FS ČVUT, ve spolupráci s JČMF, 13. dubna 2016

Průmyslové aplikace matematiky

Ivan Straškraba, Matematický ústav AV ČR, Praha

Motivace: Prezentace matematického modelu odvozeného ze základních fyzikálních zákonů a jejich rigorózní analýza. Účelem je vyvinout teorii existence, jednoznačnosti a korektnosti matematického řešení, které může dát teoretickou podporu pro další vyšetřování problému. To vede k vyšetřování soustavy *parciálních diferenciálních rovnic* doplněných *počátečními a okrajovými podmínkami* formulovanými v souladu s fyzikální realitou konfigurace systému.

Příklady: Čerpací systémy různých druhů tekutin v průmyslu a elektrárnách (jak klasických, tak jaderných), doprava pevných částic jako směsi s vodou, přeprava ropy a plynu potrubími na velké vzdálenosti, atd.

Pro konkrétnější představu zvolme systém, který byl odvozen a řešen ve spolupráci s bývalým Státním ústavem pro stavbu strojů (SVÚSS) v Běchovicích.

1 Formulace problému a jeho analýza.

Rovnice pro dvoufázové proudění reálné tekutiny v trubici délky l je možno psáti ve tvaru (see for instance [1]):

$$w_t + \rho_0^{-1} p_x + f(w) = 0, \tag{1.1}$$
$$p_t + \rho_0 c^2(p,\gamma) w_x = 0, \tag{1.2}$$
$$\gamma_t + w\gamma_x = g(\gamma, p), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T), \ (T>0), \tag{1.3}$$
$$w(x,0) = w_0(x), \tag{1.4}$$
$$p(x,0) = p_0(x), \tag{1.5}$$
$$\gamma(x,0) = \gamma_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{1.6}$$
$$C\big(p(0,t),\gamma(0,t)\big)p_t(0,t) + Q_V\big(p(0,t),H(t)\big) - S_0 w(0,t) + \varphi \dot{H}(t) = 0, \tag{1.7}$$
$$w(l,t) = h(t), \tag{1.8}$$
$$\ddot{H}(t) + \Phi\big(t, H(t), \dot{H}(t), p(0,t), p_t(0,t)\big) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.9}$$
$$H(0) = H_0, \ \dot{H}(0) = H_1. \tag{1.10}$$

Veličiny vyskytující se v rovnicích (1.1)-(1.10) mají následující význam:

$w = w(x,t)$	rychlost tekutiny v bodě x a čase t,
$p = p(x,t)$	tlak,
$\gamma = \gamma(x,t)$	hmota volného plynu na jednotku objemu kapaliny,
ρ_0	hustota kapaliny,
$c = c(p,\gamma)$	rychlost zvuku v kapalině resp. v kapalině obsahující plyn, (daná funkce p a γ),
$f = f(w)$	koeficient tření tekutiny na stěnách potrubí
$g(\gamma,p)$	$= \begin{cases} K_u\big((\bar{\gamma}-\gamma)/K_H - p\big), & \text{je-li} \quad (\bar{\gamma}-\gamma)/K_H \geq p, \\ K_r\big((\bar{\gamma}-\gamma)/K_H - p\big) & \text{je-li} \quad (\bar{\gamma}-\gamma)/K_H < p, \end{cases}$
$K_u,\ K_r$	konstanty characterizující proporcionalitu rychlosti vylučování, resp. pohlcování na tlakovém gradientu,
K_H	koefficient absorpce,
$\bar{\gamma}$	celková hmota plynu v jednotce objemu,
$w_0,\ p_0,\ \gamma_0$	počáteční rozložení rychlosti, resp. tlaku rozpuštěného plynu v jednotce objemu a koncentrace,
$C = C(p,\gamma)$	hydraulická kapacita (daná funkce p a γ),
H	zdvih ventilu,
$Q_V = Q_V(p,H)$	průtok ventilem (daná funkce $p,\ H$),
S_0	plocha průřezu potrubím,
φ	aktivní plocha ventilu,
h	průtok vytvořený hydrogenerátorem na konci potrubí,
$H_0,\ H_1$	počáteční pozice, resp. rychlost ventilu.

V dalším předpokládejme pro jednoduchost že

$$H(t) \equiv H_0 = \text{const.} \tag{1.11}$$

Kdybychom chtěli uvažovat rovnici (1.9), pak bychom museli předpokládat něco jako

$$\Phi(t, H_0, 0, y, z) \equiv 0. \tag{1.12}$$

Nicméně, my budeme předpokládat ostře (1.11), bez další diskuse.

Linearizace v okolí stacionárního stavu.

Standardní linearizační procedura nás vede k následujícím úvahám. Za prvé, uvažujeme linearizaci v okolí stacionárního řešení. Existence a jeho vyjádření v kvadraturách je analyzováno v [6], což krátce připomeneme v dalším.

Předně uveďme nutné definice.

Definice 1.1 *Řešením problému* (1.1)-(1.8) *(s* $H \equiv H_0, H_1 \equiv 0$*) nazýváme trojici* (w,p,γ) *takovou, že* $w,p,\gamma \in C^1((0,l)\times(0,T))$ *a* (1.1)-(1.8) *jsou splněny bodově.*

Definice 1.2 *Stacionární řešení (s $H \equiv H_0$) jsou zvány funkce w, p, γ nezávislé na t, které splňují rovnice* (1.1), (1.2), (1.3) *a* (1.7) *s* $H \equiv H_0 =$ konst.

Označme $(w_s, p_s, \gamma_s)^{\mathrm{T}}$, ($T$ znamená transpozici), *stacionární řešení,* a $(\overline{w}, \overline{p}, \overline{\gamma})^{\mathrm{T}} = (w - w_s, p - p_s, \gamma - \gamma_s)^{\mathrm{T}}$, kde $(w, p, \gamma)^{\mathrm{T}}$ je lineární perturbace závislá na x a t. Potom, po troše výpočtů obdržíme následující soustavu.

Definice 1.3 *Linearizovaným problémem k soustavě* (1.1)-(1.3) *nazýváme systém*

$$\begin{aligned} \overline{w}_t + \rho_0^{-1}\overline{p}_x + f'(w_s)\overline{w} = 0, \\ \overline{p}_t + \rho_0 w_{sx}\frac{\partial c^2}{\partial p}(p_s, \gamma_s)\overline{p} + \rho_0 w_{sx}\frac{\partial c^2}{\partial \gamma}(p_s, \gamma_s)\overline{\gamma} + \rho_0 c^2(p_s, \gamma_s)\overline{w}_x = 0, \\ \overline{\gamma}_t + \gamma_{sx}\overline{w} + w_s\overline{\gamma}_x = \frac{\partial g}{\partial \gamma}(\gamma_s, p_s)\overline{\gamma} + \frac{\partial g}{\partial p}(\gamma_s, p_s)\overline{p}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Definice 1.4 *Řešením linearizovaného problému se nazývá trojice* $(\overline{w}, \overline{p}, \overline{\gamma})$ *splňující rovnice* (1.13).

