

FOTONICKÉ KRYSTALY

Jiří Čtyroký

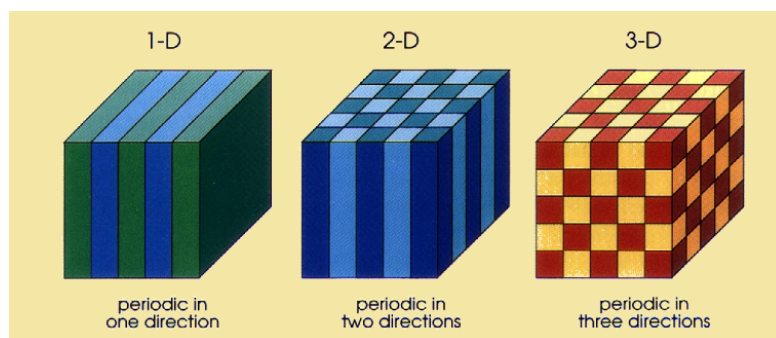
ctyroký@ufe.cz

Ústav fotoniky a elektroniky AV ČR, v.v.i.

1

Fotonické krystaly

1D, 2D nebo 3D periodické struktury s velkým kontrastem permivity



E. Yablonovitch: „Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics“, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 2059–2062, 1987

J. D. Joannopoulos *et al.*: *Photonic Crystals: molding the flow of light*, Princeton University Press 1995

S. G. Johnson, J. D. Joannopoulos: *Photonic Crystals, The road from theory to practice*, Kluwer Academic Publishers 2003

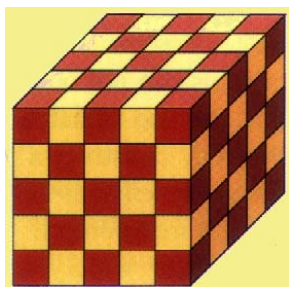
J.-M. Lourtioz *et al.*: *Photonic Crystals : Towards Nanoscale Photonic Devices*, Springer 2005

...

3

Fotony se v periodickém dielektrickém prostředí pohybují „podobně“ jako **elektrony** v periodickém potenciálovém poli

Za jistých podmínek existuje **zakázaný pás energií fotonů**. Fotony s energií uvnitř zakázaného pásu se v periodickém prostředí nemohou šířit, záření se tudíž **totálně odráží zpět**



Z pohledu vlnové optiky jde o **braggovský odraz vlny od periodického prostředí**. Totální odraz je možno využít k vytvoření **optických vlnodů ve fotonických krystalech**

Vytvořit trojrozměrné periodické prostředí je však technologicky obtížné.

4

“Pohybové rovnice” pro elektrony a fotony v krystalech

Schrödingerova rovnice pro elektron v periodickém potenciálu:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e^*} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad V(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = V(\mathbf{r}) \quad K = \frac{2\pi}{|\mathbf{a}|}$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_m u_m(\mathbf{r}) e^{im\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$$

periodický potenciál vlnová funkce energie fotonu (Floquetova)-Blochova vlna,

Aproximativní (jednočásticové) přiblížení

“Vlnová rovnice” pro fotony v periodické permitivitě

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E},$$

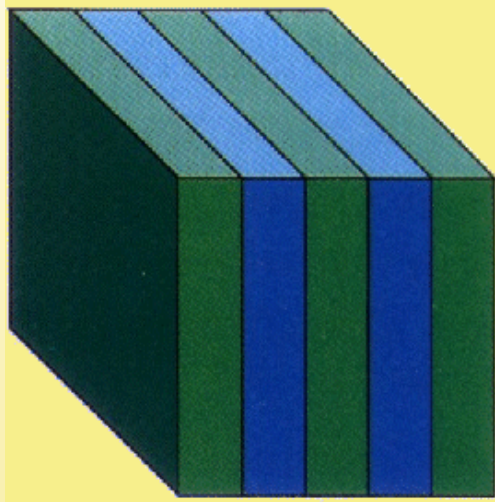
$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

Přesná
 (“mnohočásticová”
teorie

Rovnice pro vlastní hodnoty energie fotonů a F-B funkce
Tento přístup je relativně jednoduchý a fyzikálně průzračný,
ale (v této formě) nebere v úvahu *disperzi permitivity* $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$.

