

NELINEÁRNÍ MECHANIKA KONTINUA S PŘÍKLADY

Jiří Plešek

30. září 2015

Obsah

1	Úvod	5
2	Přehled poznatků	7
2.1	Termodynamika pevných látek	7
2.1.1	První zákon termodynamiky	8
2.1.2	Druhý zákon termodynamiky	9
2.1.3	Disipační nerovnost	9
2.1.4	Helmholtzova volná energie	10
2.1.5	Termoelasticita	11
2.1.6	Duhamelův-Neumannův model	12
2.1.7	Cvičení	14
2.2	Vektory, matice a tenzory	14
2.2.1	Definice, značení a operace s vektory	14
2.2.2	Tensor jako lineární operátor	16
2.2.3	Hlavní osy symetrického tensoru	18
2.2.4	Invarianty	18
2.2.5	Cvičení	20
2.3	Tensorový tvar modelů elasticity	21
2.3.1	Symetrie	22
2.3.2	Isotropní materiál	23
2.3.3	Hookeův zákon	24
2.3.4	Kalibrace	25
2.3.5	Konvexnost	27
2.3.6	Cvičení	29
3	Kinematika	31
3.1	Lagrangeův popis	32
3.1.1	Gradient posunutí a deformační gradient	33
3.1.2	Greenův-Lagrangeův tensor deformace	36

3.1.3	Elementární kinematické módy	40
3.1.4	Polární rozklad deformačního gradientu	47
3.1.5	Klasifikace tensorů deformace	52
3.1.6	Cvičení	56
3.2	Eulerův popis	58
3.2.1	Trajektorie, rychlost a zrychlení částic	59
3.2.2	Materiálová derivace	63
3.2.3	Rychlostní gradient	65
3.2.4	Okamžitá rychlost deformace	67
3.2.5	Vírový tensor (spin)	70
3.2.6	Cvičení	71
4	Zákony zachování	73
4.1	Zákon zachování hmotnosti	74
4.1.1	Změna hustoty	74
4.1.2	Reynoldsoův transportní teorém	75
4.1.3	Rovnice kontinuity	76
4.1.4	Cvičení	79
4.2	Zákon zachování hybnosti	79
4.2.1	Cauchyho tensor napětí	81
4.2.2	Nansonova věta	85
4.2.3	1. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí	88
4.2.4	Pohybové rovnice	88
4.2.5	Cvičení	88
4.3	Zákon zachování momentu hybnosti	89
4.3.1	Symetrie Cauchyho tensoru	90
4.3.2	Cvičení	90
4.4	Zákon zachování energie	90
4.4.1	Bilance mechanické energie	90
4.4.2	Piolův tepelný vektor	90
4.4.3	2. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí	90
4.4.4	Rovnice vedení tepla	90
4.4.5	Cvičení	90
4.5	Clausiova-Duhemova nerovnost	91
4.5.1	Lokální formulace	91
4.5.2	Clausiova-Planckova nerovnost	91
4.5.3	Disipační nerovnost	91

5	Formulace základních úloh	93
5.1	Mechanika pevných látek	93
5.1.1	Velké termoelastické deformace	93
5.1.2	Model vedení tepla	93
5.1.3	Velká posunutí a rotace	93
5.1.4	Šíření šokových vln	93
5.1.5	Cvičení	93
5.2	Mechanika tekutin	94
5.2.1	Nevazké proudění	94
5.2.2	Ideální plyn	94
5.2.3	Navierova-Stokesova rovnice	94
5.2.4	Reynoldsovo číslo	94
5.2.5	Cvičení	94
6	O deformaci a napětí	95
6.1	Totální popis	95
6.1.1	Jednoosá deformace	95
6.1.2	Sethovy-Hillovy tensory	95
6.1.3	Konjugovaná napětí	95
6.2	Inkrementální popis	95
6.2.1	Pohyb tuhého tělesa	95
6.2.2	Zarembova-Jaumannova-Nollova a jiné derivace	95
6.2.3	Objektivnost	95
6.2.4	Cvičení	95
A	Použité operace s maticemi	97
A.1	Spektrální rozklad	97
A.2	Odmocnina matice	98
A.3	Umocňování matic	99
A.4	Isotropní funkce	100
B	Vzorové příklady	102
B.1	Příklad 1: zobrazení oblasti	102
B.2	Příklad 2: jednoosá deformace	103
B.3	Příklad 3: prostý smyk	104
B.4	Příklad 4: rotace	105
B.5	Příklad 5: jednoosá napjatost	106
C	Značení	107

Kapitola 1

Úvod

Kapitola 2

Přehled poznatků

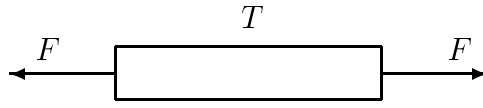
V této kapitole jsou shrnuty veškeré informace, které jsou potřebné pro studium dalšího textu. V první části se zabýváme některými méně známými aspekty termodynamiky, zejména její aplikací v mechanice pevných látek. Starší, avšak znamenitou učebnicí je Kvasnicova kniha [14], řada materiálových modelů je probrána Ogdenem [18], Holzapfelem [12] a Hauptem [9]. Aniž bychom v této fázi zabíhali do zbytečných podrobností, vysvětlujeme ty nejdůležitější principy na jednoduché úloze – případu jednoosé napjatosti, která nastává v osově zatížených prutech. Cílem je zde především ukázat funkci termodynamických zákonů, význam disipační nerovnosti pro návrh konstitutivních vztahů a současně upozornit na některé matematické operace, které se při tom často používají.

Druhá část se zaměřuje na rekapitulaci základních pojmů tensorové algebry. Ačkoliv tato sekce není ani zdaleka vyčerpávající, tvoří inherentní součást úvodního přehledu. Jedním z důvodů, proč bylo nutno zařadit tuto alespoň stručnou informaci, je potřeba zavést systematický přístup k označování tensorových veličin a operací s nimi. Tato koncepce se později prolíná s obsahem navazujících kapitol. Doporučená literatura je citována v úvodu sekce.

Ve třetí části se vracíme k rovnicím elasticity, tentokrát však s důrazem na prostoro-
vý charakter deformace a napětí a důsledky z toho plynoucí. Pro snažší pochopení materiálových symetrií je výhodné použít invarianty tensorů a jejich derivace. Zajímavá je též otázka konvexnosti (pozitivnosti energie), která hraje podstatnou roli v matematických důkazech existence a jednoznačnosti řešení. Těmi se sice nebudeme zabývat, výsledky však budou uplatněny při diskusi elastických parametrů a později též koeficientů viskozity. Jiný, neméně užitečný pohled, založený na grupových transformacích, nabízí Brdičkova kniha [5].

2.1 Termodynamika pevných látek

Uvažujme jednoosou úlohu podle Obr. 2.1. Zkušební homogenní tyč o délce l a průřezu A je staticky zatížena silou F . Měříme též absolutní (termodynamickou) teplotu T v kelvinech.



Obr. 2.1: Jednoosá napjatost. Průřez tyče je A , délka l .

Deformace považujeme za malé, tj. nerozlišujeme mezi výchozí a okamžitou délkou, $l = l_0$, stejně tak průřez zůstává přibližně konstantní, $A = A_0$. Z toho důvodu můžeme snadno definovat napětí

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

a poměrné prodloužení

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.2)$$

Napětí je zjevně homogenní – v každém průřezu stejné – a není tudíž funkcí souřadnic. Rozložení teploty rovněž předpokládáme homogenní. Později se na tato zjednodušení (malé deformace a homogenní pole) omezovat nebudeme, pro začátek je však výhodné problém maximálně zjednodušit.

V této chvíli ještě nebyl specifikován materiál, z něhož je tyč vyrobena, a v tomto ohledu je naše úloha zcela obecná. Obr. 2.1 může například znázorňovat válec s plynem apod.

2.1.1 První zákon termodynamiky

Vnitřní energie U představuje součet všech forem energií obsažených v tyči. Hustotu energie, vztaženou na jednotku objemu, označme jako u , tj.

$$u = \frac{U}{V} \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (2.3)$$

Tepelný výkon \dot{Q} ve wattech definujeme jako kladný, pokud teplo proudí dovnitř materiálu, a jako záporný, pokud je odváděno ven. Hustota tepelného toku je

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{V} \text{ [W/m}^3\text{]} \quad (2.4)$$

Analogicky pro mechanický výkon

$$\dot{w} = \frac{\dot{W}}{V} \text{ [W/m}^3\text{]} \quad (2.5)$$

Tento výraz můžeme ještě upravit

$$\dot{w} = \frac{\dot{W}}{V} = \frac{Fl}{Al} = \sigma \dot{\epsilon} \quad (2.6)$$

Poslední vzorec je naprosto univerzální. Později ukážeme, že platí i ve třech dimenzích, pro velké deformace a pro libovolný materiál. Můžeme jej proto použít jak v mechanice pevných látek, tak v mechanice tekutin.

První zákon termodynamiky bilancuje celkovou energii, mechanickou práci a přivedené teplo

$$\boxed{\dot{q} + \dot{w} = \dot{u}} \quad (2.7)$$

2.1.2 Druhý zákon termodynamiky

Zavedeme entropii S a její hustotu η pomocí

$$\eta = \frac{S}{V} \text{ [J/m}^3\text{K]} \quad (2.8)$$

Základní formulaci druhého zákona převezmeme z termodynamiky plynů

$$\boxed{\dot{\eta} \geq \frac{\dot{q}}{T}} \quad (2.9)$$

Pro obecně nehomogenní rozložení teplotního pole v kontinuu bude později nutno tuto formulaci zobecnit. Na tomto místě pouze připomeňme, že výskyt rovnítka “=” v předchozí nerovnosti je nutnou podmínkou pro to, aby byl termodynamický děj vratný. Není to však podmínka postačující.

Funkce u a η , vstupující do obou bilancí (2.7) a (2.9), musí být předem dány a určují typ materiálu. V další části ukážeme, že identifikace vnitřní energie a entropie vskutku definuje všechny podstatné materiálové vlastnosti. Tak například Hookeův zákon, popisující odezvu pružného tělesa, jednoznačně vyplývá z jisté struktury u a η . To se může zdát na první pohled poněkud překvapující.

2.1.3 Disipační nerovnost

Tepelná verze druhého zákona termodynamiky (2.9) může být nahrazena tzv. *disipační nerovností*. Ačkoliv se jedná o ekvivalentní vyjádření druhého zákona (v tomto odstavci nebudeme zavádět žádně nové fyzikální předpoklady), v mechanice kontinua se s takovou nerovností mnohem snáze pracuje.

Užitím (2.7) nejprve eliminujeme \dot{q} , což vede k nerovnosti

$$\eta T \geq \dot{q} = \dot{u} - \dot{w} \quad (2.10)$$

Časového přírůstku entropie se nyní zbavíme obratem známým jako Legendreova transformace. Člen na levé straně se doplní na derivaci součinu (podobně jako při integraci per partes)

$$\eta T = (\eta T)^\cdot - \eta \dot{T} \quad (2.11)$$

Dosazení zpět do (2.10) dává po jednoduché úpravě

$$-\eta \dot{T} + \dot{w} \geq \dot{u} - (\eta T)^\cdot = (u - \eta T)^\cdot \quad (2.12)$$

Oblá závorka má fyzikální rozměr hustoty energie, což motivuje následující definici

$$\psi := u - T\eta \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (2.13)$$

Nově zavedená energie, ψ , se nazývá Helmholtzova volná energie. Znaménko “:=” budeme používat ve smyslu “je definováno.”

Finální tvar disipační nerovnosti je

$$\boxed{-\eta\dot{T} + \dot{w} \geq \dot{\psi}} \quad (2.14)$$

Zhruba řečeno, část přivedené mechanické energie za jednotku času \dot{w} se v materiálu uloží ve formě využitelné energie $\dot{\psi}$ a zbytek se disipuje. Odvozená nerovnost plně nahrazuje formulaci (2.9) a v tomto tvaru ji také budeme dále využívat.

2.1.4 Helmholtzova volná energie

Volná energie ψ je definována vztahem (2.13). Pro její názornou interpretaci uvažujme isotermickou změnu $T = \text{konst.}$ mezi rovnovážnými stavy 1 a 2. S takovou situací se setkáváme dosti často, např. v klasické pružnosti. Podle disipační nerovnosti musí platit

$$\Delta w \geq \psi_2 - \psi_1 \quad (2.15)$$

Rozdíl energií na pravé straně nás upozorňuje na to, že ψ je stavová veličina. Má smysl mluvit o ψ_1 jako o energii přiřazené stavu 1 a o ψ_2 přiřazené stavu 2. Naopak práce není stavová veličina, takže $\Delta w \neq w_2 - w_1$. Symbol Δw je třeba chápat vcelku, přičemž příslušný integrál z \dot{w} je dráhově závislý.

Přejdeme nyní k cyklickému (kruhovému) ději $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. V průběhu zatížení, při přechodu $1 \rightarrow 2$, platí

$$\Delta w_z \geq \psi_2 - \psi_1 \quad (2.16)$$

Po odlehčení do původního stavu, $2 \rightarrow 1$, zase máme

$$\Delta w_o \geq \psi_1 - \psi_2 \quad (2.17)$$

Zařazením obou nerovností za sebe

$$\Delta w_z \geq \psi_2 - \psi_1 \geq -\Delta w_o \quad (2.18)$$

Předpokládejme navíc, že při zatížení je třeba dodávat práci, $\Delta w_z > 0$, a při odlehčení se část energie získá zpět, $\Delta w_o < 0$. Takto se například chová stlačovaná a uvolňovaná pružina. Je tedy $\Delta w_z = |\Delta w_z|$ a $\Delta w_o = -|\Delta w_o|$, a proto

$$|\Delta w_z| \geq \psi_2 - \psi_1 \geq |\Delta w_o| \quad (2.19)$$

Je vidět, že z materiálu nemůžeme dostat více energie, než tam bylo vloženo, což není jistě nijak překvapující. Zajímavější je si uvědomit, že ψ hraje roli deformační energie. Je to v principu využitelná energie, která se rovná vykonané práci pouze tehdy, když celý proces proběhl ideálně. V opačném případě se sice energie neztratí – zachová se jako vnitřní energie – ale nebude již plně k dispozici. To je podstata disipace.

Pojem deformační energie se používá v mechanice, pojem Helmholtzovy volné energie v termodynamice. Přes terminologickou různost je fyzikální obsah těchto pojmů

přesně stejný. Jsou to synonyma. Zajímavá je ještě jedna otázka: jak dalece se ψ liší od vnitřní energie? Odpověď dává bilanční rovnice (2.7). Její integrací získáme

$$\Delta q + \Delta w = u_2 - u_1 \quad (2.20)$$

a protože Δw je přibližně rovno $\psi_2 - \psi_1$ (v ideálním případě dokonce přesně), je zřejmé, že rozdíl mezi oběma energiemi závisí na množství tepla, které se během deformačního procesu vymění s okolím. To se může zdát na první pohled zanedbatelné, pravý opak je však pravdou. Číselnou představu dává příklad na konci Sekce 2.1. Z něj vyplývá, že rozdíl mezi ψ a u je značný, takže tyto funkce nesmíme v žádném případě zaměňovat.

2.1.5 Termoelasticita

Podívejme se nyní na některé příklady, které ukazují, jakým způsobem se termodynamické zákony využívají v mechanice materiálů.

Nechť je stav materiálu zkušební tyče jednoznačně popsán dvěma stavovými veličinami: poměrným prodloužením ϵ a teplotou T . Všechny ostatní stavové veličiny, ψ , u , η a σ , budou podle tohoto předpokladu vyjádřeny jako funkce dvou nezávisle proměnných ϵ a T . Takový hypotetický materiál nazýváme *termoelastickým*.

Časovou derivaci volné energie vypočteme podle pravidla o derivaci složených funkcí

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \quad (2.21)$$

Tento výraz dosadíme do disipační nerovnosti (2.14)

$$-\eta \dot{T} + \dot{w} \geq \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} \quad (2.22)$$

Podle (2.6) je $\dot{w} = \sigma \dot{\epsilon}$, čímž lze předchozí vztah převést na

$$-\left(\eta + \frac{\partial \psi}{\partial T}\right) \dot{T} + \left(\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}\right) \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (2.23)$$

Ukážeme, že pro splnění právě odvozené podmínky je nezbytné, aby byly obě závorky nulové, tj.

$$\boxed{\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}} \quad (2.24)$$

a současně

$$\boxed{\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}} \quad (2.25)$$

Tím jsme získali dva velmi důležité konstitutivní vztahy. Disipační nerovnost je splněna triviálně se znaménkem “=”.

Důkaz se opírá o podobné argumenty, jako odvození metody Lagrangeových multiplikátorů. Podmínka (2.23) platí obecně, musí tudíž platit i ve speciálním případě $\dot{T} = 0$. Potom

$$f(\epsilon, T) \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (2.26)$$

když jsme označili

$$f(\epsilon, T) := \sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \quad (2.27)$$

Pokud by f nebyla nulová, nastala by jedna z následujících možností

$$f > 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} \geq 0 \quad \text{nebo} \quad f < 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} \leq 0 \quad (2.28)$$

Podle předpokladu však f nezávisí na časové derivaci $\dot{\epsilon}$, která může být volena libovolně. To vede ke sporu – kdyby například byla v jistém stavu $f(\epsilon, T) > 0$, mohli bychom při konstantní teplotě deformaci zmenšit, $\dot{\epsilon} < 0$, což by v (2.28) porušilo první požadavek. Proto $f \equiv 0$ a platí (2.24). Analogicky se prokáže platnost (2.25).

Nakonec můžeme vypočítat sdělené teplo. Z definice (2.13) nejprve určíme vnitřní energii a tu derivujeme podle času

$$\dot{u} = (\psi + T\eta)' = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \dot{T}\eta + T\dot{\eta} \quad (2.29)$$

Vzhledem k (2.25) se prostřední dva členy zruší a pomocí (2.24) vyjde

$$\dot{u} = \sigma \dot{\epsilon} + T\dot{\eta} = \dot{w} + T\dot{\eta} \quad (2.30)$$

Porovnání se základní formulací prvního zákona termodynamiky (2.7) vede k výsledku $\dot{q} = T\dot{\eta}$, a tudíž pro tento model platí

$$\boxed{\dot{\eta} = \frac{\dot{q}}{T}} \quad (2.31)$$

To je ovšem (2.9) se znaménkem “=”, takže v tomto smyslu se jedná o ideální proces.

Na závěr ještě jednou zrekapitulujeme hlavní rovnice materiálového modelu termoeleasticity. Předpokládáme, že existuje deformační energie $\psi(\epsilon, T)$ s vlastnostmi

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.32)$$

Přenos tepla se určí ze vzorce

$$\dot{q} = T\dot{\eta} \quad (2.33)$$

Funkci $\psi(\epsilon, T)$ je nutné navrhnout ve shodě s experimentem. O tom pojednává další odstavec.

2.1.6 Duhamelův-Neumannův model

Nejjednodušší pojetí termoeleasticity vychází z toho, že celkové přetvoření je dáno součtem deformace od napětí a teplotní dilatace

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \quad (2.34)$$

Modul pružnosti E a součinitel délkové roztažnosti α budeme považovat za konstantní. Teplotní rozdíl

$$\Delta T = T - T_0 \quad (2.35)$$

je vztažen k teplotě okolí T_0 , např. $T_0 = 300$ K. Vyjádřením napětí získáme *Duhamelův-Neumannův* model materiálu

$$\boxed{\sigma = E(\epsilon - \alpha\Delta T)} \quad (2.36)$$

Jak dalece je tento model kompatibilní se vztahy (2.24), (2.25) a (2.31)?

Integrací napětí podle deformace určíme volnou energii

$$\psi(\epsilon, T) = \frac{1}{2}E\epsilon^2 - E\alpha\Delta T\epsilon + f(T) \quad (2.37)$$

kde $f(T)$ je libovolná funkce teploty. Entropie plyne z (2.25) jako

$$\eta(\epsilon, T) = -\frac{\partial\psi}{\partial T} = E\alpha\epsilon - \frac{df}{dT} \quad (2.38)$$

Ze vztahu (2.31) dostaneme sdělené teplo

$$\dot{q} = T\dot{\eta} = TE\alpha\dot{\epsilon} - T\frac{d^2f}{dT^2}\dot{T} \quad (2.39)$$

Označme

$$c(T) := -T\frac{d^2f}{dT^2} \quad (2.40)$$

Jelikož $f(T)$ byla libovolná funkce, zůstává i $c(T)$ prozatím neurčená. Pro přenos tepla tak dostáváme

$$\boxed{\dot{q} = \alpha TE\dot{\epsilon} + c\dot{T}} \quad (2.41)$$

První člen představuje tzv. *termomechanickou vazbu*. Je to množství tepla generované či pohlcené deformováním kontinua při konstantní teplotě. Tak například při zatížení tlakem je $\dot{\epsilon} < 0$ a nemá-li dojít k ohřevu ($\dot{T} = 0$), teplo je zapotřebí odvádět ven. Při zatížení tahem by naopak bylo nutné teplo přivádět.

Všimněme si ještě parametru c . Evidentně se jedná o *součinitel tepelné kapacity*. Ačkoliv jsme považovali E a α za konstantní, výsledek (2.40) naznačuje, že c je funkcí teploty. Vstupní předpoklady jistě nebyly zcela přesné, přesto však můžeme usoudit, že tepelná kapacita bude mnohem citlivější na změnu teploty než na změnu deformace či napětí. To se skutečně experimentálně potvrzuje, takže u pevných látek většinou nerozlišujeme mezi c_p a c_v .

Příklad

Uvažujme isotermickou tahovou zkoušku vzorku z oceli a zatížení 100 MPa. Odhadneme sdělené teplo a přetvárnou práci.

$$\Delta q = \alpha TE\Delta\epsilon = \alpha T\Delta\sigma \simeq 10^{-5} \times 300 \times 100 \times 10^6 = 3 \times 10^5 \text{ [J/m}^3\text{]}$$

Přetvárná práce je

$$\Delta w = \frac{1}{2}\sigma\epsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \simeq \frac{(10^8)^2}{2 \times 2 \times 10^{11}} = 0.25 \times 10^5 \text{ [J/m}^3\text{]}$$

Pro typické hodnoty materiálových konstant je vynaložená práce přibližně deskrát menší než sdělené teplo!

2.1.7 Cvičení

1. Odvoďte (2.25) z podmínky (2.23).
2. Uvažujme Duhamelův-Neumannův model s konstantními parametry α , E a c .

(a) Dokažte

$$\eta(\epsilon, T) = \alpha E \epsilon + c \ln \frac{T}{T_r}$$

kde T_r je referenční teplota, při níž $\eta(0, T_r) = 0$.

(b) Určete $\eta_2 - \eta_1$ a ukažte, že tento rozdíl nezávisí na volbě T_r .

3. Dosadte $\alpha = 10^{-5}$ 1/K, $E = 2 \times 10^5$ MPa, $c/\rho = 500$ J/kgK a $\rho = 8000$ kg/m³. Vypočítejte změnu entropie a porovnejte výsledky při těchto procesech:

(a) Ohřev volné tyče z 20° C na 100° C.

(b) Isotermické zatížení napětím z nuly na 100 MPa.

4. Zvolme $T_r = T_0$ a uvažujme isotermický děj $T = T_0$.

(a) Určete $\psi(\epsilon)$, $\eta(\epsilon)$ a $u(\epsilon)$.

(b) Zakreslete grafy funkcí $\psi(\epsilon)$, $T_0\eta(\epsilon)$ a $u(\epsilon)$.

2.2 Vektory, matice a tenzory

Pod pojmem tensor si inženýr zpravidla představí matici, zkušený fyzik symbol ověřený indexy a matematik lineární zobrazení. Maticové a především indexové pojetí, založené na složkové definici tensoru, je znamenitě zpracováno v Brdičkově *Mechanice kontinua* [5] a v dalších učebnicích, např. [10]. V podstatě z něj vychází famózní *Encyklopedie fyziky* z roku 1965 [7]. Velmi rozumný, čtivý a pro naše účely zcela postačující hybrid nabízí [6, 13] a využívá jej i Gurtin [8]. Matematický přístup tíhnoucí k diferenciální geometrii [16] je dnes sice moderní, avšak velmi abstraktní a podle názoru autora mnohdy zbytečně zatemňující fyzikální smysl věci. Vedle toho existují desítky jiných použitelných učebnic, při jejichž výběru pochopitelně hraje roli i vkus čtenáře.

Smyslem této podkapitoly není suplovat objemnou specializovanou literaturu, nýbrž vysvětlit systém označování veličin a popsat základní algebraické operace s tenzory. Využívat budeme všechny tři typy zápisů, tj. přímý (symbolický), složkový (indexový) a maticový (algebraický). Výhodou přímé notace je přehlednost a obecnost, většinu výrazů však budeme odvozovat v kartézské bázi bez aplikace náročného matematického aparátu. Poslední dvě varianty, maticová a indexová, jsou zřejmě ekvivalentní.

2.2.1 Definice, značení a operace s vektory

Vektory budeme chápat jako orientované úsečky. Vektoru \mathbf{v} v systému $\{x\}$ kartézských souřadnicových os je přiřazena trojice čísel v_1 , v_2 a v_3 , která definují polohu jeho koncového bodu. Tato čísla se nazývají *kartézské složky vektoru* a mohou být uspořádána

do jednosloupcové matice

$$\mathbf{v} \equiv \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Pro vektor tak máme k dispozici tři druhy zápisu. První z nich, \mathbf{v} , označuje vektor jako takový, další dva, $\{v\}$ a v_i , jeho kartézské složky. Obvyklým způsobem definujeme skalární součin

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_k v_k = \{u\}^T \{v\} = \{v\}^T \{u\} \quad (2.43)$$

Opakující se index, zde k , implikuje součet. Norma vektoru

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (2.44)$$

je délka úsečky.

V kartézském systému lze rovnoběžně s osami definovat trojici ortogonálních jednotkových vektorů \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 a \mathbf{e}_3 , tvořících ortonormální bázi

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad (2.45)$$

kde δ_{ij} je *Kroneckerův symbol*. Složky vektoru, v_i , jsou pravoúhlé průměty na souřadnicové osy, tj.

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.46)$$

Libovolný vektor můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci bázevých vektorů

$$\boxed{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i} \quad (2.47)$$

Koeficienty lineární kombinace jsou přímo složky vektoru.

Uvažujme nyní kartézskou ortogonální transformaci

$$[A] : \{x\} \rightarrow \{x'\} \quad (2.48)$$

Matice přechodu $[A]$ obsahuje po řádcích směrové kosiny nových os x'_1 , x'_2 a x'_3 vzhledem k původním osám x_1 , x_2 a x_3 , tj.

$$A_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.49)$$

Tato matice je ortonormální

$$[A]^{-1} = [A]^T \quad (2.50)$$

Transformační pravidla pro složky se odvodí snadno

$$\boxed{\{v'\} = [A]\{v\}, \quad v'_i = A_{ij}v_j} \quad (2.51)$$

pro libovolný vektor \mathbf{v} .

Přijetí obvyklé geometrické představy o vektorovém součinu¹ umožňuje elegantní definici složek *Levi-Civita tensoru* jako

$$\gamma_{ijk} := \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \quad (2.52)$$

V pravotočivém systému bude tato veličina rovna ± 1 při sudé, resp. liché permutaci indexů 123 a bude nulová, pokud se přinejmenším dva indexy budou shodovat. V levotočivém systému vyjdou znaménka opačně. Vektorový součin nyní můžeme vyjádřit v indexovém zápise pomocí

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad v_i = \gamma_{ijk} \omega_j r_k \quad (2.53)$$

Pokud bychom naopak jako primární přijali permutační definici koeficientů γ_{ijk} , bez zřetele na bázi či vůbec využití v tensorovém počtu, vektorový součin (2.53) by měl v různě orientovaných systémech různá znaménka. Nebyl by to pak pravý vektor, nýbrž tzv. *axiální vektor*.

2.2.2 Tensor jako lineární operátor

Předpokládejme, že složky nějakého vektoru \mathbf{t} lineárně závisejí na složkách jiného vektoru \mathbf{v} . Taková situace vzniká poměrně často, např. složky vektoru napětí jsou lineárními funkcemi složek normály plochy, na níž napětí působí, moment hybnosti tělesa lineárně závisí na jeho úhlové rychlosti atp. Ve všech těchto případech platí

$$\{t\} = [U]\{v\}, \quad t_i = U_{ij}v_j \quad (2.54)$$

pro nějakou matici $[U]$. Vektory \mathbf{t} a \mathbf{v} podléhají při změně báze transformaci (2.51), takže

$$[A]^T \{t'\} = [U][A]^T \{v'\} \quad \Rightarrow \quad \{t'\} = [A][U][A]^T \{v'\} \quad (2.55)$$

Ukazuje se, že i v čárkovaném systému platí maticový vztah (2.54), jestliže

$$[U'] := [A][U][A]^T, \quad U'_{ij} = A_{ik}A_{jt}U_{kl} \quad (2.56)$$

říkáme, že je dán *tensor druhého řádu* \mathbf{U} , definovaný svými kartézskými složkami U_{ij} vzhledem ke zvolené vektorové bázi. Transformační pravidlo (2.56) je plně konzistentní s dříve odvozenou transformací složek vektorů.

Výše uvedená definice tzv. kartézského tensoru zavádí veličinu \mathbf{U} nepřímou. Tento nedostatek se dá snadno odstranit. Zapomeňme na chvíli na předchozí přístup a jednoduše předpokládejme, že je dáno lineární zobrazení

$$\mathbf{t} = \mathcal{L}(\mathbf{v}) \quad (2.57)$$

Ve složkách

$$t_i = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathcal{L}(v_j \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathcal{L}(\mathbf{e}_j) v_j \quad (2.58)$$

¹Vektorový součin $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ produkuje vektor \mathbf{c} , který je kolmý k \mathbf{a} a \mathbf{b} , přičemž jeho orientace je dána pravidlem pravé ruky: směřují-li prsty od vektoru \mathbf{a} k vektoru \mathbf{b} , palec míří ve směru \mathbf{c} . Rigorózní definici lze nalézt v pojednání [4].

Jakmile je lineární zobrazení známo, lze připravit čísla

$$U_{ij} := \mathbf{e}_i \cdot \mathcal{L}(\mathbf{e}_j) \quad (2.59)$$

Rovnice (2.58) pak přejde přímo v (2.54) a dosazení transformačních vztahů za bázevé vektory v definici (2.59) ihned dává (2.56). Označíme $\mathbf{U} \equiv \mathcal{L}$ a píšeme

$$\mathbf{t} = \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{U}(\mathbf{v}) = \mathbf{U}\mathbf{v} \quad (2.60)$$

Oblou závorku bývá zvykem vynechávat, neboť zobrazení je lineární. Tímto způsobem je tensor druhého řádu \mathbf{U} definován jako lineární zobrazení typu

$$\mathbf{U} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad (2.61)$$

kde \mathcal{V} je vektorový prostor. Kartézské složky tensoru jsou určeny (2.59) a transformují se podle (2.56). Pro výpočet složek výsledného vektoru použijeme maticový vztah (2.54).

Z uvedeného je zřejmé, že existuje těsná souvislost mezi maticemi a tensory druhého řádu. Každému tensoru \mathbf{U} je přiřazena matice jeho kartézských složek $[U]$ a obráceně, každá matice reprezentuje tensor druhého řádu, pokud koeficienty této matice interpretujeme jako složky vztažené k určité vektorové bázi. Symbolický zápis (2.60) je formálně stejný jako maticový výraz (2.54). Existují i další analogie: uvážíme např. složené zobrazení

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}(\mathbf{U}(\mathbf{v})) = \mathbf{T}(\mathbf{U}\mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{U}\mathbf{v} \quad (2.62)$$

To je ekvivalentní, využijeme-li (2.54), indexovému vztahu

$$t_i = T_{ij}(U_{jk}v_k) = T_{ij}U_{jk}v_k \quad \Rightarrow \quad \{t\} = [T][U]\{v\} \quad (2.63)$$

Maticové násobení v tomto smyslu odpovídá složenému zobrazení. Podobným způsobem je možné zobecnit operace \mathbf{U}^{-1} , \mathbf{U}^T a $\det |\mathbf{U}|$. Snadno se dokáže, že výsledky těchto operací splňují transformační požadavek (2.56). Každému maticovému vztahu můžeme takto přiřadit formálně shodný tensorový výraz a z širšího pohledu lze dokonce ve většině aplikací tensory a matice ztotožnit.

