \tag{c}$$

Hledá se stacionární hodnota Lagrangeovy funkce

$$L = W + U + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \tag{d}$$

vzhledem k proměnným p_1 , p_2 , q , popř. též λ_1 , λ_2 . Derivujeme tedy Lagrangeovu funkci a derivace anulujeme

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p_1} &= \sqrt{p_1} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 , \\ \frac{\partial L}{\partial p_2} &= \sqrt{2p_2} - 2\lambda_1 = 0 , \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= -Q + \lambda_2 = 0 , \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= p_1 - 2p_2 = 0 , \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= q - p_1 = 0 . \end{aligned} \tag{e}$$

Odtud

$$\lambda_1 = \sqrt{p_2/2} \quad , \quad \lambda_2 = \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2/2} = \frac{3}{2}\sqrt{p_1} = Q , \tag{f}$$

$$q = p_1 = \frac{4}{9} Q^2 .$$

Řešení silovou metodou

$$W^* = -qQ , \tag{a*}$$

$$U^* = \frac{1}{3} P_1^3 + \frac{4}{3} P_2^3 . \tag{b*}$$

Podmínka rovnováhy

$$g = Q - P_1 - P_2 = 0 . \qquad (c^*)$$

Lagrangeova funkce

$$L^* = W^* + U^* + \lambda g = 0 . \qquad (d^*)$$

Podmínky pro existenci stacionární hodnoty této funkce

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial P_1} &= P_1^2 - \lambda = 0 , \\ \frac{\partial L^*}{\partial P_2} &= 4P_2^2 - \lambda = 0 , \\ \frac{\partial L^*}{\partial Q} &= -g + \lambda = 0 , \\ \frac{\partial L^*}{\partial \lambda} &= Q - P_1 - P_2 = 0 . \end{aligned} \qquad (e^*)$$

Odtud

$$\lambda = P_1^2 = 4P_2^2 = g \qquad (\text{tedy } P_1 = 2P_2),$$

$$P_1 = \frac{2}{3} Q , \quad P_2 = \frac{1}{3} Q , \quad Q = \frac{3}{2} \sqrt{g} . \qquad (f^*)$$

Všimněme si, že v deformační metodě značí $\lambda_1 = Q/3$ výslednici sil v obou postranních vláknech; o ni je menší síla P_1 proti síle Q. Dále $\lambda_2 = Q$. V silové metodě zase $\lambda = g$ značí posuv společného působiště sil vstupujících do rovnováhy. Potvrzuje se, že význam Lagrangeova parametru souvisí s významem vedlejších podmínek. Je to vždy doplňková veličina k vazbě popsané vedlejšími podmínkami.

4. příklad

Pro lineárně pružné prutové soustavy odvoďte věty o jednotkovém posuvu a o jednotkové síle.

Řešení

Označme síly v prutech $\{P\}$ a vnější síly $\{Q\}$. Prutové soustavě udělíme virtuální posuv $\{\delta q\}$ uzlů, které vyvolá kompatibilní prodloužení prutů $\{\delta p\}$. U lineární soustavy existuje mezi nimi vztah

$$\{\delta p\} = [B]\{\delta q\} . \qquad (a)$$

Prvky b_{ij} matice $[B]$ jsou konstanty. Virtuální práce je pak

$$\delta L = \{\delta p\}^T \{P\} - \{\delta q\}^T \{Q\} \qquad (b)$$

a po dosazení z (a)

$$\delta L = \{\delta q\}^T \left([B]^T \{P\} - \{Q\} \right) = \{0\} \ . \qquad (c)$$

Protože $\{\delta q\}$ je libovolné, musí být oblá závorka rovna nule. Odtud

$$\{Q\} = [B]^T \{P\} \ . \qquad (d)$$

Rozepíšeme-li rovnici (d), dostaneme

$$Q_j = \sum_i b_{ij} P_i \ . \qquad (e)$$

Podle (a) však

$$\delta p_i = \sum_j b_{ij} \delta q_j \ . \qquad (f)$$

Odtud

$$b_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \frac{\Delta p_i}{\Delta q_j} = \frac{\Delta p_i = \overline{p_i}}{\Delta q_j = 1} = \overline{p_i} \ . \qquad (g)$$

Zde $\overline{p_i}$ je prodloužení i-tého prutu, které je kompatibilní s jednotkovým posuvem $q_j = 1$. Potom podle (e)

$$Q_j = \sum_i \overline{p_i} P_i \ . \qquad (h)$$

Tato rovnice vyjadřuje <u>větu o jednotkovém posuvu</u>: "Sílu Q_j dostaneme jako součet součinů existujících sil P_i v prutech soustavy násobených prodlouženími $\overline{p_i}$ prutů kompatibilními s jednotkovým posuvem $q_j = 1$."

Věta o jednotkovém posuvu (h) vede k zajímavému důsledku. Je-li ve staticky neurčité soustavě <u>vlastní pnutí</u>, tj. existují-li v ní síly P_i bez působení vnějších sil Q_j, je $\sum_{i=1}^{m} \overline{p_i} P_i = 0$. To znamená, že síly v prutech tvořící vlastní pnutí nekonají při deformacích vynucených posunutím uzlů žádnou práci, tj. jejich celková deformační práce je při jakémkoli (malém) posunutí uzlů nulová. Energie napjatosti příslušná vlastnímu pnutí se tedy při působení vnějších sil nemění a nevstupuje do rovnic (40) a (44a). Lineárně pružná prutová soustava se účinkem vnějších sil deformuje tak, jako by v ní žádné vlastní pnutí nebylo. Je to zvláštní případ plynoucí též

z obecnější Colonettiho věty, podle níž je u lineárně pružných těles interakční energie při působení vnějších sil a vlastních pnutí nulová. */

Věta o jednotkové síle je duální k předchozí větě. Komplementární virtuální práce je

$$\delta L^* = \{\delta P\}^T \{p\} - \{\delta Q\}^T \{q\} = \{0\} \quad . \qquad (b^*)$$

Zde $\{\delta P\}$ jsou libovolné síly v prutech, které splňují podmínku rovnováhy se silami $\{\delta Q\}$ v uzlech; musí proto mezi nimi platit nějaký lineární vztah

$$\{\delta P\} = [b]\ \{\delta Q\} \quad . \qquad (a^*)$$

Prvky β_{ij} matice $[b]$ jsou konstanty. Rovnice (a^*) není odvozena inverzí a variací z rovnice (d), neboť matice $[B]$ je obecně obdélníková. Proto také - je-li soustava několikrát staticky neurčitá - není rovnice (a^*) jediná, lze ji psát různým způsobem. Na síly $\{\delta P\}$ neklademe jiný požadavek, než aby byly v rovnováze se silami $\{\delta Q\}$. Nemusí to tedy být skutečné síly v prutech, které jsou kromě podmínek rovnováhy vázány i deformačními podmínkami. Dosazením (a^*) do (b^*) vyjde

$$\{\delta Q\}^T \left([b]^T \{p\} - \{q\} \right) = \{0\} \qquad (c^*)$$

a odtud

$$\{q\} = [b]^T \{p\} \quad . \qquad (d^*)$$

S obdobnou argumentací jako dříve dostaneme pro jednotlivé posuvy

$$q_j = \sum_i \overline{P}_i p_i \quad , \qquad (h^*)$$

což je věta o jednotkové síle: "Posuv q_j ve směru síly Q_j vypočteme jako součet součinů skutečných prodloužení p_i prutů v soustavě násobených silami $\overline{P}_i$ v týchž prutech, které jsou v rovnováze s jednotkovou silou $Q_j = 1$." Protože síly $\overline{P}_i$ jsou vázány jen podmínkou rovnováhy se silou $Q_j = 1$, mohou být obvykle v některých prutech zvoleny nulové. Tím se podstatně usnadní výpočet.

Obě věty jsme odvodili pro prutové soustavy. Lze je však zobecnit i pro pružná spojitá tělesa (kontinuum).

---

*/ COLONETTI, D.: Accad. Lincei Rend. 24, 404, 1915. Colonettiho věta se týká pružných těles, tedy nejen prutových soustav.

5. příklad

U prutové soustavy dokažte dualitu mezi rovnicemi kompatibility a rovnicemi rovnováhy.

Řešení

Nechť je m prutů spojeno v n uzlech. Kompatibilní prodloužení $\{p\}$ prutů dostaneme, odvodíme-li je z posuvů $\{q\}$ uzlů (viz 2. příklad). Pak bude platit, že

$$\{p\} = [A]\{q\} \quad . \tag{a}$$

Matice $[A]$ je obecně obdélníková (pro rovinnou soustavu má rozměr $m \times 2n$). Rovnice rovnováhy lze napsat ve tvaru lineární závislosti mezi vnějšími silami $\{Q\}$ a silami v prutech $\{P\}$

$$\{Q\} = [B]\{P\} \quad . \tag{b}$$

Virtuální práce vnějších sil se musí rovnat deformační práci vnitřních sil

$$\{\delta q\}^T\{Q\} = \{\delta p\}^T\{P\} \quad . \tag{c}$$

Dosazením z (a) a (b) do (c) - s použitím (15) - dostaneme

$$\{\delta q\}^T[B]\{P\} = \{\delta q\}^T[A]^T\{P\} \quad . \tag{d}$$

Protože virtuální posuv $\{\delta q\}$ lze volit libovolně, musí být

$$[B]\{P\} = [A]^T\{P\} \quad . \tag{e}$$

Podle (b) má levá strana (e) význam vektoru vnějších sil, který lze volit libovolně. Při konstantní matici $[B]$ to znamená, že i vektor $\{P\}$ lze libovolně měnit, takže rovnice (e) může být splněna jen tehdy, platí-li, že

$$[B]^T = [A], \qquad \text{popř.} \quad [B] = [A]^T \quad . \tag{f}$$

Známe-li tedy rovnici (a), můžeme ihned napsat i rovnici (b) a naopak.

Podíváme-li se z tohoto hlediska znovu na 2. příklad, na rovnice (d) a (d^*), zjistíme, že tam vztah $[B]^T = [A]$ neplatí. Rozpor je však jen zdánlivý; je způsoben tím, že jsme při formulaci rovnic (d) a (d^*) využili souměrnost. Kdybychom číslovali pruty a uzly průběžně a bez zřetele k souměrnosti, naše rovnice (f) by platila. Dostali bychom však větší matice, např. matice v rovnici (d) by měla velikost 6 x 8. Obdobná poznámka se týká i 3. příkladu. Rovnice (c), popř. (c^*) by bez zřetele k souměrnosti v tomto případě zněly

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \{q\}\,, \qquad \{Q\} = [1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}. \qquad (3\,c,\ c^*)$$

To jsou však právě rovnice (a) a (b). Všimněme si, že platí i pro nelineárně pružnou soustavu.

Výhoda, kterou jsme získali využitím souměrnosti při číslování prutů, posuvů a sil, byla vyvážena ztrátou platnosti rovnice (f). Pokud máme k výpočtu číslicový počítač, nezáleží nám tolik na rozsahu výpočtů, jako na vztahu (f), který můžeme použít ke kontrole výpočtů. Proto číslujeme pruty raději průběžně a souměrnost nevyužíváme, leda až nakonec ke kontrole výsledků.

4. Deformační metoda řešení prutových soustav

Kompatibilní prodloužení prutů dostaneme, vyjádříme-li je pomocí posuvů uzlů $\{q\}$

$$\{p\} = [A]\{q\}\,. \qquad (51)$$

Konstituční zákon, vyjadřující vztah mezi silami v prutech a jejich prodloužením, je dán rovnicí

$$\{P\} = [\varkappa]\{p\}\,. \qquad (52)$$

Matice $[\varkappa]$ je diagonální a složená z prvků

$$\varkappa_{ii} = \frac{E_i S_i}{l_i}\,, \qquad (53)$$

kde E_i značí modul pružnosti v tahu či tlaku, S_i průřez a l_i délku i-tého prutu. S použitím těchto vztahů můžeme již sestavit výraz pro potenciální energii napjatosti

$$U = \frac{1}{2}\{p\}^T\{P\} = \frac{1}{2}\{q\}^T[A]^T[\varkappa][A]\{q\}\,. \qquad (54)$$

S označením

$$[K] = [A]^T[\varkappa][A] \qquad (55)$$

je

$$U = \frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\}\,. \qquad (56)$$

Potenciál vnějších sil je

$$W = -\{q\}^T \{Q\} . \tag{57}$$

Z Lagrangeova principu $\delta L = \delta(U+W) = 0$, totiž z rovnice

$$\{\delta q\}^T \frac{\partial (U+W)}{\partial \{q\}} = \{\delta q\}^T ([K]\{q\} - \{Q\}) = 0,$$

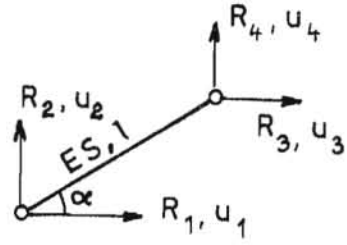
dostaneme základní rovnici pro řešení prutové soustavy

$$[K]\{q\} = \{Q\} , \tag{58}$$

která spolu s okrajovými podmínkami nakonec dá řešení */

$$\{q\} = [f]\{Q\} . \tag{59}$$

Matici tuhosti $[K]$ můžeme sestavit ještě jinak, pomocí superpozice. Pro libovolný prut sestavíme závislost reakcí v kloubech R_1 až R_4 na posuvech u_1 až u_4 (obr. 5):



Obr.5

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} . \tag{60}$$

Indexy 1 až 4 se opakují u každého prutu, jsou to tedy lokální indexy. Rovnici (60) napíšeme pro každý prut, takže budeme mít m rovnic

$$\{R^{(e)}\} = [\mathcal{K}^{(e)}]\{u^{(e)}\} , \tag{61}$$

$e = 1, 2, \ldots, m$. Matici $[\mathcal{K}^{(e)}]$ nazýváme elementární maticí tuhosti. Pro prut na obr. 5 dostaneme z Hookeova zákona se zkráceným označením $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$

$$[\mathcal{K}^{(e)}] = \frac{E_e S_e}{l_e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} . \tag{62}$$

*/ Matice $[f]$ je inverzní ke zmenšené matici tuhosti.

K tomu stačí, abychom zvolili jednu z hodnot u_i rovnou jedničce a ostatní nule a vypočetli reakce R_1 až R_4, které pak tvoří i-tý sloupec matice $[\mathcal{K}^{(e)}]$.

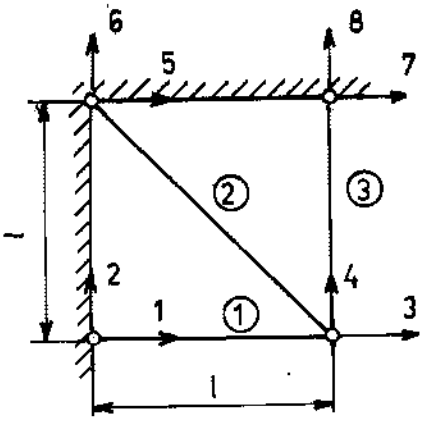
Nyní si vytvoříme pro celkovou matici $[K]$ nulové pole o velikosti $2n \times 2n$ a pošleme do něho jednotlivé prvky elementárních matic tak, že je vždy přičteme k hodnotě na příslušné adrese, určené číslem řádku a sloupce. K tomu použijeme průběžné číslování posuvů a sil v globální soustavě. Souvislost lokálních a globálních indexů vyplývá z dispozice prutové soustavy.

Při tomto postupu vycházíme z poznatku, že reakce v nějakém uzlu, vzniklá jeho jednotkovým posuvem, je dána součtem reakcí přenášených do jednotlivých prutů, jež se v tomto uzlu stýkají. Tak pomocí $[\mathcal{K}^{(e)}]$ sestavíme přímo matici $[K]$, což ještě objasníme na příkladu. Podobně i vnější síly, vnášené do jednotlivých prutů v uzlech soustavy, složíme do výsledného vektoru $\{Q\}$ vnějších sil přenášených do celé prutové soustavy v uzlech, jejichž posuvy jsou - ve shodném globálním číslování - $\{q\}$. To je podstata "přímé tuhostní metody" (direct stiffness method).

6. příklad

Řešte prutovou soustavu na obr. 6, pro niž

$\mathcal{K}_{11} = k = ES/l$, $\mathcal{K}_{22} = k/\sqrt{2}$, $\mathcal{K}_{33} = k$.



Obr. 6

Řešení

Nejprve sestavíme rovnice (51) a (52). Dostaneme (se zkráceným označením $\alpha = 1/\sqrt{2}$)

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha & -\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix}, \qquad (a)$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}. \qquad (b)$$

Z rovnice (55) vyjde celková matice tuhosti 8 x 8 (s označením $\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$)

$$[K] = k \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\beta & -\beta & -\beta & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 1+\beta & \beta & -\beta & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\beta & \beta & \beta & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -\beta & -\beta & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad . \tag{c}$$

Tato matice je singulární, a proto vztah (58) nelze ještě řešit. Z okrajových podmínek však vyplývá, že $q_1 = q_2 = q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = 0$. Vynecháme proto sloupce a řádky 1, 2, 5, 6, 7 a 8 a dostaneme zmenšenou soustavu (58)

$$k \begin{bmatrix} 1+\beta & -\beta \\ -\beta & 1+\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} . \tag{d}$$

Z ní vypočteme

$$\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+1 & 1 \\ 1 & 2\sqrt{2}+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} . \tag{e}$$

Nyní budeme postupovat druhou metodou. Nejprve určíme elementární matice tuhosti

$$[\mathcal{K}^{(1)}] = k \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} , \quad [\mathcal{K}^{(3)}] = k \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} ,$$

$$[\mathcal{K}^{(2)}] = k\beta \begin{array}{c} \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} . \tag{f}$$

K elementárním maticím jsme připisovali čísla sloupců a řádků shodná s globálními indexy příslušných posuvů z vektoru $\{q\}$. Např. prvek $k_{45}^{(2)} = k\beta$

značí svislou reakci $R_4^{(2)}$ přenášenou na prut ② v pravém dolním kloubu při jednotkovém posuvu $q_5 = 1$ a jeho adresa je určena číslem řádku - 4 - a číslem sloupce - 5. Jednotlivé prvky elementárních matic nyní pošleme do nulového pole připraveného pro matici $[K]$, a to podle indexů, jimiž jsme označili řádky a sloupce, a prvky na stejné adrese budeme postupně sčítat. Např. prvek k_{34} v matici $[K]$ vznikne sečtením prvků $k_{34}^{(1)} + k_{34}^{(2)} + k_{34}^{(3)} = k\,[0 + 0 + (-\beta)] = -k\beta$. Tento prvek značí výslednou sílu Q_3 při jednotkovém posuvu $q_4 = 1$ (ostatní posuvy jsou nulové); výsledná síla je složena z dílčích reakcí $R_3^{(1)} = k_{34}^{(1)}$ až $R_3^{(3)} = k_{34}^{(3)}$. Podobně prvek $k_{33} = k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)} = k\,(1 + 0 + \beta) = k(1 + \beta)$. Tak dostaneme celkovou matici tuhosti, která se shoduje s maticí (c).

Matice (c), popř. (f) mají důležité vlastnosti, usnadňující numerickou kontrolu. Jsou souměrné, jak lze dokázat z definice (55), a mají nulové součty sloupců (i řádků), což lze dokázat s použitím rovnic rovnováhy, které musí síly $\{Q\}$, popř. reakce $\{R^{(e)}\}$ v uzlech splňovat.*/ Tomu je ekvivalentní důkaz, odvozený z předpokladu, že posuv soustavy (či jednotlivého uvolněného členu) jako tuhého celku nevyvolává v uzlech žádné reakce, neboť mu přísluší nulové prodloužení prutů.

Výhody druhé metody - skládání celkové matice tuhosti z elementárních matic - se v uvedeném příkladu příliš neprojevují. Ocenili bychom je však u větších a složitějších soustav. Proto se druhá metoda používá vždy, uskutečňujeme-li výpočet na číslicovém počítači.

5. Pružné kontinuum a struktura

Přetvoření prutové soustavy je známo, jsou-li dány posuvy uzlů. Podobně platí, že přetvoření rámové konstrukce lze určit z posuvů a z úhlů otočení styčníků. Počítáme-li s nimi jako s proměnnými $\{q\}$, jsme u těchto struktur vždy schopni najít elementární matice tuhosti a jejich adicí celkovou matici tuhosti. Řešení je pak jen otázkou počtářské rutiny, popř. otázkou vhodného programu pro číslicový počítač. To jsme ukázali v minulé kapitole.

V kontinuu však neexistují "uzly" ani "styčníky", které by úplně určovaly přetvoření v kontinuu svými posuvy. Zvolit některé referenční body a prohlásit je za uzly zřejmě nestačí, protože konečný počet posuvů těchto uzlů nepostačuje k určení posuvů v ostatních bodech, jichž je nekonečně mnoho.

Vnucuje se však myšlenka, jak tuto nesnáz překlenout: definovat přibližnou závislost posuvů v obecném bodě tělesa na posuvech několika vybraných "uzlů". To není zcela nová myšlenka. Také u diferenčních metod

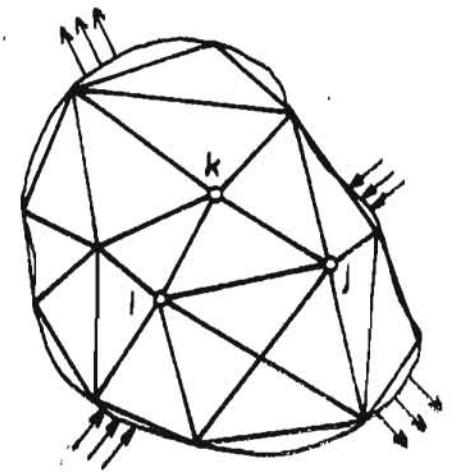
---

*/ Jsou nulové součty zvlášť lichých a zvlášť sudých prvků, neboť podmínky rovnováhy můžeme psát pro směr kterékoli osy souřadnic.

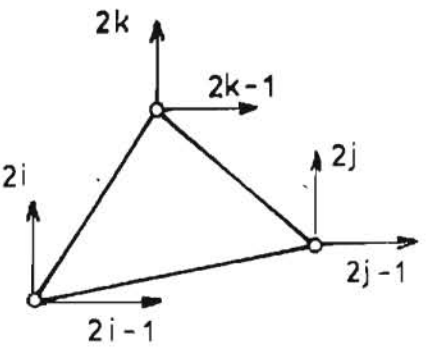
(u metody sítí) volíme "dešifrovací algoritmus", jehož pomocí určujeme funkční hodnotu v obecném bodě funkčními hodnotami stanovenými výpočtem na vybrané množině bodů - uzlů sítě. Rozdíl je však v tom, že nyní tento algoritmus volíme předem a funkční hodnoty v uzlech budou na něm záviset.

U diferenčních metod tomu tak není; tam volíme dešifrovací algoritmus dodatečně a funkční hodnoty na něm nezávisejí. Popsaným způsobem vneseme uměle určitou "strukturu" do spojitého tělesa - do kontinua - a omezíme tím jeho počet stupňů volnosti. K řešení, které však může být jen přibližné, pak použijeme postup známý z řešení prutových soustav. To je velmi důležitý myšlenkový krok. Později uvidíme, že tento intuitivní postup má i teoretické oprávnění. Zatím však postupujeme tak, jak se ubíral historický vývoj metody konečných prvků.

Pro větší přehlednost se omezíme na případ rovinné napjatosti v oblasti podle obr. 7. Zvolíme v ní libovolnou trojúhelníkovou síť a vrcholy těchto trojúhelníků budeme považovat za "uzly". Tři takové uzly, označené i , j , k , jsou vyznačeny také v obr. 8, kde je zakreslen jeden trojúhelníkový prvek z obr. 7. Posuvy uzlů (a složky reakcí v nich) průběžně očíslujeme, takže i -tému uzlu přísluší posuvy q_{2i-1} (vodorovný) a q_{2i} (svislý). Reakce v uzlech, přenášené z okolních prvků do daného trojúhelníku ve směru těchto posuvů, jsou Q_{2i-1} , Q_{2i} . Prvky na sebe vzájemně působí jen těmito reakcemi. Pro jednoduchost volíme v dalším výkladu případ $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$, takže posuvy uzlů prvku na obr. 8 budou q_1 , q_2 , ..., q_6 a reakce Q_1 , Q_2 , ..., Q_6 .



Obr. 7



Obr. 8

Celkem budeme mít v tělese na obr. 7 m prvků (trojúhelníků) a n uzlů, tj. vektor $\{q\}$ bude mít $2n$ složek. Pro každý prvek (trojúhelník) volíme funkce přiřazující posuvy $u(x,y)$, $v(x,y)$ bodů tohoto prvku k posuvům jeho uzlů q_1 až q_6 . Takovými nejjednodušími "interpolačními" funkcemi jsou polynomy. Protože k jejich určení v daném trojúhelníku máme šest složek posuvů $\{q^{(e)}\} = [q_1, q_2 \cdots q_6]^T$ v jeho vrcholech, můžeme pro dvě neznámé funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ volit polynomy celkem se šesti neznámými konstantami. Zvolíme tedy

$$u(x,y) = a_1 x + a_2 y + a_3 ,$$

$$v(x,y) = a_4 x + a_5 y + a_6 . \qquad (63)$$

Těmto vztahům musí vyhovět i vrcholy trojúhelníka o souřadnicích (x_1 , y_1), (x_2 , y_2), (x_3 , y_3). Podle toho, jak jsme očíslovali posuvy vrcholů, je $q_1 = u(x_1,y_1)$, $q_3 = u(x_2,y_2)$, $q_5 = u(x_3,y_3)$, takže

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \qquad (64a)$$

a obdobně - vyjdeme-li ze složky posuvu $v(x,y)$ -

$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} . \qquad (64b)$$

Označíme-li čtvercovou matici v rovnicích (64a, b) jako $[h]$, bude

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [h]^{-1} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \end{Bmatrix} , \qquad \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [h]^{-1} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} . \qquad (65)$$

Přitom $[h]^{-1}$ značí inverzní matici

$$[h]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} ,$$

$$2\Delta = x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) =$$

$$= 2 \times \text{ plocha trojúhelníku } ijk .$$

Rovnici (63) můžeme nyní přepsat takto:

$$u = [x \; y \; 1] [h]^{-1} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \end{Bmatrix} = [\, Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3 \,] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \end{Bmatrix} , \qquad (63a)$$

$$v = [x \;\; y \;\; 1][h]^{-1} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = [\varphi_1 \;\; \varphi_2 \;\; \varphi_3] \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} . \qquad (63b)$$

V těchto rovnicích jsme definovali řádkovou matici tvarových funkcí $[\varphi_1 \;\; \varphi_2 \;\; \varphi_3]$ takto:

$$[\varphi_1 \;\; \varphi_2 \;\; \varphi_3] = [x \;\; y \;\; 1][h]^{-1} . \qquad (66)$$

Protože jsme vyšli u lineární rovnice (63), jsou i tvarové funkce lineárními funkcemi x , y . Každá z nich je tedy rovnicí roviny, určené třemi body - hodnotami ve vrcholech trojúhelníka. Funkce φ_1 nabývá jednotkové hodnoty ve vrcholu (x_1 , y_1) a nulové hodnoty v ostatních dvou vrcholech. Podobné tvrzení platí i o ostatních dvou funkcích.

Rovnice (63a, b) lze zapsat společně takto:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} . \qquad (63c)$$

Uvážíme-li, že

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} q_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} q_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} q_5 ,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} q_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} q_4 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} q_6 ,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} q_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} q_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} q_6 ,$$

lze vektor poměrného přetvoření $\{\varepsilon\}$ napsat ve tvaru

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B_1 \;\; B_2 \;\; B_3] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_6 \end{Bmatrix} , \qquad (67)$$

je-li

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \end{bmatrix} , \qquad i = 1, 2, 3.$$

Zkráceně

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = [B^{(e)}]\,\{q^{(e)}\} \,. \tag{67a}$$

Indexem (e) vyznačujeme, že příslušný vektor nebo matice se vztahuje jen k jednomu elementu (trojúhelníku); $e = 1, 2, \ldots, m$. Rovnice (67) tedy udává závislost vektoru poměrného přetvoření $\{\varepsilon^{(e)}\}$ na posuvech $\{q^{(e)}\} = [q_1, q_2 \cdots q_6]^T$. Mohli jsme ovšem dosadit přímo ze vztahů (63) a (65) do rovnic $\varepsilon_x = \partial u/\partial x = a_1$, $\varepsilon_y = \partial v/\partial y = a_5$, $\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x = a_2 + a_4$ a dostali bychom stejné výsledky jako z rovnic (66) a (67).

Tvarové funkce (66) jsme zavedli se zřetelem k pozdějšímu výkladu. Stejný typ rovnic, jako jsou (63a, b, c) a (67), se totiž vyskytuje i u jiných příbuzných úloh. */ Matice $[B^{(e)}]$ v rovnici (67a) je konstantní, avšak jen v tomto případě (vzhledem k linearitě rovnic (63), popř. (66)). Obecně - použijeme-li k vyjádření tvarových funkcí polynomy vyšších stupňů - je i tato matice závislá na souřadnicích.

