Kapitola 1

Teorie kosmického plazmatu

Většina baryonové hmoty ve vesmíru je silně ionizovaná a její pohyb často generuje silná elektromagnetická pole. To platí pro extrémně hustou a horkou hmotu v nitrech hvězd (včetně neutronových) i pro extrémně řídkou a chladnou hmotu v mezihvězdném a mezigalaktickém prostoru. K popisu chování této hmoty proto v mnoha (i když zdaleka ne ve všech) případech potřebujeme fyziku plazmatu. V klasickém pojetí bývá vědní disciplína "fyziky plazmatu" vymezena jako popis "kolektivního chování kvazineutrálního ionizovaného plynu", což kvantitativně znamená jisté omezující předpoklady (např. dostatečně vysoký počet částic uvnitř Debyeho stínícího poměru). Skutečný vesmír se ovšem našimi definicemi neomezuje. Proto teoretický popis kosmického plazmatu musíme rozšířit nad rámec klasické magnetohydrodynamiky. Především je zapotřebí zahrnout do fyziky kosmického plazmatu interakci se zářením a to hned ze dvou důvodů; jednak záření v mnoha kosmických objektech určuje jejich energetický stav a tedy i jejich ionizaci a často i dynamiku. Kromě toho pozorované záření je zpravidla jediným naším zdrojem informace o těchto objektech a jejich fyzice a proto potřebujeme znát fyziku jeho vzniku a šíření. V kosmických objektech také velmi často hraje důležitou roli jejich gravitace. V kompaktních objektech bývá gravitace natolik silná, že k jejímu kvantitativnímu popisu je nutné přejít od newtonovského popisu k obecné teorii relativity. I v případech, že prostoročas můžeme s velkou přesností považovat za plochý, se však často nevyhneme relativistickému popisu kosmického plazmatu, protože jeho částice bývají urychleny na rychlosti srovnatelné s rychlostí světla. Kromě toho samotné záření můžeme popisovat jako ultrarelativistický plyn fotonů. Alespoň speciálně relativistická kinetická teorie je proto vhodným východiskem tzv. zářivé magnetohydrodynamiky, tj. ke společnému popisu přenosu záření i fyziky ionizovaného plynu a velkorozměrového elektromagnetického pole. Alespoň přibližnou geometrickou symetrii studovaných objektů (např. sférickou či axiální) může být výhodné vyjádřit v odpovídajících křivočarých souřadnicích. Proto může být výhodné používat obecně-relativistický matematický aparát metrického tenzoru prostoročasu v obecných souřadnicích i v plochém prostoročase.

1.1 Pohyb nabitých částic v elektromagnetickém poli

Chování dostatečně řídkého plazmatu v silných vnějších (elektro-)magnetických polích můžeme poměrně dobře popsat jako nezávislý pohyb jednotlivých nabitých částic. Zanedbáváme přitom jejich vzájemnou interakci jak srážkami, tak prostřednictvím elektromagnetického pole, které při svém pohybu generují.

1.1.1 Variační principy a pohybové rovnice

Pohybové rovnice pro vývoj soustavy částic a polí lze odvodit z principu nejmenší akce

$$\delta S = 0 \ , \tag{1.1}$$

kde akce S je dána integrálem lagrangiánu

$$L = L_{\mathrm{p}} + L_{\mathrm{f}} + L_{\mathrm{i}} \ , \tag{1.2}$$

který je součtem lagrangiánu L_{p} částic, lagrangiánu L_{f} pole a interakčního lagrangiánu L_{i}.

Protože vzájemnou interakci částic zanedbáváme, lagrangián soustavy částic je pouze součtem lagrangiánů pro jednotlivé částice. V následujícím se omezíme na jedinou částici, kterou budeme považovat za hmotný bod s klidovou hmotností m_0 a nábojem Q. Její pohyb bude popsán světočárou $x^\iota = x^\iota(w)|_{\iota=0}^{3}$ parametrizovanou v prostoročasových souřadnicích x^ι libovolným parametrem w, který pro částice s $m_0 \neq 0$ většinou volíme rovný jejich vlastnímu času τ určenému vztahem

$$c^2 d\tau^2 = -g_{\iota\kappa} dx^\iota dx^\kappa \ , \tag{1.3}$$

kde $g_{\iota\kappa}(x)$ je metrický tenzor prostoročasu. Akce S_{p} volné částice by měla být lorentzovsky invariantní a tedy úměrná integrálu konstanty podle vlastního času

$$S_{\mathrm{p}} = -m_0 c \int d\tau = -m_0 c \int \sqrt{-g_{\iota\kappa} U^\iota U^\kappa} d\tau \ , \tag{1.4}$$

kde tečný vektor ke světočáře

$$U^\iota = \dot{x}^\iota \equiv \frac{dx^\iota}{d\tau} \tag{1.5}$$

je 4-rychlost splňující vzhledem k (1.3)

$$U^2 \equiv g_{\iota\kappa} U^\iota U^\kappa = -c^2 \ . \tag{1.6}$$

V kartézských souřadnicích v plochém prostoročase (v nichž $x^0 = ct$, kde t je souřadnicový čas) je metrický tenzor

$$g_{\iota\kappa} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1) \ , \tag{1.7}$$

nebo v post-newtonovském přiblížení v gravitačním poli se skalárním gravitačním potenciálem $\Phi(x)$

$$g_{\iota\kappa} = \mathrm{diag}(-1 - \frac{2\Phi}{c^2}, +1, +1, +1) \ . \tag{1.8}$$

Lagrangián L_{p} částice v této souřadné soustavě, který má splňovat vztah

$$S_{\mathrm{p}} = \int L_{\mathrm{p}} dt \ , \tag{1.9}$$

je tedy dán výrazem

$$L_{\mathrm{p}} = -m_0 c \sqrt{-g_{\iota\kappa} U^\iota U^\kappa} \, \frac{d\tau}{dt} = -m_0 c \sqrt{c^2 + 2\Phi - v^2} \ , \tag{1.10}$$

kde $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ je souřadnicová rychlost. Pro $\Phi \ll c^2 \gg v^2$ tedy dostáváme ve shodě s nerelativistickým výrazem pro Lagrangián

$$L_{\mathrm{p}} \simeq -m_0 c^2 - m_0 \Phi + \frac{1}{2} m_0 v^2 \ . \tag{1.11}$$

Elektromagnetické pole není skalární, ale vektorové. Interakční lagrangián udávající vzájemné působení částice s nábojem Q a elektromagnetického pole popsaného čtyř-potenciálem A má v soustavě se souřadnicovým časem t tvar

$$L_{\mathrm{i}} = -\frac{Q}{c}\langle A.U\rangle \frac{d\tau}{dt} \ . \tag{1.12}$$

Celková akce částice ve vnějším elektromagnetickém poli (tj. stále ještě bez zahrnutí lagrangiánu L_{f} samotného elmag. pole) má tedy tvar

$$S = S_{\mathrm{p}} + S_{\mathrm{i}} = -\int \left(m_0 c\sqrt{-U^2} + \frac{Q}{c}\langle A.U\rangle \right) d\tau \ . \tag{1.13}$$

Z celkového vlastního (tj. pro $t = \tau$) lagrangiánu částice

$$L = -\left(m_0 c\sqrt{-U^2} + \frac{Q}{c}\langle A.U\rangle \right) \tag{1.14}$$

můžeme vypočítat její čtyř-hybnost

$$p_\iota = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\iota} = m_0 g_{\iota\kappa} U^\kappa - \frac{Q}{c} A_\iota \ , \tag{1.15}$$

která splňuje Lagrangeovy pohybové rovnice

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^\iota} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\iota}\right) = -m_0 \frac{D}{d\tau} U_\iota + \frac{Q}{c}(A_{\iota,\kappa} - A_{\kappa,\iota})U^\kappa \ . \tag{1.16}$$

Elektromagnetické pole se čtyř-potenciálem A tedy působí na nabitou částici Lorentzovou silou, jejímž výsledkem je čtyř-zrychlení

$$a^\iota \equiv \frac{DU^\iota}{d\tau} = \frac{Q}{cm_0} F^\iota{}_\kappa U^\kappa \ , \tag{1.17}$$

kde

$$F_{\iota\kappa} = A_{\iota,\kappa} - A_{\kappa,\iota} \tag{1.18}$$

je tenzor elektromagnetického pole, který je antisymetrický; A je jedna-forma a dva-forma

$$F = dA \tag{1.19}$$

je její vnější diferenciál. V důsledku antisymetrie F je a vyjádřené (1.17) kolmé na U,

$$(aU) = 0 \ , \tag{1.20}$$

což je podmínka nutná k zachování vztahu (1.6).

1.1.2 "3+1"-formalismus

Kovariantní vyjádření elektromagnetického pole jako prostoročasové 2-formy F v sobě implicitně shrnuje algebraické vlastnosti tohoto pole, tj. jeho chování vzhledem k Lorentzově grupě transformací. Historický postup byl opačný — kovariantní formulace byla umožněna empirickým zjištěním těchto vlastností v rámci starší formulace založené na popisu pomocí dvou prostorových (z hlediska zvolené vztažné soustavy) vektorových polí — elektrického E a magnetického B. Pro pochopení vzájemné korespondence uvedeme nyní vztahy mezi relativistickou 2-formovou formulací a klasickou formulací, nazývanou také “3+1” (tj. budovanou z hlediska rozštěpení prostoročasu na vlastní 3-dim. prostor a čas pozorovatele). Klasická formulace může v některých konkrétních případech (kdy symetrie řešeného problému nabízí přirozenou vztažnou soustavu, vůči níž se má toto rozštěpení provádět) dávat jednodušší a názornější popis pole i pohybu částic v něm.

