

# Cours INSA MA2 2016 : Équations aux dérivées partielles

Pavel Krejčí

Ce texte présente des notes du cours fait entre le 8 février et le 7 avril 2016 à l'INSA Lyon. L'auteur s'est inspiré des notes de cours de Christian Reichert ainsi que des livres [1, 3, 4].

## 1 Éléments de la thermodynamique

### 1.1 Principes fondamentaux de la thermodynamique

On considère un corps matériel représenté par un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Les points de  $\Omega$  sont désignés par  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . On se propose d'étudier des processus physiques qui ont lieu dans  $\Omega$  pendant l'intervalle de temps  $t \in [0, T]$ .

On suppose que l'état physique du corps est complètement caractérisé par la distribution  $\theta(x, t)$  de la température au point  $x$  et au temps  $t$ . Autrement dit,  $\theta$  est la seule variable d'état et l'effet des autres quantités physiques (forces mécaniques ou électromagnétiques, déformations, changements de structures etc.) sont supposées dans ce contexte avoir une influence négligeable.

Le fait de choisir  $\theta$  comme variable d'état est justifié par le

**Principe zéro de la thermodynamique :** *Il existe une variable d'état  $\theta$  appelée la température absolue qui est toujours positive.*

Elle peut être définie comme la classe d'équivalence des corps qui, s'ils sont mis en contact thermique, ne manifestent aucun échange de chaleur. Si les deux corps ne sont pas en équilibre, la chaleur se déplace du corps à température plus élevée vers le corps à température moins élevée. La température est donc une grandeur scalaire, mesurée en Kelvin. La différence des températures d'un Kelvin correspond à la différence d'un degré Celsius, zéro Kelvin correspond à -273,15 degrés Celsius.

Au sens propre du mot, la température n'est pas une notion physique indépendante de l'observateur. C'est une notion intuitive liée à la perception humaine. En réalité, ce que nous appelons température, c'est l'énergie moyenne du mouvement brownien des molécules. C'est la raison pour laquelle il était nécessaire de fonder la thermodynamique des milieux continus sur des axiomes.

**Premier principe de la thermodynamique :** *Il existe une fonction d'état (= fonction des variables d'état)  $U = U(\theta)$  appelée l'énergie interne qui est conservée au sens suivant : Le changement en temps de l'énergie interne de chaque partie du corps est compensé par l'échange d'énergie avec son environnement.*

On désigne par  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  le vecteur du *flux de chaleur*. Le premier principe de la thermodynamique peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_V U(\theta(x, t)) dx + \int_{\partial V} \xi(x, t) \cdot n(x) ds(x) = 0, \quad (1.1)$$

où  $V \subset \Omega$  est un sous-domaine régulier arbitraire du domaine  $\Omega$ ,  $\partial V$  est son bord,  $n(x)$  est le vecteur de module 1 et de direction normale à l'ensemble  $V$  au point  $x \in \partial V$  et  $\xi(x, t) \cdot n(x)$  est le produit scalaire des vecteurs  $\xi(x, t)$  et  $n(x)$ . Donc,  $\int_{\partial V} \xi(x, t) \cdot n(x) ds(x)$  représente la quantité instantanée de chaleur qui quitte le sous-domaine  $V$  à travers le bord  $\partial V$ . Si cette quantité est positive, l'énergie interne  $\int_V U(\theta(x, t)) dx$  contenue dans  $V$  doit décroître en accord avec l'équation (1.1).

La *formule de Gauss*

$$\int_{\partial V} \xi(x, t) \cdot n(x) ds(x) = \int_V \operatorname{div} \xi(x, t) dx, \quad (1.2)$$

(appelée aussi formule de Green, Ostrogradski, ...), où  $\operatorname{div}$  désigne l'opérateur différentiel de la *divergence*

$$\operatorname{div} \xi = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}, \quad (1.3)$$

définit la relation entre l'intégrale de surface et l'intégrale de volume. La loi (1.1) de la conservation d'énergie peut donc s'écrire sous la forme

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} U(\theta(x, t)) + \operatorname{div} \xi(x, t) \right) dx = 0 \quad (1.4)$$

pour tout sous-ensemble régulier  $V \subset \Omega$ . C'est équivalent à dire, sous des hypothèses naturelles de régularité, que la relation ponctuelle

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\theta(x, t)) + \operatorname{div} \xi(x, t) = 0 \quad (1.5)$$

doit être vérifiée presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ .

**Deuxième principe de la thermodynamique :** *Il existe une fonction d'état  $S = S(\theta)$  appelée l'entropie qui est croissante au sens suivant : Le changement en temps de l'entropie de chaque partie du corps est en excès par rapport à l'échange d'entropie avec son environnement.*

On désigne par  $\zeta$  le vecteur du *flux d'entropie*, et on écrit le deuxième principe de la thermodynamique sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_V S(\theta(x, t)) dx + \int_{\partial V} \zeta(x, t) \cdot n(x) ds(x) \geq 0 \quad (1.6)$$

pour tout sous-ensemble régulier  $V \subset \Omega$ . Le flux d'entropie  $\zeta$  est lié au flux d'énergie  $\xi$  par la formule

$$\zeta = \frac{\xi}{\theta},$$

et en utilisant la formule (1.2) de Gauss, on peut exprimer le deuxième principe de la thermodynamique sous forme locale

$$\frac{\partial}{\partial t} S(\theta(x, t)) + \operatorname{div} \left( \frac{\xi}{\theta} \right) (x, t) \geq 0 \quad (1.7)$$

presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ . L'inégalité (1.7) est appelée *l'inégalité de Clausius-Duhem*.