Chceme-li použít stejný postup jako v předchozí kapitole, totiž Lagrangeův princip, potřebujeme vypočítat energii napjatosti v tělese na obr. 7. Vypočteme ji jako součet energií akumulovaných v jednotlivých prvcích. K tomu potřebujeme určit tenzor napjatosti. Jeho složky uspořádáme do vektoru $\{\sigma\} = [\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}]^T$. Měrná energie napjatosti je pak, jak známo, $\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}$. Je to energie akumulovaná v jednotce objemu. Vektory vstupující do tohoto skalárního součinu nejsou nezávislé. Jde-li o lineárně pružné těleso, jak předpokládáme, platí pro ně Hookeův zákon, který má tvar lineární závislosti mezi vektorem $\{\sigma\}$ a $\{\varepsilon\}$

$$\{\sigma\} = [C]\,\{\varepsilon\} \,. \tag{68}$$

Potenciální energie napjatosti v prvku na obr. 8 je pak

$$\begin{aligned} U^{(e)} &= \frac{t}{2}\iint_S \{\varepsilon^{(e)}\}^T\,\{\sigma^{(e)}\}\,dS = \\ &= \frac{t}{2}\iint_S \{q^{(e)}\}^T\,[B^{(e)}]^T[C]\,[B^{(e)}]\,\{q^{(e)}\}\,dx\,dy \,. \end{aligned} \tag{69}$$

Zde t značí tloušťku desky. Integračním oborem je trojúhelník o ploše

$$S = S^{(e)} = \iint_S dx\,dy = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \Delta \,. \tag{70}$$

*/ V literatuře se tvarové funkce často označují symbolem N_i místo φ_i . Naším označením chceme zdůraznit, že jde o funkce souřadnic a nikoli snad o konstanty.

Protože matice za integračním znaménkem v tomto případě na souřadnicích nezávisejí, můžeme je vytknout před integrál. Pak můžeme zavést zkrácené označení

$$[\mathcal{K}^{(e)}] = [B^{(e)}]^T [C] [B^{(e)}] \, S^{(e)} t \qquad (71)$$

a pro energii napjatosti psát

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \{q^{(e)}\}^T [\mathcal{K}^{(e)}] \{q^{(e)}\} . \qquad (69a)$$

Matice (71) je elementární maticí tuhosti, jak vyplývá ze srovnání s rovnicí (56). Další výpočet je stejný jako ve 3. kapitole. Z elementárních matic tuhosti $[\mathcal{K}^{(e)}]$ pro jednotlivé prvky (elementy) e sestavíme celkovou maticí tuhosti $[K]$, platnou pro celou oblast. Ta pak vstupuje do základní rovnice

$$[K]\{q\} = \{Q\} , \qquad (72)$$

v níž $\{Q\}$ značí vektor vnějších sil připojených v uzlech a
$\{q\}$ obsahuje posuvy všech uzlů v soustavě.

Zbývá vyřešit ještě několik otázek, např. stanovit, jak přepočítat spojitě rozdělené zatížení na osamělé síly v uzlech, jak určit chybu řešení, jak stanovit napjatost, má-li být reprezentována jenom napětím $\{\sigma\}$ uvnitř prvků nebo souvisí-li také nějak s vnitřními reakcemi, které se přenášejí v uzlech jako osamělé síly mezi prvky. Cítíme však, že to jsou podružné otázky, pokusíme se na ně odpovědět teprve později.

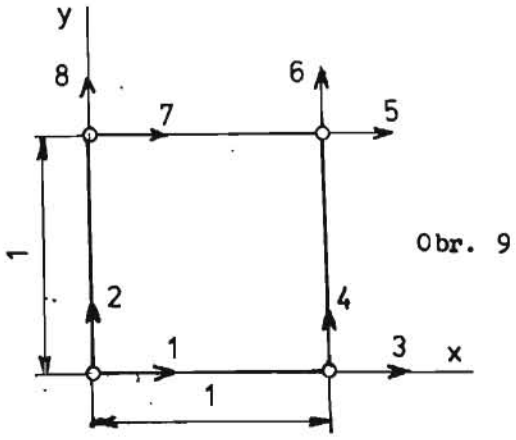
Nyní chceme soustředit svou pozornost na nejdůležitější myšlenkový krok, totiž na vytvoření pomocné struktury prvků konečné velikosti, kterou jsme nahradili kontinuum. Tím jsme ze spojitého poddajného tělesa vytvořili strukturu s konečným počtem stupňů volnosti a získali tak možnost použít vyspělé matematické metody známé z řešení prutových a rámových soustav, které lze snadno programovat pro číslicový počítač. Tento myšlenkový obrat byl u zrodu metody konečných prvků. Dospěli jsme k němu intuitivním zobecněním metod používaných pro řešení kovových konstrukcí. Matematický základ metody konečných prvků uvedeme později.

7. příklad

Pro čtverec, jehož strana má jednotkovou délku, odvoďte matici tuhosti (obr. 9). Pro posuvy u, v použijte polynomy

$$u(x,y) = a_1 xy + a_2 x + a_3 y + a_4$$

$$v(x,y) = a_5 xy + a_6 x + a_7 y + a_8$$



Obr. 9

O materiálu předpokládejte, že má nulové Poissonovo číslo, takže modul pružnosti ve smyku G je polovinou modulu pružnosti v tahu či tlaku E (není tedy rozdíl mezi rovinnou napjatostí a rovinným přetvořením).

Řešení

Protože $u(0,0)=q_1$, $u(1,0)=q_3$, $u(1,1)=q_5$ a $u(0,1)=q_7$, bude platit, že

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (a)$$

Tuto rovnici můžeme zkráceně zapsat jako

$$\{q_L\} = [h]\{a'\} . \qquad (b)$$

Obdobně - pro sudé složky posuvů - bude

$$\{q_S\} = [h]\{a''\} , \qquad (c)$$

kde

$$\{a''\} = [a_5\ a_6\ a_7\ a_8]^T .$$

Inverzí matice $[h]$ dostaneme z rovnic (b) a (c)

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_7 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_6 \\ q_8 \end{Bmatrix} \qquad (d)$$

Ze vztahů $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$, $\varepsilon_y = \partial v/\partial y$, $\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x$ vyjde

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_1 y + a_2 , \\ \varepsilon_y &= a_5 x + a_7 , \\ \gamma_{xy} &= a_1 x + a_3 + a_5 y + a_6 . \end{aligned} \qquad (e)$$

Dosazením z rovnic (d) do (e) dostaneme závislost přetvoření v libovolném bodě na posuvech uzlů (vrcholů čtverce)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-y) & 0 & (1-y) & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & -(1-x) & 0 & -x & 0 & x & 0 & (1-x) \\ -(1-x) & -(1-y) & -x & (1-y) & x & y & (1-x) & -y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_8 \end{Bmatrix} . \qquad (f)$$

Konstituční (konstitutivní) rovnice je (podle zadání)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} . \qquad (g)$$

Rovnice (f) a (g) můžeme zkráceně zapsat takto:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} , \qquad \{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} . \qquad (f, g)$$

Čtenář nechť se laskavě sám přesvědčí, že tvarové funkce nyní jsou

$$[\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4] = [xy \ x \ y \ 1][h]^{-1} .$$

Po rozepsání

$$\psi_1 = xy - x - y + 1 , \qquad \psi_3 = xy ,$$

$$\psi_2 = -xy + x , \qquad \psi_4 = -xy + y .$$

Matice $[B]$ se skládá ze čtyř submatic $[B_i]$, které mají týž tvar jako v rovnici (67); skládají se z derivací tvarových funkcí a mají velikost 3 x 2.

Pro energii napjatosti pak platí (68). Z rovnic (40) a (22)

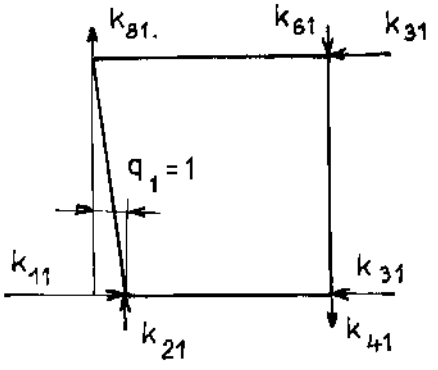
$$\{Q\} = \frac{\partial U}{\partial \{q\}} = t \iint [B]^T [C][B] \, dx\,dy \cdot \{q\} \qquad (h)$$

a srovnáním s rovnicí (58) vyjde elementární matice tuhosti (označíme ji prostě $[K]$, neboť nyní nepotřebujeme rozlišovat celkovou a elementární matici)

$$[K] = t \iint [B]^T [C][B] \, dx\,dy . \qquad (i)$$

Integračním oborem je čtverec, tj. $x , y \in \langle 0,1 \rangle$. Matice $[B]$ nyní závisí na souřadnicích, takže matice nelze vytknout před integrační symbol. Po integraci vyjde

$$[K] = \frac{Et}{8}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad (j)$$



Obr. 10

Protože liché složky sil v uzlech musí dávat nulový součet (jde o rovnováhu sil do směru osy x), musí být nulový součet lichých prvků v každém sloupci (nebo řádku) matice tuhosti. Totéž platí o součtech sudých prvků. Matice $[K]$ je souměrná a singulární. Význam prvků v prvním sloupci této matice je zřejmý z obr. 10. Jsou to reakce v kloubech (uzlech), vzniklé jednotkovým posuvem $q_1 = 1$. Reakce jsou kresleny ve správném vzájemném poměru. Obdobně bychom mohli znázornit i význam ostatních prvků matice tuhosti.

6. Operátorová a variační formulace fyzikálních úloh

Je známo, že diferenciální rovnice popisující nějaký fyzikální problém lze často odvodit z úvah o celkové energii soustavy. Tak např. Lagrangeovy pohybové rovnice vyjdou z Hamiltonova principu, diferenciální rovnici popisující průhyb nosníku nebo desky dostaneme z věty o stacionární hodnotě celkové potenciální energie apod. V takových případech lze řešení úlohy získat buď řešením diferenciálních rovnic (s příslušnými okrajovými, popř. počátečními podmínkami) nebo z požadavku, aby nějaký funkcionál (integrál, jehož hodnota závisí na průběhu funkce vstupující do integrandu) nabýval stacionární hodnoty. O prvním způsobu říkáme, že vychází z operátorové formulace problému, kdežto druhá metoda je předmětem variačního počtu. A právě tato druhá metoda je typickým východiskem řešení úloh metodou konečných prvků, jak ještě ukážeme.

Uvedeme příklad. Nechť je dán funkcionál

$$F = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - y \right\} dx . \qquad (73)$$

Hodnota F zřejmě závisí na tom, jak zvolíme funkci $y = y(x)$. Jak máme zvolit tuto funkci, aby F bylo stacionární? Budeme si všímat změn funkcionálu F v blízkosti hledaného řešení $y(x)$, a to pro okrajové podmínky např. $y(0) = y(1) = 0$. Zvolíme tedy nějakou "rozumnou", ale jinak libovolnou funkci $u(x)$, pro kterou platí, že $u(0) = u(1) = 0$, a její ε-násobek $(|\varepsilon| \ll 1)$ přičteme k funkci $y(x)$; tak dostaneme

$$y(x) + \varepsilon u(x) = y(x) + \delta y(x) . \tag{74}$$

Funkce $\delta y(x) = \varepsilon u(x)$ je <u>variací</u> (obměnou) <u>funkce</u> $y(x)$. Variovanou funkci (74) dosadíme do (73):

$$F(y + \varepsilon u) = F(y + \delta y) =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} (y + \varepsilon u)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 - y - \varepsilon u \right\} dx . \tag{75}$$

Protože $y(x)$ je hledanou funkcí, pro niž F nabývá stacionární hodnoty, musí proměnná ε splňovat podmínku

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0} = 0 . \tag{76}$$

Rovnici (75) budeme tedy derivovat za integračním znaménkem podle ε a pak dosadíme $\varepsilon = 0$. Vzniklý výraz položíme rovným nule. Tak dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \int_0^1 \left\{ (y + \varepsilon u) u + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} - u \right\} dx , \tag{77}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0} = \int_0^1 \left\{ yu + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} - u \right\} dx = 0 . \tag{78}$$

Dvojí integrací per partes

$$\int_0^1 y'' u'' dx = \left| y'' u' \right|_0^1 - \int_0^1 y''' u' dx =$$

$$= \left| y'' u' \right|_0^1 - \left| y''' u \right|_0^1 + \int_0^1 y^{IV} u \, dx .$$

odstraníme druhou derivaci $d^2 u / dx^2$ a dostaneme

$$\int_0^1 u \left\{ y + \frac{d^4 y}{dx^4} - 1 \right\} dx - \left| u \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_0^1 + \left| \frac{du}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_0^1 = 0 . \tag{79}$$

Druhý člen odpadne, neboť $u(0) = u(1) = 0$, což je <u>podstatná či geometrická okrajová podmínka</u>. Protože (79) musí platit pro jakékoli zvolené $u(x)$, musí být

$$y + \frac{d^4y}{dx^4} - 1 = 0 \qquad \text{pro} \qquad 0 < x < 1, \tag{80}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{pro} \quad x = 0 \quad \text{a} \quad x = 1 . \tag{81}$$

Diferenciální rovnice (80) s nepodstatnou či přirozenou okrajovou podmínkou (81) je tedy ekvivalentní požadavku, aby funkcionál (73) byl stacionární vzhledem k funkci $y(x)$. Okrajové podmínky $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ jsou podstatné a jsou dány předem. Podmínky (81) jsou nepodstatné (přirozené) a dostáváme je teprve při řešení variační úlohy. Variaci $\delta y(x) = \varepsilon u(x)$ jsme zvolili tak, aby vyhověla podstatným okrajovým podmínkám; přirozeným podmínkám vyhovovat nemusí.

V rovnici (80) poznáváme bezrozměrový tvar diferenciální rovnice ohybové čáry nosníku uloženého na pružném podkladu. Ke stejné rovnici vede i problém průhybu rotačně souměrné válcové skořepiny. Podstatné okrajové podmínky odpovídají kloubovému uložení konců, přirozené pak požadavku vymizení ohybového momentu v kloubech (na koncích nosníku je pak nulová křivost, tj. i druhá derivace průhybu).

Postupovali jsme tak, že jsme k danému funkcionálu (73) nalezli příslušnou diferenciální rovnici (80) s okrajovou podmínkou (81). Obrácená úloha by byla obtížnější. Existují případy, kdy k dané diferenciální rovnici (nebo soustavě diferenciálních rovnic) neexistuje žádný přidružený funkcionál (nebo není znám) a kdy tedy máme k dispozici jen operátorovou (diferenciální) formu popisu daného jevu.

Diferenciální rovnice podmiňující existenci stacionární hodnoty funkcionálu se nazývá Eulerova diferenciální rovnice. Euler ji však odvodil poněkud jiným způsobem; naše odvození pochází od Lagrange.

8. příklad

Odvoďte Eulerovu diferenciální rovnici pro funkcionál

$$F = \iint \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z \right\} dx\,dy \; . \tag{a}$$

Je definován na čtverci $-1 < x < 1$; $-1 < y < 1$ s okrajovou podmínkou $z = 0$ na hranici oblasti.

Řešení

Zvolíme $\delta z = \varepsilon u(x,y)$ tak, aby $u = 0$ pro $|x| = 1$ a pro $|y| = 1$. Vyjde

$$\left.\frac{\partial F(z+\varepsilon u)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \iint \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y} - 2u \right\} dx\,dy = 0 . \tag{b}$$

Po integraci per partes

$$-\iint \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \right\} u \, dx\, dy + \int_{-1}^{1} \left| \frac{\partial z}{\partial x} u \right|_{x=-1}^{x=1} dy + \int_{-1}^{1} \left| \frac{\partial z}{\partial y} u \right|_{y=-1}^{y=1} dx = 0. \qquad (c)$$

Vzhledem k okrajovým podmínkám odpadnou poslední dva členy, takže zbývá

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 = 0 , \qquad (d)$$

což je hledaná rovnice. Poznáváme v ní Poissonovu rovnici pro rovnoměrný krut prizmatických tyčí. Variační problém (a) tedy řeší krut tyče čtvercového průřezu (Prandtlovou metodou).

7. Některé metody přibližného řešení diferenciálních rovnic

Není-li možno získat přesné řešení variačního problému, popř. diferenciálních rovnic s příslušnými okrajovými či počátečními podmínkami, nebo jeli toto řešení velmi pracné, lze se vždy pokusit najít přibližné řešení. Lze je např. sestavit z jiných vhodných funkcí, které by dávaly hodnoty blízké přesnému řešení. Jsou to tzv. **přímé metody řešení (na rozdíl od diferenční metody, zvané též metoda sítí, z níž určujeme funkční hodnoty jen v některých bodech a pro ostatní body oblasti musíme používat "dešifrovací algoritmus").** Jak uvidíme, tvoří tyto úvahy teoretický základ i pro metodu konečných prvků.

Nechť je dán funkcionál F definovaný nad určitou oblastí V, uzavřenou hranicí S. V prostorových úlohách značí V objem, S plochu. V rovinných úlohách je V plochou, S křivkou. Konečně v jednorozměrných úlohách je V úsečka (popř. oblouk) a S její koncové body. V integrandu se vyskytuje vektor neznámých funkcí $\{\Phi\} = [\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n]^T$, popř. též jeho derivace. */ Bude tedy

$$F = \int_V f\left(\{\Phi\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\Phi\}, \frac{\partial}{\partial y}\{\Phi\}, \ldots\right) dV + \int_S g\left(\{\Phi\}, \frac{\partial}{\partial x}\{\Phi\}, \ldots\right) dS . \qquad (82)$$

Úlohou je určit vektor neznámých funkcí tak, aby funkcionál F byl stacionární (nejčastěji minimální).

---

*/ V kap. 5 jsme měli funkcionál s jedinou funkcí, totiž $\phi_1 = y$, popř. z. Obecně může být několik neznámých funkcí. V rovinné pružnosti jsou to např. posuvy $\phi_1 = u(x,y)$, $\phi_2 = v(x,y)$. Funkce f a g jsou skalární.

Ekvivalentní této úloze je řešení Eulerových diferenciálních rovnic

$$[\mathcal{L}]\{\Phi\} - \{Q\} = \{0\} \qquad \text{(v oblasti } V\text{)} \qquad (83)$$

s okrajovými podmínkami

$$[B]\{\Phi\} = \{0\} \qquad \text{(na hranici } S\text{)}. \qquad (84)$$

Zde $[\mathcal{L}]$, popř. $[B]$ jsou matice diferenciálních operátorů. O okrajových podmínkách (84) budeme předpokládat, že jsou homogenní a ve funkcích ϕ_i lineární; o soustavě (83) to nemusí platit.

Přibližné řešení variační úlohy (82), popř. diferenciálních rovnic (83) s okrajovými podmínkami (84) můžeme dostat tak, že vybereme vhodné <u>bázové funkce</u> ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ a sestavíme z nich lineární kombinaci s parametry p_j ; tu pak budeme považovat za přibližnou náhradu funkce ϕ_i . Bázové funkce nemusí splňovat (83), ale splňují okrajové podmínky (84), přinejmenším splňují podstatné z nich. Pro i -tou neznámou funkci tak dostaneme přibližnou náhradu

$$\phi_i = [\psi_1 \ \psi_2 \ \ldots \ \psi_m] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{Bmatrix} . \qquad (85)$$

Tuto rovnici můžeme skráceně zapsat takto:

$$\phi_i = [\psi]\{q_i\} . \qquad (85a)$$

Pro vektor $\{\Phi\}$ pak dostaneme celkem

$$\{\Phi\} = \begin{bmatrix} \psi & & & \\ & \psi & & \\ & & \ddots & \\ & & & \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \qquad (86)$$

čili

$$\{\Phi\} = [N]\{q\} . \qquad (87)$$

Matice $[N]$ má n řádků a $n\,m$ sloupců; kromě řádkových submatic $[\psi]$ na diagonále obsahuje už jen nuly. Vektor $\{q\}$ má n subvektorů $\{q_i\}$, každý o m prvcích p_i , obsahuje tedy celkem $n\,m$ parametrů.

Řešení (87) je ovšem jen přibližné. Stupeň přibližnosti záleží na tom, jaké jsme vybrali bázové funkce a kolik jsme jich vybrali (měly by - stručně řečeno - mít schopnost vystihnout průběhy hledaných funkcí) a jaké zvolíme

parametry v jejich lineární kombinaci. Nemáme-li zvláštní požadavky na přesnost řešení, můžeme výběr bázových funkcí považovat za věc zkušenosti a intuice. Volbu parametrů však podřídíme objektivnímu požadavku, aby rovnice (87) splňovala "co nejlépe" podmínky variační úlohy (82), popř. aby co nejlépe splňovala rovnice (83). */ K tomu je třeba zvolit nějaké kritérium. Podle něho se liší jednotlivé postupy, o nichž se krátce zmíníme.

Ritzova metoda

Dosadíme-li (87) do (82), dostaneme F jako skalární funkci parametrů $\{q\} = [p_1, p_2 \cdots p_k]^T$, $k - nm$. Podmínky pro stacionární hodnotu integrálu jsou

$$\frac{\partial F}{\partial \{q\}} = \{0\} . \tag{88}$$

To je soustava lineárních rovnic pro neznámé p_1 až p_k.

Metoda vážených reziduí

Dosadíme-li (87) do (83), nebudou levé strany rovnic rovny nule (pokud nejde o přesné řešení), ale nějakým nenulovým "zbytkům" (reziduím) R_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Tyto zbytky budou záviset na souřadnicích a na parametrech p_1 až p_k. Budou tvořit vektor

$$\{R\} = [L][N]\{q\} - \{Q\} . \tag{89}$$

Naším cílem je učinit absolutní hodnoty prvků tohoto vektoru co nejmenší v celé vyšetřované oblasti.

Pro přesné řešení by všechna R_i byla identicky nulová; proto by také platilo, že **/

$$\int_V w(x,y,z) R_i \, dV = 0, \tag{90}$$

a to pro libovolnou "váhovou funkci" w. Pro přibližné řešení můžeme zvolit nejvýše m vzájemně nezávislých váhových funkcí w_j, pro které bude platit rovnice (90), neboť máme jen omezený počet parametrů, jež můžeme volit. Budeme tedy požadovat, aby byla splněna soustava rovnic

$$\int_V w_j R_i \, dV = 0, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n. \\ j = 1, 2, \ldots, m. \end{matrix} \tag{91}$$

---

*/ Podmínky (84) jsou, jak víme, splněny předem.

**/ Nejde-li o prostorovou úlohu, závisí váha w jen na dvou, popř. na jedné souřadnici.

To je celkem $k = nm$ podmínek, z nichž vypočteme p_1 až p_k. Probereme nyní některé zvláštní případy této metody.

a) Kolokační metoda

Zvolíme $w_j = 1$ v některém bodě oblasti V a $w_j = 0$ v ostatních bodech. Pro $j = 1, 2, \ldots, m$ tak dostaneme m bodů, v nichž budou rovnice (83) přesně splněny.

b) Metoda podoblastí

Zvolíme m navzájem různých podoblastí $V_j \subset V$. Dále zvolíme $w_j = 1$ v podoblasti V_j a $w_j = 0$ mimo tuto podoblast. Tak dostaneme $k = nm$ integrálů

$$\int_{V_j} R_i \, dV = 0, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n. \\ j = 1, 2, \ldots, m. \end{matrix} \tag{92}$$

To je k rovnic pro neznámé p_1 až p_k.

c) Galerkinova metoda

Zvolíme $w_j = \psi_j$, tj. váhová funkce je jednou z bázových funkcí. Dostaneme soustavu $k = nm$ rovnic

$$\int_V \psi_j R_i \, dV . \tag{93}$$

Metoda nejmenších čtverců (Gaussova)

Požadujeme, aby integrály

$$\varphi_i = \int_V R_i^2 \, dV \tag{94}$$

byly minimální, tj. aby

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \{p_i\}} = \{0\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{95}$$

což je opět soustava $k = nm$ rovnic pro neznámé p_1 až p_k.

Je samozřejmé, že bázové funkce by měly kromě okrajových podmínek splňovat také požadavky plynoucí ze známých vlastností hledaného řešení, např. ze souměrnosti, existuje-li. Je-li úloha lineární, jsou i soustavy rovnic pro parametry p_1 až p_k lineární. Matice této soustavy je u metody nejmenších čtverců souměrná. Ritzova metoda dává souměrnou matici tehdy, je-li

funkcionál kvadratický. Galerkinova metoda vede k souměrné matici jen tehdy, je-li problém samoadjungovaný. */

U Ritzovy metody stačí, splňují-li bázové funkce podstatné okrajové podmínky. U ostatních metod je nutné, aby bázové funkce splňovaly všechny, tedy i přirozené podmínky; jinak bychom mohli dostat nesmyslné výsledky. Splňují-li bázové funkce všechny okrajové podmínky, dává Ritzova metoda stejné výsledky jako Galerkinova. Ritzova metoda dává optimální vážený průměr bázových funkcí (87) v tom smyslu, že vede k nejmenší hodnotě funkcionálu (82). Velikost tohoto funkcionálu můžeme považovat za míru přibližnosti řešení (čím menší je jeho hodnota, tím přesnější je řešení).

9. příklad

Zvolte přibližné řešení variační úlohy (73), popř. diferenciální rovnice (80), pro niž platí podstatné okrajové podmínky $y(0) = y(1) = 0$ a přirozené podmínky (81), ve tvaru **/

$$y = p_1 \sin \pi x + p_2 \sin 3\pi x \ . \tag{a}$$

Řešení

Dosadíme-li (a) do funkcionálu (73), vyjde

$$F = \frac{1}{4}(\pi^4 + 1)p_1^2 + \frac{1}{4}(81\pi^4 + 1)p_2^2 - \frac{2}{\pi}p_1 - \frac{2}{3\pi}p_2 \tag{b}$$

a reziduum rovnice (80) bude

$$R = 1 - p_1(\pi^4 + 1)\sin \pi x - p_2(81\pi^4 + 1)\sin 3\pi x \ . \tag{c}$$

Protože (a) splňuje všechny okrajové podmínky, lze použít kteroukoli z uvedených metod.

Kolokační metoda

Zvolíme body $x = 0{,}25$ a $x = 0{,}50$ a budeme požadovat, aby R bylo v těchto bodech nulové. Vyjde

$$\frac{\pi^4+1}{\sqrt{2}}p_1 + \frac{81\pi^4+1}{\sqrt{2}}p_2 = 1 \ ,$$

$$(\pi^4+1)p_1 - (81\pi^4+1)p_2 = 1.$$

*/ Lineární problém $L(\phi) = 0$ je samoadjungovaný, platí-li pro dvě lineárně nezávislé funkce $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, které splňují homogenní okrajové podmínky $B(\phi) = 0$ a mají potřebné derivace, že $\int_V u L(v)\,dV = \int_V v L(u)\,dV$.

**/ Bázové funkce tedy jsou $\varphi_1 = \sin \pi x$, $\varphi_2 = \sin 3\pi x$.

Odtud $p_1 = 0{,}012\,267$, $p_2 = 0{,}000\,026$. Výsledek závisí samozřejmě na volbě bodů, v nichž požadujeme přesné splnění diferenciální rovnice.

Metoda podoblastí

Vybereme podoblasti $\langle 0, \frac{1}{4} \rangle$ a $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rangle$. Dostaneme

$$\frac{\pi^4+1}{\pi}\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\,p_1 + \frac{81\pi^4+1}{\pi}\,\frac{\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2}}\,p_2 = \frac{1}{4}\,,$$

$$\frac{\pi^4+1}{\sqrt{2}\,\pi}\,p_1 + \frac{81\pi^4+1}{3\sqrt{2}\,\pi}\,p_2 = \frac{1}{4}\,.$$

Tedy $p_1 = 0{,}013\,624$, $p_2 = 0{,}000\,029$. Výsledek závisí na volbě podoblastí. Zvolíme-li podoblasti nekonečně malé, tedy jako izolované body, dostaneme předchozí kolokační metodu.

Galerkinova metoda

$$\int_0^1 R \sin \pi x \, dx = \frac{2}{\pi} - \frac{\pi^4+1}{2}\,p_1 = 0\,,$$

$$\int_0^1 R \sin 3\pi x \, dx = \frac{2}{3\pi} - \frac{81\pi^4+1}{2}\,p_2 = 0\,.$$

Odtud $p_1 = 0{,}012\,938$, $p_2 = 0{,}000\,054$.

Ritzova metoda

Z podmínek

$$\partial F / \partial p_1 = 0\,, \qquad \partial F / \partial p_2 = 0$$

dostaneme stejné výsledky, jaké dává Galerkinova metoda.