Učiňme následující předpoklady:

A1) $w_0, p_0, \gamma_0 \in C([0, l])$,
A2) $h \in C([0, T])$,
A3) nechť je splněna podmínka kompatibility $w_0(l) = h(0)$,
A4) H_0 je daná nezáporná konstanta.

Než formulujeme větu pro lineární případ, uveďme pro zjednodušení věty některá označení. Označme L matici definovanou vztahem

$$L(x) = (\ell_{ij}(x))_{i,j=1}^3, \quad \text{s } \ell_{ij}(x) = \ell_i^j(x),\ x \in [0, l], \tag{1.14}$$

kde

$$\begin{aligned} \ell_1(x) = (c(p_s(x), \gamma_s(x)), \rho_0^{-1}, 0), \quad \text{je} - \text{li } w_s(x) \neq c(p_s(x), \gamma_s(x)), \\ \ell_2(x) = (-c(p_s(x), \gamma_s(x)), \rho_0^{-1}, 0), \quad \text{je} - \text{li } w_s(x) \neq -c(p_s(x), \gamma_s(x)), \\ \ell_3(x) = (0, 0, 1), \quad \text{je} - \text{li } w_s(x) \neq \pm c(p_s(x), \gamma_s(x)). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Věta 1.1 (Lineární případ) *Nechť jsou splněny předpoklady A1)-A4), f a f' jsou spojité v intervalu $(-\infty, \infty)$, $\inf_{w \in (-\infty,\infty)} f(w) > -\infty$, a (w_s, p_s, γ_s) je stacionární řešení systému* (1.1) - (1.3).

Potom následující soustava obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i^{1,2}}{d\tau}(x, t; \tau) = \pm\frac{c_1 p_s(\xi_i^{1,2}(x, t; \tau))^2}{c_2 p_s(\xi_i^{1,2}(x, t; \tau))^2 + \gamma_s(\xi_i^{1,2}(x, t; \tau)) + c_3}, \\ \frac{d\xi_i^3}{d\tau}(x, t; \tau) = w_s(\xi_i(x, t; \tau)), \\ \xi_i(x, t; t) = x,\ i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{1.16}$$

má řešení

$$\xi^i(x,t;\tau) = (\xi_1^i(x,t;\tau), \xi_2^i(x,t;\tau), \xi_3^i(x,t;\tau))^{\mathrm{T}}, \quad i = 1,2,3.$$

Kromě toho, nechť

$$\ell_{1,2}(x) = (\pm c(p_s(x), \gamma_s(x)), \rho_0^{-1}, 0), \text{ je}-\text{li } w_s(x) \neq \pm c_s(p(x), \gamma(x))^{\mathrm{T}}, \text{ resp.},$$

$$\ell_3(x) = (0,0,1)^{\mathrm{T}} \text{ je}-\text{li } w_s(x) \neq \pm c(p_s(x), \gamma_s(x)).$$

Potom existuje jediné řešení $z(x,t;\tau)$ systému

$$\begin{aligned}\frac{dz_i(x,t;\tau)}{d\tau} &= F_i(\xi_i(x,t;\tau)) - \Sigma_{j=1}^3 c_{ij}(\xi_i(x,t;\tau)) \cdot z_j(\xi_i(x,t;\tau)),\\ z_i(x,t;0) &= (L^{-1}u_0)(\xi_i(x,t;0),0)\\ \frac{d\xi_i(x,t;\tau)}{d\tau} &= \lambda_i(\xi_i(x,t;\tau)),\\ \xi_i(x,t;t) &= x,\end{aligned} \tag{1.17}$$

a funkce $u(x,t) = (\overline{w}(x,t), \overline{p}(x,t), \overline{\gamma}(x,t))^{\mathrm{T}} = L(x)^{-1}z(x,t;t)$, je řešením systému (1.1)-(1.3) *s $H \equiv H_0$.*

Obraťme se nyní k původnímu nelineárnímu problému.

2 Heuristický přístup

V této části naznačíme proceduru postupného rozřešení soustavy (1.1)–(1.10). Cílem je převedení celého problému na jednu rovnici o pevném bodu na níž pak bude možno aplikovat známé věty o pevném bodu zobrazení.

Předpokládejme tedy, že máme tak hladké řešení (w,p,γ,H) rovnic (1.1)–(1.10), že následující operace mají smysl.

Derivujme rovnici (1.1) podle t a odečtěme od ní rovnici (1.2) zderivovanou podle t a násobenou ρ_0^{-1}. Dostaneme

$$w_{tt} + f(w)_t - (c^2(p,\gamma)w_x)_x = 0. \tag{2.18}$$

Nejdříve se, z fyzikálních důvodů, zmiňme o bilanci energie systému reprezentované tzv. *rovnicí energie.* Za tím účelem násobíme rovnici (2.18) funkcí w_t a integrujeme výsledek podle x přes interval $(0,l)$. Obdržíme identitu

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^l w_t^2\,dx + \int_0^l f'(w)w_t^2\,dx - \int_0^l \left(c^2(p,\gamma)w_x\right)_x w_t\,dx = 0.$$

Integrujeme-li poslední člen na levé straně per partes a výsledek vzhledem k t přes $(0,T)$, dostaneme

$$\frac{1}{2}\int_0^l w_t^2(x,T)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l w_t^2(x,0)\,dx + \int_0^T\int_0^l f'(w)w_t^2\,dxdt - \int_0^T \left[c^2(p,\gamma)w_x w_t\right]_{x=0}^l dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l c^2(p,\gamma)\frac{\partial}{\partial t}w_x^2\,dxdt = 0 \tag{2.19}$$

Integrujeme-li poslední člen nalevo v (2.19) per partes a dosadíme výsledek do (2.19) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^l w_t^2(x,T)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l w_t^2(x,0)\,dx + \int_0^T\int_0^l f'(w)w_t^2\,dxdt\\ - \int_0^T \left[c^2(p,\gamma)w_x w_t\right]_{x=0}^l dt + \frac{1}{2}\int_0^l \left[c^2(p,\gamma)w_x^2\right]_0^T dx\\ -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l \Big(\frac{\partial c^2}{\partial p}(p,\gamma)p_t + \frac{\partial c^2}{\partial \gamma}(p,\gamma)\gamma_t\Big)w_x^2\,dxdt = 0.\end{aligned} \tag{2.20}$$

V souladu s fyzikálním významem nazýváme (2.20) *rovnicí energie* odpovídající soustavě (1.1)–(1.10).