### 1.2 Équation de la chaleur

Le but de ce paragraphe est de montrer comment l'équation de la chaleur peut être déduite des principes de la thermodynamique. On commence par évaluer la divergence du flux d'entropie

$$\operatorname{div} \left( \frac{\xi}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \xi - \frac{\xi \cdot \nabla \theta}{\theta^2},$$

qui est une conséquence de la formule de la dérivée du quotient et de la définition (1.3) de la divergence, et où  $\nabla$  est le symbole pour l'opérateur de *gradient* à valeurs vectorielles défini par la formule

$$\nabla \theta = \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right).$$

Ceci nous permet de reformuler le deuxième principe (1.7) de la thermodynamique sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} S(\theta) + \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \xi - \frac{\xi \cdot \nabla \theta}{\theta^2} \geq 0 \quad (1.8)$$

ou bien, tenant compte du premier principe (1.5) de la thermodynamique et du fait que la température absolue est toujours positive par le principe zéro,

$$\theta(x, t) \frac{\partial}{\partial t} S(\theta) - \frac{\partial}{\partial t} U(\theta) - \frac{\xi \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0. \quad (1.9)$$

On introduit une nouvelle fonction d'état  $F(\theta)$  appelée *énergie libre* et définie par la formule

$$F(\theta) = U(\theta) - \theta S(\theta), \quad (1.10)$$

ce qui nous permet d'écrire l'inégalité (1.9) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\theta) + S(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\xi \cdot \nabla \theta}{\theta} \leq 0. \quad (1.11)$$

L'inégalité doit être vérifiée pour tout processus thermodynamique, y compris les processus lents non homogènes, où les dérivées en temps sont négligeables par rapport au gradient  $\nabla \theta$  de la température, aussi bien que les processus rapides homogènes, où  $\nabla \theta$  est négligeable par rapport aux dérivées en temps. Autrement dit, les dérivées en temps et les dérivées en espace apparaissent à des échelles de grandeur différentes. Par conséquent, l'inégalité (1.11) implique que deux inégalités doivent être vérifiées séparément, notamment

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\theta) + S(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} \leq 0, \quad \xi \cdot \nabla \theta \leq 0 \quad (1.12)$$

quel que soit le processus thermodynamique vérifiant le premier principe (1.5).

La deuxième inégalité dans (1.12) est une conséquence de la *loi de Fourier* qui introduit une nouvelle grandeur physique  $\kappa(\theta)$  positive appelée *conductivité thermique* et qui dit que le flux de chaleur  $\xi$  est proportionnel au gradient de la température  $\nabla \theta$  avec le coefficient de proportionnalité  $-\kappa(\theta)$ , c'est à dire,

$$\xi = -\kappa(\theta) \nabla \theta. \quad (1.13)$$

Autrement dit, la chaleur se déplace des régions à haute température vers des régions à basse température et la direction du flux est celle de la décroissance maximale de la température.

Il reste à examiner la première inégalité dans la formule (1.12). La formule de la dérivée de la fonction composée donne

$$\left( \frac{d}{d\theta} F(\theta) + S(\theta) \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} \leq 0 \quad (1.14)$$

quel que soit l'évolution de  $\theta(x, t)$ . Comme la dérivée  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$  peut être positive ou négative, la seule condition qui garantit la validité générale de l'inégalité (1.14), c'est l'identité

$$S(\theta) = -\frac{d}{d\theta} F(\theta). \quad (1.15)$$

Il reste à déterminer les fonctions inconnues  $F = F(\theta)$ ,  $U = U(\theta)$ ,  $S = S(\theta)$ . La grandeur physique qui peut être mesurée, c'est la *chaleur spécifique*  $c(\theta)$  qui est définie comme la *quantité d'énergie* qu'il faut fournir à 1 kg de la matière donnée ayant la température  $\theta$  pour augmenter sa température d'un Kelvin. On peut donc poser

$$U(\theta) = \int_0^\theta c(\tau) d\tau. \quad (1.16)$$

Cela nous permet de trouver des formules pour l'énergie libre  $F(\theta)$  et pour l'entropie  $S(\theta)$  en utilisant les relations (1.10) et (1.15), notamment

$$c(\theta) = \frac{d}{d\theta} U(\theta) = \frac{d}{d\theta} (F(\theta) + \theta S(\theta)) = -\theta \frac{d^2}{d\theta^2} F(\theta), \quad (1.17)$$

ce qui représente une équation différentielle pour  $F$ . Par exemple, si on suppose que la chaleur spécifique est constante et égale à  $c_0$ , et qu'il existe une température de référence  $\theta_c > 0$  telle que  $F(\theta_c) = \frac{dF}{d\theta}(\theta_c) = 0$ , on obtient la formule bien connue

$$F(\theta) = -c_0 \theta \log \left( \frac{\theta}{\theta_c} \right), \quad S(\theta) = c_0 \log \left( \frac{\theta}{\theta_c} \right). \quad (1.18)$$

Pourtant, ce choix n'est pas conforme au

**Troisième principe de la thermodynamique** : *L'entropie s'annule à température zéro.*

On peut mesurer en laboratoire la dépendance entre  $\theta$  et  $c(\theta)$ . Pour l'eau entre 0 et 100 degrés Celsius, par exemple,  $c(\theta)$  est une fonction convexe qui atteint son minimum entre 35 et 38 degrés, ce qui correspond à la température usuelle du corps des mammifères. Le fait que la chaleur spécifique est minimale permet de maintenir la température du corps constante avec un minimum d'énergie nécessaire.

On peut combiner les équations (1.5), (1.13) et (1.16), ce qui conduit à *l'équation de la chaleur non linéaire*

$$c(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div} (\kappa(\theta) \nabla \theta) = 0. \quad (1.19)$$

Pour obtenir un problème bien posé (c'est à dire, un problème qui admet une solution unique), il faut préciser une condition initiale

$$\theta(x, 0) = \theta^0(x) \quad (1.20)$$

avec une température  $\theta^0$  donnée, et une condition au bord  $\partial\Omega$  du domaine  $\Omega$ . Une condition naturelle qui est appelée condition de Robin s'écrit sous la forme

$$\xi \cdot n = b(x)(\theta - \theta^{ext}). \quad (1.21)$$

Cette condition exprime le fait que le flux normal de la chaleur à travers le bord est proportionnel à la différence entre la température  $\theta$  du corps et une température externe  $\theta^{ext}$  donnée. Le coefficient de proportionnalité  $b(x) \geq 0$  est la *conductivité thermique* du bord. Le cas  $b(x) = 0$  correspond à la situation où il n'y a pas d'échange thermique entre le corps et l'extérieur et la condition (1.21) est appelée *condition de Neumann homogène*.