Zvolíme-li v každé události prostoročasu vztažné pozorovatele se 4-rychlostí u, pak 4-vektory elektrického napětí a magnetické indukce

$$E^\iota \equiv \frac{1}{c} F^\iota{}_\kappa u^\kappa \tag{1.21}$$

$$B_\iota \equiv \frac{1}{2c} \epsilon_{\iota\kappa\lambda\mu} u^\kappa F^{\lambda\mu} \tag{1.22}$$

jsou kolmé na u. Jsou tedy tečné k vlastním prostorům pozorovatelů, kteří je mohou brát jako 3-vektory elektrického a magnetického pole v dané události. Z těchto vektorů lze zpětně zrekonstruovat tenzor elektromagnetického pole[1]

$$F^{\iota\kappa} = \frac{2}{c} u^{[\iota} E^{\kappa]} + \frac{1}{c} \epsilon^{\iota\kappa\lambda\mu} B_\lambda u_\mu \ . \tag{1.23}$$

Ve vlastní bázi pozorovatele (v níž $u^\iota = c\delta^\iota_0$) má F složky

$$F_{\iota\kappa} = \left(\begin{array}{r|cccc} & {\scriptstyle \kappa=0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} \\ \hline {\scriptstyle \iota=0} & 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ {\scriptstyle 1} & E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ {\scriptstyle 2} & E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ {\scriptstyle 3} & E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{array} \right) \ . \tag{1.24}$$

Vyjádříme-li $U^\iota = \gamma(c, v^i)$ v této bázi pomocí souřadnicové rychlosti $v^i = \frac{dx^i}{dt}$, kde $t = x^0/c$ je souřadnicový čas a $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-\frac{1}{2}}$ je Lorentzův faktor, pak pohybová rovnice (1.17) má prostorové složky

$$\frac{d(\gamma v^i)}{d\tau} = \frac{\gamma Q}{m_0} (E^i + \epsilon^{ikl} \frac{v_k}{c} B_l) \ , \tag{1.25}$$

a časovou složku (tj. rovnici pro energii částice, která je na předchozích rovnicích závislá)

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{\gamma Q}{c m_0} E^k v_k \ . \tag{1.26}$$

Ve většině soustav fyzikálních jednotek bývá zvykem užívat pro složky B a E tenzoru F rozdílné jednotky, podobně jako pro hybnost a energii částice, přestože jsou dány prostorovou a časovou složkou téhož 4-vektoru. Například v soustavách CGSE a CGSM

$$[E]_{\mathrm{CGSE}} = c[B]_{\mathrm{CGSE}}, \qquad [E]_{\mathrm{CGSM}} = c[B]_{\mathrm{CGSM}} \ , \tag{1.27}$$

čímž v obou případech na pravé straně rovnice (1.25) odpadá jmenovatel c uvnitř závorky. Zde naopak budeme všechny složky F měřit stejnou jednotkou

$$[F] \equiv \mathrm{cm}^{-1/2} \mathrm{g}^{1/2} \mathrm{s}^{-1} = [E]_{\mathrm{CGSE}} = [B]_{\mathrm{CGSM}} \equiv 1\mathrm{gauss} = 10^5 \gamma = 10^{-4} \mathrm{T} \ , \tag{1.28}$$

[1] Hranatá závorka značí antisymetrizaci, $A^{[\iota} B^{\kappa]} \equiv A^\iota B^\kappa - A^\kappa B^\iota$.

čímž se zjednoduší a symetrizuje většina ostatních vztahů (např. (1.24), nebo výraz (**??**) pro hustotu energie pole) stejně jako v geometrické soustavě jednotek. Pro elektrický náboj budeme užívat jednotku

$$[Q] \equiv \mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{s}^{-1} = [Q]_{\mathrm{CGSE}} \,. \tag{1.29}$$

1.1.3 Lorentzova transformace

Obecná Lorentzova transformace (ve zvolené události) je dána přechodem od jedné ortonormální tetrády k jiné

$$\{e_\iota\} \to \{e'_\iota\}, \quad e_\iota = e'_\kappa \Lambda^\kappa{}_\iota, \quad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda \,. \tag{1.30}$$

Lorentzova transformace je tedy lineární transformace prostoročasových 4-vektorů zachovávající jejich indefinitní skalární součin. Množina všech Lorentzových transformací tvoří 6-ti parametrickou Lieovu grupu a matice Λ jsou její vektorovou reprezentací (nejjednodušší reprezentací grupy Lorentzových transformací je tzv. spinorová reprezentace – viz dodatek **??**). 3-parametrickou podgrupou této grupy je množina všech prostorových rotací. V případě prostorové rotace o úhel $\vec{\varphi}$ je Lorentzova transformace dána maticí[2]

$$\Lambda^\iota{}_\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(\epsilon_{ikl}\varphi^l) \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

a elektrické i magnetické pole se při ní transformují jako prostorové vektory

$$E' = \Lambda E \tag{1.32}$$
$$B' = \Lambda B \,. \tag{1.33}$$

V případě čistého boostu (tj. přechodu do soustavy s jinou rychlostí) s rychlostí $\vec{v} = c\beta\vec{n}$ je Lorentzova transformace dána maticí

$$\Lambda^\iota{}_\kappa = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta n \\ \gamma\beta n & \mathbf{1} + (\gamma-1) n \otimes n \end{pmatrix} . \tag{1.34}$$

Při této prostoro-časové rotaci[3] se projeví společná podstata elektrické a magnetické složky pole F jejich vzájemnou indukcí[4]

$$E' = [\gamma\mathbf{1} + (1-\gamma) n \otimes n]E + \gamma\beta n \times B \tag{1.35}$$
$$B' = [\gamma\mathbf{1} + (1-\gamma) n \otimes n]B - \gamma\beta n \times E \,. \tag{1.36}$$

Příspěvky příčných (vůči β) složek E i B k E' resp. B' se zvětšují o Lorentzovský faktor, zatímco příspěvky podélných složek jsou invariantní. Z transformačních vlastností F vyplývá, že obecně existuje (alespoň lokálně) inerciální soustava, ve které jsou elektrická a magnetická složka pole rovnoběžné, tj. jejich vektorový součin vymizí. Jak uvidíme později, tento vektorový součin (Poyntingův vektor) má význam hustoty toku elektromagnetické energie. Je proto přirozené hledat

[2] Funkci obecné matice můžeme vypočítat např. pomocí Taylorova rozvoje funkce nebo z Jordanova rozkladu matice. Matice $\epsilon_{ikl}\varphi^l$ má vlastní hodnoty 0 ve směru $\vec{\varphi}$ a $i\varphi$ v kolmých směrech, proto následující zápis je ekvivalentní standardnímu zápisu rotace $\sim \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$.

[3] Označíme-li $\gamma \equiv \cosh\alpha$, pak $\gamma\beta = \sinh\alpha$ a $\Lambda \sim \left(\begin{smallmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{smallmatrix}\right)$.

[4] Vektorový součin $\times$ dvou vektorů ve třídimenzionálním prostoru je duálem (daným jednotkovou 3-formou generovanou metrikou) k jejich vnějšímu součinu $\wedge$. V tomto významu bývá někdy symbol $\times$ nahrazován symbolem $\wedge$.

tetrádu $\{e'_\iota\}$, ve které $E' \parallel B'$, pomocí boostu ve směru $n \equiv \frac{E\times B}{|E\times B|}$. Pro tento případ se transformace (1.35) a (1.36) zjednoduší na

$$E' = \gamma\left(1 - \frac{\beta}{|E\times B|}B^2\right)E + \frac{\gamma\beta}{|E\times B|}(EB)B \tag{1.37}$$

$$B' = \gamma\left(1 - \frac{\beta}{|E\times B|}E^2\right)B + \frac{\gamma\beta}{|E\times B|}(EB)E\ , \tag{1.38}$$

odkud dostáváme podmínku pro β ve tvaru

$$0 = E' \times B' = \gamma^2\left(1 - \frac{E^2+B^2}{|E\times B|}\beta + \beta^2\right)E\times B\ . \tag{1.39}$$

Tato kvadratická rovnice má jedno fyzikální řešení

$$\beta = \tanh\alpha\ , \qquad \text{kde} \qquad \alpha = \frac{1}{2}\operatorname{argtanh}\frac{2|E\times B|}{E^2+B^2} \tag{1.40}$$

(druhé řešení > 1) vždy, kromě singulárního případu "nulového" neboli "zářivého" pole ($|E| = |B|$, $E \perp B$ — viz str. **??**), kdy $\beta \to 1$ (v případě kolmých ale různě velkých polí lze menší z nich vynulovat). Dalším boostem ve směru obou polí se jejich velikost ani směr nemění, takže existuje celá třída hledaných inerciálních soustav. Následující vhodnou rotací prostorových vektorů tetrády lze redukovat F na dvě nezávislé složky

$$F = -e\,dx^0 \wedge dx^1 + b\,dx^2 \wedge dx^3\ . \tag{1.41}$$

Každý 4-vektor z 2-dimenzionálního podprostoru $\{\partial_{x^0}, \partial_{x^1}\}$ má prostorovou složku paralelní s elektrickým a magnetickým polem v této soustavě a je vlastním vektorem tenzoru $F^\iota{}_\kappa$ s vlastní hodnotou e. Každý 4-vektor z podprostoru $\{\partial_{x^2}, \partial_{x^3}\}$ je kolmý na obě pole a je vlastním vektorem tenzoru $F^\iota{}_\kappa$ s vlastní hodnotou ib. Libovolný 4-vektor můžeme rozložit na součet dvou vlastních vektorů s těmito vlastními hodnotami pomocí projektorů

$$P_\parallel{}^\iota{}_\kappa = \frac{1}{e^2+b^2}\left(b^2\delta^\iota_\kappa + F^\iota{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\right) \tag{1.42}$$

a

$$P_\perp{}^\iota{}_\kappa = \frac{1}{e^2+b^2}\left(e^2\delta^\iota_\kappa - F^\iota{}_\lambda F^\lambda{}_\kappa\right)\ . \tag{1.43}$$

Z 2-formové povahy pole F dále vyplývá existence dvou skalárních charakteristik invariantních vůči Lorentzově transformaci, a to normy F[5]

$$|F|^2 = F^{\iota\kappa}F_{|\iota\kappa|} = B^2 - E^2 \tag{1.44}$$

a zúžení F s duálem ${}^*F$

$$\frac{1}{4}\langle {}^*F, F\rangle = \epsilon^{\iota\kappa\lambda\mu}F_{|\iota\kappa|}F_{|\lambda\mu|} = (EB)\ , \tag{1.45}$$

F s duálem ${}^*F$, jehož složky jsou

$$ {}^*F_{\iota\kappa} = \epsilon_{\iota\kappa\lambda\mu}F^{\lambda\mu} = \left(\begin{array}{c|cccc} & \kappa=0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \iota=0 & 0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ 1 & -B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ 2 & -B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ 3 & -B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{array}\right)\ . \tag{1.46}$$

[5]Zápis indexů $_{|\iota\kappa|}$ označuje sčítání přes $\iota < \kappa$ a je ekvivalentní dělení součtu permutací jejich počtu.

