

# Disperze a solitonové šíření v optických vláknech

## Disperze optických vláken

**Reálný signál:**  $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad U(-\omega) = U^*(\omega)$

**Komplexní signál:**  
část obsahující  
pouze kladné frekvence  $u_+(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$

Zřejmě platí  $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U(-\omega) \exp(i\omega t) d\omega = u_+^*(t)$

a tedy  $u(t) = \frac{1}{2} [u_+(t) + u_+^*(t)] = \text{Re} \{u_+(t)\}.$

**Úzkopásmový signál:**

signál, jehož spektrum je soustředěno do relativně malé oblasti kolem střední frekvence:

$$U(\omega) \approx U_+(\omega - \omega_0), \quad U_+ \neq 0 \text{ pro } |\omega - \omega_0| \ll \omega_0.$$

$$\begin{aligned} \text{Pak} \quad u_+(t) &\approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} U_+(\omega - \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_0^{\infty} U_+(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &\doteq \frac{1}{\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} U_+(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = u_1(t) e^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Komplexní signál úzkopásmového procesu je možno popsat **komplexní „obálkou“**  $u_1(t)$  vynásobenou komplexní harmonickou funkcí  $\exp(-i\omega_0 t)$ :

$$u(t) = \text{Re} \{u_1(t) \exp^{-i\omega_0 t}\}$$

## Disperze optických vláken - 2

Komplexní *optický* signál na vstupu optického vlákna:  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \approx u_1(t) \mathbf{E}(\mathbf{r})$

(vzhledem k úzkopásmovosti zanedbáváme závislost rozložení pole vidu na vlnové délce).

Modulované vstupní záření se naváže do všech vedených vidů s komplexními amplitudami

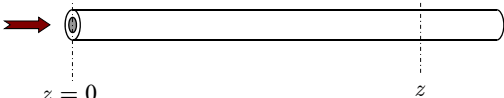
$$c_m = \frac{\iint_S \mathbf{E} \times \mathbf{h}_m \cdot d\mathbf{S}}{\iint_S \mathbf{e}_m \times \mathbf{h}_m \cdot d\mathbf{S}}$$

Na začátku vlákna  $z = 0$  vznikne tedy rozložení pole  $u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp)$ .

Každý vid se šíří s jinou konstantou šíření  $\beta_m$ .

Ve vzdálenosti  $z$  od začátku vlákna bude tedy rozložení pole

$$u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \exp[i(\beta_m z - \omega_0 t)].$$

$$u_1(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} \quad u_1(t) e^{-i\omega_0 t} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \quad u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \exp[i(\beta_m z - \omega_0 t)]$$


## Disperze optických vláken - 3

Označme spektrum *obálky*  $U_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) e^{i\omega t} dt = 2U_+(\omega)$ .

Spektrum signálu v místě  $z$  je pak zřejmě

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i\beta_m z} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) U_1(\omega - \omega_0) e^{i\beta_m(\omega)z}.$$

Konstanta šíření  $\beta_m$  rovněž závisí na frekvenci  $\omega$ !

Časový průběh optického signálu v místě  $z$  je tedy možno napsat také ve tvaru

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\omega - \omega_0) e^{i\beta_m(\omega)z} e^{-i\omega t} d\omega.$$

V úzkém spektrálním pásmu signálu, kde je funkce  $U_1$  nenulová, můžeme aproximovat spektrální závislost konstanty šíření Taylorovým rozvojem:

$$\begin{aligned} \beta_m(\omega) \approx & \beta_m(\omega_0) + \left. \frac{d\beta_m}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta_m(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \\ & + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3\beta_m(\omega)}{d\omega^3} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

## Disperze optických vláken - 4

Ponechme v rozvoji nejprve pouze první člen:  $\beta_m(\omega) \approx \beta_m(\omega_0) + \beta'_m(\omega_0)(\omega - \omega_0)$   
a dosadíme do výrazu pro pole v místě  $z$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\omega - \omega_0) e^{i[\beta_m(\omega_0) + \beta'_m(\omega - \omega_0)]z} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\beta_m(\omega_0)z - i\omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\omega - \omega_0) e^{i\beta'_m(\omega - \omega_0)z} e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega \\ &= \sum_m c_m \mathbf{e}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\beta_m(\omega_0)z - i\omega_0 t)} u_1(t - \beta'_m z), \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}_\perp, z, t) &\approx \sum_m c_m \mathbf{h}_m(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\beta_m(\omega_0)z - i\omega_0 t)} u_1(t - \beta'_m z), \\ P(z, t) &= \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} \times \mathcal{H}^* \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_m |c_m|^2 |u_1(t - \beta'_m z)|^2 = \sum_m P_m(t - \beta'_m z) \end{aligned}$$