### 1.3 Justification du modèle

Le problème (1.19)–(1.21) à été construit à l'aide du premier et du deuxième principe de la thermodynamique. Pour justifier le modèle, il faut montrer que pour des données  $\theta^0$ ,  $\theta^{ext}$  positives, la solution  $\theta$  reste positive et vérifie ainsi le principe zéro de la thermodynamique. On se propose de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 1.1** *Soient  $\theta^0$  et  $\theta^{ext}$  des fonctions mesurables et bornées sur leur domaines de définition respectifs. S'il existe une constante  $\theta_* > 0$  telle que  $\theta^0(x) \geq \theta_*$  presque partout dans  $\Omega$  et  $\theta^{ext}(x, t) \geq \theta_*$  presque partout sur  $\partial\Omega \times (0, T)$ , et si  $\theta(x, t)$  est une solution régulière du problème (1.19)–(1.21), alors  $\theta(x, t) \geq \theta_*$  presque partout dans  $\Omega \times (0, T)$ .*

*Preuve.* On définit une fonction auxiliaire  $\psi$  par la formule

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \geq \theta_*, \\ \arctan(\theta - \theta_*) & \text{si } \theta < \theta_*, \end{cases} \quad (1.22)$$

qui est une fonction lipschitzienne et bornée. On peut donc multiplier l'équation (1.19) par  $\psi(\theta)$  et utiliser la formule

$$\operatorname{div}(ab) = a \operatorname{div} b + \nabla a \cdot b$$

qui est valable pour toute fonction scalaire  $a$  et toute fonction vectorielle  $b$  à condition que les dérivées existent, ce qui donne

$$\psi(\theta)c(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t} - \operatorname{div}(\psi(\theta)\kappa(\theta)\nabla\theta) + \psi'(\theta)\kappa(\theta)|\nabla\theta|^2 = 0, \quad (1.23)$$

où  $\psi'(\theta) = \frac{d\psi}{d\theta}$ . Soit  $\Psi(\theta)$  la fonction

$$\Psi(\theta) = \int_{\theta_*}^{\theta} \psi(\tau)c(\tau) \, d\tau. \quad (1.24)$$

On intègre l'équation (1.23) par rapport à  $x \in \Omega$ . Puisque  $\psi'(\theta) \geq 0$ , de la condition aux limites (1.21) et de la loi de Fourier (1.13), et en utilisant la formule de Gauss (1.2), on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Psi(\theta) \, dx + \int_{\partial\Omega} b(x)\psi(\theta)(\theta - \theta^{ext}) \, ds(x) \leq 0. \quad (1.25)$$

Le produit  $\psi(\theta)(\theta - \theta^{ext})$  est nul si  $\theta \geq \theta_*$  et positif si  $\theta < \theta_*$ . De l'inégalité (1.25), on déduit que la fonction

$$t \mapsto \int_{\Omega} \Psi(\theta(x, t)) \, dx \quad (1.26)$$

est décroissante dans  $[0, T]$ . Pour  $\theta \geq \theta_*$ , on a  $\Psi(\theta) = 0$ . Par conséquent, on a

$$\int_{\Omega} \Psi(\theta(x, t)) \, dx \leq \int_{\Omega} \Psi(\theta(x, 0)) \, dx = \int_{\Omega} \Psi(\theta^0(x)) \, dx = 0. \quad (1.27)$$

Par définition (1.24), la fonction  $\Psi(\theta)$  est positive si  $\theta < \theta_*$ . En même temps, l'intégrale  $\int_{\Omega} \Psi(\theta(x, t)) \, dx$  est inférieure ou égale à zéro en vertu de (1.27). Donc, nécessairement,  $\theta(x, t) \geq \theta_*$  presque partout, ce qu'il fallait démontrer. ■

#### 1.4 Solution explicite de l'équation de la chaleur linéaire dans l'espace tout entier

Dans le cas où la chaleur spécifique  $c$  et la conductivité thermique  $\kappa$  ne dépendent pas de  $\theta$  l'équation (1.19) s'écrit sous la forme

$$c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa \Delta \theta = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (1.28)$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur de Laplace défini par la formule

$$\Delta \theta = \operatorname{div} \nabla \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2}. \quad (1.29)$$

On peut éliminer les constantes  $c, \kappa$  faisant un changement d'échelle de temps  $t \mapsto \kappa t / c$ . L'équation (1.28) alors devient

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = 0. \quad (1.30)$$

De façon plus générale, on peut considérer l'équation (1.30) dans  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  en dimension  $n$  de l'espace,  $n \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas-là, l'opérateur de Laplace s'écrit sous la forme

$$\Delta \theta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2}. \quad (1.31)$$

On commence par chercher une solution particulière appelée *solution fondamentale* sous la forme

$$\theta(x, t) = \Phi(x, t) := t^{-n/2} G \left( \frac{\|x\|^2}{t} \right), \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (1.32)$$

On réduit donc le problème consistant à déterminer une fonction inconnue  $\theta$  à  $n+1$  variables à un problème plus simple qui consiste à trouver une fonction inconnue  $G$  à une variable seulement. Des méthodes bien développées de réduction de la dimension pour des problèmes d'EDP sont liées à la théorie des *groupes de Lie* et une étude systématique qui permet d'identifier des solutions particulières des EDP a été élaborée par Ovsyannikov dans le livre [2].

Pour vérifier qu'une telle fonction  $G$  existe, on calcule les dérivées partielles de la fonction  $\theta$  donnée par la formule (1.32) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{n}{2}t^{-(n/2)-1}G\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right) - t^{-(n/2)-1}G'\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right)\frac{\|x\|^2}{t}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_i} &= t^{-(n/2)-1}G'\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right)2x_i, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} &= 2t^{-(n/2)-1}G'\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right) + t^{-(n/2)-1}G''\left(\frac{\|x\|^2}{t}\right)\frac{4x_i^2}{t}.\end{aligned}$$

Ceci nous permet d'obtenir l'identité

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta = -t^{-(n/2)-1}\left(\frac{n}{2}G(r) + (2n+r)G'(r) + 4rG''(r)\right) \quad (1.33)$$

avec  $r = \frac{\|x\|^2}{t}$ . La fonction  $\theta$  de la forme (1.32) vérifie l'équation (1.30) si et seulement si  $G$  vérifie l'équation différentielle

$$\frac{n}{2}(G(r) + 4G'(r)) + r(G'(r) + 4G''(r)) = 0 \quad \text{pour } r > 0. \quad (1.34)$$

On pose  $\hat{G}(r) = G(r) + 4G'(r)$ . D'après (1.33), la fonction  $\hat{G}$  doit être une solution de l'équation

$$\frac{n}{2}\hat{G}(r) + r\hat{G}'(r) = 0 \quad \text{pour } r > 0. \quad (1.35)$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$\hat{G}(r) = \hat{C}r^{-n/2} \quad (1.36)$$

avec une constante  $\hat{C}$  arbitraire. On cherche la formule pour  $G$  la plus simple possible, on choisit alors  $\hat{C} = 0$ , ce qui donne

$$G(r) = G_0e^{-r/4} \quad \text{pour } r > 0 \quad (1.37)$$

avec une constante arbitraire  $G_0$ . On a donc trouvé une formule explicite pour la solution fondamentale (1.32)

$$\Phi(x, t) = G_0t^{-n/2}e^{-\|x\|^2/(4t)}. \quad (1.38)$$

Il reste à déterminer la constante  $G_0$ . On appelle *problème de Cauchy* pour l'équation de la chaleur (1.30) le problème qui consiste à trouver une solution de (1.30) qui vérifie la condition initiale (1.20) avec une fonction  $\theta^0$  donnée.