Vzhledem k invarianci těchto veličin tedy můžeme vypočítat vlastní hodnoty e a ib tenzoru F ze vztahů

$$e^2 = \frac{1}{2}\sqrt{(B^2 - E^2)^2 + 4(BC)^2} - \frac{1}{2}(B^2 - E^2) \tag{1.47}$$

a

$$b^2 = \frac{1}{2}\sqrt{(B^2 - E^2)^2 + 4(BC)^2} + \frac{1}{2}(B^2 - E^2) \,. \tag{1.48}$$

1.1.4 Rovnice elektromagnetického pole

Volné pole

Vedle algebraických vlastností svazujících různé složky elektromagnetického pole v téže události (viz kap. 1.1.2 a 1.1.3) platí také pohybové rovnice svazující jeho složky v sousedních událostech. Zatímco algebraické vlastnosti jsou geometricky charakterizovány přiřazením elmg. poli jisté 2-formy F, druhé lze odvodit opět z variačního principu (1.1) pokud zvolíme v (1.2) správný tvar lagrangeovské hustoty $\mathcal{L}_\mathrm{f}$ pole. Pro elektromagnetické pole má platit princip superpozice, takže musí být popsáno lineárními parciálními diferenciálními rovnicemi. Lagrangián tedy musí být kvadratický v proměnných pole (viz [12]). Volbou

$$\mathcal{L}_\mathrm{f} = -\frac{1}{16\pi c} F^{\iota\kappa} F_{\iota\kappa} \tag{1.49}$$

je vzhledem k (1.44) zaručena lorentzovská invariantnost lagrangiánu a tedy i pohybových rovnic.

Z antisymetrie F zaručené jeho volbou (1.18) nebo (1.19) jako vnější diferenciál vektorového potenciálu A vyplývá, že vnější diferenciál F je nulový,

$$dF = 0 \,. \tag{1.50}$$

Tuto tzv. první sérii Maxwellových rovnic lze složkově zapsat

$$F_{\iota\kappa,\lambda} + F_{\kappa\lambda,\iota} + F_{\lambda\iota,\kappa} = 0 \,. \tag{1.51}$$

Odtud ve "3+1"-formalismu dostáváme pro všechny tři indexy prostorové ($\iota\kappa\lambda = ikl$)

$$(\vec{\nabla}.\vec{B}) = 0 \,, \tag{1.52}$$

a pro jeden časový ($\iota = 0$)

$$\partial_0 \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \,. \tag{1.53}$$

4-potenciál A je podmínkou (1.19) určen až na kalibrační invarianci $A \to A'$

$$A' = A + df \,, \tag{1.54}$$

kde f je libovolná skalární funkce v časoprostoru. Lze volit např. tzv. Lorentzovu kalibraci, ve které

$$A^\iota{}_{,\iota} = 0 \,, \tag{1.55}$$

jestliže za f vezmeme řešení rovnice

$$\Box f \equiv \delta df = \delta A' \,, \tag{1.56}$$

kde A' je výchozí 4-potenciál.

Variováním akce volného pole

$$0 = \delta S_{\mathrm{f}} = \delta \int \mathcal{L}_{\mathrm{f}} d^4x = -\frac{1}{8\pi c}\delta \int A^{\iota,\kappa}(A_{\iota,\kappa} - A_{\kappa,\iota})d^4x \tag{1.57}$$

vůči A získáme tzv. druhou sérii bezezdrojových Maxwellových rovnic ve složkovém tvaru

$$A^{\iota,\kappa}{}_{,\kappa} - A^{\kappa,\iota}{}_{,\kappa} = F^{\iota\kappa}{}_{,\kappa} = 0 \ . \tag{1.58}$$

To znamená, že je současně nulový i vnitřní diferenciál

$$\delta F \equiv {}^{*}d^{*}F = 0 \ . \tag{1.59}$$

Ve "3+1"-formalismu pro časový volný index ($\iota = 0$) má tato rovnice tvar

$$(\vec{\nabla}.\vec{E}) = 0 \ , \tag{1.60}$$

a pro prostový ($\iota = i$)

$$\partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \ . \tag{1.61}$$

Zdrojový člen

V přítomnosti elektromagnetických nábojů budou rovnice pole ovlivněny těmito náboji jako zdroji. Vzájemné působení nábojů a pole je dáno interakčním lagrangiánem L_{i} ve výrazu (1.2). Tento příspěvek k lagrangiánu částic můžeme považovat současně za příspěvek k lagrangeovské hustotě pole, který má charakter distribuce, tj. δ-funkce s nosičem ve světočáře částice. Nahradíme-li integraci podél světočáry $\vec{x}_Q(\tau)$ nábojů integrací přes celý prostoročas

$$d\tau = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_Q)\frac{d^4x}{U^0} \ , \tag{1.62}$$

pak variováním celkové akce částic a pole

$$S = -m_0 c \int \sqrt{-U^2} d\tau - \frac{Q}{c}\int \langle A.U\rangle d\tau - \frac{1}{16\pi c}\int F^{\iota\kappa}F_{\iota\kappa}d^4x \tag{1.63}$$

podle A dostaneme jako pohybové rovnice (B.23) druhou sérii Maxwellových rovnic se zdroji ve tvaru

$$\delta F = -4\pi J \ , \tag{1.64}$$

tj. ve složkách

$$F^{\iota\kappa}{}_{,\kappa} = -4\pi J^{\iota} \ , \tag{1.65}$$

resp. ve "3+1"-formalismu

$$(\vec{\nabla}.\vec{E}) = 4\pi\rho \tag{1.66}$$

$$\partial_0 \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{j} \ , \tag{1.67}$$

kde tzv. 4-proud $J = (\rho, \vec{j})$ pro nabité částice je

$$J^{\iota} = \frac{Q}{c\gamma}U^{\iota}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_Q) \tag{1.68}$$

(obecně však může být dán i spojitou hustotou prostoročasového 4-vektoru).

1.1.5 Pohyb v homogenním elektromagnetickém poli

V homogenním časově neměnném poli jsou (v přiblížení plochého prostoročasu) pohybové rovnice (1.17) nabitých částic homogenní lineární diferenciální prvního řádu pro U a jejich řešení lze zapsat ve tvaru

$$U^\iota(\tau) = \exp\left(\frac{Q}{cm_0} F^\iota{}_\kappa \tau\right) [U^\kappa]_{\tau=0} \tag{1.69}$$

(viz pozn. 2 na str. 5). Toto řešení lze v soustavě, ve které F má tvar (1.41) a počáteční (ve vlastním čase $\tau = 0$) rychlost částice má nenulovou pouze složku v_0 příčnou ke směru E, jednoduše explicitně zapsat ve tvaru

$$U^\iota = \gamma_0(c\cosh\alpha\tau, c\sinh\alpha\tau, v_0\cos\omega\tau, v_0\sin\omega\tau)\ , \tag{1.70}$$

kde

$$\alpha \equiv \frac{a}{c} = \frac{Qe}{cm_0} \quad \text{a} \quad \omega = \frac{Qb}{cm_0}\ . \tag{1.71}$$

Integrací odtud dostaneme světočáru částice

$$x^\iota(\tau) = \gamma_0(\frac{c}{\alpha}\sinh\alpha\tau, \frac{c}{\alpha}\cosh\alpha\tau, \frac{v_0}{\omega}\sin\omega\tau, -\frac{v_0}{\omega}\cos\omega\tau)\ . \tag{1.72}$$

Výsledný pohyb je tedy složením rovnoměrně zrychleného pohybu způsobeného elektrickou složkou pole (se zrychlením a v jejím směru) a rovnoměrného kruhového pohybu (v kolmém směru, s kruhovou frekvencí ω Larmorovým poloměrem gyrace $r = v_0/\omega$) způsobeného magnetickou složkou pole.

1.1.6 Pomalu proměnné pole

Díky periodičnosti pohybu náboje ve směrech kolmých na homogenní magnetické pole lze v případě slabé odchylky od homogenity užít k řešení pohybových rovnic (1.17) přiblížení adiabatického invariantu (viz [11]). Jestliže totiž jednorozměrný pohyb ve zobecněných souřadnicích q a hybnosti p je určený hamiltoniánem $H = H(q, p; b)$ závislým na parametru b, pak po vyloučení času ($p = p(t(q))$) z řešení dostáváme z výrazu pro energii

$$E = H(q, p(q; E, b); b) \tag{1.73}$$

invariant pohybu a jeho derivováním podle b a E

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial b} \tag{1.74}$$

$$1 = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial E}\ . \tag{1.75}$$

Jestliže je tento pohyb pro konstantní b periodický, tj. $\exists T = T(E, b)$ tak, že $q(t+T) = q(t)$, pak při pomalé změně parametru $b = b(t)$ se pomalu mění energie pohybu tak, že pro změnu její hodnoty vystředované přes jednu periodu platí

$$\langle\dot{E}\rangle = \dot{b}\langle\frac{\partial H}{\partial b}\rangle = \dot{b}\frac{\oint \frac{\partial H}{\partial b}dt}{\oint dt} = \dot{b}\frac{\oint\left(\frac{\partial H}{\partial b}/\frac{\partial H}{\partial p}\right)dq}{\oint\left(1/\frac{\partial H}{\partial p}\right)dq} = -\dot{b}\frac{\oint\frac{\partial p}{\partial b}dq}{\oint\frac{\partial p}{\partial E}dq}\ . \tag{1.76}$$

Proto platí

$$0 = \oint\left(\langle\dot{E}\rangle\frac{\partial p}{\partial E} + \dot{b}\frac{\partial p}{\partial b}\right)dq = \frac{d}{dt}\oint p\,dq = \frac{d}{dt}I\ , \tag{1.77}$$

tj. veličina $I \equiv \oint p\, dq$ je (adiabatickým) invariantem pohybu.

V případě pohybu nabité částice v elektromagnetickém poli, které lze alespoň lokálně ve vhodně zvolené vztažné soustavě zapsat ve tvaru (1.41) a jeho 4-potenciál tedy např.

$$A = ex^0\, dx + \frac{1}{2} b(z\, dy - y\, dz) = ex^0\, dx + \frac{1}{2} br^2 d\varphi\ , \tag{1.78}$$

kde r, φ jsou polární souřadnice v rovině y, z kolmé na směr x elektrického i magnetického pole, je analogicky (1.15) zobecněná hybnost odpovídající periodické souřadnici φ

$$p_\varphi = \frac{\partial}{\partial \dot\varphi} \left[-m_0 c \sqrt{... - r^2 \dot\varphi^2} - \frac{Q}{c} \langle ... + \frac{1}{2} br^2 \dot\varphi \rangle \right] = m_0 \gamma r^2 \dot\varphi - \frac{Q}{2c} br^2\ . \tag{1.79}$$

Pro pohyb popsaný lokálně řešením (1.70) je úhlová rychlost gyračního pohybu v souřadnicovém čase $\gamma \dot\varphi = \omega$ a podle (1.71) je první člen na pravé straně dvojnásobkem druhého. Vyintegrováním p_φ přes φ od 0 do 2π tedy dostáváme adiabatický invariant ve tvaru

$$I = \frac{\pi Q}{c} br^2\ . \tag{1.80}$$

Tato hodnota je úměrná magnetickému momentu $\mu = Qr^2\omega/2$ proudové smyčky tvořené kroužívým pohybem náboje. Jestliže se tedy nabitá částice postupně dostane do oblasti s jinou intenzitou magnetického pole, pak se Larmorův poloměr r její gyrace změní tak, že tok magnetického pole b gyrační kružnicí zůstává stejný. Úměrně intenzitě magnetického pole b se mění také kruhová frekvence ω gyrace i kinetická energie $W_\perp = m_0 v_0^2/2$ odpovídající gyračnímu pohybu. Pokud je změna b způsobená časovým nárůstem, pak je podle Maxwellovy rovnice (1.53) provázena rotací elektrického pole, které koná práci při kruhovém pohybu náboje a tím mu kinetickou energii dodává. Jestliže je magnetické pole statické a elektrické pole nulové, pak Lorentzova síla, která je vždy kolmá na směr pohybu náboje, práci nekoná a celková kinetická energie částice se zachovává. Vzhledem k nulové divergenci magnetického pole podle (1.52) ovšem musí být jeho podélný nárůst provázen konvergencí sousedních siločar, takže Lorentzova síla působící na náboj kroužící kolem středu gyrace má také složku podélnou ve směru jeho postupu, takže snižuje podélnou složku kinetické energie tak, že celková kinetická energie se zachovává. V místě, kde intenzita magnetického pole dosáhne hodnoty odpovídající celkové kinetické energie částice vzniká tzv. magnetické zrcadlo, které odráží postup středu gyrace zpět.