Celkový přenesený výkon je tedy dán součtem výkonů přenesených jednotlivými vidy, z nichž každý má původní časovou závislost  $|u_1(t)|^2$  zpožděnou v čase o **grupové (skupinové) zpoždění**

$$\tau_{g,m} = \beta'_m(\omega_0)z = z \left( \frac{d\beta_m}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} = z/v_{g,m}.$$

$$\text{Poměr } v_{g,m} = \frac{z}{\tau_{g,m}} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = \left( \frac{d\beta_m}{d\omega} \right)^{-1}$$

udává **grupovou rychlost šíření**  $m$ -tého vedeného vidu.

## Disperze mnohovidových optických vláken

Pro určení disperze mnohovidových vláken potřebujeme znát závislost konstant šíření vidů na vidovém indexu a na frekvenci optického záření.

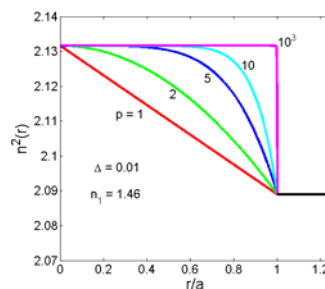
Tuto závislost najdeme *přibližně* v aproximaci paprskové optiky, využitím *fázového prostoru*.

Předpokládejme, že profil indexu lomu je dán obecnou parabolou  $p$ -tého stupně,

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{a} \right)^p \right], & r \leq a, \quad 0 < p < \infty, \\ n_2^2, & r > a. \end{cases}$$

$$\text{Zřejmě } n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta), \quad \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

pro  $n_1 - n_2 \ll n_1, n_2$



Přímý výpočet závislosti  $\beta_m(\omega)$  resp.  $N_m(\omega) = \beta_m(\omega)/k_0$  je obtížný, určíme ji proto nepřímo.

Nejprve určíme počet vidů  $q(N)$ , jejichž efektivní indexy lomu jsou větší než zvolená hodnota  $N$ .

## Disperze mnohovidových optických vláken

Složky vlnových vektorů všech vidů s ef. indexem větším než  $N$  zřejmě splňují podmínku

$$\rho^2 + \sigma^2 \leq n^2(r) - N^2; \quad \text{pro větší } N \text{ se totiž poloměr kruhu } (\rho, \sigma) \text{ zmenšuje.}$$

Objem fázového prostoru všech vidů s ef. indexem lomu větším než  $N$  je tak zřejmě

$$\Phi(N) = \pi k_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^R [n^2(r) - N^2] r dr d\varphi = 2\pi^2 k_0^2 \int_0^R [n^2(r) - N^2] r dr, \quad \text{kde } n(R) = N$$

(paprsky se šíří pouze v oblasti  $r \leq R$ ).

Poněvadž na 1 vid připadá fázový objem  $4\pi^2$ , počet vidů s ef. indexem větším než  $N$  je

$$q(N) = \frac{\Phi(N)}{4\pi^2} = \frac{k_0^2}{2} \int_0^R [n^2(r) - N^2] r dr.$$

$$\text{Rovnice pro } R \text{ je zřejmě } n^2(R) = n_1^2 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{R}{a} \right)^p \right] = N^2;$$

$$\text{jejím řešením je } \frac{R}{a} = \xi_a = \left( \frac{n_1^2 - N^2}{2n_1^2\Delta} \right)^{1/p}.$$

## Disperze mnohovidových optických vláken

$$\text{Pak } q(N) = \frac{k_0^2}{2} a^2 \int_0^{\xi_R} \left\{ n_1^2 \left[ 1 - 2\Delta \xi^p \right] - N^2 \right\} \xi d\xi, \quad \text{kde } \xi = \frac{r}{a}.$$