Metoda nejmenších čtverců

Minimalizujeme integrál

$$\int_0^1 R^2 dx = \frac{1}{2}\left(\pi^4+1\right)^2 p_1^2 + \frac{1}{2}\left(81\pi^4+1\right)^2 p_2^2 -$$

$$- \frac{4}{\pi}\left(\pi^4+1\right)p_1 - \frac{4}{3\pi}\left(81\pi^4+1\right)p_2 + 1\,.$$

Metoda nejmenších čtverců dává v tomto případě stejné výsledky jako Ritzova či Galerkinova.

Shodu Ritzovy a Galerkinovy metody jsme předpokládali, neboť bázové funkce splňují všechny - tedy i nepodstatné - okrajové podmínky. Shoda s metodou

nejmenších čtverců, jež obvykle nebývá, má v tomto případě jiný důvod, který zde nebudeme probírat (souvisí to s tím, že bázové funkce jsou zároveň vlastními funkcemi problému $d^4y/dx^4 = \lambda y$).

Přibližnost řešení posoudíme podle hodnoty funkcionálu (b):

Kolokace	$F = -0{,}004\ 112$	(nejhorší)
Podoblasti	$F = -0{,}004\ 113$	
Galerkin, Gauss, Ritz	$F = -0{,}004\ 124$	(nejlepší).

8. Matematický základ metody konečných prvků

V minulé kapitole jsme sestavili přibližné řešení jako lineární kombinaci intuitivně vybraných bázových funkcí. Parametry (koeficienty) této lineární kombinace jsme určovali podle různých kritérií; tomu jsme věnovali největší pozornost. Vraťme se však k otázce výběru bázových funkcí. Jejich výběr není snadný, neboť tyto funkce musí splňovat okrajové podmínky na hranici S, která může mít nepravidelný tvar, a musí splňovat - alespoň po částech - v celé oblasti V další požadavky spojitosti a diferencovatelnosti. Chceme-li, aby posloupnost těchto funkcí dávala řešení konvergující k přesným výsledkům, musí být splněn i požadavek úplnosti prostoru těchto funkcí. Řešení obsahující větší počet bázových funkcí jsou však - snad až na kolokační metodu - velmi pracná.

Všechny tyto potíže můžeme překonat, vybereme-li bázové funkce zvláštním způsobem. Oblast V rozdělíme na jednoduché podoblasti - "konečné prvky" - V_i , jež se navzájem nepřekrývají a co nejlépe vyplňují danou oblast. V prostoru to mohou být mnohostěny (např. čtyřstěny nebo kvádry), v rovině třeba trojúhelníky nebo obdélníky, v jednorozměrných útvarech úsečky nebo oblouky. Lze volit i prvky s křivou hranicí. V každé takové podoblasti definujeme tvarové funkce φ_i , které jsou nenulové právě jen v této podoblasti, kde vykreslují ("tvarují") průběh hledané funkce. Výsledná aproximace v dané podoblasti vzniká lineární kombinací tvarových funkcí $q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + \ldots + q_m\varphi_m$ (q_1 až q_m jsou konstanty).

Z praktických důvodů volíme tvarové funkce jako polynomy; výsledná aproximace je pak rovněž polynomem. Má-li takový polynom m neznámých součinitelů, zvolíme na hranici prvku V_i stejný počet bodů - uzlů - a neznámé koeficienty vypočteme pomocí funkčních hodnot v těchto uzlech. Tvarové funkce volíme tak, aby každá z nich nabývala ve všech uzlech nulové hodnoty, až na jeden, v němž má hodnotu 1. (Jak později uvidíme, platí to někdy i o derivacích tvarové funkce).

Funkční hodnoty v uzlech se pak zřejmě rovnají právě parametrům q_1 až q_m, jimiž je výsledná aproximace v rozsahu prvku zcela určena. Protože tyto parametry - funkční hodnoty - jsou společné konečným prvkům, jež se v uzlu

stýkají, je zaručena návaznost (spojitost) výsledné aproximace přinejmenším v těchto uzlech. Většinou však bývá zaručena i spojitost na spojnicích uzlů, tvořících hranici mezi sousedními prvky. Za přibližné řešení pak považujeme funkci, kterou získáme sjednocením všech aproximací nad jednotlivými prvky. Další postup je stejný jako v předchozí kapitole.

Všimněme si nyní, jak vypadají bázové funkce. Získáme je sjednocením tvarových funkcí z prvků, jež se v daném uzlu stýkají, zvolíme-li v tomto uzlu jednotkovou funkční hodnotu a v ostatních uzlech budou funkční hodnoty nulové. Bázová funkce je tedy nenulová jen v nejbližším okolí tohoto uzlu. V tom je právě výhoda popsaného postupu.

Bázové funkce nedefinujeme v celé oblasti, ale po částech. Těmito částmi jsme bez nesnází schopni vyplnit - alespoň přibližně - i oblast nepravidelných tvarů. Okrajové podmínky lze přitom snadno splnit předepsáním funkčních hodnot pro uzly na hranici oblasti.*/ Vzájemná návaznost tvarových funkcí na hranicích prvků umožňuje získat spojité přibližné řešení. Musí však být splněna podmínka konvergence, aby funkcionál variační úlohy F dával stejnou hodnotu, integrujeme-li nad celou oblastí (i přes hranice prvků), jako když integrujeme nad jednotlivými prvky a tyto dílčí integrály sečteme. Význam tohoto požadavku objasníme později na příkladu.

Základem naší metody je totiž variační úloha (82). V této rovnici máme integrály přes celou oblast V, popř. S. Zavedením konečných prvků rozdělujeme integrační oblast na mnoho podoblastí, nad nimiž integrujeme samostatně a integrály pak sečítáme. Nemá-li tím vzniknout chyba, musíme dbát o to, aby funkce f, popř. g na rozhraní prvků zůstávaly konečné. Toho dosáhneme, budou-li funkce $\{\Phi\}$ spojité ještě v $(n-1)$-ní derivaci, je-li n řád nejvyšší derivace, která se vyskytuje ve funkcionálu F (ve funkcích f, popř. g).

Kromě toho je nutné, aby aproximace neodporovaly přirozeným (očekávaným) vlastnostem přesného řešení. Jsou-li např. hledanými funkcemi posuvy bodů tělesa, musí funkce $\{\Phi\}$ umožňovat řešení také pro případ pohybu tělesa jako tuhého celku, musí tedy být schopny modelovat pole konstantního posunutí. To znamená, že tvarové funkce musí být schopny popsat - alespoň v limitě pro nekonečně malé "konečné" prvky - pole, v němž jsou funkce $\{\Phi\}$ a popř. i derivace obsažené ve funkcích f, g v rovnici (82) konstantní. U pružných těles např. požadujeme, aby tvarové funkce byly takto schopny popsat homogenní (konstantní) pole přetvoření.

Za parametry lineární kombinace tvarových funkcí jsme tedy zvolili její funkční hodnoty v uzlových bodech na hranicích prvků. Můžeme však postupovat

---

*/ Někdy se to podaří jen přibližně, avšak nepřesnost se zmenšuje volbou menších prvků (většího počtu uzlů na hranici).

obecněji. Za parametry mohou sloužit také hodnoty derivací v uzlech. Mimoto není nutné, aby všechny uzly ležely na hranici prvku. Dokonce lze některé parametry zvolit i tak, že nemají s uzly nic společného.

V dalším textu uvedeme různé příklady, z nichž získáme podrobnější názor na způsob sestavení výsledné aproximace $\{ \Phi \}$ pomocí tvarových funkcí, než jaký může poskytnout obecný výklad. Pozorný čtenář přitom objeví souvislost s dřívějším výkladem (kap. 4), v němž jsme metodu konečných prvků uvedli jako inženýrskou praktiku bez teoretického základu. Nyní se pokusíme naopak vystačit jen s tímto teoretickým základem, který jsme si vytvořili v minulé kapitole.

10. příklad

Metodou konečných prvků budeme řešit variační úlohu pro funkcionál (73), totiž pro

$$F = \int_0^1 \{ \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - y \} \, dx \,, \tag{a}$$

jemuž přísluší Eulerova diferenciální rovnice (80)

$$y + \frac{d^4 y}{dx^4} - 1 = 0 \,, \qquad 0 < x < 1 \,. \tag{b}$$

Podstatné okrajové podmínky jsou

$$y(0) = 0 \,, \qquad y(1) = 0 \tag{c}$$

a nepodstatné (81)

$$y''(0) = 0 \,, \qquad y''(1) = 0 \,. \tag{d}$$

Řešení

Interval $\langle 0,1 \rangle$ rozdělíme na několik dílů (konečných prvků). Pro stručnost dalšího výkladu volíme jen tři prvky o stejné délce $h = 1/3$. Náhradní funkci zkusíme volit po částech jako lineární polynom $\phi = a_1 \xi + a_2$ bezrozměrové proměnné $\xi = \bar{x}/h$. Jak později uvidíme, je tato volba nevhodná. Je to však nejjednodušší aproximace, a proto dovedeme výpočet až do konce. Zároveň se i poučíme ze selhání metody, způsobené nesplněním konvergenčního kritéria.

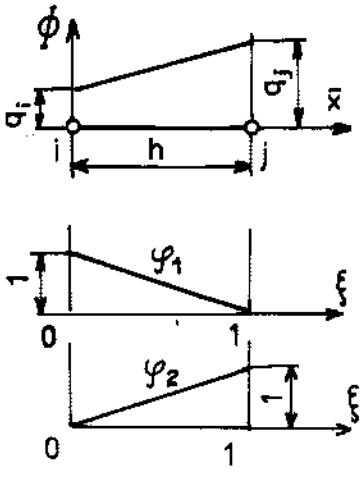
Je-li u některého prvku označen levý konec znakem i a pravý $j = i + 1$ (obr. 11), bude pro uzlové body $\bar{x} = 0$ a $\bar{x} = h$ platit, že

$$\begin{aligned} \Phi(\xi = 0) &= q_i = a_2 \\ \Phi(\xi = 1) &= q_j = a_1 + a_2 \,. \end{aligned} \tag{e}$$

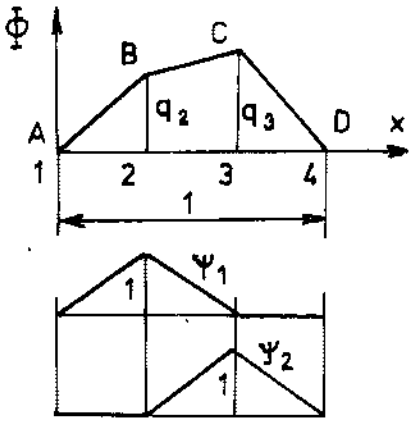
Odtud $a_2 = q_i$, $a_1 = q_j - q_i$. Tedy - pro prvek (e) -

$$\phi^{(e)} = [(1-\xi) \quad \xi] \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} \tag{f}$$

čili $\phi^{(e)} = [\varphi_1 \varphi_2] \{q^{(e)}\}$. To je rovnice (86). Tvarové funkce v tomto případě jsou $\varphi_1 = 1 - \xi$, $\varphi_2 = \xi$ (obr. 11). Podle obr. 11 měříme $\bar{x}$ od levého konce každého prvku, je to tedy lokální souřadnice. V soustavě tří prvků na obr. 12 máme pro celý interval jedinou globální souřadnici x .



Obr. 11



Obr. 12

Transformační vztahy zřejmě jsou

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. prvek } (e = 1) \text{ - úsečka 12} & \\ \xi = \frac{x}{h} & (i = 1,\ j = 2) \\ \text{2. prvek } (e = 2) \text{ - úsečka 23} & \\ \xi = \frac{x}{h} - 1 & (i = 2,\ j = 3) \\ \text{3. prvek } (e = 3) \text{ - úsečka 34} & \\ \xi = \frac{x}{h} - 2 & (i = 3,\ j = 4) \end{array}\right\} \tag{g}$$

Úsečka AB představuje funkci $\phi(x)$ v prvním prvku, úsečka BC v druhém a CD v třetím. Funkce $\phi(x)$ určená (dosud neznámými) parametry q_1 až q_4 a polynomem (f) je tedy přibližnou náhradou hledané funkce $y(x)$. V souladu s podstatnými okrajovými podmínkami $y(0) = 0$ a $y(1) = 0$ jsme zvolili $q_1 = \phi(x = 0) = 0$, $q_4 = \phi(x = 1) = 0$; hodnoty q_2 a q_3 zůstávají neznámé.

Jaké jsou v tomto případě bázové funkce? Vyjádříme-li funkci $\phi(x)$ definovanou po částech podle (f) a (g) tak, že sloučíme členy obsahující stejný parametr, dostaneme

$$y(x) \cong \phi(x) = \psi_1(x)\, q_2 + \psi_2(x)\, q_3 \,, \tag{h}$$

kde

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 3x & \text{pro } 0 < x < \frac{1}{3} \\ 2 - 3x & \text{pro } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

a obdobně pro $\psi_2(x)$. Bázové funkce $\psi_1(x), \psi_2(x)$ jsou zakresleny rovněž na obr. 12. Jsou nenulové vždy jen v těch prvcích, jež se v daném uzlu stýkají. Vznikají sjednocením tvarových funkcí $\psi_2(\xi)$ a $\psi_1(\xi)$ v sousedních prvcích.

Bázové funkce tedy jsou - jak jsme uvedli - nenulové vždy jen v nejbližším okolí jednoho uzlu. Jsou proto navzájem "téměř ortogonální" v dané oblasti V, neboť pro $i \neq j$ je integrál $\int \psi_i \psi_j \, dV$ nulový, pokud uzly i a j nejsou pro nějaký prvek společné. S tím souvisejí dobré matematické vlastnosti metody konečných prvků při numerických výpočtech.

Funkcionál F, definovaný rovnicí (a), se rozpadne na součet integrálů $F^{(e)}$ počítaných pro jednotlivé prvky. Použijeme-li lokální bezrozměrovou proměnnou ξ podle (g), bude

$$F = \sum_{e=1}^{3} F^{(e)} =$$

$$= \sum \int_{\xi=0}^{1} \left[\frac{1}{2} \left(\Phi^{(e)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \phi^{(e)}}{d\xi^2} \right)^2 \frac{1}{h^4} - \Phi^{(e)} \right] h \, d\xi \,. \tag{i}$$

Indexem e rozlišujeme, o který prvek jde. Bude tedy podle (f)

$$\Phi^{(1)} = [\psi_1 \; \psi_2] \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \end{Bmatrix} \,, \qquad \Phi^{(2)} = [\psi_1 \; \psi_2] \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \,, \tag{j}$$

$$\Phi^{(3)} = [\psi_1 \; \psi_2] \begin{Bmatrix} q_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \,.$$

Tyto rovnice bychom mohli zkráceně zapsat takto:

$$\Phi^{(e)} = [\psi] \{ q^{(e)} \} \,. \tag{j*}$$

Vektor sestavený ze všech parametrů označíme $\{q\}$

$$\{q\} = \{q_1 \; q_2 \; q_3 \; q_4\}^T \,. \tag{k}$$

Podmínky pro existenci stacionární hodnoty funkcionálu (i) jsou totožné s požadavkem, aby vymizela jeho variace (podle Ritzovy metody)

$$\delta F = \{\delta q\}^T \frac{\partial F}{\partial \{q\}} = \{\delta q\}^T \sum_{e=1}^{3} \frac{\partial F^{(e)}}{\partial \{q\}} = 0 \,.$$

Musí tedy být - je-li $\{\delta q\}$ libovolné -

$$\sum_{e=1}^{3} \frac{\partial F^{(e)}}{\partial \{q\}} = \{0\} \,. \tag{l}$$

Levá strana této rovnice představuje součet tří vektorů

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q_2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q_3} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F^{(3)}}{\partial q_3} \\ \frac{\partial F^{(3)}}{\partial q_4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} . \tag{m}$$

Rozepišme některé prvky. Obecně bude - se zkráceným označením $\{p\}$ místo $\{q^{(e)}\}$ -

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \{p\}} = h \int_0^1 \left\{ \Phi^{(e)} \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial \{p\}} + \frac{1}{h^4} \frac{\partial^2 \Phi^{(e)}}{\partial f^2} \frac{\partial}{\partial \{p\}} \left(\frac{\partial^2 \Psi^{(e)}}{\partial f^2} \right) - \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial \{p\}} \right\} df , \tag{n}$$

a tedy např. pro $e = 1$, pro něž $\{p\} = [q_1, q_2]^T$, bude

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial q_1} = h \int_0^1 \left[\left(\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 \right) \varphi_1 + \frac{1}{h^4} \left(\varphi_1'' q_1 + \varphi_2'' q_2 \right) \varphi_1'' - \varphi_1 \right] df ,$$

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial q_1} = h \int_0^1 \left[\left(\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 \right) \varphi_2 + \frac{1}{h^4} \left(\varphi_1'' q_1 + \varphi_2'' q_2 \right) - \varphi_2 \right] df .$$

Můžeme nyní napsat, čemu se rovná $\partial F^{(1)} / \partial \{q^{(1)}\}$; bude to zřejmě

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \end{Bmatrix} , \tag{o}$$

položíme-li (s indexy r , s = 1, 2)

$$k_{rs}^{(1)} = h \int_0^1 \left(\varphi_r \varphi_s + \frac{1}{h^4} \varphi_r'' \varphi_s'' \right) df , \tag{p}$$

$$\{Q_r^{(1)}\} = h \int_0^1 \varphi_r \, df . \tag{q}$$

Pravou stranu rovnice (o) můžeme označit jako

$$[\mathcal{K}^{(1)}]\{q^{(1)}\} - \{Q^{(1)}\}\ , \tag{r}$$

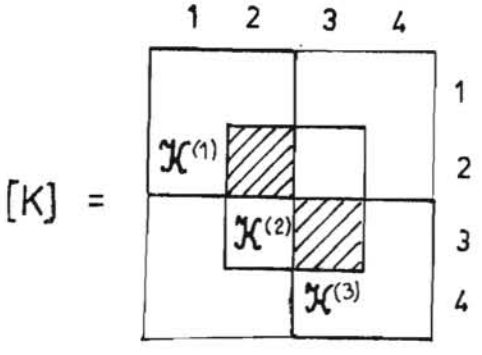
přičemž $[\mathcal{K}^{(1)}]$ značí elementární matici tuhosti, $\{Q^{(1)}\}$ vektor vnějších sil (jde ovšem o zobecněnou sílu v Lagrangeově pojetí). Matice $[\mathcal{K}^{(e)}]$ a $\{Q^{(e)}\}$ jsou pro všechny prvky stejné, neboť funkce φ_1 , φ_2 jsou pro ně - alespoň v našem případě - společné. Dosadíme-li do (p) a (q), vyjde

$$[\mathcal{K}^{(e)}] = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\ ,\quad \{Q^{(e)}\} = \frac{1}{6}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ . \tag{s}$$

Rovnici (m) pak můžeme sestavit adicí elementárních matic, jak je naznačeno na obr. 13 a, b a uvést do tvaru

$$[K]\{q\} = \{Q\}\ , \tag{t}$$

typického pro metodu konečných prvků. Rovnice (1) tedy obsahuje jednak návod k sestavení elementárních matic - viz rovnice (p) a (q) -, jednak návod k jejich adici podle obr. 13 a, b (prvky ve vyšrafovaných polích se sčítají). Tento návod se shoduje s postupem, který známe z přímé tuhostní metody (viz 6. příklad). Dosazením z rovnic (s) do (t) pomocí obr. 13 a, b vyjde - po vynásobení osmnácti, aby se odstranily zlomky



Obr. 13 a

Obr. 13 b

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{Bmatrix}\ . \tag{u}$$

Zarámování vyznačené čárkováním odpovídá schématu na obr. 13 a, b.

Matice $[K]$ je singulární. Musíme proto položit - ve shodě s okrajovými podmínkami - $q_1 = 0$, $q_4 = 0$. Dostaneme zmenšenou soustavu

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \end{Bmatrix} \qquad (v)$$

a odtud $q_2 = q_3 = 6/5 = 1{,}2$.

Kdybychom interval $0 < x < 1$ rozdělili nikoli na tři, ale na čtyři prvky, vyšlo by

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{Bmatrix} \qquad (u')$$

a odtud - pro $q_1 = 0$, $q_5 = 0$ -

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{Bmatrix} \qquad (v')$$

Řešením $q_2 = q_4 = 9/7 = 1{,}285\ 71$, $q_3 = 6/7 = 0{,}857\ 14$. Při rozdělení na šest prvků by vyšlo

$q_1 = q_7 = 0$; $q_2 = q_6 = 33/26 = 1{,}269\ 23$, $q_3 = q_5 = 12/13 = 0{,}923\ 08$, $q_4 = 27/26 = 1{,}038\ 46$.

Snadno se lze přesvědčit, že řešení uvnitř intervalu $0 < x < 1$ konverguje při rozdělení na nekonečný počet prvků k hodnotě 1,0, kdežto správné řešení dává pro funkci $y(x)$ parabole podobný průběh s maximální hodnotou $y_{max} = 0{,}012\ 888$.

Jak je možné, že jsme dostali tak zcela falešný výsledek? Je to tím, že jsme nesplnili nutnou podmínku konvergence. Přibližná náhrada křivky $y(x)$ lomenou čarou ABCD na obr. 11 - podle rovnic (f) a (g) - nesplňuje totiž požadavek, aby výsledný integrál F podle (a) byl součtem integrálů nad oblastmi jednotlivých prvků, neboť hodnota druhé derivace je na hranicích prvků v bodech B a C nekonečná a její příspěvek k hodnotě výsledného integrálu F v rovnici (a) nemusí být v limitě nulový. Celkový integrál v mezích $0 < x < 1$ může proto mít - a také skutečně má - jinou hodnotu než součet dílčích integrálů nad jednotlivými prvky. (Do těchto dílčích integrálů totiž druhá derivace nevstoupí, neboť uvnitř každého prvku je $d^2\phi/dx^2 = 0$). Proto nelze zaručit, že by řešení při volbě stále jemnějšího dělení konvergovalo ke správné hodnotě. Skutečně, uvědomíme-li si, že člen s druhou derivací v integrandu (a) vyjadřuje potenciální energii ohybové napjatosti (první člen je energií akumulovanou v pružném podkladu, druhý vyjadřuje energii ohybové napjatosti v nosníku a třetí potenciál vnějších sil), nahlédneme, že naše řešení

konverguje k případu dokonale ohebného lana (či řetězu) na pružném podkladu. V lanu se přitom nepředpokládá žádná osová síla. Dostáváme tedy nesmyslný výsledek, který je vlastně řešením triviální rovnice $y - 1 = 0$ pro $0 < x < 1$, s izolovanými body $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

11. příklad

Úlohu z příkladu 10 budeme nyní řešit s použitím kubického polynomu

$$\phi^{(e)} = a_1 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_3 \xi + a_4 \,. \tag{a}$$

Řešení

Protože polynom obsahuje čtyři konstanty, potřebujeme pro každý prvek čtyři uzly. Na hranici prvku, kterou tvoří jeho koncové body, můžeme volit jen dva uzly. Zbývající dva bychom mohli volit uvnitř prvku. Vhodnější však bude, zvolíme-li uzly jen dva; pak však v každém z nich musíme zavést dva parametry. Jeden bude funkční hodnotou ϕ v uzlu, druhý hodnotou první derivace $\phi'(\xi) = d\phi/d\xi = (d\phi/dx)(dx/d\xi) = h(d\phi/dx)$ v tomto uzlu. Pro libovolný prvek e bude tedy platit, že

$$\{q^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \\ q_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi(0) \\ \phi'(0) \\ \phi(1) \\ \phi'(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} . \tag{b}$$

Odtud vypočteme

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \\ q_l \end{Bmatrix} . \tag{c}$$

Dosazením do (a) dostaneme

$$\phi^{(e)} = [\varphi_i \; \varphi_j \; \varphi_k \; \varphi_l] \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \\ q_l \end{Bmatrix} \tag{d}$$

čili ve zkráceném zápisu

$$\phi^{(e)} = [\varphi] \{q^{(e)}\} \,, \tag{e}$$

kde $\varphi_i = 2f^3 - 3f^2 + 1, \qquad \varphi_k = -2f^3 + 3f^2,$

$\varphi_j = f^3 - 2f^2 + f, \qquad \varphi_l = f^3 - f^2.$

Lze se přesvědčit, že tyto tvarové funkce splňují podmínky dané tabulkou

$r =$	i	j	k	l
$\phi_r(0)$	1	0	0	0
$\phi_r'(0)$	0	1	0	0
$\phi_r(1)$	0	0	1	0
$\phi_r'(1)$	0	0	0	1

To je v souladu s definicí parametrů $\{q^{(e)}\}$ podle (b) a (d).

Volba dvou "dvojitých" uzlů místo alternativy s dvěma vnitřními uzly má tu výhodu, že zaručuje nejen spojitost aproximující funkce na hranicích prvků, ale i její první derivace.

Pro stacionární hodnotu funkcionálu platí nyní stejné úvahy jako v 10. příkladu, pouze vektor $\{q^{(e)}\}$ má čtyři prvky a vektor $\{q\}$ osm. Vzorce (p) a (q) z minulého příkladu budou platit i nadále, vezmeme-li $r, s = 1, 2, 3, 4$. Vyjde elementární matice tuhosti a elementární vektor vnějších sil (pro všechna e)

$$[K^{(e)}] = \frac{1}{1260}\begin{bmatrix} 408\,396 & 204\,142 & -408\,186 & 204\,107 \\ 204\,142 & 136\,084 & -204\,107 & 68\,037 \\ -408\,186 & -204\,107 & 408\,396 & -204\,142 \\ 204\,107 & 68\,037 & -204\,142 & 136\,084 \end{bmatrix} \qquad (f)$$

$$\{Q^{(e)}\} = \left[\frac{1}{6} \quad \frac{1}{36} \quad \frac{1}{6} \quad -\frac{1}{36}\right]^T. \qquad (g)$$

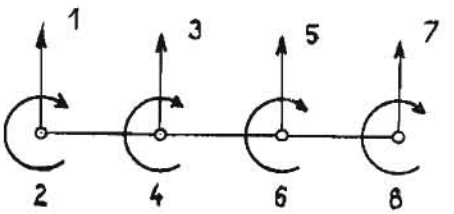
Z rovnice (g) je vidět, že by nestačilo připojit ke každému uzlu polovinu celkového zatížení (které je $l.h = 1/3$), ale že je třeba připojit ještě ohybové momenty v uzlech o velikosti $\pm 1/36$ ($= \pm h/12$), příslušné zobecněným posuvům q_j a q_l. Teprve pak dostaneme správnou náhradu rovnoměrného jednotkového zatížení, působícího na náš nosník.

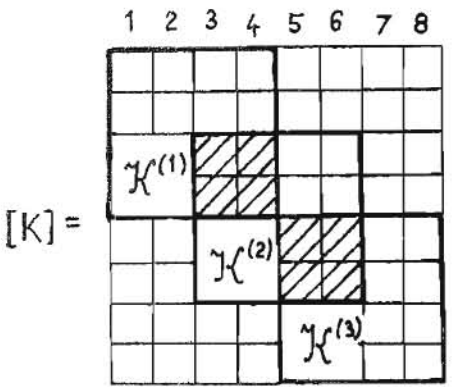
Rovnice (1) z 10. příkladu dává návod k sestavení celkové matice tuhosti adicí z elementárních matic; musíme však brát vektor $\{q\}$ s osmi prvky

$$\{q\} = [q_1, q_2 \cdots q_8]^T. \qquad (h)$$

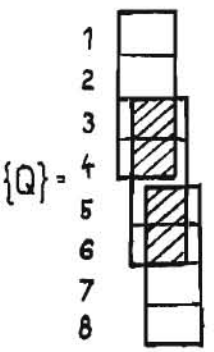
Jednotlivé prvky značí střídavě posuvy ϕ a úhly otočení $h(d\phi/dx)$ podle obr. 14. Schéma pro sestavení matic $[K]$ a $\{Q\}$ je pro tři prvky (h = = 1/3) znázorněno na obr. 15 a 16. Vzhledem k tomu, že q_1 = = q_7 = 0 (je předepsán nulový posuv na koncích nosníku), vynecháme v matici $[K]$ první a sedmý řádek a sloupec a v maticích $\{q\}$ a $\{Q\}$ první a sedmý řádek.