Jako další krok zkonstruujeme formálně zobrazení, které nám bude sloužit pro transkripci problému (1.1)–(1.10) na jeden *problém pevného bodu.*

Vezměme tedy dostatečně hladkou trojici (w,p,γ) a definujme zobrazení $F:(w,p,\gamma)\to(\overline{w},\overline{p},\overline{\gamma})$ následující (formální) procedurou.

Nejprve řešme počátečně okrajový problém

$$\begin{aligned}\overline{w}_{tt} + f(\overline{w})_t - (c^2(p,\gamma)\overline{w}_x)_x = 0, \quad x\in(0,l),\ t\in(0,T)\\ \overline{w}(x,0) = w_0(x),\ \overline{w}_t(x,0) = \overline{w}_1(x) \equiv -\rho_0^{-1}p_0'(x) - f(w_0(x)),\ x\in[0,l],\\ \overline{w}(0,t) = w(0,t), \quad \overline{w}(l,t) = h(t),\ t\in[0,T].\end{aligned} \tag{2.21}$$

K tomu lze použít Faedo-Galerkinovu metodu na základě stejnoměrných odhadů aproximací předpokládaného řešení. Předpokládajíce, že máme dostatečně hladké řešení $\overline{w}$ úlohy (2.21), řešíme problém

$$\begin{aligned}\overline{p}_t + \rho_0 c^2(\overline{p},\gamma)\overline{w}_x = 0, \quad x\in(0,l),\ t\in(0,T),\\ \overline{p}(x,0) = p(x,0),\ x\in[0,l]\end{aligned} \tag{2.22}$$

s γ a $\overline{w}_x$ známými jako obyčejnou diferenciální rovnici s parametrem x.

Po té nalezneme $\overline{\gamma}$ jako řešení úlohy

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}_t + \overline{w}\,\overline{\gamma}_x = g(\overline{\gamma}, \overline{p}) \quad x \in (0,l) \times (0,T) \\
\overline{\gamma}(x,0) = \gamma(x,0), \quad x \in [0,l], \\
\overline{\gamma}(0,t) = \gamma^0(t)| \quad \text{je} - \text{li } \overline{w}(0,t) > 0, \\
\overline{\gamma}(0,t) = \gamma(0,t) \quad \text{je} - \text{li } \overline{w}(0,t) \leq 0, \\
\overline{\gamma}(l,t) = \gamma^1(t) \quad \text{je} - \text{li } \overline{w}(l,t) < 0, \\
\overline{\gamma}(l,t) = \gamma(l,t) \quad \text{je} - \text{li } \overline{w}(l,t) \geq 0, \quad t \in [0,T).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Stále předpokládáme, že $H(t) \equiv H_0 = \text{const.}$

Nakonec, musíme vyhovět (modifikované) podmínce

$$\begin{aligned}
C(\overline{p}(0,t), \gamma^0(t))\overline{p}_t(0,t) + Q_V(\overline{p}(0,t), H_0) - S_0\overline{w}(0,t) = 0,\ t \in \{\overline{w}(0,\tau) \geq 0\} \\
C(\overline{p}(0,t), \overline{\gamma}(0,t))\overline{p}_t(0,t) + Q_V(\overline{p}(0,t), H_0) - S_0\overline{w}(0,t) = 0,\ t \in \{\overline{w}(0,\tau) < 0\}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

3 Jak učinit modifikovaný přístup rigorózní.

V této části naznačíme způsob, jakým lze precizovat heuristické úvahy nastíněné v předchozím odstavci aniž bychom příliš lpěli na detailech, které lze nalézt v [4].

Nejprve musíme nalézt vhodný definiční obor zobrazení F, a cílový prostor, který by intuitivně měl být prostorem regulárnějších funkcí, protože vzniká z řešení (parciálních) diferenciálních rovnic.

Začneme tedy předpokladem

$$\begin{aligned}
f \in C^1(R), \quad w, p, \gamma \in C([0,l] \times [0,T]), \\
\overline{w}_0 \in C^1([0,l]), \quad \overline{w}_1 \in C([0,l]), \quad h \in C^1([0,T]).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Poznamenejme, že zde používáme standardní označení $C^k(\Omega)$ resppektive $C^m(I; C^k(\Omega))$ pro prostory funkcí s hodnotami v R^n $(n \geq 1)$ a spojitě diferencovatelnými až do řádu k, resp. m, vybavenými supremálními normami přes Ω resp. I.

Pro pevně zvolená p, γ je problém (2.21) lineární počátečně okrajová úloha pro parciální diferenciální rovnici s nekonstantními koeficienty. K tomuto problému mohou být použity více méně standardní procedury. Naše zkušenost nás vede k očekávanému jednoznačnému řešení

$$\overline{w} \in C^2((0,T); C((0,l))) \cap C^1([0,T); C^1((0,l)) \cap C([0,T); C^2((0,l))). \tag{3.26}$$

Jakmile jsme nalezli $\overline{w}$, řešíme (2.22) jako obyčejnou diferenciální rovnici, a obdržíme

$$\begin{aligned}
\int_{p(x,0)}^{\overline{p}(x,t)} \frac{dq}{\rho_0 c^2(q,\gamma)} = \int_0^t \frac{\overline{p}(x,\tau)\, d\tau}{\rho_0 c^2(\overline{p}(x,\tau), \gamma(x,\tau))} \\
= -\int_0^t \overline{w}_x(x,\tau)\, d\tau \in C^2((0,T; C(0,l)) \cap C^1([0,T); C^1(0,l)).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Nyní zbývá vyřešit problém (1.13). K tomu využijeme teotii lineárních hyperbolických rovnic, konkrétně, metodu characteristik (viz. např. [14]). Je důležité pečlivě ověřit zda problém je korektně definován a v souladu s fyzikální intuicí. Jmenovitě, směr charakteristik vyvíjejících se z hranic $\{x = 0\}$ and $\{x = l\}$ je kruciální pro korektnost problému. Toto je smyslem okrajových podmínek v (2.23).