5

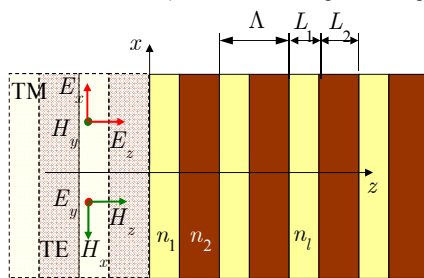
Periodická vrstevnatá struktura jako jednorozměrný fotonický krystal



6

Jednorozměrný fotonický krystal

Existence zakázaného pásu – odvození metodou přenosové matice
(„fotonická analogie“ Kronigova - Penneyova modelu krystalu)



Normalizace souřadnic a vln. vektorů:

$$\xi = k_0 x, \quad \zeta = k_0 z, \quad k_0 = 2\pi / \lambda$$

$$\mathbf{k}_l = k_0 (\gamma \mathbf{x}^0 + N_l \mathbf{z}^0), \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\gamma^2 + N_l^2 = \varepsilon_l = \begin{cases} n_1^2 & \gamma - \text{příčná konst.} \\ n_2^2 & \text{šíření } \textit{stejná} \end{cases}$$

konst. šíření

$$\gamma = n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Elektromagnetické pole je popsáno komplexními amplitudami $p_l(\zeta), q_l(\zeta)$

TE

$$E_{y,l}(x, z) = \sqrt{2k_0 Z_0 / N_l} p_l(\zeta) e^{i\gamma \xi},$$

$$H_{x,l}(x, z) = -\sqrt{2k_0 Y_0 N_l} q_l(\zeta) e^{i\gamma \xi},$$

$$H_{z,l}(x, z) = \sqrt{2k_0 Y_0 / N_l} \gamma p_l(\zeta) e^{i\gamma \xi},$$

TM

$$H_{y,l}(x, z) = \sqrt{2k_0 Y_0 \varepsilon_l / N_l} p_l(\zeta) e^{i\gamma \xi},$$

$$E_{x,l}(x, z) = \sqrt{2k_0 Z_0 N_l / \varepsilon_l} q_l(\zeta) e^{i\gamma \xi},$$

$$E_{z,l}(x, z) = -\sqrt{2k_0 Z_0 / (\varepsilon_l N_l)} \gamma p_l(\zeta) e^{i\gamma \xi},$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}},$$

$$Y_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

7

Elektromagnetické Floquetovy – Blochovy vidy – 1

„Průchod“ l -tou vrstvou je popsán vztahy

$$\begin{aligned} p_l(\zeta + \Delta\zeta) &= a_l(\zeta) \exp(iN_l\Delta\zeta) + b_l(\zeta) \exp(-iN_l\Delta\zeta), & p_l &= a_l + b_l, & a_l &= (p + q)/2, \\ q_l(\zeta + \Delta\zeta) &= a_l(\zeta) \exp(iN_l\Delta\zeta) - b_l(\zeta) \exp(-iN_l\Delta\zeta), & q_l &= a_l - b_l, & b_l &= (p - q)/2, \end{aligned}$$

nebo alternativně přenosovou maticí \mathbf{A}_l

$$\begin{pmatrix} p_l(\zeta + \Delta\zeta) \\ q_l(\zeta + \Delta\zeta) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_l \cdot \begin{pmatrix} p_l(\zeta) \\ q_l(\zeta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_l = \begin{pmatrix} \cos N_l\Delta\zeta & i \sin N_l\Delta\zeta \\ i \sin N_l\Delta\zeta & \cos N_l\Delta\zeta \end{pmatrix}$$

průchod rozhraním $l \rightarrow l+1$ a $l+1 \rightarrow l$ lze analogicky popsat přenosovými maticemi

$${}^{l+1,l}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1/\rho \end{pmatrix}, \quad \rho = \sqrt{N_{l+1}/N_l} \quad \text{pro TE polarizaci a}$$

$${}^{l,l+1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/\rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad \rho = \sqrt{N_{l+1}\varepsilon_l / N_l\varepsilon_{l+1}} \quad \text{pro TM polarizaci.}$$

Přenosová matice celé jedné periody je ${}^\Lambda\mathbf{A} = {}^{12}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot {}^{21}\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_1$.