Na závěr ještě definujeme *tensorový* neboli *vnější* součin. Tento typ součinu sice nebudeme používat, často se s ním však setkáme v literatuře. Nechť jsou složky tensoru druhého řádu utvořeny takto

$$[T] = \{a\}\{b\}^T, \quad T_{ij} = a_i b_j \quad (2.64)$$

Potom složky vektoru $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{v}$, kde \mathbf{v} je libovolný vektor, lze vyjádřit jako

$$t_i = T_{ij}v_j = (b_j v_j)a_i \quad (2.65)$$

Tensor \mathbf{T} , vytvořený vnějším součinem dvou vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} , zapisujeme

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \quad (2.66)$$

a podle předchozího má vlastnost

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} := (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} \quad (2.67)$$

pro každý vektor \mathbf{v} . Pomocí vnějšího součinu nyní zkonstruujeme jednotkovou tenzorovou bázi. Dokážeme, že libovolný tensor druhého řádu \mathbf{U} lze vyjádřit jako

$$\boxed{\mathbf{U} = U_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j} \quad (2.68)$$

Důkaz je snadný. Pro libovolný lineární operátor \mathbf{U} a libovolný vektor \mathbf{v} platí

$$\mathbf{U}\mathbf{v} = (U_{ij}v_j)\mathbf{e}_i = U_{ij}(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_i = U_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{v} \quad (2.69)$$

čímž získáme rozvoj (2.68).

2.2.3 Hlavní osy symetrického tensoru

Nechť \mathbf{U} je symetrický tensor druhého řádu, tj. tensor určený symetrickou maticí $[U]$. Podle Přílohy A.1 může být $[U]$ rozložena na součin tří matic

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (2.70)$$

Spektrální matice $[\Lambda]$ je diagonální matice, složená z vlastních čísel λ_k , kdežto modální matice $[\Phi]$ je ortonormální a obsahuje po sloupcích uspořádané vlastní vektory $\{\varphi_k\}$.

Přejdeme nyní k novému kartézskému systému $\{x'\}$, jehož osy míří ve směru vektorů $\{\varphi_i\}$. V prvním řádku matice přechodu budou směrové kosiny osy x'_1 , tj. koeficienty umístěné v řádkovém vektoru $\{\varphi_1\}^T$. Druhý a třetí řádek budou tvořit řádkové vektory $\{\varphi_2\}^T$ a $\{\varphi_3\}^T$. Matice přechodu má proto pro tento speciální souřadnicový systém tvar

$$[A] = [\Phi]^T \quad (2.71)$$

Dosazením do transformace (2.56) dostaneme

$$[U'] = [\Phi]^T[U][\Phi] = [\Phi]^T([\Phi][\Lambda][\Phi]^T)[\Phi] = [\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3] \quad (2.72)$$

Matice tensoru nabývá diagonální podoby.

V kontextu mechaniky byla zavedena následující terminologie. Vlastním vektorům se říká *hlavní směry* a vlastním číslům *hlavní hodnoty* tensoru. Osy souřadnicového systému, definované hlavními směry, nazýváme *hlavními osami*. Označení hlavních hodnot bývá většinou odvozeno od značení tensoru. Například hlavní hodnoty tensoru deformace ϵ , známé též jako hlavní deformace, jsou obvykle označovány ϵ_1 , ϵ_2 a ϵ_3 . Jedinou výjimkou jsou hlavní hodnoty pravostranného tensoru protažení \mathbf{U} , diskutovaného v Sekci 3.1.4, u kterých se přidržíme původního značení λ_1 , λ_2 a λ_3 . Důvodem je to, že levostranný tensor \mathbf{V} má stejná vlastní čísla. Modální matici bude vždy reprezentovat symbol $[\Phi]$.

2.2.4 Invarianty

Invariant je tensorový výraz, který se zachovává při transformaci souřadnic. Soustředíme se zejména na skalární funkce typu

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.73)$$

Nechť ϵ je symetrický² tensor druhého řádu a ϵ_{ij} a ϵ'_{ij} jeho složky ve dvou různých kartézských systémech. Pokud platí rovnost

$$I = f(\epsilon_{ij}) = f(\epsilon'_{ij}) \quad (2.74)$$

pro každé dva kartézské systémy, nazveme číslo I *invariantem*. Pravděpodobně nejznámějším příkladem invariantu je *stopa tensoru*, $\text{tr}(\epsilon)$, což je součet diagonálních složek

$$\text{tr}(\epsilon) := \epsilon_{ii} \quad (2.75)$$

Ačkoliv se jednotlivé složky při transformaci mění, není obtížné dokázat, že jejich součet zůstává zachován. Důkaz je ponechán jako cvičení.

Významnými invarianty jsou hlavní hodnoty tensoru. Úloha vlastních čísel má tvar

$$[\epsilon]\{\varphi_k\} = \epsilon_k\{\varphi_k\} \quad (\text{přes } k \text{ se nesčítá}) \quad (2.76)$$

Dosazením transformace (2.56) a vynásobením maticí přechodu zleva dostaneme

$$[\epsilon'][A]\{\varphi_k\} = \epsilon_k[A]\{\varphi_k\} \quad (\text{přes } k \text{ se nesčítá}) \quad (2.77)$$

Označíme-li

$$\{\varphi'\} = [A]\{\varphi_k\}, \quad \epsilon'_k = \epsilon_k \quad (2.78)$$

vidíme, že (2.77) představuje stejnou úlohu jako (2.76), ale v čárkovaném systému. Tím je dokázáno, že se hlavní hodnoty tensoru zachovávají, zatímco hlavní směry se transformují jako obyčejné vektory. Tento fakt má dalekosáhlé důsledky. Funkce (2.74) může být vyčíslena v libovolném systému, tedy i v hlavních osách. Potom

$$I = f(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \quad (2.79)$$

Odtud ovšem vyplývá, že libovolný invariant závisí pouze na třech číslech, ϵ_k , a také to, že jen tři invarianty mohou být současně nezávislé.

Vlastní čísla se obtížně počítají. Předchozí úvaha nás však přivádí na myšlenku, že bychom hlavní hodnoty mohli nahradit jinou, snáze dostupnou trojicí invariantů. Rozepsáním charakteristické rovnice

$$-\det|\epsilon - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (2.80)$$

zjistíme, že její koeficeinty I_1 , I_2 a I_3 musí být invarianty. Čísla I_k se totiž dají vyjádřit jako řešení soustavy tří lineárních rovnic (2.80) napsaných opakovaně pro tři obecně různé kořeny kubické rovnice. Protože již víme, že tyto kořeny nezávisí na volbě souřadnicového systému (hlavní hodnoty jsou invarianty) a I_k jsou jejich funkcí, musí být I_k rovněž invarianty. Lineární invariant je dán výrazem

$$I_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad (2.81)$$

kvadratický

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (2.82)$$

²Většinu tvrzení lze rozšířit i na nesymetrické tensor, nebude to však potřeba.

a kubický

$$I_3 = \det |\boldsymbol{\epsilon}| \quad (2.83)$$

Tyto tři koeficienty se nazývají *hlavní invarianty tensoru*.

Ani s trojicí hlavních invariantů nemusíme být zcela spokojeni, protože s determinanty se obtížně manipuluje. Místo toho lze zavést tzv. *mocninné invarianty*

$$\hat{I}_n := \frac{1}{n} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^n) \quad (2.84)$$

kde n je přirozené číslo. Mocnina tensoru $\boldsymbol{\epsilon}^n$ je definována prostřednictvím mocniny matice $[\boldsymbol{\epsilon}]^n$, viz též Příloha A.3. Protože $\boldsymbol{\epsilon}^n$ je tensor a stopa tensoru je invariant, jsou funkce \hat{I}_n také invariantní. Ve složkách

$$\hat{I}_1 = \epsilon_{ii}, \quad \hat{I}_2 = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{ji}, \quad \hat{I}_3 = \frac{1}{3} \epsilon_{ij} \epsilon_{jk} \epsilon_{ki} \quad (2.85)$$

Porovnáním dvou skupin invariantů, hlavních a mocninných, získáme tyto vztahy

$$I_1 = \hat{I}_1 = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}), \quad I_2 = \frac{1}{2} \hat{I}_1^2 - \hat{I}_2, \quad I_3 = \frac{1}{6} \hat{I}_1^3 - \hat{I}_1 \hat{I}_2 + \hat{I}_3 \quad (2.86)$$

Ukazuje se, že trojice \hat{I}_k jednoznačně určuje trojici I_k a ta zase, díky charakteristické rovnici (2.80), hlavní hodnoty tensoru. Jakoukoli invariantní funkci lze tudíž vyjádřit pomocí hlavních hodnot, hlavních invariantů anebo mocninných invariantů. Tento výsledek se znamenitě uplatňuje v teorii elasticity.

2.2.5 Cvičení

1. Odvoďte inverzní transformaci k (2.56).
2. Dokažte, že definice složek (2.59) implikuje transformační pravidlo (2.56).
3. Nechť matice $[U]$ a $[V]$ reprezentují tenzory druhého řádu. Ukažte, že jejich součin

$$[T] = [U][V]$$

se rovněž transformuje jako tensor druhého řádu.

4. Vyhledejte v literatuře, jak lze přímo definovat transpozici tensoru \mathbf{U}^T . Dokažte, že odpovídající maticí je $[U]^T$.
5. Je dána reálná matice

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

- (a) Určete vlastní čísla λ_1, λ_2 jako funkce U_{11}, U_{12}, U_{21} a U_{22} .
- (b) Dokažte, že pokud $[U]$ je symetrická, jsou tato čísla reálná.

6. Ukažte, že modální matice typu 3×3 je ortonormální, takže platí vztah

$$[\Phi]^T[\Phi] = [I]$$

Přesvědčte se o tom roznásobením a využitím faktu, že vlastní vektory tvoří ortonormální systém.

7. Dokažte, že pozitivně definitní matice má kladná vlastní čísla a obráceně, tj.

$$[U] \text{ sym+def} \Leftrightarrow \lambda_k > 0$$

Návod: Použijte spektrální rozklad.

8. Dokažte, že $\text{tr}(\epsilon)$ je invariant.

Návod: Dokažte $\epsilon'_{ii} = \epsilon_{kk}$.

9. Odvoďte (2.86).

2.3 Tensorový tvar modelů elasticity

Přejdeme nyní k prostorové napjatosti. I tentokrát budeme předpokládat existenci deformační energie, avšak při isotermickém zatížení $T = \text{konst}$. Hustota energie bude záviset na všech složkách tensoru deformace

$$\psi = \psi(\epsilon_{ij}) \quad (2.87)$$

Analogicky jako rovnice (2.24) se odvodí

$$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}}} \quad (2.88)$$

V tomto okamžiku se jedná jen o intuitivní tvrzení, neboť prozatím nemáme k dispozici prostorovou verzi disipační nerovnosti ani výraz pro výkon vnějších sil. Později, v Kapitole 5, však bude platnost tohoto vztahu exaktně dokázána, a to dokonce v kontextu velkých deformací.

Ze struktury konstitutivního modelu (2.88) vyplývá, že jednotlivé složky tensoru napětí na sobě nemohou být nezávislé – jsou totiž odvozeny z jediného potenciálu. Tím se také tento, tzv. *hyperelastický* model dostává do rozporu se starším Cauchyho předpokladem, v němž byly složky σ_{ij} obecně pokládány za nezávislé funkce typu

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}) \quad (2.89)$$

Cauchyho hypotéza je sice obecnější, ale fyzikálně nepodložená, neboť nezaručuje existenci elastické energie. V dalším proto dáme přednost relaci (2.88) a budeme zkoumat skryté vazby, které tento přístup k popisu elastického přetvoření látek nabízí.

2.3.1 Symetrie

Tensor napětí, jak bude dokázáno později, je symetrický, proto platí

$$\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ji}} \quad (2.90)$$

Takový požadavek splňuje symetrická funkce symetrického tensoru, pro něž $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Je obecnou skutečností, že symetrie tensoru napětí a deformace se vzájemně podmiňují, což bude podrobněji objasněno v části 4.4, věnované prvnímu zákonu termodynamiky a energeticky konjugovaným tensorům.

Konstitutivní rovnice je často užitečné linearizovat výpočtem totálního diferenciálu

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} d\epsilon_{kl} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} d\epsilon_{kl} \quad (2.91)$$

Definujeme tečný modul \mathbf{C} , což je také Hessova matice nebo Hessián funkce ψ , prostřednictvím složek

$$\boxed{C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}}} \quad (2.92)$$

Tečný modul je tensor čtvrtého řádu, který umožňuje vyjádřit závislost mezi malými přírůstky napětí a deformace v lineárním tvaru

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (2.93)$$

Díky již zmíněným symetriím obou tensorů vstupujících do výpočtu lze zaměňovat indexy i a j stejně jako k a l , tudíž

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (2.94)$$

Jedná se o tzv. *malé* symetrie.

Velice důležitou vlastností tečného modulu je *velká* neboli *energetická* symetrie. Pokud je ψ dostatečně hladká funkce, můžeme zaměnit pořadí derivování, odkud ihned plyne

$$\boxed{C_{ijkl} = C_{klij}} \quad (2.95)$$

Zde je na místě jistá opatrnost. Existují některé materiálové modely, např. model neasociované plasticity, u nichž spojitá diferencovatelnost energie do druhého řádu včetně není předem zaručena a tangenciální matice nemusí být symetrická. Ve většině případů se však s podobnými obtížemi nesetkáváme.

Věnujme se ještě Voigtově zápisu, jenž se s výhodou používá v experimentální mechanice a také v numerických metodách. Rozepsáním rovnice (2.93) a s uvážením symetrie tensorů napětí a deformace

$$\begin{pmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{12} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \\ 2d\epsilon_{12} \\ 2d\epsilon_{23} \\ 2d\epsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

Matice soustavy $[C]$ obsahuje 36 materiálových parametrů. Pokud jsou splněny podmínky energetické symetrie (2.95), stává se tato matice sama symetrickou. Například pravý horní koeficient C_{1131} je totožný s levým dolním koeficientem C_{3111} atd. Výsledný počet parametrů se tím redukuje na 21. Poznamenejme, že do vektoru deformace na pravé straně (2.96) dosazujeme zásadně dvojnásobky tensorových složek. Místo toho by se také daly vynásobit koeficienty v pravé polovině matice faktorem 2, tím by však matice ztratila svou případnou symetrii.

Naše úvahy zakončíme praktickou poznámkou. V metodě konečných prvků se pracuje s maticí tuhosti ve tvaru

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV \quad (2.97)$$

kde $[B]$ je matice derivací tvarových funkcí. Pokud je splněna podmínka energetické symetrie, tj. funkce ψ má spojitý Hessián, matice tuhosti je zaručeně symetrická.

2.3.2 Isotropní materiál

Deformační energie je obecně funkcí šesti nezávislých složek tensoru deformace. Alternativně lze použít hlavní hodnoty ϵ_1 , ϵ_2 a ϵ_3 , společně se specifikací hlavních os. Pokud je materiál isotropní, má ve všech směrech stejné vlastnosti a orientace hlavních os přestává hrát roli. Volná energie je pak funkcí pouze tří proměnných

$$\psi = \psi(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \quad (2.98)$$

V Sekci 2.2.4, pojednávající o invariantech, jsme dokázali, že trojice hlavních deformací může být nahrazena mocninnými invarianty, tedy

$$\boxed{\psi = \psi(\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3)} \quad (2.99)$$

Deformační energie v tomto případě nabývá vlastností standardního invariantu.

Napětí získáme z hyperelastické rovnice (2.88). S využitím věty o derivování složené funkce

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_1} \frac{\partial \hat{I}_1}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_2} \frac{\partial \hat{I}_2}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_3} \frac{\partial \hat{I}_3}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.100)$$

Dále je třeba vypočítat naznačené derivace. Ukážeme to na příkladě druhého invariantu. V indexovém zápise

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\epsilon^2) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{ji} \quad (2.101)$$

Tento výraz derivujeme jako součin funkcí

$$2 \frac{\partial \hat{I}_2}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \epsilon_{ji} + \epsilon_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ji}}{\partial \epsilon_{kl}} \quad (2.102)$$

Při derivování chápeme složky tensoru deformace jako nezávislé proměnné: derivace ϵ_{ij} podle ϵ_{kl} je rovna jedničce pouze tehdy, když $i = k$ a současně $j = l$, jinak je nulová.

$$2 \frac{\partial \hat{I}_2}{\partial \epsilon_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \epsilon_{ji} + \epsilon_{ij} \delta_{jk} \delta_{il} = \epsilon_{lk} + \epsilon_{lk} \quad (2.103)$$

Na závěr uplatníme podmínku symetrie

$$\frac{\partial \hat{I}_2}{\partial \epsilon_{kl}} = \epsilon_{lk} = \epsilon_{kl} \quad (2.104)$$

Stejným způsobem se ukáže

$$\boxed{\frac{\partial \hat{I}_1}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \hat{I}_2}{\partial \epsilon_{ij}} = \epsilon_{ij}, \quad \frac{\partial \hat{I}_3}{\partial \epsilon_{ij}} = \epsilon_{ik} \epsilon_{kj}} \quad (2.105)$$

Mocninné invarianty se derivují podobně jako polynomy.

Nyní se vrátíme k tensoru napětí. Dosazením do rovnice (2.100) dostaneme

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_1} \delta_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_2} \epsilon_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_3} \epsilon_{ik} \epsilon_{kj} \quad (2.106)$$

nebo v přímé notaci

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_1} \mathbf{I} + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_2} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_3} \boldsymbol{\epsilon}^2} \quad (2.107)$$

Odvozená rovnice představuje nejobecnější model isotropní elasticity. Jedná se o polynom druhého stupně v proměnné $\boldsymbol{\epsilon}$, jehož koeficienty jsou funkce invariantů tensoru deformace. Tento na první pohled možná překvapivý výsledek je přímým důsledkem Cayleyho-Hamiltonovy věty, kterou zde však nebudeme používat.

2.3.3 Hookeův zákon

Omezíme-li se na malé deformace, což je většině případů zcela dostačující, můžeme rovnici (2.107) linearizovat. To se dá provést několika způsoby. Zřejmě nejjednodušší a současně i instruktivní postup je vybrat takové varianty universálního modelu (2.107), které jsou lineární.

Analýzu hyperelastického vztahu (2.107) začneme od konce. Má-li být závislost napětí na deformaci lineární, je nezbytné, aby vymizel kvadratický člen, tj.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_3} = 0 \quad (2.108)$$

Deformační energie je proto funkcí pouze prvních dvou invariantů

$$\psi = \psi(\hat{I}_1, \hat{I}_2) \quad (2.109)$$

Druhý člen v rovnici (2.107) je lineární v $\boldsymbol{\epsilon}$, takže

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_2} = 2\mu \quad (2.110)$$

kde 2μ je materiálová konstanta. Odtud integrací

$$\psi = 2\mu \hat{I}_2 + \bar{\psi}(\hat{I}_1) \quad (2.111)$$

První člen výrazu (2.107) násobící jednotkový tensor musí být rovněž lineární, proto

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_1} = \frac{d\bar{\psi}}{d\hat{I}_1} = \lambda \hat{I}_1 \quad (2.112)$$

kde λ je druhá materiálová konstanta. Substitucí $\hat{I}_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon})$ a dosazením derivací zpět do vztahu (2.107) obdržíme výsledek ve tvaru

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.113)$$

To je rozšířený Hookeův zákon, obsahující dva nezávislé materiálové parametry. Konstanty λ a μ se nazývají *Lamého konstanty* a mají rozměr Pa.

Kromě Hookeova zákona jsme získali i odpovídající vztah pro energii. Integrace skalární funkce (2.112) dává

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2} \lambda \hat{I}_1^2 + \text{konst.} \quad (2.114)$$

V kombinaci s rovnicí (2.111) dospějeme k

$$\psi = \frac{1}{2} \lambda \hat{I}_1^2 + 2\mu \hat{I}_2 + \text{konst.} \quad (2.115)$$

nebo

$$\boxed{\psi = \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2(\boldsymbol{\epsilon}) + \mu \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^2)} \quad (2.116)$$

Aditivní integrační konstantu jsme bez újmy na obecnosti položili rovnu nule.

2.3.4 Kalibrace

Poté, co byly navrženy konstitutivní vztahy, můžeme přikročit k identifikaci materiálových konstant. Model je především třeba specializovat pro některé jednoduché zatěžovací módy.

Pro potřeby tahové zkoušky uvážíme nejprve jednoosou napjatost, kdy $\sigma_{11} \neq 0$ a ostatní složky napětí jsou nulové. Rozepsáním diagonálních členů (2.113) dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu \epsilon_{11} \\ 0 &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu \epsilon_{22} \\ 0 &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu \epsilon_{33} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Zbývající rovnice jsou identicky rovny nule. Z posledních dvou řádků plyne

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \epsilon_{11} \quad (2.118)$$

Materiálová konstanta na pravé straně má význam součinitel kontrakce, značíme ji ν a nazýváme *Poissonovo číslo*.

$$\boxed{\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11}} \quad (2.119)$$

Stopa tensoru deformace je rovna $\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = (1 - 2\nu)\epsilon_{11}$ a dosazením do prvního řádku soustavy (2.117) vyjde lineární vztah

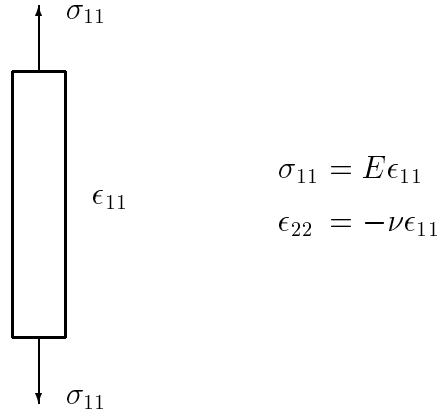
$$\sigma_{11} = \lambda(1 - 2\nu)\epsilon_{11} + 2\mu\epsilon_{11} \quad (2.120)$$

Ten můžeme zapsat jako

$$\boxed{\sigma_{11} = E\epsilon_{11}} \quad (2.121)$$

kde E je *Youngův modul pružnosti*.

V tomto okamžiku lze koncipovat tahovou zkoušku podle Obr. 2.2. Měřením poměrného prodloužení ϵ_{11} ve směru působícího napětí získáme modul pružnosti E a podaří-li se navíc zjistit kontrakci zkušební tyčky ϵ_{22} , lze odtud vypočítat Poissonovo číslo ν .



Obr. 2.2: Schema tahové zkoušky.

Alternativní výsledky nabízejí dynamické experimentální metody, založené buďto na měření rychlosti šíření elastických vln [19], jak to ostatně již v roce 1807 uskutečnil Thomas Young, nebo moderní postupy využívající rezonanční spektroskopii [17].

Dalším důležitým zatěžovacím stavem, znázorněným na Obr. 2.3, je hydrostatický mód, charakterizovaný tlakem p . Stejně jako v předchozím případě rozepíšeme diagonální rovnice

$$\begin{aligned} -p &= \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu\epsilon_{11} \\ -p &= \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu\epsilon_{22} \\ -p &= \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) + 2\mu\epsilon_{33} \end{aligned} \quad (2.122)$$

zatímco ostatní složky jsou nulové. Řešením je

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \frac{-p}{3\lambda + 2\mu} \quad (2.123)$$

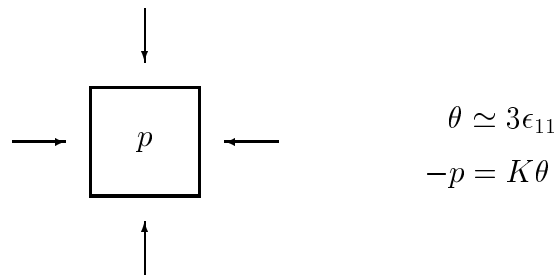
Označme písmenem a rozměr stlačené krychle na Obr. 2.3 a určíme poměrnou změnu objemu, θ , definovanou jako

$$\theta := \frac{a^3 - a_0^3}{a_0^3} = (1 + \epsilon_{11})^3 - 1 \simeq 3\epsilon_{11} \quad (2.124)$$

kde a_0 je rozměr krychle před zatížením. Pokud je deformace malá, můžeme zanedbat vyšší mocniny ϵ_{11} , jak v rovnici (2.124) naznačeno, a vztah (2.123) je pak ekvivalentní

$$\boxed{-p = K\theta} \quad (2.125)$$

Zde K je *modul objemové pružnosti*.



Obr. 2.3: Trojosé zatížení hydrostatickým tlakem.

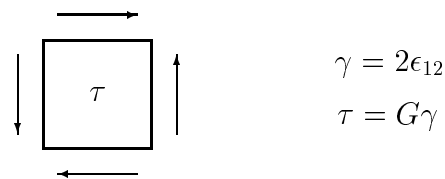
Nakonec se budeme věnovat zatížení smykem τ podle Obr. 2.4. S přihlédnutím k symetrii ($\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$) je aktivní jen jedna rovnice (2.113), a to

$$\tau = 2\mu\epsilon_{12} \quad (2.126)$$

Zavedeme-li jako zkos dvojnásobek poměrné deformace, $\gamma = 2\epsilon_{12}$, a modul pružnosti ve smyku $G = \mu$, můžeme psát

$$\boxed{\tau = G\gamma} \quad (2.127)$$

Tato zatěžovací konfigurace se nazývá *čistý smyk* a neměla by být zaměňována s pojmem *prostý smyk*, což je kinematický mód diskutovaný později na str. 43.



Obr. 2.4: Zatížení čistým smykem.

Postupně jsme definovali tři páry elastických konstant: matematické (λ, μ), inženýrské (E, ν) a fyzikální (K, G). Převodní vzorce jsou přehledně shrnuty v Tab. 2.1. Každá z těchto dvojic se nejlépe uplatní v jiné situaci. Matematické (Lamého) konstanty přirozeně vyplývají z termodynamické teorie; inženýrské konstanty jsou jednak přímo měřitelné a jednak je lze využít v techniky důležitých případech čistého smyku a jednoosé napjatosti; přednosti fyzikálních konstant zase vyniknou v materiálovém modelování. Velkou výhodou tensorového přístupu, který byl popsán v této kapitole, je, že závislosti mezi parametry, např. známý vztah

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.128)$$

apod., automaticky plynou z obecné teorie a není nutné je nijak speciálně odvozovat.

2.3.5 Konvexnost

Téměř vždy se předpokládá, že deformační energie musí být kladná, přesněji, že musí být splněno

$$\forall \boldsymbol{\epsilon} \neq \mathbf{0} : \psi > 0, \quad \psi(\mathbf{0}) = 0 \quad (2.129)$$

Tabulka 2.1: Elastické konstanty.

$$\begin{array}{ll}
K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)} & G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\
\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = K - \frac{2}{3}G & \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \\
E = \frac{9KG}{3K+G} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} & \nu = \frac{3K-2G}{2(3K+G)} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}
\end{array}$$

Tento zdánlivě samozřejmý předpoklad, obvykle přijímaný bez jakéhokoliv vysvětlení, však nejenže neplyne z žádného fyzikálního zákona, ale navíc je obecně i nesprávný. Například materiály, které za jistých podmínek existují ve více fázích, vykazují nestability v průběhu energetických funkcí, což paradoxně může vést ke spontánnímu uvolňování energie (poklesu ψ) dokonce z výchozího rovnovážného stavu. Ukazuje se, že požadavky pozitivnosti, konvexnosti či polykonvexnosti volné energie nesouvisejí s termodynamikou, nýbrž se stabilitou systému, a tím i s existencí a jednoznačností řešení.

Pro lineárně elastický materiál, určený funkcí (2.116), a pro malé deformace lze ovšem předpoklad pozitivnosti rozumně akceptovat. V hlavních osách potom platí

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2}\lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 + \mu(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \geq 0 \quad (2.130)$$

Na první pohled by se mohlo zdát, že splnění nerovnosti pro libovolný tensor $\boldsymbol{\epsilon}$ vyžaduje, aby Lamého konstanty byly kladné. Z této domněnky vychází i Brdička ve své knize [5]. Skutečnost je však překvapivě jiná! Především si uvědomíme, že výše uvedená funkce je kvadratická forma ve třech proměnných. Tu je možno zapsat v maticovém tvaru

$$2\psi = \{\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3\} \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (2.131)$$

Řídící matice této kvadratické formy musí být pozitivně definitní.

Podle Cvičení 7 na str. 21 je symetrická matice pozitivně definitní právě tehdy, když jsou všechna její vlastní čísla kladná. Tento výsledek nyní můžeme s výhodou využít. První vlastní vektor uhodneme snadno: je evidentní, že

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = (3\lambda + 2\mu) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.132)$$

Fyzikálně to znamená, že se podařilo najít takové zatížení, které vyvolává proporciálně stejnou deformaci. V konkrétním případě jde o hydrostatický mód, v němž jsou všechna

hlavní napětí shodná a rovna hydrostatickému tlaku. Na základě této analogie snadno najdeme další vlastní vektory. Vyzkoušíme čistý smyk,

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 2\mu \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.133)$$

anebo

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = 2\mu \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (2.134)$$

V situaci, kdy je součet hlavních napětí roven nule, mluvíme o *deviátorovém* zatížení.³ Zbývající deviátorový mód již není nezávislý, ale je lineární kombinací předchozích dvou. K dispozici tak máme tři vlastní čísla

$$\kappa_1 = 3\lambda + 2\mu = 3K, \quad \kappa_{2,3} = 2G \quad (2.135)$$

První z nich je jednoduché, druhé a třetí dvojnásobné.

Z podmínky pozitivní definitnosti vyplývají požadavky na moduly pružnosti ve smyku a objemové pružnosti takto:

$$2G = \frac{E}{1 + \nu} > 0 \quad \text{a současně} \quad 3K = \frac{E}{1 - 2\nu} > 0 \quad (2.136)$$

Nic nebylo prozatím řečeno o E . Předpokládejme $E < 0$, což vynucuje

$$\nu < -1 \quad \text{a současně} \quad \nu > \frac{1}{2} \quad (2.137)$$

Tuto podmínku není možné splnit, proto $E > 0$, a tudíž

$$\boxed{E, K, G > 0, \quad \nu \in (-1, \frac{1}{2})} \quad (2.138)$$

Poissonovo číslo může být záporné! Vraťme se k Lamého konstantám. Zřejmě $\mu > 0$ a podle Tab. 2.1 je

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \in (-\infty, \infty) \quad (2.139)$$

Vhodnou volbou E a ν lze vytvořit libovolnou hodnotu λ .

2.3.6 Cvičení

1. Odvoďte (2.96) z (2.93).
2. Ověřte symetrii (2.96) a dokažte, že počet nezávislých koeficientů v matici dimenze N je $N(N + 1)/2$. Je to Gaussův vzorec pro součet aritmetické řady s diferencí jedna.

³Termín deviátor vznikl ze slova deviace-odchylka. Rozumí se tím odchylka od perfektní napjatosti, kterou by způsobil dokonale isotropaní tlak. Deviátor je vlastně 'odchylník' od esteticky optimální konfigurace.

3. Dokažte, že matice tuhosti (2.97) je symetrická.
Návod: Transponujte matici v integrandu.
4. Odvoďte (2.105).
5. Vyhledejte znění Cayleyho-Hamiltonovy věty a vysvětlete, proč se v rovnici (2.107) vyskytuje nejvýše druhá mocnina.
6. Odvoďte vztahy uvedené v Tab. 2.1.
7. Odvoďte (2.131) z (2.130) a dokažte, že matice kvadratické formy je Hessián energie vyjádřený v hlavních osách.

