

UNE APPLICATION DU LEMME DE MITTAG-LEFFLER DANS  
LA CATEGORIE DES QUOTIENTS D'ESPACES DE FRECHET

BELMESNAOUI AQZZOUZ, Sala Eljadida

(Reçu le 6 juillet 2006)

*Abstract.* An application of Mittag-Leffler lemma in the category of quotients of Fréchet spaces. We use Mittag-Leffler Lemma to prove that for a nonempty interval  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ , the restriction mapping  $H^\infty(]a, b[ + i\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(]a, b[)$  is surjective and we give a corollary.

*Keywords:* Fréchet space, projective limit, surjective mapping

*MSC 2000:* 46M05, 46M15, 46M40

## 1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Le Lemme de Mittag-Leffler est un résultat classique. Dans son livre ([5], chapitre 3, Section 3.4) Jochen Wengenroth a donné la connection entre le Lemme de Mittag-Leffler et l'exactitude du foncteur limite projective, il a montré que la procédure de Mittag-Leffler peut être utilisée pour donner une condition suffisante pour qu'un système projectif  $(X_n)$  satisfait  $\text{Proj}_1(X_n) = 0$ . Notons que les espaces du système projectif et dénombrable  $(X_n)$  peuvent être des groupes topologiques métrisables et complets ou des espaces de Fréchet. Aussi, notons que le Lemme de Mittag-Leffler joue un rôle centrale dans les travaux de Palamodov [2] et [3] i.e. concernant les foncteurs  $\text{Proj}_1$  et  $\text{Ext}_1$  pour les espaces de Fréchet et les limites projectives des espaces  $\mathcal{DF}$ .

Dans [1] nous avons étendu le Lemme de Mittag-Leffler à la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. L'objectif de ce papier est de donner une application de cette extension. Pour cela nous utiliserons le Lemme de Mittag-Leffler dans la catégorie des espaces de Fréchet pour établir que si  $]a, b[$  est un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , alors toute fonction  $f \in C^\infty(]a, b[)$  est la restriction d'une fonction  $\tilde{f} \in H^\infty(]a, b[ + i\mathbb{R})$  tel que  $f = \tilde{f}|_{]a, b[}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , pour tout  $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ , on a  $D^n f(x) = 0$ .

Ensuite, nous déduirons à partir du Lemme de Mittag-Leffler dans la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet (Théorème 3.2 de [1]) que  $\varprojlim_k (E_k|F_k) = (\varprojlim_k E_k)|(\varprojlim_k F_k)$ , où  $E_k = H^k(]a, b[+i\mathbb{R})$  et  $F_k = \text{Ker}(R_k)$  et  $R_k$  est la restriction  $H^k(]a, b[+i\mathbb{R}) \rightarrow C^k(]a, b[)$ , où  $H^k(]a, b[+i\mathbb{R})$  est l'espace de Fréchet des fonctions de classe  $C^k$  sur  $]a, b[+i\mathbb{R}$  dont la restriction à  $]a, b[$  est de classe  $C^k$  et  $D^\alpha f(x) = 0$  pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \leq k - 1$ .

Enfin, rappelons la définition de la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. Soit  $(E, \tau_E)$  un espace de Fréchet. Un sous-espace de Fréchet de  $E$  est un sous-espace vectoriel  $F$ , muni d'une topologie  $s_F$  telle que l'injection  $(F, s_F) \rightarrow (E, \tau_E)$  est continue. Un quotient d'espaces de Fréchet  $E|F$  est un couple  $(E, F)$ , où  $E$  est un espace de Fréchet et  $F$  un sous-espace de Fréchet de  $E$ . Si  $E|F$  et  $E_1|F_1$  sont deux quotients d'espaces de Fréchet, un morphisme strict  $u: E|F \rightarrow E_1|F_1$  est induit par une application linéaire continue  $u_1: E \rightarrow E_1$  dont la restriction  $u_{1|F}: F \rightarrow F_1$  est continue; le morphisme  $u$  est injectif si  $u_1^{-1}(F_1) = F$  i.e. si  $x \in E$  est tel que  $u_1(x) \in F_1$  alors  $x \in F$ . Le morphisme strict  $u$  est dit un pseudo-isomorphisme s'il est induit par une application linéaire continue et surjective  $u_1: E \rightarrow E_1$  telle que  $u_1^{-1}(F_1) = F$ . Dans [4], L. Waelbroeck a construit la catégorie abélienne **qFré**, elle a comme objets les quotients d'espaces de Fréchet et pour morphismes les applications de la forme  $u = v \circ s^{-1}$ , où  $s$  est un pseudo-isomorphisme et  $v$  est un morphisme strict. Pour plus d'informations voir [4].