**Théorème 1.2** *Soit  $\theta^0$  une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors une solution du problème de Cauchy (1.30), (1.20) peut s'exprimer à l'aide de la fonction  $\Phi$  dans (1.38) par la formule de convolution*

$$\theta(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) \theta^0(y) dy \quad (1.39)$$

à condition que la constante  $G_0$  soit donnée par la formule

$$G_0 = (4\pi)^{-n/2}. \quad (1.40)$$

La solution donnée par la formule (1.39) est unique dans la classe des solutions bornées. Un exemple d'une solution non bornée se trouve dans l'Exercice 5 du Chapitre 1 du livre [4].

*Preuve du Théorème 1.2.* Le fait que l'équation (1.30) soit vérifiée est trivial. En effet, la fonction  $\Phi$  est une solution de l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta \Phi = 0$$

dans  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ . On a donc

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, t) - \Delta \theta(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta \Phi \right) (x - y, t) \theta^0(y) dy = 0. \quad (1.41)$$

Il reste à montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) \theta^0(y) dy = \theta_0(x)$$

pour un choix approprié de la constante  $G_0$ . On introduit dans l'intégrale (1.39) la substitution  $y = x + z\sqrt{t}$ , donc  $dy_i = \sqrt{t} dz_i$  et  $dy = t^{n/2} dz$ , ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) \theta^0(y) dy = G_0 \int_{\mathbb{R}^n} \theta^0(x + z\sqrt{t}) e^{-\|z\|^2/4} dz,$$

et on voit, en utilisant la continuité de la fonction  $\theta^0$ , que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) \theta^0(y) dy = \theta^0(x) G_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2/4} dz.$$

Il suffit donc de poser  $G_0 = \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2/4} dz \right)^{-1} = (4\pi)^{-n/2}$ , ce qui démontre le théorème. ■

La formule

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2/4} dz = (4\pi)^{n/2} \quad (1.42)$$

est facile à justifier. Il suffit d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2/4} dz = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(1/4)\sum_{i=1}^n z_i^2} dz = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/4} du \right)^n = \left( 2 \int_0^\infty e^{-u^2/4} du \right)^n. \quad (1.43)$$

Soit  $I = \int_0^\infty e^{-u^2/4} du$ . Alors, en utilisant les coordonnées polaires  $u = r \cos \phi$ ,  $v = r \sin \phi$ , on obtient

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)/4} du dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2/4} dr d\phi = -\pi \left[ e^{-r^2/4} \right]_{r=0}^\infty = \pi,$$

ce qui donne la formule (1.42).

## 2 Un problème motivé par l'électrostatique

Considérons le vecteur du champ électrique

$$E(x) = \begin{pmatrix} E_1(x) \\ E_2(x) \\ E_3(x) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

La loi de Gauss (appelée aussi *loi de Maxwell-Gauss*) met en évidence que le champ électrique produit par une charge électrique de densité volumique  $\rho(x)$  dans le vide vérifie l'équation

$$\operatorname{div} E(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x), \quad (2.1)$$

où  $\varepsilon_0$  est le coefficient de permittivité du vide. La loi de Faraday (ou *Maxwell-Faraday*) s'écrit sous forme générale

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (2.2)$$

où  $B$  désigne l'induction magnétique. Dans le cas stationnaire indépendant du temps, on obtient l'identité

$$\operatorname{rot} E(x) = 0. \quad (2.3)$$

Rappelons que l'opérateur différentiel  $\operatorname{rot}$ , appelé le *rotationnel*, est défini par la formule

$$\operatorname{rot} E(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Un calcul élémentaire montre que pour toute fonction scalaire deux fois dérivable on a l'identité

$$\operatorname{rot} \nabla A = 0. \quad (2.5)$$

Le résultat suivant est en quelque sorte complémentaire à (2.5).

**Théorème 2.1** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domaine convexe et soit  $E$  un champ vectoriel sur  $\Omega$  continûment dérivable tel que  $\operatorname{rot} E(x) = 0$  sur  $\Omega$ . Il existe alors un champ scalaire  $A$  appelé potentiel de  $E$  tel que  $E = \nabla A$ .*

*Preuve.* On choisit un point  $(a, b, c) \in \Omega$ . La fonction  $A$  peut être définie par la formule

$$A(x) = A(x_1, x_2, x_3) = \int_a^{x_1} E_1(y_1, x_2, x_3) dy_1 + \varphi(x_2, x_3) \quad (2.6)$$

avec une fonction auxiliaire  $\varphi$  qui reste à déterminer. On peut directement calculer les dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial x_1} &= E_1(x_1, x_2, x_3), \\
\frac{\partial A}{\partial x_2} &= \int_a^{x_1} \frac{\partial E_1}{\partial x_2}(y_1, x_2, x_3) dy_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_2, x_3) \\
&= \int_a^{x_1} \frac{\partial E_2}{\partial x_1}(y_1, x_2, x_3) dy_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_2, x_3) \\
&= E_2(x_1, x_2, x_3) - E_2(a, x_2, x_3) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_2, x_3), \\
\frac{\partial A}{\partial x_3} &= \int_a^{x_1} \frac{\partial E_1}{\partial x_3}(y_1, x_2, x_3) dy_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_2, x_3) \\
&= \int_a^{x_1} \frac{\partial E_3}{\partial x_1}(y_1, x_2, x_3) dy_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_2, x_3) \\
&= E_3(x_1, x_2, x_3) - E_3(a, x_2, x_3) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_2, x_3).
\end{aligned}$$

Dans les calculs, on a utilisé de façon essentielle les relations  $\frac{\partial E_1}{\partial x_2} = \frac{\partial E_2}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial E_1}{\partial x_3} = \frac{\partial E_3}{\partial x_1}$  provenant de l'hypothèse que  $\text{rot } E = 0$ .