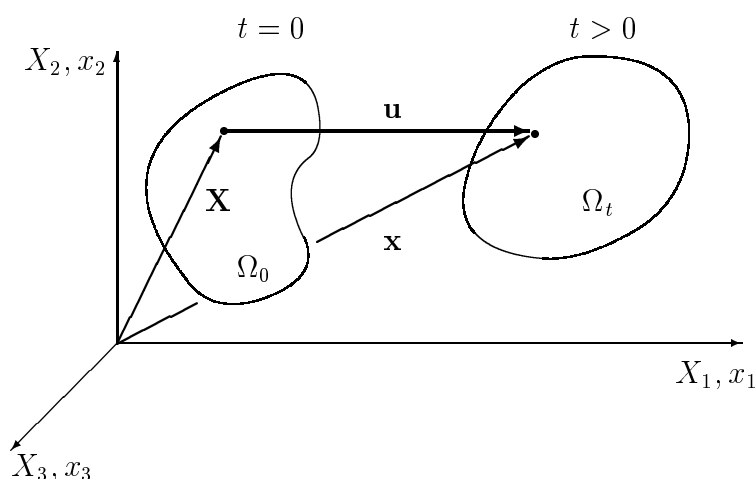
Kapitola 3

Kinematika

Základní kinematické veličiny vyplývají z Obr. 3.1. Bod tělesa, definovaný průvodičem \mathbf{X} , nazýváme *materiálový bod* (někdy též hmotný bod nebo částice). Pro označení bodu použijeme stejný symbol jako pro jeho průvodič. V tomto smyslu budeme psát $\mathbf{X} \in \Omega_0$. Libovolná částice \mathbf{X} se v čase t přemístí do nové pozice \mathbf{x} vektorem posunutí \mathbf{u} . Je tedy

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}} \quad (3.1)$$

Polohový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ specifikuje *bod prostoru*. Průvodiče \mathbf{X} a \mathbf{x} umožňují zavést dva typy souřadnic: *materiálové souřadnice* X_i (Lagrangeovy) a *prostorové souřadnice* x_j (Eulerovy). Všechny souřadnice budeme vztahovat ke společné kartézské vektorové bázi.



Obr. 3.1: Přetvoření kontinua.

Kinematický rozbor je v rámci této kapitoly rozdělen na dvě části. V první části je vysvětlen Lagrangeův popis. Pro něj je typické zavedení dvou množin: pevně zvolené referenční oblasti Ω_0 a přetvořené oblasti Ω_t . Přetvořená oblast je proměnná a obsahuje v čase t tytéž materiálové částice jako referenční oblast na počátku, $t = 0$. Eulerovský popis je naopak charakterizován tím, že se v prostoru pevně zvolí kontrolní objem Ω ,

který ovšem bude v různých časech obsahovat různé částice. Úlohu nebudeme linearizovat ani jinak zjednodušovat, tj. deformaci kontinua budeme obecně považovat za velkou. Za tohoto předpokladu jsou oba kinematické přístupy zcela rovnocenné.

3.1 Lagrangeův popis

V lagrangeovském (materiálovém) pojetí jsou všechna fyzikální pole definována vzhledem k Ω_0 jako funkce souřadnic X_i . Primární veličinou je pole posunutí $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, které prostřednictvím (3.1) zavádí funkci

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) =: \chi(\mathbf{X}, t) \quad (3.2)$$

s počáteční podmínkou

$$\chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X} \quad (3.3)$$

Tato funkce mapuje v libovolném čase t oblast Ω_0 na Ω_t , neboli

$$\chi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \quad (3.4)$$

Znaménko ‘=:’ v (3.2) bylo i tentokrát použito ve významu definice.

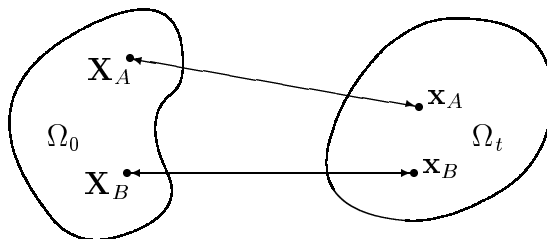
Představme si nyní, že jsou v Ω_0 dány dva různé body $\mathbf{X}_A \neq \mathbf{X}_B$. Podle Obr. 3.2 se tyto body zobrazí na jiné dva body $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B \in \Omega_t$. Předpokládáme-li, že dvě různé materiálové částice nemohou v tomtéž čase zaujmout stejné místo v prostoru, bude $\mathbf{x}_A \neq \mathbf{x}_B$. Jak je vidět z Obr. 3.2, každému \mathbf{X} lze pak jednoznačně přiřadit \mathbf{x} a obráceně. Zobrazení χ je tudíž regulární a existuje inverze

$$\chi^{-1} : \Omega_t \rightarrow \Omega_0 \quad (3.5)$$

Zřejmě můžeme psát

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

Odtud mimo jiné vyplývá, že každé fyzikální pole může být vyjádřeno buďto jako funkce argumentů X_i, t , nebo x_j, t . Zobrazení (3.4) a (3.5) budeme pokládat za dostatečně hladká.



Obr. 3.2: Regulárnost deformace.

3.1.1 Gradient posunutí a deformační gradient

Vektor posunutí \mathbf{u} závisí na souřadnicích X_i , takže lze zavést dvouindexovou veličinu

$$z_{ij} := \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (3.7)$$

Celkem snadno se ukáže, že koeficienty z_{ij} splňují pravidla pro transformaci tenzoru druhého řádu. Proto má smysl přímý zápis

$$\boxed{\mathbf{z} := \text{Grad } \mathbf{u}} \quad (3.8)$$

v němž \mathbf{z} nazýváme *gradient posunutí*.

Operaci ‘gradient’ je možno uplatnit na libovolný skalár, vektor nebo tensor, čímž se řád veličiny zvyšuje o jedničku. Například gradient skaláru je vektor a gradient vektoru je tensor druhého řádu. Velké počáteční písmeno operátoru ‘Grad’ nás upozorňuje na to, že se derivuje podle materiálových souřadnic v Ω_0 . Více o tensorové analýze nalezneme ve skvělé Gurtinově knize [8]. V konkrétním případě je význam pojmu gradient jasný ze složkového výrazu (3.7).

Podobně jako vektor posunutí, je též průvodič \mathbf{x} funkcí X_i . Dospějeme tak k definici

$$F_{ij} := \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.9)$$

neboli

$$\boxed{\mathbf{F} := \text{Grad } \mathbf{x}} \quad (3.10)$$

Tensor druhého řádu \mathbf{F} je v mechanice kontinua znám pod názvem *deformační gradient*. V matematickém kontextu se vzhledem k (3.4) jedná o Jacobiho matici zobrazení χ . Tím se budeme ještě zabývat podrobněji.

Souvislost mezi oběma gradientními veličinami vyjde najevo, pokud dosadíme za x_i do (3.9). Dostaneme

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i + u_i) = \delta_{ij} + z_{ij} \quad (3.11)$$

Kroneckerův symbol, δ_{ij} , představuje prvky jednotkové matice, takže

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{z} + \mathbf{I}} \quad (3.12)$$

Přepočítání mezi \mathbf{F} a \mathbf{z} je velice snadný.

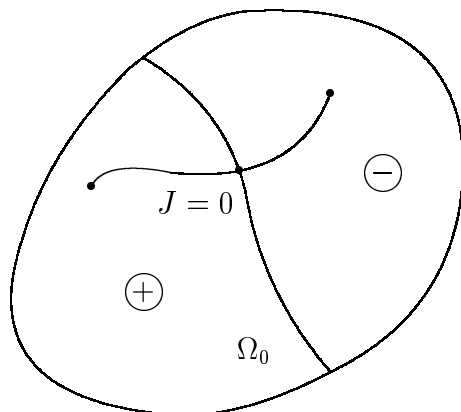
Jacobián zobrazení

Jak již bylo řečeno, deformační gradient \mathbf{F} odpovídá z matematického hlediska Jacobiho matici zobrazení $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$. Důsledkem předpokládané hladkosti zobrazení (3.4) a (3.5) je požadavek

$$J := \det |\mathbf{F}| \neq 0 \quad (3.13)$$

Z Obr. 3.3 je navíc okamžitě zřejmé, že determinant J musí být buďto kladný, anebo záporný, a to všude v Ω_0 . Ve skutečnosti totiž nemůže nastat situace znázorněná na

obrázku, kdy by byl v některém bodě $J > 0$ a v jiném bodě $J < 0$. To by znamenalo, že by se oblast Ω_0 dala rozdělit na dvě nebo více částí, mezi nimiž by probíhala hranice, kde by se hodnota jacobíanu měnila z kladné na zápornou. Podle předpokladu je však J spojitá funkce souřadnic X_i , takže podél hranice by pak muselo být $J = 0$, což jsme předem vyloučili.



Obr. 3.3: Pozitivnost jacobíanu.

Zbývá rozhodnout o znaménku. K tomu je třeba využít větu o substituci v integrálech. Objem tělesa v čase t je dán kterýmkoliv z integrálů

$$\int_{\Omega_t} dV_t = \int_{\Omega_0} J dV_0 > 0 \quad (3.14)$$

Protože objem regulárně zdeformovaného tělesa musí zůstat kladný, je nutné aby

$$\boxed{J = \det |\mathbf{F}| > 0} \quad \text{všude v } \Omega_0 \quad (3.15)$$

Rovnost (3.14) platí nejen pro celé těleso, ale též pro každou jeho část. Zvolíme-li velmi malý kontrolní objem $V_0 \subset \Omega_0$, na němž bude funkce J prakticky konstantní, vyjde

$$V_t \simeq J V_0 \quad (3.16)$$

kde $V_t \subset \Omega_t$. Jacobián tudíž interpretujeme jako poměr lokálních objemů.

Zjistili jsme, že deformační gradient může být reprezentován v podstatě libovolnou reálnou (obecně nesymetrickou) maticí typu 3×3 . Tato matice však musí být regulární a musí mít kladný determinant. Stav $J = 0$ na sebemenším objemu by představoval nekonečně velkou kompresi, při níž by se konečný objem stlačil do bodu s nulovým rozměrem. Tím by vznikla singularita. Záporný objem, $J < 0$, dokonce odpovídá bizarní představě materiálu obráceného naruby.

Inverze deformačního gradientu

Stejným způsobem, jakým jsme pracovali se zobrazením χ , můžeme naložit i s jeho inverzí χ^{-1} . Derivací funkce (3.6) definujeme

$$F_{ij}^{-1} := \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (3.17)$$

Přesvědčíme se, že pro příslušné matice v důsledku této definice platí

$$[F]^{-1}[F] = [I] \quad (3.18)$$

V indexovém zápise

$$F_{ik}^{-1}F_{kj} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} \quad (3.19)$$

když jsme využili větu o derivování složené funkce.

Deformační gradient \mathbf{F} má svou přirozenou inverzi \mathbf{F}^{-1} , která vznikne buďto jako gradient inverzní relace, nebo přímým invertováním matice $[F]$. Ukazuje se, že pro kartézské tenzory jsou i v tomto případě symboly \mathbf{F}^{-1} a $[F]^{-1}$ zaměnitelné.

Příklad 1: zobrazení oblasti

Uvažujme transformaci souřadnic

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_1 + at^2 \\ x_2 &= X_2 + bX_2t + ct^2 \end{aligned} \right\} a, b, c \in \mathbb{R} \quad (3.20)$$

Uvedená transformace je zcela smyšlená a nemá bezprostřední předlohu v žádném fyzikálním problému. Účelem tohoto příkladu je pouze ilustrovat vlastnosti právě definovaných kinematických veličin.

V první řadě je nutné se přesvědčit, zda navržená transformace vůbec v principu odpovídá nějaké uskutečnitelné deformaci kontinua. Na počátku procesu musí průvodice všech bodů splývat s jejich výchozí polohou. Dosazením $t = 0$ zjistíme

$$\begin{aligned} x_1(X_1, X_2, t = 0) &= X_1 \\ x_2(X_1, X_2, t = 0) &= X_2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tím je ověřena počáteční podmínka (3.3). Dále musíme vyšetřit regulárnost. Inverzní zobrazení získáme řešením soustavy rovnic (3.20) vzhledem k X_1, X_2 jako

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - at^2 \\ X_2 &= \frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Evidentní podmínkou řešitelnosti je $1 + bt \neq 0$. Je-li b kladné číslo, nevzniká žádný problém, neboť $t \geq 0$. Pokud je b záporné, řešení existuje jen pro čas menší než $1/|b|$. V obou případech je

$$1 + bt > 0 \quad (3.23)$$

Transformace (3.20) je tedy v zásadě korektní a představuje jistou deformaci kontinua.

Nyní stanovíme deformační gradient v maticovém tvaru.

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + bt \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Jacobián je determinant

$$J = \det |\mathbf{F}| = 1 + bt \quad (3.25)$$

Vidíme, že požadavek pozitivnosti jacobíanu je ekvivalentní podmínce řešitelnosti (3.23). Invertování matice (3.24) dává

$$[F]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+bt} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

což je přesně stejný výsledek, jako kdybychom derivovali (3.22) podle x_1 a x_2 .

Představíme-li si oblast Ω_0 jako jednotkový čtverec, bude se oblast Ω_t posouvat a současně přetvářet v obdélník. Šířka obdélníku zůstane zachována, zatímco výška bude mít okamžitý rozměr $1 + bt$. Nyní je jasné, že pro $b < 0$ bude docházet ke kontrakci, až v čase $t = 1/|b|$ obdélník zkolabuje do úsečky. Další popis děje by ztrácel smysl. Naopak při kladném b existuje řešení v celém intervalu $t \in [0, \infty)$. Jacobián zde vyjadřuje poměr plochy obdélníka k původní jednotkové ploše čtverce.

3.1.2 Greenův-Lagrangeův tensor deformace

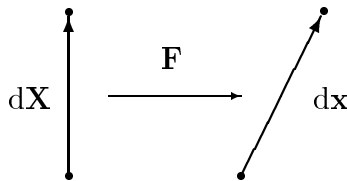
Dobrym východiskem pro posouzení deformace kontinua je geometrická interpretace deformačního gradientu. Výpočtem totálního diferenciálu zobrazení (3.2) obdržíme

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \quad (3.27)$$

což je násobení matice $[F]$ vektorem $d\{X\}$, tedy

$$\boxed{d\{x\} = [F] d\{X\}} \quad (3.28)$$

V této souvislosti chápeme deformační gradient jako linearizované zobrazení, které mapuje orientovanou úsečku $d\mathbf{X}$ z referenční oblasti Ω_0 na deformovanou úsečku $d\mathbf{x}$ v aktuální konfiguraci Ω_t . Situace je znázorněna na Obr 3.4.



Obr. 3.4: Přetvoření infinitesimální úsečky.

Potřeba měřit vzdálenost soumžných bodů motivuje zavedení metriky. Označme jako dL délku úsečky v Ω_0 . Pomocí Pythagorovy věty určíme

$$dL = \|d\mathbf{X}\| = \sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}} \quad (3.29)$$

Zde je výhodnější přejít k algebraické notaci

$$(dL)^2 = d\{X\}^T d\{X\} \quad (3.30)$$

Stejným způsobem změříme délku přetvořené úsečky

$$(dl)^2 = d\{x\}^T d\{x\} = d\{X\}^T [F]^T [F] d\{X\} = d\{X\}^T [C] d\{X\} \quad (3.31)$$

Označili jsme

$$[C] := [F]^T [F] \quad (3.32)$$

Tato matice je symetrická a pozitivně definitní (důkaz není obtížný a je ponechán jako cvičení). Z (3.31) je vidět, že řídicí matice kvadratické formy, $[C]$, zobecňuje Pythagorovu větu pro výpočet vzdálenosti. Kromě toho víme, že vynásobením dvou matic příslušejících tenzorům druhého řádu vznikne ve vztahu (3.32) opět matice tenzoru druhého řádu. Ten je znám jako *metrický tenzor*,

$$\boxed{\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}} \quad \text{sym+def} \quad (3.33)$$

V mechanice kontinua se metrika \mathbf{C} nazývá *Cauchyho-Greenův deformační tenzor*.

Vraťme se k diskusi problému, jenž je znázorněn na Obr. 3.4. Rozdíl kvadrátů délek úseček je

$$(dl)^2 - (dL)^2 = d\{X\}^T ([C] - [I]) d\{X\} = 2 d\{X\}^T [e] d\{X\} \quad (3.34)$$

kde

$$[e] := \frac{1}{2}([C] - [I]) \quad (3.35)$$

Symetrická matice $[e]$ tudíž předurčuje změnu délky libovolného úseku, a to nezávisle na jeho orientaci. Pokud v nějakém bodě kontinua vymizí složky e_{ij} , je v libovolném směru $dl = dL$. Tím jsme získali objektivní míru přetvoření. *Greenův-Lagrangeův tenzor deformace*, ve skratce GL tenzor, je definován jako

$$\boxed{\mathbf{e} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})} \quad \text{sym} \quad (3.36)$$

Dosazením gradientu posunutí \mathbf{z} (3.12) a roznásobením dostaneme jiný výraz

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{z}^T + \mathbf{z}^T \mathbf{z}) \quad (3.37)$$

nebo ve složkách

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (3.38)$$

Greenův-Lagrangeův tenzor nemá přímý geometrický význam – vznikl na základě odečtení čtverců vzdáleností. Přestože je to abstraktní veličina, již v následující Sekci 3.1.3 bude mnohé objasněno na jednoduchých příkladech.

Tensor malé deformace

V reálných problémech bývají derivace posunutí podle souřadnic malá čísla. Například při deformaci metrového objektu o jeden milimetr budou složky gradientu posunutí

řádově 10^{-3} . Za takových okolností můžeme zanedbat kvadratický člen v (3.37), což nás přivádí k definici *tensoru malé deformace*

$$\boxed{\boldsymbol{\epsilon} := \frac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{z}^T)} \quad \text{sym} \quad (3.39)$$

Ve složkovém zápise

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.40)$$

Nebylo by dobré se domnívat, že $\boldsymbol{\epsilon}$ je nějaká přibližná veličina. Právě naopak, definice (3.39) je exaktní a zachovává si svůj přesný význam i pro velké hodnoty z_{ij} .

Otázka, kterou je nutno si spíše položit, je tato: za jakých podmínek se dá tensor malé deformace bez potíží použít a za jakých nikoli? V této chvíli můžeme pouze tvrdit, že $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \mathbf{e}$, když $\mathbf{z} \rightarrow 0$, ale to je prozatím velmi neúplná informace. Více bude zřejmé z příkladů, uvedených v sekci 3.1.3.

Matematické vlastnosti GL tensoru

Ze vztahu (3.34) je zřejmé, že pro $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ je $dl = dL$. Kdyby se nám podařilo dokázat také obrácené tvrzení, platilo by

$$\boxed{\mathbf{e} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall d\mathbf{X} : dl = dL} \quad (3.41)$$

Implikace zleva doprava je jasná, zbývá dokázat druhou.

Problém formulujeme v algebraickém tvaru následujícím způsobem. Máme dokázat

$$\forall \{X\} : \{X\}^T [e] \{X\} = 0 \quad \Rightarrow \quad [e] = [0] \quad (3.42)$$

Obecně to tak zcela jistě být nemůže; stačí si představit antisymetrickou matici, která každému vektoru přiřazuje vektor k němu kolmý. Kvadratická forma na levé straně (3.42) je v takovém případě nulová, ačkoliv sama matice nulová není. My však víme, že \mathbf{e} je symetrický tensor, což zásadně mění situaci. Ze spektrálního rozkladu plyne

$$[e] = [\Phi][e'][\Phi]^T, \quad \text{kde } [e'] = \text{diag}[e_1, e_2, e_3] \quad (3.43)$$

Dosazením do (3.42)

$$\{X\}^T [e] \{X\} = \{Y\}^T [e'] \{Y\} = e_1 Y_1^2 + e_2 Y_2^2 + e_3 Y_3^2 \quad (3.44)$$

Označili jsme

$$\{Y\} := [\Phi]^T \{X\} \quad (3.45)$$

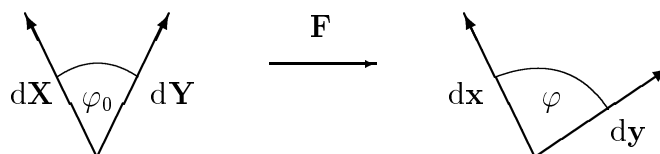
Protože $[\Phi]$ je regulární matice (je dokonce ortonormální), jsou v této substituci oba vektory ekvivalentní: každému netriviálnímu $\{X\}$ odpovídá netriviální $\{Y\}$ a obráceně. Podle předpokladu se má výraz v (3.44) rovnat nule pro libovolný vektor $\{X\}$, a tudíž i pro libovolný vektor $\{Y\}$. To je možné pouze tehdy, když

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0 \quad (3.46)$$

Hlavní deformace jsou nulové, proto $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ a platí (3.41).

Podařilo se nám tak dokázat velmi důležité tvrzení. Ukázalo se, že Greenův-Lagrangeův tensor je jednoznačně přiřazen deformaci kontinua v tom smyslu, že jeho složky vymizí právě tehdy, když se v žádném směru nemění délka elementární úsečky. Zbývá vyřešit otázku, zda se při $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ také zachovávají úhly. Věc není zdaleka tak jednoduchá, jak by se snad na první pohled mohlo zdát.

Uvažujme podle Obr. 3.5 dvě infinitesimální úsečky, $d\mathbf{X}$ a $d\mathbf{Y}$, svírající v referenční konfiguraci úhel φ_0 . Po deformaci budou tyto úsečky zobrazeny na $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$ a budou svírat úhel φ .



Obr. 3.5: Změna úhlu.

Pro posouzení změny úhlu můžeme využít vlastností skalárního součinu, podobně jako jsme to učinili v předchozím případě. V referenční konfiguraci bude

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = \|d\mathbf{X}\| \cdot \|d\mathbf{Y}\| \cos \varphi_0 = d\{X\}^T d\{Y\} \quad (3.47)$$

a v aktuální konfiguraci

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} = \|d\mathbf{x}\| \cdot \|d\mathbf{y}\| \cos \varphi = d\{x\}^T d\{y\} = d\{X\}^T [C] d\{Y\} \quad (3.48)$$

Rozdíl skalárních součinů tak bude opět záviset na GL tensoru

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = 2 d\{X\}^T [e] d\{Y\} \quad (3.49)$$

Pokud $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, platí rovnost

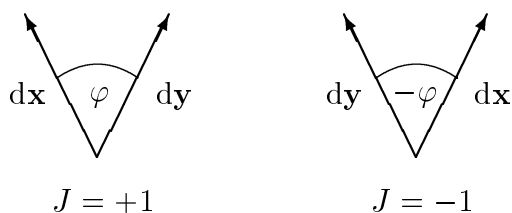
$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} \quad (3.50)$$

a jak již víme z dřívějších, zachová se přitom délka libovolné úsečky. Z porovnání rovnic (3.47) s (3.48) vyplývá

$$\cos \varphi_0 = \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad |\varphi_0| = |\varphi| \quad (3.51)$$

Dospěli jsme tak k závěru, že vymizení složek GL tensoru indikuje zachování libovolného úhlu *v absolutní hodnotě*, ne však jeho orientace. Tento výsledek je znázorněn na Obr. 3.6. Z něj je patrné, že naše úloha připouští dvě zrcadlově obrácená řešení.

Skutečně, Greenův-Lagrangeův tensor byl odvozen z metriky, která si všímá pouze čtverců vzdáleností dvou bodů, nikoliv orientace prostoru. Pomocí metriky například není možné rozlišit mezi objektem a jeho obrazem v zrcadle, neboť vzdálenost mezi každými dvěma body zůstává v obou případech stejná. Pokud při deformaci kontinua zaznamenáme $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, budou, až na případnou translaci a rotaci, vždy existovat dvě řešení: buďto bude mít těleso stejnou podobu jako v referenčním stavu, nebo dojde



Obr. 3.6: Zrcadlení.

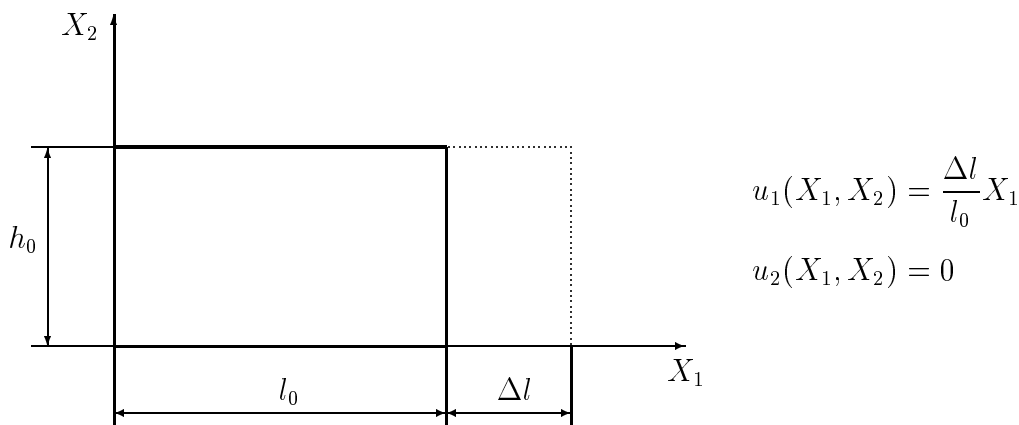
k jeho zrcadlení. Ve druhém případě je ovšem $J = -1 < 0$, stav jenž nemohl vzniknout regulárním přetvořením. Ze striktně formálního hlediska nakonec nevzniká žádný problém, neboť zobrazení se záporným jacobíánem jsou automaticky vyloučena a tím je současně obnovena jednoznačnost řešení. V numerické analýze je nicméně existence druhého (nefyzikálního) řešení se záporným jacobíánem určitou nepříjemností, vyžadující neustálou pozornost. Více o tom později.

3.1.3 Elementární kinematické módy

Typické vlastnosti Greenova-Lagrangeova tensoru a tensoru malé deformace nyní demonstrujeme na jednoduchých příkladech. Následující úlohy představují tři základní módy přetvoření kontinua – jednoosou deformaci, prostý smyk a rotaci. K těmto důležitým příkladům se budeme průběžně vracet, proto jsou očíslovány. Číslování 2–4 navazuje na již diskutovaný Příklad 1, který byl zadán na str. 35. Všechny vzorové úlohy jsou souhrnně zaznamenány v Příloze B.

Příklad 2: jednoosá deformace

Deska o počátečních rozměrech $l_0 \times h_0$ je zatížena tak, že se jedna její hrana prodlouží o Δl . Prodloužení Δl nepředpokládáme malé, může být dokonce $\Delta l > l_0$. Zadání úlohy spolu s odpovídajícím polem posunutí je zakresleno na Obr. 3.7.



Obr. 3.7: Jednoosá deformace desky.

Nejdříve určíme základní kinematické veličiny. Gradient posunutí získáme derivováním zadaného pole

$$[z] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

a po přičtení jednotkové matice máme deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Jacobián musí být kladný

$$J = \det |\mathbf{F}| = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} > 0 \quad (3.54)$$

Velikost prodloužení je z tohoto důvodu omezena na interval

$$\Delta l \in (-l_0, \infty) \quad (3.55)$$

To je ostatně zřejmé i z Obr 3.7. Kdyby $\Delta l < -l_0$, deska by se nejprve zkrátila na nulový rozměr a pak by se její objem změnil na záporný. Ověříme, že jacobián je poměr objemů. Při jednotkové tloušťce

$$\frac{V_t}{V_0} = \frac{h_0(l_0 + \Delta l)}{h_0 l_0} = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} = J \quad (3.56)$$

Nakonec určíme tensor malé deformace a GL tensor. Ze vztahu (3.39) je

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

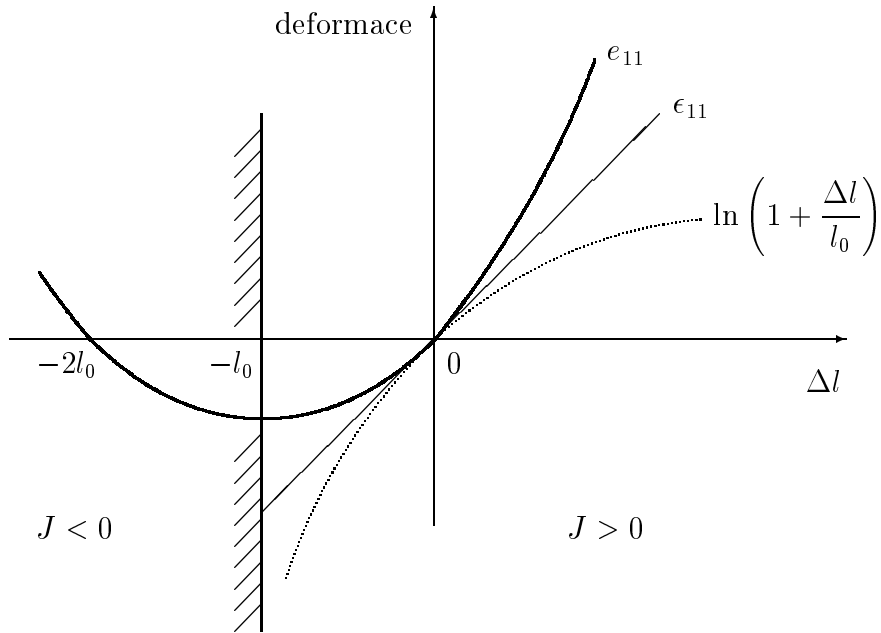
a přičtením kvadratického členu podle (3.37) dostaneme

$$[e] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Tyto tensorů nyní porovnáme. Na Obr. 3.8 jsou zakresleny průběhy složek deformace v závislosti na prodloužení.

Složka ϵ_{11} tensoru malé deformace je reprezentována tečnou k parabole e_{11} . To znamená, že v okolí bodu $\Delta l = 0$, tj. pro malé deformace, lze úlohu linearizovat nahrazením tensoru GL tensorem ϵ . Vyšrafovaný poloprostor v levé části je zakázaná oblast, v níž by došlo k porušení podmínky (3.54), a tím k vytvoření záporného objemu.

Nabízí se také tato zajímavá otázka: v čem je vlastně průběh složky e_{11} lepší než průběh ϵ_{11} a proč je použití tensoru malé deformace omezeno jen na malá prodloužení? Intuitivně totiž očekáváme, že složitější a výpočtově náročnější definice GL tensoru by



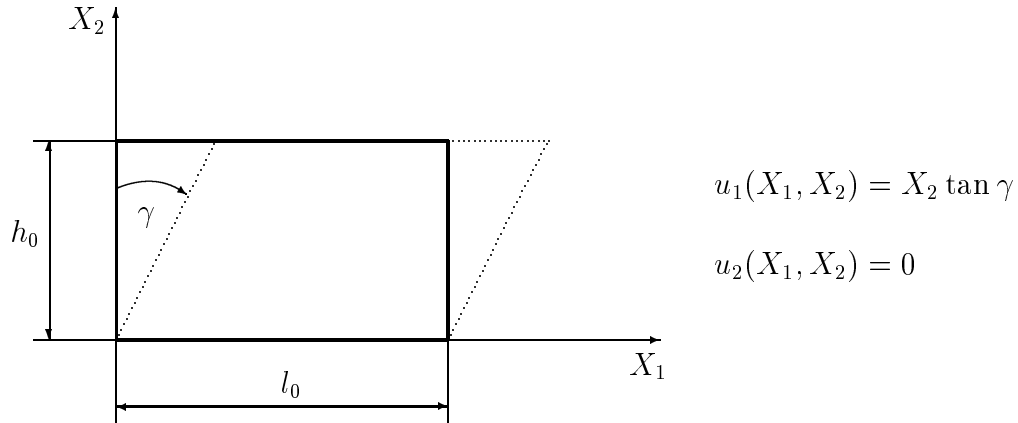
Obr. 3.8: Průběhy různých měř deformace.

měla přinést, jako kompenzaci za větší pracnost, nějakou výhodu. Po pečlivém prozkoumání Obr. 3.8 však s překvapením zjistíme, že tomu tak není. Naopak, průběh ϵ_{11} dává konstantní přírůstek deformace pro pevně zvolené Δl , bez ohledu na okamžitý rozměr desky, kdežto konvexní parabola progresivně zvyšuje vliv inkrementu s narůstajícím l . A pokud si již přejeme pracovat s nelineárním vztahem, bylo by mnohem logičtější definovat složku deformace například takovým způsobem, jakým to činí logaritmická křivka (na obrázku vpravo).

