

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**ÚNAVA MATERIÁLU
PŘI NÁHODNÉM ZATĚŽOVÁNÍ**

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1982

V této práci se vysvětlují a odvozují některé poznatky ze statistiky, bez nichž nelze porozumět interpretaci únavových zkoušek při výpočtu životnosti. Uvádějí se základy teorie náhodných funkcí. Probírá se působení náhodných sil na jednoduché mechanické soustavy. Hodnotí se napěťová odezva se zřetelem k potřebám výpočtu životnosti strojních částí. Vysvětlují se různé metody výpočtu životnosti, analytické i numerické, založené na novodobých poznatcích o vzniku a šíření únavového lomu při obecně proměnném namáhání.

V závěru skript se pojednává o tvarové pevnosti svařovaných konstrukcí. Ukazuje se, na čem závisí mez únavy nejužívanějších typů svařovaných spojů a probírají se způsoby, jakými lze zvýšit mez únavy popř. životnost svařovaných konstrukcí.

Skripta jsou určena především konstruktérům a jsou pokračováním svazku "Únava materiálu při periodickém zatěžování" (DT ČSVTS Praha, 1981), s nimiž tvoří tematický celek. Cílem je vysvětlit hlavní zásady kvalifikovaného pevnostního výpočtu strojních částí namáhaných v únavě, srozumitelně a podrobně vysvětlit důležité pojmy a podstatu nejvíce užívaných metod. K podrobnému sledování textu je žádoucí znalost základů integrálního a diferenciálního počtu.

OBSAH

	Str.
Úvod	4
1. Wöhlerova křivka z hlediska statistiky	5
2. Deterministické funkce	14
3. Náhodné funkce	18
4. Typy náhodných procesů a jejich popis	21
5. Odezva náhodně buzené mechanické soustavy	28
6. Životnost při normálním úzkopásmovém procesu náhodného namáhání	30
7. Způsoby počítání cyklů namáhání	34
8. Simulace náhodného procesu s danou výkonovou spektrální hustotou	38
9. Životnost částí při širokopásmovém procesu náhodného namáhání	40
10. Vztah mezi cyklickou křivkou a křivkou životnosti	43
11. Vliv středního napětí resp. středního přetvoření	48
12. Metoda přípustných úseků	50
13. Matematický popis nelineární deformační charakteristiky	56
14. Svařování a řezání plamenem	58
15. Mez únavy tupých příčných svarů	60
16. Únava koutových svarů	65
17. Únava různých typů svařovaných spojů	68
18. Vliv vad ve svaru na mez únavy	72
19. Úpravy zvyšující mez únavy svařovaných konstrukcí	75
20. Životnost částí a její rozptyl	79

Musíme při nejrozmanitějších okolnostech
zkušenost v potaz brátí,
abychom dostali všeobecný zákon.

Leonardo da Vinci (1452 až 1519)

Úvod

Dům techniky ČSVTS Praha uspořádal v roce 1981 seminář věnovaný únavě materiálu při deterministickém namáhání. Současný seminář je jeho pokračováním. Probírají se v něm převážně problémy výpočtu životnosti částí strojů při náhodném zatěžování. Připomínají se některé poznatky ze statistiky, probírají se vlastnosti a charakteristiky náhodných funkcí a uvádějí se vybrané metody výpočtu životnosti. Výběr je přitom ovlivněn skutečností, že zpracování náhodných procesů se v současnosti uskutečňuje téměř výhradně na počítačích. Proto mnoho dříve obvyklých metod rychle zastaralo a jiné, náročnější metody, které věrněji popisují fyzikální skutečnost, se všeobecně rozšířily. Specializovaná pracoviště našich vědeckých a výzkumných ústavů a průmyslových závodů jsou vybavena programovými systémy pro zpracování náhodných procesů a pro výpočet životnosti. Nebudeme se jimi zabývat. Zaměříme svůj výklad na potřeby konstruktérů, kteří potřebují podrobněji poznat pouze základy výpočetních metod aby věděli, na jakých předpokladech a principech spočívají a do jaké míry lze důvěřovat výsledkům, ke kterým vedou. Zároveň chceme výkladem některých pojmů ze statistiky a z teorie náhodně buzených mechanických soustav doplnit poznatky, které vysokoškolské studium strojního oboru běžně neposkytuje.