Dodatek A

Diferenciální geometrie

A.1 Tenzorová algebra

V této kapitole budou shrnuty základní algebraické vlastnosti vektorů, tenzorů a dalších geometrických objektů, tj. vlastnosti vztahující se k chování a vztahům jimi popsaných fyzikálních veličin v jednotlivých bodech příslušného fyzikálního prostoru (např. prostoročasu nebo fázového prostoru), nikoliv však k jejich prostorovým změnám.

A.1.1 Vektory a kovektory, tenzorový součin a úžení

Definice 1 Vektorový prostor *nad tělesem*[1] *skalárů (zpravidla reálných čísel $\mathcal{R}$, nebo komplexních čísel) je množina T vektorů, na které je dána operace sčítání s vlastnostmi:*
a) asociativnost, $\forall X, Y, Z \in T$: $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
b) komutativnost: $X + Y = Y + X$
c) $\exists 0 \in T$ *(nulový vektor):* $X + 0 = X$ $(\forall X \in T)$
d) $\forall X \in T,\ \exists - X \in T$ *(opačný vektor):* $-X + X = 0$,
a dále je na T dáno násobení skalárem s vlatnostmi:
e) $\forall X \in T,\ a, b \in \mathcal{R}$: $a(bX) = (ab)X$
f) $1.X = X$
g) distributivnost vůči sčítání vektorů: $a(X + Y) = aX + aY$
h) distributivnost vůči sčítání skalárů: $(a + b)X = aX + bX$.

Vektory $X_i|_{i=1}^n$ *jsou* **lineárně závislé**, *jestliže* $\exists a_i|_{i=1}^n \in \mathcal{R}$: $\sum a_i^2 \neq 0,\ \sum a_i X_i = 0$.

*T je n-***dimenzionální**, *jestliže v něm existuje tzv. báze n lineárně nezávislých vektorů a každá $n+1$-tice vektorů je lineárně závislá.*

Duální vektorový prostor T^* *je prostor lineárních zobrazení*

$$\xi : T \to \mathcal{R}\ .$$

$\{e_k|_{k=1}^n \in T\}$ *a* $\{\theta^k|_{k=1}^n \in T^*\} = \{e_k|_{k=1}^n\}^*$ *jsou vzájemně* **duální báze** *T a T^*, jestliže*

$$\theta^i(e_j) = \delta^i_j\ . \tag{A.1}$$

[1] Těleso je asociativní okruh s jednotkou ($a.1 = 1.a = a$), ve kterém pro každý nenulový prvek a existuje inverzní prvek a^{-1} ($a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$). Okruh je komutativní grupa (vůči sčítání) s oboustranně distributivním násobením.

Zřejmě T^* k n-dimenzionálnímu T je rovněž n-dimenzionální. Ztotožňujeme $T^{**} \equiv T$ a píšeme

$$\xi(X) = \langle \xi X \rangle = X^i \xi_i \ ,$$

kde $X = X^i e_i \in T$ a $\xi = \xi_i \theta^i \in T^*$ (přes shodné horní a dolní indexy se sčítá).

Definice 2 *Prostor* T^p_q **tenzorů** *typu* (p, q) *je prostor multilineárních zobrazení*

$$A : \underbrace{T^* \times ... \times T^*}_{p} \times \underbrace{T \times ... \times T}_{q} \to \mathcal{R} \ .$$

Na množině tenzorů všech typů je definována operace **tenzorový součin**

$$\otimes : T^p_q \times T^r_s \to T^{p+r}_{q+s}$$

tak, že

$$(A \otimes B)(\underbrace{\xi, ...}_{p}, \underbrace{\eta, ...}_{r}, \underbrace{X, ...}_{q}, \underbrace{Y, ...}_{s}) = A(\underbrace{\xi, ...}_{p}, \underbrace{X, ...}_{q}).B(\underbrace{\eta, ...}_{r}, \underbrace{Y, ...}_{s}) \tag{A.2}$$

a zobrazení **úžení** *v* i*-tém a* j*-tém indexu*

$$\langle \quad \rangle : T^p_q \to T^{p-1}_{q-1}$$

tak, že

$$\langle A \rangle(\underbrace{\xi, ...}_{i-1}, \underbrace{\eta, ...}_{p-i}, \underbrace{X, ...}_{j-1}, \underbrace{Y, ...}_{q-j}) = \sum_{k=1}^{n} A(\underbrace{\xi, ...}_{i-1}, \theta^k, \underbrace{\eta, ...}_{p-i}, \underbrace{X, ...}_{j-1}, e_k, \underbrace{Y, ...}_{q-j}) \ , \tag{A.3}$$

kde $\{e_k|^n_{k=1}\} = \{\theta^k|^n_{k=1}\}^*$ *jsou libovolné duální báze.*

Zřejmě platí $\dim(T^p_q) = n^{p+q}$. Tenzorový součin tvoří algebru v prostoru direktních součtů $\oplus^\infty_{p,q=0} T^p_q$. Každá (nikoliv nutně duální) dvojice bází na T a T^* indukuje bázi na T^p_q (tvořenou tenzorovými součiny jejich prvků), v níž lze tenzor $A \in T^p_q$ vyjádřit složkově

$$A = A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \otimes \theta^{j_q} \ .$$

Lze ověřit, že definice úžení je nezávislá na volbě dvojice duálních bází.

A.1.2 Vnější algebra

Definice 3 *Prostory* p**-vektorů** $\wedge^p T \subset T^p_0$ *resp.* p**-forem** $\wedge^p T^* \subset T^0_p$ $(p \leq n)$ *jsou podprostory tenzorů antisymetrických ve všech argumentech.* **Vnější součin** *je zobrazení*

$$\wedge : \wedge^p T \times \wedge^q T \to \wedge^{p+q} T$$

takové, že

$$(X \wedge Y)(\xi_1, ..., \xi_{p+q}) = \sum_\sigma \frac{(-1)^{|\sigma|}}{p!q!} (X \otimes Y)(\xi_{\sigma(1)}, ..., \xi_{\sigma(p+q)}) \ , \tag{A.4}$$

kde $|\sigma|$ *je parita permutace* σ *čísel* $1, ..., p+q$. **Vnitřní součin** p*-formy* ξ *a* q*-vektoru* X *je* $|p-q|$*-forma resp. vektor vzniklý zúžením jejich tenzorového součinu v prvních* $\min(p, q)$ *indexech,*

$$\langle \xi X \rangle = \langle \xi \otimes X \rangle \ .$$

Zřejmě platí že $\dim(\wedge^p T) = \binom{n}{p}$, $\wedge^0 T = \mathcal{R}$, $\wedge^1 T = T^1_0 = T$, $\wedge^1 T^* = T^0_1 = T^*$. Vnější součin je antisymetrický

$$(X \wedge Y) = (-1)^{qp}(Y \wedge X) \ , \tag{A.5}$$

lineární a asociativní. Tvoří tedy (tzv. Grassmanovu) algebru v 2^n-dimenzionálním prostoru direktních součtů $\oplus^n_{p=0}(\wedge^p T)$.

Definice 4 *Zvolíme-li na n-dimenzionálním prostoru T* **jednotkovou n-formu** *$\epsilon \in \wedge^n T^*$, pak tato definuje* **duální zobrazení**

$$* : \wedge^p T \leftrightarrow \wedge^{n-p} T^*$$

tak, že pro $A \in \wedge^p T$, $\omega \in \wedge^p T^*$

$$*A = \frac{1}{p!}\langle \epsilon A \rangle \ . \tag{A.6}$$

$$*\omega = \frac{1}{p!}\langle \omega E \rangle \ , \tag{A.7}$$

kde $E \in \wedge^n T$ je **jednotkový n-vektor***, pro který*

$$*E = 1 \ . \tag{A.8}$$

Platí

$$* * \omega = (-1)^{p(n-p)}\omega \ . \tag{A.9}$$

Vnější součin p-vektorů je třeba odlišovat od vektorového součinu vektorů, který je také antisymetrická a bilineární operace (někdy také označovaná symbolem $\wedge$), ale definovaná pouze na 3-dimenzionálním vektorovém prostoru. V takovém prostoru s metrikou lze vektorový součin Z vektorů X, Y lze konstruovat zvednutím indexů jejich kontrakce s jednotkovou 3-formou, $Z \equiv X \times Y = g^{-1}(\langle \epsilon, X \otimes Y \rangle)$.

A.1.3 Skalární součin

Definice 5 *Symetrický, tzv.* **kovariantní metrický tenzor** *$g \in T^0_2$, pro jehož složky g_{ij} v libovolné bázi T^* je*

$$\det(g_{ij}) \neq 0 \ ,$$

definuje na T **skalární součin**

$$(\quad . \quad) : T \times T \to \mathcal{F}$$

tak, že pro $\forall X, Y \in T$

$$(X.Y) = (Y.X) = g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j \tag{A.10}$$

(kde X^i a Y^j jsou složky v duální bázi), dále definuje **snižování indexů***, tj. zobrazení*

$$g : T \to T^*$$

tak, že

$$\langle g(X) Y \rangle = g(X, Y) \ . \tag{A.11}$$

*g dále indukuje k němu inverzní zobrazení (***zvyšování indexů***)*

$$g^{-1} : T^* \to T \ ,$$

které definuje skalární součin na T^*

$$(\xi.\eta) = (\eta.\xi) = g(g^{-1}(\xi), g^{-1}(\eta)) = g^{ij}\xi_i\eta_j \ , \tag{A.12}$$

kde g^{ij} jsou složky **kontravariantního metrického tenzoru** $g^{-1} \in T_0^2$. *Báze $\{e_i\}$ je* **ortogonální**, *jestliže*

$$(e_i.e_j) = 0 \qquad \text{pro} \qquad i \neq j \ ,$$

a **ortonormální**, *jestliže*

$$(e_i.e_j) = \pm\delta_{ij} \ .$$

A.2 Tenzorová analýza

V této kapitole budou shrnuty základní vlastnosti tečných vektorů, vektorových a tenzorových polí a jejich derivací na zakřivených prostorech (varietách) jako je např. obecně relativistický prostoročas.