Podrobnějším studiem různých měř deformace se na tomto místě nebudeme zabývat; diskusi odložíme do Kapitoly 6. Zde však musíme zdůraznit tři velmi důležité poznatky: (a) Použití tensoru malé deformace (přinejmenším v tomto kontextu) není omezeno jen na malá prodloužení. Velikost veličiny $\Delta l/l_0$ není nijak fyzikálně ani geometricky limitována. (b) Obě křivky, e_{11} a ϵ_{11} , jsou v povolené zóně monotónní, a tudíž matematicky ekvivalentní. Vyloučíme-li případ $J < 0$, lze ze vztahu (3.58) nebo (3.57) jednoznačně vypočítat Δl . Jinými slovy, známe-li kterýkoliv ze dvou tensorů deformace, je tím plně určen tvar desky, a tak můžeme podle potřeby přepočítat e_{11} na ϵ_{11} a obráceně. (c) Kdybychom se zabývali pouze jednoosým přetvořením, nebylo by nutné, kromě poměrného prodloužení, zavádět žádnou další geometrickou veličinu.

Příklad 3: prostý smyk

Deska o počátečních rozměrech $l_0 \times h_0$ je zdeformována prostým smykem¹ podle Obr. 3.9. Úhel zkosu γ může být libovolně velký, samozřejmě, v absolutní hodnotě nesmí přesáhnout $\pi/2$.



Obr. 3.9: Zkosení desky prostým smykem.

Stejně jako v předchozím příkladě určíme gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \tan \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

a jacobíán

$$J = \det |\mathbf{F}| = 1 \quad (3.61)$$

Deformace je isochorická, což ihned vyplývá z výpočtu plochy rovnoběžníka

$$V_t = V_0 = l_0 h_0 \times \text{tloušťka} \quad (3.62)$$

Ze vztahů (3.39) a (3.37) postupně určíme tensor malé deformace

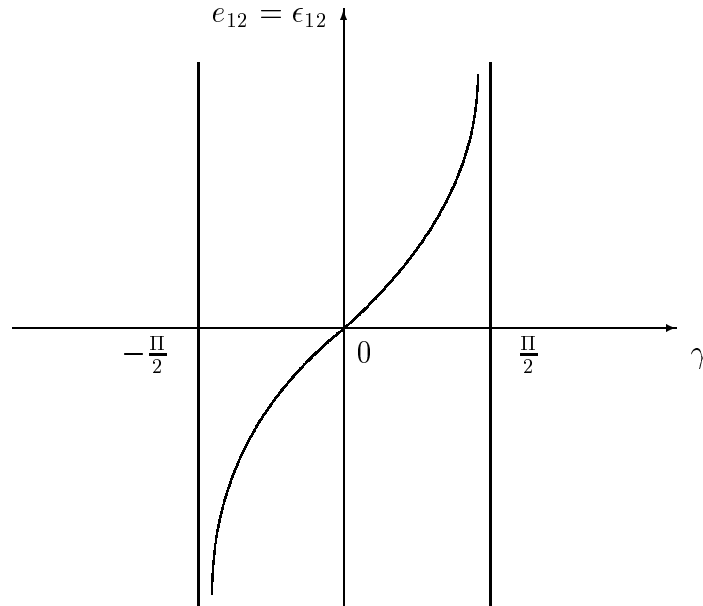
$$[\epsilon] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ \tan \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

a Greenův-Lagrangeův tensor

$$[e] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ \tan \gamma & \tan^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Průběh smykové deformace je zakreslen na Obr. 3.10.

¹Pod pojmem *prostý smyk* rozumíme rovinný kinematický mód. Jiný podobný, často používaný termín je *čistý smyk*, který označuje silové zatížení kontinua smykovým napětím. Pro isotropní prostředí oba pojmy víceméně splývají, obecně však mezi nimi musíme rozlišovat. V naší úloze jsou okrajové podmínky předepsány kinematicky, proto se jedná o prostý smyk.



Obr. 3.10: Průběhy složek e_{12} a ϵ_{12} při deformaci smykem.

Pro malý úhel zkosu, $\gamma \rightarrow 0$, je možno linearizovat funkci tangens, $\tan \gamma \simeq \gamma$. To odpovídá známému tvrzení, že mimodiagonální složky tensoru malé deformace představují poloviční zkosity. Jak jsme však měli možnost se právě přesvědčit, v exaktním řešení se nevyskytují zkosity, nýbrž tangenty těchto úhlů a složka tensoru malé deformace ϵ_{12} má obecně nelineární průběh.

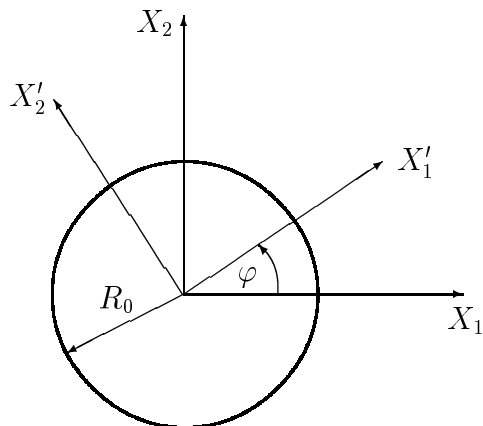
K aproximaci $\tan \gamma \simeq \gamma$ nás přitom nevedou žádné racionální důvody. Funkce $\tan \gamma$ je dokonce lepším vyjádřením přetvoření než úhel sám. Jak plyne z pozice asymptot na Obr. 3.10, když $\gamma \rightarrow \pm\pi/2$, deformace měřená funkcí tangens vzrůstá nade všechny meze, což odpovídá přirozené představě.

Určitě je také zajímavé konstatovat, že složky s indexy 12 jsou totožné pro GL tensor a tensor malé deformace a že tedy, v tomto ohledu, není mezi oběma tensory žádný rozdíl. Ten se projevuje pouze v členu $e_{22} = \frac{1}{2} \tan^2 \gamma$, jenž správně reflektuje prodloužení původně svislé úsečky h_0 . Konečně, také při zkoumání této úlohy musíme nakonec připustit, že definice tensoru malé deformace není omezena jen na malý zkos.

Příklad 4: rotace

Uvažujme pevný disk o poloměru R_0 , který se může volně otáčet kolem své osy. Natočení disku o úhel φ jako dokonale tuhého tělesa znázorňuje Obr. 3.11. Uvedené pole posunutí platí exaktně pro libovolně velký úhel, například pro několikanásobné otočení disku apod.

V tomto případě je instruktivní ukázat též odvození zadaného pole posunutí. K tomu účelu nám poslouží pomocný systém kartézských os $\{X'\}$, který je pevně spojen s diskem a spolu s ním se natáčí. Matice přechodu $[A] : \{X\} \mapsto \{X'\}$ obsahuje



$$u_1(X_1, X_2) = X_1(\cos \varphi - 1) - X_2 \sin \varphi$$

$$u_2(X_1, X_2) = X_1 \sin \varphi + X_2(\cos \varphi - 1)$$

Obr. 3.11: Rotace disku.

směrové kosiny čárkovaných os

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

a pro polohové vektory máme

$$\{X'\} = [A]\{X\}, \quad \{x'\} = [A]\{x\} \quad (3.66)$$

Nyní zvolíme libovolný bod disku \mathbf{X} a zahájíme rotaci. Vzhledem k systému $\{X'\}$ se disk nepohybuje, proto budou složky $\{x'\}$ v čase konstantní a číselně bude platit

$$\{x'\} \equiv \{X\} \quad (3.67)$$

Pomocí (3.66) pak již snadno získáme hledané pole posunutí

$$\{u\} = \{x\} - \{X\} = [A]^T \{x'\} - \{X\} = ([A]^T - [I])\{X\} \quad (3.68)$$

nebo ve složkách

$$\begin{aligned} u_1 &= X_1(\cos \varphi - 1) - X_2 \sin \varphi \\ u_2 &= X_1 \sin \varphi + X_2(\cos \varphi - 1) \end{aligned} \quad (3.69)$$

což je totéž co v Obr. 3.11.

Obvyklým způsobem určíme kinematické veličiny. Gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

a deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Všimněme si, že deformační gradient vznikl transpozicí matice přechodu. Tak je tomu při pohybu dokonale tuhého tělesa vždy a z odvození dokonce plyne, že stejný výsledek musíme zaznamenat i ve 3D.

$$J = \det |\mathbf{F}| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad (3.72)$$

Pohyb je samozřejmě isochorický. Tensor malé deformace je

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & 0 \\ 0 & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Greenův-Lagrangeův tensor určíme nejsnáze z (3.36)

$$2[e] = [F]^T[F] - [I] = [A][A]^T - [I] = [0] \quad (3.74)$$

a podle očekávání vyjde nulový.

Zjistili jsme, že tensor malé deformace *není invariantní* vůči rotaci tělesa jako tuhého celku. Pro malé úhly natočení je sice $\cos \varphi \simeq 1$, avšak v praktických úlohách může i malá odchylka hrát podstatnou roli. Uvažujme například $\varphi = 1^\circ$. Potom $\epsilon_{11} = -1.5 \times 10^{-4}$, takže řádová chyba v napětí bude více než 30 MPa. To je nečekaný výsledek!

Čím si lze tedy vysvětlit, že se v inženýrství tensor malé deformace přesto s úspěchem používá, a to navzdory faktu, že se s jednostupňovou rotací můžeme setkat poměrně často? Je to proto, že v drtivé většině případů je zatížení realizováno silami a ne předepsanými posuvy (jako tomu bylo v tomto příkladě), takže chyba výpočtu se obvykle projevuje v nesprávně určené deformaci. Ta nás však zpravidla zajímá méně než napětí. Více bude zřejmé z výsledků Cvičení 9.

V každém případě je jasné, že nesprávný popis rotačního módu v principu diskvalifikuje ϵ jako exaktní míru deformace. Ta musí být v obecném případě definována pomocí Greenova-Lagrangeova tensoru, anebo prostřednictvím některého z tensorů zavedených v částech 3.1.5 nebo podrobněji v 6.1.

Diskuse výsledků

Jakkoliv se naše úlohy mohou zdát triviální, ve skutečnosti popisují libovolnou kinematically přípustnou deformaci kontinua. Každý gradient posunutí totiž můžeme rozložit na tři základní kinematische módy podle vzorových Příkladů 2, 3 a 4 a pokud by pole posunutí nebylo lineární, stačí si představit parametry l_0 , h_0 a R_0 infinitesimálních rozměrů. Ve skutečnosti jsme tedy analyzovali zcela obecný problém!

Z Příkladů 2 a 3, které představují základní tvary přetvoření tahem, tlakem a smykem, vyplývá velmi dobrá použitelnost lineární míry ϵ . Lze dokonce konstatovat, že poměrné prodloužení má výstižnější a přirozenější průběh než kvadratická forma, příslušející GL tensoru. Skutečný deficit tensoru malé deformace tak paradoxně nespočívá v neschopnosti popsat velká přetvoření, jak by snad napovídala jeho název, nýbrž v generování fiktivních deformací (stlačení) způsobených lokální rotací.

Jakým způsobem se tedy má přistupovat ke geometricky nelineárním úlohám? Řada problémů technické praxe, jako je stabilita prutů a tenkostěnných skořepin, kmitání či šíření vln v předepjatých strukturách – příkladem mohou být kmitající struny, vibrace oběžných kol kompresorů a turbin, jejichž lopatky jsou předepjaté velkou odstředivou silou, atp. – je sice nelineární, ale vlastní deformace zůstává malá. Je to dáno tím, že typická hodnota napětí je srovnatelná s mezí kluzu, takže elastická deformace

se pohybuje v řádu 10^{-3} , a dokonce i v těch případech, kdy vzniká plastický tok, permanentní deformace zpravidla nepřesahuje 10^{-2} . V takových situacích se výborně osvědčuje Geenův-Lagrangeův tensor, který je invariantní vůči rotaci, ale jinak se, pro takto nevýznamná přetvoření, příliš neliší od tensoru malé deformace.

Dalo by se také říci, že kvadratický člen v GL tensoru odstraňuje potíže s natáčením kontinua, ale na popis samotné deformace nemá ve většině případů téměř žádný vliv. Teprve když je třeba řešit úlohy se skutečně velkou deformací, vznikající např. při namáhání pryžových komponent nebo tváření kovů, kdy deformace mohou dosáhnout až několika set procent, stojí za úvahu použití jiného tensoru. Tím se zabývá odstavec 3.1.5 a především samostatná kapitola 6.1, která rozebírá právě tyto méně časté, ale přesto důležité případy.

3.1.4 Polární rozklad deformačního gradientu

Předchozí rozbor nás upozornil na to, jak důležitou roli hraje správné rozlišení módu rotace a vlastního přetvoření kontinua. Pro hlubší porozumění problému a zavedení vhodné definice míry deformace je výhodné aplikovat větu o polárním rozkladu deformačního gradientu:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}} \quad (3.75)$$

Vystupuje zde *tensor rotace* \mathbf{R} , který je společný oběma variantám, *pravostranný tensor protažení* \mathbf{U} a *levostranný tensor protažení* \mathbf{V} . Deformační gradient má podle předpokladu kladný determinant, tensor rotace je ortonormální a jeho determinant je rovný +1; tensor protažení jsou symetrické a pozitivně definitní, takže

$$J = \det |\mathbf{F}| = \det |\mathbf{U}| = \det |\mathbf{V}| \quad (3.76)$$

Využili jsme toho, že determinant součinu matic lze rozepsat jako součin determinantů. Celkem snadno se zjistí (je ponecháno jako cvičení), že vlastní čísla λ_k jsou pro oba tensor \mathbf{U} a \mathbf{V} stejná a nazývají se *hlavní protažení*. Polární rozklad je jednoznačný.

Poté, co bude věta formálně dokázána, se zaměříme na vlastnosti jednotlivých členů. Ukážeme, že tensor rotace popisuje natáčení kontinua, zatímco tensor protažení souvisejí výhradně s jeho deformací. To už ostatně naznačuje vztah pro jacobíán (3.76), který vyjadřuje změnu objemu a nezávisí na \mathbf{R} . Nakonec se budeme věnovat významu pořadí matic v (3.75) při jejich násobení a multiplikativnímu rozkladu tensorů obecně.

Důkaz a postup výpočtu

Uvažujme nějakou symetrickou, pozitivně definitní matici $[U]$ a označme

$$[R] := [F][U]^{-1} \quad (3.77)$$

Má-li být $[R]$ ortonormální, je nutné aby

$$[R]^T[R] = [U]^{-1}[C][U]^{-1} = [I] \quad (3.78)$$

Při úpravě jsme přihlédlí k tomu, že $[U]$ je symetrická a použili jsme definici Cauchyho-Greenova tensoru

$$[C] = [F]^T[F] \quad (3.79)$$

Z podmínky (3.78) plyne $[C] = [U]^2$, takže je třeba zvolit $[U]$ jako odmocninu

$$[U] = \sqrt{[C]} \quad (3.80)$$

Přesná definice, výpočet a důkaz jednoznačnosti odmocniny matice je uveden v Příloze A.2.

Dále se přesvědčíme o tom, že každý ortonormální tensor (matice) má jednotkový determinant.

$$\det |\mathbf{R}| \det |\mathbf{R}| = \det |\mathbf{R}^T| \det |\mathbf{R}| = \det |\mathbf{R}^T \mathbf{R}| = \det |\mathbf{I}| \quad (3.81)$$

Determinant jednotkové matice je roven jedné, tudíž

$$\det^2 |\mathbf{R}| = 1 \quad \Rightarrow \quad \det |\mathbf{R}| = \pm 1 \quad (3.82)$$

O znaménku rozhoduje orientace.¹ Jak již bylo řečeno, v daném případě je $J > 0$ a rovněž $\det |\mathbf{U}| > 0$, proto platí (3.76). Také je nyní zřejmé, že větu o polárním rozkladu lze použít pro libovolnou regulární matici, přičemž hodnota jejího determinatu určuje znaménko v (3.82).

Jednoznačnost: uvažujme konkurenční matice $[\tilde{R}]$ a $[\tilde{U}]$ se stejnými vlastnostmi jako měly $[R]$ a $[U]$, takže existují dvě verze rozkladu

$$[F] = [R][U] = [\tilde{R}][\tilde{U}] \quad (3.83)$$

Z předpokládaných vlastností matic (bez ohledu na to, jak jsme je určili) plyne

$$[C] = [F]^T[F] = [U]^T[R]^T[R][U] = [U]^T[U] = [U]^2 \quad (3.84)$$

Ze stejného důvodu musí být $[\tilde{U}]^2 = [C]$, a proto

$$[\tilde{U}] = \sqrt{[C]} = [U] \quad (3.85)$$

Podle Přílohy A.2 je však odmocňování jednoznačná operace.

Na závěr zopakujeme algoritmus výpočtu, do něž jsme pro přehlednost vložili též výpočet odmocniny matice.

1. Je dán deformační gradient \mathbf{F} , jehož determinant je kladný. Určíme Cauchyho-Greenův tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

o němž víme, že je symetrický a pozitivně definitní.

¹Ortonormální zobrazení s kladným determinantom nazýváme rotace. Kdyby $\det |\mathbf{R}| = -1$, mluvili bychom o zrcadlení. Např. matice přechodu mezi stejně orientovanými kartézskými systémy (pravotočivými, nebo levotočivými), má determinant rovný $+1$. Pokud by byly systémy orientované vzájemně různě (jeden pravotočivý a druhý levotočivý), byl by její determinant roven -1 .

2. Pro přidruženou matici řešíme problém vlastních čísel. Ta jsou vesměs kladná. Jejich odmocněním získáme hlavní protažení.

$$[C]\{\varphi_k\} = \mu_k\{\varphi_k\}, \quad \lambda_k := \sqrt{\mu_k} > 0$$

Z vlastních vektorů složíme po sloupcích modální matici $[\Phi]$ a z hlavních protažení diagonální matici $[\Lambda] := \text{diag}[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]$. Pořadí čísel λ_k musí odpovídat vektorům ve $[\Phi]$, jinak není striktně předepsáno (existuje šest rovnocenných možností).

3. Prostřednictvím spektrálního rozkladu definujeme tensor protažení a dopočteme tensor rotace

$$[U] := [\Phi][\Lambda][\Phi]^T, \quad [R] := [F][U]^{-1}$$

Pro výpočet inverze je výhodnější použít Cramerovo pravidlo (22 FLOPS), než spektrální rozklad (30 FLOPS), přestože jej máme k dispozici!

Tensor rotace

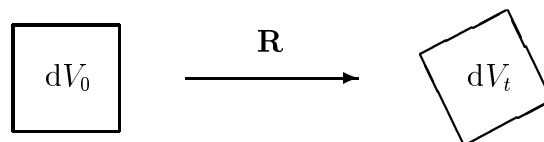
Uvažujme nejprve speciální případ, kdy je deformační gradient representován ortonormální maticí. Vzhledem k jednoznačnosti polárního rozkladu musí platit

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (3.86)$$

Podle definice (3.36) vyjde

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (3.87)$$

Ze Sekce 3.1.2, kde jsme se podrobně zabývali vlastnostmi Greenova-Lagrangeova tensoru, víme, že při $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ nedochází k deformaci kontinua. Blízké okolí bodu, v němž $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, se pak může jen posunout a natočit, viz Obr. 3.12.



Obr. 3.12: Pohyb infinitesimální oblasti jako tuhého celku.

Odvození pole posunutí při rotačním pohybu na str. 45 vysvětluje obrácený postup, tj. způsob, kterým je možno zkonstruovat deformační gradient ze známých úhlů natočení. Vyšlo $[F] = [A]^T$. Můžeme tudíž konstatovat, že \mathbf{F} je ortonormální *právě tehdy*, když dochází k lokální rotaci, a odpovídající úhly natočení jsou jednoznačně určeny přidruženou maticí $[F]$.

Tensor protažení

Nechť je deformační gradient symetrický a pozitivně definitní, tedy

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (3.88)$$

Situace je nyní složitější, neboť není na první pohled vidět, jak by se měly vlastnosti tensoru \mathbf{U} geometricky interpretovat. Více odhalí vyjádření v hlavních osách, založené na spektrálním rozkladu

$$[\mathbf{U}] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (3.89)$$

Přejdeme-li pomocí $[\Phi]^T$ ke kartézskému systému $\{X'\}$, dostaneme

$$[U'] = [\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3] \quad (3.90)$$

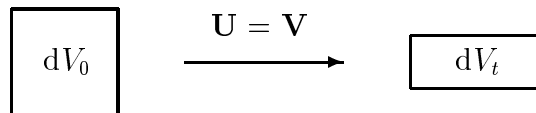
kde $\lambda_k > 0$ jsou hlavní protažení. Deformační gradient zprostředkovává lineární vztah mezi elementárními úsečkami. Ten musí platit v každém systému, proto

$$d\{x'\} = [U'] d\{X'\} \quad (3.91)$$

anebo v rozepsaném tvaru

$$\begin{aligned} dx'_1 &= \lambda_1 dX'_1 \\ dx'_2 &= \lambda_2 dX'_2 \\ dx'_3 &= \lambda_3 dX'_3 \end{aligned} \quad (3.92)$$

Poslední rovnice ovšem ukazují, že dochází k prosté deformaci podle Obr. 3.13.



Obr. 3.13: Deformace infinitesimálního objemu v systému hlavních os.

Vyšlo tedy najevo, že tensor protažení popisuje elementární deformaci v tom smyslu, že vždy existuje souřadnicový systém takový, že se v něm přetvoření jeví jako superpozice tří navzájem kolmých jednoosých deformací. To je důležitý výsledek. Kartézský systém si totiž pro výpočet můžeme zvolit podle potřeby, třeba jako hlavní osy. Pak je ale zřejmé, že pozitivní definitnost deformačního gradientu automaticky znamená deformaci podle Obr. 3.13 a obráceně pomocí jednoduchých rovnic (3.92) lze vytvořit libovolný tensor protažení. Zbývá vyřešit otázku, jak zkombinovat rotaci a protažení do jednotného popisu.

Multiplikativní rozklad

Vyjádření tensoru jako součinu několika součinitelů matematicky odpovídá kompozici zobrazení. V konkrétním případě se budeme zabývat rozložením deformačního gradientu na součin dvou členů (jako je tomu v $\mathbf{R}\mathbf{U}$ rozkladu), nicméně z kontextu bude

zřejmé, že podobně bychom mohli postupovat i při více činitelích. S následující teorií přišli v roce 1967 Lee a Liu [15], kteří se v souvislosti s konstruováním protiatomových krytů zabývali problematikou šíření šokových vln v horninách.

Uvažujme pohyb tělesa rozfázovaný do tří časových okamžiků $t_0 = 0$, $t_m > t_0$ a $t > t_m$. Tomu odpovídají oblasti, zvané konfigurace, Ω_0 , Ω_m a Ω_t . První se nazývá počáteční nebo též referenční konfigurace, druhá intermediální konfigurace a třetí je aktuální konfigurace. Označme jako \mathbf{F}_0 deformační gradient s komponentami

$$F_{ij}^0 := \frac{\partial x_i^m}{\partial X_j} \quad (3.93)$$

kde x_i^m a X_j jsou kartézské složky průvodičů bodů $\mathbf{x}_m \in \Omega_m$ a $\mathbf{X} \in \Omega_0$. Jako referenční konfiguraci můžeme také zvolit Ω_m a definovat

$$F_{ij}^m := \frac{\partial x_i}{\partial x_j^m} \quad (3.94)$$

Podle věty o derivování složené funkce je celkový deformační gradient

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k^m} \frac{\partial x_k^m}{\partial X_j} = F_{ik}^m F_{kj}^0 \quad (3.95)$$

Dospěli jsme tak k fundamentálnímu poznatku

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_m \mathbf{F}_0} \quad (3.96)$$

Přírůstky vyjádřené pomocí deformačního gradientu se nesčítají, nýbrž násobí.

Jako ilustraci multiplikativního rozkladu připomeňme kinematickou úvahu, která se široce využívá v teorii plasticity a která byla poprvé představena v originální práci [15]. Pro malé deformace obvykle přijímáme předpoklad aditivity

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p \quad (3.97)$$

Elastická část deformace $\boldsymbol{\epsilon}_e$ se mění s napětím a pokud vzorek úplně odlehčíme, v materiálu zůstane jen permanentní plastická část $\boldsymbol{\epsilon}_p$. Podle předchozího bychom však správně měli psát

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (3.98)$$

se stejnou fyzikální ideou. Jak dalece jsou oba přístupy konsistentní? Dosadíme za \mathbf{F} ze vztahu (3.12), tj.

$$\mathbf{F} = (\mathbf{z}_e + \mathbf{I})(\mathbf{z}_p + \mathbf{I}) \quad (3.99)$$

Odtud

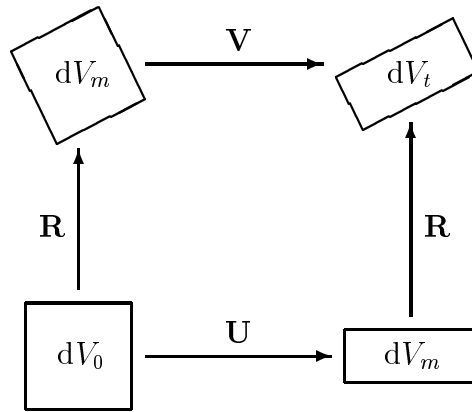
$$\mathbf{z} = \mathbf{F} - \mathbf{I} = \mathbf{z}_e + \mathbf{z}_p + \mathbf{z}_e \mathbf{z}_p \quad (3.100)$$

Pro malé deformace můžeme zanedbat kvadratický člen a pomocí definice (3.39) dostaneme

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{z}_e + \mathbf{z}_e^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{z}_p + \mathbf{z}_p^T) \quad (3.101)$$

což je aditivní rozklad (3.97). Nejenže je tedy starší teorie obsažena jako speciální případ, ale navíc jsme získali dobrý odhad mezí její použitelnosti. Pro úspěšnost teorie plasticity s malými deformacemi je nezbytné, aby jak elastická, tak i plastická deformace byly nezávisle na sobě malé. První předpoklad bývá splněn skoro vždy, druhý nikoliv (např. při tváření kovů). V řadě technických aplikací proto musíme dát přednost multiplikativnímu rozkladu (3.98).

Vraťme se nyní zpět k polární dekompozici $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. Přetvoření kontinua je zde rozděleno do dvou fází, viz Obr 3.14. V první fázi se uplatní tensor vyskytující se v rovnici zcela vpravo, tedy \mathbf{U} , a ve druhé fázi tensor vedle rovníčka, \mathbf{R} . Tato úvaha



Obr. 3.14: Geometrický význam polárního rozkladu.

a Obr. 3.14 nám poskytují názornou geometrickou interpretaci. V $\mathbf{R}\mathbf{U}$ rozkladu se kontinuum nejprve zdeformuje protažením \mathbf{U} ; celý proces je přitom ekvivalentní jednoduchému lineárnímu prodloužení či zkrácení tří vzájemně kolmých úseček a dá se tedy chápat jako superpozice tří jednoosých deformací. Teprve poté následuje rotace \mathbf{R} , při níž se již materiál nedeformuje, ale pouze natáčí. Ve verzi $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ je tomu obráceně. Polární rozklad nám tak poskytuje mimořádně jasný obrázek o lokálním přetvoření kontinua a stává se neocenitelným pomocníkem při analýze různých definic tensorů deformace. O tom pojednává následující sekce.

3.1.5 Klasifikace tensorů deformace

Tensor deformace je totální veličina, která se váže ke dvěma konfiguracím: referenční a aktuální. Při jeho určení nehraje roli způsob, kterým se systém dostal z jedné konfigurace do druhé, rozhodující je pouze výchozí a finální stav. Protože výpočet tensoru deformace nezávisí na parametrizaci (historii, trajektorii) přetvoření, jsou obě varianty polárního rozkladu, znázorněné na diagramu v Obr. 3.14, rovnocenné. Nabízejí se tak dva koncepčně různé přístupy.

V prvním přístupu zaznamenáme protažení \mathbf{U} , ignorujeme \mathbf{R} a definujeme

$$\boxed{\mathbf{E} := f(\mathbf{U})} \quad (3.102)$$

Veličinu \mathbf{E} nazýváme obecným tensorem deformace *lagrangeovského typu*. Analogicky definujeme třídu tensorů *eulerovského typu* jako

$$\boxed{\mathbf{A} := f(\mathbf{V})} \quad (3.103)$$

Funkce f je tzv. *isotropní* tensorová funkce, splňující

$$f([Q][U][Q]^T) = [Q]f([U])[Q]^T \quad (3.104)$$

pro každou ortonormální matici $[Q]$. Je to z toho důvodu, že výše uvedené definiční vztahy musí platit v libovolném souřadnicovém systému, neboli

$$[E] = f([U]) \quad \text{a současně} \quad [E'] = f([U']) \quad (3.105)$$

při stejném operátoru f . Dosazením transformačních pravidel a porovnáním obou výrazů dostaneme (3.104). Vlastnosti isotropních funkcí jsou podrobněji popsány v Příloze A.4.

Na tensorovou funkci f jsou kladeny ještě dva další požadavky. Jednak je zřejmé, že jednotkovému protažení musí odpovídat nulová deformace, takže

$$f(\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (3.106)$$

a jednak předpokládáme invertovatelnost v celém oboru. Z posledního požadavku plyne ekvivalence tensorů stejné třídy. Je-li dán jistý tensor \mathbf{E} , můžeme z něj zpětně vypočítat

$$\mathbf{U} = f^{-1}(\mathbf{E}) \quad (3.107)$$

a ze známého \mathbf{U} pak jakýkoliv jiný lagrangeovský tensor deformace. Pokud bychom si přáli přejít ke druhé skupině, museli bychom mít k dispozici ještě tensor rotace. Z (3.75) plyne

$$\mathbf{V} = \mathbf{RUR}^T \quad (3.108)$$

a protože f je isotropní

$$\mathbf{A} = f(\mathbf{V}) = \mathbf{R}f(\mathbf{U})\mathbf{R}^T = \mathbf{RER}^T \quad (3.109)$$

Každému lagrangeovskému tensoru deformace tak odpovídá eulerovský tensor, daný stejným funkčním předpisem, a obráceně.

Jestliže nyní víme, že všechny tensorové konečné deformace jsou *de facto* ekvivalentní, diskuse o výhodnosti toho či onoho přístupu se mohou zdát poněkud akademické. Z vyššího hlediska tomu tak snad je, z praktického nikoliv. Představme si například, že deformace \mathbf{F} , pro kterou jsme určili všechny pořebné kinematické veličiny, byla později následována rotací \mathbf{Q} . Výsledný deformační gradient bude

$$\mathbf{F}^+ = \mathbf{QF} = \mathbf{QRU} = \mathbf{QVR} \quad (3.110)$$

Tensory protažení a rotace se změní na

$$\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}, \quad \mathbf{V}^+ = \mathbf{QVQ}^T, \quad \mathbf{R}^+ = \mathbf{QR} \quad (3.111)$$

Dodatečná rotace proto neovlivní lagrangeovské tensorů deformace, $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E}$, avšak všechny eulerovské se změni na

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T \quad (3.112)$$

Kdybychom naopak rotaci předřadili, dostali bychom

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}, \quad \mathbf{E}^+ = \mathbf{Q}^T\mathbf{E}\mathbf{Q} \quad (3.113)$$

V situacích, kdy pracujeme pouze s invarianty (tj. u isotroprních materiálů) je jedno, zda se použije \mathbf{E} nebo \mathbf{A} , neboť invarianty nejsou natočením nijak ovlivněny a navíc jsou při stejné funkci f pro oba typy tensorů shodné – \mathbf{U} a \mathbf{V} mají stejná vlastní čísla. Pro anisotropní prostředí je však podstatná orientace tensoru deformace vůči materiálovým osám. Ty jsou zadány ve výchozím a ne koncovém stavu (ten neznáme, je teprve předmětem řešení) a v tom případě je snazší využít tensorů lagrangeovského typu. Tomuto a dalším podobným námětům se věnuje samostatná Kapitola 6.

Tuto část uzavřeme některými příklady často užívaných měř přetvoření: Greenova-Lagrangeova tensoru, tensoru malé deformace, Biotova tensoru a Henckyho logaritmického tensoru. Jako reprezentanta eulerovské skupiny zmíníme Almansiho tensor deformace.