V závěru skript připojujeme výklad tvarové pevnosti svařovaných konstrukcí. Na toto téma již nezbylo v semináři roku 1981 místo. Soustředujeme se jen na nejdůležitější poznatky a na hlavní zásady, podle kterých by měly být tyto konstrukce navrhovány, aby se účelně využilo vlastností materiálu.

Oba zmíněné semináře tvoří tematický celek. Proto se v těchto skriptech neopakují poznatky uvedené dříve. Výklad je však koncipován tak, aby byl srozumitelný i těm, kdo se předchozího semináře nezúčastnili.

Autor upřímně děkuje Domu techniky ČSVTS Praha, zvláště Ing. Vladimíru Václavíkovi za vzornou organizaci obou seminářů a za spolupráci při vydání těchto skript. Děkuje také účastníkům semináře, kteří příznivě ocenili jeho uspořádání. Velký zájem a živý ohlas prvního semináře svědčí o tom, že únava materiálu je téma stále aktuální, pro technickou praxi potřebné.

1. Wöhlerova křivka z hlediska statistiky

Wöhlerova křivka znázorňuje závislost amplitudy napětí při periodickém střídavém zatěžování na počtu cyklů zatížení do lomu. Není-li napětí střídavé (při němž $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$), je nutné připojit ještě informaci o středním napětí, popř. o nesouměrnosti cyklu ($R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$, $-1 \leq R \leq 1$). Místo amplitudy lze do diagramu vynášet horní napětí nesouměrného cyklu; z legendy to však musí být vždy zřejmé. Bývá pravidlem, že se horní napětí vynáší při míjivém namáhání ($\sigma_{\min} = 0$, $R = 0$).

Z praktických důvodů se Wöhlerova křivka nekreslí v rovnoměrných stupnicích ($\sigma - N$), ale v semilogaritmických ($\sigma - \log N$) nebo logaritmických ($\log \sigma - \log N$). Šikmá větev se v tomto posledním případě dá znázornit - alespoň v určitém rozsahu proměnných - přímkou o rovnici

$$\log N + b \log \sigma = \log c, \quad (1.1)$$

kde σ je amplituda napětí, N počet cyklů zatížení do lomu, b , c jsou konstanty. Po odlogaritmování dostaneme zákon

$$N \sigma^b = c. \quad (1.2)$$

Vzniká otázka, jak takovou přímkou resp. křivku experimentálně vyšetřit.

Podrobnostmi, které tu nebudeme uvádět, se zabývají normy ČSN 42 0302 (názvosloví při zkoušení kovů na únavu), ČSN 42 0363 (metodika zkoušení únavy kovů), ČSN 42 0368 (statistické vyhodnocování výsledků zkoušek únavy kovů) a ČSN 01 0250 (statistické metody v průmyslové praxi). Připomeneme jen, že každý vzorek lze na dané úrovni zatěžování zkoušet do poruchy jen jednou. K další zkoušce je zapotřebí jiného vzorku, který se už nikdy přesně neshoduje s předchozím vzorkem, takže při opakované zkoušce vyjde poněkud jiná životnost (počet cyklů do lomu N). Na každé úrovni napětí $\sigma = \sigma_i$ proto dostaneme určitý počet navzájem různých bodů, v nichž $N = N_{ij}$ podle obr. 1 ($i = 1, 2,$

..., m ; j = 1, 2, ..., n_i). Jestliže zjistíme, že na každé úrovni jsou kladné odchylky od střední hodnoty logaritmu