## 2. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Nous notons par  $C^\infty(]a, b[)$  l'espace de toutes les fonctions  $C^\infty$  sur  $]a, b[$ . Il est bien connu que  $C^\infty(]a, b[)$  est un espace de Fréchet. Définissons maintenant l'espace  $H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ .

On désigne par  $H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ , l'espace des fonctions  $f \in C^k(]a, b[+i\mathbb{R})$  telles que  $f|_{]a, b[} \in C^\infty(]a, b[)$  et

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq k - 1: D^\alpha f(x) = 0.$$

La topologie de Fréchet de l'espace  $H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$  est donnée par la famille des semi-normes  $(\|\cdot\|_{n,k})$ , où

$$\|f\|_{n,k} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in K} |f^{(n)}(x)| + \sup_{|\alpha| \leq k-1} \sup_{x \in K'} |D^\alpha f(x)|$$

et où  $K$  et  $K'$  sont des compacts contenus dans  $]a, b[$ .

L'espace  $H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ , muni de la topologie ci-dessus, est un espace de Fréchet.

Notons que l'application restriction

$$R_k: H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(]a, b[), f \longmapsto \tilde{f}$$

est continue.

Nous allons utiliser le Lemme de Mittag-Leffler pour montrer qu'elle est surjective. Pour cela, nous aurons besoin de deux Lemmes.

Mais rappelons d'abord que si  $K$  est une partie compacte d'une variété  $V \subset U$ , où  $U$  est un voisinage ouvert de  $K$ , alors une fonction plateau associée à  $(K, V)$  est une fonction de classe  $C^\infty$ , à support compact dans  $V$ , et égale à 1 sur un voisinage de  $K$ .

**Lemme 2.1.** *Il existe une suite de fonctions plateaux  $(\varphi_n)_n$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\text{supp } (\varphi_n) \subset [-1/n, 1/n]$ .*

*Preuve.* On considère une suite décroissante de nombres positifs  $(\lambda_n)_n$  qui converge vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on considère aussi la fonction  $\psi \in \mathcal{D}([-1, +1])$  qui est égale à 1 sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Nous prolongeons la fonction  $\psi$  en disant que  $\psi(x) = 0$  si  $|x| \geq 1$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous posons  $\varphi_n(x) = \psi(\lambda_n x)$ , alors  $\text{supp } (\psi) \subset ]-\lambda_n/n, \lambda_n/n[$  et par suite,  $\text{supp } (\varphi_n) \subset [-1/n, 1/n]$ .  $\square$

**Lemme 2.2.** *Toute fonction  $f \in \mathcal{D}(]a, b[)$  est la restriction d'une fonction  $\tilde{f} \in H_\infty^k(]a, b[+i\mathbb{R})$ .*

*Preuve.* Soit  $K = \text{supp } (f)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$M_n = \sup_{x \in K} |f^{(n)}(x)|$$

puis

$$\forall n \in \mathbb{N}: \lambda_n = M_n \text{ et } \alpha_n = \sum_{p=0}^{n+k} \lambda_p$$

On voit que  $\alpha_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}([-1, 1])$ . La suite  $(1/\alpha_n)_n$  donne une suite de fonctions plateaux  $(\psi_n)_n$  avec  $\psi_n(x) = \varphi(x/\alpha_n)$ .

La série  $\tilde{f}(x + iy) = \sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} f^{(n)}(x + iy) \psi_n(y) (iy)^n$  converge si  $y \neq 0$  (elle est localement finie) et elle est d'ordre  $C^k$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Si  $y = 0$ , seul le premier terme qui n'est pas nul, et donc la série est convergente. Par conséquent, la fonction  $\tilde{f}$  est d'ordre  $C^k$  sur un voisinage de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $|\alpha| \leq k$ . Alors

$$\begin{aligned} D^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f^{(n)}(x)\psi_n(y)(iy)^n) &= f^{(n+\alpha_1)}(x)D^{\alpha_2}(\psi_n(y)(iy)^n) \\ &= f^{(n+\alpha_1)}(x) \sum_{i=0}^{\alpha_2} \psi_n^{(\alpha_2)}(y)n(n-1)\dots(n-p-1) \end{aligned}$$

Mais

$$|D^{\alpha_2}(\psi_n(y)(iy)^n)| \leq n! \sup_{y \in [0,1], 0 \leq p \leq n} \psi_n^{(\alpha_2-p)} \sum_{p \neq 0} \left(\frac{1}{p}\right)$$

La série  $\sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} f^{(n)}(x)\psi_n(y)(iy)^n$  est dominée par la série géométrique convergente de terme général  $(1/\delta_0)^{n-k}$ . Donc  $\tilde{f} \in C^k(K + i\mathbb{R})$ .