GL tensor

Dosazením $\mathbf{R}\mathbf{U}$ rozkladu do definice (3.36) obdržíme

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) \quad (3.114)$$

Greenův-Lagrangeův tensor deformace je tedy kvadratickou funkcí \mathbf{U} , a proto spadá do kategorie \mathbf{E} -tensorů. Zdůrazněme, že pro jeho výpočet nebudeme pochopitelně používat polární rozklad, nýbrž původní definiční vztah (první v rovnici). Tím se vyhneme zbytečnému řešení vlastních čísel a dobereme se cíle podstatně rychleji. Pro jiné tensor je nicméně určení \mathbf{U} , a tudíž i výpočet vlastních čísel, nepřijemnou nutností.

Tensor malé deformace

Polární rozklad tentokrát dosadíme do definice (3.39), takže s využitím symetrie tensoru protažení vyjde

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{R}^T) - \mathbf{I} \quad (3.115)$$

Tento výraz již nelze dále redukovat tak, aby nezávisel na \mathbf{R} . Veličina $\boldsymbol{\epsilon}$ proto *není* tensorem lagrangeovského typu a stejným způsobem bychom mohli ukázat, že nepatří ani mezi eulerovské tensor. Neodstranitelná závislost na \mathbf{R} indikuje, že tensor malé deformace není invariantní vůči rotaci, a nemůže být proto použit pro řešení obecných problémů mechaniky kontinua. To jsme ostatně již dříve zjistili při řešení Příkladu 4.

Na druhé straně je zajímavé si všimnout limity $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{I}$. Pokud je rotace malá, bude přibližně platit

$$\boldsymbol{\epsilon} \simeq \mathbf{U} - \mathbf{I} \quad (3.116)$$

Ze struktury tensoru protažení víme, že $\mathbf{U} - \mathbf{I}$ představuje poměrné prodloužení, např. v systému hlavních os je $\epsilon_1 = \lambda_1 - 1$ atd. Při zanedbatelné rotaci se tak $\boldsymbol{\epsilon}$ stává funkcí pouze \mathbf{U} , a tudíž *aproximuje* tensor lagrangeovského typu. Také to již víme z řešení vzorových příkladů – pokud nedochází k výraznému natáčení, lze tento tensor úspěšně použít pro popis nejen malých ale i velkých přetvoření.

Biotův tensor

Předchozí úvahy nás vedou k následující myšlence. Co kdybychom vztah (3.116) použili jako novou definici?

$$\mathbf{b} := \mathbf{U} - \mathbf{I} \quad (3.117)$$

Takto definovaný tensor, známý jako Biotův tensor, a priori nezávisí na \mathbf{R} , může být použit pro úlohy s libovolně velkou rotací a přitom si zachovává příznivé vlastnosti a geometrický význam tensoru malé deformace. Jeho jedinou nevýhodou je nutnost stanovit vlastní čísla, čímž se zvyšuje pracnost výpočtu.

Henckeho tensor

Jako poslední příklad lagrangeovské veličiny uvedeme Henckeho logaritmický tensor deformace [11]. Jeho dobré vlastnosti se osvědčily v řadě prací [1, 2, 20]. Definujeme

$$\mathbf{h} := \ln \mathbf{U} \quad (3.118)$$

kde tzv. *tensorový logaritmus* získáme pomocí spektrálního rozkladu tensoru protažení

$$\ln[U] := [\Phi] \ln[\Lambda] [\Phi]^T \quad (3.119)$$

a logaritmus diagonální matice je definován jednoduše jako

$$\ln[\Lambda] := \text{diag}[\ln \lambda_1 \ \ln \lambda_2 \ \ln \lambda_3] \quad (3.120)$$

V Příkladu 4 vyjde Henckeho tensor jako nulový, stejně jako v Příkladu 2 s výjimkou diagonálního členu $h_{11} = \ln(l/l_0)$. Namísto logaritmu může být podobným způsobem využita i jiná reálná funkce – viz Kapitola 6.

Almansiho tensor

V Sekci 3.1.2 byl odvozen Greenův-Lagrangeův tensor deformace. Jako východisko jsme uvážili rozdíl čtverců vzdáleností

$$(dl)^2 - (dL)^2 = d\{x\}^T d\{x\} - d\{X\}^T d\{X\} \quad (3.121)$$

a v něm jsme pomocí vztahu (3.28) eliminovali vektor $d\{x\}$. Stejně tak dobře jsme ovšem mohli dosadit inverzi tohoto vztahu a vyloučit tím vektor $d\{X\}$. V tom případě by vyšlo

$$(dl)^2 - (dL)^2 = 2 d\{x\}^T [a] d\{x\} \quad (3.122)$$

kde

$$[a] := \frac{1}{2}([I] - [F]^{-T}[F]^{-1}) \quad (3.123)$$

Matice $[a]$ definuje složky *Almansiho tensoru deformace*. Dosazením **VR** rozkladu

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}) \quad (3.124)$$

Zjistili jsme, že \mathbf{a} je tensor eulerovského typu.

3.1.6 Cvičení

1. Zadány jsou tyto vztahy pro posunutí

$$\begin{aligned} u_1(X_1, X_2, t) &= kX_2t \\ u_2(X_1, X_2, t) &= 0 \end{aligned}$$

kde k je reálné číslo.

- (a) Zakreslete deformaci jednotkové oblasti $\Omega_0 \equiv (0, 1) \times (0, 1)$.
- (b) Určete χ^{-1} a dokažte regulárnost.
- (c) Označme jako \mathbf{X}_A částici, která se v čase $t = 1$ nachází v místě

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 1+k \\ 1 \end{Bmatrix}$$

a \mathbf{X}_B částici v místě

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

v čase $t = 1/k$. Dokažte, že se jedná o jednu a tutéž částici, tj. $\mathbf{X}_A \equiv \mathbf{X}_B$, která se pohybuje prostorem.

- (d) Jaká je poloha \mathbf{X}_A v oblasti Ω_0 ?
2. Dokažte, že gradient posunutí je tensor druhého řádu.
Návod: Dokažte $[z'] = [A][z][A]^T$.
 3. Dokažte, že deformační gradient je tensor druhého řádu.
 4. Dokažte, že Cauchyho-Greenův deformační tensor je symetrický a pozitivně definitní.
 5. Uvažujme úhlopříčku desky v Příkladu 2,

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} l_0 \\ h_0 \end{Bmatrix} \quad \text{o délce} \quad \sqrt{l_0^2 + h_0^2}$$

Jaká bude délka této úhlopříčky po deformaci? Použijte vzorec (3.31) s metrickým tensorem a výsledek ověřte přímým výpočtem.

6. Jak se změní délky úhlopříček desky v Příkladu 3? Postupujte stejně jako v předchozím Cvičení 5.
7. Uvažujme Příklad 3 a dvě elementární úsečky, orientované podél hran desky

$$d\{X\} = \begin{Bmatrix} dL_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad d\{Y\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ dL_2 \end{Bmatrix}$$

Z Obr. 3.9 je zřejmé, že po deformaci budou tyto úsečky svírat úhel $\pi/2 - \gamma$.

- (a) Pomocí (3.49) určete hodnotu skalárního součinu $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}$.
- (b) Z (3.28) zjistěte $d\{x\}$, $d\{y\}$ a vypočtěte normy $\|d\mathbf{x}\|$, $\|d\mathbf{y}\|$.
- (c) Porovnejte součin těchto norem se skalárním součinem $d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}$ a odtud určete velikost úhlu mezi úsečkami $d\mathbf{x}$ a $d\mathbf{y}$. Co musí vyjít?
8. V Příkladu 4 vypočítejte produkt $[z]^T[z]$ a pomocí vztahů (3.37), (3.39) ukažte

$$[e] = [\epsilon] + \frac{1}{2}[z]^T[z] = [0]$$

Tím je potvrzen výsledek (3.74).

9. Oblast Ω_0 má tvar kruhu o poloměru R_0 se středem v počátku.
- (a) Určete pole posunutí odpovídající $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$.
- (b) Dosadte okrajovou podmínku

$$\begin{aligned} u_1(0, 0, t) &= 0 \\ u_2(0, 0, t) &= 0 \end{aligned}$$

- (c) Zakreslete tvar oblasti Ω_t .
- (d) Určete Greenův-Lagrangeův tensor deformace. Proč není roven nule?
10. Víme, že existuje pravostranný rozklad deformačního gradientu $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. Tento rozklad je jednoznačný. Dokažte

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \text{kde } \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T$$

rovněž jednoznačně.

11. Dokažte, že tensor protažení \mathbf{U} a \mathbf{V} mají stejná vlastní čísla.
12. Nechť $[\phi]$ je modální matice $[U]$. Dokažte, že $[R][\phi]$ je modální matice $[V]$.
13. Zadáno je toto zobrazení

$$\begin{aligned} x_1(X_1, X_2) &= aX_1 + bX_2 \\ x_2(X_1, X_2) &= -aX_1 + bX_2 \end{aligned}$$

kde $a > b > 0$ jsou reálná čísla.

- (a) Zakreslete deformaci jednotkové oblasti $\Omega_0 \equiv (0, 1) \times (0, 1)$.
- (b) Počítejte $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$.
- (c) Kdy je deformace isochorická?

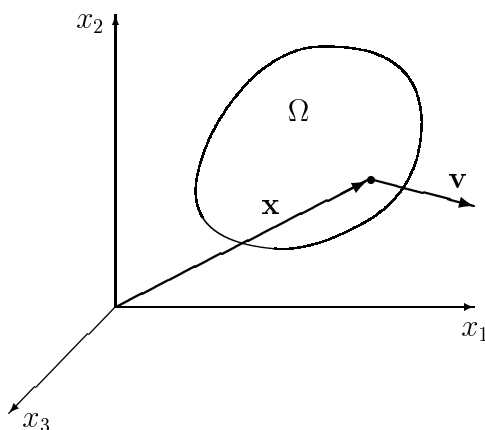
14. Počítejte $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ pro Příklad 2 a Příklad 4.

15. Počítejte $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ pro Cvičení 9.

16. Dokažte, že $[U]^{-1}$ a $[U]^m$, kde m je přirozené číslo, jsou isotropní funkce $[U]$. Tím je dokázána isotropnost operací, které definují Greenův-Lagrangeův, Biotův a Almansiho tensor deformace.

3.2 Eulerův popis

V Lagrangeově popisu jsme vyšli z fixní (referenční) konfigurace tělesa, k níž byla poté vztažena všechna fyzikální pole. Eulerova formulace nepovažuje za výchozí žádnou konkrétní množinu hmotných bodů, nýbrž pevně zvolenou oblast prostoru, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Primární veličinou je rychlostní pole $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ definované v Ω , jak je schematicky znázorněno na Obr. 3.15. Oblast Ω nazýváme *kontrolní oblast* nebo též hovorově kontrolní okno. Tímto nepohyblivým oknem, zaměřeným na jedno místo prostoru, pozorujeme rozličné mechanické děje, například proudění tekutiny či posuv a deformaci těles.



Obr. 3.15: Kontrolní oblast v Eulerově popisu.

V této fázi by bylo neúčelné úplně opustit Lagrangeovo pojetí. Pro korektní odvození některých rovnic je třeba nalézt kinematické relace mezi materiálovými a prostorovými poli. Především je nutné zjistit vztah mezi různými definičními oblastmi. To lze učinit následujícím způsobem. Identifikujeme všechny materiálové částice,¹ které se v jistém čase τ nacházejí v kontrolní oblasti Ω , a najdeme jejich výchozí polohy.

¹Připomeňme, že pojmy materiálový bod, hmotný bod a částice chápeme jako synonyma.

V čase $t = 0$ vyplní tyto částice oblast Ω_0^r . Takto definována referenční konfigurace má tu vlastnost, že v konkrétním čase $t = \tau$ bude platit

$$\Omega_t^r \equiv \Omega \quad (3.125)$$

Identifikátor τ pro přehlednost vypouštíme a stručně píšeme

$$\Omega_t \equiv \Omega \quad (3.126)$$

přítom ovšem máme pořád na zřeteli, že pro každý čas t je nutno vytvořit specifickou referenční oblast Ω_0 tak, aby platila ekvivalence (3.126), tj. aby ‘zdeformované těleso’ ve zvoleném čase přesně vyplnilo kontrolní okno.

Ze způsobu zavedení kontrolní oblasti je jasné, že se v ní v různých časech nacházejí různé částice. Jakým způsobem je pak definováno prostorové rychlostní pole? K tomu je třeba nejprve identifikovat částici, která se v čase t nachází v bodě \mathbf{x} . Podaří-li se pak nějakým způsobem určit okamžitou rychlost této částice, označme ji \mathbf{v} , můžeme přiřadit vektor rychlosti danému místu prostoru a času. Funkce $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ tudíž nepředstavuje rychlost jediné částice, jak tomu bylo v Lagrangeově popisu, ale okamžitou rychlost hmotného bodu, který se právě teď nachází ve zvoleném místě prostoru.

3.2.1 Trajektorie, rychlost a zrychlení částic

Je-li dáno rychlostní pole $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, můžeme využít zobrazení $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ a definovat složenou funkci

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \quad (3.127)$$

Tím jsme získali lagrangeovské pole \mathbf{V} , které sice nemá v Eulerově formulaci přímé uplatnění, budeme je však později potřebovat pro korektní odvození vektoru zrychlení. Podle našeho dřívějšího předpokladu existuje v každém čase t inverze $\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$, a tudíž můžeme také psát

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (3.128)$$

V dalším budeme vycházet z popisu trajektorie částice a jejích dvou parametrických derivací.

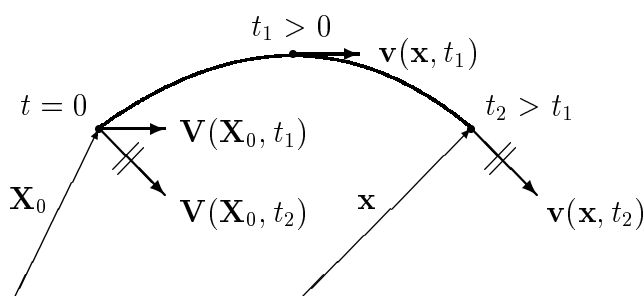
Trajektorie částice

Zvolme pevně materiálový bod \mathbf{X}_0 identifikující konkrétní částici a nechme plynout čas. Předpis

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}_0, t) \quad (3.129)$$

představuje tři parametrické rovnice, definující trajektorii částice \mathbf{X}_0 v prostoru \mathbb{R}^3 . Opsaná dráha je znázorněna na Obr. 3.16.

Z geometrického hlediska znamenají substituce (3.127) a (3.128) paralelní přenos vektoru mezi místy \mathbf{x} a \mathbf{X} , v daném případě \mathbf{x} a \mathbf{X}_0 . Vějíř vektorů $\mathbf{V}(\mathbf{X}_0, t_i)$, vycházející z bodu \mathbf{X}_0 a sestavený pro různé časy t_i , se nazývá *hodograf*. Obrázek ilustruje dva typické vektory hodografu, které vznikly paralelním přenosem v časech t_1 a t_2 .



Obr. 3.16: Trajektorie částice a hodograf.

Rychlost jako parametrická derivace

Rychlostní pole $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ je v Eulerově popisu zpravidla předmětem řešení pohybových rovnic, lze je však také získat parametrickou derivací funkce χ . Derivací trajektorie (3.129) pro pevně zvolenou částici \mathbf{X}_0 dostaneme

$$\text{rychlost částice} = \frac{d}{dt}\chi(\mathbf{X}_0, t) \quad (3.130)$$

Částice byla vybrána libovolně, proto vypouštíme index a zavádíme definici

$$\boxed{\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\chi(\mathbf{X}, t)} \quad (3.131)$$

Operátor \mathbf{V} se vyskytuje proto, že struktura funkce $\chi(\mathbf{X}, t)$ odpovídá materiálovému popisu. K Eulerovu vyjádření se dostaneme prostřednictvím substituce (3.128). Postup je to možná neohrabaný, ale jiná cesta k cíli nevede.

Výpočet zrychlení

Zrychlení je druhá parametrická derivace trajektorie. Analogicky jako v předchozím odstavci definujeme

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}} \quad (3.132)$$

a dosadíme za \mathbf{X} , čímž vznikne Eulerovo pole

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{A}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \quad (3.133)$$

a obráceně

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \quad (3.134)$$

Pro výpočet zrychlení existuje znamenitá alternativa, dovolující určit $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ přímo z pole $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, aniž bychom museli zavádět Lagrangeův popis.

Vyjdeme z věty o derivování složené funkce. Substituci (3.127) dosadíme do definice (3.132) a zderivujeme

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (3.135)$$

Derivace souřadnic x_j dávají podle vzorce (3.131) složky rychlosti, takže

$$\frac{\partial x_j}{\partial t} = V_j(\mathbf{X}, t) = v_j(\mathbf{x}, t) \quad (3.136)$$

Tentokrát jsme využili substituci (3.128). Proto

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} v_j = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)} \quad (3.137)$$

Dospěli jsme tak k čistě eulerovskému vyjádření. Člen $v_j \partial \mathbf{v} / \partial x_j$ představuje složkový zápis prostorové konvekce $(\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v}$, tím se však teď nebudeme zabývat a přejdeme rovnou k příkladu.

Příklad

Pokračujeme v řešení Příkladu 1 na Str. 35. Zadáno bylo přetvoření kontinua

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + at^2 \\ x_2 &= X_2 + bX_2t + ct^2 \end{aligned} \quad (3.138)$$

v němž a , b a c jsou reálná čísla. Inverze je

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - at^2 \\ X_2 &= \frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} \end{aligned} \quad (3.139)$$

Složky rychlosti získáme derivací zobrazení (3.138) podle času

$$\begin{aligned} V_1 &= 2at \\ V_2 &= bX_2 + 2ct \end{aligned} \quad (3.140)$$

Substitucí za X_2 přejdeme k Eulerově popisu

$$\begin{aligned} v_1 &= 2at \\ v_2 &= b \frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} + 2ct \end{aligned} \quad (3.141)$$

Přesvědčme se, že se oba rychlostní popisy shodují. Sledujme např. pohyb částice, která se v čase $t = 0$ nacházela v počátku a v čase $t = 2$ se v souladu s rovnicí (3.138) přemístila do polohy $x_1 = 4a$, $x_2 = 4c$. Je tedy třeba ověřit, že

$$\mathbf{V}(0, 0, 2) = \mathbf{v}(4a, 4c, 2) \quad (3.142)$$

Skutečně, $V_1 = 4a$ a $V_2 = 4c$ je přesně stejný výsledek, který dostaneme z Eulerova pole (3.141), vyčísleného pro aktuální souřadnice částice.

Nyní vypočteme zrychlení. Derivace materiálového rychlostního pole je snadná a ihned dává

$$\begin{aligned} A_1 &= 2a \\ A_2 &= 2c \end{aligned} \quad (3.143)$$

V tomto konkrétním případě zrychlení není funkcí souřadnic, a proto je $a_1 = A_1 = 2a$ a $a_2 = A_2 = 2c$. Stejný výsledek však musíme získat i z formule (3.137). Máme

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_j} v_j = 2a + 0 + 0 = 2a \quad (3.144)$$

což souhlasí. Výpočet druhé složky je mnohem komplikovanější. Nejprve určíme

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = b \frac{-2ct(1+bt) - (x_2 - ct^2)b}{(1+bt)^2} + 2c \quad (3.145)$$

a potom

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_j} v_j = \frac{b}{1+bt} \left(b \frac{x_2 - ct^2}{1+bt} + 2ct \right) \quad (3.146)$$

Sečtením a úpravou ověříme, že

$$a_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_j} v_j = 2c \quad (3.147)$$

a to je správný výsledek. Mohlo by se zdát, že druhý postup je mnohem složitější. Tak tomu ale obecně není, jak ukazuje hned následující příklad.

Příklad

V Příkladu 4 dosaďte $\varphi = \omega t$ a předpokládejme, že disk se otáčí konstantní úhlovou rychlostí. Pro složky posunutí pak platí

$$\begin{aligned} u_1 &= X_1(\cos \omega t - 1) - X_2 \sin \omega t \\ u_2 &= X_1 \sin \omega t + X_2(\cos \omega t - 1) \end{aligned} \quad (3.148)$$

a pro nové polohy částic

$$\begin{aligned} x_1 = X_1 + u_1 &= X_1 \cos \omega t - X_2 \sin \omega t \\ x_2 = X_2 + u_2 &= X_1 \sin \omega t + X_2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.149)$$

Derivováním podle času

$$\begin{aligned} V_1 &= -\omega(X_1 \sin \omega t + X_2 \cos \omega t) \\ V_2 &= \omega(X_1 \cos \omega t - X_2 \sin \omega t) \end{aligned} \quad (3.150)$$

Standardně bychom nyní měli invertovat systém (3.149) a dosadit za X_1 , X_2 do rychlostního pole. Tento velice pracný postup našťestí můžeme obejít, pokud si všimneme, že se na pravé straně rovnic (3.150) reprodukují výrazy pro souřadnice x_2 a x_1 , takže

$$\begin{aligned} v_1 &= -\omega x_2 \\ v_2 &= \omega x_1 \end{aligned} \quad (3.151)$$

Výpočet zrychlení podle vztahu (3.137) je triviální

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 + 0 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 = -\omega^2 x_1 \\ a_2 &= 0 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + 0 = -\omega^2 x_2 \end{aligned} \quad (3.152)$$

Ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{x} \quad (3.153)$$

rozpoznáváme dostředivé zrychlení. Podobně bychom mohli vyjádřit rychlost pomocí vektorového součinu. To je ponecháno jako cvičení.

3.2.2 Materiálová derivace

Elegantní proces, kterým jsme získali eulerovské zrychlení, lze zobecnit v podstatě pro jakékoli fyzikální pole. Nechť \mathbf{T} představuje nějakou fyzikální veličinu – skalár, vektor anebo tensor. Existují dvě základní vyjádření

$$\mathbf{T} = \phi(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (3.154)$$

Samozřejmě předpokládáme, že polohové vektory \mathbf{X} a \mathbf{x} jsou spojeny obvyklou transformací $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$. Časová derivace veličiny \mathbf{T} měřené podél trajektorie částice \mathbf{X} se nazývá *materiálová derivace*, značíme ji tečkou a definujeme předpisem

$$\boxed{\dot{\mathbf{T}} := \frac{\partial \phi}{\partial t}} \quad (3.155)$$

Využitím pravidla pro derivování složené funkce

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (3.156)$$

a s ohledem na relaci (3.136) máme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} v_j \quad (3.157)$$

Ukazuje se, že výskyt složek v_j nesouvisí s veličinou, která se derivovala, ať to již byla rychlost, jako tomu bylo v předchozí sekci, nebo zde obecně \mathbf{T} , ale se samotnou geometrickou strukturou Eulerova popisu.

V tomto okamžiku je výhodné zápis zjednodušit tím, že akceptujeme notaci, jež se ustálila zejména v termodynamice. Parciální derivace funkce $\phi(\mathbf{X}, t)$ podle času se počítá při konstantním \mathbf{X} , proto píšeme

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_X \quad (3.158)$$

Index X připomíná, že \mathbf{T} byla před derivováním vyjádřena pomocí první reprezentace ve funkci (3.154). Analogicky

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_x \quad (3.159)$$

Dále

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} v_j = (\text{grad } \mathbf{T}) \mathbf{v} \quad (3.160)$$

Malé počáteční písmeno gradientního operátoru naznačuje, že se diferenciální operace vztahují k \mathbf{x} . Všimněme si, že prostorový gradient je lineární funkce přiřazující libovolnému vektoru \mathbf{v} tensor stejného řádu, jako byla původní veličina \mathbf{T} , např. $(\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v}$ je vektor apod. Vztah (3.158) je, jak již víme, materiálová derivace, vztah (3.159) nazýváme derivací *lokální* a vztah (3.160) derivací *konvektivní*.

Materiálová derivace $\dot{\mathbf{T}}$ je veličina odvozená z \mathbf{T} . Přestože je naše nová definice jednoznačná, výraz se vyčísluje různými způsoby podle toho, zda se jedná o Lagrangeův nebo Eulerův popis. Souhrnně

$$\dot{\mathbf{T}} := \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_X = \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right)_x + (\text{grad } \mathbf{T}) \mathbf{v} \quad (3.161)$$

Odpadla tak nutnost zavádět tři symboly, tj. \mathbf{T} , ϕ a φ , pro každé fyzikální pole. Rychlost a zrychlení budeme od této chvíle důsledně značit malými písmeny \mathbf{v} a \mathbf{a} , čímž opouštíme komplikovanou notaci předchozí sekce. Vektor rychlosti je nyní dán vztahem

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}} \quad (3.162)$$

a zrychlení

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.163)$$

Operace $\dot{\mathbf{T}}$ je lineární vzhledem k \mathbf{T} , proto platí obvyklé věty o derivování součinu, podílu a složení funkcí.

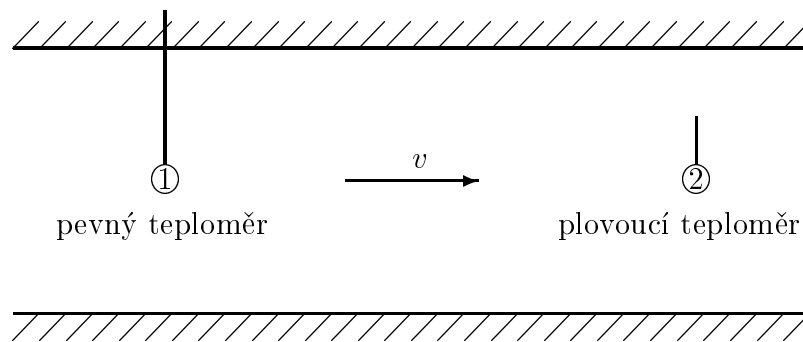
Instruktivní je následující příklad. Uvažujme proudění kapaliny v kanále podle Obr. 3.17. Rychlost proudu je v . V kanále jsou umístěny dva teploměry. Pevný teploměr měří teplotu $T_1(t)$. Druhý teploměr je unášen kapalinou a zaznamenává teplotu $T_2(t)$. Určíme-li časové změny naměřených signálů, která z těchto změn bude odpovídat materiálové derivaci?

První teploměr je nepohyblivý a má stále místo v prostoru \mathbf{x} . Časová změna se děje při pevném \mathbf{x} , neboli

$$\frac{dT_1}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_x \quad (3.164)$$

To je lokální derivace. Ve druhém případě se teploměr pohybuje spolu s látkou, nacházející se v těsném okolí částice \mathbf{X} . Z toho důvodu

$$\frac{dT_2}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_X = \dot{T} \quad (3.165)$$



Obr. 3.17: Ilustrace rozdílu mezi lokální a materiálovou derivací.

Materiálovou derivaci tudíž měří teploměr plovoucí. Malá modifikace tohoto příkladu umožňuje interpretovat též derivaci konvektivní, což je předmětem Cvičení 4.

Jaký je fyzikální význam různých způsobů zjišťování teploty? Údaje odečtené na stacionárním teploměru neodpovídají teplotě žádného konkrétního objektu. Je to vlastně totéž, jako kdybychom pohybovali teploměrem v nehybné kapalině. Změna výsledků v čase by pak daleko spíše odpovídala rychlosti pohybu měřidla, tak jak by přecházelo mezi místy s různou teplotou. Plovoucí teploměr naopak zaznamenává teplotu látky, která se v důsledku předpokládané spojitosti přetvoření stále nachází v blízkém okolí částice \mathbf{X} a je spolu s touto částicí unášena. Z toho můžeme usoudit, že do bilančních zákonů je třeba dosazovat materiálovou, nikoli lokální derivaci. Například změna vnitřní energie je dána vztahem

$$\dot{u} = c\dot{T} \quad (3.166)$$

kde c je tepelná kapacita. Toto prozatím intuitivní tvrzení bude později rigorózně dokázáno – podstatnou roli zde hraje Reynoldsův transportní teorém.

Na závěr ještě dvě důležité poznámky. Tečka nad symbolem, znamenající operátor materiálové derivace, by neměla být zaměňována s označením mechanického nebo tepelného výkonu, \dot{W} či \dot{Q} . Neexistuje totiž pole $Q(\mathbf{X}, t)$, jehož časová derivace by byla $\dot{Q}(\mathbf{X}, t)$. Teplo ani mechanická práce nejsou stavové veličiny, a tak je v tomto případě nutno chápat tečku jako nedílnou součást celého symbolu. Za druhé, materiálová derivace se někdy zapisuje jako

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} \quad (3.167)$$

a nazývá derivací *Stokesovou* nebo též *absolutní*. Tuto terminologii však používat nebudeme.

3.2.3 Rychlostní gradient

Základní kinematickou veličinou Eulerova popisu je rychlostní gradient. Jeho složková definice je

$$L_{ij} := \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.168)$$

Složky L_{ij} se transformují jako tensor druhého řádu, v přímé notaci

$$\boxed{\mathbf{L} := \text{grad } \mathbf{v}} \quad (3.169)$$

Zrychlení můžeme podle předchozí sekce vyjádřit jako

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_x + \mathbf{L} \mathbf{v} \quad (3.170)$$

Z pravidla pro derivování složené funkce plyne

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_k} F_{kj}^{-1} = \dot{F}_{ik} F_{kj}^{-1} \quad (3.171)$$

Využili jsme faktu, že materiálová derivace probíhá při konstantních hodnotách souřadnic X_k . Dospěli jsme tak k rovnici

$$\boxed{\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}} \quad (3.172)$$

To je významný výsledek zajišťující propojení mezi Lagrangeovým a Eulerovým popisem.

Každý tensor druhého řádu může být jednoznačně rozložen na symetrickou a antisymetrickou část. Zde

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (3.173)$$

Symetrická část

$$\mathbf{D} := \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (3.174)$$

reprezentuje deformaci kontinua, zatímco antisymetrická část

$$\mathbf{W} := \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (3.175)$$

odpovídá rotaci. Tensor \mathbf{W} se nazývá *vírový tensor* nebo též *spin*. První název se používá v mechanice tekutin, druhý v mechanice materiálů. V součtu

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}} \quad (3.176)$$

Existence tohoto rozkladu je evidentní, důkaz jednoznačnosti ponecháváme jako cvičení.

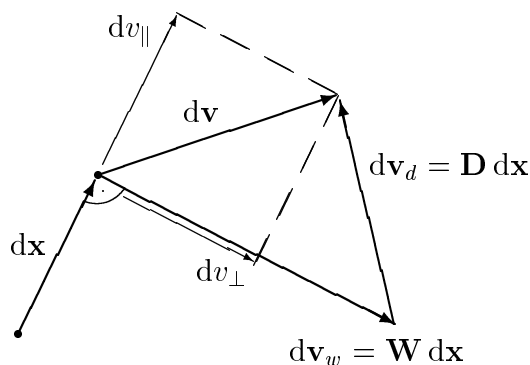
Stejně jako tomu bylo v případě deformačního gradientu v Lagrangeově popisu, i tentokrát se nabízí zajímavá geometrická interpretace. Vytvořme totální prostorový diferenciál

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = L_{ij} dx_j \quad (3.177)$$

nebo v maticové notaci

$$\boxed{d\{v\} = [L] d\{x\}} \quad (3.178)$$

Rychlostní gradient přiřazuje částici v místě $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ relativní rychlost jejího pohybu vůči bodu \mathbf{x} . Změna rychlosti je schematicky zakreslena na Obr. 3.18 společně s částmi



Obr. 3.18: Aditivní rozklad rychlostního gradientu.

odpovídajícími \mathbf{D} a \mathbf{W} . Nezbytné je upozornit zejména na to, že antisymetrická část $d\mathbf{v}_w$ je sice kolmá k $d\mathbf{x}$, nejedná se však o ortogonální průmět $d\mathbf{v}$, jak se někdy nesprávně kreslí!