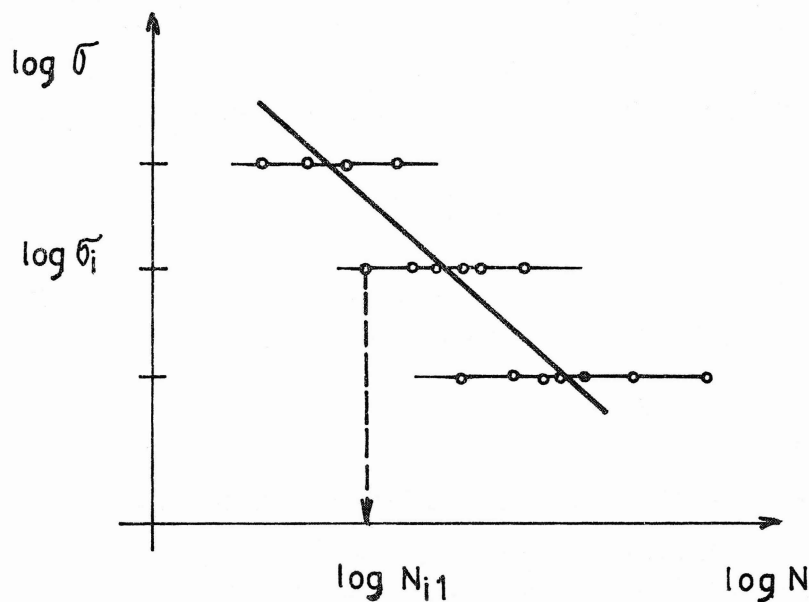
$$\overline{\log N_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \log N_{ij} \quad (1.3)$$

přibližně stejně časté jako záporné odchylky o stejné absolutní hodnotě, bude hodnota (1.3) nejpravděpodobnějším nevychýleným odhadem "správné" hodnoty. Pak odchylky

$$\varepsilon_{ij} = \overline{\log N_i} - \log N_{ij} \quad (1.4)$$

dají podle očekávání nulový součet

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_i} \varepsilon_{ij} &= n_i \overline{\log N_i} - \sum_{j=1}^{n_i} \log N_{ij} = \\ &= n_i \overline{\log N_i} - n_i \overline{\log N_i} = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$



Obr. 1

Protože úvahy, které dále uvedeme, se týkají kterékoli hladiny napětí, vynecháme na okamžik index i . Bude pak

$$\overline{\log N} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log N_j, \quad (1.3 A)$$

$$\varepsilon_j = \overline{\log N} - \log N_j, \quad (1.4 A)$$

$$\sum_{j=1}^n \varepsilon_j = 0. \quad (1.5 A)$$

Kdybychom uskutečnili velký počet zkoušek, vyplnily by body na obr. 1 takřka spojitě vždy celou vodorovnou úsečku. Kdybychom vybrali na této úsečce interval odchylek $(\varepsilon_k, \varepsilon_k + d\varepsilon)$, připadlo by do něho tím více bodů, čím větší by byla délka intervalu $d\varepsilon$ a čím větší by byl počet zkoušek n na dané úrovni napětí. Činitel úměrnosti nechť je p_k . Potom do zmíněného "nekonečně krátkého" intervalu připadne celkem $p_k \cdot n \cdot d\varepsilon$ bodů. Pravděpodobnost, že nějaký bod padne právě do tohoto intervalu, bude tedy $p_k \cdot n \cdot d\varepsilon / n = p_k d\varepsilon$. Veličina p_k se nazývá hustota pravděpodobnosti.

Budeme nyní předpokládat, že odchylky jsou navzájem statisticky nezávislé, takže pravděpodobnost, že první bod padne do intervalu $(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon)$ a druhý zároveň do intervalu $(\varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon)$ bude dána součinem pravděpodobností $p_1 d\varepsilon \cdot p_2 d\varepsilon$. Podobně pro ostatní body, takže pravděpodobnost, že každý bod zapadne do "svého" intervalu $\varepsilon_j, \varepsilon_j + d\varepsilon$, bude