A.2.1 Tečné vektory a n-formy na varietách

Definice 6 *Topologický prostor M je* **diferencovatelná varieta** *dimenze n, jestliže je dán tzv. úplný atlas souřadnicových map, tj. lokálně definovaných zobrazení*

$$\mu, \nu : M \rightarrow \mathcal{R}^n$$

pokrývajících celé M takových, že v průniku jejich definičních oborů je $\mu \circ \nu^{-1}$ nekonečně diferencovatelné s nenulovým jakobiánem.

Definice 7 *Nechť M je diferencovatelná varieta a $\mathcal{F}$ prostor reálných funcí ("skalárů") na M.* **Tečným vektorem** *v bodě $A \in M$ nazveme zobrazení*

$$X_A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$$

které je lineární, tj. splňuje

$$X_A(f + c.g) = X_A(f) + c.X_A(g) \tag{A.13}$$

pro libovolná $f, g \in \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{R}$, pro které platí

$$X_A(f.g) = X_A(f).g(A) + f(A).X_A(g) \ . \tag{A.14}$$

Množina T_A všech tečných vektorů v pevném bodě A se nazývá **fibre**, *a jejich sjednocení $B = \cup_{A\in M} T_A$* **tečný bundle**.

Vlastnost (A.13) určuje, že X_A jsou lineární zobrazení na (∞-dimenzionálním) vektorovém prostoru $\mathcal{F}$. Tečný fibre tedy tvoří opět lineární vektorový prostor vůči operacím sčítání a násobení číslem definovaným vztahem

$$(X_A + cY_A)(f) = X_A(f) + cY_A(f) \ .$$

Vlastnost (A.14) určuje, že X_A se chová jako derivace (tedy např. $X_A(f^n) = nf^{n-1}X_A(f)$), takže tečný vektor je diferenciální operátor. Lze ukázat, že souřadnicové vyjádření X_A v mapě μ ($\mu(A) = (x_A^1, ..., x_A^n)$) má tvar

$$X_A(f) = X_A^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \mu^{-1})|_{\mu(A)} \ . \tag{A.15}$$

Fibre T_A je tedy n-dimenzionální vektorový prostor a $\{\frac{\partial}{\partial x_A^i}|_{i=1}^n\}$ jeho souřadnicová báze indukovaná mapou μ. Tečný bundle B tvoří $2n$-dimenzionální varietu, jejíž atlas je tvořen všemi mapami slučitelnými s mapou, která $\forall X_A \in T_A$ přiřadí $(x_A^1, ..., x_A^n, X_A^1, ..., X_A^n) \in \mathcal{R}^{2n}$.

Definice 7 odpovídá intuitivní představě vektoru X_A jako šipky z bodu $A \in M$ do (infinitezimálně vzdáleného) bodu $A + \Delta$ tak, že pro $\forall f \in \mathcal{F}$ (a speciálně i když za f zvolíme složku souřadnicové mapy) $X_A(f)$ udává lineární člen Taylorova rozvoje

$$f(A + \Delta) \simeq f(A) + X_A(f) \ .$$

Definice 8 *Nechť M je diferencovatelná varieta a $\mathcal{F}$ prostor reálných funcí ("skalárů") na M. Tečný vektorový prostor T na M je prostor* **tečných vektorů** *X (neboli "kontravariantních vektorových polí") na M, tj. prostor zobrazení*

$$X : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

která jsou lineární a diferenciální, tj. splňují

$$X(f + c.g) = X(f) + c.X(g) \tag{A.16}$$

$$X(f.g) = X(f).g + f.X(g) \tag{A.17}$$

pro libovolná $f, g \in \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{R}$.

Vektorové pole na M tvoří n-dim. podvarietu tečného bundlu.

Definiční obor $\{A \in M\}$ vektorového pole lze omezit na libovolné $N \subset M$ ($X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(N)$). Je-li N podvarieta M, pak $T(N)$ je podprostor $T(M)$ vektorů tečných k N. Zřejmě totiž každá funkce na M je současně funkcí na N, proto tečný vektor na N je vektorem i na M, definovaným pouze v bodech N a 'necitlivým' k rozdílnému chování funkcí mimo N. Každá souřadnicová mapa $\mu(A) = \{x^i(A)|_{i=1}^n\}$ indukuje ve svém definičním oboru souřadnicovou bázi $\{\partial_{x^i}|_{i=1}^n\}$ (rozumí se $\partial_{x^i} f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \mu^{-1})$). Při přechodu k souřadnicím $\{y^i\}$ se prvky souřadnicové báze transformují

$$\partial_{x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\partial_{y^j} \ . \tag{A.18}$$

Tvrzení 1 *Komutátor*

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \tag{A.19}$$

vektorů X, Y je vektor.

Pro důkaz je klíčová vlastnost komutátoru daná rovnicí (A.15), která platí, protože smíšené členy typu $X(f).Y(g)$ se vyruší. Prvky souřadnicové báze komutují (jsou 'holonomní'). V obecné bázi $\{e_i\} = \{\theta^i\}^*$

$$[X, Y] = (X(Y^k) - Y(X^k) + X^i Y^j c_{ij}^k)e_k \ , \tag{A.20}$$

kde

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k = \theta^k([e_i, e_j]) \tag{A.21}$$

jsou tzv. **koeficienty struktury** dané báze.

Definice 9 *Kotečný vektorový prostor* T^* *je duální vektorový prostor* **1–forem** *neboli "kovariantních vektorových polí", tj. prostor zobrazení*

$$\xi : T \to \mathcal{F} \ .$$

Analogicky prostor T^p_q **tenzorů** *typu* (p, q) *je prostor multilineárních zobrazení*

$$A : \underbrace{T^* \times ... \times T^*}_{p} \times \underbrace{T \times ... \times T}_{q} \to \mathcal{F}$$

a prostory p**-vektorů** *resp.* p**-forem** *jsou antisymetrické podprostory* T^p_0 *resp.* T^0_p*. V prostorech všech tenzorů resp. p-vektorů a p-forem jsou definovány tenzorový součin a úžení, resp. vnější a vnitřní součin analogicky definicím 2 a 3.*

Tenzor typu T^0_p na M je současně tenzorem téhož typu na podvarietě $N \subset M$, spec. p-forma na M je p-formou na N (nenulovou pouze pro $p \leq \dim N$).

Definice 10 **Vnější diferenciál** *je lineární zobrazení*

$$d : \wedge^p T^* \to \wedge^{p+1} T^*$$

takové, že

$$df(X) = X(f) \tag{A.22}$$

pro $f \in \wedge^0 T^* = \mathcal{F}$*,*

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta) \tag{A.23}$$

pro $\omega \in \wedge^p T^*$ *a*

$$dd\omega = 0 \ . \tag{A.24}$$

Pro každou souřadnicovou mapu $\{x^i|_{i=1}^n\}$ tvoří $\{dx^i|_{i=1}^n\}$ bázi T^*, která se transformuje

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \tag{A.25}$$

a je duální k bázi $\{\partial_{x^i}|_{i=1}^n\}$

Tvrzení 2 *Pro 1-formu* ω *je*

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \ . \tag{A.26}$$

Důkaz: V libovolné souřadnicové bázi platí podle (A.18)

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) &= X(\omega_j Y^j) - Y(\omega_j X^j) - \omega_j (X(Y^j) - Y(X^j)) = \\ &= X(\omega_j) Y^j - Y(\omega_j) X^j = (d\omega_j \wedge dx^j)(X, Y) = d\omega(X, Y) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Důsledek: V duální bázi lze koeficienty struktury vyjádřit alternativně k (A.21) jako

$$c^k_{ij} = -d\theta^k(e_i, e_j) \ . \tag{A.27}$$

Definice 11 *$\omega \in \wedge^p T^*$ definuje* **míru** *(integrál) na p-dimenzionální podvarietě $N \subset M$*

$$\int \omega = \int \omega(\partial_{x^1}, ..., \partial_{x^p}) dx^1 ... dx^p \ , \tag{A.28}$$

kde $\{x^i|_{i=1}^p\}$ je libovolná souřadnicová mapa na N.

Tvrzení 3 Zobecněná Stokesova věta *Pro uzavřenou p-dimenzionální hranici ∂V $(p+1)$-dimenzionální oblasti V platí*

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega \ . \tag{A.29}$$

Definice 12 Vnitřní derivace *je zobrazení $\delta : T \to \mathcal{F}$ takové, že $\forall f \in \mathcal{F}$ a $X, Y \in T$ platí*

$$\delta(fX + Y) = X(f) + f\delta X + \delta Y \ . \tag{A.30}$$

Vnitřní derivace vektorového pole X je tedy ve zvolené bázi v n-dimenzionálním prostoru dána n-ticí funkcí (derivacemi jednotlivých prvků báze),

$$\delta X = e_i(X^i) + X^i \delta e_i \ . \tag{A.31}$$

Každá n-forma Ω na n-dimensionální varietě určuje vnitřní derivaci δ vektoru X vztahem

$$d\langle \Omega X \rangle = (\delta X)\Omega \ . \tag{A.32}$$

V souřadnicové bázi, ve které $\Omega = \Omega_0 dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ a $X = X^i \partial_i$, totiž

$$d\langle \Omega X \rangle = \partial_i(\Omega_0 X^i) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = (\partial_i(X^i) + X^i \partial_i(\ln \Omega_0))\Omega_0 dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \ , \tag{A.33}$$

což odpovídá vztahu (A.31), jestliže vnitřní derivace prvků báze ∂_i zavedeme vztahem

$$\delta \partial_i = \partial_i(\ln \Omega_0) \ . \tag{A.34}$$

Naopak, obecnou vnitřní derivaci δ lze zapsat ve tvaru (A.33), jestliže lze nalézt funkci Ω_0 tak, aby splňovala rovnice (A.34), tj. jsou-li splněny podmínky integrability těchto rovnic

$$\partial_i(\delta \partial_j) = \partial_j(\delta \partial_i) \ , \tag{A.35}$$

které mají v obecné bázi tvar

$$e_i(\delta e_j) - e_j(\delta e_i) = \delta[e_i, e_j] \ . \tag{A.36}$$

Důsledek: Pro vnitřní derivaci δ splňující tyto podmínky platí podle (A.32) a (A.29)

$$\int_V (\delta X)\Omega = \int_{\partial V} \langle \Omega X \rangle \ . \tag{A.37}$$

A.2.2 Afinní konexe

Definice 13 **Afinní konexí** *nazveme zobrazení*

$$\nabla : T \times T \to T$$

takové, že $\forall X, Y, Z \in T, f \in \mathcal{F}$

$$\nabla_{f.Y+Z} X = f.\nabla_Y X + \nabla_Z X \tag{A.38}$$

$$\nabla_X (f.Y + Z) = X(f).Y + f.\nabla_X Y + \nabla_X Z\ . \tag{A.39}$$

Afinní konexe $\nabla_X Y$ se tedy chová tenzorově vůči indexu X a diferenciálně vůči argumentu Y, tj. popisuje změnu pole Y podél pole X. V libovolné duální bázi $\{e_i\} = \{\theta^i\}^*$

$$\nabla_X Y = \left(X(Y^k) + Y^i \omega^k{}_i(X) \right) .e_k\ , \tag{A.40}$$

kde

$$\omega^k{}_i = \omega^k{}_{ij} \theta^j = \theta^k (\nabla_{e_j} e_i).\theta^j \tag{A.41}$$

jsou **1-formy konexe** v příslušné bázi (jejich složky $\omega^k{}_{ij}$ jsou tzv. **Ricciho rotační koeficienty**).