Integrál řešíme substitucí  $2\xi d\xi = dt$ ,  $\xi^2 = t$ . Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} q(N) &= \frac{k_0^2 a^2}{4} \int_0^{\xi_R^2} \left( n_1^2 - N^2 - 2n_1^2 \Delta t^{p/2} \right) dt = \\ &= \frac{k_0^2 a^2}{4} \left[ (n_1^2 - N^2) \xi_R^2 - 2n_1^2 \Delta \frac{1}{\frac{p}{2} + 1} \left( \xi_R^2 \right)^{\frac{p}{2} + 1} \right] = \\ &= \frac{k_0^2 a^2}{4} \left[ (n_1^2 - N^2) \left( \frac{n_1^2 - N^2}{2n_1^2 \Delta} \right)^{\frac{2}{p}} - 2n_1^2 \Delta \frac{2}{p+2} \left( \frac{n_1^2 - N^2}{2n_1^2 \Delta} \right)^{\frac{p+2}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Po dalších formálních úpravách dostaneme

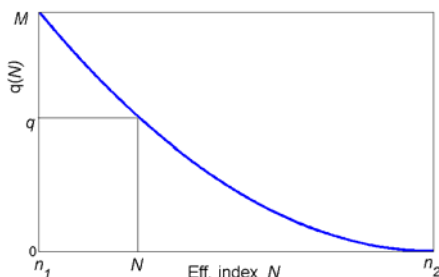
$$q(N) = \frac{k_0^2 a^2}{4} n_1^2 \Delta \frac{p}{p+2} \left( \frac{n_1^2 - N^2}{2n_1^2 \Delta} \right)^{\frac{p+2}{p}}$$

## Disperze mnohovidových optických vláken

Nyní do výrazu zavedeme celkový počet vidů  $M$  přenášený vláknem; zřejmě platí  $M = q(n_2)$ .

$$M = \frac{k_0^2 a^2}{2} n_1^2 \Delta \frac{p}{p+2} \frac{\left( \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2 \Delta} \right)^{\frac{p+2}{p}}}{1} = \frac{k_0^2 a^2}{2} n_1^2 \frac{\Delta}{\frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}} \frac{p}{p+2} = \frac{k_0^2 a^2}{4} (NA)^2 \frac{p}{p+2} = \frac{V^2}{4} \frac{p}{p+2}.$$

Platí  $\frac{q(N)}{M} = \left( \frac{n_1^2 - N^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{\frac{p+2}{p}}$ , a tedy  $q(N) = M \left( \frac{n_1^2 - N^2}{n_1^2 - n_2^2} \right)^{\frac{2+p}{p}} = M \left( \frac{1 - N^2/n_1^2}{2\Delta} \right)^{\frac{2+p}{p}}$ .



To ale znamená, že ke každému (celému)  $q$  můžeme najít efektivní index lomu  $N_q$  jako funkci inverzní k funkci  $q(N)$ :

$$N_q = f^{-1}(q), \quad \text{kde } q(N) = f(N).$$

## Disperze mnohovidových optických vláken

Platí tedy  $N_q^2 = n_1^2 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{q}{M} \right)^{\frac{p+2}{p}} \right]$ .

My ale potřebujeme  $\beta_q = k_0 N_q$ .

Poněvadž  $\Delta$  je malé číslo, použijeme pro výpočet odmocniny Taylorovu větu:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \quad \text{Odtud dostaneme}$$

$$\beta_q = k_0 n_1 \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{q}{M} \right)^{\frac{p}{p+2}} \right]^{\frac{1}{2}} \approx k_0 n_1 \left[ 1 - \Delta \left( \frac{q}{M} \right)^{\frac{p}{p+2}} - \frac{1}{2} \Delta^2 \left( \frac{q}{M} \right)^{\frac{2p}{p+2}} \right] \dots$$

**Grupová rychlost šíření:**  $\frac{1}{v_{g,q}} = \frac{d\beta_q}{d\omega}$

Musíme vzít v úvahu závislost  $k_0$  i  $n_1$  na frekvenci, naopak můžeme zanedbat disperzi  $\Delta$ .