Pour obtenir le résultat désiré  $\frac{\partial A}{\partial x_i} = E_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , il suffit donc de choisir une fonction  $\varphi$  qui vérifie les conditions suivantes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_2, x_3) = E_2(a, x_2, x_3), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_2, x_3) = E_3(a, x_2, x_3). \quad (2.7)$$

Pour cela, on pose

$$\varphi(x_2, x_3) = \int_b^{x_2} E_2(a, y_2, x_3) dy_2 + \psi(x_3) \quad (2.8)$$

avec une fonction  $\psi$  qui sera déterminée plus tard. En procédant de manière analogue que précédemment, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= E_2(a, x_2, x_3), \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= \int_b^{x_2} \frac{\partial E_2}{\partial x_3}(a, y_2, x_3) dy_2 + \psi'(x_3) \\
&= \int_b^{x_2} \frac{\partial E_3}{\partial x_2}(a, y_2, x_3) dy_2 + \psi'(x_3) \\
&= E_3(a, x_2, x_3) - E_3(a, b, x_3) + \psi'(x_3),
\end{aligned}$$

et pour terminer la démonstration il suffit de poser

$$\psi(x_3) = \int_c^{x_3} E_3(a, b, y_3) dy_3.$$

■

Le problème qui consiste à déterminer le champ magnétique associé à une charge donnée  $\rho$  par la relation (2.1) se ramène donc, en utilisant le Théorème 2.1 et la formule (1.29), à résoudre l'équation

$$\Delta A = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x). \quad (2.9)$$

Les équations de cette forme s'appellent les *équations de Poisson*. Le cas particulier où le second membre est nul

$$\Delta A = 0 \quad (2.10)$$

est appelé *l'équation de Laplace*.

### 2.1 Une méthode de résolution de l'équation de Poisson

Considérons d'abord l'équation de Laplace (2.9) dans  $\mathbb{R}^n$ , et cherchons une solution particulière sous la forme

$$A(x) = f_n(\|x\|), \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad (2.11)$$

où  $f_n$  est une fonction à une variable réelle positive. C'est encore un exemple de réduction de la dimension pareil à (1.32). Pour  $\|x\| > 0$  on peut calculer les dérivées partielles par rapport à  $x_i$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x_i} &= f'_n(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} &= f'_n(\|x\|) \frac{1}{\|x\|} + f''_n(\|x\|) \frac{x_i^2}{\|x\|^2} - f'_n(\|x\|) \frac{x_i^2}{\|x\|^3}, \\ \Delta A &= \frac{n-1}{\|x\|} f'_n(\|x\|) + f''_n(\|x\|). \end{aligned}$$

L'équation de Laplace est donc vérifiée pour tout  $x \neq 0$  si et seulement si la fonction  $f_n$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{n-1}{r} f'_n(r) + f''_n(r) = 0 \quad \text{pour } r > 0, \quad (2.12)$$

ce qui est équivalent à l'équation

$$\frac{d}{dr} (r^{n-1} f'_n(r)) = 0 \quad \text{pour } r > 0. \quad (2.13)$$

Il existe donc une constante  $C_n \in \mathbb{R}$  telle que

$$f'_n(r) = C_n r^{1-n}. \quad (2.14)$$

À une constante additive près, on a alors

$$f_n(r) = \begin{cases} C_2 \log r & \text{si } n = 2, \\ \frac{C_n}{2-n} r^{2-n} & \text{si } n \geq 3. \end{cases} \quad (2.15)$$

La fonction

$$N_n(x) = f_n(\|x\|) \quad (2.16)$$

s'appelle le *potentiel de Newton*. Les constantes  $C_n$  seront déterminées au cours de la preuve du résultat suivant.

**Théorème 2.2** Soit  $\hat{\rho} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois continûment dérivable et à support borné. Alors les constantes  $C_n$  peuvent être choisies de telle façon que la fonction  $A$  définie par la formule de convolution

$$A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_n(x - y)\hat{\rho}(y) dy \tag{2.17}$$

soit une solution de l'équation de Poisson

$$\Delta A = \hat{\rho} \tag{2.18}$$

dans l'espace tout entier  $\mathbb{R}^n$ .

L'expression à support borné signifie qu'il existe un réel  $R > 0$  tel que  $\hat{\rho}(x) = 0$  pour  $\|x\| > R$ . Pour appliquer le résultat à l'équation (2.9), il suffit de poser  $\hat{\rho} = \rho/\varepsilon_0$ .

*Preuve du Théorème 2.2.* Dans l'intégrale (2.17), on substitue  $y = x + z$ , ce qui donne (remarquons que  $N_n(z) = N_n(-z)$ )

$$A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_n(z)\hat{\rho}(x + z) dz. \tag{2.19}$$

Donc, on a

$$\Delta A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_n(z)\Delta_x\hat{\rho}(x + z) dz. \tag{2.20}$$

Pour distinguer les dérivées par rapport à  $x$  et par rapport à  $z$ , on écrit

$$\begin{aligned} \Delta_x\hat{\rho}(x + z) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\hat{\rho}(x + z)}{\partial x_i^2}, \\ \Delta_z\hat{\rho}(x + z) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\hat{\rho}(x + z)}{\partial z_i^2}. \end{aligned}$$

On voit bien que (en utilisant, par exemple, la formule de la dérivée d'une fonction composée)  $\Delta_x\hat{\rho}(x + z) = \Delta_z\hat{\rho}(x + z)$ . Cela nous permet d'exprimer l'intégrale (2.20) comme

$$\Delta A(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_n(z)\Delta_z\hat{\rho}(x + z) dz. \tag{2.21}$$

Rappelons la formule

$$\begin{aligned} N_n(z)\Delta_z\hat{\rho}(x + z) &= \operatorname{div}_z(N_n(z)\nabla_z\hat{\rho}(x + z)) - \nabla_z N_n(z) \cdot \nabla_z\hat{\rho}(x + z) \\ &= \operatorname{div}_z(N_n(z)\nabla_z\hat{\rho}(x + z) - \nabla_z N_n(z)\hat{\rho}(x + z)) + \Delta_z N_n(z)\hat{\rho}(x + z), \end{aligned} \tag{2.22}$$

où  $\nabla_z$  et  $\operatorname{div}_z$  sont respectivement le gradient et la divergence par rapport à  $z$ .