4 Stacionární řešení

Tři funkce $w = w(x),\ p = p(x),\ \gamma = \gamma(x)$ závislé pouze na délkové souřadnici x trubice, a splňující rovnice (1.1) až (1.3) se nazývají *stacionárním řešením.*

Tyto rovnice psané nezávisle na proměnné t tvoří jednoduchý systém tří obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{1}{\rho_0} p\prime + f(w) = 0, \tag{4.28}$$

$$\rho_0 c^2(p,\gamma) w' = 0, \tag{4.29}$$

$$w\gamma' = g(\gamma, p), \quad x \in (0, T), \tag{4.30}$$

kde $p' = p'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p$ atd. Analogicky jako v [1], funkci $c(p,\gamma)$ předpokládáme ve tvaru

$$c(p,\gamma) = \frac{c_1 p^2}{c_2 p^2 + \gamma + c_3}, \tag{4.31}$$

kde $c_i > 0,\ i = 1,\ 2,\ 3$ jsou konstanty. Můžeme předpokládat, že $c(p,\gamma) > 0$. neboť triviální řešení s $p = 0$ není zajímavé. Takto, rovnice (4.29) dává $w' = 0$ a odsud máme

$$w = w_0 = \text{konst.} \tag{4.32}$$

Tedy, z (4.28) plyne

$$p(x) = p_0 - \rho_0 f(w_0) x, \tag{4.33}$$

a pro funkci γ obdržíme rovnici

$$\gamma' = \frac{1}{w_0} g\big(\gamma, p_0 - \rho_0 f(w_0) x\big). \tag{4.34}$$

Konstanty $w_0,\ p_0$ mohou být zvoleny libovolně. Také integrace (4.34) dává další volnou integrační konstantu.

Heuristické úvahy naznačují, že stacionární řešení by mělo být limitou nestacionárního řešení pro $t \to \infty$. Abychom alespoň částečně respektovali okrajové podmínky, budeme požadovat aby stacionární řešení splňovalo zobecněnou limitu okrajových podmínek.. Přesněji, požadujeme aby (srovnej (1.8))

$$w_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t h(s)\mathrm{d}s. \tag{4.35}$$

Přirozeně musíme předpokládat, že funkce h je taková že ta limita existuje. Limita se uvažuje v tomto smyslu, protože výtok z generátoru může oscilovat kolem jisté střední hodnoty takže $\lim_{t\to\infty} h(t)$ nemusí existovat. Číslo p_0 v (4.33) je potom určeno z (1.7), tj., z

$$Q_V(p_0, H_0) - S_0 w_0 = 0 \tag{4.36}$$

za předpokladu,že (4.36) je řešitelná vzhledem k p_0.

Zbývá určit funkci γ z (4.34). Je zřejmé, že znaménko w_0 určuje směr proudění. Jestliže je hydrogenerátor umístěn v bodě $x = l$, je logické, že $w_0 < 0$ potom je nutné předepsat $\gamma(l) = \gamma_0$ – hmotu rozpuštěného vzduchu v jednotce objemu přitékající tekutiny. Jelikož funkce g na pravé straně (4.34) je dána rozdílnými vzorci pro rozpouštění a vylučování vzduchu, musíme rozlišovat mezi těmito dvěma případy. Máme tedy

$$\begin{aligned} g(\gamma, p) &= K_u\big(\frac{\bar\gamma - \gamma}{K_H} - p\big), \quad \text{je-li} \quad \tfrac{\bar\gamma-\gamma}{K_H} \geq p \\ g(\gamma, p) &= K_r\big(\frac{\bar\gamma - \gamma}{K_H} - p\big), \quad \text{je-li} \quad \tfrac{\bar\gamma-\gamma}{K_H} < p. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Definujme funkce

$$\varphi(x) = \bar\gamma - K_H[p_0 - \rho_0 f(w_0)x], \tag{4.38}$$

a

$$\begin{aligned} K(\xi) &= \frac{K_u}{w_0 K_H} \equiv -K_1, \qquad\qquad \text{je-li} \quad \xi \geq 0, \\ K(\xi) &= \frac{K_r}{w_0 K_H} \equiv -K_2, \quad \text{je-li} \quad \xi < 0.\ K_i > 0,\ i = 1,\ 2. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Pak je možné přepsat (4.34) ve tvaru

$$\gamma' = (\varphi(x) - \gamma) \cdot K\big(\varphi(x) - \gamma\big), \tag{4.40}$$

nebo položíme-li

$$y(x) = \varphi(x) - \gamma(x), \tag{4.41}$$

ve tvaru

$$y' + yK(y) = \varphi'(x). \tag{4.42}$$

Podle (4.38) je

$$\varphi'(x) = K_H \rho_0 f(x) \equiv \varphi_0 = \text{konst.} \tag{4.43}$$

Je-li $(\bar\gamma - \gamma_0)/K_H \geq p(l) = p_0 - \rho_0 f(w_0) l$, pak $y(l) \geq 0$, a spojitost řešení y rovnice (4.42) implikuje $K(y) = K_u/w_0 K_H = -K_1 = $ konst. pro $x < l$ dostatečně blízko k l. V důsledku toho je rovnice (4.42) lineární na tomto intervalu a máme

$$\begin{aligned} y(x) \quad &= \mathrm{e}^{K_1(x-l)} y(l) + \textstyle\int_l^x \mathrm{e}^{k_1(x-\xi)} \varphi_0 \mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{e}^{K_1(x-l)} y(l) + \tfrac{\mathrm{e}^{K_1(x-l)} - 1}{K_1} \varphi_0. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Jelikož je $w_0 < 0$ a funkce $f(w)$ popisující tření je nutně lichá a pozitivní pro kladná w, plyne z (4.43) a (4.44), že $y(x) > \exp(K_1(x-l))y(l) \geq 0$ v *celém intervalu* $[0,l]$. Ale tento fakt znamená, že funkce $y(x)$ je definovaná pro *všechna* $x \in [0,l]$ vzorcem (4.44). Užijeme-li (4.44), (4.41) a (4.38), pak obdržíme pro funkci $\gamma(x)$ formuli

$$\gamma(x) = \varphi(x) - y(x) = \bar{\gamma} - K_H[p_0 - \rho_0 f(w_0)x]$$
$$-\mathrm{e}^{-K_1(l-x)}\big(\bar{\gamma} - K_H[p_0 - \rho_0 f(w_0)l] - \gamma_0\big) - \tfrac{1-\mathrm{e}^{-K_1(l-x)}}{K_1} K_H \rho_0 f(w_0) \quad (4.45)$$

pro $x \in [0,l]$, a $K_1 = -K_u/w_0K_H$.