Nejprve dokážeme, že antisymetrická část $d\mathbf{v}_w$ je vskutku kolmá k $d\mathbf{x}$. Dokážeme dokonce obecně, že každá antisymetrická matice $[W]$ přiřazuje libovolnému vektoru $\{a\}$ vektor k němu kolmý. Vytvoříme skalární součin

$$\{a\}^T [W] \{a\} = ([W] \{a\})^T \{a\} = \{a\}^T [W]^T \{a\} = -\{a\}^T [W] \{a\} \quad (3.179)$$

V první úpravě jsme využili symetrie skalárního součinu, ve druhé pravidla pro transponování součinu a nakonec antisymetrie řídicí matice. Převodem pravé strany na levou

$$2\{a\}^T [W] \{a\} = 0 \quad (3.180)$$

Vidíme, že obraz $[W]\{a\}$ je kolmý k původnímu vektoru a ze stejného důvodu je též rychlost $d\mathbf{v}_w$ kolmá k průvodiči $d\mathbf{x}$. To znamená, že antisymetrická část rychlostního pole má tendenci úsečkou otáčet, avšak neměnit její délku.

Nyní si všimneme symetrického příspěvku a ukážeme, že vektor $d\mathbf{v}_d$ není automaticky rovnoběžný s $d\mathbf{x}$, a v důsledku toho může mít ortogonální průmět dv_\perp jinou délku než $\|d\mathbf{v}_w\|$. Nejsnažší je výpočet v hlavních osách, tedy

$$d\{v'_d\} = [D'] d\{x'\} = \text{diag}[D_1 \ D_2 \ D_3] d\{x'\} = \begin{Bmatrix} D_1 dx'_1 \\ D_2 dx'_2 \\ D_3 dx'_3 \end{Bmatrix} \quad (3.181)$$

kde D_1 , D_2 a D_3 jsou hlavní hodnoty tensoru \mathbf{D} a čárka označuje složky v příslušné bázi. Je jasné, že rovnoběžnost zaručuje podmínka $D_1 = D_2 = D_3$, která ovšem nebude obecně splněna. Podrobnější analýza geometrického významu komponent \mathbf{D} a \mathbf{W} následuje v dalších dvou sekcích.

3.2.4 Okamžitá rychlost deformace

Pro posouzení rychlosti deformace kontinua budeme sledovat pohyb elementární úsečky a změnu její délky. Zvolme pevně \mathbf{X} a materiálový segment $d\mathbf{X}$. Částice obsažené

v tomto segmentu vyplní v čase t prostorovou úsečku

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X} \quad (3.182)$$

Protože jsme zvolili \mathbf{X} a $d\mathbf{X}$ pevně, vektor $d\mathbf{x}$ závisí pouze na čase, takže

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = \mathbf{L} d\mathbf{x} = d\mathbf{v} \quad (3.183)$$

Kromě toho je $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, a tudíž

$$\boxed{\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}) = d\mathbf{v} = d\dot{\mathbf{x}}} \quad (3.184)$$

Vidíme, že pořadí diferencování lze zaměnit. Nyní již snadno zjistíme změnu kvadrátu délky úseku

$$\frac{d}{dt}(dl)^2 = \frac{d}{dt}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{v} = 2 d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{v} \quad (3.185)$$

nebo v maticovém tvaru

$$\frac{d}{dt}(dl)^2 = 2 d\{x\}^T d\{v\} = 2 d\{x\}^T [L] d\{x\} \quad (3.186)$$

Tento výsledek nápadně připomíná rovnici (3.34), a tak bychom rádi postupovali stejným způsobem, jako tomu bylo v případě Greenova-Lagrangeova tensoru. Jediný problém je v tom, že matice $[L]$ není symetrická. V minulé sekci jsme ale naštěstí zjistili, že produkt s antisymetrickým tensorem je nulový, proto

$$\frac{d}{dt}(dl)^2 = 2 d\{x\}^T [D] d\{x\} \quad (3.187)$$

Řídící matice kvadratické formy tím nabyla symetrie a můžeme zahájit přesně stejné operace jako v Sekci 3.1.2. Nakonec dojdeme k analogii rovnice (3.41), která má tentokrát podobu

$$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall d\mathbf{x} : dl = konst.} \quad (3.188)$$

Z matematického hlediska má symetrická část rychlostního gradientu \mathbf{D} stejnou strukturu jako GL tensor v Lagrangeově formulaci.

Souvislost s materiálovým popisem vynikne ještě více, pokud se nám podaří nalézt relaci mezi \mathbf{D} a $\dot{\mathbf{e}}$. Toho dosáhneme následovně. Derivujeme definiční vztah GL tensoru

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \quad (3.189)$$

a vynásobíme zleva i zprava inverzí deformačního gradientu. Dostaneme

$$\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{e}} \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^T + \mathbf{L}) = \mathbf{D} \quad (3.190)$$

a odtud

$$\boxed{\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}} \quad (3.191)$$

Podle očekávání musí složky obou tensorů vymizet současně, pokud je rychlost přetvoření kontinua nulová, tedy

$$\mathbf{D} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \quad (3.192)$$

Obecně se dá dokázat, že vztah mezi materiálovou derivací libovolného tensoru deformace \mathbf{E} a rychlostní veličinou \mathbf{D} je lineární,

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathcal{L}(\mathbf{D}) \quad (3.193)$$

Odvození přesného tvaru operátoru je dosti komplikované, neboť je nutno pracovat s polárním rozkladem $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ ve spektrální bázi. Z tohoto důvodu je explicitní reprezentace \mathcal{L} uvedena až v poslední kapitole. Samotná znalost faktu, že zobrazení je lineární, je nicméně důležitá a bude využita mnohem dříve v sekci věnované konjugovaným napětím.

Obraťme naši pozornost též ke složkovému zápisu. Rovnice (3.174) se dá indexově vyjádřit jako

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(L_{ij} + L_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.194)$$

Prakticky stejnou podobu má časová změna tensoru malé deformace

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} \right) \quad (3.195)$$

Jediný, zato však postatný rozdíl spočívá v souřadnicích, podle kterých se derivuje. Zatímco ve druhém případě lze materiálovou derivaci ze závorky vytknout, v předchozí rovnici to možné není, neboť souřadnice x_j samy o sobě závisejí na čase. To má jeden zcela zásadní důsledek, totiž že

$$\boxed{\int_0^t \mathbf{D} \, d\tau \text{ závisí na integrační cestě}} \quad (3.196)$$

V porovnání s tím

$$\int_0^t \dot{\mathbf{E}} \, d\tau = \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{E}(\mathbf{X}, 0) \quad (3.197)$$

jelikož přírůstek tensoru deformace je evidentně dán pouze výchozím a konečným stavem. Z toho dále vyplývá

$$\nabla \mathbf{E} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D} \quad (3.198)$$

tedy, že *neexistuje* žádný lagrangeovský tensor deformace, jehož materiálová derivace by se přímo rovnala \mathbf{D} . Na druhé straně však víme, že máme k dispozici vztah (3.193), který je jednoznačný a navíc dokonce lineární. Stejně tvrzení platí i pro eulerovské tensory \mathbf{A} , definované prostřednictvím levostranného rozkladu.

Záměna $\dot{\mathbf{e}}$ za \mathbf{D} je v literatuře bohužel častá a extrémně nebezpečná. Závislost integrálu (3.196) na parametrizaci způsobuje, že kumulativní hodnota \mathbf{D} nemůže vstoupit

do energetické funkce ve stejné roli jako tensor deformace a následky toho se později projeví při výpočtu napětí. Více se tím budeme zabývat v následujících sekcích.

Jistou vazbu však lze přesto vysledovat. V teorii malých deformací zanedbáváme změnu tvaru referenční oblasti, což je ekvivalentní předpokladu $\mathbf{x} \simeq \mathbf{X}$. Můžeme proto očekávat $\mathbf{D} \simeq \dot{\mathbf{e}}$. Přesněji, v čase $t = 0$, je $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ a rychlostní gradient

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{z}} \quad (3.199)$$

Jeho symetrická část

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{z}}^T) \quad (3.200)$$

Gradient posunutí \mathbf{z} se vztahuje k \mathbf{X} , materiálovou derivaci lze vytknout a dospějeme tak k identitě

$$\mathbf{D} = \dot{\mathbf{e}} \quad \text{v čase } t = 0 \quad (3.201)$$

Pokud deformace zůstává malá, je možno tento výraz akceptovat jako aproximaci i pro $t > 0$. Jinou názornou ilustraci nabízí Cvičení 8 na konci kapitoly.

3.2.5 Vírový tensor (spin)

Dříve než začneme studovat vlastnosti vírového tensoru, budeme se zabývat rotačním pohybem dokonale tuhého tělesa. Pohyb bodu po kružnici popisuje rovnice

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (3.202)$$

Stejná rovnice odpovídá též rotaci kontinua, pokud její osa, dána okamžitou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$, prochází počátkem. V indexovém zápisu má vektorový součin podobu (2.53), tedy

$$v_i = \gamma_{ijk}\omega_j x_k \quad (3.203)$$

kde γ_{ijk} jsou složky Levi-Civitova tensoru. První dva součinitele na pravé straně představují dvouindexovou veličinu

$$\Omega_{ik} = \gamma_{ijk}\omega_j \quad (3.204)$$

která se transformuje jako tensor druhého řádu. Vektorový součin můžeme vyjádřit v maticovém tvaru

$$v_i = \Omega_{ik}x_k, \quad \{v\} = [\Omega]\{x\} \quad (3.205)$$

Díky vlastnostem Levi-Civitova tensoru je matice $[\Omega]$ antisymetrická, explicitně

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{132}\omega_3 & \gamma_{123}\omega_2 \\ \gamma_{231}\omega_3 & 0 & \gamma_{213}\omega_1 \\ \gamma_{321}\omega_2 & \gamma_{312}\omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.206)$$

Z toho je zřejmé, že vektorový součin $\boldsymbol{\omega} \times (\cdot)$ je antisymetrický tensor druhého řádu a obráceně, libovolný antisymetrický tensor představuje rotaci úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Složky tohoto vektoru určuje matice (3.206), např. $\omega_1 = \Omega_{32}$ apod.

Vírový tensor \mathbf{W} je antisymetrický, a tudíž separující rotační část rychlostního gradientu. Podle předchozího receptu definujeme úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$ takto:

$$\{\boldsymbol{\omega}\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_{32} \\ W_{13} \\ W_{21} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (3.207)$$

V posledním sloupci se vyskytuje diferenciální operátor rotace, což dovoluje zapsat vektor úhlové rychlosti jako

$$\boldsymbol{\omega} := \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \quad (3.208)$$

Pro točivou část lokálního pole tak máme k dispozici dva ekvivalentní produkty

$$d\mathbf{v}_w := \mathbf{W} d\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} \quad (3.209)$$

Druhý způsob zápisu sice nebudeme využívat, ale je z něj okamžitě vidět, že náš vzorec vyjadřuje otáčení infinitesimálního okolí bodu jako tuhého celku. Pokud se přitom kontinuum také deformuje, jedná se jen o zprůměrovanou rotaci.¹

Vraťme se ještě k obrázku na str. 67. Složka dv_\perp je průmět skutečné rychlosti částice, nacházející se v místě $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$, do směru kolmého k $d\mathbf{x}$. Oproti tomu $d\mathbf{v}_w$ je fiktivní rychlost, kterou by se tatáž částice pohybovala, kdyby nedocházelo k deformaci. Z toho je patrné, že rozdíl těchto rychlostí musí být

$$dv_\perp - \|d\mathbf{v}_w\| = dv_{d\perp} \quad (3.210)$$

což ostatně potvrzuje i Obr. 3.18 a exaktně to plyne z aditivního rozkladu (3.176). Radiální průmět $dv_{d\parallel}$ je ovšem totožný s dv_\parallel , protože v tomto směru jde jakákoli změna rychlosti na vrub přetvoření.

Tím jsme získali nezávislé vysvětlení, proč může mít deformační vektor $d\mathbf{v}_d$ v podstatě libovolný směr. Je to proto, že deformace má dvě ortogonální složky: radiální, způsobující změnu délky elementární úsečky, a tečnou, indukovanou úhlovým přiblížováním či vzdalováním radiálních paprsků. Na toto deformační pole se následně superponuje $d\mathbf{v}_w$ jako nezávislý rotační pohyb.

3.2.6 Cvičení

1. Ověřte správnost výsledku (3.147).
2. Rychlostní pole je dáno předpisem

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}}{1+t}$$

¹Přesný význam slova ‘průměr’ specifikuje operátor ‘rot’, respektive, ve smyslu Stokesovy věty, integrál cirkulace. Tuto interpretaci však nebudeme potřebovat.

- (a) Určete zrychlení $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ v Eulerově popisu.
 (b) Určete trajektorie částic $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$.
3. Dokažte, že pro materiálovou derivaci platí věty o derivování
- (a) součinu funkcí,
 (b) podílu funkcí,
 (c) složené funkce.
4. Uvažujme proudění kapaliny v kanále podle Obr. 3.17. Oba teploměry jsou tentokrát umístěny napevno v malé vzdálenosti h od sebe. Odhadněte rychlost proudu. Návod: využijte vzorec pro materiálovou derivaci a položte $\dot{T} \simeq 0$.
5. Dokažte, že rychlostní gradient je tensor druhého řádu.
6. Dokažte, že \mathbf{D} je symetrický tensor a \mathbf{W} antisymetrický.
7. Dokažte jednoznačnost aditivního rozkladu

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

8. Počítejte $\dot{\mathbf{e}}$, \mathbf{L} a \mathbf{D} pro Příklad 1 a zakreslete průběhy funkcí $\dot{\epsilon}_{22}(t)$ a $D_{22}(t)$ do jednoho grafu. Porovnejte výsledky.
9. Počítejte \mathbf{L} , \mathbf{D} , \mathbf{W} a $\boldsymbol{\omega}$ pro Příklad 4 a ukažte, že

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$$

10. V Příkladu 3 dosadte $\tan \gamma = kt$, počítejte \mathbf{L} , \mathbf{D} , \mathbf{W} , $\dot{\mathbf{e}}$ a pro tento příklad ukažte

$$\mathbf{W} \neq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}$$

11. Cvičení 9 a 10 doplňte výpočty $\dot{\mathbf{F}}$ a \mathbf{F}^{-1} a pro oba tyto příklady ukažte, že

$$\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L}$$

12. V Cvičení 10 označme jako $h_t = h_0 / \cos \gamma$ levou hranu kosodélníka v čase t .

- (a) Určete trajektorii a rychlost koncového bodu hrany, tj. částice, jejíž počáteční souřadnice byly $X_1 = 0$, $X_2 = h_0$.
 (b) Pro tutéž částici určete rychlosti \mathbf{v}_d a \mathbf{v}_w a ukažte, že

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_w$$

- (c) Ověřte, že vektor \mathbf{v}_w je kolmý k h_t .
 (d) Vypočítejte v_\perp , $v_{d\perp}$ a $\|\mathbf{v}_w\|$ a zakreslete jejich průběhy v závislosti na γ do jednoho grafu.
 (e) Určete $\dot{\gamma}$ ze vzorce $\tan \gamma = kt$ a výsledek porovnejte s hodnotami podílů v_\perp/h_t a $\|\mathbf{v}_w\|/h_t$. Jakou rychlostí se mění úhel mezi hranami h_t a l_0 ?

Kapitola 4

Zákony zachování

Základním a v podstatě jediným axiomem klasické mechaniky je Newtonův zákon zachování hybnosti. Vše ostatní se z něj dá odvodit. Tvzení o změně hybnosti hmotného bodu se nejprve jednoduchou superpozicí rozšíří na soubor většího počtu částic a pro tento systém doplní větou o zachování momentu hybnosti. Dále je možno zavést kinetickou energii, impuls a sílu jako podíl impulsu a času. Velké statistické soubory lze zpracovat stejně jako molekulární systémy v kinetické teorii plynů, vzniknou tím pojmy, jako je např. teplota a vnitřní energie, anebo pomocí limity přejít k integrálům popisujícím odezvu tuhých a poddajných těles. Abstraktně je tato strategie celkem srozumitelná, potíže však nastanou, jak už to často bývá, pokud si začneme všimnout detailů.

Ukážeme to na příkladě definice hustoty, která je jen zdánlivě snadná. V mnoha učebnicích je hustota zavedena poněkud vágním předpisem

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (4.1)$$

aniž by bylo řečeno, jak Δm závisí na ΔV . Z praktického hlediska je samozřejmě jasné, co se takovou limitou myslí, matematicky je však limitní přechod formulován nekorektně. Pokusme se proto uvedenou myšlenku rozvést a upřesnit.

Představme si, že se v objemu V nachází velké množství částic, např. atomů. Celkový objem můžeme rozdělit na menší díly ΔV_i a v každém z nich definovat průměrnou hustotu

$$\bar{\rho}_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} \quad (4.2)$$

kde Δm_i je hmotnost veškerého materiálu obsaženého v objemu ΔV_i . Atomy mají nicotné rozměry, a tak se bude i ve velice malém ΔV_i vždy nacházet dostatečný počet částic, aby vzorec (4.2) dával smysl.¹ Potom lze průměrnou hustotu $\bar{\rho}_i$ považovat za lokální hustotu $\rho(\mathbf{x})$ přiřazenou každému bodu prostoru $\mathbf{x} \in \Delta V_i$. Jak již bylo řečeno, prakticky je taková představa snad dostatečná, matematicky nikoli. Paradox je v tom, že pokud budeme skutečně limitovat $\Delta V_i \rightarrow 0$, dříve či později nastane okamžik, kdy se v objemu ΔV_i bude nacházet jen jediný atom a později už ani ten ne. Nakonec $\rho(\mathbf{x}) = 0$ téměř všude!

¹Např. v 1 mm^3 kovu je řádově 10^{20} atomů, takže definiční objem může být vskutku nepatrný.

Rozpor můžeme elegantně obejít tím, že za primárně danou nebudeme považovat hmotnost, nýbrž právě hustotu, a libovolnému objemu V přiřadíme integrál

$$m(V) := \int_V \rho \, dV \quad (4.3)$$

Existenci pole $\rho(\mathbf{x})$ nezávislého na volbě V axiomaticky předpokládáme. Tímto postupem jsme *de facto* nedefinovali funkci ρ , ale jednu ze základních vlastností hypotetického kontinua. Současně jsme vysvětlili, co máme na mysli pod pojmem ‘spojité rozložení hmoty.’

Podobným způsobem můžeme interpretovat také další fyzikální zákony a krok za krokem upřesňovat definici pojmu kontinuum. Například slova ‘spojitý přenos sil’ pro nás budou znamenat existenci spojité vektorové funkce $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ s rozměrem napětí takové, že výsledná síla působící na plochu S bude

$$\text{výslednice} := \int_S \mathbf{t} \, dS \quad (4.4)$$

apod. V následujícím textu se již nebudeme pokoušet o takto exaktní výklad, nicméně každé nové formulaci by mělo být právě v tomto duchu rozuměno.

4.1 Zákon zachování hmotnosti

Z referenční oblasti Ω_0 vybereme libovolnou podoblast V_0 a zobrazíme ji materiálovou funkcí $\chi(\mathbf{X}, t)$. Obrazem je odpovídající množina bodů ve zdeformovaném tělese

$$\chi : (V_0 \subset \Omega_0) \rightarrow (V_t \subset \Omega_t) \quad (4.5)$$

Protože obě oblasti, V_0 i V_t , obsahují tytéž částice, musejí mít také stejnou hmotnost

$$\boxed{m(V_0) = m(V_t)} \quad (4.6)$$

Tvrzení zákona zachování hmotnosti je natolik samozřejmé, že se v mechanice soustav částic a tuhých těles obvykle ani nevyslovuje. V mechanice kontinua, jak ještě uvidíme, je nesmírně významné.

4.1.1 Změna hustoty

Nejprve se zaměříme na Lagrangeův popis a zjistíme, jak se mění hustota $\rho(\mathbf{x}, t)$ s deformací. V čase $t = 0$ označme

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho(\mathbf{X}, 0) = \rho_0(\mathbf{X}) \quad (4.7)$$

Podle předchozích úvah je hmotnost referenčního objemu rovna

$$m(V_0) = \int_{V_0} \rho_0 \, dV_0 \quad (4.8)$$

a v aktuálním stavu

$$m(V_t) = \int_{V_t} \rho \, dV_t = \int_{V_0} J \rho \, dV_0 \quad (4.9)$$

Druhý integrál jsme transformovali do referenční konfigurace. Pokud si obě množiny materiálových bodů odpovídají, musí podle zákona zachování hmotnosti platit

$$\int_{V_0} (\rho_0 - J \rho) \, dV_0 = 0 \quad (4.10)$$

Nulovost integrálu sice ještě neznamená nulovost integrandu, v tomto případě jsme však zvolili V_0 libovolně, tudíž

$$\boxed{\rho_0 = J \rho} \quad (4.11)$$

Tento výsledek není překvapivý, když si uvědomíme, že jacobíán představuje podíl lokálních objemů.

Vzorec pro přepočet hustoty se v praxi zřídka používá, hraje však významnou roli jako pomocná věta v řadě odvození. Jednu zajímavou a užitečnou aplikaci ukazuje následující příklad.

Příklad: invariantnost matice hmotnosti

Matice hmotnosti $[M]$ vystupující ve výpočtové mechanice, zejména v metodě konečných prvků, má tvar

$$[M] = \int_{V_0} \rho_0 [N]^T [N] \, dV_0 \quad (4.12)$$

kde $[N]$ jsou interpolační funkce, odpovídající zvolené aproximaci. Tuto matici snadno sestavíme, protože výchozí hustota i tvar tělesa (výpočtové sítě) jsou předem známy.

Logicky se nabízí otázka, jak se matice hmotnosti mění s deformací, jinými slovy, jak vypadá matice

$$[M_t] = \int_{V_t} \rho [N]^T [N] \, dV_t \quad (4.13)$$

Transformací integrálu a užitím vztahu (4.11) dostaneme

$$[M_t] = \int_{V_0} J \rho [N]^T [N] \, dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 [N]^T [N] \, dV_0 \quad (4.14)$$

To je však původní matice! Ukazuje se, že $[M]$ se s deformací sítě nijak nemění, zůstává konstantní v průběhu celého výpočtu, a proto ji lze připravit předem.

4.1.2 Reynoldsův transportní teorém

V mechanice kontinua se často setkáváme s potřebou derivovat integrály s proměnnou mezí. Pokud se v integrandu vyskytuje součin hustoty ρ s nějakou fyzikální veličinou \mathbf{T} , platí následující pozoruhodná verze Reynoldsovy věty

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{T} \, dV_t = \int_{V_t} \rho \dot{\mathbf{T}} \, dV_t} \quad (4.15)$$

Přestože jsou V_t i ρ funkce času, záměna pořadí integrace a derivování je možná, jako kdyby to byly konstanty! Obyčejná derivace se přitom mění na materiálovou.

Jako příklad uvažujme hustotu vnitřní energie u , vztaženou na jednotku hmotnosti. Celková energie obsažená v objemu V_t bude

$$U(V_t) = \int_{V_t} \rho u \, dV_t \quad (4.16)$$

což je integrál zmíněného typu. Změna energie se pak spočítá snadno

$$\frac{d}{dt}U = \int_{V_t} \rho \dot{u} \, dV_t \quad (4.17)$$

Právě z tohoto důvodu se v teorii velkých deformací, kdy V_t se podstatně liší od V_0 , vyplatí vztahovat všechny energetické veličiny na jednotku hmotnosti s rozměrem J/kg, spíše než na jednotku objemu, jak jsme činili v úvodní kapitole.

Důkaz Reynoldsova teorému není obtížný. Veličina \mathbf{T} může být skalár, vektor nebo tensor libovolného řádu. Jako obvykle máme k dispozici dvě reprezentace

$$\mathbf{T} = \phi(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (4.18)$$

Integrál, který se chystáme derivovat, nejprve převedeme na pevnou referenční oblast

$$\int_{V_t} \rho \varphi(\mathbf{x}, t) \, dV_t = \int_{V_0} J \rho \phi(\mathbf{X}, t) \, dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \phi(\mathbf{X}, t) \, dV_0 \quad (4.19)$$

Ve druhé úpravě jsme využili zákon zachování hmotnosti. Nyní můžeme pohodlně derivovat

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 \phi(\mathbf{X}, t) \, dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \dot{\mathbf{T}} \, dV_0 \quad (4.20)$$

Parciální derivace Lagrangeova vyjádření $\mathbf{T} = \phi(\mathbf{X}, t)$ se děje při konstantním \mathbf{X} , proto se jedná o derivaci materiálovou. Nakonec se vrátíme na původní oblast

$$\int_{V_0} \rho_0 \dot{\mathbf{T}} \, dV_0 = \int_{V_0} J \rho \dot{\mathbf{T}} \, dV_0 = \int_{V_t} \rho \dot{\mathbf{T}} \, dV_t \quad (4.21)$$

čímž je tvrzení věty dokázáno.

4.1.3 Rovnice kontinuity

Vraťme se k lokální formulaci zákona zachování hmotnosti (4.11). Výchozí rozložení hustoty $\rho_0(\mathbf{X})$ nezávisí na čase, proto je materiálová derivace tohoto pole nulová. Derivováním vztahu (4.11) dostaneme

$$\dot{\rho}_0 = (J\rho)' = \dot{J}\rho + J\dot{\rho} = 0 \quad (4.22)$$

Pro derivaci jacobianu platí

$$\boxed{\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v}} \quad (4.23)$$

Důkaz je obtížný a abychom nenarušili plynulost výkladu, odsunuli jsme jej až na konec sekce. Dosazením do rovnice (4.22) a vykrácením čísla $J > 0$, dojdeme k proslavené rovnici kontinuity

$$\boxed{\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0} \quad (4.24)$$

Jedná se o tvar s materiálovou derivací. Pokud je látka nestlačitelná, je $\dot{\rho} = 0$, takže

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.25)$$

Tento výsledek lze také přímo získat tím, že v rovnici (4.23) položíme $\dot{J} = 0$. Nestlačitelnost implikuje nulovou změnu objemu.

Všimneme si ještě jednoho zajímavého tvaru zákona zachování hmotnosti. Roze-psáním operátoru materiálové derivace

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x + (\operatorname{grad} \rho) \mathbf{v} \quad (4.26)$$

dosazením do podmínky (4.24) a přechodem k indexovému zápisu

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x + \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (4.27)$$

Poslední dva členy můžeme sloučit

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \quad (4.28)$$

Získali jsme tak vyjádření s lokální derivací

$$\boxed{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0} \quad (4.29)$$

Pro přímé porovnání přepíšeme materiálovou derivaci v rovnici (4.24) pomocí závorkové konvence

$$\boxed{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x + \rho \operatorname{div} (\mathbf{v}) = 0} \quad (4.30)$$

Oba vztahy se na první pohled liší pouze vytknutím ρ z operátoru divergence. Hustota však nemusí být konstantní, takže vytknutí má za následek změnu typu derivace v prvním členu. Na tyto nuance je třeba neustále dávat pozor.

Výpočet derivace determinantu

Stať o rovnici kontinuity uzavřeme odvozením klíčového vztahu (4.23). Důkaz rozložíme na dvě části. Nejdříve se budeme zabývat řádkovým rozvojem determinantu a jeho derivací podle koeficientu matice. Získáme tím důležitý mezivýsledek, který později využijeme ještě k dalším účelům. Ve druhé části přikročíme k časové derivaci, kterou budeme chápat jako derivaci složené funkce. Existuje i jiný, kompaktnější důkaz,

uvedený např. v Gurtinově knize [8]. Zde nabízené odvození je sice poněkud rozvleklé, avšak jednoduché, srozumitelné a nevyžaduje znalost žádné vyšší matematiky.

Determinant můžeme vyjádřit rozvojem podle libovolného řádku. Jako příklad, avšak bez újmy na obecnosti, uvažujme rozvoj podle 2. řádku

$$J = F_{21}\bar{F}_{21} + F_{22}\bar{F}_{22} + F_{23}\bar{F}_{23} \quad (4.31)$$

kde čísla označená pruhem jsou tzv. doplňky prvků matice, což jsou subdeterminanty

$$\begin{aligned} \bar{F}_{21} &= F_{13}F_{32} - F_{12}F_{33} \\ \bar{F}_{22} &= F_{11}F_{33} - F_{13}F_{31} \\ \bar{F}_{23} &= F_{12}F_{31} - F_{11}F_{32} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Z definice těchto subdeterminantů je zřejmé, že žádný z nich není funkcí ani jednoho z prvků druhého řádku matice. Derivováním rozvoje (4.31) proto dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial F_{21}} = \bar{F}_{21}, \quad \frac{\partial J}{\partial F_{22}} = \bar{F}_{22}, \quad \frac{\partial J}{\partial F_{23}} = \bar{F}_{23} \quad (4.33)$$

Podobnou úvahou pro 1. a 3. řádek bychom dospěli k obecnému vztahu

$$\frac{\partial J}{\partial F_{ij}} = \bar{F}_{ij} \quad (4.34)$$

To ještě není konečný výsledek. Práce s doplňky je totiž dosti nepraktická, a tak je raději nahradíme prvky inverzní matice. Použitím Cramerova pravidla

$$F_{ij}^{-1} = \frac{1}{J}\bar{F}_{ji} \quad (4.35)$$

a dosazením za \bar{F}_{ij} do předchozí rovnice

$$\boxed{\frac{\partial J}{\partial F_{ij}} = JF_{ji}^{-1}} \quad (4.36)$$

Tento významný vzorec si pečlivě zaznamenáme pro pozdější využití. Zdůrazněme, že při výpočtu inverzní matice došlo k transpozici a tím se stalo, že indexy i a j jsou přehozené.

Zbytek je již snadný. Jacobián závisí na prvcích F_{ij} , které jsou zase funkce referenčních souřadnic a času. Pomocí věty o materiálové derivaci složené funkce

$$\dot{J} = \frac{\partial J}{\partial F_{ij}}\dot{F}_{ij} = JF_{ji}^{-1}\dot{F}_{ij} \quad (4.37)$$

Z relace (3.172) dále plyne

$$F_{ji}^{-1}\dot{F}_{ij} = L_{jj} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \text{div } \mathbf{v} \quad (4.38)$$

Výraz (4.37) tudíž nabývá tvaru $\dot{J} = J \text{div } \mathbf{v}$, což jsme chtěli dokázat.

4.1.4 Cvičení

1. Rychlostní pole je dáno předpisem

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}}{1 + 2t^2}$$

Je deformace isochorická?

2. Uvažujme rychlostní pole v Příkladu 1.

- (a) Vypočítejte $\operatorname{div} \mathbf{v}$ a $\operatorname{Div} \mathbf{v}$. Proč se výsledky liší?
- (b) Dosadte vypočtenou divergenci do rovnice kontinuity a integrujte s počáteční podmínkou $\rho(0) = \rho_0$.
- (c) Získané řešení porovnejte se vzorcem $J\rho = \rho_0$.

3. První složka rychlostního pole je dána předpisem

$$v_1 = \frac{x_1}{1 + t}$$

a ostatní složky jsou nulové. Určete funkci $\rho(x_1)$ tak, aby byla splněna rovnice kontinuity.

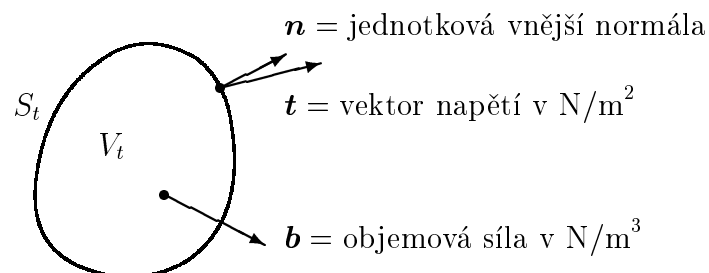
4. Odvoďte alternativní verzi Reynoldsova teorému

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \varphi(\mathbf{x}, t) dV_t = \int_{V_t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV_t + \int_{S_t} \varphi(\mathbf{x}, t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_t$$

a tuto rovnici porovnejte se vzorcem (4.15). Jak lze jednu větu odvodit z druhé?

4.2 Zákon zachování hybnosti

Zvolme libovolnou podoblast $V_t \subset \Omega_t$ a vyjměme jí ze zdeformovaného tělesa. Takovou oblast znázorňuje Obr. 4.1. Po jejím uvolnění se na povrchu objeví plošné vnitřní síly, reprezentované vektorem napětí $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$. Jednotkou napětí je N/m^2 , což je Pa. Též na vnitřek oblasti může působit spojitá objemová síla $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, kterou měříme v N/m^3 . Objemová síla bývá generována gravitačními nebo inerciálními účinky.



