

Dispersion errors of B-spline based finite element method

Ing. Radek Kolman, Ph.D.

Ústav termomechaniky AV ČR, v. v. i.,
Dolejškova 1402/5, 182 00 Praha 8

kolman@it.cas.cz

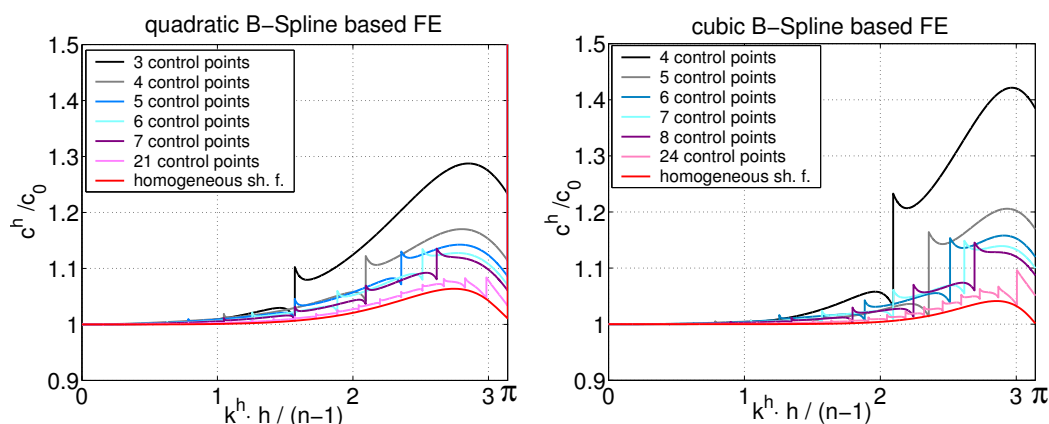
Prostorová diskretizace elastického kontinua metodou konečných prvků (MKP) [1] má za následek mimo jiné disperzní chování numerického řešení problémů šíření elastických vln. Disperze se projeví odlišnou rychlostí šíření vlny, než odpovídá kontinuu [2]. A navíc fázová i grupová rychlost vlny závisí na její frekvenci, resp. vlnové délce [3]. Tento parazitní efekt se u *ideálního* kontinua nevyskytuje. U klasických (Lagrangeových) prvků vyšších řádů [4], včetně druhého řádu, se navíc v disperzním spektru objevují tzv. optické módy [5], které mají za následek oscilace průběhu napětí a rychlostí. Teoretické vlnové čelo pulzu je vlivem disperze rozfázováno. Disperzní chyby optických módů narůstají se zvyšujícím se stupněm polynomu tvarových funkcí. Obecně se MKP síť chová jako vysokofrekvenční filtr—některé frekvence nejsou numerickým modelem přeneseny.

Moderní přístup ve výpočtové mechanice je isogeometrická analýza (IGA) [6], kde tvarové (testovací, báze, . . .) funkce jsou založeny na různých typech splinů. Příkladem jsou B-spliny, NURBS, T-spliny, PB-spliny, PHT spliny a mnoho dalších. Tento přístup má velkou výhodu v tom, že geometrie sledované oblasti je popsána na základě stejného matematického popisu jako pole neznámých veličin (např. pole posuvů) a geometrii některých prakticky důležitých oblastí je možné vyjádřit např. pomocí NURBS reprezentace exaktně [7]. Přínosem této prostorové aproximace je spojitě pole řešení.