Na druhé straně, nechť $(\bar{\gamma} - \gamma_0)/K_H \geq p(l) = p_0 - \rho_0 f(w_0)l$, tj. $y(l) < 0$. Potom plyne – opět ze spojitosti – že $K(y) = K_2$ v (4.42) pro $x \in (x^\star, l]$, kde $x^\star$) je největší číslo v intervalu $(-\infty, l)$ pro které $y(x^\star) = 0$. Na intervalu $(x^\star, l]$, je řešení $y(x)$ dáno vzorcem

$$y(x) = \mathrm{e}^{K_2(x-l)}y(l) + \frac{\mathrm{e}^{K_2(x-l)} - 1}{K_2}\varphi_0. \quad (4.46)$$

Je=li $x^\star \leq 0$, pak řešení (4.42) je dáno (4.46) v celém intervalu $[0,l]$. Z podmínky $y(x^\star) = 0$ a z (4.46) dostaneme jediný bod

$$x^\star = l + \frac{1}{K_2}\ln\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_0 + K_2 y(l)}\right). \quad (4.47)$$

Je-li $x^\star > 0$, což znamená předpoklad

$$\gamma_0 < \bar{\gamma} - K_H[p_0 - \rho_0 f(w_0)l] + \frac{K_H^2 \rho_0 f(w_0) w_0}{K_r}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{K_r l}{w_0 K_H}} - 1\Big), \quad (4.48)$$

jak obdržíme po elementárních manipulacích a substituci z (4.43), (4.41) a (4.39). Pak $y(x)$ je dáno (4.46) pouze pro $x \in (x^\star, l]$. V intervalu $[0, x^\star]$ pak snadno zjistíme, že

$$y(x) = \mathrm{e}^{K_1(x-x^\star)}y(x^\star) + \int_{x^\star}^{x} \mathrm{e}^{K_1(x-\xi)}\varphi_0 \mathrm{d}\xi = \frac{K_H^2 \rho_0 w_0 f(w_0)}{K_u}\Big(1 - \mathrm{e}^{\frac{K_u l}{w_0 K_H}(x^\star - x)}\Big), \quad (4.49)$$

$(y(x^\star) = 0\,!)$, a pro $x^\star$ je nutné dosadit z (4.47). Jestliže dosadíme z (4.41), (4.38) do formulí (4.46) a (4.39), respektivně, dostaneme formuli pro $\gamma(x)$ analogicky jako v (4.45).

Stacionární problém je kompletně rozřešen.

5 Oscilatorické řešení

Oscilatorickým řešením nazýváme takové řešení rovnic (1.1) až (1.3), které nezávisí na prostorové proměnné x. Takto tedy, $w = w(t)$, $p = p(t)$, $\gamma = \gamma(t)$. Ve speciálním případě, může být systém (1.1) až (1.3) psán ve tvaru:

$$\dot{w} + f(w) = 0, \quad (5.1)$$

$$\dot{p} = 0 \quad (5.2)$$

$$\dot{\gamma} = g(\gamma, p), \quad t > 0. \quad (5.3)$$

Jak vidíme, soustava je v podstatě separovaná, protože po výpočtu dostaneme

$$p(t) = p_0 = \text{konst.}, \quad (5.4)$$

z (5.2) – dvě separované rovnice, (5.1) a

$$\dot{\gamma} = g(\gamma, p_0). \quad (5.5)$$

Řešitelnost rovnice (5.1) pro $t \in (0, \infty)$ je zaručena předpokladem

$$m = \inf_{w \in \mathbf{R}} f'(w) > -\infty. \quad (5.6)$$

($f'(w)$ je spojitá !). Důkaz tohoto tvrzení je elementárním důsledkem teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Předpoklad (5.6) je prakticky vždy splněn.

Je-li např. $f(w) = k|w|w$ ($k > 0$ konstanta), pak $f'(w) = 2k|w| \geq 0 = m$. Pokud jde o rovnici (5.5) globální existence řešení je garantována nerovností $|g(\gamma_1, p_0) - g(\gamma_2, p_0)| \leq \max\{K_u/K_H, K_r/K_H\}|\gamma_1 - \gamma_2|, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{R}$, která plyne z (4.37). Tato podmínka neznamená nic jiného, než že funkce g je globálně Lipschitzovská vzhledem k proměnné γ. Přirozeně lze pro w a γ, předepsat počáteční podmínky

$$w(0) = w_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0. \quad (5.7)$$

To je možnost jak splnit, přinejmenším částečně, počáteční podmínky (1.4) až (1.6), přirozeně pouze s konstantními funkcemi $w_0(x) = w_0,\ p_0(x) = p_0, \gamma_0(x) = \gamma_0$. Na druhé straně, okrajové podmínky (1.7), (1.8) nebudou nikdy splněny tímto typem řešení.

Rovnice (5.1), (5.5), (5.7) mohou být řešeny numericky pomocí známých aproximativních metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Řešení v uzavřeném tvaru může být vyjádřeno pouze pro vhodně zvolené funkce f.

Uvažujme např. případ

$$f(w) = k|w|w. \quad (5.8)$$

Je-li $w_0 > 0$, máme díky (5.1), (5.8), $\int_{w_0}^{w} \frac{\mathrm{d}w}{kw^2} = -t$ a odsud

$$w(t) = \frac{w_0}{1 + kw_0 t}. \quad (5.9)$$

Je-li $w_0 < 0$, pak analogicky obdržíme

$$w(t) = \frac{w_0}{1 - kw_0 t}. \quad (5.10)$$

Formule (5.9), (5.10) mohou být pro oba případy sloučeny v jeden

$$w(t) = \frac{w_0}{1 + k|w_0| t}. \quad (5.11)$$

Rovnice (5.5) může nyní být přepsána

$$\dot{y} + yK(y) = 0, \tag{5.12}$$

kde $y(t) = \bar{\gamma} - p_0 K_H - \gamma(t)$,

$$K(\xi) = \frac{K_u}{K_H}, \quad \text{je-li} \quad \xi \geq 0 \tag{5.13}$$
$$K(\xi) = \frac{K_r}{K_H}, \quad \text{je-li} \quad \xi < 0.$$

Je-li $y_0 \equiv \bar{\gamma} - p_0 K_H - \gamma_0 \geq 0$, řešením (5.12) je funkce $y(t) = \exp(-\frac{K_u}{K_H} t) y_0$. Je-li $y_0 < 0$, pak $y(t) = \exp(-\frac{K_r}{K_H} t) y_0$. Užijeme-li (5.13) máme odsud

$$\gamma(t) = \bar{\gamma} - p_0 K_H - \mathrm{e}^{-\frac{K_u}{K_H} t}, \quad \text{je-li} \quad \gamma_0 \leq \bar{\gamma} - p_0 K_H \tag{5.14}$$

a

$$\gamma(t) = \bar{\gamma} - p_0 K_H - \mathrm{e}^{-\frac{K_r}{K_H} t}, \quad \text{je-li} \quad \gamma_0 > \bar{\gamma} - p_0 K_H \tag{5.15}$$

Oscilatorní řešení je dáno (5.4), (5.11), (5.14) a (5.15).