Du calcul de

$$\tilde{f}(x + iy) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \tilde{f} \right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n+1)}(x)\psi_n(x)(iy)^n + \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}\psi'_n(y) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)\psi'_n(y)(iy)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x)(\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(iy)^n \end{aligned}$$

Le Lemme 2.2. est établi. □

**Théorème 2.3.** *L'application restriction  $R_k: H_{\infty}^k([a, b[+i\mathbb{R}) \rightarrow C^{\infty}([a, b[)$  est surjective.*

*Preuve.* Soit  $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$  un recouvrement ouvert de  $]a, b[$  localement fini. Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , soit  $\psi_j \in \mathcal{D}(U_j)$  telle que  $\text{supp}(\psi_j) \subset U_j$ .

Soit  $f \in C^{\infty}([a, b[)$ . Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , nous considérons  $f_j = \psi_j f$ . D'après le Lemme 2.2 ce  $f_j$  se prolonge en une fonction  $\tilde{f}_j$ . On obtient ainsi une famille de fonctions  $(\tilde{f}_j)_j$  localement d'ordre finis sur  $]a, b[$ . Ce qui montre que la restriction  $H_{\infty}^k([a, b[+i\mathbb{R}) \rightarrow C^{\infty}([a, b[)$  est surjective, et par suite le Théorème 2.3. est établi. □

Enfin, pour établir notre résultat fondamental, nous aurons besoin de rappeler le Lemme de Mittag-Leffler.

**Lemme de Mittag-Leffler 2.4.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soient  $E_n, E'_n, E''_n$  des espaces de Fréchet,  $i_n: E''_n \rightarrow E'_n$  des applications linéaires continues injectives et  $s_n: E'_n \rightarrow E_n$  des applications linéaires continues surjectives tels que la suite

$$(0, i_n, s_n, 0): 0 \longrightarrow E''_n \longrightarrow E'_n \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$$

est exacte. Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n: E_{n+1} \rightarrow E_n, u'_n: E'_{n+1} \rightarrow E'_n$ , et  $u''_n: E''_{n+1} \rightarrow E''_n$  sont des applications linéaires continues telles que

$$u'_n \circ i_{n+1} = i_n \circ u''_{n+1} \quad \text{et} \quad s'_n \circ u_{n+1} = s_n \circ i'_{n+1}$$

Si de plus les images des applications  $u'_n$  sont denses, alors la suite

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n E''_n \longrightarrow \varprojlim_n E'_n \longrightarrow \varprojlim_n E_n \longrightarrow 0$$

est exacte.

*Preuve.* Pour une démonstration de ce Lemme voir par exemple le livre de J. Wengenroth ([5], section 3).  $\square$

Maintenant nous sommes en mesure d'établir notre résultat fondamental

**Théorème 2.5.** L'application restriction  $H^\infty(]a, b[+i\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(]a, b[)$  est surjective.

*Preuve.* Soit  $K$  une partie compacte de  $]a, b[$ , et  $k \in \mathbb{N}$ . Notons par  $C_0^k(K)$  l'espace des fonctions de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  à support dans  $K$ , et par  $H^k(K+i\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $C^k$  sur  $]a, b[+i\mathbb{R}$  dont la restriction à  $]a, b[$  est de classe  $C^k$  et

$$D^\alpha f(x) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \leq k-1$$

On sait que les espaces  $C^k(]a, b[)$  et  $H^k(K+i\mathbb{R})$  sont de Fréchet et pour tout  $k$ , la restriction

$$R_k: H^k(]a, b[+i\mathbb{R}) \longrightarrow C^k(]a, b[)$$

a une image fermée, et donc  $\text{Im}(R_k)$  est un espace de Fréchet.

Il est facile de montrer que chacun des systèmes  $(\text{Ker}(R_k))_k, (H^k(]a, b[+i\mathbb{R}))_k$  et  $(C^k(]a, b[))_k$  est projectif dans la catégorie des espaces de Fréchet. Notons par  $\text{Ker}(R_\infty) = \varprojlim_k \text{Ker}(R_k)$ ,  $H^\infty(]a, b[+i\mathbb{R}) = \varprojlim_k H^k(]a, b[+i\mathbb{R})$  et  $C^\infty(]a, b[) = \varprojlim_k C^k(]a, b[)$  leurs limites projectives, qui sont aussi des espaces de Fréchet.