Položme  $\frac{1}{v_{g1}} \approx \frac{d}{d\omega}(k_0 n_1) = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega}(\omega n_1) = \frac{n_1}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn_1}{d\omega} = \frac{n_{1g}}{c}$ ,

$$n_{1g} = n_1 + \omega \frac{dn_1}{d\omega} \dots \quad \text{grupový index lomu}$$

## Disperze mnohovidových optických vláken

Zachováme-li jen *lineární člen* v disperzi, dostaneme

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left( k_0 n_1 \right) \left[ 1 - \Delta \left( q/M \right)^{\frac{p}{p+2}} \right] - k_0 n_1 \Delta \frac{p}{p+2} \left( q/M \right)^{\frac{p}{p+2}-1} \frac{q}{M} \left( -\frac{1}{M} \frac{dM}{d\omega} \right).$$

Po provedení naznačených derivací a formálních úpravách dostaneme

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n_{1g}}{c} \left[ 1 + \frac{p-2}{p+1} \Delta \left( q/M \right)^{\frac{p}{p+2}} \right].$$

Pro vlákno se skokovým profilem (SI) je  $p \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{v_g} \approx \frac{1}{v_{g1}} \left[ 1 + \Delta \frac{q}{M} \right].$$

Pro parabolické vlákno ( $p = 2$ ) je disperze v 1. řádu Taylorova rozvoje *nulová*; pro výpočet disperze musíme proto vzít v úvahu i kvadratický člen.

Po delších formálních úpravách dostaneme

$$\frac{1}{v_g} \approx \frac{1}{v_{g1}} \left[ 1 + \frac{\Delta^2}{2} \frac{q}{M} \right]$$

Vlákno s parabolickým profilem má mnohem menší rozptyl grupových rychlostí vidů než vlákno se skokovým profilem.

## Disperze optických vláken - 5

Elektrický signál na výstupu z *kvadratického detektoru* (fotodioda, fotonásobič ap.) je úměrný okamžitému výkonu časového signálu.

Vezmeme-li v úvahu ortogonální vlastnosti polí vidů, dostaneme pro výstupní signál z detektoru (proud, resp. napětí)

$$s(t) \sim \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z, t) \times \mathcal{H}^*(\mathbf{r}_\perp, z, t) \cdot d\mathbf{S} \right\} \approx \sum_m |c_m|^2 |u_1(t - \beta'_m z)|^2.$$

Označíme-li  $\tau_{g,\min} = \frac{z}{v_{g,\max}}$ ,  $\tau_{g,\max} = \frac{z}{v_{g,\min}}$

nejmenší a největší grupové (skupinové) zpoždění, k němuž dojde při šíření vláknem délky  $L$ , pak při dostatečně velké délce  $L$  zřejmě dojde k *rozšíření signálu* na pološifku

$$\sigma_\tau \approx \tau_{g,\max} - \tau_{g,\min} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_{g,\min}} - \frac{1}{v_{g,\max}} \right) L.$$

Toto rozšíření způsobuje tzv. **mezividová (vidová, modální) disperze**.

Fyzikální podstata mezividové disperze tedy spočívá v tom, že **jednotlivé vidy přenášejí signál různou (grupovou) rychlostí**.

## Disperze optických vláken - 6

Rozšíření impulzu jako rozdíl mezi zpožděním nejpomalejšího a nejrychlejšího vidu:

$$\sigma_\tau \approx \frac{1}{2}L \left( \frac{1}{v_{g,\min}} - \frac{1}{v_{g,\max}} \right); \quad \frac{1}{v_{gm}} \approx \frac{1}{v_{g0}} \left( 1 + \Delta \frac{m}{M} \right) \quad \text{pro SI vlákna,}$$

$$\frac{1}{v_{gm}} \approx \frac{1}{v_{g0}} \left( 1 + \frac{1}{2} \Delta^2 \frac{m}{M} \right) \quad \text{pro parabolická (GI) vlákna.}$$

Přenosová šířka pásma:

$$B \approx \frac{1}{\sigma_\tau} = \frac{2v_{g0}}{L\Delta} \approx \frac{2c}{N_0L\Delta} \quad \text{pro SI vlákna,} \quad \Delta \approx \frac{n_c - n_{cl}}{n_{cl}},$$

$$B \approx \frac{1}{\sigma_\tau} = \frac{4v_{g0}}{L\Delta^2} \approx \frac{4c}{N_0L\Delta^2} \quad \text{pro GI vlákna,} \quad N_0 \approx n(0)$$

Součin délky a šířky pásma:

$$B \cdot L \approx \frac{2c}{N_0\Delta} \approx 40 \text{ MHz} \cdot \text{km} \quad \text{pro SI vlákna,} \quad \Delta \approx \frac{n_c - n_{cl}}{n_{cl}} \approx 0.01,$$

$$B \cdot L \approx \frac{4c}{N_0\Delta^2} \approx 8 \text{ GHz} \cdot \text{km} \quad \text{pro GI vlákna.}$$

## Disperze jednovíkových vláken

(Mezi)vidová disperze je odstraněna, uplatní se **disperze 2. řádu**.