Zde termín oscillatorní řešení neodpovídá zcela této konkrétní situaci. Konkrétně, funkce (5.14), (5.15) se stabilizují $t \to \infty$ ke stacionární hodnotě $\bar{\gamma} - p_0 K_H$ bez jakéhokoli překmitu.

6 Kombinovaná řešení

Kombinovaným řešením v tomto kontextu rozumíme takové řešení rovnic (1.1) až (1.3), které není ani stacionární, ani oscilatorní a pro které alespoň jedna z funkcí $w,\ p,\ \gamma$ závisí pouze na x nebo na t.

Uvažujme nejprve taková řešení, pro která $w = w(x,t),\ p = p(x)$. Pro tento případ (1.1), (1.2), (1.3) jsou tvaru

$$\dot{w} + \frac{1}{\rho_0} p' + f(w) = 0, \tag{6.1}$$
$$\gamma_t + w\gamma_x = g(\gamma, p). \tag{6.2}$$

Rovnice (1.2) je zřejmě splněna identicky. Z (6.1) plyne

$$p'(x) = \text{konst.} \tag{6.3}$$

Na misto (1.7), (1.8), zvolme pro p okrajové podmínky

$$p(0) = p_0, \quad p(l) = p_1, \tag{6.4}$$

které imitují tlak způsobený hydrogenerátorem. Potom

$$p(x) = p_0 + \frac{p_1 - p_0}{l} x, \tag{6.5}$$

jak plyne z (6.3). Následně (6.1) dává

$$\dot{w} + f(w) = \frac{p_1 - p_0}{\rho_0 l} \tag{6.6}$$

pro funkci w. Jestliže předpokládáme (5.6) a doplníme počáteční podmínku

$$w(0) = w_0, \tag{6.7}$$

pak víme, že existuje globální řešení $w(t)$ problému (6.6), (6.7). Jestliže známe takové řešení, pak můžeme nalézt funkci γ z rovnice

$$\gamma_t + w(t)\gamma_x = g\big(\gamma, p_0 + \frac{p_1 - p_0}{l} x\big) \tag{6.8}$$

pomocí metody charakteristik. Přirozeně je nutné připojit počáteční a okrajové podmínky. Počáteční podmínka může být dána ve zcela obecném tvaru

$$\gamma(x, 0) = \gamma_0(x). \tag{6.9}$$

Je-li $w(t) > 0$, musíme předepsat

$$\gamma(0, t) = \gamma^0(t), \tag{6.10}$$

tj., hmotu rozpuštěného plynu v tekutině proudící do trubice z konce $x = 0$. Je-li $w(t) < 0$ je nutné předepsat

$$\gamma(l, t) = \gamma^1(t), \tag{6.11}$$

pro tekutinu proudící do trubice z konce $x = l$. Okrajové podmínky (6.10), (6.11) se mohou měnit z jedné na druhou během času, ale nikdy nemohou být předepsány obě najednou protože w je nezávislá na t. Tudíž problém daný (6.8), (6.9), (6.10), resp. (6.11), musí být řešen po takových časových intervalech, na kterých funkce $w(t)$ nemění znaménko. Abychom se vyhnuli komplikovanému testování zvolme speciální situaci, která je také použitelná v praxi.

Předpokládejme, že

$$\begin{gathered} p_1 > p_0, \; w < 0, \; \frac{p_0 - p_1}{\rho_0 l} - f(w_0) < 0, \\ f(-\xi) = -f(\xi), \; f'(\xi) \geq 0, \quad \xi \in \mathbf{R}. \end{gathered} \tag{6.12}$$

Fyzikálně tyto předpoklady znamenají

(i) tlak na levé straně trubice je větší než na pravé straně;

(ii) tekutina proudí z pravé strany na levou stranu na počátku;

(iii) rozdíl tlaků není ještě ovlivňován silou odporu potrubí na začátku;

(iv) síla odporu vždy působí proti směru pohybu tekutiny a netlumí tok s rostoucí rychlostí.

Předpoklady (6.12) a rovnice (6.6), (6.7) implikují $\dot{w} < 0$. Tak $w(t)$ je klesající funkcí pro vzrůstající t buď pro každé $t > 0$, nebo existuje $t^\star > 0$ takové, že $f\big(w(t^\star)\big) = \frac{p_0 - p_1}{\rho_0 l}$ a potom $w(t) = w(t^\star)$ pro $t \geq t^\star$. Důvodem je, že funkce $w(t) = w(t^\star)$ je řešením rovnice (6.6) na intervalu $(t^\star, \infty)$ s počáteční podmínkou $w(t^\star)$ a že rovnice (6.6) má řešení pro daná počáteční data. Tudíž $w(t) < 0$ pro všechna $t \geq 0$ a máme řešit problém (6.8), (6.9), (6.11) pro určení γ.

Použijme *metodu charakteristik.* Nechť $x \in [0, l]$, $t > 0$ jsou libovolná. Položme

$$\mathcal{X}(\tau; x, t) = x + \int_t^\tau w(s)\mathrm{d}s. \tag{6.13}$$

Potom $\mathcal{X}_\tau(\tau; x, t) = w(\tau)$. Jestliže navíc položíme

$$\phi(\tau) = \gamma(\mathcal{X}(\tau; x, t), \tau), \tag{6.14}$$

máme

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\tau) &= \gamma_x \mathcal{X}_\tau + \gamma_t = \gamma_t + w\gamma_x \\ &= g\big(\phi(\tau), p_0 + \frac{p_1 - p_0}{l}\mathcal{X}(\tau; x, t)\big). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Tak jestliže x a t jsou dána, obdrželi jsme diferenciální rovnici pro funkci $\phi(\tau)$ danou (5.14). Jestliže nalezneme $\phi(\tau)$ pro $\tau \in [0, t]$, pak

$$\gamma(x, t) = \phi(t) \tag{6.16}$$

jak plyne z (6.14), (6.13). Počáteční podmínka pro funkci $\phi(\tau)$ je dána buď vzorcem

$$\phi(0) = \gamma\big(\mathcal{X}(0; x, t), 0\big) = \gamma_0\big(x - \int_0^t w(s)\mathrm{d}s\big), \tag{6.17}$$

jestliže charakteristika $\xi = \mathcal{X}(\tau; x, t)$ protne osu $\tau = 0$ v intervalu $0 \leq \xi \leq l$, nebo vzorcem

$$\phi(\tau^\star) = \gamma\big(\mathcal{X}(\tau^\star; x, t), \tau^\star\big) = \gamma^1(\tau^\star), \tag{6.18}$$

jestliže tato charakteristika protne osu $\xi = l$ v nějakém bodě $\tau = \tau^\star > 0$. Hodnota $\tau^\star$ musí být určena z implicitní rovnice

$$x - \int_{\tau^\star}^t w(s)\mathrm{d}s = \mathcal{X}(\tau^\star; x, t). \tag{6.19}$$