Tento příspěvek se bude věnovat použití B-spline (basic spline) báze funkcí pro numerické řešení jednorozměrné lineární vlnové rovnice [2]. Kvalita této prostorové diskretizace bude sledována disperzními chybami [8]. Disperze pro případ nekonečného řetězce aproximovaného opakujícími se B-spline báze funkcemi byla řešena v práci [9]. Pro tento limitní případ jsou všechny tvarové funkce shodné (homogenní, uniformní) a liší se pouze ve své poloze. Okrajové efekty jsou zde tedy zanedbány. Bylo také ukázáno, že pro rostoucí stupeň polynomu disperzní chyby pro nekonečný řetězec klesají na rozdíl od klasických Lagrangeových konečných prvků. Toto je vynikající výsledek pro explicitní schéma řešení přechodových úloh [4]. V příspěvku budou stanoveny disperzní chyby pro B-spline segmenty s různým počtem řídicích bodů, pro různé stupně splinu a pro odlišné způsoby parametrizace. Jednotlivé B-spline segmenty jsou navzájem spojeny v krajních řídicích bodech. Výsledky budou taktéž porovnány s klasickými konečnými prvky a s limitním případem nekonečného řetězce se shodnými B-spline báze funkcemi.

Na Obr. 1 jsou uvedeny normalizované disperzní chyby pro kvadratické a kubické B-spline báze funkce, pro různé počty řídicích bodů, s rovnoměrným roz-

ložení kontrolních bodů a pro rovnoměrný uzlový vektor [7]. Všechny uvedené disperzní diagramy jsou normalizovány tak, aby se interval dovolených bezrozměrných vlnových čísel $k^h \cdot h$ zobrazil na interval $[0, \pi]$. Na Obr. 1 jsou zřetelně vidět svislé skokové změny, které odpovídají tzv. attenuating řešení [5]. Jedná se o ustálený tvar kmitání s exponenciálně klesající amplitudou se vzdáleností. Frekvenčně mrtvá pásma (band gaps [5]) jsou tedy produktem okrajových B-spline bazových funkcí. Bylo prokázáno, že disperzní chyby B-spline varianty MKP klesají se zvyšujícím se stupněm bazových funkcí a pro rostoucí počet řídicích bodů se přibližují k řešení pro homogenní bazové funkce. Dalším poznatkem vyplývajícím z disperzní analýzy je to, že oblasti mrtvých frekvencí jsou závislé mimo jiné na zvolené parametrizaci. Bylo dokázáno, že výhodnější z hlediska disperze je vkládání nových řídicích bodů než vkládání nových B-spline segmentů-prvků. B-spline varianta MKP má potenciál k úspěšnému použití pro numerické řešení problémů šíření vln napětí v elastickém kontinuu.



Obrázek 1: Disperzní chyby B-spline varianty MKP pro kvadratické (vlevo) a kubické (vpravo) B-spline tvarové funkce s různým počtem rovnoměrně rozložených kontrolních bodů a pro rovnoměrný uzlový vektor.

Poděkování

Tato práce vznikla za laskavé podpory grantových projektů GA ČR P101/10/P376, 101/09/1630 a 101/07/1471 v rámci AV0Z20760514.

Reference

- [1] Strang, G., Fix, G. *An Analysis of the Finite Element Method*. Second edition, Wellesley-Cambridge Press, 2008.
- [2] Kolsky, H. *Stress Wave in Solids*. New York: Dover Publications, 1963.
- [3] Belytschko, T. - Mullen, R. On dispersive properties of finite element solutions. In *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*. Miklowitz, J. (Eds.), John Wiley, 1978, s. 67-82.

- [4] Hughes, T.J.R. *The Finite Element Method: Linear and Dynamic Finite Element Analysis*. New York: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [5] Brillouin, L. *Wave propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices*. New York: Dover Publications, 1953.
- [6] Cottrell, J.A. - Hughes, T.J.R. - Bazilevs, Y. *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, New York, 2009.
- [7] Piegl, L. - Tiller, W. *The NURBS Book (Monographs in Visual Communication)*. Second Edition, Springer-Verlag, 1997.
- [8] Thompson, L.L. - Pinky, P.M. Complex wave-number Fourier-analysis of the p-version finite element method. *Computational Mechanics*, 1995, Vol. 13(4), s. 255-275.
- [9] Hughes, T.J.R. - Reali, A. - Sangalli G. Duality and Unified Analysis of Discrete approximations in Structural Dynamics and Wave Propagation: Comparison of p-method Finite Elements with k-method NURBS. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2008, Vol. 197, s. 4104–4124.