Obr. 14





Obr. 15



Obr. 16

Dostaneme zmenšenou soustavu

$$[K]\{q\} = \{Q\}\ , \qquad (1)$$

která v rozepsaném tvaru - po úpravě násobením 1260 - dá

$$\begin{bmatrix} 136\,084 & -204\,107 & 68\,037 & 0 & 0 & 0 \\ -204\,107 & 816\,792 & 0 & -408\,186 & 204\,107 & 0 \\ 68\,037 & 0 & 272\,168 & -204\,107 & 68\,037 & 0 \\ 0 & -408\,186 & -204\,107 & 816\,792 & 0 & 204\,107 \\ 0 & 204\,107 & 68\,037 & 0 & 272\,168 & 68\,037 \\ 0 & 0 & 0 & 204\,107 & 68\,037 & 136\,084 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_8 \end{Bmatrix} = 35 \begin{Bmatrix} 1 \\ 12 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

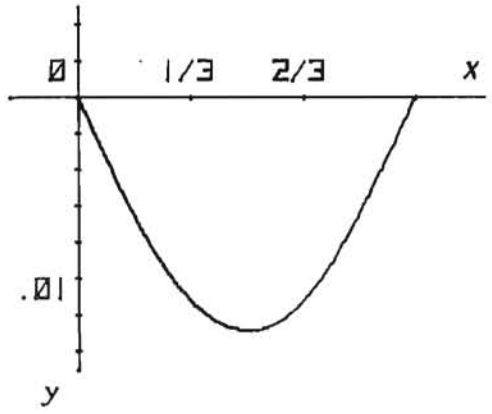
Zarámování prvků v matici odpovídá obr. 15 (s vynecháním prvního a sedmého řádku a sloupce). Řešením této soustavy vyjde

$$q_2 = 0{,}013\ 750 \qquad q_5 = 0{,}011\ 202$$
$$q_3 = 0{,}011\ 202 \qquad q_6 = -0{,}006\ 618 \qquad \text{(j)}$$
$$q_4 = 0{,}006\ 618 \qquad q_8 = -0{,}013\ 750$$

Průběh funkce Φ podle rovnice (e) je dán v rozsahu každého prvku jiným polynomem, neboť pro každý prvek máme jiný vektor parametrů $\{q^{(e)}\}$:

$$\{q^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}, \qquad \{q^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}, \qquad \{q^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ 0 \\ q_8 \end{Bmatrix}. \qquad \text{(k)}$$

Tento průběh je zakreslen na obr. 17. Obrázek byl pořízen na souřadnicovém zapisovači Hewlett-Packard. V tomto případě známe i přesné řešení dané úlohy. Nejsnáze je odvodíme pomocí Krylovových funkcí argumentu $x / \sqrt{2}$; příslušné vzorce pro stručnost vynecháváme. Průběh přesného řešení je v grafickém znázornění nerozeznatelný od průběhu na obr. 17, který jsme získali metodou konečných prvků. Uprostřed intervalu dává metoda konečných prvků hodnotu $y_{max} = \Phi(x = 0{,}5) = 0{,}012\ 856$, kdežto přesné řešení dává hodnotu 0,012 888. Chyba je tedy jen asi 0,25 %!



Obr. 17

Na tomto příkladu jsme poznali, že metoda konečných prvků může být účinným nástrojem, je-li správně aplikována. Naopak předchozí příklad dává ponaučení, jak snadno dostaneme nesmyslné výsledky, nesplníme-li podmínky nutné pro konvergenci ke správnému řešení.

12. příklad

Stejnou úlohu budeme řešit metodou konečných prvků, nevyjdeme však z Ritzovy, ale z Galerkinovy metody.

Pro tvarové funkce v jednotlivých prvcích $e = 1, 2, 3$ dostaneme - stejně jako dříve -

$$\Phi^{(e)} = \Phi^{(e)}(\xi) = \left[\varphi_i \ \varphi_j \ \varphi_k \ \varphi_l \right] \{q^{(e)}\}, \qquad \text{(a)}$$

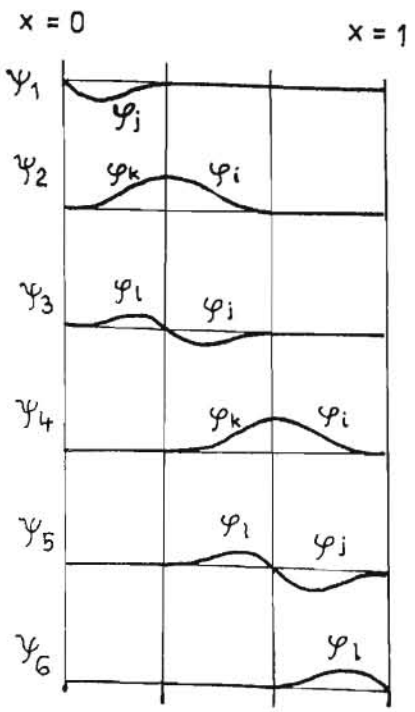
kde $\xi = \bar{x}/h$ značí lokální bezrozměrovou souřadnici a $\{q^{(e)}\}$ je dáno vztahy (k) z 11. příkladu. Z diferenciální rovnice

$$y - d^4y/dx^4 - 1 = 0 \qquad (b)$$

dostaneme dosazením z (a) zbytek (rezidiuum) v rozsahu e -tého prvku

$$R^{(e)} = \varphi_i q_i + \varphi_j q_j + \varphi_k q_k + \varphi_l q_l + \frac{1}{h^4}(\varphi_i^{IV} q_i + \varphi_j^{IV} q_j + \varphi_k^{IV} q_k + \varphi_l^{IV} q_l) - 1 . \qquad (c)$$

Bázové funkce jsou schematicky znázorněny na obr. 18. Je jich celkem šest.



Obr. 18

Podle Galerkina musí tedy vymizet těchto šest integrálů:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \varphi_j R^{(1)} d\xi = 0 ,\\
&\int_0^1 [\varphi_k R^{(1)} + \varphi_i R^{(2)}] d\xi = 0 ,\\
&\int_0^1 [\varphi_l R^{(1)} + \varphi_j R^{(2)}] d\xi = 0 ,\\
&\int_0^1 [\varphi_k R^{(2)} + \varphi_i R^{(3)}] d\xi = 0 ,\\
&\int_0^1 [\varphi_l R^{(2)} + \varphi_j R^{(3)}] d\xi = 0 ,\\
&\int_0^1 \varphi_l R^{(3)} d\xi = 0 .
\end{aligned} \qquad (d)$$

To je soustava rovnic pro šest neznámých q_2 , q_3 , q_4 , q_5 , q_6 , q_8 . Tvar těchto rovnic připomíná soustavu (j) z minulého příkladu. Prozkoumáme, do jaké míry se obě soustavy shodují. Vypočteme pro ilustraci některý z integrálů v soustavě (d), např.

$$\int_0^1 \varphi_k R^{(2)} d\xi - \int_0^1 (\varphi_i q_3 + \varphi_j q_4 + \varphi_k q_5 + \varphi_l q_6) \varphi_k d\xi + \frac{1}{h^4} \int_0^1 (\varphi_i^{IV} q_3 + \dots\dots + \varphi_l^{IV} q_6) \varphi_k d\xi - \int_0^1 \varphi_k d\xi . \qquad (e)$$

Dosadíme-li sem tvarové funkce $[\varphi]$, jak jsme je odvodili v minulém příkladu, odpadne předposlední člen, neboť čtvrté derivace těchto polynomů jsou identicky nulové. Tím však odpadne právě ten člen, který obsahuje ohybovou tuhost nosníku. Právem se můžeme obávat, že to nepříznivě ovlivní výsledek řešení. Abychom si objasnili souvislost s minulým příkladem, budeme členy se čtvrtou derivací dvakrát integrovat per partes. Například

$$\int_0^1 \varphi_i^{IV}\varphi_k\,d\xi = [\varphi_i'''\varphi_k]_0^1 - \int_0^1 \varphi_i'''\varphi_k'\,d\xi = [\varphi_i'''\varphi_k]_0^1 - [\varphi_i''\varphi_k']_0^1 + \int_0^1 \varphi_i''\varphi_k''\,d\xi \qquad (f)$$

Výrazy v hranatých závorkách by vymizely, kdyby platilo buď

$$\varphi_k(0) = 0,\ \varphi_k(1) = 0, \quad \text{nebo} \quad \varphi_i'''(0) = 0,\ \varphi_i'''(1) = 0 \qquad (g)$$

a kromě toho buď

$$\varphi_k'(0) = 0,\ \varphi_k'(1) = 0, \quad \text{nebo} \quad \varphi_i''(0) = 0,\ \varphi_i''(1) = 0. \qquad (h)$$

V první alternativě (g) a (h) jde o geometrické okrajové podmínky, v druhé o přirozené. Splnění rovnic (g) a (h) není třeba požadovat na hranici každého prvku, ale jen v bodech $x = 0$ a $x = 1$, neboť v součtech v rovnicích (d) se ostatní "okrajové členy" v hranatých závorkách z výrazů obdobných k (f) navzájem zruší, pokud nejsou předem nulové. Nenulové zůstanou pouze okrajové členy v první a v poslední z rovnic (d); je to způsobeno tím, že bázové funkce na obr. 18 nesplňují v bodech $x = 0$ a $x = 1$ všechny okrajové podmínky. */

Ze srovnání s 11. příkladem je zřejmé, že shodné výsledky dostaneme, budou-li oba okrajové členy na pravé straně rovnice (f) nulové. Pak totiž lze rovnici (e) zapsat ve tvaru

$$\int_0^1 \varphi_k R^{(2)}\,d\xi = \int_0^1 (\varphi_i q_3 + \varphi_j q_4 + \varphi_k q_5 + \varphi_l q_6)\varphi_k\,d\xi + \\ + \frac{1}{h^4}\int_0^1 (\varphi_i'' q_3 + \ldots + \varphi_l'' q_6)\varphi_k''\,d\xi - \int_0^1 \varphi_k\,d\xi$$

čili

$$\int_0^1 \varphi_k R^{(2)}\,d\xi = [k_{ki}\ k_{kj}\ k_{kk}\ k_{kl}] \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} - \{Q_k\}, \qquad (i)$$

kde

$$k_{rs} = \int_0^1 \left(\varphi_r\varphi_s + \frac{1}{h^4}\varphi_r''\varphi_s''\right)d\xi,$$
$$Q_k = \int_0^1 \varphi_k\,d\xi. \qquad (j)$$

*/ První a poslední z nich nesplňují podmínky (h).

To jsou - až na součinitel h , který se proti nule zkrátí - stejné výsledky, jaké jsme dostali dříve Ritzovou metodou. Můžeme je srovnat s rovnicemi (p) a (q) z minulého příkladu. Řádková matice v rovnici (i) je k-tým řádkem elementární matice tuhosti.

V literatuře se setkáváme s tím, že se k odvození elementární matice tuhosti použije Galerkinova metoda a okrajové členy se prostě vynechají, aniž se zkoumá, zda jsou skutečně rovny nule. Tato praktika sice může dávat výsledky shodné s Ritzovou metodou, ale není to již - přísně vzato - Galerkinova metoda. Ta dá shodné výsledky s Ritzovou metodou jen tehdy, jsou-li skutečně splněny všechny - tedy i přirozené - okrajové podmínky.

Je zřejmé, že k odvození matice tuhosti bychom mohli užít kteroukoli metodu z 6. kapitoly. Výsledky by se však mohly navzájem lišit, někdy dokonce značně. Výhodou Ritzovy metody, která vychází z variační formulace problému, je mimo jiné i to, že umožňuje nejsnáze stanovit podmínky konvergence ke správnému řešení a že pro daný výběr bázových funkcí dává nejlepší aproximaci; bázové funkce přitom mohou splňovat pouze geometrické okrajové podmínky.

11. příklad

Úlohu z 10. příkladu řešte diferenční metodou.

Řešení

Diferenciální rovnici

$$y^{IV} + y = 1 \tag{a}$$

nahradíme diferenční rovnicí

$$\frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} + y_i = 1. \tag{b}$$

Použijeme-li očíslování uzlů podle obr. 11 (číslicemi 1 až 4), budeme moci rovnici (b) napsat pro $i = 2$, popř. pro $i = 3$. K tomu budeme potřebovat fiktivní uzly $i = -1$ a $i = 5$ mimo definiční interval. Okrajové podmínky budou

$$y_1 = 0, \qquad y_4 = 0,$$

$$\frac{y_{-1} - 2y_1 + y_2}{h^2} = 0, \qquad \frac{y_3 - 2y_4 + y_5}{h^2} = 0. \tag{c}$$

Výpočtem (pro $h = 1/3$)

$$y_1 = 0, \quad y_2 = y_3 = 0{,}012\,195, \quad y_4 = 0. \tag{d}$$

Zajímá-li nás hodnota $y_{max} = y\ (x = 0{,}5)$, nedostaneme ji při rozdělení nosníku na lichý počet stejných dílů přímo, ale jen pomocí dešifrovacího algoritmu, který dodatečně zvolíme. Vzhledem k souměrnosti můžeme v daném případě zvolit parabolu $y(x) = 4{,}5\, y_2\, x(1-x)$, která prochází všemi body x_i, y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ podle (d) a pro $X = 0{,}5$ dává $y_{max} = 9\ y_2/8 = 0{,}013\ 719$. Správná hodnota je 0,012 888, chyba přibližného řešení diferenční metodou je tedy v tomto případě 6,5 %.

Z příkladu je zřejmý rozdíl proti metodě konečných prvků. Diferenční metodou dostaneme funkční hodnoty jen v některých bodech; tyto funkční hodnoty nezávisejí na dešifrovacím algoritmu. Naproti tomu u metody konečných prvků závisejí funkční hodnoty v uzlech na zvolených tvarových funkcích. Další rozdíl je v tom, že diferenční metoda dala větší hodnotu y_{max} než je přesné řešení, metoda konečných prvků naopak menší. Při stejném dělení ($h = 1/3$) dala metoda konečných prvků s kubickým polynomem 26krát menší chybu než diferenční metoda. Okolnost, že deformační varianta metody konečných prvků dává pro posuvy hodnoty menší než přesné (nebo stejné, umožní-li to tvarové funkce), souvisí s vlastnostmi funkcionálu příslušné variační úlohy. Přesnému řešení odpovídá minimální hodnota tohoto funkcionálu; pro každé přibližné řešení má tento funkcionál větší hodnotu. Proto přibližná řešení odvozená variační metodou ohraničují přesnou hodnotu.

14. příklad

Metodou konečných prvků vyšetřete napětí a torzní tuhost u kroucené tyče čtvercového průřezu.

Řešení

Problém je popsán funkcionálem (srov. 8. příklad)

$$F = \iint_V \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - 2z\right] dx\, dy, \qquad (a)$$

popř. diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} + 2 = 0 \qquad *) \qquad (b)$$

s okrajovou podmínkou na hranici oblasti S

$$z = 0. \qquad (c)$$

Napětí plynou podle Prandtla z rovnic

$$\tau_{xz} = G\vartheta \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -G\vartheta \frac{\partial z}{\partial x} \qquad (d)$$

*) Bezrozměrové jsou souřadnice x, y i proměnná Z.

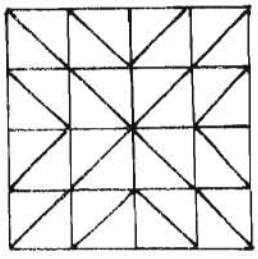
a moment torzní tuhosti v krutu z rovnice

$$J_k = M_k/(G\vartheta) = 2\iint_V z\,dx\,dy, \qquad (e)$$

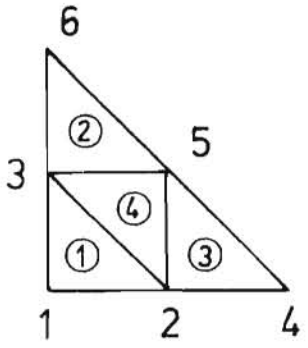
značí-li ϑ poměrné zkroucení (zkrut) a G modul pružnosti ve smyku. Zadání je upraveno tak, aby Poissonova diferenciální rovnice (b) byla bezrozměrová. Rozměry čtvercového průřezu volíme 2 x 2, tj. pro vnitřek oblasti platí

$$-1 < x < 1 \; ; \qquad -1 < y < 1.$$

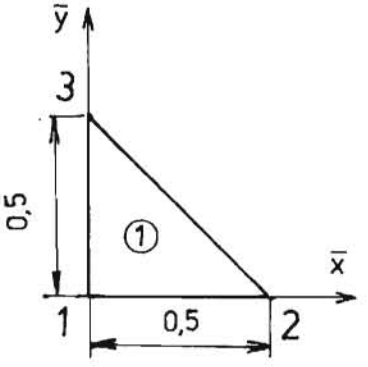
Oblast rozdělíme na trojúhelníkové prvky podle obr. 19. Vzhledem k souměrnosti postačí, budeme-li se zabývat jen osminou průřezu vyznačenou na obr. 20.



Obr. 19



Obr. 20



Obr. 21

Prvek č. 1 je zobrazen zvlášť na obr. 21. Aproximaci v něm volíme jako lineární polynom

$$\phi = \phi(\bar{x}, \bar{y}) = a_1 + a_2\bar{x} + a_3\bar{y}. \qquad (f)$$

Pro prvek na obr. 21 musí platit, že

$$q_1 = \Phi(0;0) = a_1,$$
$$q_2 = \Phi(0{,}5;0) = a_1 + 0{,}5\,a_2,$$
$$q_3 = \Phi(0;0{,}5) = a_1 + 0{,}5\,a_3.$$

Odtud

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}, \qquad (g)$$

a tedy

$$\Phi^{(1)} = [1 \;\; \bar{x} \;\; \bar{y}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= [\varphi_1 \;\; \varphi_2 \;\; \varphi_3] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = [\varphi] \{q^{(1)}\}, \tag{h}$$

kde

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - 2\bar{x} - 2\bar{y}, \\ \varphi_2 &= 2\bar{x} \\ \varphi_3 &= 2\bar{y} \end{aligned} \tag{i}$$

jsou tvarové funkce v lokálních souřadnicích.

Funkci $\Phi^{(1)}$ podle (h) dosadíme do funkcionálu (a); pro jeho variaci dostaneme - index (1) pro stručnost vynecháváme -

$$\delta F = \{\delta q\}^T \iint_V \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial \{q\}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial \{q\}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - 2 \frac{\partial}{\partial \{q\}} \Phi \right\} dx\, dy$$

Tato variace bude nulová jen tehdy, vymizí-li dvojný integrál, neboť $\{\delta q\}$ volíme libovolně. To však lze napsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{j}$$

čili - nyní opět připojíme index (1) -

$$[K^{(1)}] \{q^{(1)}\} - \{Q^{(1)}\} = \{0\}. \tag{k}$$

položíme-li

$$k_{rs} = \iint_V \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} \right) dx\, dy, \tag{l}$$

$$Q_r = 2 \iint_V \varphi_r \, dx\, dy. \tag{m}$$

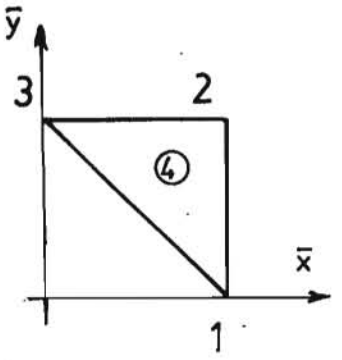
Přitom r , s = 1, 2, 3. Po vyčíslení integrálů pomocí rovnic (i) vyjde

$$[\mathcal{K}^{(1)}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \{Q^{(1)}\} = \frac{1}{12}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \tag{n}$$

Integračním oborem je přitom trojúhelník na obr. 21. Protože prvky ② a ③ na obr. 20 jsou shodné a shodně orientované trojúhelníky s trojúhelníkem ① na obr. 21, jsou elementární matice všech těchto prvků stejné. Pro prvek ④ dostaneme transformací souřadnic otočením o 180 ° nebo opakovaným řešením pro trojúhelníkovou oblast podle obr. 22

$$[\mathcal{K}^{(4)}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \tag{o}$$

Vrcholy trojúhelníků jsou na obr. 21 a 22 číslovány lokálními indexy 1, 2, 3. Globální číslování je na obr. 20. Celkovou matici tuhosti pro oblast na obr. 20 sestavíme adicí po řádcích pomocí tabulky, v níž v horním řádku píšeme globální a v dolním lokální indexy; sestavujeme vzhledem k souměrnosti jen horní polovinu matice (tj. prvky k_{rs} pro $s \geq r$); způsob použití tabulky vysvětlíme na příkladech. Bude tedy např.:



Obr. 22

$$k_{11} = k_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}\,2 = 1 ,$$

$$k_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(3)} + k_{22}^{(4)} = \frac{1}{2}\,(1 + 2 + 1) = 4/2 = 2 ,$$

$$k_{23} = k_{23}^{(1)} + k_{23}^{(4)} = 0 + 0 = 0.$$

Tabulka přiřazující lokální a globální indexy

Řádek matice	Prvek	Indexy { globální / lokální					
1	1	1	1	1	2	1	3
		1	1	1	2	1	3
2	1	2	2	2	3		
		2	2	2	3		
	3	2	2	2	4	2	5
		1	1	1	2	1	3
	4	2	2	2	3	2	5
		1	1	1	3	1	2
3	1	3	3				
		3	3				
	2	3	3	3	5	3	6
		1	1	1	2	1	3
	4	3	3	3	5		
		3	3	3	2		
4	3	4	4	4	5		
		2	2	2	3		
5	2	5	5	5	6		
		2	2	2	3		
	3	5	5				
		3	3				
	4	5	5				
		2	2				
6	2	6	6				
		3	3				

Hodnoty $k_{rs}^{(e)}$ odečítáme z příslušných elementárních matic; pro $e = 1, 2, 3$ z matice $[\mathcal{K}^{(1)}]$, pro $e = 4$ z matice $[\mathcal{K}^{(4)}]$. Výsledná matice $[K]$ musí být souměrná, singulární, a musí mít nulové součty prvků v každém sloupci (řádku). Poslední podmínka plyne z požadavku rovnováhy Prandtlovy membrány a slouží ke kontrole výsledků. Podobně se složí vektory $\{Q^{(e)}\}$. Celkem bude

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (p)$$

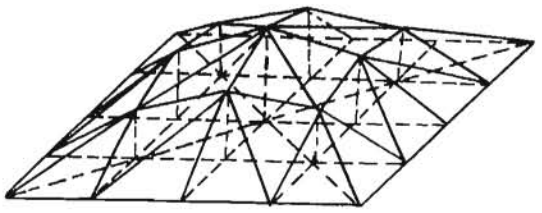
Okrajové podmínky jsou: $q_1 = q_2 = q_4 = 0$. Zbývá - po vynechání příslušných řádků a sloupců -

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (q)$$

Řešením dostaneme

$$\begin{aligned} q_3 &= 11/24 = 0{,}458\,334, \\ q_5 &= 17/48 = 0{,}354\,167, \\ q_6 &= 5/8 = 0{,}625\,000. \end{aligned} \qquad (r)$$

Prandtlova membrána je v tomto případě aproximována mnohostěnem zakresleným na obr. 23. Kóty jeho vrcholů jsou úměrné vypočteným hodnotám. Největší smykové napětí v tyči je dáno maximální hodnotou výrazu



Obr. 23

$$\tau = G\vartheta\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}. \qquad (s)$$

To vyplývá z rovnic (d). S přihlédnutím k obr. 20 a 23 je

$$\tau_{max} = G\vartheta\,\frac{q_3}{h}, \qquad (t)$$

kde h značí rameno trojúhelníku na obr. 21, tj. $h = 0{,}5$. Proto

$$\tau_{max} \doteq 0{,}916\ 668\ G\vartheta. \qquad (u)$$

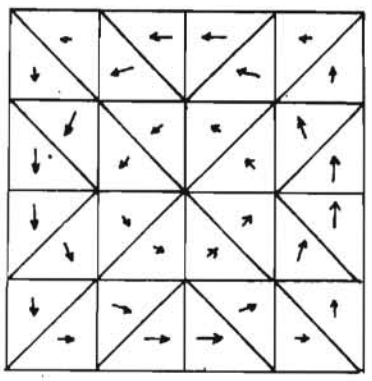
Přesná hodnota je $\tau_{max} = 1{,}351\ 92\, G\vartheta$, tj. chyba je 32 %. Tato nepřesnost je značná. Je způsobena tím, že derivováním se nepřesnosti zveličují (integrováním se naopak vyhlazují). Větší přesnost dostaneme, budeme-li počítat podle (e) torzní tuhost. S přihlédnutím k obr. 20 vyjde dvojnásobný objem vrchlíku podle obr. 23 takto:

$$J_k = 2.8.\ \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\left[q_3 + (q_3 + q_5 + q_6) + q_5 + (q_6 + q_5)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[3\,q_3 + 3\,q_5 + q_6\right] \doteq 2{,}0417, \qquad (v)$$

kdežto přesná hodnota je 2,2495; chyba je tedy asi 9 %. I tato chyba je poměrně velká; je to způsobeno hrubým rozdělením oblasti na jednotlivé prvky.

Skutečný tvar membrány je však hladká plocha. Nahradili jsme ji plochou po částech hladkou; to nenarušuje podmínku konvergence, neboť první derivace, které vstupují do funkcionálu (a), zůstávají i na hranicích prvků omezené (ovšem nespojité). Proto lze právem očekávat, že s jemnějším dělením oblasti na prvky dostaneme přesnější výsledky.



Obr. 24

Napětí τ jsou dána derivacemi (d), takže pro **náhradní "membránu"** podle obr. 23 vyjdou v rozsahu každého prvku konstantní (obr. 24); na hranicích prvků jsou proto - na rozdíl od skutečnosti - nespojitá. Výsledná smyková napětí uvnitř prvků jsou na obr. 24 vyznačena šipkami, které je určují svým směrem i velikostí. Je zvykem, že se tato vypočtená napětí přisuzují těžišti každého prvku, ale není pro to žádný zvláštní důvod. Pro napětí v ostatních bodech lze pak volit nějaký dešifrovací algoritmus, kterým se průběh napětí "vyhlazuje" a přibližuje exaktním hodnotám. Lze však spíše doporučit zpřesnění výpočtu volbou jemnější sítě prvků, což je rigorózní postup.

9. O volbě tvarových funkcí

Z příkladů, které jsme uvedli, je zřejmé, že tvarové funkce můžeme volit podle zkušenosti. Výsledná aproximace se zpravidla skládá z polynomů φ_i tak, že platí - srov. s rovnicí (85) -

$$\phi_i = [\psi_1 \psi_2 \ldots\ldots \psi_m] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{Bmatrix} . \qquad (96)$$

Parametry q_1 až q_m jsou funkční hodnoty Φ_i v uzlech. Tvarové funkce ψ_i mají tu vlastnost, že jsou nenulové právě jen v tom z uzlů, k jehož parametru náležejí, a tam nabývají jednotkové hodnoty. Volíme-li uzly v potřebném množství na hranicích prvků, a to tak, že jsou společné sousedním prvkům, zabezpečíme tím zároveň potřebnou spojitost výsledné aproximace mezi prvky (přinejmenším v uzlech, snažíme se však dosáhnout spojitosti na celé hranici).

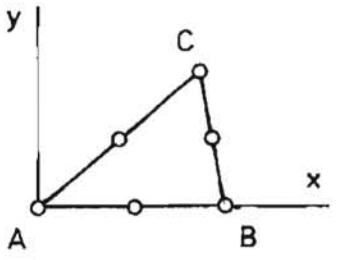
Při sestavování polynomů přihlížíme k přirozeným vlastnostem kontinua (k jeho izotropii, symetrii apod.). Sestavujeme-li např. polynom v proměnných x, y, a mají-li tyto osy rovnocenné postavení, vybíráme členy z Pascalova trojúhelníku

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & x & & y & & \\ & & & x^2 & & xy & & y^2 & \\ & & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\ & x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \end{array}$$

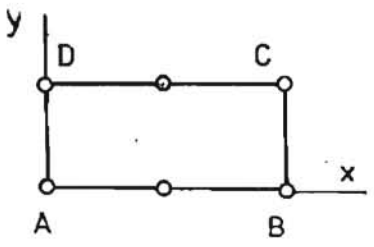
vždy souměrně, tedy např.

$$\phi_i = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 y + a_6 x y^2 . \qquad (97)$$

Pro takový polynom potřebujeme šest uzlů na obvodu prvku. Mohli bychom tedy tento polynom použít např. pro prvek na obr. 25 nebo pro obdélník na obr. 26.



Obr. 25



Obr. 26

Dosadíme-li však do rovnice (97) z rovnice přímky $y = kx + c$, dostaneme obecně polynom v jedné proměnné třetího stupně, k jehož určení potřebujeme čtyři body. Proto nedosáhneme obecně spojitosti tvarových funkcí na hranicích prvků, na nichž máme nejvýše tři body. Výjimku činí strany AD a DC na

obr. 26. Kromě toho zjistíme, že na stranách AB na obr. 25 a 26 nebudeme moci zvolit nezávislé parametry, neboť pro $y = 0$ zbudou v rovnici (97) jen dva nenulové členy a jejich součinitele nelze určit ze tří nezávislých podmínek. Zvolíme-li však polynom pouze druhého stupně

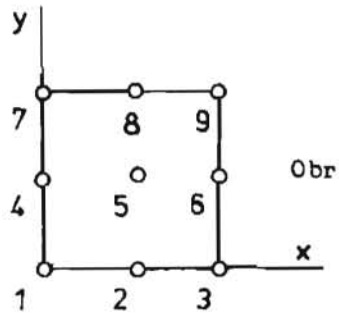
$$\phi_i = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2, \qquad (98)$$

dostaneme u prvku podle obr. 25 spojitost na všech stranách. U obdélníku podle obr. 26 nemají osy x , y rovnocenné postavení, takže je lépe volit funkci

$$\phi_i = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 x^2 y, \qquad (99)$$

dávající rovněž spojitost na všech stranách. Pro x = konst je totiž $\phi_i = b_1 + b_2 y$ (na stranách AD a BC musí být po dvou uzlech) a pro y = konst vyjde $\phi_i = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ (na stranách AB a DC musí být tedy po třech uzlech). Pak funkční hodnoty v uzlech na téže straně obdélníka úplně určují průběh aproximace na této straně (nezávisle na ostatních parametrech, a tedy též nezávisle na tom, ke kterému prvku strana patří).