Položme

$$y(\tau) = \varphi(\tau; x, t) - \phi(\tau), \tag{6.20}$$

kde

$$\varphi(\tau;x,t)=\bar{\gamma}-K_H\Big(p_0+\frac{p_1-p_0}{l}\big(x+\int_t^\tau w(s)\mathrm{d}s\big)\Big) \tag{6.21}$$

a

$$\begin{aligned} K(\xi)&=\frac{K_u}{K_H}, \quad \text{je-li} \quad \xi\geq 0\\ K(\xi)&=\frac{K_r}{K_H}, \quad \text{je-li} \quad \xi<0. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Potom (6.15) může být psána ve tvaru $\dot{y}+yK(y)=\varphi_\tau$ a je $\varphi_\tau=K_H\frac{p_0-p_1}{l}w(\tau)>0$ podle (6.21) a (6.12). Řešme rovnici

$$\dot{y}+yK(y)=K_H\frac{p_0-p_1}{l}w(\tau)>0 \tag{6.23}$$

s počáteční podmínkou

$$\begin{aligned} y(0)&=\varphi(0;x,t)-\phi(0)\\ &=\bar{\gamma}-K_H\Big(p_0+\frac{p_1-p_0}{l}\big(x+\int_t^0 w(s)\mathrm{d}s\big)\Big)-\gamma_0\big(x-\int_0^t w(s)\mathrm{d}s\big)\equiv y_0, \end{aligned} \tag{6.24}$$

která odpovídá situaci kdy charakteristika $\xi=\mathcal{X}(\tau;x,t)$ protne osu ξ. Jestliže je nyní $y_0\geq 0$, pak řešením problému (6.23), (6.24) je funkce

$$y(\tau)=\mathrm{e}^{-\frac{K_u}{K_H}\tau}y_0+K_H\frac{p_0-p_1}{l}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\frac{K_u}{K_H}(\tau-s)}w(s)\mathrm{d}s, \quad \tau\in[0,t]. \tag{6.25}$$

Je-li $y_0<0$, pak řešení problému (6.23), (6.24) je funkce

$$y(\tau)=\mathrm{e}^{-\frac{K_r}{K_H}\tau}y_0+K_H\frac{p_0-p_1}{l}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\frac{K_r}{K_H}(\tau-s)}w(s)\mathrm{d}s \tag{6.26}$$

jakmile $y(\tau)<0$. Je-li $\tau_1\equiv\inf\{\tau;0<\tau\leq t, y(\tau)=0\}<t$, pak je nutné prodloužit řešení (6.26) na interval $[\tau_1,t]$ formulí

$$y(\tau)=K_H\frac{p_0-p_1}{l}\int_{\tau_1}^\tau \mathrm{e}^{-\frac{K_u}{K_H}(\tau-s)}w(s)\mathrm{d}s. \tag{6.27}$$

Když charakteristika $\xi=\mathcal{X}(\tau;x,t)$ protne osu $\xi=l$ postupujeme zcela analogicky; jako počáteční podmínku použijeme

$$\begin{aligned} y(\tau^\star)&=\varphi(\tau^\star;x,t)-\phi(\tau^\star)\\ &=\bar{\gamma}-K_H\Big(p_0+\frac{p_1-p_0}{l}\big(x+\int_t^{\tau^\star} w(s)\mathrm{d}s\big)\Big)-\gamma^1(\tau^\star)\equiv y_1 \end{aligned} \tag{6.28}$$

a integrujeme rovnici na intervalu $(\tau^\star,t]$. Zároveň hodnota $\tau^\star=\tau^\star(x,t)$ bude vypočtena z (6.19). Opět je nutné rozlišovat zda $y_1\geq 0$, nebo $y_1<0$. V prvním případě obdržíme

$$y(\tau)=\mathrm{e}^{-\frac{K_u}{K_H}(\tau-\tau^\star)}y_1+K_H\frac{p_0-p_1}{l}\int_{\tau^\star}^\tau \mathrm{e}^{-\frac{K_u}{K_H}(\tau-s)}w(s)\mathrm{d}s, \quad \tau\in[\tau^\star,t]. \tag{6.29}$$

V druhém případě je navíc nutné rozlišit zda $y(\tau_1) = 0$ pro nějaké (nejmenší) $\tau_1 \in (\tau^\star, t)$, nebo $y(\tau) < 0$ pro všechna $y(\tau) \in (\tau^\star, t)$. V poslední situaci máme

$$y(\tau) = \mathrm{e}^{-\frac{K_r}{K_H}(\tau-\tau^\star)} y_0 + K_H \frac{p_0 - p_1}{l} \int_{\tau^\star}^{\tau} \mathrm{e}^{-\frac{K_r}{K_H}(\tau - s)} w(s) \mathrm{d}s \tag{6.30}$$

pro všechna $\tau \in [\tau^\star, t]$. V opačném případě je vzorec (6.30) platný pouze pro $\tau \in [\tau^\star, \tau_1]$ a pro $\tau \in (\tau_1, t)$, musíme navíc $y(\tau)$ prodloužit s použitím formule

$$y(\tau) = K_H \frac{p_0 - p_1}{l} \int_{\tau_1}^{\tau} \mathrm{e}^{-\frac{K_u}{K_H}(\tau - s)} w(s) \mathrm{d}s, \quad \tau \in (\tau_1, t). \tag{6.31}$$

Nakonec, hodnotu $\gamma(x,t)$ nalezneme ze vzorce (6.16), kde $\phi(t) = \varphi(t; x, t) - y(t)$, φ je dáno (6.21), $y(t)$ z formulí (6.25) až (6.28), hodnota y_0 resp.y_1 z (6.24) a (6.28), a $\tau^\star$ rovnicí (6.19).