Požadavkem

$$X(\langle \xi Y \rangle) = \langle \nabla_X \xi Y \rangle + \langle \xi \nabla_X Y \rangle\ , \tag{A.42}$$

resp. analogickým požadavkem na rozderivování tenzorového součinu a jeho zúžení, je definována afinní konexe také na 1-formách

$$\nabla_X \xi = \left(X(\xi_k) - \xi_i \omega^i{}_k(X) \right) .\theta^k\ , \tag{A.43}$$

resp. na tenzorech T^p_q jako zobrazení

$$\nabla : T \times T^p_q \to T^p_q$$

takové, že $\forall A \in T^p_q, X, Y, ... \in T, \xi, ... \in T^*$

$$X(A(\xi, ..., Y, ...)) = \nabla_X A(\xi, ..., Y, ...) + A(\nabla_X \xi, ..., Y, ...) + ... + A(\xi, ..., \nabla_X Y, ...) + ...\ . \tag{A.44}$$

Definice 14 **Kovariantní derivací** *(odpovídající afinní konexi* ∇*) nazveme zobrazení*

$$D : T^p_q \to T^p_{q+1}$$

takové, že $\forall A \in T^p_q, X \in T$

$$\langle DA \otimes X \rangle = \nabla_X A\ . \tag{A.45}$$

V libovolné duální bázi $\{e_i\} = \{\theta^i\}^*$ značíme

$$DA = \nabla_{e_k} A \otimes \theta^k = A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q;k} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \otimes \theta^{j_q} \otimes \theta^k\ , \tag{A.46}$$

a píšeme

$$A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q;k} = A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q,k} + A^{i,...,i_p}_{j_1,...,j_q} \omega^{i_1}{}_{ik} + ... - A^{i_1,...,i_p}_{j,...,j_q} \omega^j{}_{j_1 k} - ...\ , \tag{A.47}$$

kde

$$A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q,k} = e_k (A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q})\ .$$

Definice 15 **Divergencí** *vektorového pole X (odpovídající afinní konexi ∇) nazveme skalár, který je zúžením kovariantní derivace X, tj.*

$$\mathrm{div} X = \langle DX \rangle = X^k{}_{,k} + X^i \omega^k{}_{ik} \; . \tag{A.48}$$

Porovnáním tohoto vztahu s (A.31) je zřejmé, že divergence je vnitřní derivací a její působení na vektory báze je dáno zúžením Ricciho rotačních koeficientů,

$$\delta e_i = \omega^k{}_{ik} \; . \tag{A.49}$$

Matice 1-forem konexe (viz (A.41)) se nechová tenzorově v indexech k a i při přechodu k jiné bázi, avšak lze z ní tenzory vytvořit.

Definice 16 *Jestliže ∇ je afinní konexe, pak* **tenzorem torze** *(určeným touto konexí) nazveme tenzor $Q \in (T \otimes \wedge^2 T^*) \subset T^1_2$ takový, že $\forall X, Y \in T$*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = \langle Q, X \otimes Y \rangle \tag{A.50}$$

a **tenzorem křivosti** *nazveme tenzor $R \in (T \otimes T^* \otimes \wedge^2 T^*) \subset T^1_3$ takový, že $\forall X, Y, Z \in T$*

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = \langle R, Z \otimes X \otimes Y \rangle \; . \tag{A.51}$$

Oba tyto tenzory jsou antisymetrické v posledních dvou argumentech (X a Y), proto je lze ve zvolené bázi reprezentovat 2-formami torze τ^k resp. křivosti $\Omega^k{}_i$ tak, že

$$Q = e_k \otimes \tau^k \; ,$$

$$R = e_k \otimes \theta^i \otimes \Omega^k{}_i \; .$$

Z porovnání (A.40) a (A.20) je zřejmé, že

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = \left(Y^i \omega^k{}_i(X) - X^i \omega^k{}_i(Y) - X^i Y^j c^k_{ij} \right) . e_k \; , \tag{A.52}$$

takže

$$Q^k{}_{ij} = \omega^k{}_{ji} - \omega^k{}_{ij} - c^k_{ij} \; . \tag{A.53}$$

Tvrzení 4 **Cartanovy rovnice struktury** *první*

$$\tau^k = d\theta^k + \omega^k{}_i \wedge \theta^i \tag{A.54}$$

a druhé

$$\Omega^k{}_i = d\omega^k{}_i + \omega^k{}_j \wedge \omega^j{}_i \; . \tag{A.55}$$

Speciálně pro konexi bez torze je pravá strana (A.54) identicky rovna nule. Důkaz (A.54) plyne dosazením (A.27) do (A.53). Podobně (A.55) vyplývá z (A.51) dosazením (A.40) a užitím (A.26).

A.2.3 Riemannovská geometrie

Definice 17 Metrickou konexí *nazýváme afinní konexi* ∇*, která zachovává skalární součin, tj. takovou, která splňuje*

$$Z(X,Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y) \tag{A.56}$$

pro všechna X, Y, Z.

Dosazením za X, Y, Z bázových vektorů e_i, e_j, e_k dostáváme vztah

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji} \ , \tag{A.57}$$

kde 1-formy $\omega_{ij} = g_{ik}\omega^k{}_j$, nebo ve složkovém zápisu

$$e_k(g_{ij}) = \omega_{ijk} + \omega_{jik} \ . \tag{A.58}$$

Po snížení indexu k v rovnici (A.53) můžeme nalézt řešení lineární soustavy (A.53), (A.58) ve tvaru

$$\begin{aligned} \omega_{ijk} \quad = \quad & \frac{1}{2}(e_k(g_{ij}) + e_j(g_{ik}) - e_i(g_{jk}) \\ & -c_{ijk} + c_{jik} + c_{kij} \\ & -Q_{ijk} + Q_{jik} + Q_{kij} \ ) \ . \end{aligned} \tag{A.59}$$

Afinní konexe je tak jednoznačně určena požadavkem metričnosti a požadavkem vymizení torze (pro který je třetí řádek tohoto výrazu identicky rovný nule). V souřadnicové bázi, ve které vymizí i koeficienty struktury ve druhém řádku, jsou složky $\omega^i{}_{jk}$ nazývány Christoffelovy symboly (a obvykle značeny $\Gamma^i{}_{jk}$).

Tvrzení 5 *Divergence (definovaná vztahem (A.48)) odpovídající metrické konexi bez torze je vnitřní derivace určená podle vztahu (A.32) n-formou* Ω *objemu jednotkového vzhledem k metrice generující konexi*

$$(\mathrm{div}X)\Omega = d\langle X.\Omega\rangle \ . \tag{A.60}$$

Důkaz: Podle (A.59)

$$\omega^k{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{ki}g_{ik,j} = \frac{|g|,j}{2|g|} \ , \tag{A.61}$$

kde $|g|$ je determinant matice kontravariantních složek metriky (složka g^{ik} jakožto prvek matice inverzní ke kovariantním složkám metriky je totiž podíl subdeterminantu ke g_{ik} a celého determinantu $|g|$). Metrická divergence tedy splňuje podmínku (A.34) pro

$$\Omega = \sqrt{\pm|g|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \ , \tag{A.62}$$

což je n-forma objemu jednotkového vůči g, která má v libovolné ortonormální bázi jednoduchý tvar $\Omega = \theta^1 \wedge ... \wedge \theta^n$.
Důsledek (Gaussova věta): Pro riemannovskou divergenci vektorového pole X platí podle (A.37)

$$\int_V (\mathrm{div}X)\Omega = \int_{\partial V} \langle \Omega X\rangle \ . \tag{A.63}$$

Tvrzení 6 *Pro metrickou konexi splňují složky* ${R^i}_{klm} = \langle {\Omega^i}_k, e_l \otimes e_m \rangle$ *tenzoru křivosti antisymetrii*

$$R_{iklm} = -R_{kilm} \ . \tag{A.64}$$

Pro konexi bez torze splňují symetrii

$${R^i}_{(klm)} \equiv {R^i}_{klm} + {R^i}_{lmk} + {R^i}_{mkl} = 0 \ , \tag{A.65}$$

a tzv. **Bianchiho identity**

$${R^i}_{k(lm;n)} \equiv {R^i}_{klm;n} + {R^i}_{knl;m} + {R^i}_{kmn;l} = 0 \ . \tag{A.66}$$

Na n-dimensionální varietě má **Riemannův tenzor**, *tj., tenzor křivosti určený metrickou konexí bez torze* $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ *algebraicky nezávislých složek.*

Ricciho tenzor $R_{km} = {R^i}_{kim}$ *je potom symetrický.*

Tvrzení 7 *Vektor* $X = \frac{d}{dt}$ *tečný ke geodetické křivce* $x = x(t)$, *tj. přímce, která je extremálou délky* S,

$$0 = \delta S = \delta \int \sqrt{g(X,X)} dt \ , \tag{A.67}$$

je paralelně přenášen podél této křivky, tj.

$$\nabla_X X = 0 \ . \tag{A.68}$$

Důkaz: Rovnice extremály akce $S = \int L(x,\dot{x})dt$ dostaneme variováním δx dráhy x a jejích derivací $\delta \dot{x}$. K vyjádření lagrangiánu geodetiky v tomto tvaru je výhodné vzít složky ($X^i = \dot{x}^i$) tečného vektoru $X \equiv \frac{d}{dt}$ v souřadnicové basi ∂_{x^i} souřadnicového systému x^i, tj.