Uvažujme pro jednoduchost gaussovský signál,  $u(t, 0) = U_0 \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right)$

Šířka impulzu na začátku:  $\Delta t(z=0) \approx 2\tau$

Spektrální šířka na začátku:

$$U(\omega) = U_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} e^{i\omega t} dt = \sqrt{2\pi} U_0 e^{-\frac{\tau^2 \omega^2}{2}}$$

Spektrum v  $z \neq 0$ :  $F(\omega, z) \approx \sqrt{2\pi} U_0 e^{-\frac{\tau^2}{2}(\omega - \omega_0)^2} e^{i\beta(\omega)z}$

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \frac{1}{v_g}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} D_\omega (\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad D_\omega = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Zpětná FT dává

$$u(z, t) \doteq U_0 \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - iD_\omega z}} e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2(\tau^2 - iD_\omega z)}} = U_0 e^{2 \frac{i \arctan \frac{D_\omega z}{\tau^2}}{\tau^2}} e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}} e^{-\frac{iD_\omega z(t-z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{D_\omega z}{\tau^2}\right)^2}$$

To je také gaussovský signál, 
$$u(z,t) = \frac{U_0 e^{\frac{i}{2} \arctan \frac{D_\omega z}{\tau^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{D_\omega z}{\tau^2}\right)^2}} e^{-\frac{(t-z/v_g)^2}{2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}} e^{-i D_\omega z (t-z/v_g) / 2[\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2]}$$

rozšířený z  $\Delta t(0) = 2\tau$  na  $\Delta t(z) = 2\sqrt{\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2} \approx \frac{4|D_\omega|z}{\Delta t(0)} \doteq |D_\omega|z\Delta\omega$ .

Z praktických důvodů zavedeme označení,

$$\Delta t_z \approx |D_\omega|z\Delta\omega = |D_\lambda|z\Delta\lambda, \quad D_\lambda = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} D_\omega, \quad \left(\frac{d}{d\omega} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d}{d\lambda}\right)$$

Odvození dává

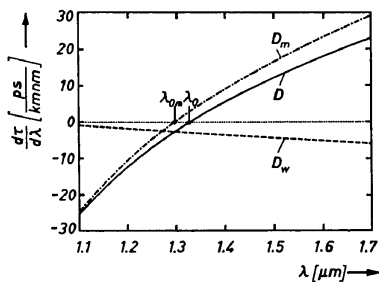
$$D_\lambda = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 N}{d\lambda^2} = \frac{1}{c} \frac{dN_g}{d\lambda} \quad [\text{ps}/(\text{nm} \cdot \text{km})] \quad \left(N_g = N - \lambda \frac{dN}{d\lambda}\right)$$

“Okamžitá frekvence”:

$$\omega(t) \approx \omega_0 - \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \frac{D_\omega z}{\tau^2 + (D_\omega z/\tau)^2} (t - z/v_g)$$

Po šíření na určitou vzdálenost vykazuje impuls **lineární frekvenční modulaci**, jejíž znaménko závisí na znaménku disperzního koeficientu.