Tudíž je-li např.

$$\gamma_0\big(x - \int_0^t w(s)\mathrm{d}s\big) < \bar{\gamma} - K_H\Big(p_0 + \frac{p_1 - p_0}{l}\big(x + \int_t^0 w(s)\mathrm{d}s\big)\Big), \tag{6.32}$$

pak podle (6.26), (6.20) a (6.25) máme

$$\begin{aligned} \gamma(x,t) = \phi(t) = \varphi(t; x, t) - y(t) = \bar{\gamma} - K_H\Big(p_0 + \frac{p_1 - p_0}{x}\Big) \\ -\mathrm{e}^{-\frac{K_u}{K_H}t}\left(\bar{\gamma} - K_H\Big(p_0 + \frac{p_1 - p_0}{l}\big(x + \int_t^0 w(s)\mathrm{d}s\big)\Big) - \gamma_0\big(x - \int_0^t w(s)\mathrm{d}s\big)\right) \\ -K_H \frac{p_0 - p_1}{l} \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{K_u}{K_H}(t-s)} w(s)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{6.33}$$

V ostatních případech postupujeme analogicky. Neuvedeme zde výsledné formule, protože procedura spočívá fakticky pouze v rutinní substituci, i když formálně komplikované. Je jasné, že nemusíme být schopni určit $w(t)$ v uzavřeném tvaru pro obecnou funkci f. Tudíž také formule pro $\gamma(x,t)$ nebudou obecně explicitní.

Na druhé straně uveďme konkrétní formule pro fyzikálně zajímavý speciální případ s funkcí $f(w) = k|w|w$. Pak rovnice (5.1) má tvar

$$\dot{w} = \frac{p_0 - p_1}{\rho_0 l} + k w^2, \tag{6.34}$$

jelikož $w < 0$ jak plyne z našich předcházejících úvah a tak $k|w|w = -kw^2$. Kromě toho je $p_1 > p_0$. Tudíž integrací (6.34) dostaneme

$$t = \int_{w_0}^{w} \frac{\mathrm{d}w}{\frac{p_1 - p_0}{\rho_0 l} - k w^2} = \Big(\frac{\rho_0 l}{k(p_1 - p_0)}\Big)^{\frac{1}{2}} \int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{1 - z^2},$$

kde

$$z = \Big(\frac{k\rho_0 l}{p_1 - p_0}\Big)^{\frac{1}{2}} w, \;\; z_0 = \Big(\frac{k\rho_0 l}{p_1 - p_0}\Big)^{\frac{1}{2}} w_0.$$

Odsud vypočteme

$$\ln \frac{1-z^2}{1-z_0^2} = 2\Big(\frac{k(p_1-p_0)}{\rho_0 l}\Big)^{\frac{1}{2}} t$$

a po dalších manipulacích máme nakonec

$$w(t) = -\frac{\alpha_0}{k}\left(1-\Big(1-\frac{k^2}{\alpha_0^2}w_0^2\Big)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_0 t}{2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

kde

$$\alpha_0 = \Big(\frac{k(p_1-p_0)}{\rho_0 l}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nyní je konečně možné vyjádřit celkové kombinované řešení v kvadraturách.

Všechna tři speciální řešení, která jsme dosud uvedli mají společný nedostatek. Nejsou ve skutečnosti ovlivněna závislostí rychlosti zvuku $c = c(p,\gamma)$ na tlaku a hmotě rozpuštěného plynu, neboť člen $c^2(p,\gamma)w_x$ v rovnici (2.2) ve všech případech vymizí. Z tohoto důvodu se zdá rozumné položit $f(w) = 0$ a vyšetřovat řešení typu $w = w_1 x + w_0,\ p = p(t),\ \gamma = \gamma(t)$, kde $w_0,\ w_1$ jsou konstanty. Pak rovnice (1.1) (s $f \equiv 0$) je splněna identicky a z (1.2), (1.3) obdržíme soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot p(t) &= \rho_0 c^2(p(t),\gamma(t)), \\ \dot\gamma(t) &= g(p(t),\gamma(t)), \quad t > 0 \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 = \text{konst.} \\ \gamma(0) &= \gamma_0 = \text{konst.} \end{aligned}$$

Analytické zkoumání a numerické řešení této jednoduché soustavy může přinést vodítko pro popis vlivu závislosti $c = c(p,\gamma)$ na chování systému a tak získat srovnávací charakteristiku pro řešení obecného problému a pro korespondenci s fyzikální interpretací provedené matematické analýzy.

Reference

[1] J. Šklíba, I. Straškraba, M. Štengl, *Rozšířený matematický model bezpečnostního hydraulického obvodu, Zpráva SVÚSS Běchovice, Česká Republika, registrováno jako: SVÚSS 88-03022, Prosinec 1988.*

[2] K. R. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures. World Scientific, London 1995. Zbl 0941.74500, MR 1370661*

[3] I. Straškraba, Two Phase Flow in Hydraulics, Applications of Mathematics, Vol. 60, No. 1 (2015), 21-33.

[4] I. Straškraba, Fully nonlinear model of a hydraulic circuit, Acta Technica, Vol. 59, No. 3 (2014)

[5] M. Růžička, *On bubbles rising in line, Int. J. Multiphase Flow 26 (2000), 1141-1181. Zbl 1137.76730*

[6] I. Straškraba, E. Vitásek, *The flow of a liquid with cavitation, J. of Concrete and Applicable Mathematics, Vol. 8 (2010), 668-681. Zbl pre 05707562, MR 2641512*

[7] G. B. Wallis, *One-Dimensional Two Phase Flows, McGraw-Hill, New York, 1969.*

[8] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow, Oxford University Press 2004, Zbl 1088.35051, MR 2084891*

[9] L. D. Landau, A. I. Achiezer, E. M. Lifschitz *Course of general physics, mechanics and molecular physics, Nauka, Moscow 1969.*

[10] L. C. Evans, *Entropy and partial differential equations, Lecture Notes for a graduate Course "Entropy and Partial Differential Equations", Department of Mathematics, UC Berkeley, 2008.*

[11] I. A. Čarnyj, *Neustanovivšijesja dviženije real'noj židkosti b trubach (Unsteady motion of real fluid in pipes,) Moskva, "Nedra" 1975.*

[12] S. L. Soo, *Fluid Dynamics of Multiphase Systems, Blaidell, Waltham, Mass., 1967. Zbl 0173 52901*

[13] A. Glikson, *Some case of non-uniform and non-steady state of gas-mixture, Rend. Mat., VI. Ser. 3 (1970), 451-479, Istituto per le applicazioni del calcolo del Consiglio Nazionale delle Richerche, Pubblicazioni Serie III - N. 38, Zbl 0273.76059*

[14] B. L. Rozhdestvenskij, N. N. Yanenko, *Sistemy kvazilinejnych uravnenij (Systems of quasilinear equations,) Moskva, Nauka 1978, Zbl 0544.35001, MR 0694242*

[15] L. Hsiao, *Hyperbolic Systems and Dissipative Mechanisms, World Scientific, Singapore, 1997.*