$$L(x,\dot{x}) = \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j} \ . \tag{A.69}$$

Dosazením tohoto lagrangiánu do standardního postupu variování

$$0 = \delta S = \int \delta L(x,\dot{x})dt = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt \ , \tag{A.70}$$

dostáváme vztah

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}} g_{ij,k}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{d}{dt}\left(\frac{g_{ik}\dot{x}^i + g_{kj}\dot{x}^j}{2\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}} \right) \ , \tag{A.71}$$

tj.,

$$0 = \frac{1}{2}(g_{ij,k} - g_{ik,j} - g_{kj,i})\dot{x}^i\dot{x}^j - g_{ik}\ddot{x}^i - g_{ik}\dot{x}^i\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}} \right) \ . \tag{A.72}$$

Tento vztah platí pro libovolnou parametrizaci dráhy $x(t)$. Jestliže navíc naložíme podmínku aby t byl afinní parametr, tj. $t = S$, pak $g(\dot{x},\dot{x}) = 1$ a poslední člen vymizí. S touto podmínkou můžeme geodetiku vypočítat i z ekvivalentního variačního principu

$$0 = \delta \int g(\dot{x},\dot{x})dt \ . \tag{A.73}$$

Vzhledem k tomu, že v souřadnicové bázi $c_{ijk} = 0$, nalézáme porovnáním prvního členu na pravé straně (A.72) s rovnicí (A.59), že odpovídá $-\omega_{kij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ metrické konexe bez torze ($Q_{ijk} = 0$) a první dva členy tak dávají levou stranu rovnice (A.68).

A.3 Lieova derivace a Killingovy vektory

Definice 18 Lieova derivace $\pounds_X$ *podle vektorového pole* X *je zobrazení* $\pounds_X : T^p_q \to T^p_q$ *takové, že*

$$\pounds_X(A \otimes B) = (\pounds_X A) \otimes B + A \otimes (\pounds_X B) \ , \tag{A.74}$$

$$\pounds_X \langle A \rangle = \langle \pounds_X A \rangle \ , \tag{A.75}$$

$$\pounds_X f = X(f) \qquad \text{pro } \forall f \in T^0_0 \ , \tag{A.76}$$

a

$$\pounds_X Y = [X, Y] \qquad \text{pro } \forall Y \in T^1_0 \ . \tag{A.77}$$

Ve srovnání s rov. (A.38) pro afinní konexi přibývá na pravé straně výrazu

$$\pounds_{fX+Z} Y = f \pounds_X Y + \pounds_Z Y - Y(f) X \tag{A.78}$$

třetí člen. Proto v obecné bázi $\{e_i\}$

$$\pounds_X Y = X^i \pounds_{e_i} Y - Y(X^i) e_i = X^i e_i(Y^k) e_k - Y^k e_k(X^i) e_i + X^i Y^k [e_i, e_k] \ , \tag{A.79}$$

a speciálně v souřadnicové bázi

$$(\pounds_X Y)^i = X^k Y^i_{\ ,k} - Y^k X^i_{\ ,k} \ . \tag{A.80}$$

Protože pro $\sigma \in T^0_1$

$$\pounds_X \langle \sigma, Y \rangle = \langle \pounds_X \sigma, Y \rangle + \langle \sigma, \pounds_X Y \rangle \ , \tag{A.81}$$

pro složky Lieovy derivace ko-vektoru platí obecně

$$\begin{aligned} (\pounds_X \sigma)_i &= \langle \pounds_X \sigma, e_i \rangle = \pounds_X \langle \sigma, e_i \rangle - \langle \sigma, \pounds_X e_i \rangle = X(\sigma_i) - \langle \sigma, [X, e_i] \rangle \\ &= X^k e_k(\sigma_i) + e_i(X^k) \sigma_k - X^k \langle \sigma, [e_k, e_i] \rangle \ . \end{aligned} \tag{A.82}$$

V souřadnicové bázi $\{dx^i\}$ tedy platí pro složky

$$(\pounds_X \sigma)_i = X^k \sigma_{i,k} + \sigma_k X^k_{\ ,i} \tag{A.83}$$

a pro derivace prvků báze

$$\pounds_X (dx^k) = X^k_{\ ,i} dx^i \ , \tag{A.84}$$

takže pro libovolný skalár f

$$\pounds_X (df) = d[X(f)] \ . \tag{A.85}$$

Podobně pro Lieovy derivace vyšších tenzorů přibývá k derivacím složek pro každý kontravariantní nebo kovariantní index člen s derivacemi X analogický druhým členům v rovnicích (A.80) nebo (A.83). Jestliže varieta je riemannovská, parciální derivace v těchto rovnicích mohou být nahrazeny i kovariantními derivacemi, protože přídavné členy s konexemi se v důsledku symetrie $\omega_{i(jk)}$ vzájemně vyruší. Speciálně pro p-formu σ platí (vzhledem k (A.84))

$$\begin{aligned} \pounds_X \sigma &= \pounds_X (\sigma_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = (X^k \sigma_{i_1 \dots i_p, k} + \sum \sigma_{i_1 \dots k \dots i_p} X^k_{\ ,i_k}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\ &= d \langle \sigma, X \rangle \ . \end{aligned} \tag{A.86}$$

Tvrzení 8 *Nechť na n-dimenzionální varietě M je dána jednoparametrická grupa pohybů (tj. zobrazení $M\times\mathcal{R}\to M$ takové, že $\forall w\in\mathcal{R}$ a $x_0\in M$ $\exists x_w=x(x_0,w)\in M$). Pak pro každou otevřenou oblast Σ_0 (která se grupovým pohybem transformuje na Σ_w) p-dimenzionální nadplochy ($p\le n$) a p-formu $\sigma\in\wedge^pT^*$ platí*

$$\frac{d}{dw}\int_{\Sigma_w}\sigma=\int_{\Sigma_w}\pounds_{\frac{d}{dw}}\sigma\ . \tag{A.87}$$

Důkaz vyplývá ze záměnnosti integrace a derivace v souřadnicovém vyjádření

$$\int_{\Sigma_w}\sigma=\int\langle\sigma,\frac{\partial}{\partial s_1}...\frac{\partial}{\partial s_p}\rangle ds_1...ds_p=\int\sigma_{i_1...i_p}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial s_1}...\frac{\partial x^{i_p}}{\partial s_p}ds_1...ds_p\ , \tag{A.88}$$

kde $\{s_1,...,s_p\}$ je libovolná parametrizace nadplochy Σ_0, přenášená grupovým pohybem i na nadplochy Σ_w ($x^i=x^i(s_1...s_p,w)|_{i=1}^n$) a $\frac{\partial x^{i_k}}{\partial s_k}$ jsou souřadnicové složky vektorů tečných k těmto plochám. Vektor tečný k pohybovým trajektoriím je v souřadnicovém vyjádření

$$X\equiv\frac{d}{dw}=\frac{\partial x^i}{\partial w}\frac{\partial}{\partial x^i}\ , \tag{A.89}$$

takže derivováním (A.88) dostáváme

$$\frac{d}{dw}\int_{\Sigma_w}\sigma=\int\left[\sigma_{i_1...i_p,k}X^k\frac{\partial x^{i_1}}{\partial s_1}...\frac{\partial x^{i_p}}{\partial s_p}+\sum_{k=1}^{p}\sigma_{i_1...i_p}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial s_1}...\frac{\partial^2x^{i_k}}{\partial s_k\partial w}...\frac{\partial x^{i_p}}{\partial s_p}\right]ds_1...ds_p\ , \tag{A.90}$$

což podle (A.86) souhlasí s pravou stranou dokazovaného vztahu (A.87).

Definice 19 *Na riemannovské varietě s metrikou g se vektor ξ nazývá* **Killingův vektor**, *jestliže*

$$\pounds_\xi g=0\ . \tag{A.91}$$

Vyjádříme-li tuto podmínku v souřadnicových složkách

$$0=(\pounds_\xi g)_{ik}=\xi^l g_{ik;l}+g_{lk}\xi^l{}_{;i}+g_{il}\xi^l{}_{;k}\ , \tag{A.92}$$

dostáváme

$$0=\xi_{k;i}+\xi_{i;k}\ , \tag{A.93}$$

protože pro metrickou konexi kovariantní derivace složek metriky identicky vymizí.

Tvrzení 9 *Jestliže $X=\frac{d}{dt}$ je vektor tečný ke geodetice, pak pro každý Killingův vektor ξ je skalární součin $g(\xi,X)$ konstantní podél této geodetiky.*

Důkaz:

$$\frac{d}{dt}g(\xi,X)=(\xi_kX^k)_{;i}X^i=\xi_{k;i}X^iX^k+\xi_kX^k{}_{;i}X^i=0\ , \tag{A.94}$$

protože první člen vymizí díky antisymetrii $\xi_{[k;i]}$ podle (A.93), a druhý člen podle rovnice geodetiky (A.68).

Dodatek B

Variační principy

B.1 Soustava s konečným počtem stupňů volnosti

V klasické mechanice můžeme pohyb soustavy s n stupni volnosti $x^i|_{i=1}^n$ (např. pohyb hmotného bodu) vyjádřit variačním principem

$$0 = \delta S \ , \tag{B.1}$$

kde akce S je funkcionálem pohybu $x = x(t)$ soustavy daným tzv. lagrangiánem $L = L(t, x, \dot{x})$

$$S = \int L(t, x, \dot{x}) dt \tag{B.2}$$

a $\dot{} \equiv \frac{d}{dt}$. Variaci akce tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i \right) dt = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \delta x^i dt \ , \tag{B.3}$$

a z principu (B.1) potom vyplývají pohybové rovnice ve tvaru Eulerových – Lagrangeových rovnic

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \ . \tag{B.4}$$

Definujeme-li zobecněnou hybnost $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ a vypočteme odtud $\dot{x} = \dot{x}(t, x, p)$,[1] pak ve fázovém prostoru $\{x, p\}$ můžeme pohybové rovnice ekvivalentní rovnicím (B.4) napsat ve tvaru Hamiltonových kanonických rovnic

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \ , \tag{B.5}$$

kde hamiltonián

$$H(t, x, p) = p_i \dot{x}^i - L(t, x, \dot{x}) \ . \tag{B.6}$$

Rovnice (B.5) můžeme také odvodit jako Eulerovy – Lagrangeovy rovnice z Hamiltonova – Jacobiho variačního principu

$$0 = \delta S = \delta \int (p_i \dot{x}^i - H(t, x, p)) dt \ , \tag{B.7}$$

[1] Rovnice $p_i = p_i(t, x, \dot{x})$ lze řešit vůči $\dot{x}$ jestliže matice $\frac{\partial p_i}{\partial \dot{x}^j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$ je regulární.

ve kterém považujeme x a p za nezávislé proměnné. Z rovnic (B.5) vyplývá

$$\frac{d}{dt}H(t,x,p) = \frac{\partial H}{\partial t} \ , \tag{B.8}$$

takže hamiltonián je invariantem pohybu právě když nezávisí explicitně na čase.