Obr. 4.1: Síly působící na uvolněnou oblast.

Výslednou sílu \vec{F} , působící na vyjmutou oblast, získáme jako součet povrchového a objemového integrálu

$$\boxed{\vec{F} = \int_{V_t} \mathbf{b} \, dV_t + \int_{S_t} \mathbf{t} \, dS_t} \quad (4.39)$$

Symbol šipky jsme výjimečně použili proto, aby nedocházelo k záměně značení tohoto vektoru s označováním deformačního gradientu \mathbf{F} . Plošná výslednice může být vztažena nejen k celému uzavřenému povrchu S_t , ale také k některé jeho části $\Delta S_t \subset S_t$, tedy

$$\vec{F}(\Delta S_t) = \int_{\Delta S_t} \mathbf{t} \, dS_t \quad (4.40)$$

Na tomto místě je důležité poznamenat, že oba integrály, objemový i povrchový, se dají transformovat na referenční konfiguraci Ω_0 . Zřejmě

$$\int_{V_t} \mathbf{b} \, dV_t = \int_{V_0} J \mathbf{b} \, dV_0 \quad (4.41)$$

kde $J = \det |\mathbf{F}|$ je jacobíán zobrazení $\chi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$. To nás opravňuje k definici objemové síly na referenční konfiguraci

$$\boxed{\mathbf{B} := J \mathbf{b}} \quad (4.42)$$

takže potom

$$\int_{V_t} \mathbf{b} \, dV_t = \int_{V_0} \mathbf{B} \, dV_0 \quad (4.43)$$

Podobně můžeme zpracovat plošné síly tak, aby platilo

$$\int_{\Delta S_t} \mathbf{t} \, dS_t = \int_{\Delta S_0} \mathbf{T} \, dS_0 \quad (4.44)$$

Posledně zmíněná transformace je ovšem dosti komplikovaná, a proto se jí budeme speciálně věnovat ve dvou samostatných Sekcích 4.2.2 a 4.2.3. Výsledkem bude exaktní definice nominálního napětí – pojmu dobře známého z teorie pružnosti.

Hybnost je produkt hmotnosti a rychlosti. V mechanice kontinua přecházíme ke spojitému popisu a definici hybnosti rozšířujeme takto

$$\boxed{\mathbf{p}(t) := \int_{V_t} \rho \mathbf{v} \, dV_t} \quad (4.45)$$

Při výpočtu změny hybnosti s výhodou využijeme Reynoldsův teorém

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_{V_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \, dV_t = \int_{V_t} \rho \mathbf{a} \, dV_t \quad (4.46)$$

Evidentně se jedná o analogii známého vzorce $d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{a}$. Transformací na referenční oblast

$$\int_{V_t} \rho \mathbf{a} \, dV_t = \int_{V_0} J \rho \mathbf{a} \, dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{a} \, dV_0 \quad (4.47)$$

Součin hmotnosti a zrychlení je invariantní vůči volbě konfigurace. Druhý Newtonův zákon dává do souvislosti změnu hybnosti a síly působící na objekt. V tomto případě

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_{V_t} \mathbf{b} dV_t + \int_{S_t} \mathbf{t} dS_t} \quad (4.48)$$

Podle předchozího můžeme psát

$$\int_{V_t} \rho \mathbf{a} dV_t = \int_{V_t} \mathbf{b} dV_t + \int_{S_t} \mathbf{t} dS_t \quad (4.49)$$

v aktuální konfiguraci anebo

$$\int_{V_0} \rho_0 \mathbf{a} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{B} dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{T} dS_0 \quad (4.50)$$

v referenční konfiguraci. Zbývá najít lokální tvar zákona, který poskytne soustavu diferenciálních rovnic k řešení.

Poslední krok není snadný. V první řadě je třeba sjednotit všechny integrační oblasti. Plošné integrály v rovnicích (4.49) a (4.50) lze převést na objem pomocí Greenovy věty, pokud se nám podaří dostat do integrandu normálu. Již v příští Sekci 4.2.1 odvodíme tzv. *Cauchyho teorém*, podle nějž existuje tensor druhého řádu $\boldsymbol{\sigma}$ tak, že

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (4.51)$$

Tensor $\boldsymbol{\sigma}$ se nazývá *Cauchyho tensor napětí* a \mathbf{n} je jednotková vnější normála podle Obr. 4.1. V Sekci 4.2.2 dokážeme *Nansonovu větu*, která umožňuje úspěšně zajistit transformaci (4.44). Tato část je dosti náročná. Poté se ale již celkem snadno ukáže, že také v referenční konfiguraci platí

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{N} \quad (4.52)$$

kde \mathbf{P} je *1.Piolův-Kirchhoffův tensor napětí* a \mathbf{N} jednotková vnější normála k hranici referenční podoblasti V_0 . Jak již bylo naznačeno, následuje aplikace Greenovy věty a odstranění integračních znamení. Důležitou roli při tom hraje fakt, že uvolněná podoblast V_t byla zvolena libovolně.

4.2.1 Cauchyho tensor napětí

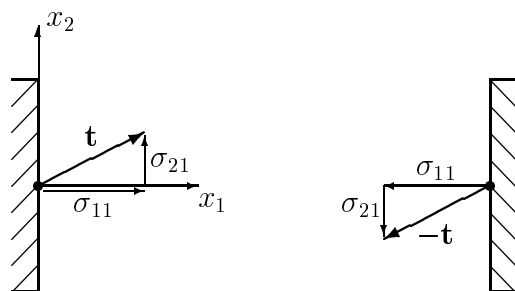
Rozdělme těleso Ω_t rovinným řezem na dvě části a obě uvolněme. Podle Obr. 4.2 je řez veden kolmo na souřadnicovou osu x_1 . Na levou část působí vektor napětí \mathbf{t} , na pravou $-\mathbf{t}$. Předpokládáme platnost principu akce a reakce. Kartézské složky vektoru \mathbf{t} označme jako σ_{11} , σ_{21} a σ_{31} , což znamená

$$\{t\} = \left\{ \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{array} \right\} \quad (4.53)$$

První index odpovídá směru složky, druhý připomíná směr normály řezu. Vedeme-li postupně dva další řezy kolmo ke zbývajícím dvěma souřadnicovým osám, můžeme zkonstruovat kompletní matici, definovanou po sloupcích jako

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Později ukážeme, že se jedná o tensor druhého řádu, prozatím se však přidržme skromnějšího termínu *matice napětí*.

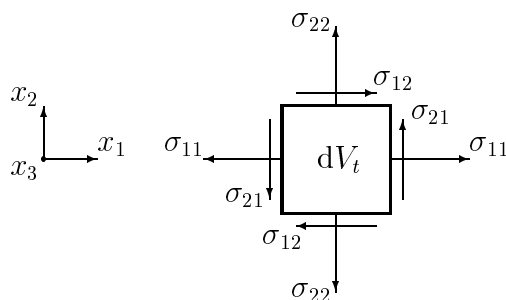


Obr. 4.2: Definice kartézských složek napětí. Osa x_3 není zakreslena.

Orientace složek vektoru napětí, působícího na pravou část tělesa, je podle principu akce-reakce obrácená. Podrobněji

$$-\mathbf{t} = -t_i \mathbf{e}_i = \sigma_{11}(-\mathbf{e}_1) + \sigma_{21}(-\mathbf{e}_2) + \sigma_{31}(-\mathbf{e}_3) \quad (4.55)$$

První sloupec matice $[\sigma]$ je proto kartézským vektorem napětí pro obě možné orientace souřadnicového řezu (levou i pravou), pokud ovšem použijeme adekvátní lokální bázi. Ta je totožná s globální bází \mathbf{e}_i na kladně orientovaných rovinách, tj. na rovinách, jejichž normála míří v kladném směru některé ze souřadnicových os; v opačném případě je definována jako $-\mathbf{e}_i$. To vede ke vzniku známého náčrtku na Obr. 4.3. Je třeba zdůraznit, že jde jen o pomocné schema, které slouží k interpretaci prvků matice σ_{ij} a ke kvalitativnímu popisu směru a orientace vnitřních sil, nikoli ke znázornění jejich velikosti. Například složka σ_{11} , působící doleva v místě x_1 , má obecně jinou hodnotu než napětí σ_{11} , působící doprava v místě $x_1 + dx_1$.



Obr. 4.3: Elementární krychle. Složky σ_{13} , σ_{23} a σ_{33} nejsou zakresleny.

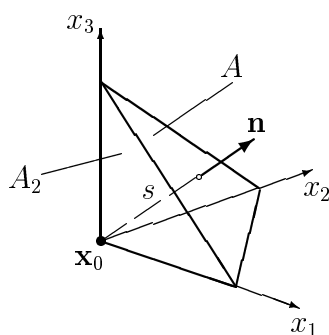
Nyní přistoupíme k analýze čtyřřtěnu, jehož geometrii určuje Obr. 4.4. Čtyřřtěn je tvořen třemi vzájemně kolmými souřadnicovými řezy, procházejícími bodem \mathbf{x}_0 . Čtvrtým řezem je obecně skloněná rovina A ve vzdálenosti s od průsečíku \mathbf{x}_0 . Jednotková normála roviny, \mathbf{n} , je na obrázku vyznačena. Trojúhelníkové stěny, kolmé na souřadnicové osy, označme jako A_1 , A_2 a A_3 , podle směru jejich normál. Velikosti těchto ploch jsou průměty

$$\begin{aligned} A_1 &= A(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) = An_1 \\ A_2 &= A(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) = An_2 \\ A_3 &= A(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) = An_3 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Objem čtyřřtěnu je

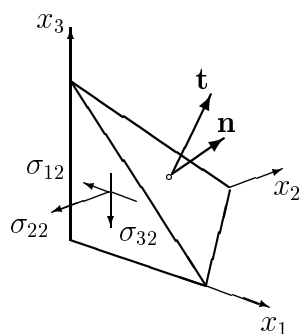
$$V = \frac{1}{3}As \quad (4.57)$$

Takto definovaný útvar vyjme ze zdeformovaného tělesa Ω_t , což odpovídá volbě $V_t \equiv V$. Hranici S_t tvoří sjednocení všech čtyř trojúhelníkových ploch.



Obr. 4.4: Geometrie čtyřřtěnu.

Čtyřřtěn uvolníme, čímž se na jeho povrchu objeví plošné síly. Ty jsou reprezentovány vektorem napětí \mathbf{t} na ploše A a prvky matice σ_{ij} na plochách A_j , jak je znázorněno na Obr. 4.5. Je dobré si uvědomit, že plochy A_j jsou vesměs záporně orientované ve smyslu Obr. 4.2 a 4.3, a proto všechny složky σ_{ij} míří proti směru souřadnicových os.



Obr. 4.5: Zatížení uvolněného čtyřřtěnu.

Zvolme pevně čas t a v tomto čase rozepišme pohybovou rovnici (4.49). Ve směru osy x_1 musí platit

$$\int_V \rho a_1 dV_t = \int_V b_1 dV_t + \int_A t_1 dS_t - \sum_{j=1}^3 \int_{A_j} \sigma_{1j} dS_t \quad (4.58)$$

Dále použijeme větu o střední hodnotě. Postup ukážeme na příkladě výpočtu integrálu, vedeného přes plochu A . Je evidentní, že každý integrál se dá vyjádřit jako součin míry integrační oblasti a jistého čísla, v tomto případě

$$\int_A t_1 \, dS_t = A\bar{t}_1 \quad (4.59)$$

Podle Weierstrassovy věty nabývá spojitá funkce $t_1(\mathbf{x})$ na uzávěru oblasti \bar{A} minima a maxima. Pro integrál tak máme omezení

$$At_1^{\min} \leq \int_A t_1 \, dS_t \leq At_1^{\max} \quad (4.60)$$

Kombinací posledních dvou vztahů získáme nerovnost

$$t_1^{\min} \leq \bar{t}_1 \leq t_1^{\max} \quad (4.61)$$

Mění-li se spojitá funkce z hodnoty t_1^{\min} na t_1^{\max} , musí někde uvnitř oblasti A projít také hodnotou \bar{t}_1 . Z toho plyne neobyčejně důležitý poznatek, že číslo \bar{t}_1 není ledajaké číslo, nýbrž některá z funkčních hodnot $t_1(\mathbf{x})$ na ploše A , tedy

$$\exists \bar{\mathbf{x}} \in A : \quad \bar{t}_1 = t_1(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.62)$$

Tímto způsobem upravíme všechny integrály. Pohybová rovnice (4.58) nabude tvaru

$$V\overline{\rho a_1} = V\bar{b}_1 + A\bar{t}_1 - \sum_{j=1}^3 A_j \bar{\sigma}_{1j} \quad (4.63)$$

Po dosazení geometrických vztahů a vykrácení plochy A dostaneme

$$\frac{1}{3}(\overline{\rho a_1} - \bar{b}_1)s = \bar{t}_1 - \sum_{j=1}^3 \bar{\sigma}_{1j} n_j \quad (4.64)$$

Následuje limita $s \rightarrow 0$. Levá strana vymizí a všechny body $\bar{\mathbf{x}}$ přejdou do bodu \mathbf{x}_0 . Získali jsme poměrně jednoduchý výsledek

$$t_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \quad \text{v bodě } \mathbf{x}_0 \quad (4.65)$$

Analogickým způsobem bychom odvodili podobné vztahy ve směrech x_2 a x_3 , a to v libovolném bodě prostoru. V maticovém tvaru tudíž platí

$$\boxed{\{t\} = [\sigma]\{n\}} \quad (4.66)$$

Dospěli jsme tak ke slavnému vzorci, který dává do lineární relace vektor napětí a vnější normálu plochy, vůči které napětí vztahujeme.

Zbývá dokázat tensorový charakter matice $[\sigma]$. V předchozím odvození jsme se neomezili na konkrétní kartézský systém, takže i v jiném systému, odlišeném čárkami, můžeme psát

$$\{t'\} = [\sigma']\{n'\} \quad (4.67)$$

Víme, že \mathbf{t} a \mathbf{n} jsou vektory, proto se dají sloupcové matice $\{t'\}$ a $\{n'\}$ vyjádřit pomocí vektorové transformace. Dosazením

$$[A]\{t\} = [\sigma'] [A]\{n\} \quad (4.68)$$

kde $[A]$ je matice přechodu. Odtud

$$\{t\} = [A]^T [\sigma'] [A]\{n\} \quad (4.69)$$

Porovnáme-li vztahy (4.66) a (4.69), dojdeme k rovnici

$$([\sigma] - [A]^T [\sigma'] [A])\{n\} = \{0\} \quad (4.70)$$

Matice v závorce je zřejmě singulární. Nejen to, každým bodem prostoru lze vést nekonečně mnoho ploch S_t , jejichž normála je libovolně skloněna. Z tohoto důvodu musí být rovnice (4.70) splněna pro každý vektor \mathbf{n} , a tudíž

$$[\sigma] - [A]^T [\sigma'] [A] = [0] \quad (4.71)$$

Vidíme, že prvky matice napětí se transformují jako složky tensoru druhého řádu, což nás opravňuje ke složkové definici

$$\boldsymbol{\sigma} := \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (4.72)$$

Jak jsme již zmínili v úvodu, tensor $\boldsymbol{\sigma}$ se nazývá Cauchyho tensor napětí a lineární vztah

$$\boxed{\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}} \quad (4.73)$$

je znám jako Cauchyho teorém.

Fakt, že tensor napětí je *tensor*, nemůže být nijak překvapivý, uvážíme-li význam samotného slova. Pravidlo pro transformaci složek napětí bylo známo již v devatenáctém století. Později se ukázalo, že i jiné fyzikální veličiny se při změně systému chovají obdobným způsobem, a tak začaly být nazývány tensory – veličinami napětí podobnými. Vše je ostatně, podle Sekce 2.2, jen prostý důsledek lineárnosti funkčního přiřazení $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{t}$, což je, zajisté, i v jiných situacích velice častý modelový případ.

Na závěr poznamenejme, že o veličinách $\boldsymbol{\sigma}$ a \mathbf{t} mluvíme jako o *skutečném napětí*. Jedná se totiž o vnitřní síly definované v aktuální konfiguraci Ω_t , které reálně působí na materiál tělesa ve zdeformovaném stavu. V Sekci 4.2.3 bude zaveden ještě pojem *nominálního napětí*. Toto napětí sice formálně sleduje stejnou strukturu rovnic vzhledem k referenční konfiguraci Ω_0 , avšak z fyzikálního hlediska nepopisuje konkrétní síly v této oblasti, nýbrž síly přenesené z Ω_t . Nominálnímu napětí se proto také někdy říká fiktivní napětí.

4.2.2 Nansonova věta

Nansonova věta je zcela klíčovým nástrojem pro transformaci plošných integrálů druhého druhu, tj. integrálů obsahujících normálu. Pro nás je zejména důležitá rovnice (4.40). Dosadíme-li do ní Cauchyho vztah, vidíme, že

$$\vec{F}(\Delta S_t) = \int_{\Delta S_t} \mathbf{t} \, dS_t = \int_{\Delta S_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS_t \quad (4.74)$$

a že se tedy jedná právě o případ integrace s normálou. Naším nejbližším cílem bude najít takovou substituci, aby integrál přešel na odpovídající referenční plochu ΔS_0 , což nám později umožní definovat nominální napětí vzhledem k referenční konfiguraci.

Vedeni touto motivací, uvažujme teď obecně nějakou veličinu, která má dvě standardní reprezentace

$$\phi(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (4.75)$$

Symbol \mathbf{T} , zavedený pro obecný tensor, tentokrát raději vynecháme, aby nedošlo k záměně za vektor nominálního napětí. Nansonova věta tvrdí

$$\boxed{\int_{\Delta S_t} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \, dS_t = \int_{\Delta S_0} \phi(\mathbf{X}, t) J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \, dS_0} \quad (4.76)$$

kde \mathbf{N} je jednotková vnější normála k odpovídající referenční ploše. Díky speciální struktuře integrandu, tento famózní vztah neobsahuje plošný jacobíán explicitně, nýbrž jen prostřednictvím objemového jacobíánu $J = \det |\mathbf{F}|$. Nansonovu větu nejprve dokážeme pro uzavřenou plochu a pak se teprve vrátíme k obecnější formulaci.

Uvažujme uzavřenou plochu S_t , obklopující oblast V_t . V takovém případě můžeme použít Greenovu větu. Ve složkách

$$\int_{S_t} \varphi(\mathbf{x}, t) n_j \, dS_t = \int_{V_t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dV_t \quad (4.77)$$

Objemový integrál transformujeme obvyklým způsobem

$$\int_{V_t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dV_t = \int_{V_0} J \frac{\partial \varphi}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \, dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial \varphi}{\partial X_k} J F_{kj}^{-1} \, dV_0 \quad (4.78)$$

Ukazuje se, že člen $J F_{kj}^{-1}$ se chová vůči derivování podle X_k jako konstanta, neboli

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial X_k} (J F_{kj}^{-1}) = 0} \quad (4.79)$$

To je tzv. *Pioloova rovnost*, kterou dokážeme separátně na konci této sekce. Operátor derivace podle X_k se tak dá vytknout před celý integrand v posledním členu rovnice (4.78), tj.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_k} J F_{kj}^{-1} = \frac{\partial}{\partial X_k} (\varphi J F_{kj}^{-1}) \quad (4.80)$$

Po dalším využití Greenovy věty, tentokrát na referenční konfiguraci, dostaneme

$$\int_{V_0} \frac{\partial \varphi}{\partial X_k} J F_{kj}^{-1} \, dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial X_k} (\varphi J F_{kj}^{-1}) \, dV_0 = \int_{S_0} \varphi(\mathbf{X}, t) J F_{kj}^{-1} N_k \, dS_0 \quad (4.81)$$

Zjistili jsme, že Nansonova věta platí pro uzavřenou oblast.

Nyní zvolme $\Delta S_t \subset S_t$ libovolně. Funkce $\varphi(\mathbf{x}, t)$ je definována na ΔS_t . Její definiční obor rozšíříme na celou uzavřenou plochu tako

$$\varphi = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}, t) & \text{pro } \mathbf{x} \in \Delta S_t \\ 0 & \text{jinde na } S_t \end{cases} \quad (4.82)$$

Je-li φ spojitá na ΔS_t , integrál na levé straně rovnice (4.76) existuje a je roven

$$\int_{\Delta S_t} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \, dS_t = \int_{S_t} \varphi(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \, dS_t \quad (4.83)$$

protože na zbývající části plochy $S_t \setminus \Delta S_t$ je funkce nulová. Dále postupujeme až k rovnici (4.81). Při tomto procesu musíme vzít v úvahu případnou nespojitost funkce $\varphi(\mathbf{x}, t)$ na křivce $\partial\Delta S_t$ ohraničující původní, nerozšířenou plochu ΔS_t . Podél této křivky může docházet ke skoku mezi obecně nenulovou hodnotou φ a nulou. Tento typ nespojitosti však naštěstí není v obvyklých případech pro Greenovu větu překážkou. Konečně

$$\int_{S_0} \phi(\mathbf{X}, t) J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \, dS_0 = \int_{\Delta S_0} \phi(\mathbf{X}, t) J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \, dS_0 \quad (4.84)$$

Referenční plocha je totiž zobrazena funkcí

$$\chi^{-1} : \Delta S_t \rightarrow \Delta S_0 \quad (4.85)$$

která je stejná, jako ve vztahu

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (4.86)$$

Tím jsme dokázali Nansonovu větu pro obecně neuzavřenou plochu ΔS_t , což bude v dalších sekcích výhodné pro výpočet částečných výslednic, ať již silových nebo tepelných.

Pioloova rovnost

Vraťme se ještě k tvrzení (4.79), které je zapotřebí dokázat. Závorku zderivujeme jako součin

$$\frac{\partial}{\partial X_k} (J F_{kj}^{-1}) = \frac{\partial J}{\partial X_k} F_{kj}^{-1} + J \frac{\partial F_{kj}^{-1}}{\partial X_k} \quad (4.87)$$

Derivaci jacobíanu podle složek deformačního gradientu již známe. Je to rovnice (4.36), kterou jsme si připravili v souvislosti s odvozením rovnice kontinuity. Výsledek nyní využijeme tak, že jacobíán v prvním členu budeme derivovat jako složenou funkci, tj.

$$\frac{\partial J}{\partial X_k} F_{kj}^{-1} = \frac{\partial J}{\partial F_{pq}} \frac{\partial F_{pq}}{\partial X_k} F_{kj}^{-1} = J F_{qp}^{-1} \frac{\partial F_{pq}}{\partial X_k} F_{kj}^{-1} \quad (4.88)$$

Prostřední dva součinitele doplníme na derivaci součinu a uvědomíme si, že

$$\frac{\partial}{\partial X_k} (F_{qp}^{-1} F_{pq}) = \frac{\partial}{\partial X_k} (\delta_{qq}) = 0 \quad (4.89)$$

takže dostaneme

$$\frac{\partial J}{\partial X_k} F_{kj}^{-1} = J \left(-\frac{\partial F_{qp}^{-1}}{\partial X_k} F_{pq} \right) F_{kj}^{-1} \quad (4.90)$$

Všechny složky deformačního gradientu rozepíšeme

$$\frac{\partial J}{\partial X_k} F_{kj}^{-1} = -J \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{\partial X_q}{\partial x_p} \right) \frac{\partial x_p}{\partial X_q} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (4.91)$$

Derivace podle X_k a poslední součinitel tvoří dohromady derivaci složené funkce vzhledem k vnitřní proměnné x_j , proto

$$\frac{\partial J}{\partial X_k} F_{kj}^{-1} = -J \frac{\partial^2 X_q}{\partial x_p \partial x_j} \frac{\partial x_p}{\partial X_q} \quad (4.92)$$

Rozepišme ještě druhý člen rovnice (4.87). Bude

$$J \frac{\partial F_{kj}^{-1}}{\partial X_k} = J \frac{\partial F_{kj}^{-1}}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} = J \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_j \partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial X_k} \quad (4.93)$$

Vidíme, že pravé strany rovnic (4.92) a (4.93) jsou až na znaménko stejné a ve vztahu (4.87) se odečtou. Je tedy

$$\frac{\partial}{\partial X_k} (J F_{kj}^{-1}) = 0 \quad (4.94)$$

což jsme chtěli dokázat.

Tento důkaz Piolovy věty je možná zdoluhavý a zcela určitě nevzhledný. Na druhou stranu zůstává korektní, aniž by přitom vyžadoval hlubší znalosti z matematiky. Inspirace pochází z Brdičkovy knihy [5], konkrétně ze stati o tensorech na křivočarých souřadnicích. Piolova rovnost má podobnou strukturu jako součinitele afinní konexe a Christoffelovy symboly, sloužící pro definici kovariantní derivace. Žádná z takových speciálních znalostí však pro sledování předloženého důkazu není nutná.

4.2.3 1. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí

4.2.4 Pohybové rovnice

4.2.5 Cvičení

1. Zatížení od vlastní tíhy je dáno integrálem

$$\vec{F} = \int_{V_t} \rho \mathbf{g} \, dV_t$$

kde \mathbf{g} je gravitační zrychlení. Identifikujte objemové síly \mathbf{b} a \mathbf{B} . Jaký to má důsledek v MKP pro výpočet odpovídajícího vektoru uzlových sil?

2. V Příkladu 2 dosadte $\Delta l/l_0 = ct^2$ a určete celkovou hybnost $\mathbf{p}(t)$ oblasti Ω_t . Počáteční hustotu ρ_0 předpokládejte homogenní. Pro tento příklad přímým výpočtem ověřte rovnosti

(a)

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{v} \, dV_0 = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} \, dV_t$$

(b)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{a} dV_t$$

3. V Příkladu 3 dosadte $\tan \gamma = kt$ a určete celkovou hybnost $\mathbf{p}(t)$ oblasti Ω_t . Počáteční hustotu ρ_0 předpokládejte homogenní. Diskutujte výsledek.
4. Je dáno homogenní pole napětí $\boldsymbol{\sigma} \equiv \text{konst.}$ Určete vektor napětí \mathbf{t} na pravé a levé stěně krychle podle Obr. 4.3. Pro výpočet použijte Cauchyho vztah.
5. Určete $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ a $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ pro Příklady 3 a 4.
6. V Příkladu 3 označme jako h_t pravou hranu kosodélníka. Podle Nansonovy věty musí platit

$$\mathbf{n}h_t = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}h_0$$

Tento vzorec ověřte přímým výpočtem.

7. Je dána deformace podle Příkladu 2 a Cauchyho tensor napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Určete 1. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí a diskutujte výsledek.

8. Je dána deformace podle Příkladu 3 a Cauchyho tensor napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 8(x_1 - l_0)x_2 & h_0^2 - 4x_2^2 \\ h_0^2 - 4x_2^2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Ověřte statickou rovnici rovnováhy $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$.
- (b) Určete 1. Piolův-Kirchhoffův tensor jako funkci $\mathbf{P}(X_1, X_2)$.
- (c) Ukažte, že $\text{Div } \mathbf{P} = \mathbf{0}$.

4.3 Zákon zachování momentu hybnosti

Zachování momentu hybnosti není v klasické mechanice nezávislým zákonem, nýbrž pouhým důsledkem zákona zachování hybnosti. Důkaz tohoto tvrzení je ponechán jako Cvičení 1. Zvláštností mechanika kontinua je to, že pro spojitá prostředí se stejný výrok *nedá* prokázat ani jinak odvodit, a že jej tedy musíme akceptovat jako jeden z primárních axiomů. Předpokládejme tedy

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V_t} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV_t = \int_{V_t} \mathbf{x} \times \mathbf{b} dV_t + \int_{S_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS_t} \quad (4.95)$$

Na levé straně je změna integrálu elementárního momentu hybnosti a pravá strana představuje moment objemových a povrchových sil, působících na uvolněnou oblast V_t . Nyní, jako obvykle, zjistíme lokální tvar zákona. Ten bude tentokrát překvapivě jednoduchý. Jeho jediným, zato však podstatným výsledkem je to, že *Cauchyho tensor napětí je symetrický*.

4.3.1 Symetrie Cauchyho tensoru

4.3.2 Cvičení

1. Odvoďte větu o změně momentu hybnosti pro systém N částic ze zákona zachování hmotnosti, tj. dokažte, že

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i$$

kde \mathbf{F}_i jsou vnější síly. Předpokládejte, že vzájemná interakce mezi libovolnými dvěma částicemi probíhá výhradně podél spojnice těchto částic a že pro odpovídající vnitřní síly platí princip akce-reakce.

2. Jaký dodatečný axiom bychom museli akceptovat v mechanice kontinua, aby se zachování momentu hybnosti dalo odvodit podobně jako v klasické mechanice?
3. V Příkladu 4 předpokládejte homogenní hustotu disku ρ_0 . Dokažte, že moment hybnosti se rovná $I\omega$, kde $I = \frac{1}{2}\rho_0\pi R^4$.
4. Uvažujme pole posunutí z Příkladu 3. Nechť na horní plochu působí smykové napětí τ tak, že $\sigma_{12} = \tau$ a $\sigma_{22} = 0$. Pravá boční zkosená plocha nechť je rovněž zatížena smykem τ_g . Tento vektor je tedy kladně orientován podél hrany h_t šikmo vzhůru.
 - (a) Určete τ_g v závislosti na τ tak, aby tečné síly byly v momentové rovnováze.
 - (b) Zkompletujte Cauchyho tensor napětí.
 - (c) Pro tento příklad ověřte momentovou podmínku, kladenou na \mathbf{P} .

4.4 Zákon zachování energie

4.4.1 Bilance mechanické energie

4.4.2 Piolův tepelný vektor

4.4.3 2. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí

4.4.4 Rovnice vedení tepla

4.4.5 Cvičení

1. Uvažujme stacionární děj $\kappa = 0$, $\dot{u} = 0$ a $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Předpokládejme platnost Fourierova vztahu

$$\mathbf{h} = -\lambda \text{grad } T, \quad \lambda = \textit{konst.}$$

Ukažte, že rovnice vedení tepla přechází v Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2 T = 0$$

2. Je dán Cauchyho tensor napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

a deformace podle Příkladu 2. Určete 2. Piolův-Kirchhoffův tensor napětí. Porovnejte \mathbf{S} a \mathbf{P} .

3. Dokažte, že $\{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}$ jsou energeticky konjugované tensory, tj.

$$\int_{V_t} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dV_t = \int_{V_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dV_0$$

4.5 Clausiova-Duhemova nerovnost

4.5.1 Lokální formulace

4.5.2 Clausiova-Planckova nerovnost

4.5.3 Disipační nerovnost

Kapitola 5

Formulace základních úloh

5.1 Mechanika pevných látek

5.1.1 Velké termoelastické deformace

5.1.2 Model vedení tepla

5.1.3 Velká posunutí a rotace

5.1.4 Šíření šokových vln

5.1.5 Cvičení

1. Prizmatická tyč o počátečním průřezu A_0 a délce l_0 je osově zatížena silou F . Materiálové vlastnosti jsou popsány Hookeovým zákonem s Greenovým-Lagrangeovým tensorem deformace.
 - (a) Určete poměr průřezů A_t/A_0 jako funkci protažení $\lambda = l/l_0$.
 - (b) V jakém intervalu se může měnit λ , aby $J > 0$?
Návod: Položte $A_t = 0$ a odtud $\lambda_{max} = 2.08$ pro $\nu = 0.3$.
2. Pro stejný materiál (Cvičení 1) řešte případ prostého smyku (Příklad 3).
 - (a) Určete Cauchyho tensor napětí jako funkci zkosu γ .
 - (b) Najděte aproximaci $\gamma \rightarrow 0$ a porovnejte s řešením známým z lineární pružnosti.
3. Fourierův zákon vedení tepla má tvar

$$\mathbf{h} = -\lambda \text{grad } T$$

Vyjádřete tento zákon v Lagrangeově popisu, tj. určete \mathbf{H} jako funkci $\text{Grad } T$.