### Disperzní koeficienty jednovlákenných vláken

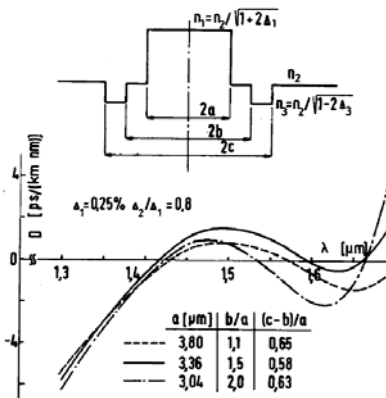
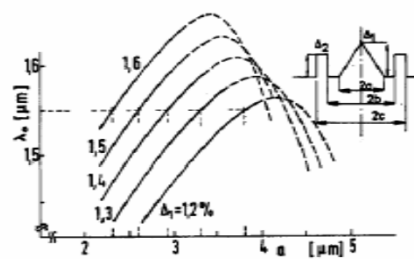


Disperzní koeficient standardního vlákna

$$D_\lambda \approx D_{material} + D_{waveguide}$$

Vlákna s plochou disperzní křivkou (DFF)

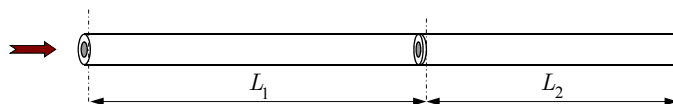
Vlákna s „posunutou disperzí“ (DSF)





## „Řízení disperze“ v optické přenosové trase

Malé rozšíření impulsu, tj. vysoká přenosová rychlost, požaduje co nejmenší  $|D_\lambda|$



$$\Delta t_{tot} \approx |D_{\lambda,1}L_1 + D_{\lambda,2}L_2 + \dots| \Delta\lambda;$$

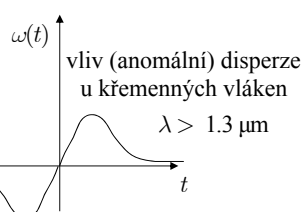
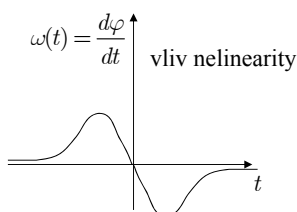
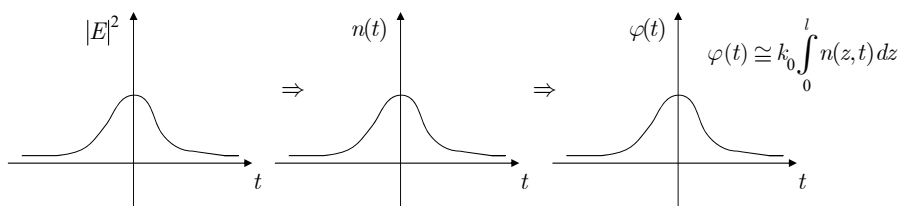
Celkové rozšíření impulsu na konci trasy je dáno absolutní hodnotou *algebraického součtu* příspěvků různých úseků. Kombinací úseků vláken s různými znaménky disperzních koeficientů je možno **disperzi vykompenzovat**:

$$D_{\lambda,1}L_1 + D_{\lambda,2}L_2 + \dots = 0 \rightarrow \Delta t_{tot} \approx 0$$

To je princip velmi výhodný pro systémy s vlnovým multiplexováním, v nichž se vláknem přenáší více kanálů s různými nosnými vlnovými délkami současně.

## Kompenzace disperze v optickém vlákně automodulací fáze – princip solitonového šíření

Kubická nelinearita:  $n(|E|^2) \cong n + n_2|E|^2$ ,  $n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{2n} \approx 1.2 \times 10^{-22} \text{ m}^2 / \text{V}^2$  ( $\text{SiO}_2$ )



Kubická nelinearita kompenzuje vliv disperze – nedisperzní **solitonové šíření** optického impulsu podél vlákna

## Základy skalární teorie solitonu v optickém vlákně

$$\Delta \mathcal{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial t^2}, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_L + \mathcal{P}_{NL}$$

↗
↖

disperzní závislost!
nelineární polarizace

$$\mathcal{Q}_L(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty [1 + \chi^{(1)}(\tau')] \mathcal{E}(\mathbf{r}, t - \tau') d\tau'$$

$$\mathcal{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \chi^{(3)}(\tau', \tau'', \tau''') \mathcal{E}(\mathbf{r}, t - \tau') \mathcal{E}(\mathbf{r}, t - \tau'') \mathcal{E}(\mathbf{r}, t - \tau''') d\tau' d\tau'' d\tau'''$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[ u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + u^*(z, t) e^{-i(\beta_0 z - \omega_0 t)} \right] e(x, y)$$

↖ rozložení pole vidu

Nelineární polarizaci můžeme v případě okamžité lokální odezvy zapsat ve tvaru

$$\mathcal{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \chi^{(3)} |u(z, t)|^2 \left[ u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + u^*(z, t) e^{-i(\beta_0 z - \omega_0 t)} \right] e^3(x, y).$$

U lineárního členu musíme vzít v úvahu disperzi.