Z kvantového hlediska princip nejmenší akce platí proto, že ve skutečnosti se soustava z počáteční události $(t_{\rm i}, x_{\rm i})$ do koncové události $(t_{\rm f}, x_{\rm f})$ může šířit po všech trajektoriích $x(t)$ s těmito koncovými body, a každá z těchto trajektorií přispívá k vlnové funkci $\psi(t_{\rm f}, x_{\rm f})$ členem $\exp(\frac{i}{\hbar}S)$. Příspěvky drah blízkých extremále akce se sčítají se stejnou fází, zatím co příspěvky vzdálenějších drah se vzájemně ruší – viz [5]. Změníme-li koncovou událost, $(t_{\rm f}, x_{\rm f}) \equiv (t,x) \to (t+\Delta t, x+\Delta x)$, pak akce (B.2) se změní

$$\Delta S(t,x) = L\Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i + \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\right]\delta x^i dt \ , \tag{B.9}$$

přičemž v koncovém bodě $\Delta x = \delta x + \dot{x}\Delta t$. Podél extremály je poslední člen v (B.9) nulový v důsledku (B.4), takže

$$\Delta S(t,x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\Delta x^i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i - L\right)\Delta t = p_i\Delta x^i - H\Delta t \ . \tag{B.10}$$

V newtonovské mechanice, kde existuje univerzální čas t, jsou akce S i lagrangián L skalární veličiny při libovolné transformaci $x \to x' = x'(t,x)$. V relativitě je však časová souřadnice $x^0 \equiv ct$ ekvivalentní prostorovým souřadnicím a každá nenulová variace δx světočáry má alespoň z hlediska některých pozorovatelů nenulovou variaci i časové složky. Na rozdíl od akce, která má lorentzovsky invariantní fyzikální význam, lagrangián ve výrazu (B.2) je závislý na zvolené souřadnicové soustavě. Abychom došli k relativistické formulaci variačního principu, musíme zrovnoprávnit postavení všech prostoročasových souřadnic přechodem k parametrickému vyjádření pohybu $x^\iota = x^\iota(w)|_{\iota=0}^n$, ve kterém x^0 je přídavná $n+1$., zatím blíže neurčená funkce parametru w. Pro libovolnou parametrizaci je potom akce dána výrazem

$$S = \int f(x,x')dw \ , \tag{B.11}$$

kde $' \equiv \frac{d}{dw}$ a parametrický lagrangián

$$f(x,x') = t'L(t,x,\dot{x}) \ , \tag{B.12}$$

nezávisí explicitně na w. Protože $\dot{x} = \frac{x'}{t'}$, zobecněná hybnost kanonicky sdružená k prostorovým souřadnicím

$$p_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x'^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \tag{B.13}$$

se nezmění. Jestliže vezmeme časovou souřadnici $t(w)$ rovněž jako dynamickou proměnnou, pak zobecněná hybnost sdružená k t bude

$$p_0 \equiv \frac{\partial f}{\partial t'} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\frac{x'^i}{t'} = -H(t,x,p) \ . \tag{B.14}$$

Prostorové složky Eulerových – Lagrangeových rovnic odvozených z f jsou t'-násobkem rovnic (B.4) a jejich časová složka je rovněž jejich lineární kombinací (součtem násobků x'). Všech $n+1$ lagrangeovských rovnic je tedy konzistentních s původními časovými rovnicemi, nemají však jednoznačné řešení, protože jim vyhovuje jakákoliv parametrizace. K dosažení jednoznačnosti je třeba k variačnímu principu (B.1) pro parametrické vyjádření závislosti $x(w)$ přidat doplňující podmínku fixující parametrizaci. Ta může mít tvar algebraické rovnice

$$\omega(x, x') = 0 \;, \tag{B.15}$$

kde ω je libovolná funkce. Prostoročasové variace δx^ι pak již nejsou nezávislé, ale musí vyhovovat lineární rovnici

$$\delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\omega}{\partial x'}\delta x' = 0 \;, \tag{B.16}$$

takže v (B.1) musíme variovat (B.11) s vazbou (B.15). Lagrangeovský variační princip pro parametrické vyjádření pohybu má tedy tvar

$$0 = \delta S = \delta \int f(x, x') + n(w)\omega(x, x')dw \;, \tag{B.17}$$

kde n je lagrangeovský součinitel variační úlohy s podmínkou.

Podobně v hamiltonovském formalismu pro parametrické vyjádření pohybu nemůžeme vycházet z akce (B.11), protože soustava rovnic (B.13), (B.14) pro t', x' nemá jednoznačné řešení (podmínka z pozn. [1] na str. 24 není pro f dané (B.12) splněna). Výraz $p_\iota x'^\iota - f$ formálně vytvořený z f pro x^ι analogicky jako hamiltonián (B.6) z L pro x^i je identicky rovný nule, což odpovídá skutečnosti, že takto vytvořený hamiltonián, který nemůže explicitně záviset na w, by musel být – analogicky (B.8) – triviálním integrálem pohybu. Vzhledem k (B.14) můžeme integrál v (B.7) vyjádřit jako $\int p_\iota x'^\iota dw$ (Hamiltonova funkce pro $x^\iota(w)$ by tedy byla identicky rovna 0). p_ι však nejsou nezávislá, protože musí splňovat podmínku (B.14). Hamiltonův – Jacobiho variační princip pro parametricky vyjádřený pohyb tedy musí mít tvar

$$0 = \delta \int (p_\iota x'^\iota - N(w)\mathcal{H}(x, p))dw \;, \tag{B.18}$$

kde N je opět lagrangeovský součinitel a tzv. superhamiltonián

$$\mathcal{H}(x, p) = p_0 + H(t, x, p) \tag{B.19}$$

je výraz jehož nulovost dává podmínku (B.14). Variováním (B.18) vůči p_0 dostaneme

$$0 = x'^0 - N(w) \;, \tag{B.20}$$

odkud je zřejmý fyzikální význam $N(w)$.

B.2 Pole

Pro obecné prostoročasové pole $\varphi_I = \varphi_I(x)$ (index "$_I$" označuje jednotlivé složky pole φ) je akce S funkcionálem lagrangeovské hustoty $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \;, \tag{B.21}$$

takže variace

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta\mathcal{L} d^4x = \int \sum_I \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I}\delta\varphi_I + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{I,\kappa}}\delta\varphi_{I,\kappa} \right) d^4x \\ &= \int \sum_I \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_I} - \frac{\partial}{\partial x^\kappa}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{I,\kappa}} \right) \delta\varphi_I d^4x \;, \end{aligned} \tag{B.22}$$

a pohybové rovnice pole

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_I} - \frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{I,\kappa}}\right) . \tag{B.23}$$

Jestliže lagrangián nezávisí explicitně na souřadnicích, pak jeho prostoročasová změna je dána pouze změnou pole

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\iota} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\varphi_{,\iota} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\kappa}}\varphi_{,\kappa\iota} = \frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\kappa}}\varphi_{,\iota}\right) \tag{B.24}$$

(index pole, přes který se výraz sčítá, pro stručnost vynecháváme). Proto můžeme definovat tzv. kanonický tenzor energie–hybnosti

$$T_\iota{}^\kappa \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\kappa}}\varphi_{,\iota} - \delta^\kappa_\iota \mathcal{L} + t_\iota{}^{[\kappa\lambda]}{}_{,\lambda} , \tag{B.25}$$

pro který platí zákon zachování

$$T^{\iota\kappa}{}_{,\kappa} = 0 . \tag{B.26}$$

t je libovolný tenzor s vyznačenou antisymetrií, díky které v zákonu zachování vypadne.

Literatura

[1] Bernstein J.: Kinetic theory in the expanding universe, Cambridge Univ. Press, Cambridge... 1988

[2] Bhatnagar D., Gross E., Krook M., 1954: Phys. Rev. 94, 511

[3] Carter B.: Black Hole Equilibrium States, v "Black holes les astres occlus" ed. C. DeWitt, B. S. DeWitt (Les Houches 1972), Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris 1973

[4] Cary J. R., Brizard A. J.: Hamiltonian theory of guiding-center motion, Rev. Modern Phys. 81, 693 (2009)

[5] Feynman R.P., Hybbs A.R.: Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York 1965

[6] Helgason S.: Groups and geometric analysis, Academic Press, Orlando... 1984 (Mir, Moskva 1987)

[7] Israel W., Stewart J.M.: Progress in Relativistic Thermodynamics and Electrodynamics of Continuous Media, in: General Relativity and Gravitation 2, ed. A. Held, Plenum Press, New York, London

[8] Kowalski O.: Úvod do Riemannovy geometrie, UK, Praha 1995

[9] Kracík J., Tobiáš J.: Fyzika plazmatu, Academia, Praha 1966

[10] Kracík J., Šesták B., Aubrecht L.: Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu, Academia, Praha 1974

[11] Landau L. D., Lifšic E. M.: Mechanika (TF I), Nauka, Moskva 1973

[12] Landau L. D., Lifšic E. M.: Tĕorija polja (TF II), Nauka, Moskva 1973

[13] Kohout V.: Diferenciální geometrie, SNTL, Praha 1971

[14] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.: Gravitation, Freeman & co., San Francisco 1973

[15] Očelkov Ju. P., Priluckij O. F., Rozental I. L., Usov V. V.: Relativistskaja kinetika i gidrodinamika, Atomizdat, Moskva 1979

[16] Oxenius J.: Kinetic Theory of Particles and Photons (Springer Series in Electrophysics, vol. 20) Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo 1986

[17] Pacholczyk A. G.: Radio Astrophysics, Freeman & co., San Francisco 1970 (Radioastrofizika, Mir, Moskva 1973)

[18] Roache P. J.: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque 1976 (Mir, Moskva 1980)

[19] Richtmyer R. D.: Principles of Advanced Mathematical Physics 2, Springer, New York... 1981 (Mir, Moskva 1984)

[20] Sachs R.K., Ehlers J.: Kinetic theory and cosmology in: Astrophysics and General Relativity 2, M. Chrétien, S. Deser, J. Goldstein eds. (Brandeis summer inst. 1968), Gordon and Breach, New York...

[21] Stewart J. M.: Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory (Lecture Notes in Physics 10), Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1971