Le potentiel de Newton  $N_n(z)$  n'est pas défini pour  $z = 0$ . Au lieu d'intégrer sur tout l'espace  $\mathbb{R}^n$  dans la formule (2.21), on intègre sur le domaine  $D_\varepsilon$  contenu entre une grande sphère de

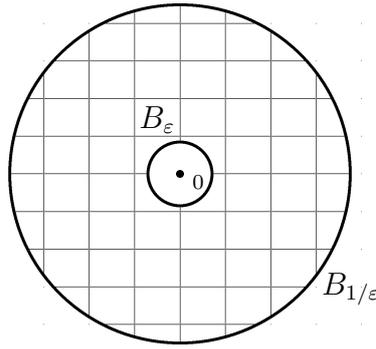


FIG. 1 – Domaine d'intégration  $D_\varepsilon$

rayon  $1/\varepsilon$  et une petite sphère de rayon  $\varepsilon$  et de centre  $0$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , et on passe à la limite si  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Si on désigne par

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$$

la boule ouverte de centre  $0$  et de rayon  $r$ , le domaine  $D_\varepsilon$ , représenté sur Figure 1, peut s'écrire

$$D_\varepsilon = B_{1/\varepsilon} \setminus \bar{B}_\varepsilon, \tag{2.23}$$

où  $\bar{B}_\varepsilon$  est la boule fermée de rayon  $\varepsilon$ . On se propose donc de montrer que

$$\hat{\rho}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_\varepsilon} N_n(z) \Delta_z \hat{\rho}(x+z) dz \tag{2.24}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Soit  $A_\varepsilon := \int_{D_\varepsilon} N_n(z) \Delta_z \hat{\rho}(x+z) dz$ . Dans  $D_\varepsilon$ , on a  $\Delta_z N_n(z) = 0$  par définition du potentiel de Newton. Donc, les formules (2.22) et (1.2) conduisent à

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \int_{D_\varepsilon} \operatorname{div}_z (N_n(z) \nabla_z \hat{\rho}(x+z) - \nabla_z N_n(z) \hat{\rho}(x+z)) dz \\ &= \int_{\partial D_\varepsilon} (N_n(z) \nabla_z \hat{\rho}(x+z) - \nabla_z N_n(z) \hat{\rho}(x+z)) \cdot n(z) ds(z). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Le bord  $\partial D_\varepsilon$  de  $D_\varepsilon$  est constitué des deux sphères  $\partial B_{1/\varepsilon} \cup \partial B_\varepsilon$ . Comme  $\hat{\rho}$  est une fonction à support borné, les valeurs de  $\hat{\rho}(x+z)$  et  $\nabla_z \hat{\rho}(x+z)$  s'annulent sur la grande sphère  $\partial B_{1/\varepsilon}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Sur la petite sphère  $\partial B_\varepsilon$ , le vecteur normal extérieur  $n(z)$  par rapport à  $D_\varepsilon$  est un vecteur normal intérieur par rapport à  $B_\varepsilon$ . Le vecteur normal extérieur par rapport à  $B_\varepsilon$  correspondant à  $n(x)$  est donc égal à  $-n(x)$ . Cela nous permet, pour des valeurs de  $\varepsilon$  suffisamment petites, de simplifier la formule (2.25) et d'écrire

$$A_\varepsilon = \int_{\partial B_\varepsilon} (-N_n(z) \nabla_z \hat{\rho}(x+z) + \nabla_z N_n(z) \hat{\rho}(x+z)) \cdot n(z) ds(z). \tag{2.26}$$

On a  $A_\varepsilon = I_\varepsilon - J_\varepsilon$  où

$$I_\varepsilon = \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla_z N_n(z) \hat{\rho}(x+z) \cdot n(z) ds(z), \quad J_\varepsilon = \int_{\partial B_\varepsilon} N_n(z) \nabla_z \hat{\rho}(x+z) \cdot n(z) ds(z). \tag{2.27}$$

Sur  $\partial B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = \varepsilon\}$ , on utilise les formules (2.15)–(2.16) pour obtenir

$$\nabla_z N_n(z) = f'_n(\|z\|) \frac{z}{\|z\|} = f'_n(\varepsilon) \frac{z}{\varepsilon}, \quad N_n(z) = f_n(\varepsilon), \quad n(z) = \frac{z}{\varepsilon},$$

donc

$$I_\varepsilon = f'_n(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon} \hat{\rho}(x+z) \, ds(z), \quad J_\varepsilon = f_n(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon} \nabla_z \hat{\rho}(x+z) \cdot n(z) \, ds(z). \quad (2.28)$$

Par hypothèse, la fonction  $\|\nabla_z \hat{\rho}(x+z)\|$  est bornée par une constante  $R > 0$  indépendante de  $\varepsilon$ . Nous pouvons estimer

$$|J_\varepsilon| \leq R |f_n(\varepsilon)| |\partial B_\varepsilon|,$$

où  $|\partial B_\varepsilon| = A_n \varepsilon^{n-1}$  est l'aire de la sphère de rayon  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $A_2 = 2\pi$ ,  $A_3 = 4\pi$ ,  $A_{n+2} = \frac{2\pi}{n} A_n$ , et la formule (2.15) nous permet de conclure que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = 0. \quad (2.29)$$

Le reste de la démonstration est simple. Il suffit d'écrire

$$I_\varepsilon = f'_n(\varepsilon) \left( \int_{\partial B_\varepsilon} \hat{\rho}(x) \, ds(z) + \int_{\partial B_\varepsilon} (\hat{\rho}(x+z) - \hat{\rho}(x)) \, ds(z) \right), \quad (2.30)$$

où

$$f'_n(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon} \hat{\rho}(x) \, ds(z) = C_n A_n \hat{\rho}(x)$$

et

$$\left| f'_n(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon} (\hat{\rho}(x+z) - \hat{\rho}(x)) \, ds(z) \right| \leq C_n A_n \max_{\|z\|=\varepsilon} |\hat{\rho}(x+z) - \hat{\rho}(x)|,$$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = C_n A_n \hat{\rho}(x),$$

et pour finir la démonstration il suffit de poser  $C_n = 1/A_n$ . ■

### 3 EDP en mécanique

On considère une corde de longueur  $L$ , de masse volumique  $\rho$  et de l'aire de la section transversale  $S$ , tendue par une force de tension  $T$  entre deux points fixes. Les points de la corde sont désignés par  $x \in [0, L]$  et on suppose qu'ils peuvent effectuer un déplacement transversal  $u(x, t)$  en temps  $t \geq 0$  par rapport à la position d'équilibre. Le fait que les extrémités sont fixes est exprimé par les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (3.1)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