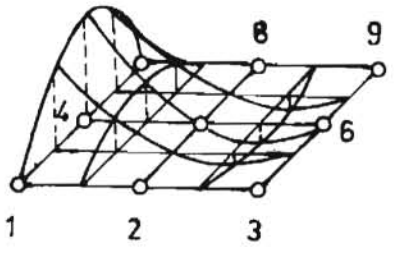
Takto sestavené tvarové funkce pro různé prvky, které mají zpravidla uzly na hranicích, se používají nejčastěji. Prvky s těmito tvarovými funkcemi tvoří tzv. "serendipity family" (serendipity = schopnost najít ztracené věci; název odvozen z pohádky o princích z ostrova Serendipu, tj. Ceylonu - dnes Srí Lanka).



Obr. 27

Tvarové funkce však můžeme také psát přímo (bez odvozování), použijeme-li k tomu Lagrangeovy polynomy. Pak ovšem potřebujeme - nejde-li o lineární polynomy - uzly také uvnitř oblasti. Např. pro uzel 4 prvku na obr. 27 můžeme psát tvarovou funkci jako součin dvou kvadratických polynomů

$$\varphi_4 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot \frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_4-y_1)(y_4-y_3)} . \qquad (100)$$



Obr. 28

Funkce (100) je nulová ve všech uzlech s výjimkou uzlu 4 ($x = x_4 = x_1$, $y = y_4$), kde nabývá hodnoty 1 (obr. 28). Odpadá tedy dosazování souřadnic uzlů do příslušného polynomu a hledání jeho součinitelů. Takto sestavené tvarové funkce, charakterizující prvky s uzly umístěnými zpravidla i uvnitř, tvoří "Lagrange family". Nevýhodou těchto prvků je, že při větším počtu uzlů uvnitř oblasti obvykle nesplňují požadavek spojitosti tvarových funkcí na hranicích prvků.

V obecném případě mohou být uzly rozmístěny nepravidelně. V limitě mohou dva prvky splynout; dostáváme pak uzel, v němž jeden parametr značí funkční hodnotu, druhý její derivaci (v několikarozměrné oblasti jde o parciální derivace). Takový prvek jsme použili v 11. příkladu. Tvarové funkce pak můžeme přímo psát pomocí tzv. Hermiteových polynomů $H_{mi}^{n}(x)$. Jsou to polynomy stupně $2n+1$, které dávají

$$\frac{d^k H}{dx^k} = 1 \qquad \text{pro } k = m,\ x = x_i,$$
$$\frac{d^k H}{dx^k} = 0 \qquad \text{pro } k \neq m \text{ nebo pro } x = x_j. \tag{101}$$

Přitom $m = 0, 1, \ldots, n$. Je-li např. $n = 1$, jde o čtyři kubické polynomy H'_{00}, H'_{01}, H'_{10}, H'_{11} s těmito vlastnostmi:

$$\begin{aligned} H'_{00}(x = x_0) &= 1 & H'_{00}(x = x_1) &= 0 \\ H'_{01}(x = x_0) &= 0 & H'_{01}(x = x_1) &= 1 \\ \frac{dH'_{10}}{dx}(x = x_0) &= 1 & \frac{dH'_{10}}{dx}(x = x_1) &= 0 \\ \frac{dH'_{11}}{dx}(x = x_0) &= 0 & \frac{dH'_{11}}{dx}(x = x_1) &= 1 \end{aligned} \tag{102}$$

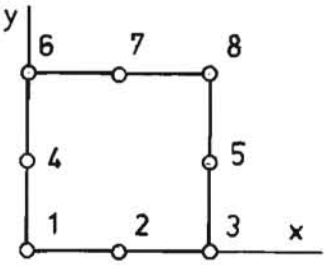
Tyto podmínky splňují na intervalu $0 \leq x \leq 1$ ($x_0 = 0$, $x_1 = 1$) polynomy

$$\begin{aligned} H'_{00} &= 2x^3 - 3x^2 + 1, & H'_{10} &= x^3 - 2x^2 + x, \\ H'_{01} &= -2x^3 + 3x^2, & H'_{11} &= x^3 - x^2. \end{aligned} \tag{103}$$

To jsou však funkce φ_1 až φ_4, zobrazené na obr. 18.

15. příklad

Pro čtvercový element 1 x 1 s osmi uzly pravidelně rozmístěnými na hranici navrhněte tvarové funkce (obr. 29).



Obr. 29

Řešení

Zvolíme polynom

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 x y^2. \tag{a}$$

Dosadíme-li do pravé strany (a) souřadnice i-tého uzlu, bude $\Phi = q_i$. Odtud

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 1 & 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \qquad (b)$$

Použitím inverzní matice odtud dostaneme

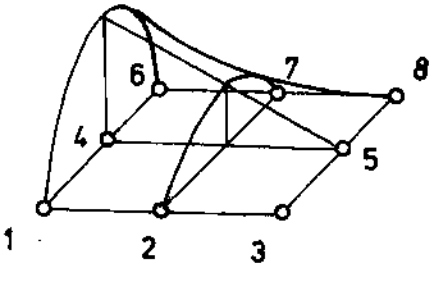
$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -1 & -4 & 4 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & -4 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{Bmatrix} \qquad (c)$$

Nyní již můžeme psát, čemu se rovnají tvarové funkce. Omezíme se na jeden příklad a napíšeme tvarovou funkci pro uzel 4. Bude-li nenulový pouze parametr q_4, budou nenulové jen tyto hodnoty:

$$a_3 = 4q_4, \qquad a_6 = -4q_4,$$
$$a_5 = -4q_4, \qquad a_8 = 4q_4.$$

Tvarová funkce příslušná tomuto uzlu tedy bude

$$\varphi_4 = 4(y - xy - y^2 + xy^2) = 4y(1-y)(1-x). \qquad (d)$$



Obr. 30

Její průběh je zakreslen na obr. 30. Je to prvek ze "serendipity family" na rozdíl od prvku na obr. 28; pro ten bychom z rovnice (100) v našem případě dostali

$$\varphi_4 = \frac{(x-0{,}5)(x-1)}{(-0{,}5)(-1)} \cdot \frac{y(y-1)}{0{,}5(0{,}5-1)} =$$

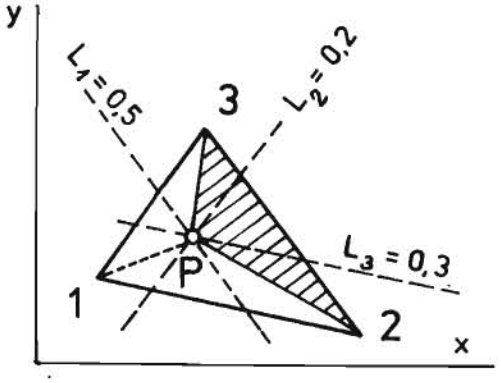
$$= 4y(1-y)(1-x)(1-2x). \qquad (e)$$

To by však byl prvek z "Lagrange family". Je to - jak vidíme - polynom o jeden stupeň větší. Tvarové funkce obou těchto prvků dávají pro x = konst (popř. y = konst) obecně kvadratické paraboly, jež jsou jednoznačně určeny funkčními hodnotami ve třech uzlech položených na téže straně čtverce. Proto oba typy dávají spojitou aproximaci Φ na hranicích prvků. Lagrangeovský prvek však bývá někdy méně vhodný, neboť tvarové funkce - např. na obr. 28 - mají složitější průběhy a nedávají přitom výrazně lepší výsledky.

Případ prvku na obr. 29 je velmi jednoduchý (pravidelné rozmístění uzlů), takže výraz (d) jsme mohli "uhádnout" předem. To však nebývá vždy možné. Také by se nám mohlo přihodit, že bychom zkusmo nalezli tvarovou funkci příslušnou jinému polynomu.

10. Homogenní souřadnice

Nejužívanějším konečným prvkem pro dvourozměrnou oblast je trojúhelník. A právě u tohoto prvku cítíme, že se k jeho popisu příliš nehodí pravoúhlé souřadnice (obr. 31). Zavedeme proto homogenní (bezrozměrové) souřadnice L_1, L_2, L_3. Souřadnice L_1 je poměr šrafované plochy $P23$ k ploše trojúhelníku 123 a podobně L_2, L_3. Tedy



Obr. 31

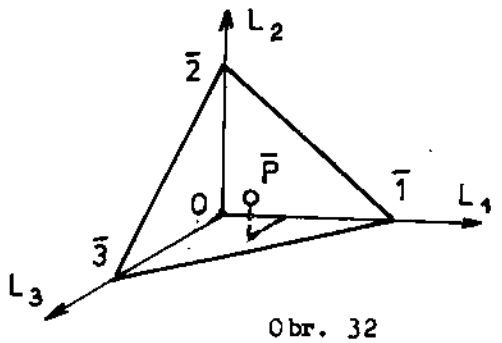
$$L_1 = \frac{\Delta P23}{\Delta 123}, \qquad L_3 = \frac{\Delta P12}{\Delta 123}. \qquad (104)$$

$$L_2 = \frac{\Delta P31}{\Delta 123},$$

Sečtením dostaneme podmínku

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \qquad (105)$$

Ze tří souřadnic bodu P jsou tedy jen dvě nezávislé. Bod P na obr. 31 má souřadnice $L_1 = 0{,}5$; $L_2 = 0{,}2$; $L_3 = 0{,}3$.



Obr. 32

Souřadnice L_1, L_2, L_3 můžeme považovat za lokální souřadnice v třírozměrném prostoru (obr. 32). Rovnostranný trojúhelník $\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}$ na obr. 32, který vytíná na osách souřadnic jednotkové úseky, se transformuje do obecného trojúhelníka 123 na obr. 31 vzájemně jednoznačně. Vztah (105) je rovnicí roviny trojúhelníka $\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}$ na obr. 32.

Zvolíme-li aproximaci lineárními polynomy s uzly ve vrcholech trojúhelníku, dostaneme tvarové funkce v lokálních homogenních souřadnicích

$$\varphi_1 = L_1\,, \qquad \varphi_2 = L_2\,, \qquad \varphi_3 = L_3\,. \tag{106}$$

Zbývá najít zobrazovací rovnici

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}, \tag{107}$$

abychom mohli převést tvarové funkce do globálních souřadnic. Musí zřejmě platit, že

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{108}$$

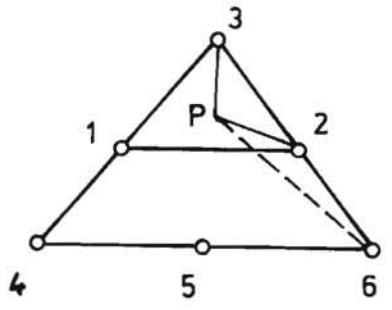
To je devět rovnic pro výpočet prvků a_{jk} matice $[A]$. Vyjde

$$a_{11} = \frac{y_2 - y_3}{2\Delta}\,, \qquad a_{12} = \frac{x_3 - x_2}{2\Delta}\,, \qquad a_{13} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2\Delta}\,, \tag{109}$$

kde

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{trojúhelník 123}.$$

Obdobně vyjdou další prvky hledané matice. Známe-li tvarové funkce (106) pro lineární polynom (trojúhelník 123), snadno najdeme i tvarové funkce pro kvadratický polynom (trojúhelník 346, obr. 33), jsou-li uzly rozděleny



Obr. 33

na každé straně ve stejných vzdálenostech. Označíme-li stupeň polynomu horním indexem v závorce, bude zřejmě

$$\varphi_3^{(2)} = L_3^{(2)}\varphi_3^{(1)} = L_3^{(2)}L_3^{(1)} \tag{110}$$

Funkce $\varphi_3^{(2)}$ bude totiž nulová ve všech uzlech s výjimkou uzlu 3, kde bude nabývat hodnoty 1, neboť $L_3^{(2)}$ je nulová podél $\overline{456}$ a $L_3^{(1)}$ podél $\overline{12}$. Obdobně

$$\varphi_1^{(2)} = 2L_3^{(2)}L_1 , \quad \varphi_2^{(2)} = 2L_3^{(2)}L_2^{(1)} \tag{111}$$

První z těchto funkcí je nulová ve všech uzlech s výjimkou uzlu 1, v němž $L_1^{(1)} = 1$, $L_3^{(2)} = 0{,}5$, takže $\varphi_1^{(2)} = 1$.

Z definice homogenních souřadnic vyplývá, že

$$L_4^{(2)} = \frac{\Delta P63}{\Delta 463} , \quad L_1^{(1)} = \frac{\Delta P23}{\Delta 123} . \tag{112}$$

Protože $\Delta 463 = 4.\ \Delta 123$ a dále $\Delta P63 = 2.\ \Delta P23$, vyjde

$$L_1^{(1)} = 2L_4^{(2)} . \tag{113}$$

Podobně

$$L_2^{(1)} = 2L_6^{(2)}$$

a dále

$$L_3^{(1)} = 1 - L_1^{(1)} - L_2^{(1)} = 1 - 2(L_4^{(2)} + L_6^{(2)}) =$$

$$= 1 - 2(1 - L_3^{(2)}) = 2L_3^{(2)} - 1 . \tag{114}$$

Budeme tedy pro prvek podle obr. 33 mít (indexy (2) vynecháme)

$$\varphi_1 = 4L_3L_4 , \quad \varphi_2 = 4L_3L_6 , \tag{115}$$

$$\varphi_3 = L_3(2L_3 - 1).$$

Funkce L_3, L_4, L_6 platí nyní pro trojúhelník s vrcholy 3, 4, 6. Záměnou indexů s přihlédnutím k obr. 31 bychom dostali i ostatních šest tvarových funkcí.

Výhodou homogenních souřadnic je, že dávají stejné tvarové funkce v lokálních souřadnicích pro všechny trojúhelníkové prvky; pro ty se liší jen koeficienty v transformačních rovnicích (107), které závisejí na souřadnicích vrcholů. Kromě toho se snadno a v jednoduchých vzorcích získají tvarové funkce i pro aproximace vyšších stupňů. Příkladem jsou rovnice (115) platné pro trojúhelník s kvadratickým polynomem.

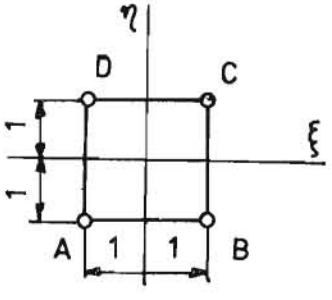
11. Prvky složitých tvarů, odvozené transformací z rodičovských elementů

V minulé kapitole jsme ukázali, jak snadno lze odvodit tvarové funkce libovolného trojúhelníkového prvku z jediného "rodičovského" trojúhelníku na obr. 32. Příslušné transformační vzorce - inverzní k vztahům (107) - jsou

$$\{x\} = [\, L_1\ L_2\ L_3 \,] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \qquad \{y\} = [\, L_1\ L_2\ L_3 \,] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}. \tag{116}$$

Třetí rovnici, která je totožná se (105), jsme nenapsali. Správnost vztahů (116) je zřejmá ihned z definice homogenních souřadnic; L_k nabývá totiž hodnoty 1 v uzlu " k " a hodnoty 0 v ostatních uzlech. Tuto vlastnost však mají obecně tvarové funkce φ_k, takže existuje třída transformací, pro niž platí vztahy

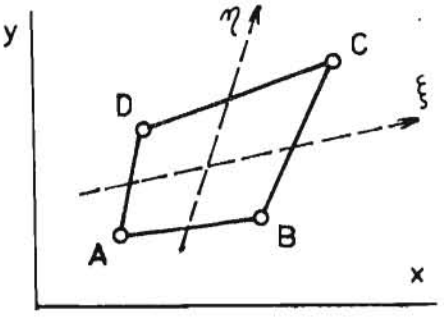
$$\{x\} = [\, \varphi_1\ \varphi_2\ \dots\ \varphi_m \,] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Bmatrix}, \qquad \{y\} = [\, \varphi_1\ \varphi_2\ \dots\ \varphi_m \,] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{Bmatrix}. \tag{117}$$



Obr. 34

Omezíme se na dvě souřadnice; zobecnění pro třírozměrný prostor je snadné. Tvarové funkce $[\, \varphi \,]$ jsou polynomy v lokálních souřadnicích ξ, η, které můžeme normovat např. podmínkou $|\xi| \leq 1$, $|\eta| \leq 1$. Rodičovský prvek je pak čtverec zakreslený na obr. 34. Z něho můžeme odvodit popsanou transformací čtyřúhelníkové prvky nejrůznějších tvarů. Např. tvarové funkce

$$\varphi_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4\,, \qquad \varphi_3 = (1+\xi)(1+\eta)/4\,,$$
$$\varphi_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4\,, \qquad \varphi_4 = (1-\xi)(1+\eta)/4 \tag{118}$$



Obr. 35

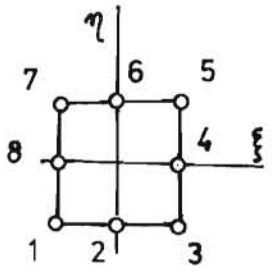
zobrazí čtverec na obr. 34 do libovolného čtyřúhelníku (obr. 35). Přímky ξ = konst (popř. η = konst) se zobrazí opět jako přímky, neboť tvarové funkce (118) mají bilineární formu. Obecně by však mohly mít i tento (málo vhodný) tvar

$$\varphi_i = (1 \pm \xi)^r (1 \pm \eta)^s / 2^{(r+s)} \tag{119}$$

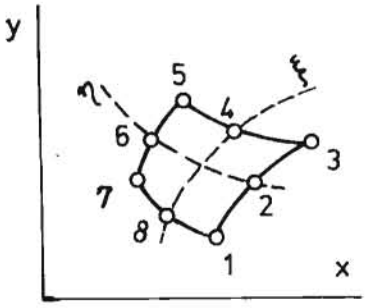
a výsledný element by byl křivočarý.

Musíme však dbát o to, aby zobrazení bylo vzájemně jednoznačné a aby v síti zobrazených prvků nevznikly "štěrbiny". Toho dosáhneme, zvolíme-li rodičovské prvky s takovými tvarovými funkcemi, které splňují na hranicích prvků podmínku spojitosti; síť transformovaných (odvozených) prvků bude potom souvislá.

S tvarovými funkcemi vyšších stupňů vzroste na obvodě počet uzlů; pak můžeme specifikovat tvar odvozeného prvku větším počtem uzlů (obr. 36 a 37).



Obr. 36



Obr. 37

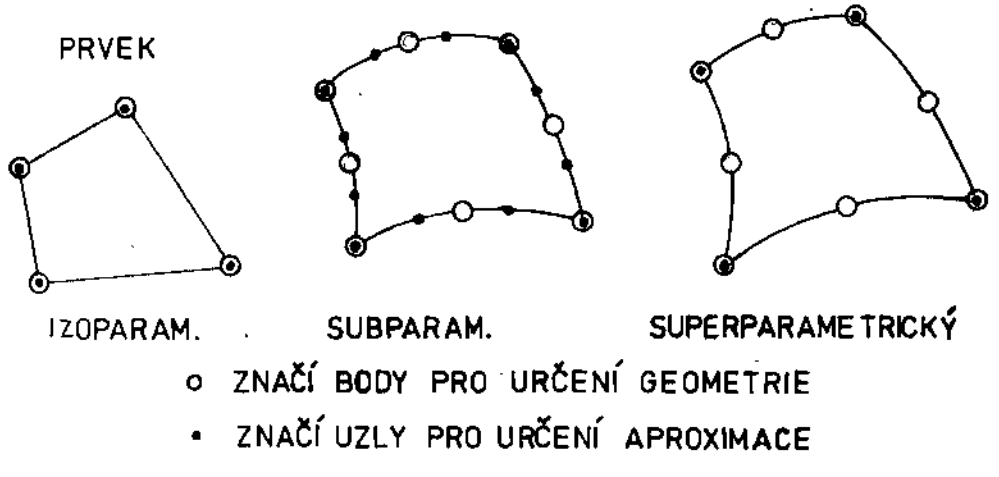
Nyní jde o to, určit pro odvozené prvky také tvarové funkce. Výsledná aproximace bude

$$\phi = \varphi_1' q_1 + \varphi_2' q_2 + \cdots + \varphi_n' q_n\,. \tag{120}$$

a tedy

$$\{\phi\} = [\psi]\{q\}. \tag{121}$$

Připomeňme, že počet uzlů určujících geometrii transformovaného prvku byl m podle (117), kdežto počet uzlů určujících aproximaci (120) je n. Avšak počet uzlů se v tomto případě shoduje s počtem parametrů. Použijeme-li v rovnicích (117) i (120) stejné tvarové funkce $[\psi] = [N]$, bude $m = n$; dostaneme tak izoparametrické prvky. Jinak pro $m < n$ mluvíme o prvcích subparametrických (pro určení geometrického tvaru používáme méně uzlů než máme parametrů pro výslednou aproximační funkci) a pro $m > n$ o prvcích superparametrických (k určení geometrického tvaru užíváme více uzlů než máme parametrů pro aproximační funkci). Příklady těchto prvků jsou na obr. 38.



Obr. 38

Izoparametrické prvky mají proti ostatním výhodu, že se snadno kontroluje, je-li lineární kombinace tvarových funkcí schopna popsat případ, kdy funkce ϕ nebo její derivace, vyskytují-li se ve funkcionálu úlohy, jsou konstantní. Mají-li např. být konstantní první parciální derivace, musí mít funkce ϕ obecně tvar

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \tag{122}$$

kde α_1 až α_3 jsou konstanty. Avšak

$$\phi = \psi_1 q_1 + \psi_2 q_2 + \cdots + \psi_n q_n = \sum \psi_i q_i . \tag{123}$$

Podle definice je parametr q_i hodnotou funkce Φ v i-tém uzlu; tedy - podle (122) -

$$q_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i . \tag{124}$$

Z této rovnice dosadíme do (123) a budeme mít

$$\Phi = \alpha_1 \sum \varphi_i + \alpha_2 \sum \varphi_i x_i + \alpha_3 \sum \varphi_i y_i . \tag{125}$$

Srovnáním s rovnicí (122) vyjde požadavek, aby

$$\sum \varphi_i = 1 , \quad \sum \varphi_i x_i = x , \quad \sum \varphi_i y_i = y . \tag{126}$$

Druhé dvě z těchto podmínek jsou splněny, neboť pro izoparametrické prvky platí (117). Stačí tedy, aby

$$\sum \varphi_i = 1 . \tag{127}$$

Tvarové funkce (118) tuto podmínku splňují, avšak funkce typu (119) obecně nikoli.

16. příklad

Odvoďte matici $[\mathcal{K}^{(4)}]$ ze 14. příkladu transformací z rodičovského trojúhelníku na obr. 32.

Řešení

Pro prvky hledané matice platí

$$k_{rs} = \iint_V \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} \right) dx\, dy . \tag{a}$$

V našem případě máme v lokálních souřadnicích

$$\varphi_1 = L_1 , \quad \varphi_2 = L_2 , \quad \varphi_3 = L_3 . \tag{b}$$

Abychom se vyhnuli složitým transformačním vztahům (107), přejdeme v rovnici (a) k lokálním souřadnicím. Proto vyjádříme lokální souřadnice dvěma nezávisle proměnnými ξ , η (neboť jen dvě ze tří homogenních souřadnic jsou nezávislé); položíme

$$L_1 = \xi , \quad L_2 = \eta , \quad L_3 = 1 - \xi - \eta \tag{c}$$

a dostaneme

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_1} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_3}\,,$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_2} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_3}\,. \qquad \text{(d)}$$

Dále platí, že

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad \text{atd., celkem}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{Bmatrix}\,. \qquad \text{(e)}$$

Matice $[J]$ je známý jakobián. Z poslední rovnice můžeme vypočítat vektor na pravé straně, neboť je-li zobrazení vzájemně jednoznačné, existuje inverzní matice $[J]^{-1}$. Kromě toho $dx\,dy = |J|\,d\xi\,d\eta$, takže z rovnice (a) vyjde

$$k_{rs} = \iint_{V^e} \left[\frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi}\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial \eta}\right][J]^{-T}[J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} \end{Bmatrix} |J|\,d\xi\,d\eta\,. \qquad \text{(f)}$$

Podle (116) a obr. 22 máme

$$x = L_1 + L_2 = \xi + \eta\,,$$
$$y = L_2 + L_3 = 1 - \xi\,,$$

takže

$$[J] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\,, \qquad [J]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\,,$$

$$[J]^{-T}[J]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad |J| = 1\,.$$

Bude tedy

$$\int_{\xi=0}^{1} d\xi \int_{\eta=0}^{1-\xi} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi} + 2\frac{\partial \varphi_r}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi_s}{\partial \eta}\right) d\eta = k_{rs} \qquad \text{(g)}$$

Integračním oborem je trojúhelník $0\bar{1}\bar{2}$ na obr. 32, jak vyplývá z prvních dvou rovnic (c). Výpočtem

$$k_{11} = \int_{\xi=0}^{1} d\xi \int_{\eta=0}^{1-\xi} (1 - 0 - 0 + 0)\, d\eta = \int_{0}^{1} (1 - \xi)\, d\xi = \frac{1}{2} ,$$

$$k_{12} = \int_{0}^{1} d\xi \int_{0}^{1-\xi} (0 - 1 - 0 + 0)\, d\eta = -\frac{1}{2} \quad \text{atd.}$$

Vyjdou tytéž hodnoty jako dříve.

17. příklad

Matici tuhosti ze 7. příkladu pro čtverec na obr. 9 odvoďte z rodičovského elementu na obr. 34.

Řešení

Podle (117) a (118) nyní máme

$$X = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi),$$

$$Y = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \varphi_3 + \varphi_4 = \frac{1}{2}(1 + \eta). \qquad (a)$$

Pro posuvy pak máme aproximaci (v lokálních souřadnicích)

$$u(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_7 \end{Bmatrix},$$

$$v(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_6 \\ q_8 \end{Bmatrix}. \qquad (b)$$

Protože jsme v rovnicích (a) a (b) použili stejné tvarové funkce, totiž (118), jde o izoparametrický prvek. Derivováním (b) dostaneme např.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + q_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + q_5 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + q_7 \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} \ .$$

V těchto výrazech se vyskytují parciální derivace tvarových funkcí, pro něž máme - podle příkladu 16., rovnice (e) -

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} . \qquad (c)$$

V našem případě dostaneme - derivacemi (a) -

$$[J] = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} ; \quad [J]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad |J| = \tfrac{1}{4} . \qquad (d)$$

Proto

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_8 \end{Bmatrix} , \qquad (e)$$

kde

$$[B] = 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

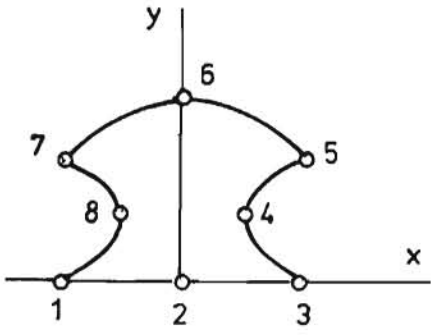
Všimněme si, že matice $[B]$ má stejný tvar jako v rovnici (67), skládá se však ze čtyř submatic. Dosadíme-li sem z rovnic (118) a vypočteme

$$[K] = t \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B]^T [C][B] |J| \, d\xi \, d\eta , \qquad (f)$$

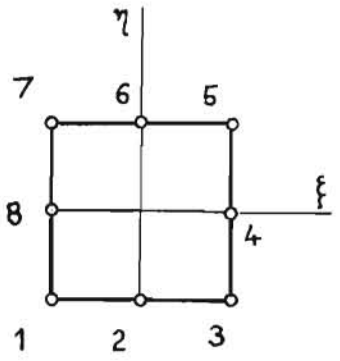
kde $[C]$ je čtvercová matice z rovnice (g) ze 7. příkladu, vyjde stejný výsledek jako dříve.