8

Elektromagnetické Floquetovy – Blochovy vidy – 2

Floquetův-Blochův „vid“ (vlna) je definován pomocí **vlastního vektoru** matice ${}^\Lambda\mathbf{A}$,

$${}^\Lambda\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} p_1^F \\ q_1^F \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} p_1^F \\ q_1^F \end{pmatrix}, \quad s = \exp(i\varphi^F) = \exp(ik^F\Lambda), \quad \varphi^F = k^F\Lambda,$$

k^F je konstanta šíření F-B vidu.

k^F je určena až na aditivní konstantu $K = 2\pi / \Lambda$:

$$\exp(ik^F\Lambda) = \exp\left[i\left(k^F + K\right)\Lambda\right] = \exp(ik^F\Lambda) \exp(2\pi i)$$

Proto stačí určit k^F v intervalu $-K/2 < k^F \leq K/2 \Rightarrow$ **první Brillouinova zóna**.

9

Vlastní hodnoty a fotonický zakázaný pás

Označme $\Lambda = L_1 + L_2$, $\varphi_1 = k_0 N_1 L_1$, $\varphi_2 = k_0 N_2 L_2$,

matice ${}^{\Lambda}A$ má pak vlastní čísla

$$s = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \pm \sqrt{\left[\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \right]^2 - 1}.$$

FB vid se „šíří“, jen pokud $|s| = 1$, t.j., pokud

$$\left| \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \right| \leq 1.$$

Normovaná konstanta šíření je pak

$$k^F = \frac{k^F}{K/2} = \frac{1}{\pi} \arccos \left[\cos \left(\frac{\omega}{c} N_1 L_1 \right) \cos \left(\frac{\omega}{c} N_2 L_2 \right) - \frac{1}{2} \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin \left(\frac{\omega}{c} N_1 L_1 \right) \sin \left(\frac{\omega}{c} N_2 L_2 \right) \right].$$

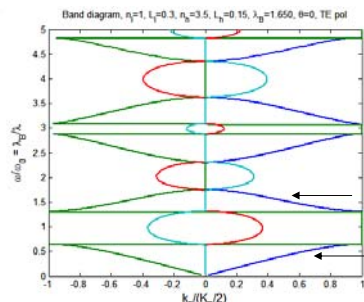
Pokud $\left| \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \right| > 1$,

k^F je komplexní, a vlna se nemůže šířit podél nekonečně dlouhého krystalu.
Tak vzniká **fotonický zakázaný pás**.

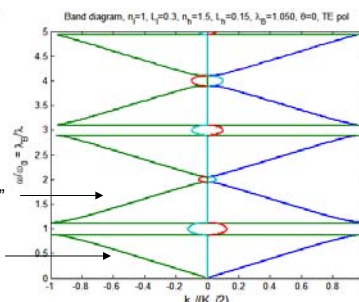
10

Pásová struktura jednorozměrného krystalu

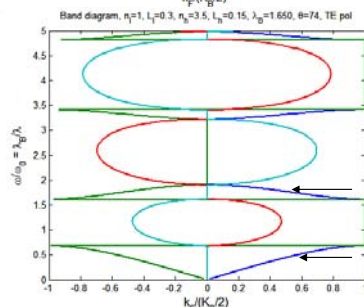
$n_1 = 1$
 $n_2 = 3.5$
 $\theta = 0^\circ$



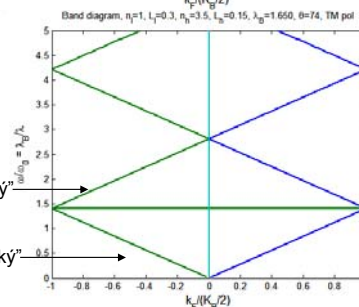
$n_1 = 1$
 $n_2 = 1.5$
 $\theta = 0^\circ$