Spektrum signálu je

$$U(z, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z, t) e^{i\Omega t} dt \quad \text{„pomalu“ proměnná obálka} \Rightarrow \text{úzké spektrum}$$

Spektrum optického záření je pak

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega t)} e^{i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} u^*(z, t) e^{-i(\beta_0 z - \omega t)} e^{i\omega t} dt \right] e(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \left[ U(\omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} + U^*(\omega - \omega_0) e^{-i\beta_0 z} \right] e(x, y). \end{aligned}$$

Pro lineární člen indukce platí

$$D_L(\mathbf{r}, \omega) \approx \varepsilon_0 n^2(\omega) E(z, \omega) e(x, y).$$

Z Fourierovy transformace plyne

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{Q}_L(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\omega^2 D_L(\mathbf{r}, \omega) = -\varepsilon_0 n^2(\omega) E(z, \omega) e(x, y).$$

Vlnová rovnice pro  $E(z, \omega)$  pak dává po úpravách

$$\begin{aligned} \Delta E(\mathbf{r}, \omega) &\approx \frac{1}{2} \left[ U(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} + U(z, \omega + \omega_0) e^{-i\beta_0 z} \right] \Delta_\perp e(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \left( 2i\beta_0 \frac{\partial U}{\partial z} - \beta_0^2 U \right) e^{i\beta_0 z} + \left( -2i\beta_0 \frac{\partial U}{\partial z} - \beta_0^2 U \right) e^{-i\beta_0 z} \right] e(x, y) \\ &\approx -\mu_0 \varepsilon_0 n^2(\omega) \omega^2 \frac{1}{2} \left[ U(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} + U^*(z, \omega - \omega_0) e^{-i\beta_0 z} \right] e(x, y) - \mu_0 \omega^2 \mathcal{P}_{NL} \end{aligned}$$

Pro rozložení pole vidu  $e(x, y)$  platí v přiblížení slabého vedení rovnice

$$\Delta_{\perp} e(x, y) - k_0^2 n^2(x, y) e(x, y) = \beta^2 e(x, y).$$

Násobme ji  $e(x, y)$  a integrujme po průřezu vlákna s využitím normování

$$\iint_S e^2(x, y) dx dy = 1. \quad \text{Dostaneme}$$

$$\frac{1}{2} \left[ (\beta^2 - \beta_0^2) U e^{i\beta_0 z} + 2i\beta_0 \frac{\partial U}{\partial z} e^{i\beta_0 z} + \dots \right] = -\mu_0 \omega^2 \iint_S P_{NL}(z, \omega) e(x, y) dS.$$

Nyní zavedeme aproximaci

$$\beta(\omega) \approx \beta_0 + \beta'(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta''(\omega - \omega_0)^2 = \beta_0 + \frac{1}{v_g}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} D_{\omega}(\omega - \omega_0)^2$$

Z aproximace plyne

$$\beta^2 - \beta_0^2 \approx \beta_0 \beta''(\omega - \omega_0)^2 + 2\beta_0 \beta'(\omega - \omega_0), \quad \text{předchozí rovnice pak získá tvar}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \beta_0 \beta''(\omega - \omega_0)^2 + 2\beta_0 \beta'(\omega - \omega_0) \right] U e^{i\beta_0 z} + 2i\beta_0 \frac{\partial U}{\partial z} e^{i\beta_0 z} + \dots \\ & = -\mu_0 \omega^2 \iint_S P_{NL}(z, \omega) e(x, y) dS. \end{aligned}$$

Poněvadž  $u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(z, \Omega) e^{-i\Omega t} dt,$

$$(\omega - \omega_0) U(z, \omega - \omega_0) \leftrightarrow i \frac{\partial u(z, t)}{\partial t},$$

$$(\omega - \omega_0)^2 U(z, \omega - \omega_0) \leftrightarrow -\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(z, t).$$

Aplikujme zpětnou FT na vlnovou rovnici s uvážením těchto vazeb. Získáme

$$\frac{1}{2} \left[ \beta_0 \beta'' \left( -\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} \right) + 2i\beta_0 \beta' \frac{\partial u}{\partial t} + 2i\beta_0 \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \mu_0 \omega^2 \iint_S \mathcal{P}_{NL}^+ e(x, y) dS \quad \text{neboli}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(z, t) + \frac{i\beta''}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = i \frac{\mu_0 \omega^2}{\beta_0} \iint_S \mathcal{P}_{NL}^+ e(x, y) dS,$$

kde horní index + značí kladné frekvence ( $e^{i\beta_0 z}$ ).