Poznámka: Uvedené příklady jsou velmi jednoduché, aby bylo možno sledovat postup výpočtu bez větších nároků na pozornost a výpočetní techniku. V praxi se tyto výpočty - inverze jakobiánu a integrace - nedělají obvykle analyticky,

ale numericky, takže program sestavený pro jeden prvek se hodí zároveň pro všechny prvky téhož typu (bez zřetele na umístění jejich vrcholů v globální soustavě souřadnic). Integruje se přitom v lokálních souřadnicích, tedy v oblasti rodičovského prvku. Tato oblast je stejná pro všechny odvozené prvky a má velmi jednoduchý tvar. Integrand - a tím též jakobián, pokud není konstantní - vyčíslujeme při numerické integraci jen v určitých bodech, volených zpravidla podle Gaussovy integrační teorie. Tím se však nyní nebudeme zabývat. Zmínku o Gaussově integraci obsahuje 19. příklad.



Obr. 39



Obr. 40

18. příklad

Stanovte transformační vztahy pro prvek na obr. 39, odvozený z rodičovského prvku na obr. 40. Souřadnice uzlů na obr. 39 jsou dány tabulkou:

Uzel	1	2	3	4	5	6	7	8
x	-2	0	2	1	2	0	-2	-1
y	0	0	0	1	2	3	2	1

Řešení

Nejprve určíme tvarové funkce pro prvek na obr. 40. Protože má osm uzlů, můžeme použít polynom nejvýše s osmi konstantami. Zvolíme tedy

$$f(\xi,\eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2. \quad (a)$$

Zvolíme-li za ξ, η souřadnice uzlu k na obr. 40 ($k = 1, 2, \ldots, 8$), musí polynom dávat funkční hodnotu v uzlu k, tj. musí vyjít parametr q_k

$$q_k = f(\xi_k, \eta_k). \quad (b)$$

To je osm rovnic, z nichž lze vypočítat konstanty a_1 až a_8. Uspořádáme-li polynom tak, že bude

$$f(\xi,\eta) = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_8\varphi_8, \tag{c}$$

dostaneme odtud tvarové funkce φ_1 až φ_8. Po úpravě vyjde

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= -\tfrac{1}{4}(\xi-1)(\eta-1)(\xi+\eta+1),\\
\varphi_2 &= \tfrac{1}{2}(\xi-1)(\xi+1)(\eta-1),\\
\varphi_3 &= -\tfrac{1}{4}(\xi+1)(\eta-1)(\xi-\eta-1),\\
\varphi_4 &= -\tfrac{1}{2}(\xi+1)(\eta-1)(\eta+1),\\
\varphi_5 &= \tfrac{1}{4}(\xi+1)(\eta+1)(\xi+\eta-1),\\
\varphi_6 &= -\tfrac{1}{2}(\xi-1)(\eta+1)(\xi+1),\\
\varphi_7 &= \tfrac{1}{4}(\xi-1)(\eta+1)(\xi-\eta+1),\\
\varphi_8 &= \tfrac{1}{2}(\xi-1)(\eta-1)(\eta+1).
\end{aligned} \tag{d}$$

Transformační vztahy vyjdou podle (117)

$$\begin{aligned}
x &= -2\varphi_1 + 2\varphi_3 + \varphi_4 + 2\varphi_5 - 2\varphi_7 - \varphi_8,\\
y &= \varphi_1 + 2\varphi_5 + 3\varphi_6 + 2\varphi_7 + \varphi_8.
\end{aligned} \tag{e}$$

Lze se přesvědčit, že tvarové funkce (d) splňují (127). Strany křivočarého čtyřúhelníku na obr. 39 dostaneme, dosadíme-li do tvarových funkcí postupně za ξ, η hodnoty + 1, - 1. Zjistíme, že jde o kvadratické paraboly (parabola 123 degeneruje v přímku). Protože tyto paraboly jsou určeny třemi body a směrem osy (směry os jsou rovnoběžné s osami souřadnic) a na každé straně čtverce máme tři uzly, bude výsledná aproximace pro síť izoparametrických prvků tohoto druhu na hranicích prvků bez štěrbin a bez přesahů. Poloha uzlů však musí být volena tak, aby se hraniční paraboly u žádného prvku neprotínaly jinde než v uzlových bodech 1, 3, 5 a 7.

Všimněme si, že anulováním jednotlivých činitelů v rovnicích (d) pro tvarové funkce dostaneme rovnice přímek procházejících uzly, v nichž je tvarová funkce nulová. To je velmi jednoduché, takže bychom mohli být v pokušení napsat tvarové funkce zkusmo (odhadem). Tu by se však mohlo stát, že bychom napsali tvarové funkce příslušné jinému polynomu vyššího stupně. Např. bychom mohli řešit naši úlohu také tak, že bychom odhadli tvarové funkce s lichými indexy takto:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \xi\eta(\xi-1)(\eta-1)/4, & \varphi_5 &= \xi\eta(\xi+1)(\eta+1)/4,\\
\varphi_3 &= \xi\eta(\xi+1)(\eta-1)/4, & \varphi_7 &= \xi\eta(\xi-1)(\eta+1)/4.
\end{aligned} \tag{f}$$

Tvarové funkce se sudými indexy by se nezměnily. Vztahy (f) jsou formálně jednodušší než jim odpovídající výrazy v rovnicích (d). Odpovídají však polynomu čtvrtého stupně a nesplňují podmínku (127). Teprve kdybychom přidali devátý uzel v bodě $\xi = 0$, $\eta = 0$ a k němu příslušnou tvarovou funkci

$$\varphi_9 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1), \tag{g}$$

byla by podmínka (127) i v tomto případě splněna. Místo prvku s polynomem třetího stupně ze "serendipity family" bychom však nyní měli lagrangeovský prvek s polynomem čtvrtého stupně.

Tvarová funkce φ_9 podle (g) nabývá na celé hranici prvku nulové hodnoty. Takovou vlastnost by měla i funkce

$$\varphi_9^* = \cos\frac{\pi\xi}{2}\cos\frac{\pi\eta}{2}. \tag{h}$$

Mohli bychom ji přidat i k původnímu prvku s tvarovými funkcemi podle (d) a brát parametr q_9 formálně jako součinitel nezávislý na uzlech (nemuseli bychom devátý uzel zavádět). Dostali bychom tak subparametrický prvek (geometrie je určena osmi parametry, aproximace devíti). Někdy lze takovým způsobem zlepšit přesnost aproximace.

Nemáme-li však k tomu zvláštní důvod, raději funkci φ_9^* podle (h) do výpočtů nezavádíme. Pamatujme, že k výpočtu polynomu potřebuje počítač zpravidla méně času než k výpočtu goniometrických funkcí. Připomínáme také, že součet tvarových funkcí $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_8 + \varphi_9^*$ nesplňuje podmínku (127).

19. příklad

Navrhněte křivočarý izoparametrický prvek pro výpočet rotačně souměrných tenkých skořepin. */

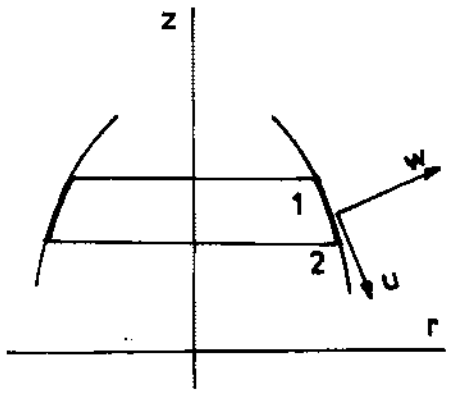
Řešení

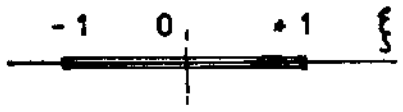
Křivočarý meridián rotačně souměrné skořepiny rozdělíme na prvky konečné délky; jeden takový prvek je zakreslen na obr. 41. Jeho koncové body mají souřadnice (r_1, z_1), (r_2, z_2). Tento prvek odvodíme transformací rodičovské úsečky $-1 \leq \xi \leq 1$ (obr. 42).

---

*/ Pro válcovou rotačně souměrnou skořepinu lze užít prvek z 11. příkladu (viz též výklad k rovnici (80)).

Obr. 41





Obr. 42

V naší úloze budou dvě neznámé funkce: posuv $u(r,z)$ ve směru tečny k meridiánu a posuv $w(r,z)$ ve směru normály. Protože jde o prvek, v němž je energie napjatosti akumulována jednak roztažením (membránovou napjatostí), jednak ohybem (ohybovou napjatostí), musí být tvarové funkce schopny popsat oba stavy napjatosti a jim příslušné stavy přetvoření. Tomu vyhovíme, předepíšeme-li v uzlech nejen posuvy u_i , w_i , ale také úhly otočení β_i . To znamená, že musíme mít alespoň šest parametrů, tedy kubický polynom pro každou funkci i zobrazení rodičovského prvku na daný prvek. Můžeme použít hermiteovské polynomy podle definic (101), (102), které na intervalu $\langle -1, +1 \rangle$ jsou

$$H_{00}^1 = \varphi_1 = \frac{1}{4}(\xi^3 - 3\xi + 2), \qquad H_{01}^1 = \varphi_3 = \frac{1}{4}(-\xi^3 + 3\xi + 2),$$
$$H_{10}^1 = \varphi_2 = \frac{1}{4}(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1), \qquad H_{11}^1 = \varphi_4 = \frac{1}{4}(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1). \tag{a}$$

Zobrazovací rovnice pak budou

$$r = r_1\varphi_1 + \left(\frac{dr}{d\xi}\right)_1\varphi_2 + r_2\varphi_3 + \left(\frac{dr}{d\xi}\right)_2\varphi_4 ,$$
$$z = z_1\varphi_1 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)_1\varphi_2 + z_2\varphi_3 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)_2\varphi_4 . \tag{b}$$

V koncových bodech prvku však nejsou dány derivace $dr/d\xi$, $dz/d\xi$, ale jen derivace

$$\frac{dr}{dz} = \left(\frac{dr}{d\xi}\right) / \left(\frac{dz}{d\xi}\right) . \tag{c}$$

Můžeme proto jednu z obou derivací na pravé straně rovnice (c) volit. Tím zároveň zvolíme stupnici na daném prvku pro hodnoty ξ . Můžeme např. zvolit konstantní hodnotu derivace *)

*) Alternativně by bylo možno volit $dz/d\xi = (z_2 - z_1)/2 = \text{konst.}$

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{\Delta r}{\Delta \xi} = \frac{r_2 - r_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{r_2 - r_1}{2} . \qquad (d)$$

V průmětu prvku na obr. 41 do osy r je pak stupnice pro ξ rovnoměrná. Z rovnic (d) a (c) dosadíme do zobrazovacích rovnic */

$$\left(\frac{dr}{d\xi}\right)_1 = \left(\frac{dr}{d\xi}\right)_2 = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad \left(\frac{dz}{d\xi}\right)_2 = \left(\frac{dr}{d\xi}\right)_1 \left(\frac{dz}{dr}\right)_2 = \frac{r_2 - r_1}{2} \operatorname{cotg} \vartheta_2 ,$$
$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_1 = \left(\frac{dr}{d\xi}\right)_1 \left(\frac{dz}{dr}\right)_1 = - \frac{r_2 - r_1}{2} \operatorname{cotg} \vartheta_1 \qquad (e)$$

a dostaneme vzájemně jednoznačné přiřazení rodičovského prvku na obr. 42 s odvozeným prvkem na obr. 41. Ten má s daným meridiánem společné koncové body a tečny v nich, nemusí se s ním však přesně shodovat, neboť meridián může mít obecný průběh, kdežto odvozený prvek je méně obecnou křivkou danou parametricky ve tvaru polynomů (b). Rozdíly se však zmenšují s volbou menších prvků (s jemností dělení) a nebývají velké ani při hrubém dělení.

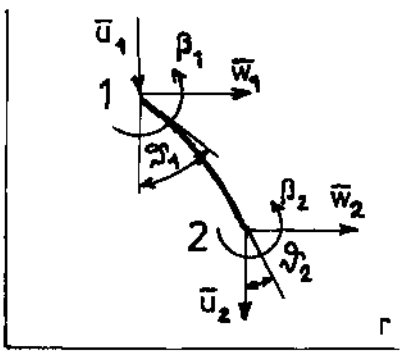
Pro aproximaci neznámých funkcí užijeme - protože jde o izoparametrický prvek - tytéž tvarové funkce jako pro geometrickou transformaci, totiž funkce (a). Bude tedy

$$u = u_1 \varphi_1 + \left(\frac{du}{d\xi}\right)_1 \varphi_2 + u_2 \varphi_3 + \left(\frac{du}{d\xi}\right)_2 \varphi_4 ,$$
$$w = w_1 \varphi_1 + \left(\frac{dw}{d\xi}\right)_1 \varphi_2 + w_2 \varphi_3 + \left(\frac{dw}{d\xi}\right) \varphi_4 . \qquad (f)$$

Bylo by však velmi nepraktické, kdybychom za parametry prvku považovali hodnoty

$$u_i , \ (du/d\xi)_i , \ w_i , \ (dw/d\xi)_i ,$$

neboť posuvy u_i , w_i mají v každém uzlu jiný směr a derivace $du/d\xi$, $dw/d\xi$ neodpovídají ani poměrnému prodloužení $\varepsilon = du/ds$ ve směru meridiánu, ani úhlu otočení $\beta = dw/ds$ tečny k meridiánu. Je mnohem přirozenější zavést parametry v souřadnicové soustavě podle obr. 43 takto:



Obr. 43

*/ Jak je zřejmé z obr. 44, je $(dz/dr)_i = - \operatorname{cotg} \vartheta_i$, $i = 1, 2$. Všechny hodnoty (e) můžeme proto odečíst z obr. 41, resp. 43.

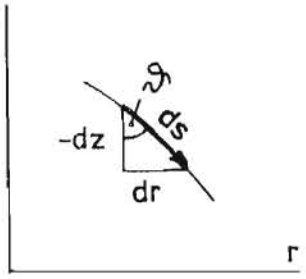
$$q_{4i-3} = \bar{u}_i\,, \qquad q_{4i-1} = \beta_i = \frac{d\bar{w}_i}{ds}\,,$$
$$q_{4i-2} = \bar{w}_i\,, \qquad q_{4i} = \frac{d\bar{u}_i}{ds}\,, \tag{g}$$

kde s měříme po oblouku meridiánu a $i = 1, 2$. Jejich pomocí musíme vyjádřit dříve uvedené hodnoty, což se snadno podaří. Podle obr. 43 především platí, že

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \tag{h}$$

a dále (obr. 44) *)

Obr. 44



$$\frac{du}{d\xi} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dr}\frac{dr}{d\xi} = \frac{r_2 - r_1}{2\sin\vartheta}\frac{du}{ds}\,,$$
$$\frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dr}\frac{dr}{d\xi} = \frac{r_2 - r_1}{2\sin\vartheta}\frac{dw}{ds}\,. \tag{i}$$

Výrazy (g) až (i) dosadíme do (f); v maticové úpravě vyjde

$$\begin{Bmatrix} u(\xi) \\ w(\xi) \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \\ \hline N_1 & 0 \\ \hline 0 & N_2 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_8 \end{Bmatrix}, \tag{j}$$

přičemž submatice

$$[M_i] = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & \sin\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_2 - r_1}{2\sin\vartheta_i} \end{bmatrix},$$
$$[N_i] = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_2 - r_1}{2\sin\vartheta_i} & 0 \end{bmatrix}. \tag{k}$$

V rovnicích (k) $i = 1, 2$. Nyní jde o to, vypočítat energii napjatosti prvku a potenciál vnějších sil, abychom mohli použít Lagrangeův princip virtuálních

---

*) Je totiž $dr/ds = \sin\vartheta$. Tuto hodnotu lze vypočíst ze zobrazovacích rovnic (b), jak později ještě ukážeme (viz rovnici (q)).

prací. Z teorie tenkostěnných skořepin je známo, že energie napjatosti v části prvku o délce ds je

$$dU = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\cdot 2\pi r\,ds, \tag{l}$$

je-li

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \\ \varkappa_s \\ \varkappa_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} du/ds \\ w/r \\ -d^2w/ds^2 \\ -\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{dw}{ds} \end{bmatrix}, \qquad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} N_s \\ N_t \\ M_s \\ M_t \end{Bmatrix}. \tag{m}$$

Zde ε_s značí poměrné prodloužení v meridiálním směru,

ε_t totéž v obvodovém směru,

$\varkappa_s$ změnu křivosti meridiálního řezu,

$\varkappa_t$ změnu křivosti obvodového řezu,

N_s, N_t jsou membránové síly v meridiálním a obvodovém směru (mají fyzikální rozměr N/m),

M_s, M_t jsou ohybové momenty v týchž směrech (mají fyzikální rozměr Nm/m = N).

Mezi oběma vektory je přitom vztah (Hookeův zákon)

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \tag{n}$$

kde

$$[C] = \frac{Et}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^2/12 & \mu h^2/12 \\ 0 & 0 & \mu h^2/12 & h^2/12 \end{bmatrix}. \tag{o}$$

Zde E je modul pružnosti v tahu-tlaku, μ Poissonovo číslo a t tloušťka skořepiny. Chceme-li do první z rovnic (m) dosadit, musíme určit druhou derivaci d^2w/ds^2. Z první derivace

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{d\xi}\frac{d\xi}{ds} = \left(\frac{dw}{d\xi}\right)\Big/\left(\frac{ds}{d\xi}\right)$$

vypočteme druhou užitím pravidla o složených funkcích

$$\frac{d^2w}{ds^2} = \frac{d^2w}{d\xi^2}\Big/\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 - \frac{dw}{d\xi}\left(\frac{d^2s}{d\xi^2}\right)\Big/\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^3.$$

Do posledního vztahu dosadíme podle Pythagorovy věty (s přihlédnutím k obr. 44)

$$\frac{ds}{df} = \sqrt{\left(\frac{dr}{df}\right)^2 + \left(\frac{dz}{df}\right)^2} = f(f) . \qquad (p)$$

Platí tedy, jak jsme již dříve v poznámce uvedli, že

$$\frac{r_2 - r_1}{2\sin\vartheta} = \frac{dr}{df}\frac{df}{dr} = \frac{dr}{df} = \sqrt{\left(\frac{dr}{df}\right)^2 + \left(\frac{dz}{df}\right)^2} . \qquad (q)$$

Odtud lze vypočíst $\sin\vartheta$, který potřebujeme při výpočtu vektoru $\{\varepsilon\}$ podle (m).

S použitím rovnic (b) a (j) jsme tedy schopni vyjádřit vektor $\{\varepsilon\}$ pomocí vektoru $\{q\}$. Nakonec dostaneme v maticovém tvaru (podrobnosti nebudeme vypisovat)

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}, \qquad (r)$$

kde matice $[B]$ je funkcí f a má velikost 4 x 8. Nyní tedy máme pro energii napjatosti prvku

$$U = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \{\varepsilon\}^T\{\sigma\} \cdot 2\pi r \frac{ds}{df} df =$$

$$= \pi\{q\}^T \int_{-1}^{f=+1} [B(f)]^T [C][B(f)]\, r(f) f(f)\, df \cdot \{q\} . \qquad (s)$$

Budeme předpokládat, že kromě sil $\bar{Z}_i$ ve směru $\bar{u}_i$, sil $\bar{R}_i$ ve směru w_i a momentu $\bar{M}_i$ (točí ve směru β_i) v uzlech $i = 1, 2$ působí na skořepinu ještě vnitřní přetlak $p(f)$. Potenciál těchto vnějších sil je

$$W = -\{q\}^T\{R\} - \int p w \cdot 2\pi r\, ds = -\{q\}^T\{R\} - 2\pi \int_{-1}^{+1} p(f) w(f) r(f) \frac{ds}{df} df . \qquad (t)$$

Zde $[R] = [\bar{Z}_1, \bar{R}_1, \bar{M}_1, \bar{Z}_2, \bar{R}_2, \bar{M}_2]^T$. Podle (j) máme

$$w(f) = [[\varphi_1 \; \varphi_2][N_1]\,|\,[\varphi_3 \; \varphi_4][N_2]]\{q\} = [\Phi(f)]\{q\} . \qquad (u)$$

Pro matici 1 x 8 jsme zavedli pomocné označení $[\Phi]$. Vzhledem k tomu, že $w(f)$ je skalár, je $[\Phi]\{q\} = \{q\}^T[\Phi]^T$. Je tedy

$$W = -\{q\}^T\{R\} - 2\pi\{q\}^T \int_{-1}^{+1} [\Phi(f)]^T p(f) r(f) f(f)\, df . \qquad (v)$$

Podle Lagrangeova principu

$$\delta(U + W) = \{\delta q\}^T \frac{\partial(U + W)}{\partial\{q\}} = \{0\}, \qquad (w)$$

takže musí platit, že

$$[K]\{q\} = \{R\} + \{Q\}. \qquad (z)$$

Zde elementární matice tuhosti $[K]$ vyjde podle (s) ve tvaru

$$[K] = 2\pi \int_{-1}^{1} [B(\xi)]^T [C][B(\xi)]\, r(\xi) f(\xi)\, d\xi$$

a vektor sil $\{Q\}$, ekvivalentní vnějšímu přetlaku podle (v), je

$$\{Q\} = 2\pi \int_{-1}^{1} [\Phi(\xi)]^T p(\xi) r(\xi) f(\xi)\, d\xi .$$

Připomeňme, že $[\Phi]^T$ je sloupcová matice (tedy vektor). Hodnoty integrálů v posledních dvou rovnicích dostaneme nejjednodušeji numericky Gaussovou metodou. Je-li dělení meridiánu na prvky dostatečně jemné, mohl by stačit tento jednoduchý vzorec:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2f(0) .$$

Přesnější vzorce dostaneme, použijeme-li k výpočtu hodnot funkce v několika bodech. Gauss navrhl jejich rozmístění tak, aby předpokládaná chyba byla co nejmenší. Tak pro dva body máme

$$I = f(-0{,}577\,35) + f(0{,}577\,35)$$

a pro tři body

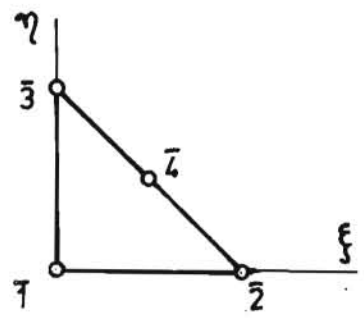
$$I = 0{,}555\,55\, f(-0{,}774\,60) + 0{,}888\,89\, f(0) + 0{,}555\,56\, f(0{,}774\,60).$$

Podrobnější poučení o Gaussově metodě výpočtu integrálů nalezne čtenář v učebnicích numerické matematiky.

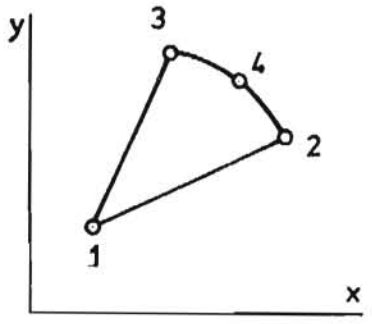
Poznámka: Je zřejmé, že odvození matice $[B]$ je pracné a zdlouhavé. Proto se v praxi častěji používají přímočaré prvky (kuželovité prstence) a pro funkci $u(s)$ se volí lineární, pro $w(s)$ kubická náhrada. Výpočet je pak sice jednodušší, ale k dosažení dostatečné přesnosti je třeba jemnějšího dělení. Obtížnost naší úlohy se však projeví jen při přípravě výpočtového programu. Jakmile je program jednou odladěn, je výpočet skořepiny jednoduchou záležitostí. Pro počítač se specifikují vstupní veličiny, určující tvar a zatížení skořepiny, a pak se z elementárních matic sestaví adicí celková matice (stejně jako v ostatních úlohách). Také řešení soustavy (z) je stejné jako v jiných úlohách, tj. matice $[K]$ je souměrná a pásová, po předepsání okrajových podmínek - tedy po zmenšení - pozitivně definitní.

20. příklad

Z rodičovského trojúhelníku na obr. 45 odvoďte "hraniční" prvek na obr. 46, který se často používá k vystižení křivosti hranice v návaznosti na trojúhelníkovou síť v rovinných úlohách teorie pružnosti. Hraniční prvek má tu vlastnost, že dvě jeho strany jsou přímé, třetí je křivá.



Obr. 45



Obr. 46

Řešení

Mají-li se strany $\xi = 0$, popř. $\eta = 0$ zobrazovat jako přímky, musí mít polynom bilineární tvar, tj. nemůže obsahovat mocniny ξ^2, η^2. Bude tedy

$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta,$$
$$y = a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta. \qquad (a)$$

K určení konstant a_1 až a_8 postačí existence čtyř uzlů. Uzel $\bar{4}$ volíme uprostřed strany $\bar{2}\bar{3}$ na obr. 45. Má-li bod $\bar{1}$ (0;0) na obr. 45 odpovídat bodu $1(x_1; y_1)$ na obr. 46, musí být $x_1 = a_1$, $y_1 = a_5$. Podobné podmínky dostaneme i pro další body, z nichž

$$a_2 = x_2 - x_1, \qquad a_6 = y_2 - y_1,$$
$$a_3 = x_3 - x_1, \qquad a_7 = y_3 - y_1,$$
$$a_4 = 2(x_4 - x_1) - \sqrt{2}(x_2 + x_3 - 2x_1), \qquad a_8 = 2(y_4 - y_1) - \sqrt{2}(y_2 + y_3 - 2y_1).$$

Tvarové funkce pak vyjdou - rozpisem rovnic (a) do tvaru (117) - takto:

$$\varphi_1 = 1 - \xi - \eta - 2(1-\sqrt{2})\xi\eta, \qquad \varphi_3 = \eta - \sqrt{2}\xi\eta, \qquad (b)$$
$$\varphi_2 = \xi - \sqrt{2}\xi\eta, \qquad \varphi_4 = 2\xi\eta.$$

Lze se přesvědčit, že splňují kritérium (127).

12. Ohyb tenkých desek

Podle známé Kirchhoffovy teorie je deformace desky jednoznačně a úplně určena průhybovou funkcí $w = w(x,y)$. Pro její aproximaci pomocí tvarových funkcí dostaneme v rozsahu jednoho prvku

$$w(x,y) = [\varphi]\{q\}, \tag{128}$$

kde $[\varphi]$ je řádková matice tvarových funkcí a $\{q\}$ vektor parametrů v uzlech.

Energii napjatosti v prvku lze vyjádřit takto:

$$U = \frac{1}{2}\iint \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,dx\,dy. \tag{129}$$

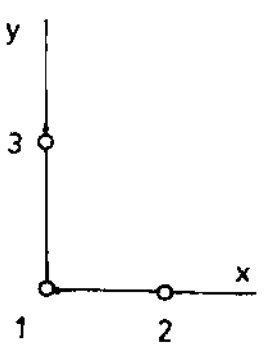
Integračním oborem je plocha prvku. Dále je

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \tag{130}$$

Je zřejmé, že se ve funkcionálu úlohy budou vyskytovat druhé derivace. To znamená, že na hranicích prvků musí být spojitá nejen aproximace funkce w, ale také všechny její první derivace. Jen tak může být zaručena konvergence k správným výsledkům. Elementům, které splňují toto kritérium, říkáme konformní.

Dalším požadavkem je, aby tvarové funkce umožňovaly vytvořit v elementu libovolnou konstantní hodnotu druhé derivace (tedy konstantní přetvoření) vhodnou volbou parametrů $\{q\}$. Je-li splněn tento druhý požadavek, lze poněkud zmírnit předchozí požadavek, tj. slevit z požadavku spojitosti derivací na hranicích prvků, aniž se poruší konvergence (nebo aniž vznikne porušením konvergence velká chyba). Takové jednodušší prvky se často v praxi aplikují a označují se jako nekonformní.

Požadujeme-li spojitost w a derivace $\partial w/\partial n$ ve směru normály k hranici prvku, nevystačíme - jak ještě ukážeme - se zavedením hodnot w a parciálních derivací $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ jako parametrů v uzlech prvku, chceme-li dostat rigorózní aproximaci. Je-li totiž hranicí prvku např. čára 12 na obr. 47, musí být na ní spojité w, $\partial w/\partial y$. To znamená, že tyto funkce musí být úplně určeny hodnotami w, $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ v uzlech na čáře 12, kde $y = 0$. Máme-li na této čáře např. dva uzly $i = 1, 2$ s parametry w_i, $(\partial w/\partial x)_i$, $(\partial w/\partial y)_i$, musí na hranici 12 být



Obr. 47

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 ,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = A_5 + A_6 x . \qquad (131)$$

Zde A_1 až A_6 jsou konstanty, které můžeme vypočítat pomocí šesti uvedených parametrů. To tedy znamená, že $\partial w/\partial y$ je na čáře *12* úplně určeno parametry $(\partial w/\partial y)_1$, $(\partial w/\partial y)_2$ v uzlech *1* , *2* . Obdobně $\partial w/\partial x$ na čáře *13* je úplně určeno parametry v uzlech *1* , *3* . Protože parametry v uzlech *2* a *3* jsou nezávislé, nebude v uzlu *1* obecně platit, že

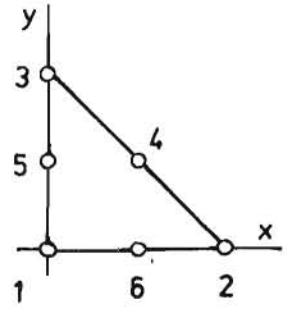
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} , \qquad (132)$$

jak by - vzhledem k požadované spojitosti - mělo platit.