Montrons que le complexe

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(R_\infty) \longrightarrow H^\infty(]a, b[ + i\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(]a, b[) \longrightarrow 0$$

est exact.

En effet, nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(R_{k+1}) & \longrightarrow & H^{k+1}(]a, b[ + i\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^{k+1}(]a, b[) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(R_k) & \longrightarrow & H^k(]a, b[ + i\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^k(]a, b[) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

où l'application  $u'_k: H^{k+1}(]a, b[ + i\mathbb{R}) \rightarrow H^k(]a, b[ + i\mathbb{R})$  est l'injection canonique,  $v_{k+1,k}: C^{k+1}(K) \rightarrow C^k(K)$  est l'application identité, l'application  $u''_k: \text{Ker}(R_{k+1}) \rightarrow \text{Ker}(R_k)$  est l'injection canonique et l'application  $i_j: \text{Ker}(R_j) \rightarrow H^j(K + i\mathbb{R})$  est l'injection canonique pour  $j = k, k + 1$ .

Comme les applications  $u''_k$  ont des images denses, il résulte du Lemme de Mittag-Leffler ci-dessus que la suite

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(R_\infty) \longrightarrow H^\infty(]a, b[ + i\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(]a, b[) \longrightarrow 0$$

est exacte. En d'autres mots, toute fonction  $f \in C^\infty(K)$  se prolonge en une fonction  $\tilde{f}$  de classe  $C^\infty$  sur  $K + i\mathbb{R}$  tel que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \forall x \in K: D^\alpha f(x) = 0.$$

Donc

$$\tilde{f}|_{]a, b[} = f \text{ et } \forall x \in K: D^\alpha \tilde{f}(x) = 0.$$

Ce qui montre le résultat. □

Comme conséquence du Théorème 2.1, nous obtenons le résultat suivant:

**Corollaire 2.6.**

$$\varprojlim_k (H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k)) = (\varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}])) | (\varprojlim_k \text{Ker}(R_k)).$$

*Preuve.* Soient  $(\text{Ker}(R_k))_k$  et  $(H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}]))_k$  les systèmes projectifs du Théorème 2.5 et soient  $\text{Ker}(R_\infty) = \varprojlim_k \text{Ker}(R_k)$ ,  $H^\infty(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}]) = \varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}])$  leurs limites projectives. D'abord il est clair que chaque quotient d'espaces de Fréchet  $H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k))$  définit une suite exacte qui est la suivante:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(R_k) \longrightarrow H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}]) \longrightarrow H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k)) \longrightarrow 0$$

En appliquant le foncteur limite projective, il découle du Théorème 3.2 de [1] que la suite suivante:

$$0 \longrightarrow \varprojlim_k \text{Ker}(R_k) \longrightarrow \varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}]) \longrightarrow \varprojlim_k (H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k)) \longrightarrow 0$$

est exacte dans la catégorie **qFré**. Ceci montre que

$$\begin{aligned} \varprojlim_k (H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}] | \text{Ker}(R_k)) &= \text{Coker}(\varprojlim_k \text{Ker}(R_k) \longrightarrow \varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}])) \\ &= (\varprojlim_k H^k(\lrcorner a, b[+i\mathbb{R}])) | (\varprojlim_k \text{Ker}(R_k)). \end{aligned}$$

Par conséquent, le Corollaire est établi. □

*Bibliographie*

- [1] *B. Aqzzouz, R. Nouira:* L'exactitude du foncteur limite projective sur la catégorie des quotients d'espaces de Fréchet. To appear in Czech. Math. J. in 2008.
- [2] *V. P. Palamodov:* The projective limit functor in the category of topological linear spaces. Mat. Sb. (N.S.) 75 (1968), 567–603. (Russian.) zbl
- [3] *V. P. Palamodov:* Homological methods in the theory of locally convex spaces. Usp. Mat. Nauk 26 (1971), 3–65. (Russian.) zbl
- [4] *L. Waelbroeck:* Quotient Fréchet spaces. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 34 (1989), 171–179. zbl
- [5] *J. Wengenroth:* Derived Functors in Functional Analysis. Lect. Notes Math. 1810, Springer, Berlin, 2003. zbl

*L'adresse de l'auteur:* Belmesnaoui Aqzzouz, Université Mohammed V-Souissi, Faculté des Sciences Economiques, juridiques et sociales, Département d'Economie, B.P. 5295, Sala Eljadida, Morocco, e-mail: baqzzouz@hotmail.com.