5.2 Mechanika tekutin

5.2.1 Nevazké proudění

5.2.2 Ideální plyn

5.2.3 Navierova-Stokesova rovnice

5.2.4 Reynoldsovo číslo

5.2.5 Cvičení

1. Automobil jedoucí rychlostí 36 km/h narazí do zdi. Odhadněte velikost kontaktního tlaku.
2. Laminární dvourozměrný proud tekutiny v přímém kanále o výšce L je charakterizován parabolickým rychlostním profilem

$$\begin{aligned}v_1 &= v_0 \left[1 - 4 \left(\frac{x_2}{L} \right)^2 \right] \\v_2 &= 0\end{aligned}$$

- (a) Určete charakteristickou rychlost proudu jako

$$V = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} v_1 \, dx_2$$

- (b) Vypočtěte Reynoldsovo číslo

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu}$$

- (c) Určete velikost viskozního členu $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$.
(d) Určete velikost konvektivního členu $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v}$.

Kapitola 6

O deformaci a napětí

6.1 Totální popis

6.1.1 Jednoosá deformace

6.1.2 Sethovy-Hillovy tensory

6.1.3 Konjugovaná napětí

6.2 Inkrementální popis

6.2.1 Pohyb tuhého tělesa

6.2.2 Zarembova-Jaumannova-Nollova a jiné derivace

Dienesův příklad

Další pokusy o korektní formulaci

6.2.3 Objektivnost

6.2.4 Cvičení

1. Je dán pravostranný tensor protažení \mathbf{U} a symetrická část rychlostního gradientu \mathbf{D} . Dokažte

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

2. Dokažte, že Greenova-Naghdiho derivace je objektivní.

Příloha A

Použité operace s maticemi

A.1 Spektrální rozklad

Věta: Nechť $[U]$ je reálná, symetrická matice řádu n . Této matici přísluší reálná vlastní čísla λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ a reálné vlastní vektory $\{\varphi_k\}$. O nich můžeme předpokládat, že jsou ortonormální, tj. $\{\varphi_i\}^T \{\varphi_j\} = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kroneckerův symbol. Vyjádření

$$[U] = \sum_{k=1}^n \lambda_k \{\varphi_k\} \{\varphi_k\}^T \quad (\text{A.1})$$

nazýváme *spektrálním rozkladem* matice $[U]$. Alternativně můžeme psát

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (\text{A.2})$$

kde jsme zavedli ortonormální modální matici $[\Phi]$ složenou po sloupcích z vlastních vektorů

$$[\Phi] = [\{\varphi_1\} \{\varphi_2\} \cdots \{\varphi_n\}], \quad [\Phi]^{-1} = [\Phi]^T \quad (\text{A.3})$$

a diagonální matici vlastních čísel

$$[\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n] \quad (\text{A.4})$$

Důkaz: Problém vlastních čísel přepíšeme do maticového tvaru. Po sloupcích

$$[U][\Phi] = \left[\underbrace{[U]\{\varphi_1\}}_{\lambda_1\{\varphi_1\}} \quad \underbrace{[U]\{\varphi_2\}}_{\lambda_2\{\varphi_2\}} \quad \underbrace{[U]\{\varphi_3\}}_{\lambda_3\{\varphi_3\}} \right] = [\Phi][\Lambda] \quad (\text{A.5})$$

Jelikož $\{\varphi_k\}$ tvoří ortonormální systém, je $[\Phi]^T[\Phi] = [I]$, neboli $[\Phi]^{-1} = [\Phi]^T$ a z (A.5) ihned plyne $[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T$. Zápisy (A.1) a (A.2) jsou ekvivalentní, jak se lze snadno přesvědčit roznásobením maticového výrazu (A.2).

Poznámka: Věta o spektrálním rozkladu má především teoretický význam, neboť usnadňuje řadu důkazů a odvození. Z praktického hlediska se snažíme výpočtu vlastních čísel, jako numericky dosti nákladné operaci, spíše vyhnout. Pokud je to přesto nezbytné, dáváme přednost numerickým metodám, zejména *Jacobiho metodě*, viz např. [3]. Pro matice řádu 3 a vyššího je tento postup rychlejší než analytické řešení a pro matice typu 2×2 je pracnost srovnatelná.

A.2 Odmocnina matice

Věta: Mějme symetrickou, pozitivně definitní matici $[C]$. Potom existuje rovněž symetrická a pozitivně definitní matice $[U]$ taková, že $[U][U] = [C]$. Stručně píšeme

$$[C] = [U]^2, \quad [U] = \sqrt{[C]} \quad (\text{A.6})$$

Výpočet odmocniny je jednoznačný.

Příklad: Popsaná operace se snadno aplikuje na diagonální matice.

$$[C] = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [U] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ avšak } [U] \neq \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tento příklad naznačuje, že požadované vlastnosti $[C]$ jsou nezbytné proto, aby se dala odmocnina vůbec provést, zatímco předpoklady kladené na $[U]$ zajišťují jednoznačnost výsledku.

Existence: Důkaz existence je možno spojit s popisem algoritmu výpočtu.

1. Vypočteme vlastní čísla μ_k a vlastní vektory $\{\varphi_k\}$ matice $[C]$.
2. Jelikož $[C]$ je pozitivně definitní, jsou všechna vlastní čísla kladná a můžeme je odmocnit: $\lambda_k = \sqrt{\mu_k} > 0$. Sestrojíme modální matici z vlastních vektorů $[C]$ a diagonální matici odmocnin vlastních čísel

$$[\Phi] = [\{\varphi_1\} \{\varphi_2\} \cdots \{\varphi_n\}], \quad [\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n] \quad (\text{A.7})$$

3. Definujeme

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (\text{A.8})$$

Takto získaná matice je určena svým spektrálním rozkladem. Z něj vyplývá, že $[U]$ je symetrická a pozitivně definitní (její vlastní čísla $\lambda_k > 0$). Jelikož

$$[\Lambda]^2 = [\Lambda][\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_n^2] = \text{diag}[\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n] \quad (\text{A.9})$$

máme pro $[C]$ spektrální vyjádření

$$[C] = [\Phi][\Lambda]^2[\Phi]^T \quad (\text{A.10})$$

Současně

$$[U]^2 = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T[\Phi][\Lambda][\Phi]^T = [\Phi][\Lambda]^2[\Phi]^T \quad (\text{A.11})$$

Je tedy $[U]^2 = [C]$.

Jednoznačnost: Označme jako $[\tilde{U}]$ libovolnou matici splňující podmínky věty o odmocnině. Pro každé vlastní číslo μ a odpovídající vlastní vektor $\{\varphi\}$ matice $[C]$ je splněno

$$([\tilde{U}] + \sqrt{\mu}[I])([\tilde{U}] - \sqrt{\mu}[I])\{\varphi\} = ([\tilde{U}]^2 - \mu[I])\{\varphi\} = \{0\} \quad (\text{A.12})$$

Označíme-li $\{x\} = ([\tilde{U}] - \sqrt{\mu}[I])\{\varphi\}$, musí platit

$$([\tilde{U}] + \sqrt{\mu}[I])\{x\} = \{0\} \quad (\text{A.13})$$

To je možné jedině tehdy, když buďto $\{x\} = \{0\}$, anebo $-\sqrt{\mu}$ je vlastní číslo $[\tilde{U}]$. Druhá možnost nepřichází v úvahu, protože pozitivně definitní matice nemůže mít záporné vlastní číslo. Zbývá

$$\{x\} = ([\tilde{U}] - \sqrt{\mu}[I])\{\varphi\} = \{0\} \quad (\text{A.14})$$

Odtud plyne, že $\sqrt{\mu}$, $\{\varphi\}$ jsou vlastní číslo a vlastní vektor $[\tilde{U}]$. V tom případě však lze matici $[\tilde{U}]$ vyjádřit pomocí spektrálního rozkladu ve tvaru (A.8), takže $[\tilde{U}] = [U]$. Tento elegantní důkaz byl předložen Stephensonem [21].

A.3 Umocňování matic

Definice: Nechť $[U]$ je reálná symetrická matice, se spektrálním rozkladem

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (\text{A.15})$$

Nechť m je reálné číslo. Symbolem $[U]^m$ rozumíme matici definovanou jako

$$[U]^m := [\Phi][\Lambda]^m[\Phi]^T \quad (\text{A.16})$$

kde

$$[\Lambda]^m := \text{diag}[\lambda_1^m \ \lambda_2^m \ \lambda_3^m] \quad (\text{A.17})$$

Matici $[U]^m$ nazýváme m -tou mocninou $[U]$ nebo také mocninou $[U]$ na exponent m .

Poznámka: Nově zavedená definice musí být kompatibilní s obvyklými pojmy. Prověříme proto některé speciální případy. Nechť m je číslo přirozené. Potom

$$[U]^m = \underbrace{[U][U] \cdots [U]}_{m \times} \quad (\text{A.18})$$

Dosazením spektrálního rozkladu a využitím toho, že modální matice je ortonormální, takže se všechny vnitřní matice $[\Phi]$ vykrátí, dostaneme

$$[U]^m = [\Phi][\Lambda][\Lambda] \cdots [\Lambda][\Phi]^T = [\Phi][\Lambda]^m[\Phi]^T \quad (\text{A.19})$$

což je kompatibilní s definicí (A.16). Pro inverzi matice platí

$$[U]^{-1} = ([\Phi][\Lambda][\Phi]^T)^{-1} = [\Phi][\Lambda]^{-1}[\Phi]^T \quad (\text{A.20})$$

ale inverze diagonální matice dává

$$[\Lambda]^{-1} = \text{diag}[\lambda_1^{-1} \ \lambda_2^{-1} \ \lambda_3^{-1}] \quad (\text{A.21})$$

a to je opět v souladu s (A.16) při $m = -1$. Podobným způsobem se přesvědčíme, že $[U]^0 = [I]$ a $[C]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{[C]}$ jsou další speciální případy. Poznamenejme, že pro vysoká celá čísla m může být spektrální metoda umocňování podstatně rychlejší než přímý výpočet podle (A.18).

A.4 Isotropní funkce

Definice: Nechť $[U]$ je reálná matice. Nechť f je funkce přiřazující každé reálné matici $[U]$ reálnou matici $f([U])$. O funkci f řekneme, že je isotropní právě tehdy, když platí

$$f([Q][U][Q]^T) = [Q]f([U])[Q]^T \quad (\text{A.22})$$

pro každou ortonormální matici $[Q]$.

Isotropní funkce jsou např. $[U]^{-1}$ a $\sqrt{[U]}$. V předchozí sekci A.3 jsme definovali obecnou mocninu symetrické matice na reálný exponent. Dokážeme, že tato operace je isotropní a výše zmíněné funkce (inverze a odmocnina) se dají chápat jako její speciální případy. Pro symetrickou matici $[U]$ máme k dispozici spektrální rozklad

$$[U] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^T \quad (\text{A.23})$$

takže $[Q][\Phi]$ bude modální matice součinu $[Q][U][Q]^T = [Q][\Phi][\Lambda][\Phi]^T[Q]^T$. Z definice (A.16) potom ihned plyne

$$([Q][U][Q]^T)^m = [Q][\Phi][\Lambda]^m[\Phi]^T[Q]^T = [Q][U]^m[Q]^T \quad (\text{A.24})$$

Přímé důkazy isotropnosti některých jednoduchých funkcí, bez omezení na symetrické operátory, jsou ponechány jako cvičení na konci Sekce 3.1.

Vraťme se ještě ke spektrálnímu rozkladu (A.23). Vzhledem k tomu, že modální matice je vždy ortonormální, musí platit

$$f([U]) = [\Phi]f([\Lambda])[\Phi]^T \quad (\text{A.25})$$

Pro symetrické matice nám to umožňuje zavést celou třídu isotropních funkcí generovanou obyčejnými funkcemi jedné proměnné (např. sinus) jako

$$f([\Lambda]) := \text{diag}[f(\lambda_1) \ f(\lambda_2) \ f(\lambda_3)] \quad (\text{A.26})$$

Do této kategorie spadá například Henkyho tensor deformace, definovaný v části 3.1.5 s $f(\cdot) := \ln(\cdot)$. Dále je zajímavé poznamenat, že isotropní funkce aplikovaná na diagonální matici dává zase diagonální matici – o tom pojednává následující věta. V důsledku toho představuje výraz (A.25) spektrální rozklad a matice $[U]$ a $f([U])$ mají shodné vlastní vektory $[\Phi]$. V kontextu tensorového počtu to znamená, že isotropní funkce zachovává hlavní osy tensoru, přičemž příslušné složkové matice se diagonalizují ve stejné bázi.

Věta: Nechť $[\Lambda]$ je diagonální matice a f isotropní funkce. Matice $f([\Lambda])$ je rovněž diagonální.

Důkaz: Myšlenka je převzata z Gurtinovy knihy [8]. Diagonální matice $[\Lambda]$ má jednotkové vlastní vektory. Označme jako $\{\psi\}$ první z nich, tedy

$$\{\psi\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.27})$$

Zvolme ortonormální matici $[Q]$ tímto způsobem

$$[Q] = \text{diag}[-1 \ 1 \ 1] \quad \Rightarrow \quad [Q]\{\psi\} = -\{\psi\} \quad (\text{A.28})$$

Protože f je isotropní funkce, bude

$$[Q]f([\Lambda])[Q]^T = f([Q][\Lambda][Q]^T) = f([\Lambda]) \quad (\text{A.29})$$

Tuto rovnici vynásobíme zprava vektorem $[Q]\{\psi\}$ a s využitím (A.28) dostaneme

$$[Q]f([\Lambda])\{\psi\} = f([\Lambda])[Q]\{\psi\} = -f([\Lambda])\{\psi\} \quad (\text{A.30})$$

Vektor $f([\Lambda])\{\psi\}$ označme jako $\{v\}$. Poslední rovnice přejde do tvaru $[Q]\{v\} = -\{v\}$ anebo ve složkách

$$[Q]\{v\} = \begin{Bmatrix} -v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{Bmatrix} = -\{v\} \quad (\text{A.31})$$

Řešením je $v_2 = v_3 = 0$, a tudíž

$$f([\Lambda])\{\psi\} = \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = v_1\{\psi\} \quad (\text{A.32})$$

Vidíme, že $\{\psi\}$ je vlastní vektor nejen $[\Lambda]$, ale také $f([\Lambda])$. Stejným způsobem zpracujeme i zbývající dva vlastní vektory, $\{0 \ 1 \ 0\}^T$ a $\{0 \ 0 \ 1\}^T$, takže $f([\Lambda])$ je diagonální matice.

Příloha B

Vzorové příklady

V této příloze je přehledně uvedeno pět vzorových příkladů, které byly podrobně rozebírány v předchozím textu a které jsou mnohdy potřebné pro vypracování cvičení. Komentáře k příkladům jsou na tomto místě omezeny na minimum.

B.1 Příklad 1: zobrazení oblasti

Je dáno zobrazení $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ pomocí transformace souřadnic

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X_1 + at^2 \\ x_2 &= X_2 + bX_2t + ct^2 \end{aligned} \right\} a, b, c \in \mathbb{R} \quad (\text{B.1})$$

V čase $t = 0$ je $x_1 = X_1$ a $x_2 = X_2$. Inverzní zobrazení

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= x_1 - at^2 \\ X_2 &= \frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2})$$

Podmínka řešitelnosti

$$1 + bt > 0 \quad (\text{B.3})$$

omezuje, v případě $b < 0$, časový interval na $t \in [0, 1/|b|)$. Deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + bt \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

jeho inverze

$$[F]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + bt} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

a jacobíán

$$J = 1 + bt \quad (\text{B.6})$$

Matici $[F]^{-1}$ lze počítat jak inverzí (B.4), tak derivováním (B.2). Složky rychlosti

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= 2at \\ V_2 &= bX_2 + 2ct \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.7})$$

Substitucí za X_2 přejdeme k Eulerově popisu

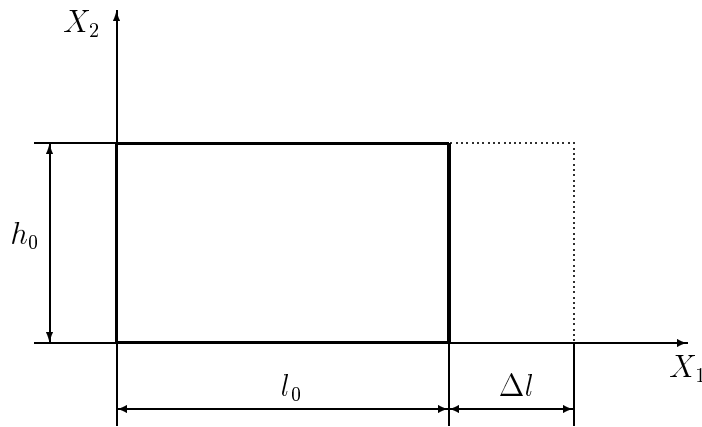
$$\begin{aligned} v_1 &= 2at \\ v_2 &= b \frac{x_2 - ct^2}{1 + bt} + 2ct \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Zrychlení

$$\begin{aligned} A_1 &= 2a = a_1 \\ A_2 &= 2c = a_2 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

V tomto konkrétním případě zrychlení není funkcí souřadnic.

B.2 Příklad 2: jednoosá deformace



$$\begin{aligned} u_1(X_1, X_2) &= \frac{\Delta l}{l_0} X_1 \\ u_2(X_1, X_2) &= 0 \end{aligned}$$

Gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Jacobián

$$J = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} > 0 \quad (\text{B.12})$$

odpovídá poměru objemů. Tensor malé deformace

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

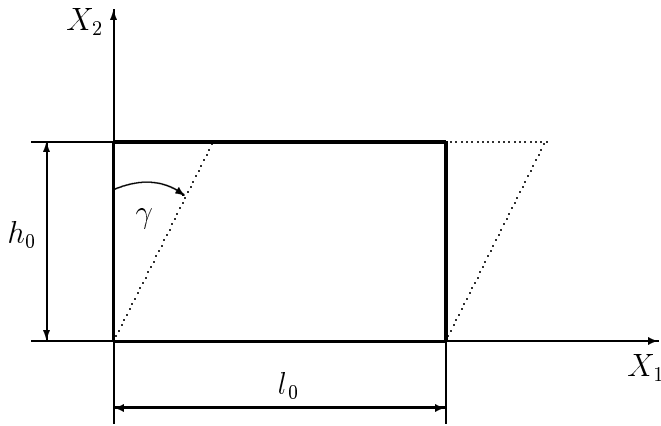
Greenův-Lagrangeův tensor

$$[e] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

Polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\Delta l}{l_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

B.3 Příklad 3: prostý smyk



$$u_1(X_1, X_2) = X_2 \tan \gamma$$

$$u_2(X_1, X_2) = 0$$

Gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \tan \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Jacobián

$$J = 1 \quad (\text{B.18})$$

Deformace je isochorická. Tensor malé deformace

$$[\epsilon] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ \tan \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Greenův-Lagrangeův tensor

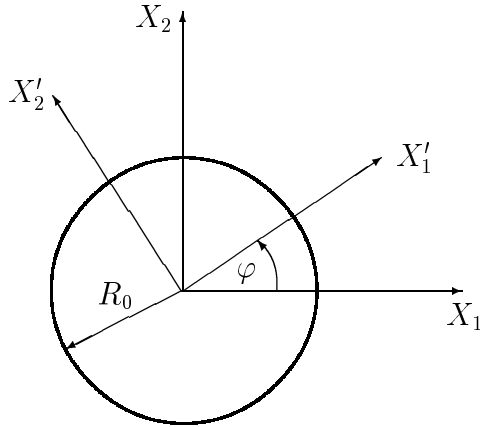
$$[e] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \tan \gamma \\ \tan \gamma & \tan^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

Polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$

$$\begin{aligned} [F] &= \frac{1}{\sqrt{4 + \beta^2}} \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ -\beta & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4 + \beta^2}} \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 + \beta^2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 + \beta^2}} \begin{bmatrix} 2 + \beta^2 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4 + \beta^2}} \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ -\beta & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

kde $\beta = \tan \gamma$.

B.4 Příklad 4: rotace



$$u_1(X_1, X_2) = X_1(\cos \varphi - 1) - X_2 \sin \varphi$$

$$u_2(X_1, X_2) = X_1 \sin \varphi + X_2(\cos \varphi - 1)$$

Gradient posunutí

$$[z] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Deformační gradient

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Jacobián

$$J = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad (\text{B.24})$$

Pohyb je isochorický. Tensor malé deformace

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & 0 \\ 0 & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

Greenův-Lagrangeův tensor

$$2[e] = [F]^T[F] - [I] = [0] \quad (\text{B.26})$$

Polární rozklad $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$

$$[F] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

Dosazením $\varphi = \omega t$

$$\begin{aligned} u_1 &= X_1(\cos \omega t - 1) - X_2 \sin \omega t \\ u_2 &= X_1 \sin \omega t + X_2(\cos \omega t - 1) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Přepočít souřadnic

$$\begin{aligned} x_1 = X_1 + u_1 &= X_1 \cos \omega t - X_2 \sin \omega t \\ x_2 = X_2 + u_2 &= X_1 \sin \omega t + X_2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Složky rychlosti

$$\begin{aligned} V_1 &= -\omega(X_1 \sin \omega t + X_2 \cos \omega t) = -\omega x_2 = v_1 \\ V_2 &= \omega(X_1 \cos \omega t - X_2 \sin \omega t) = \omega x_1 = v_2 \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

a zrychlení

$$\begin{aligned}a_1 &= -\omega^2 x_1 \\ a_2 &= -\omega^2 x_2\end{aligned}\tag{B.31}$$

B.5 Příklad 5: jednoosá napjatost

Příloha C

Značení

Poznámkou (alt) jsou opatřeny ty symboly, které se vyskytují ve více významech. Jde spíše o výjimečné případy, u nichž je z kontextu vždy zřejmé, jakou veličinu na daném místě označují. Např λ může být Lamého konstanta v Hookeově zákoně, druhá viskozita v Newtonově-Stokesově modelu vazké tekutiny, tepelná vodivost nebo konečně poměr $\lambda = l/l_0$ představující jednoosé protažení. Ani v tak extrémním příkladě mnohonásobného použití však velké nebezpečí konfliktu nehrozí.

Označování tensorových veličin je vysvětleno v přehledu poznatků, v Sekci 2.2. Koncepčně je každý tensor definován prostřednictvím svých kartézských složek a ty jsou, tam kde je to možné, uspořádány do matice. Například tensor druhého řádu \mathbf{E} má složky E_{ij} , takže je mu přiřazena matice $[E]$. V tomto přehledu jsou uvedeny pouze generické symboly, např. \mathbf{E} .

Řecká písmena

α	součinitel délkové roztažnosti v 1/K
γ_{ijk}	Levi-Civitův permutační symbol
Γ_t	hranice Ω_t
δ_{ij}	Kroneckerův symbol
Δl	prodloužení; posuv
Δq	teplo dodané při změně stavu na jednotku objemu v J/m ³
ΔS_0	část plochy $\Delta S_0 \subset S_0$
ΔS_t	část plochy $\Delta S_t \subset S_t$
ΔT	teplotní rozdíl; $\Delta T = T - T_0$
Δw	práce vnější síly vztažená na jednotku objemu v J/m ³
ϵ	poměrné prodloužení; $\epsilon = \Delta l/l$
ϵ	tensor malé deformace
η	hustota entropie v J/m ³ K (úvod) nebo J/kgK (hlavní část)
θ	poměrná změna objemu
κ	tepelný zdroj ve W/m ³ v aktuální konfiguraci
\mathcal{K}	tepelný zdroj ve W/m ³ v referenční konfiguraci
λ	Lamého konstanta v Pa

λ (alt)	druhá dynamická viskozita v Pa·s
λ (alt)	tepelná vodivost ve W/mK
λ (alt)	jednoosé protažení $\lambda = l/l_0$
λ_k	hlavní protažení; vlastní čísla $[U]$ a $[V]$
$[\Lambda]$	spektrální matice $[\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]$
μ	Lamého konstanta; $\mu = G$
μ (alt)	první dynamická viskozita v Pa·s
ν	Poissonovo číslo
ν (alt)	kinematická viskozita v m ² /s
ρ	hustota v kg/m ³
ρ_0	počáteční hustota v kg/m ³
σ	napětí v Pa; $\sigma = F/A$
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyho tensor napětí
$\boldsymbol{\Sigma}$	napětí konjugované k \mathbf{E}
φ	Eulerovské vyjádření veličiny $\mathbf{T} = \varphi(x_j, t)$
φ (alt)	úhel
$\{\varphi_k\}$	vlastní vektory
ϕ	Lagrangeovské vyjádření veličiny $\mathbf{T} = \phi(X_i, t)$
$[\Phi]$	modální matice $[\Phi] = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3]$
χ	zobrazení $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ vyjádřené jako funkce $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$
χ^{-1}	zobrazení $\Omega_t \rightarrow \Omega_0$ vyjádřené jako funkce $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$
ψ	hustota volné energie v J/m ³ (úvod) nebo J/kg (hlavní část)
ω	úhlová rychlost
$\boldsymbol{\omega}$	axiální vektor úhlové rychlosti
Ω	kontrolní objem v Eulerově popisu
Ω_0	referenční oblast (konfigurace) v Lagrangeově popisu; těleso
Ω_t	aktuální konfigurace; zdeformované těleso

Latinka

\mathbf{a}	vektor zrychlení
\mathbf{a} (alt)	Almansiho tensor deformace
A	průřez v m ²
$[A]$	matice přechodu (směrové kosiny)
A_0	počáteční průřez
\mathbf{A}	eulerovský tensor deformace; $\mathbf{A} = f(\mathbf{V})$
$\mathbf{A}(X_i, t)$	zrychlení jako funkce v Lagrangeově popisu
\mathbf{b}	objemová síla v N/m ³ v aktuální konfiguraci
\mathbf{b} (alt)	Biotův tensor deformace
\mathbf{B}	objemová síla v N/m ³ v referenční konfiguraci
c	součinitel tepelné kapacity v J/m ³ K
\mathbf{C}	Cauchyho-Greenův deformační tensor; metrický tensor
\mathbf{C} (alt)	tečný tensor; Hessián energie
div	prostorový operátor divergence vzhledem k x_j
dl	délka elementární úsečky $d\mathbf{x}$

dL	délka elementární úsečky $d\mathbf{X}$
Div	materiálový operátor divergence vzhledem k X_i
\mathbf{D}	symetrická část rychlostního gradientu
\mathbf{e}	Greenův-Lagrangeův tensor deformace (GL tensor)
\mathbf{e}_i	jednotkové vektory; ortonormální báze
E	modul pružnosti v Pa
\mathbf{E}	lagrangeovský tensor deformace; $\mathbf{E} = f(\mathbf{U})$
F	síla v N
\vec{F}	vektor síly
\mathbf{F}	deformační gradient; $\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{X}$
grad	prostorový gradient vzhledem k x_j
\mathbf{g}	vektor gravitačního zrychlení v m/s^2
G	modul pružnosti ve smyku v Pa
Grad	materiálový gradient vzhledem k X_i
h	délkový rozměr; výška desky
h_0	počáteční rozměr
\mathbf{h}	vektor tepelného toku ve W/m^2
\mathbf{h} (alt)	Henckyho logaritmický tensor deformace
\mathbf{H}	Pioloův vektor vedení tepla ve W/m^2
I_k	hlavní invarianty
\hat{I}_k	mocninné invarianty; $\hat{I}_k = \frac{1}{n} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^n)$
$[I]$	jednotková matice
\mathbf{I}	jednotkový tensor definovaný složkami δ_{ij} , resp. $[I]$
J	jacobián zobrazení $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$; $J = \det \mathbf{F} $
K	modul objemové pružnosti v Pa
K (alt)	kinetická energie v J
l	délkový rozměr; délka tyče nebo desky
l_0	počáteční délka
L	charakteristická délka v m
\mathbf{L}	rychlostní gradient; $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$
\mathbf{P}	1. Pioloův-Kirchhoffův tensor napětí (1PK tensor)
\dot{q}	hustota tepelného výkonu ve W/m^3
\dot{Q}	tepelný výkon ve W
Re	Reynoldsovo číslo
\mathbf{R}	tensor rotace
\mathbb{R}^3	Euklidovský prostor
S	entropie v J/K
S_0	uzavřená plocha (hranice) obklopující V_0
S_t	uzavřená plocha (hranice) obklopující V_t
\mathbf{S}	2. Pioloův-Kirchhoffův tensor napětí (2PK tensor)
$\text{tr}(\cdot)$	stopa tensoru; $\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$
t	čas
\mathbf{t}	vektor napětí v Pa
T	termodynamická (absolutní) teplota v K
T_0	teplota okolí v K, např. $T_0 = 300 \text{ K}$

T_r	referenční teplota v K, např. $T_r = T_0$
\mathbf{T}	vektor napětí v referenční konfiguraci v Pa
\mathbf{T} (alt)	zástupný symbol pro obecnou tensorovou veličinu
$\dot{\mathbf{T}}$	materiálová derivace veličiny \mathbf{T}
u	vnitřní energie v J/m^3 (úvod) nebo J/kg (hlavní část)
\mathbf{u}	pole posunutí
U	vnitřní energie v J
\mathbf{U}	pravostranný tensor protažení
\mathbf{v}	vektor rychlosti
V	objem v m^3
V (alt)	charakteristická rychlost v m/s
V_0	libovolně zvolená podoblast tělesa; $V_0 \subset \Omega_0$
V_t	libovolně zvolená podoblast zdeformovaného tělesa; $V_t \subset \Omega_t$
\mathbf{V}	levostranný tensor protažení
$\mathbf{V}(X_i, t)$	rychlost jako funkce v Lagrangeově popisu
\mathcal{V}	vektorový prostor
\dot{w}	hustota mechanického výkonu ve W/m^3
\dot{W}	mechanický výkon ve W
\mathbf{W}	vírový tensor; spin
x_j	prostorové (Eulerovské) souřadnice; složky vektoru \mathbf{x}
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$	bod prostoru; radiusvektor v čase $t > 0$
X_i	materiálové (Lagrangeovské) souřadnice; složky vektoru \mathbf{X}
$\mathbf{X} \in \Omega_0$	materiálový bod (hmotný bod, částice); radiusvektor v čase $t = 0$
\mathbf{z}	gradient posunutí; $\mathbf{z} = \text{Grad } \mathbf{u}$

Literatura

- [1] Anand, L.: On H. Hencky's approximate strain-energy function for moderate deformations. *ASME J. Appl. Mech.*, **46**, pp. 78–82, 1979.
- [2] Anand, L.: Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **34**, pp. 293–304, 1986.
- [3] Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey 1996.
- [4] Boček, L.: *Tenzorový počet*. SNTL, Praha 1976.
- [5] Brdička, M.: *Mechanika kontinua*. ČSAV, Praha 1959.
- [6] Chandrasekharaiah, D.S., Lokenath Debnath: *Continuum Mechanics*. Academic Press, San Diego 1994.
- [7] Flügge, S.: *Encyclopedia of Physics, Vol. III/3 The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer, Berlin 1965.
- [8] Gurtin, M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, San Diego 1981.
- [9] Haupt, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, Berlin 2000.
- [10] Heinbockel, J.H.: *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*. Trafford Publishing, Victoria 2001.
- [11] Hencky, H.: The elastic behavior of vulcanized rubber. *J. Appl. Mech.*, **1**, No. 2, pp. 45–53, 1933.
- [12] Holzapfel, G.A.: *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineers*. Wiley, Chichester 2000.
- [13] Itskov, M.: *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers*. Springer, Berlin 2007.
- [14] Kvasnica, J.: *Termodynamika*. SNTL, Praha 1965.
- [15] Lee, E.H., Liu, D.T.: Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. *J. Appl. Phys.*, **38**, No. 1, pp. 19–27, 1967.

- [16] Marsden, J.E., Hughes, T.J.R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, Inc., New York 1983.
- [17] Migliori, A., Sarrao, J.L.: *Resonant Ultrasound Spectroscopy*, Wiley 1997.
- [18] Ogden, R.W.: *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications, Inc., New York 1997.
- [19] Papadakis, E.P.: Ultrasonic Velocity and Attenuation: Measurement Methods in Science and Industrial Applications. In: *Physical Acoustics, Principles and Methods*, **XII**, Academic Press 1976.
- [20] Plešek, J., Kruisová, A.: Formulation, validation and numerical procedures for Hencky's elasticity model. *Comput. Struct.*, **84**, pp. 1141–1150, 2006.
- [21] Stephenson, R.: On the uniqueness of the square root of a symmetric positive-definite tensor. *J. Elasticity*, **20**, pp. 213–214, 1980.