On représente la corde comme une chaîne de points matériels (cf. Fig. 2)

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = L,$$

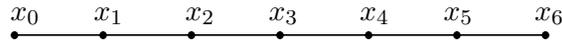


FIG. 2 – Corde en position d'équilibre

la distance entre les points voisins est constante et égale à

$$h_n = x_k - x_{k-1} = \frac{L}{n}. \tag{3.2}$$

Pour que la masse totale  $M = \rho SL$  soit conservée, on associe à chaque point  $x_k$  sa masse  $m_k$ ,

$$m_k = \begin{cases} \frac{M}{n} & \text{pour } k = 1, \dots, n-1, \\ \frac{M}{2n} & \text{pour } k = 0, n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Soit  $u_k(t)$  le déplacement transversal du point  $x_k$  en temps  $t \geq 0$ . On se propose de construire un modèle mathématique sous l'hypothèse qu'il n'y ait pas de déplacement longitudinal. Conformément à la condition aux limites (3.1), on suppose

$$u_0(t) = u_n(t) = 0. \tag{3.4}$$

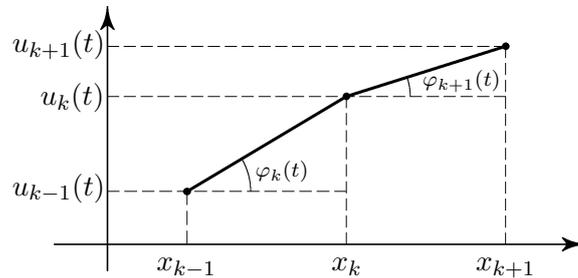


FIG. 3 – Déformation de la corde

Soit  $\varphi_k(t)$  l'angle de déviation du segment  $[x_{k-1}, x_k]$  par rapport à la position d'équilibre comme sur la Fig. 3, et soit  $T_k(t)$  la tension de la corde entre  $x_{k-1}$  et  $x_k$ . On a la formule

$$\tan \varphi_k(t) = \frac{u_k(t) - u_{k-1}(t)}{x_k - x_{k-1}} = \frac{u_k(t) - u_{k-1}(t)}{h_n}. \tag{3.5}$$

La force longitudinale  $F_k^{long}(t)$  agissant sur le point  $x_k$  est donnée par

$$F_k^{long}(t) = T_{k+1}(t) \cos \varphi_{k+1}(t) - T_k(t) \cos \varphi_k(t). \tag{3.6}$$

Par hypothèse, il n'y a pas de mouvement longitudinal, donc les forces longitudinales sont nulles. Autrement dit, on a

$$T_k(t) \cos \varphi_k(t) = T \tag{3.7}$$

pour tout  $k = 1, \dots, n$ . La force transversale  $F_k^{trans}(t)$  agissant sur le point  $x_k$  vérifie la relation

$$F_k^{trans}(t) = T_{k+1}(t) \sin \varphi_{k+1}(t) - T_k(t) \sin \varphi_k(t) = T(\tan \varphi_{k+1}(t) - \tan \varphi_k(t)). \quad (3.8)$$

La *loi de Newton* dit que la force agissant sur un point matériel est égale à sa masse multipliée par son accélération. Donc, on a

$$m_k \frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} = F_k^{trans}(t). \quad (3.9)$$

En utilisant les relations précédentes, on voit que l'équation (3.9) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho S \frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} = T \frac{u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h_n^2}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (3.10)$$

On définit maintenant une suite de fonctions  $u^{(n)} = u^{(n)}(x, t)$  deux fois dérivables telle que

$$u^{(n)}(x_k, t) = u_k(t) \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h_n^2} &= \frac{1}{h_n^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( \frac{\partial u^{(n)}(z + h_n, t)}{\partial z} - \frac{\partial u^{(n)}(z, t)}{\partial z} \right) dz \\ &= \frac{1}{h_n^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_z^{z+h_n} \frac{\partial^2 u^{(n)}(y, t)}{\partial^2 y} dy dz, \end{aligned}$$

ce qui est, par le théorème de la moyenne, une bonne approximation de la dérivée partielle seconde  $\frac{\partial^2 u^{(n)}(x, t)}{\partial^2 x}$  pour  $x \in [x_{k-1}, x_k]$ . De façon analogue,  $\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2}$  est une bonne approximation de  $\frac{\partial^2 u^{(n)}(x, t)}{\partial^2 t}$  dans  $[x_{k-1}, x_k]$ . On peut alors passer à la limite  $n \rightarrow \infty$  dans l'équation (3.10), ce qui conduit à *l'équation des ondes*

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - T \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0, \quad (3.11)$$

que l'on écrit sous sa forme habituelle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}. \quad (3.12)$$

### 3.1 Méthode de la séparation des variables

On cherche une solution particulière de l'équation (3.12) vérifiant les conditions aux limites (3.1) sous la forme du produit

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.13)$$

de deux fonctions à une variable. Si on désigne par  $X'$  la dérivée de  $X$  par rapport à  $x$  et par  $\dot{T}$  la dérivée de  $T$  par rapport à  $t$ , on voit que la fonction  $u$  donnée par (3.13) est une solution de l'équation (3.12) si et seulement si

$$X(x)\ddot{T}(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0. \quad (3.14)$$

Dans le domaine où  $T(t) \neq 0$  et  $X(x) \neq 0$  cela donne

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.15)$$

Il s'agit d'une égalité entre une fonction à variable  $t$  et une fonction à variable  $x$  qui est vérifiée pour tout  $t$  et pour tout  $x$ . Ce n'est possible que s'il existe une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad \ddot{T}(t) = c^2 \lambda T(t), \quad X(0) = X(L) = 0. \quad (3.16)$$

Le système (3.16) admet une solution non nulle si et seulement si  $\lambda = \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$  avec un choix de  $k \in \mathbb{N}$  arbitraire, et la solution est de la forme

$$u(x, t) = u_k(x, t) = \left( a_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad (3.17)$$

avec des constantes  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  arbitraires. La Figure 4 met en évidence la forme des ondes pour des valeurs différentes de  $k$ . Les fréquences  $f_k$  des oscillations sont données par la formule

$$f_k = \frac{ck\pi}{L} = \frac{k\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}}.$$