K překlenutí této nesnáze bychom museli připojit v uzlech smíšenou druhou derivaci (132) jako další parametr. Kdybychom měli síť složenou z neortogonálních prvků, musili bychom jako parametry zavést dokonce všechny druhé derivace. Takovým způsobem se však velmi zkomplikuje celé řešení. Je to daň, kterou musíme zaplatit za zjednodušení, jež jsme zvolili v Kirchhoffově teorii. Obtíže souvisejí s tím, že desky - a podobně i skořepiny - jsou prostorová tělesa, jež "skoro zdegenerovala" na plošné útvary. Můžeme je sice pro zjednodušení považovat za plošné útvary, ale nemůžeme se tím vyhnout nesnázím při aplikaci zákonitostí, platných beze zbytku jen pro prostorová tělesa.

V praxi vystačíme s nekonformními prvky; je však třeba jisté opatrnosti při jejich odvozování, jak jsme se již zmínili.

21. příklad



Obr. 48

Odvoďte pro řešení ohybu desek trojúhelníkový prvek se šesti uzly, zakreslený na obr. 48. Tři uzly jsou ve vrcholech trojúhelníku a tři uprostřed jeho stran. Použijte kompletní kvadratický polynom.

Poznámka: Je to nejjednodušší možný prvek, který dává v rozsahu prvku konstantní přetvoření (a tedy i napětí). Přestože je nekonformní, dává konvergentní řešení. */

*/ V literatuře bývá označován jako "Morleyův prvek".

Řešení

Nechť je ve vrcholech trojúhelníka předepsána funkční hodnota w, kdežto uprostřed každé strany nechť je předepsán parametr $\partial w/\partial n$. Parametry tedy jsou

$$\begin{aligned} q_1 &= w(0,0) = w_1, \\ q_2 &= w(1,0) = w_2, \\ q_3 &= w(0,1) = w_3, \\ q_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_4 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_4\right], \\ q_5 &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_5, \\ q_6 &= \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_6. \end{aligned} \tag{b}$$

Tvarové funkce odvodíme z polynomu

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2. \tag{c}$$

Dosadíme-li (c) do (b), dostaneme - s označením $c = 1/\sqrt{2}$ -

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & c & c & c & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \tag{d}$$

To je však rovnice $\{q\} = [h]\{a\}$. Odtud vypočteme

$$\{a\} = [h]^{-1}\{q\}. \tag{e}$$

Tvarové funkce jsou pak

$$[\varphi] = [\varphi_1\ \varphi_2\ \dots\ \varphi_6] = [1\ x\ y\ x^2\ xy\ y^2][h]^{-1}. \tag{f}$$

Vektor zobecněných poměrných deformací a vektor zobecněných napětí podle (130)

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -2a_4 \\ -2a_6 \\ +2a_5 \end{Bmatrix}, \qquad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{g}$$

Hookeův zákon dává - jak známo z teorie desek -

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \tag{h}$$

kde

$$[C] = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} .$$

Přepíšeme-li vektor poměrných deformací $\{\varepsilon\}$ z rovnice (g) pomocí (e) jako funkci parametrů $\{q\}$ do tvaru

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} , \tag{i}$$

dostaneme matici $[B]$ a s ní i matici tuhosti pro element desky

$$[K] = [B]^T [C][B] \Delta . \tag{j}$$

V tomto vztahu značí Δ plochu trojúhelníkového prvku. Matice $[B]$ je v tomto případě konstantní, takže integrace v rovnici (129) je velmi jednoduchá.

Působí-li na desku tlak $p(x,y)$ jako vnější zatížení, nahradíme jej vektorem sil $\{Q\}$ v uzlech. Způsob přepočtu dá Lagrangeův variační princip. Obvyklým způsobem vypočteme z potenciálu vnějších sil

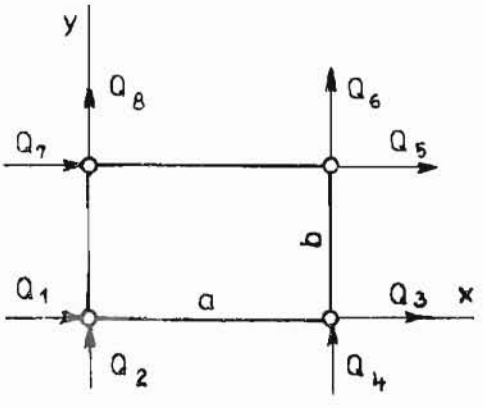
$$W = -\iint w p \, dx \, dy = -\iint \{q\}^T [\varphi]^T p \, dx \, dy \tag{k}$$

ekvivalentní vektor vnějších sil

$$\{Q\} = -\frac{\partial W}{\partial \{q\}} = \iint [\varphi]^T p(x,y) \, dx \, dy . \tag{l}$$

13. Silová varianta metody konečných prvků při řešení dvourozměrných úloh teorie pružnosti

Tato varianta metody konečných prvků se v praxi užívá jen málo; omezíme proto výklad na případ obdélníkového prvku (obr. 49). Pro poměr stran zavedeme označení $\beta = b/a$, pro tloušťku desky t.

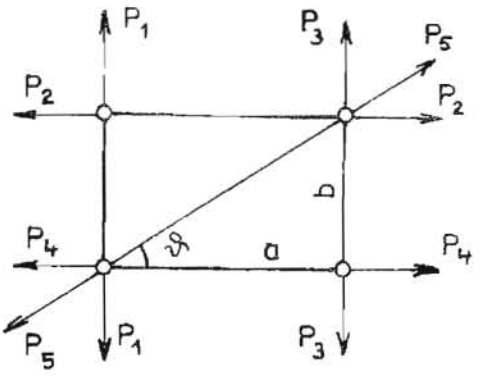


Obr. 49

V deformační variantě výpočtu jsme volili aproximaci pro neznámé posuvy (a tím i pro přetvoření). Nyní podobně zvolíme aproximaci pro napětí. Zavedeme-li bezrozměrové proměnné $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, budeme moci vyjádřit napětí např. těmito lineárními výrazy:

$$\sigma_x = c_1 + c_2 \eta ,$$
$$\sigma_y = c_3 + c_4 \xi , \qquad (133)$$
$$\tau_{xy} = c_5 .$$

K jejich určení potřebujeme pět podmínek. Zavedeme proto pět staticky ekvivalentních sil P_1 až P_5 (obr. 50). Těchto sil musí být pět ještě z jiného důvodu. Osm sil $\{Q\}$ na obr. 49 splňuje totiž tři podmínky rovnováhy, takže jen pět sil je nezávislých. To je však právě počet sil ve vektoru $\{P\}$. Z podmínek ekvivalence pro síly P_2, P_4 a napětí σ_x, totiž z rovnic



Obr. 50

$$bt\int_0^1 (c_1 + c_2\eta)\, d\eta = P_2 + P_4 ,$$
$$b^2 t\int_0^1 (c_1 + c_2\eta)\, \eta\, d\eta = P_2 b \qquad (134)$$

vyjde

$$c_1 = \frac{1}{bt}(4P_4 - 2P_2) ,$$
$$c_2 = \frac{1}{bt}(6P_2 - 6P_4) . \qquad (135)$$

Podobné výrazy dostaneme i pro konstanty c_3, c_4 a síly P_1, P_3. Sílu P_5 rozdělíme jednoduše tak, že k napětí σ_x připočteme $P_5 \cos\vartheta/(bt)$, k napětí σ_y pak $P_5 \sin\vartheta/(bt)$, a pro smyková napětí dostaneme

$$\tau_{xy} = c_5 = \frac{P_5 \cos\vartheta}{at} = \frac{P_5 \sin\vartheta}{bt} , \qquad (136)$$

přičemž

$$\sin\vartheta = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} , \qquad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} . \qquad (137)$$

Budeme tedy celkem mít

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{bt} \begin{bmatrix} 0 & (-2+6\eta) & 0 & (4-6\xi) & \cos\vartheta \\ \beta(4-6\xi) & 0 & \beta(-2+6\xi) & 0 & \beta\sin\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\vartheta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} . \qquad (138)$$

Tuto rovnici zapíšeme zkráceně takto: */

$$\{\sigma\} = [b]\{P\} . \tag{139}$$

Pro Hookeův zákon máme maticový zápis

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\} , \tag{140}$$

takže komplementární energie napjatosti je

$$U^* = \frac{t}{2}\iint_V \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,dS = \frac{t}{2}\iint \{\sigma\}^T[D]\{\sigma\}\,dS =$$

$$= \frac{t}{2}\{P\}^T\iint [b]^T[D][b]\,dS\,.\{P\} = \frac{1}{2}\{P\}[f]\{P\} . \tag{141}$$

Na pravé straně jsme zavedli matici poddajnosti

$$[f] = t\iint [b]^T[D][b]\,dS =$$

$$= b^2 t\int_0^1\int_0^1 [b]^T[D][b]\,d\xi\,d\eta . \tag{142}$$

Mezi vektorem sil $\{P\}$ a vektorem sil $\{Q\}$ máme podle obr. 49 a obr. 50 vztah

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos\vartheta \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cos\vartheta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sin\vartheta \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} \tag{143}$$

čili

$$\{Q\} = [A]\{P\} . \tag{144}$$

Inverzní vztah však neexistuje, neboť matice $[A]$ je obdélníková. Komplementární potenciál vnějších posunutí $\{q\} = \{q_1, q_2, \cdots q_8\}^T$ je

$$W^* = -\{Q\}^T\{q\} = -\{P\}^T[A]^T\{q\} . \tag{145}$$

---

*/ Čtenář nechť nezaměňuje matici $[b]$ s délkou strany obdélníka b. Rovnice (139) je obdobná rovnici $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}$ - viz např. (67a).

Tuto rovnici můžeme zapsat takto:

$$W^* = -\{P\}^T\{p\}, \qquad \{p\} = [A]^T\{q\}. \tag{146}$$

Z věty o minimu celkové komplementární potenciální energie $\delta(U^* + W^*) = 0$ pomocí (22), (24), (141) a (146) pak dostaneme

$$[f]\{P\} = \{p\}, \tag{147}$$

což je základní rovnice pro silovou metodu. Matice poddajnosti je zde násobena vektorem sil představujících napjatost a na pravé straně rovnice je matice rozdílů posuvů. Tyto rozdíly posuvů odpovídají pětici sil, znázorněné na obr. 50.

22. příklad

Napište základní rovnici pro silovou metodu u čtverce podle obr. 9. Předpokládejte, že Poissonovo číslo $\mu = 0$ a že modul pružnosti v tahu-tlaku E je dvojnásobkem modulu pružnosti ve smyku G. Výsledek řešení srovnejte s deformační variantou výpočtu.

Řešení

Pro čtverec $a = b$, $\beta = 1$, $\sin\vartheta = \cos\vartheta = 0{,}707\,11 = 1/\sqrt{2} = c$. Zřejmě

$$[D] = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{a}$$

Podle (138)

$$[b] = \frac{1}{at}\begin{bmatrix} 0 & -2+6\eta & 0 & 4-6\xi & c \\ 4-6\xi & 0 & -2+6\xi & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \tag{b}$$

a podle (142)

$$[f] = a^2 t \int_0^1\int_0^1 [b]^T[D][b]\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{Et}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 & c \\ 0 & 4 & 0 & -2 & c \\ -2 & 0 & 4 & 0 & c \\ 0 & -2 & 0 & 4 & c \\ c & c & c & c & 2 \end{bmatrix}. \tag{c}$$

Konečně podle (146) $\{p\} = [A]^T \{q\}$ čili - podle (143) a (144) -

$$\{p\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -c & 0 & 0 & c & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \{q\} \ . \qquad (d)$$

Vztahy (c) a (d) dosadíme do (147). Jejím řešením dostaneme vektor $\{P\}$ a z rovnice (144) i vektor sil v uzlech

$$\{Q\} = [A][f]^{-1}[A]^T\{q\} \ . \qquad (e)$$

To je však obyklý tvar známý z deformační varianty řešení. Elementární matice tuhosti tedy je

$$[\mathcal{K}] = [A][f]^{-1}[A] \ . \qquad (f)$$

Liší se však od matice tuhosti uvedené v 7. příkladu, neboť byla odvozena z jiného principu. Kdybychom porovnali řešení získané pomocí obou těchto matic, zjistili bychom, že jedno ohraničuje správný výsledek zdola, druhé shora. Tato vlastnost je důsledkem komplementárních variačních principů. Číselný výpočet podle (f) dává tento výsledek:

$$[\mathcal{K}] = \frac{Et}{24} \begin{bmatrix} 11 & 3 & -5 & -3 & -7 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 11 & 3 & 1 & -3 & -7 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & 11 & -3 & 1 & -3 & -7 & 3 \\ -3 & 1 & -3 & 11 & 3 & -5 & 3 & -7 \\ -7 & -3 & 1 & 3 & 11 & 3 & -5 & -3 \\ -3 & -7 & -3 & -5 & 3 & 11 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -7 & 3 & -5 & 3 & 11 & -3 \\ 3 & -5 & 3 & -7 & -3 & 1 & -3 & 11 \end{bmatrix} \qquad (g)$$

Tuto matici tuhosti můžeme porovnat s maticí z příkladu 7. Zjistíme, že se příliš neliší, ačkoli obě matice byly odvozeny zcela různými postupy. Také tato matice, odvozená silovou variantou metody konečných prvků, splňuje podmínku nulových součtů sudých i lichých prvků v každém řádku či sloupci a její determinant je nulový.

14. Smíšená varianta metody konečných prvků

Při deformační variantě metody aproximujeme pole posuvů (deformací) a neznámé součinitele určujeme minimalizací celkové potenciální energie. Vymizí tedy první variace této energie, příslušná virtuální změně tohoto pole deformací. Při silové variantě metody aproximujeme silové pole (napětí) a neznámé součinitele určujeme minimalizací celkové komplementární potenciální energie. To znamená, že vymizí první variace této komplementární energie při virtuální změně silového pole. V prvním případě považujeme pole deformací za nezávislé a napěťové pole od něho odvozujeme, v druhém případě je tomu naopak.

Můžeme však postupovat také tak, že budeme obě pole, tj. pole posuvů a pole silové, považovat za nezávislá a počítat s virtuálními změnami obou těchto polí. Hookeův zákon přitom bereme jako jednu z podmínek, které musí pole splňovat. Taková zobecnění jsou možná a mohou mít dokonce různé varianty; lze např. považovat za samostatná pole jak pole posuvů, tak i pole poměrných deformací (přetvoření) a pole napětí. Dostaneme tak smíšené variační principy, spojené s jmény E. Hellingera a E. Reissnera. */

Výhody, které získáme tímto zobecněním, především zmírnění rozdílu v přesnosti aproximace obou polí (deformačního a silového), nebývají vždy bezesporné, neboť za ně platíme ztrátou některých dobrých matematických vlastností, jež mají jednoduché variační metody. Funkcionál příslušný smíšené variantě metody nenabývá totiž zpravidla minima ani maxima, ale jen stacionární hodnoty; to souvisí se ztrátou pozitivní definitnosti příslušných kvadratických forem. Ale to je právě ta vlastnost, která zaručuje stabilitu výpočtu založeného na Ritzově metodě.

Omezíme se na jediný příklad, totiž na řešení průhybu prostě podepřeného a rovnoměrně zatíženého nosníku. Pro průhyb w platí známá diferenciální rovnice

$$\frac{d^4 w}{d\bar{x}^4} = \frac{p}{EJ} \,, \tag{148}$$

v níž p značí zatížení připadající na jednotku délky a EJ je ohybová tuhost. Přitom $\bar{x}$ je vzdálenost od levé podpory nosníku o délce l. Zavedeme-li bezrozměrové proměnné $x = \bar{x}/l$, $y = w/l$, $k = pl^3/(EJ)$, bude poslední rovnice mít jednoduchý tvar $d^4y/dx^4 = k$. Bez újmy na obecnosti zvolíme $k = 1$ a dostaneme

---

*/ HELLINGER, E.: Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. - Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, sv. 4, 602 - 694, 1914.

REISSNER, E.: On a variational theorem in elasticity. - Journal of Mathematics and Physics, sv. 29, 90 - 95, 1950.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 1 = 0 \tag{149}$$

s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0 \,, \qquad y(1) = 0 \,. \tag{150}$$

Funkcionál, z něhož plyne (149), je

$$F = \frac{1}{2}\int_0^1 [(y'')^2 - y]\, dx \,, \tag{151}$$

jak se snadno přesvědčíme. */ Vektory zobecněného přetvoření $\{\varepsilon\}$ a zobecněného napětí $\{\sigma\}$ jsou v tomto případě

$$\{\varepsilon\} = \{-y''\} \,, \qquad \{\sigma\} = \{m\} \,. \tag{152}$$

Bezrozměrový ohybový moment m je vázán s křivostí nosníku $-y''$ Hookeovým zákonem $-y'' = m$. V maticovém tvaru $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ je tedy

$$[C] = [1] \,. \tag{153}$$

Shodně s rovnicí (151) dostaneme potenciální energii nosníku z obvyklého vzorce

$$U = \frac{1}{2}\int_0^1 \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \{\varepsilon\}^T[C]\{\varepsilon\}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (y'')^2\, dx \,. \tag{154}$$

Nyní budeme obě veličiny, tj. posuvy y i zobecněné napětí m , považovat za nezávisle proměnné. Místo rovnice (149) budeme mít rovnice dvě, a to

$$\begin{aligned} y'' &= -m \,, \\ m'' &= -1 \,. \end{aligned} \tag{155}$$

Lze se přesvědčit, že tyto rovnice dostaneme stacionarizací funkcionálu

$$F = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}m^2 - m'y' + y\right) dx \,, \tag{156}$$

považujeme-li m i y za nezávislé funkce. Budeme postupovat tak, že za m dosadíme $m+\delta m$, za derivaci m' pak $m'+\delta m'$ a obdobně i za y . Tak dostaneme integrál $F+\delta F$, od něhož odečteme F a integrací per partes - což je ve variačních metodách obrat zásadní důležitosti - odstraníme derivace $\delta m'$, $\delta y'$. Vyjde

---

*/ Srovnej s rovnicí (73), kde však šlo o nosník na pružném podkladu, takže funkcionál obsahoval ještě další člen.

$$\delta F = \int_0^1 (m + y'')\,\delta m\,dx + \int_0^1 (m'' + 1)\,\delta y\,dx -$$

$$- \left[m'\,\delta y\right]_0^1 - \left[y'\,\delta m\right]_0^1 \,. \tag{157}$$

Okrajové členy v hranatých závorkách odpadnou, neboť δm i δy mají na okrajích $x = 0$ a $x = 1$ nulové hodnoty.

Zdánlivě jsme neučinili nic; úprava rovnic je čistě formální. Ve skutečnosti má však tato změna dalekosáhlé důsledky pro metodu konečných prvků: funkcionál (156) nyní obsahuje jen první derivace, takže postačí, budou-li aproximace funkcí m, y spojité jen v nulté derivaci, kdežto dříve - s použitím funkcionálu (151) - byla nutná i spojitost v první derivaci. Dříve jsme tedy potřebovali elementy s kubickými polynomy, nyní postačí elementy s lineárními polynomy. Elementy s lineárními polynomy bychom pro funkcionál (151) vůbec nemohli použít, neboť by nebyla splněna podmínka konvergence (připomeňme neúspěšný pokus z 10. příkladu).

Rovnici (155) můžeme zapsat ve tvaru (83), bude-li

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d^2}{dx^2} \\ \frac{d^2}{dx^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\phi\} = \begin{Bmatrix} m \\ y \end{Bmatrix}, \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} . \tag{158}$$

Pro prvek s uzly i, j, $i = j + 1$, který má bezrozměrovou délku h (je to poměr délky prvku k délce celého nosníku), zvolíme lineární polynom a tyto čtyři parametry:

$$\begin{aligned} q_{2i-1} &= m_i\,, & q_{2j-1} &= m_j\,, \\ q_{2i} &= y_i\,, & q_{2j} &= y_j\,. \end{aligned} \tag{159}$$

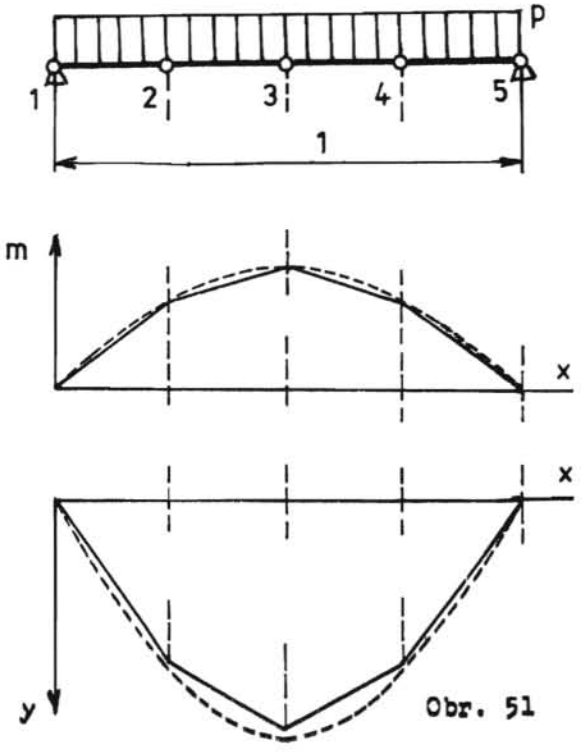
Tvarové funkce jsou

$$\varphi_1 = \frac{1 - \xi}{h}\,, \qquad \varphi_2 = \frac{\xi}{h}\,. \tag{160}$$

Jsou psány v lokálních souřadnicích $\xi \in \langle 0, h \rangle$. Aproximace pak je

$$\begin{Bmatrix} m \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{2i-1} \\ q_{2i} \\ q_{2j-1} \\ q_{2j} \end{Bmatrix} . \tag{161}$$

Je to rovnice (86), avšak s jiným pořadím prvků. Zvolme nosník se čtyřmi prvky 12, 23, 34, 45. Je zakreslen na obr. 51. Z okrajových podmínek vyplývá, že $q_1 = q_2 = q_9 = q_{10} = 0$.



Obr. 51

Do rovnic (160) dosadíme $h = 1/4$; dále budeme mít $i = 1, 2, 3, 4$, $j = i + 1$.

Dosadíme-li (161) do funkcionálu (156) a vypočítáme integrál jako součet dílčích integrálů nad jednotlivými prvky, dostaneme kvadratickou funkci

$$F = f(q_3, q_4, \dots, q_8). \tag{162}$$

Anulováním derivací této funkce podle jednotlivých parametrů dostaneme šest rovnic, které se rozpadnou na dvě soustavy, odpovídající dvěma rovnicím (155)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_6 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_5 \\ q_7 \end{Bmatrix}, \tag{163}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_5 \\ q_7 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{164}$$

Jsou složeny z elementárních matic typu

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

První z nich je příbuzná s maticí tuhosti, druhá s maticí hmotnosti. Rovnice (163) a (164) jsou už zmenšené soustavy, respektující okrajové podmínky. Dostaneme z nich tyto výsledky:

$$\begin{Bmatrix} q_3 \\ q_5 \\ q_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix}, \tag{165}$$

$$\begin{Bmatrix} q_4 \\ q_6 \\ q_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3027} \begin{Bmatrix} 27 \\ 38 \\ 27 \end{Bmatrix} . \qquad (166)$$

Hodnoty (165) vyšly přesně (!), hodnoty (166) s chybou jen 5 %. Správně má být (přesné průběhy jsou na obr. 51 čárkovány):

$$\begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3027} \begin{Bmatrix} 28,5 \\ 40,0 \\ 28,5 \end{Bmatrix} .$$

Vzhledem k tomu, že jsme užili lineární polynomy a velmi hrubé dělení, je chyba nečekaně malá. Pozoruhodné je, že je malá nejen při výpočtu posuvů, ale i při výpočtu ohybových momentů, tedy u deformačních i silových veličin.

Řešení, které jsme získali, se může jevit jako zázrak, neboť rozpis rovnice (149) čtvrtého řádu na dvě rovnice (155) druhého řádu je z matematického hlediska čistě formální. Přesto je mezi funkcionály (151) a (156) kvalitativní rozdíl, pokud jde o prostor funkcí, které smíme použít pro aproximaci Ritzovou metodou. V prvním případě musíme použít prvky s polynomy aspoň třetího stupně; pro každý takový prvek máme čtyři parametry. V druhém případě můžeme sice použít lineární polynomy, takže každý prvek má jen dva parametry, ale užijeme je zato dvakrát, jednou pro veličinu m , po druhé pro veličinu y . Počet parametrů je tedy celkem stejný. Proto je i přesnost řešení na srovnatelné úrovni.

Z matematického hlediska je zajímavé, že co je výhodné pro analytická řešení, nemusí být - a také zpravidla není - výhodné pro přibližná numerická řešení metodou konečných prvků. V prvním případě považujeme nahrazení několika diferenciálních rovnic nižších řádů menším počtem rovnic vyšších řádů - nebo dokonce jedinou diferenciální rovnicí - za úspěch, který usnadní řešení (vzpomeňme na Airyho funkci napětí v rovinných úlohách teorie pružnosti), kdežto pro metodu konečných prvků může být takový postup zcela nežádoucí.

15. Pružná tělesa s počátečním přetvořením a počátečním napětím

V teorii pružnosti se obvykle předpokládá, že v nezatíženém tělese není žádné napětí. Od tohoto "přirozeného" stavu se měří také přetvoření, takže těleso bez napětí je nepřetvořené. Ve skutečnosti však je v každém tělese nějaké vlastní pnutí, tj. napětí, které existuje v tělese, jež není zatíženo žádnými silami. Někdy je vlastní pnutí bezvýznamné, ale jindy - např. u velkých nevyžíhaných svařenců a u velkých odlitků - může za nepříznivých okolností nabývat hodnot blízkých mezi pevnosti. Také přetvoření může být v nezatíženém tělese různě velké, takže stav, který označujeme za přirozený, není

dán jednoznačně. Je-li totiž těleso volné, můžeme určitou změnou teploty, např. rovnoměrným ohřevem, přivodit jeho přetvoření, aniž v něm vznikne napětí.

Budeme-li vycházet z nějakého ideálního stavu tělesa bez napětí a bez přetvoření, dostaneme Hookeův zákon ve známém tvaru $\{\sigma\} = [c]\{\varepsilon\}$, popř. $\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\}$. Budeme-li však předpokládat, že těleso má na počátku zatěžování již nějakou napjatost $\{\sigma_0\}$ a nějaké přetvoření $\{\varepsilon_0\}$, dostaneme - využívajíce principu superpozice - obecnější závislost

$$\{\sigma\} - \{\sigma_0\} = [C](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}), \tag{167a}$$

popř.

$$\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\} = [D](\{\sigma\} - \{\sigma_0\}). \tag{167b}$$

Tato formulace Hookeova zákona z nás snímá trapnou povinnost zavádět do výpočtů přirozený stav tělesa, o němž víme, že ve skutečnosti - přísně vzato - neexistuje. Je-li totiž namáhání tělesa v mezích linearity, můžeme kterýkoli stav napjatosti a přetvoření tělesa považovat za výchozí, od něhož budeme napětí a přetvoření určovat (měřit). Kdybychom vynášeli složky vektorů $\{\sigma\} = [\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}]^T$ a $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{xy}\ \gamma_{yz}\ \gamma_{zx}]^T$ na souřadnicové osy dvanáctirozměrného prostoru, znamenaly by rovnice (167 a, b) přímku procházející bodem $\{\sigma_0\}$, $\{\varepsilon_0\}$. Budeme-li tento bod měnit, dostaneme svazek rovnoběžných přímek se vzájemně rovnocenným významem.

Představme si nyní, že budeme s použitím zákona (167 a) řešit obecně prostorovou úlohu metodou konečných prvků (deformační variantou). Těleso o objemu V bude ohraničeno povrchem S a zatíženo jednak vnějšími osamělými silami $\{Q\}$ v uzlech, jednak spojitými objemovými silami $\{P\} = [X\ Y\ Z]^T$ a povrchovými silami $\{p\} = [p_x\ p_y\ p_z]^T$. Fyzikální rozměry těchto sil jsou po řadě N, N m^{-3}, N m^{-2}.