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{NL}^+ &= \frac{3}{2} \varepsilon_0 \chi^{(3)} |u(z, t)|^2 e^2(x, y) u(z, t) e(x, y) \\ &= \varepsilon_0 n n_2 |u(z, t)|^2 u(z, t) e^3(x, y) \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravě

$$n_2 = \frac{3}{2n} \chi^{(3)}, \quad \gamma = k_0 n_2 \alpha, \quad \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^4(x, y) dx dy \approx 0.5,$$

získáme výslednou rovnici

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(z, t) + \frac{i}{2} D_\omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = i\gamma |u(z, t)|^2 u(z, t)$$

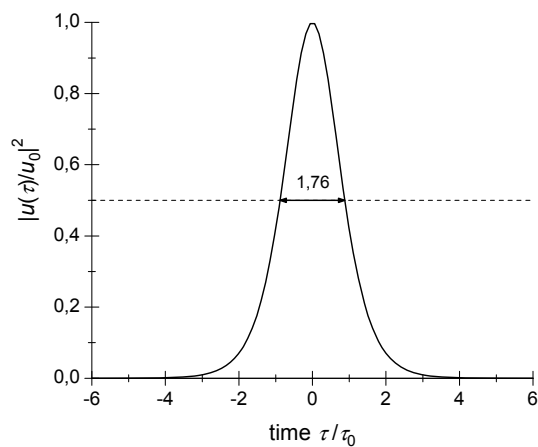
pro *obálku* optického impulsu šířícího se podél vlákna.

Pokud  $D_\omega < 0$  a  $\gamma > 0$ , existuje **solitonové řešení**.

### Šíření solitonu v optickém vlákně

$$u(z, t) = u_0 \operatorname{sech} \left( \frac{t - z/v_g}{\tau_0} \right) e^{iz/4z_0}, \quad u_0 = \frac{\sqrt{|D_\omega|/\gamma}}{\tau_0}, \quad z_0 = \frac{1}{2} \frac{\tau_0^2}{|D_\omega|},$$

$\operatorname{sech} \tau = \frac{1}{\cosh \tau}$ . „Pološířka“ solitonu:  $\text{FWHM} = 1.76 \tau_0$



### Normované parametry solitonu:

$$\zeta = \frac{z}{2z_0} = \frac{|D_\omega|}{\tau_0^2} z, \quad z_0 = \frac{\tau_0^2}{2|D_\omega|}, \quad \tau = \frac{t - z/v_g}{\tau_0}$$
$$u_0 = \frac{\sqrt{|D_\omega|/\gamma}}{\tau_0} \quad \text{normovaná amplituda}$$

Rovnice získá tvar

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = i|\psi|^2 \psi, \quad \text{resp.}$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + |\psi|^2 \psi = 0 \quad \dots \text{ nelineární Schrodingerova rovnice.}$$

Platí 
$$\tau_0 \cdot u_0 = \sqrt{|D_\omega|/\gamma} = \sqrt{\frac{|D_\omega|}{k_0 n_2 \alpha}}$$

### Solitony vyšších řádů

$$\psi(\tau, \zeta) = \sum_{l=1}^N \eta_l \operatorname{sech}(\eta_l \tau) \exp\left(\frac{i}{2} \eta_l^2 \zeta\right), \quad \eta_l = 2(N-l) + 1.$$

Pro  $\zeta = 0$  je  $\psi = N \operatorname{sech} \tau$  ...  $N$ - násobná amplituda

Perioda  $N$ - solitonového šíření je 
$$L = \pi z_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_0^2}{|D_\omega|}.$$

Energie  $N$ - solitonu v pulsu je  $N^2$ - násobkem energie „jednosolitonu“.