TE
 $\theta = 74^\circ$

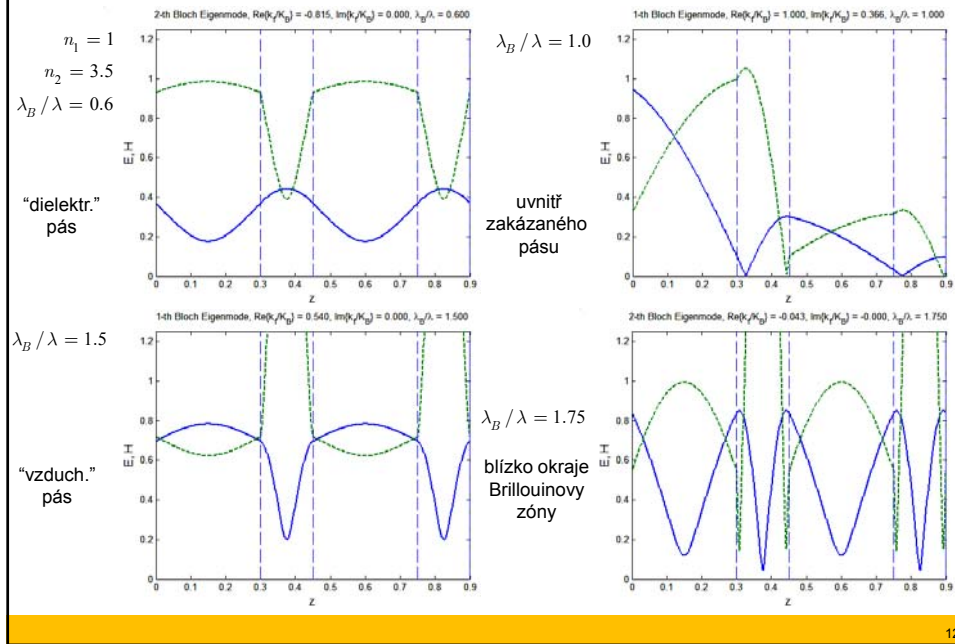


TM
 $\theta = 74^\circ$

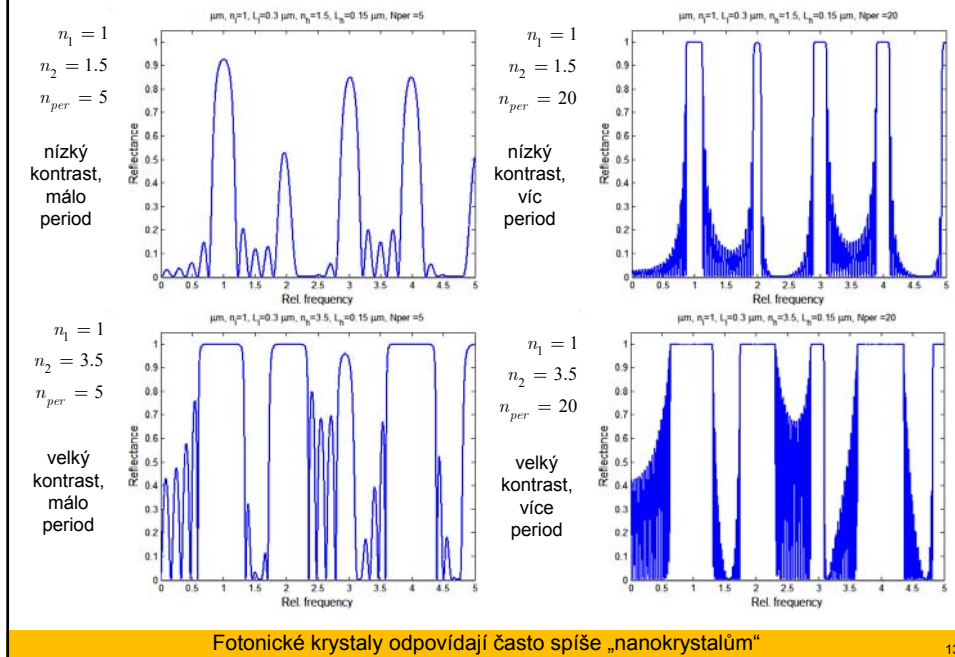


11

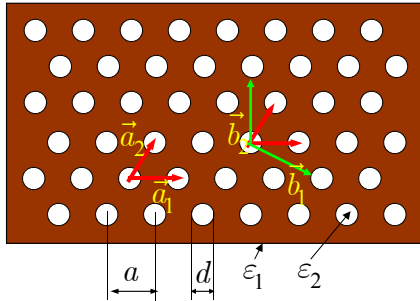
Elektromagnetické Floquetovy – Blochovy vlny



Spektrální reflektance



Dvozměrné „fotonické krystaly“



Periodické uspořádání otvorů;
Blochův – Floquetův teorém

$$\begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = u_{\vec{k}}(\vec{r}_{\parallel}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_{\parallel}} e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}_{\parallel}},$$