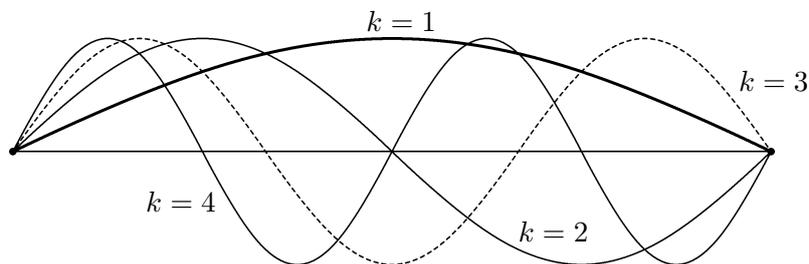


FIG. 4 – Corde vibrante

### 3.2 Méthode de Fourier

La méthode de la séparation des variables permet de construire la solution de l'équation des ondes (3.12) avec les conditions aux limites (3.1), qui vérifie les conditions initiales

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x). \quad (3.18)$$

On développe les conditions initiales en séries de Fourier

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad u^1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

avec des coefficients réels  $A_k, B_k$ , et la formule (3.17) nous permet de représenter la solution sous forme de la série de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \left( \frac{ck\pi}{L} t \right) + b_k \sin \left( \frac{ck\pi}{L} t \right) \right) \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right), \quad (3.19)$$

où

$$a_k = A_k, \quad b_k = \frac{LB_k}{ck\pi}.$$

### 3.3 Propagation des ondes

Considérons l'équation (3.12) sur toute l'axe  $x \in (-\infty, +\infty)$ . On définit deux fonctions auxiliaires

$$R_+ = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad R_- = \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.20)$$

Alors  $R_+, R_-$  vérifient les EDP du premier ordre

$$\frac{\partial R_+}{\partial t} - c \frac{\partial R_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R_-}{\partial t} + c \frac{\partial R_-}{\partial x} = 0. \quad (3.21)$$

Pour une valeur  $a \in \mathbb{R}$  quelconque, on a

$$\frac{d}{dt} R_+(a - ct, t) = \frac{\partial R_+}{\partial t}(a - ct, t) - c \frac{\partial R_+}{\partial x}(a - ct, t) = 0,$$

donc la fonction  $R_+$  est constante le long de chaque ligne droite  $x = a - ct$  dans le plan de coordonnées  $(x, t)$ , et cette constante correspond à la valeur initiale  $R_+(a, 0)$  de la fonction  $R_+$ . Si  $\psi_+(x) = R_+(x, 0)$  est la condition initiale pour  $R_+$ , on déduit alors que

$$R_+(x, t) = \psi_+(x + ct). \quad (3.22)$$

Pour la fonction  $R_-$ , on obtient de la même façon

$$\frac{d}{dt} R_-(a + ct, t) = \frac{\partial R_-}{\partial t}(a + ct, t) + c \frac{\partial R_-}{\partial x}(a + ct, t) = 0,$$

donc  $R_-(a + ct, t) = R_-(a, 0)$  pour tout  $t \geq 0$ , et si  $\psi_-(x) = R_-(x, 0)$  est la condition initiale pour  $R_-$ , on obtient une formule analogue à (3.22)

$$R_-(x, t) = \psi_-(x - ct). \quad (3.23)$$

Les fonctions  $R_+, R_-$  s'appellent les *invariants de Riemann* et permettent d'exprimer la solution  $u$  de l'équation (3.12) avec les conditions initiales (3.18). En fait, les équations (3.20) donnent

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2}(R_+(x, t) + R_-(x, t)) = \frac{1}{2}(\psi_+(x + ct) + \psi_-(x - ct)), \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{2c}(R_+(x, t) - R_-(x, t)) = \frac{1}{2c}(\psi_+(x + ct) - \psi_-(x - ct)). \quad (3.25)$$

Soient  $\Psi_+, \Psi_-$  des fonctions primitives de  $\psi_+, \psi_-$ , c'est à dire  $\Psi'_+ = \psi_+, \Psi'_- = \psi_-$ . Les relations (3.24)–(3.25) seront vérifiées si on pose

$$u(x, t) = \frac{1}{2c}(\Psi_+(x + ct) - \Psi_-(x - ct)). \tag{3.26}$$

Pour résoudre le problème (3.12), (3.18), il suffit donc de trouver des fonctions  $\Psi_+, \Psi_-$  telles que

$$\frac{1}{2}(\psi_+(x) + \psi_-(x)) = u^1(x), \quad \frac{1}{2c}(\Psi_+(x) - \Psi_-(x)) = u^0(x).$$

On peut donc choisir

$$\Psi_+(x) = \int_0^x u^1(y) dy + cu^0(x), \quad \Psi_-(x) = \int_0^x u^1(y) dy - cu^0(x).$$

On a ainsi déduit la *formule de d'Alembert*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u^0(x + ct) + u^0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(y) dy. \tag{3.27}$$

Sur Fig. 5 on montre la propagation des ondes si on choisit  $u^1 = 0$  et si  $u^0$  et à support borné. On voit que l'onde initiale se divise en deux ondes égales qui se déplacent à droite et à gauche à une vitesse constante sans changer de forme.

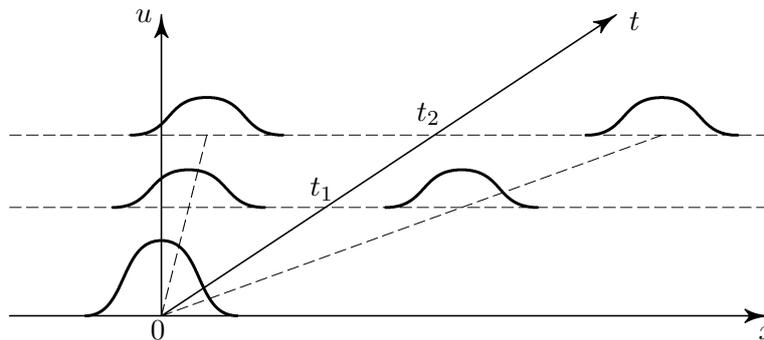


FIG. 5 – Propagation des ondes en temps  $0 < t_1 < t_2$ .

### Références

- [1] P. Drábek, G. Holubová : *Elements of partial differential equations*. De Gruyter, Berlin/Boston, 2014.
- [2] L. V. Ovsyannikov : *Group analysis of differential equations*. Academic Press, New York, 1982.
- [3] M. Šilhavý : *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Springer, Berlin, 1996.
- [4] S. R. S. Varadhan : *Lectures on diffusion problems and partial differential equations*. Springer for Tata Institute of Fundamental Research, Berlin, New York, 1980.