Pomocí tvarových funkcí $[\varphi]$ dovedeme odvodit posuvy $\{v\} = [u\ v\ w]^T$ ze známých posuvů uzlů $\{q\}$

$$\{v\} = [\varphi]\{q\}. \tag{168}$$

Z těchto posuvů, které jsou spojitými funkcemi souřadnic x , y , z , odvodíme derivováním složky poměrného přetvoření. Dostaneme tedy také tento vektor v závislosti na vektoru posuvu uzlů

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}. \tag{169}$$

Udělíme-li tělesu virtuální posuv $\{\delta q\}$, vzroste energie napjatosti U o hodnotu δU

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,dV = \{\delta q\}^T\int_V [B]^T\{\sigma\}\,dV =$$
$$= \{\delta q\}^T\Big(\int_V [B]^T\{\sigma_0\}\,dV + \int_V [B]^T[C][B]\,dV\{q\} -$$
$$- \int_V [B]^T[C]\{\varepsilon_0\}\,dV\Big). \tag{170}$$

Vnější zatížení vykoná přitom práci

$$-\delta W = \{\delta q\}^T\{Q\} + \int_V \{\delta s\}^T\{P\}\,dV + \int_S \{\delta s\}^T\{p\}\,dS =$$
$$= \{\delta q\}^T\Big(\{Q\} + \int_V [\varphi]^T\{P\}\,dV + \int_S [\varphi]^T\{p\}\,dS\Big). \tag{171}$$

Tyto práce se sobě rovnají, takže se musí rovnat oblé závorky na pravých stranách rovnic (170) a (171). Odtud dostaneme základní rovnici

$$[K]\{q\} + \{R_p\} + \{R_p\} + \{R_{\varepsilon_0}\} + \{R_{\sigma_0}\} - \{Q\} = \{0\}, \tag{172}$$

kde $[K] = \int_V [B]^T[C][B]\,dV$ značí matici tuhosti, $\{q\}$ vektor posuvů v uzlech. Další vektory značí síly v uzlech, jež jsou tohoto původu:

$$\{R_p\} = -\int_S [\varphi]^T\{p\}\,dS \qquad \text{od povrchových sil,} \tag{173}$$

$$\{R_p\} = -\int_V [\varphi]^T\{P\}\,dV \qquad \text{od objemových sil,} \tag{174}$$

$$\{R_{\varepsilon_0}\} = -\int_V [B]^T[C]\{\varepsilon_0\}\,dV \qquad \text{od počátečního přetvoření} \tag{175}$$

$$\{R_{\sigma_0}\} = \int_V [B]^T\{\sigma_0\}\,dV \qquad \text{od počátečního napětí.} \tag{176}$$

Vypočteme-li z rovnice (172) posuvy uzlů $\{q\}$, dostaneme napětí z rovnic (167) a (169)

$$\{\sigma\} = \{\sigma_0\} + [C][B]\{q\} - [C]\{\varepsilon_0\}. \tag{177}$$

Rovnice (172) až (177) jsou základními vztahy pro výpočet deformační variantou metody konečných prvků. Dávají návod k sestavení matice tuhosti a k výpočtu sil v uzlech ekvivalentních povrchovým i objemovým silám i počátečnímu přetvoření a počátečnímu napětí.

23. příklad

U čtvercového prvku ze 7. příkladu (obr. 9) předpokládejte, že uzly na osách souřadnic jsou upevněny a zbývající - čtvrtý - uzel je volný. Jaké budou reakce v uzlech a jaká vzniknou napětí, změní-li se teplota o konstantní hodnotu ΔT °C? Vlastnosti prvku jsou stejné jako v 7. příkladu.

Řešení

Matici $[K]$ prvku již známe, je to matice v rovnici (j) ze 7. příkladu. Matice $[B]$ je obdélníkovou maticí z rovnice (f) (tamtéž). Všechny posuvy uzlů na obr. 9 jsou nulové, až na q_5 a q_6.

V rovnici (172) jsou nenulové jen první, čtvrtý a šestý člen. Z rovnice (175) vypočteme vektor $\{R_{\varepsilon_0}\}$ s použitím matic

$$[C] = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \qquad \{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \vartheta \Delta T \\ \vartheta \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{a}$$

kde E je modul pružnosti v tahu-tlaku,

ϑ součinitel lineární teplotní roztažnosti.

Vyjde - jak se snadno přesvědčíme -

$$\{R_{\varepsilon_0}\} = \tfrac{t}{2} E \vartheta \Delta T \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T. \tag{b}$$

Za element objemu bereme $dV = t\,dx\,dy$ a integrujeme v mezích $\langle 0, 1 \rangle$ (obr. 9). Připomínáme, že jde o materiál bez příčné kontrakce, který jsme zvolili pro zjednodušení a zkrácení výpočtů.

Se zřetelem k okrajovým podmínkám bude zmenšená matice tuhosti obsahovat jen pátý a šestý sloupec a řádek z úplné matice $[K]$. Také z vektorů $\{R_{\varepsilon_0}\}$ a $\{Q\}$ převezmeme do rovnice (172) jen pátý a šestý prvek. Protože $Q_5 = Q_6 = 0$, vektor $\{Q\}$ ve zmenšené soustavě odpadne. Dostaneme tak

$$\frac{Et}{8} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} + \frac{t}{2} E \vartheta \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{c}$$

z níž vyjde

$$q_5 = q_6 = \frac{4}{5} \vartheta \Delta T. \tag{d}$$

Napětí v prvku dostaneme z rovnice (177). Bude

$$\{\sigma\} = [S]\{q\} - [C]\{\varepsilon_0\}, \tag{e}$$

kde napěťová matice $[S] = [C][B]$. Vyjde

$$[S] = E \begin{bmatrix} y-1 & 0 & 1-y & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & -x & 0 & x & 0 & 1-x \\ \frac{x-1}{2} & \frac{y-1}{2} & -\frac{x}{2} & \frac{1-y}{2} & \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{1-x}{2} & -\frac{y}{2} \end{bmatrix} \tag{f}$$

a nakonec

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{4}{5} E\vartheta\Delta T \begin{Bmatrix} y \\ x \\ \frac{x+y}{2} \end{Bmatrix} - E\vartheta\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E\vartheta\Delta T}{5} \begin{Bmatrix} 4y-1 \\ 4x-1 \\ 2(x+y) \end{Bmatrix}. \qquad (g)$$

Ptáme se nyní, jaké jsou výsledné reakce v uzlech. Ty působí jako vnější síly $\{Q\}$, takže rovnice (172) dá

$$\{Q\} = [K]\{q\} + \{R_{\varepsilon o}\}. \qquad (h)$$

Dosazením

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{Bmatrix} = \frac{Et}{8} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{4}{5} \vartheta\Delta T + \frac{t}{2} E\vartheta\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}. \qquad (i)$$

Odtud

$$\{Q\} = \frac{E\vartheta\Delta T}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}^T. \qquad (j)$$

V nepodepřeném uzlu ovšem $Q_5 = Q_6 = 0$.

Jaký je fyzikální význam reakcí $\{R_{\varepsilon o}\}$? Vyjdeme-li z rovnice (172), totiž ze vztahu

$$[K]\{q\} + \{R_{\varepsilon o}\} - \{Q\} = \{0\}, \qquad (k)$$

shledáme, že $\{R_{\varepsilon o}\}$ jsou reakce v uzlech $\{Q\}$, jsou-li všechny uzly nepohyblivé, tj. je-li $\{q\} = \{0\}$. Skutečně, reakce (b) zabraňují posuvům uzlů (a tedy jakékoli deformaci prvku) při změně teploty.

Podobně bychom - u tělesa s počátečním napětím - zjistili, že vektor $\{R_{\sigma o}\}$ znamená reakce v nepohyblivých uzlech, nutných k udržení počátečního napětí $\{\sigma_o\}$. Uvolníme-li uzly, bude $\{Q\} = \{0\}$ a vzniknou posuvy

$$\{q\} = -[K]^{-1}\{R_{\sigma_0}\}. \tag{l}$$

V tělese pak zůstane vlastní pnutí - podle (177)

$$\{\sigma\} - \{\sigma_0\} - [C][B][K]^{-1}\{R_{\sigma_0}\}. \tag{n}$$

24. příklad

Najděte funkce U a W, jejichž variace jsou dány rovnicemi (170) a (171).

Řešení

Snadno se přesvědčíme, že hledané funkcionály jsou

$$U = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T[C]\{\varepsilon\}\,dV - \int_V \{\varepsilon\}^T[C]\{\varepsilon_0\}\,dV + \int_V \{\varepsilon\}^T\{\sigma_0\}\,dV,$$

$$W = -\{q\}^T\{Q\} - \int_S \{s\}^T\{p\}\,dS - \int_V \{s\}^T\{P\}\,dV.$$

Z podmínky $\delta(U + W) = 0$ plyne po úpravě rovnice (172).

16. Nelineární úlohy

Budeme se zabývat dvěma druhy nelineárních úloh. V prvním případě půjde o deformaci těles, jejichž konstituční zákon je nelineární (neplatí Hookeův zákon), ale jejichž posuvy jsou malé, takže mezi posuvy a přetvořením platí lineární závislost (169) (matice $[B]$ nezávisí na $\{q\}$). V druhém případě budeme mít sice konstituční zákon (177) lineární, ale posuvy budou velké a přetvoření bude na nich nelineárně záviset (typickým příkladem je elastický vzpěr).

Řešení nelineárních úloh je mnohem náročnější než řešení lineárních úloh a skrývá v sobě mnohá nebezpečí. Mohou existovat matematická řešení, která nemají fyzikální význam, nebo mají jiný význam, než který hledáme. Řešení nemusí být jednoznačné. Problémy konvergence a stability výpočtu jsou složitější a výpočtové postupy pracnější. Variabilita metody konečných prvků, jak jsme ji poznali u lineárních úloh, se ještě násobí počtem možností iteračních postupů, takže existuje mnoho nejrůznějších metod, které tu nemůžeme dopodrobna probírat.

Základní myšlenkou řešení je snaha zachovat, pokud to lze, výhody lineárního řešení. Přispívá k tomu i okolnost, že pro lineární úlohy existují dobře vypracované programy pro číslicové počítače. Snažíme se proto úlohu

linearizovat, tj. najít řešení nelineární úlohy v blízkém okolí lineárního řešení, pokud je to možné (typická je metoda malého parametru nebo metoda ekvivalentní linearizace), nebo nahradit nelineární řešení posloupností lineárních řešení (např. s použitím inkrementální, tj. přírůstkové metody).

Nyní tedy naznačíme řešení pro první skupinu úloh. Rovnici (172) můžeme zkráceně zapsat takto:

$$[K]\{q\} = \{R\}, \tag{178}$$

kde

$$\{R\} = \{Q\} - \{R_r\} - \{R_p\} - \{R_{\varepsilon_0}\} - \{R_{\sigma_0}\}. \tag{179}$$

Tuto rovnici jsme dostali použitím Hookeova zákona (167)

$$\{\sigma\} - \{\sigma_0\} = [C](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}). \tag{167}$$

Nyní však budeme mít nelineární konstituční zákon v implicitním tvaru

$$f(\{\sigma\}, \{\varepsilon\}) = 0. \tag{180}$$

Abychom mohli i nadále použít k řešení soustavy rovnic (178), musíme "nastavit" některou ze tří konstant v rovnici (167) tak, aby tato rovnice dala pro $\{\sigma\}$, popř. $\{\varepsilon\}$ stejný výsledek jako (180). Nastavit bychom mohli i dvě nebo tři konstanty zároveň, což však nepřináší zvláštní výhody. Toto nastavení se bude obecně od místa k místu měnit a výpočet bude možný jen iterací.

Nastavujeme-li v rovnici (167) matici $[C]$, dostáváme metodu proměnné tuhosti. Používáme-li k tomu vektory $\{R_{\varepsilon_0}\}$, popř. $\{R_{\sigma_0}\}$, dostáváme metodu počátečního přetvoření, popř. metodu počátečního napětí.

V některých případech není dána funkce (180) mezi celkovým napětím $\{\sigma\}$ a celkovým přetvořením $\{\varepsilon\}$, ale jen mezi jejich přírůstky

$$\{\Delta\sigma\} = g(\{\sigma\}, \{\varepsilon\})\{\Delta\varepsilon\}. \tag{181}$$

Pak je třeba použít inkrementální metodu.

Jde-li o metodu proměnné tuhosti, bude matice elastických konstant $[C]$ závislá na poměrném přetvoření $\{\varepsilon\}$, a tedy na posuvech uzlů $\{q\}$. Na těchto posuvech bude záviset i matice tuhosti $[K]$ a rovnice (178) bude mít tvar

$$[K(\{q\})]\{q\} = \{R\}. \tag{182}$$

Iterační proces zahájíme např. volbou $\{q\}_0 = \{0\}$. Dostaneme $[K]_0 = [K(\{q\}_0)] = [K(\{0\})]$ a řešením rovnice (182) získáme $\{q\}_1 = [K]_0^{-1}\{R\}$. To opakujeme, takže n-tá aproximace bude

$$\{q\}_n = [K]_{n-1}^{-1}\{R\}. \tag{183}$$

Řešení končí, nemění-li se již v dalších krocích vektor posuvů. Nevýhodou metody je, že musíme přepočítávat matice tuhosti.

Při metodě počátečních napětí předpokládáme, že ke každému $\{\varepsilon\}$ dovedeme určit jednoznačně $\{\sigma\}$, takže

$$\{\sigma\} = f(\{\varepsilon\}). \tag{184}$$

V rovnici (167) nastavíme $\{\mathfrak{G}\}$ tak, abychom pro dané $\{\varepsilon\}$ dostali stejné $\{\sigma\}$ jako z rovnice (184). Na tomto počátečním napětí bude záviset vektor $\{R\}$, neboť podle (179) obsahuje i vektor $\{R_\sigma\}$. Rovnice (172) bude mít proto tvar

$$[K]\{q\} = \{R(\{q\})\}. \tag{185}$$

Nejprve zvolíme $\{\mathfrak{G}\}_0 = \{0\}$, čemuž odpovídá $\{R\}_0$ (to jsou síly skutečně působící v uzlech). Nultá aproximace bude

$$\{q\}_0 = [K]^{-1}\{R\}_0. \tag{186}$$

Z těchto posuvů vypočteme pomocí (169) přetvoření $\{\varepsilon\}$ a z rovnice (184) vektor $\{\sigma\}$. Dosadíme-li tyto hodnoty do Hookeova zákona (167), vyjde počáteční napětí

$$\{\mathfrak{G}_0\}_1 = \{\sigma\} - [c]\{\varepsilon\}, \tag{187}$$

kterému přísluší nenulový vektor $\{R_{\mathfrak{G}_0}\}_1$, a tedy i nová hodnota $\{R\}_1$. S ní pak

$$\{q\}_1 = [K]^{-1}\{R\}_1$$

atd., až

$$\{q\}_n = [K]^{-1}\{R\}_n. \tag{188}$$

Matice tuhosti se v tomto případě nemění.

Metoda počátečního přetvoření je obdobná, výchozím vztahem je však rovnice

$$\{\varepsilon\} = f(\{\sigma\}). \tag{189}$$

Obě metody lze upravit i do inkrementální formy. V této úpravě se též nazývají "metoda přenosu napětí" a "metoda reziduálních sil".

Druhá skupina úloh je charakterizována nelinearitou vztahu (169), který má nyní tvar

$$\{\varepsilon\} = [B(\{q\})]\{q\}. \tag{190}$$

Rozvineme-li prvky matice $[B]$ v Maclaurinovu řadu a oddělíme v ní první člen $b_{ij}(\{0\})$ od zbylých členů řady $Z_{ij}(\{q\})$, dostaneme pro jeden prvek

$$b_{ij}(\{q\}) = b_{ij}(\{0\}) + Z_{ij}(\{q\}) \tag{191}$$

a pro celou matici

$$[B(\{q\})] = [B_0] + [B_1(\{q\})]. \tag{192}$$

Přitom

$$[B_0] = \lim_{\{q\}\to\{0\}} [B(\{q\})].$$

Pro variaci energie napjatosti platí vztah

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\}\, dV, \tag{193}$$

kam nyní dosadíme

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta q\} + [\delta B]\{q\} =$$
$$= ([B_0] + [B_1(\{q\})])\{\delta q\} + [\delta B_1]\{q\}. \tag{194}$$

Pro napětí máme z Hookeova zákona

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} = [C]([B_0] + [B_1(\{q\})])\{q\}. \tag{195}$$

Dosadíme-li z rovnic (194) a (195) do (193), vyjde

$$\delta U = \{\delta q\}^T \int [B_0]^T [C][B_0]\, dV \{q\} +$$
$$+ \{\delta q\}^T \int ([B_0]^T [C][B_1] + [B_1]^T [C][B_0] + [B_1]^T [C][B_1])\, dV \{q\} + \tag{196}$$
$$+ \{q\}^T \int [\delta B_1]^T \{\sigma\}\, dV.$$

Označíme-li prvky matice $[B_1(\{q\})]$ znakem β_{ij}, budou prvky matice $[\delta B_1]$

$$\delta\beta_{ij} = \sum_k \frac{\partial\beta_{ij}}{\partial q_k}\delta q_k = \{\delta q\}^T \frac{\partial\beta_{ij}}{\partial\{q\}}. \tag{197}$$

Jsou to tedy lineární funkce virtuálních přírůstků δq_k. Přeskupením sčítanců v součinu $[\delta B_1]\{q\}$ lze pak tento součin upravit na tvar $[B_2]\{\delta q\}$, takže poslední člen v rovnici (196) je

$$\{q\}^T \int [\delta B_1]^T \{\sigma\}\, dV = \{\delta q\}^T \int [B_2]^T \{\sigma\}\, dV =$$
$$= \{\delta q\}^T \int [B_2]^T [C][B]\, dV \{q\}. \tag{198}$$

Rovnici (196) lze považovat za variaci kvadratické formy

$$U = \frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\}, \tag{199}$$

tj. za

$$\delta U = \{\delta q\}^T \frac{\partial U}{\partial \{q\}} = \{\delta q\}^T[K]\{q\}. \tag{200}$$

Podle (196) se nyní výsledná matice tuhosti $[K]$ skládá z těchto částí:

$$[K_0] = \int_V [B_0][C][B_0]\,dV, \tag{201}$$

$$[K_q] = \int_V ([B_0]^T[C][B_1] + [B_1]^T[C][B_0] + [B_1]^T[C][B_1])\,dV, \tag{202}$$

$$[K_\sigma] = \int_V [B_1]^T[C][B]\,dV. \tag{203}$$

Je tedy

$$[K] = [K_0] + [K_q] + [K_\sigma] = [K_t]. \tag{204}$$

Celková matice tuhosti $[K] = [K_t]$ se nazývá <u>tečná matice tuhosti</u>, protože má obdobný význam jako tečný modul pružnosti. Udává tuhost tělesa nebo konstrukce závisle na velikosti posuvů. Mohli bychom ji dostat také tak, že bychom sestavili matici tuhosti obvyklým způsobem, avšak pro přetvořené prvky. Matice $[K_0]$ je obvyklá matice tuhosti, platná pro malé deformace. Matice $[K_q]$ a $[K_\sigma]$ jsou její korekcí pro velké deformace. Mezi nimi je však rozdíl. Matice $[K_\sigma]$ je závislá na napětí - to je zřejmé ze srovnání (203) se (198) - a je nulová jen v nezatíženém tělese. Nazývá se <u>geometrická matice</u>. Matice $[K_q]$ může být za určitých okolností identicky nulová (např. u přímé centricky zatížené vzpěry, u válcové nebo kulové skořepiny s vnějším přetlakem) a nazývá se <u>matice pro velké deformace.</u> Je-li tato matice nulová, může při určité velikosti napětí nastat rozvětvení rovnováhy při malých deformacích. Předpokládejme, že matice $[K_\sigma]$ je přímo úměrná působícímu zatížení, tedy úměrná nějakému parametru λ, určujícímu průběh zatěžování. Potom

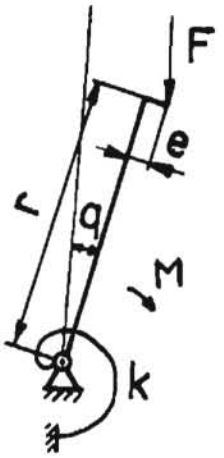
$$[K_\sigma] = \lambda [K_\sigma^*], \tag{205}$$

kde $[K_\sigma^*]$ již na zatížení nezávisí. Kritickou velikost parametru λ pak můžeme vypočítat z podmínky, že k vyvolání změny $\{\delta q\}$ posuvů z bodu rozvětvení rovnováhy není třeba působit žádnou vnější silou

$$([K_0] + \lambda [K_\sigma^*])\{\delta q\} = \{0\}. \tag{206}$$

Výsledná matice v oblé závorce (206) ztrácí při kritické velikosti (vlastní hodnotě) parametru λ pozitivní definitnost, determinant matice se rovná nule. Platí obecné pravidlo, že podmínkou stabilní rovnováhy je pozitivní definitnost tečné matice tuhosti. Protože tato vlastnost souvisí s řešitelností základní soustavy rovnic pro danou úlohu, znamená ztráta stabilní rovnováhy zároveň ztrátu jednoznačné řešitelnosti příslušného matematického modelu.

25. příklad



Obr. 52

Pružně uložené otočné rameno podle obr. 52 se otočí o úhel q ze svislé polohy, je-li zatíženo momentem $M_0 = kq$. Z rovnovážné polohy je vychylováno momentem M a účinkem vertikální síly F. Jde o soustavu s jedním stupněm volnosti.

Řešení

Podle obr. 52 zřejmě platí, že

$$kq - Fr\sin q - Fe\cos q = M. \qquad (a)$$

Protože

$$\sin q \doteq q - \frac{1}{6}q^3,$$
$$\cos q \doteq 1 - \frac{1}{2}q^2,$$

můžeme rovnici (a) upravit pro malá q do tvaru

$$[k - Fr(1 - \tfrac{1}{6}q^2) + \tfrac{1}{2}Feq]q = Q, \qquad (b)$$

kde $Q = M + Fe$ značí jmenovitý vnější moment. Vztah (b) má tvar maticové rovnice

$$([K_0] + [K_\sigma] + [K_q])\{q\} = \{Q\}, \qquad (c)$$

v níž

$$[K_0] = [k], \qquad (d)$$

$$[K_\sigma] \doteq [-Fr(1 - \tfrac{1}{6}q^2)] \triangleq [-Fr], \qquad (e)$$

$$[K_q] = [\tfrac{1}{2}Feq]. \qquad (f)$$

Všimněme si, že geometrická matice $[K_\sigma]$ nezávisí v prvním přiblížení na posuvu $\{q\}$, ale jen na silovém parametru $\lambda = F$ a na geometrii (na délce ramena r); odtud plyne název matice. Tečná matice tedy je (pro malá q)

$$[K_t(\{q\})] = [k - Fr + \tfrac{1}{2} Fe q]. \tag{g}$$

Nultá aproximace

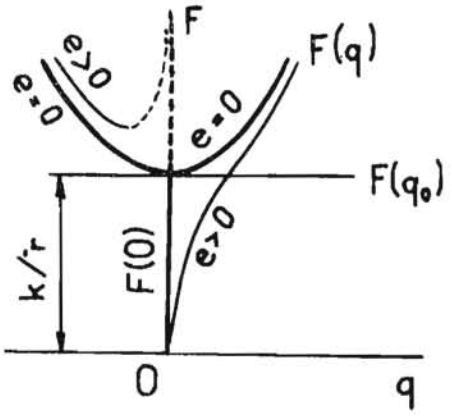
$$\{q\}_0 = [K_t(\{0\})]^{-1}\{Q\} = \frac{M + Fe}{k - Fr} = q_0. \tag{h}$$

Pro první aproximaci dostaneme

$$\{q\}_1 = [K_t(\{q\}_0)]^{-1}\{Q\} = q_1 \tag{i}$$

atd.

Nyní si všimněme homogenní úlohy, tj. případu, kdy $\{Q\} = \{0\}$; vyloučíme-li triviální případ nezatíženého tělesa, je $M = 0$, $e = 0$. Pak ovšem i $q_0 = 0$, pokud $F < k/r = \lambda_{kril}$. Je-li $F = \lambda_{kril}$, nabývá q_0 neurčité (libovolné) velikosti, tzn., že nastává <u>rozvětvení rovnováhy (bifurkace)</u>. Závislost síly F na úhlu q je pro tento případ znázorněna na obr. 53.



Obr. 53

Je-li $e = 0$, je $[K_q] \equiv [0]$. Podmínka pro kritickou velikost síly $F = \lambda$ plyne z rovnice (206) takto:

$$([k] + \lambda[-r])\{\delta q\} = \{0\}. \tag{j}$$

Odtud - shodně s dřívějším -

$$\lambda_{kril} = \frac{k}{r}. \tag{k}$$

Na tomto jednoduchém případě jsme ukázali význam jednotlivých pojmů, které jsme v této kapitole zavedli. Obdobně tomuto případu lze analyzovat i velké složité soustavy.

<u>Závěr</u>

V tomto semináři jsme se pokusili vysvětlit a na jednoduchých příkladech objasnit podstatu metody, která od začátku šedesátých let pronikla do mnoha odvětví aplikované fyziky a mechaniky jako účinný a moderní matematický prostředek. Metodou konečných prvků lze řešit nejen problémy z oboru mechaniky pružných těles, ale také úlohy o creepu a plasticitě, problémy z oboru

proudění, vedení tepla, úlohy o elektrických a magnetických polích apod.

Některé poznatky, týkající se vibrací pružných těles, byly již uvedeny na dřívějších seminářích o maticových metodách v pružnosti a pevnosti. Uvedli jsme tam i některé příklady ze statiky pružných těles, jež mohou doplnit látku dnešního semináře. Skripta z dřívějších seminářů si mohou zájemci vypůjčit z knihovny Domu techniky ČVTS v Praze.

Praktické využití metody je možné jen ve spojení s výkonným číslicovým počítačem. Úlohy zpravidla vyžadují vkládání velkého množství vstupních dat a vedou k velkým soustavám lineárních rovnic. Programy výpočtu musí být proto uspořádány účelně, musí šetřit místem v operační paměti počítače.

Názory na nejvýhodnější metody numerických řešení se mění a vyvíjejí zároveň s metodou konečných prvků. Ještě nedávno se např. dávala přednost iteračním metodám pro řešení velkých soustav rovnic, kdežto dnes se opět začínají více uplatňovat přímé metody řešení, jež byly mezitím modernizovány. Projevuje se snaha zkrátit přípravnou fázi řešení, spočívající v návrhu sítě prvků a zpracování dat pro sestavení celkové matice tuhosti. Síť se navrhne jen hrubá a práci s jejím zjemněním přebírá počítač. Jde však o komplikované programy; jejich sestavení se vyplatí jen tehdy, budeme-li metodu konečných prvků často používat. Tehdy se vyplatí prostudovat také další, zde neuvedené postupy a výpočtové obraty, které zkracují a usnadňují výpočet. Pozornost si zaslouží i smíšené metody, např. řešení s konečnými prvky a konečnými diferencemi, poloanalytická řešení aj.

Z uvedených důvodů je zatím u nás jen málo pracovišť, která mají knihovnu vhodných programů pro metodu konečných prvků. Jsou to některé výzkumné ústavy, vědecké instituce, vysoké školy a velké průmyslové závody. Ve spojení s nimi však mohou metodu využít i zájemci, kteří sami nemají přístup k počítači nebo se neníní na tuto metodu specializovat. Teprve tehdy, bude-li využívání těchto programů běžné i pro konstruktéry v menších závodech, přinese metoda konečných prvků maximální užitek.

LITERATURA

/1/ ARGYRIS, J. H.: Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand Reinhold, New York, 1965.

/2/ AZIZ, A. K.: The mathematical foundations of the finite element method with applications to the partial differential equations. Academic Press, New York, 1972.

/3/ DESAI, C., ABEL, J.: Introduction to the finite element method. Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.

/4/ HOLAND, I., BELL, K. (red.): Finite element methods in stress analysis. Tapir, Trondheim, (Norsko), 1969.

/5/ KOLÁŘ, V. aj.: Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků. SNTL, Praha, 1972.

/6/ NEČAS, J.: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Praha, 1967.

/7/ ODEN, J. T.: Finite elements of nonlinear continua. McGraw-Hill, New York, 1972.

/8/ PRZEMIENIECKI, J. S.: Theory of matrix structural analysis. McGraw-Hill, New York, 1968.

/9/ STRANG, G., FIX, C. J.: An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.

/10/ VISSER, M.: The finite element method in deformation and heat conduction problems. Delft, 1968.

/11/ ZIENKIEWICZ, O. C.: The finite element method in engineering science. 2. vyd., McGraw-Hill, New York, 1971.

Název:	ÚVOD DO METODY KONEČNÝCH PRVKŮ STAVBA STROJŮ XXXVIII
Autor:	Prof. Ing. Cyril Höschl
Počet stran:	123
Formát:	A 4
Číslo publikace:	57 - 482 - 75 (1075)
Vydal a rozmnožil:	Dům techniky ČVTS Praha Gorkého nám. 23, Praha 1
Datum vydání:	Únor 1976
Náklad:	180 výtisků