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}_{\parallel}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}_{\parallel} + \vec{a}_1) = u_{\vec{k}}(\vec{r}_{\parallel} + \vec{a}_2)$$

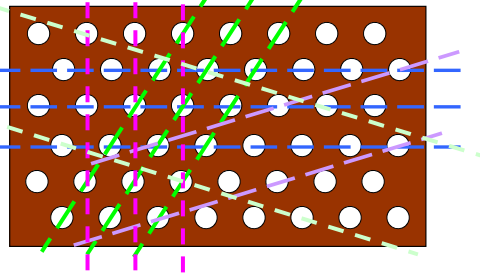
$$\vec{G} = m\vec{b}_1 + n\vec{b}_2; m, n \text{ celé}$$

Elementární vektory prostorové mřížky

$$\vec{a}_1 = (a, 0); \quad \vec{a}_2 = (a/2, \sqrt{3}a/2)$$

Elementární vektory reciproké mřížky

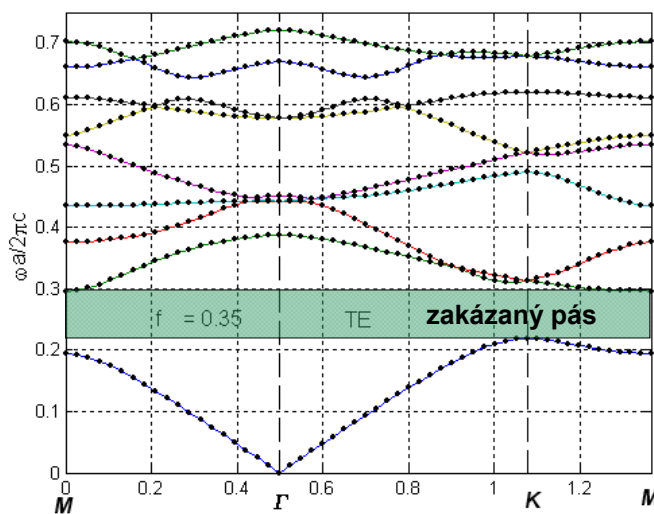
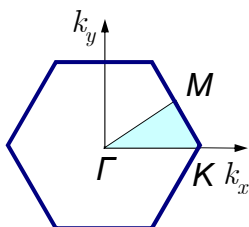
$$\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a\sqrt{3}}\right), \quad \vec{b}_2 = \left(0, \frac{2}{a\sqrt{3}}\right)$$



14

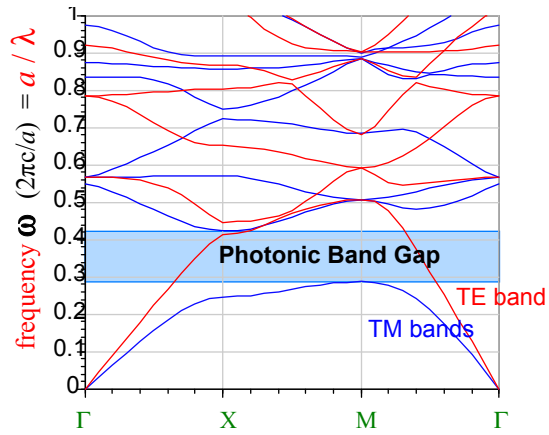
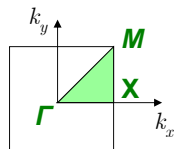
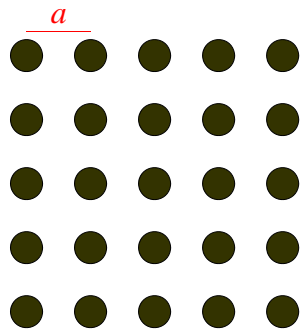
Pásový diagram energií fotonů 2D krystalu s trojúhelníkovou mřížkou

první
Brillouinova
zóna
prostoru
vlnových vektorů



15

Pásový diagram energií fotonů 2D krystalu se čtvercovou mřížkou

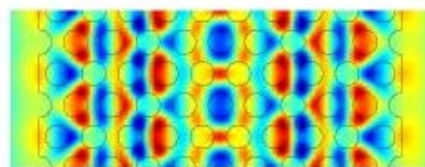
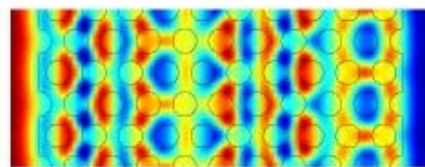


16

Odrážení rovinné vlny od 2D fotonického krystalu s trojúhelníkovou mřížkou otvorů v InP

Uvnitř zakázaného pásu

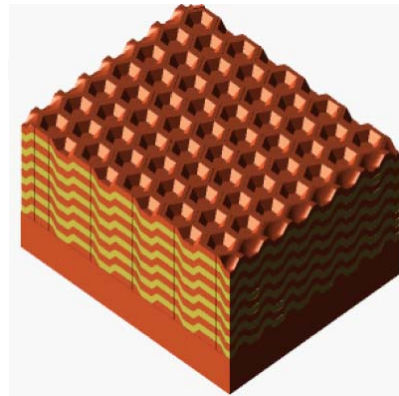
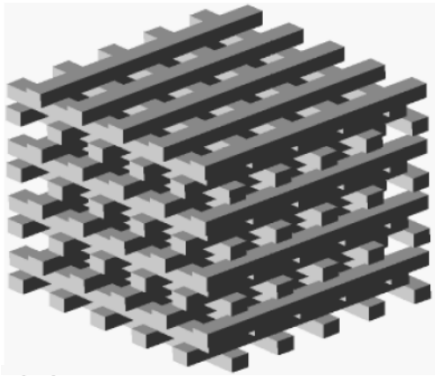
Vně zakázaného pásu



(Ing. Jiří Petráček, Dr., VUT Brno)

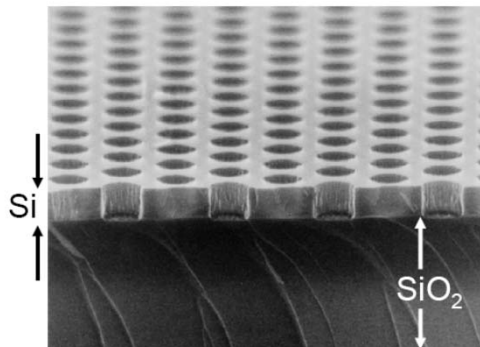
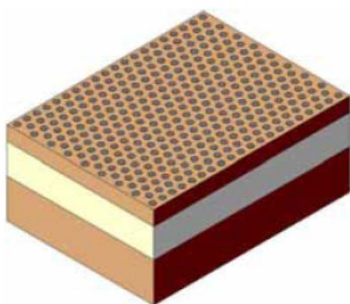
17

Příklady trojdimenzionálních fotonických krystalů



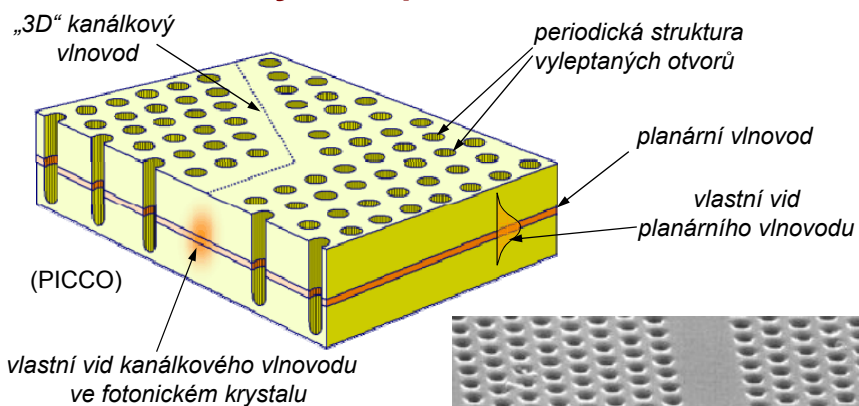
18

„2.5-dimenzionální fotonické krystaly“

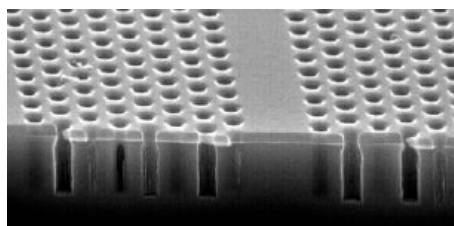


19

Realizace 2D fotonických krystalů: 2D krystal v planárním vlnovodu



Zásadní problém:
ztráty vyzařováním
z roviny vlnovodu



22

Photonic Crystals:

Periodic Surprises in Electromagnetism

Steven G. Johnson
MIT