$$P = (d\varepsilon)^n p_1 p_2 \dots p_n. \quad (1.6)$$

Veličina P je nekonečně malá n -tého řádu, což jsme zvlášť nevyznačili. Správnou střední hodnotu $\overline{\log N}$ neznáme, můžeme ji podle (1.3 A) pouze odhadnout. K tomu, abychom ji znali přesně, bychom potřebovali nekonečně mnoho vzorků, to však nikdy nebudeme mít. Je samozřejmé, že čím bude vzorků více, tím lepší odhad dostaneme. Na střední hodnotě závisí podle (1.4 A) všechna ε_j , tedy též p_j . Pravděpodobnost P bude proto funkcí proměnné $\bar{x} = \overline{\log N}$, což vyjádříme zápisem $P = P(\bar{x})$. Pro správně odhadnuté \bar{x} bude zřejmě P maximální, neboť nejpravděpodobnější rozdělení bodů bude takové, jaké skutečně nastává (každá odchylka bude ve "svém" intervalu $(\varepsilon_j, \varepsilon_j + d\varepsilon)$). Proto musí být $dP/d\bar{x} = 0$.*) Budeme předpokládat, že veličina p_j závisí

*) Tato podmínka se někdy označuje jako "princip maximální věrohodnosti".

pouze na velikosti odchylky ε_j , takže $p_j = p_j(\varepsilon_j)$. Potom P závisí na \bar{x} jako složená funkce $P = P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\bar{x})$. Všimněme si, že derivace (1.4 A) dává

$$\frac{d\varepsilon_j}{d\bar{x}} = \frac{d\varepsilon_j}{d(\log N)} = 1. \quad (1.7)$$

Protože má být součin $p_1 p_2 \dots p_n$ maximální, bude též maximální jeho logaritmus. Ale logaritmus součinu je součtem logaritmů jednotlivých činitelů. Takže podmínku maxima veličiny P při konstantním zvoleném $d\varepsilon$ lze napsat s využitím (1.7) ve tvaru

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{d\varepsilon_j} (\ln p_j) = 0. \quad (1.8)$$

Veličina \bar{x} musí být tak veliká, aby platilo (1.8). Zároveň však chceme, aby platilo (1.5 A), tj. aby veličina $\bar{x} = \log N$ nabývala hodnoty (1.3 A). To bude možné jen tehdy, když jednotlivé sčítance na levé straně (1.8) budou úměrné sčítancům na levé straně (1.5 A)

$$\frac{d}{d\varepsilon_j} (\ln p_j) = k\varepsilon_j. \quad (1.9)$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$\ln p_j = \frac{1}{2} k \varepsilon_j^2 + \ln C \quad (1.10)$$

Protože to platí pro jakýkoli index j , můžeme jej v dalším textu vynechat. Po odlogaritmování dostaneme

$$p = C e^{\frac{1}{2} k \varepsilon^2}. \quad (1.11)$$

Protože velké odchylky ε jsou méně pravděpodobné než malé, musí být konstanta úměrnosti k záporná. S označením $C = 1/\sqrt{2\pi} D$, $k = -D^{-2}$ dostaneme známý Gaussův zákon

$$p = p(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot D} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{D^2}}, \quad (1.12)$$

kde D^2 je rozptyl souboru. Konstanta C splňuje podmínku

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\varepsilon) d\varepsilon = 1. \quad (1.13)$$

Ta vyjadřuje poznatek, že každá odchylka ε padne s jistotou do intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Když v rovnici (1.12) připojíme opět index a dosadíme do (1.6) vidíme, že

$$P = (d\varepsilon)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}D} \right)^n \exp \left[-\frac{1}{2D^2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2) \right]. \quad (1.14)$$

To znamená, že maxima P dosáhneme minimalizací součtu čtverců $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2$. Jsme proto oprávněni použít metody nejmenších čtverců k vyhledání "správné" hodnoty $\log N$ a tedy - za určitých předpokladů - i k proložení regresní přímky soustavou bodů na obr. 1. Přitom hodnota $\log \sigma$ je deterministická (operátorem nastavená), $\log N$ náhodná (je ovlivněna mnoha faktory, které nemůžeme sledovat jinak než podle jejich celkového projevu v rozptylu zjišťovaných hodnot $x_i = \log N_i$).

Při "nekonečně velkém" počtu vzorků by se aritmetický průměr (1.3 A) rovnal skutečně správné střední hodnotě $\mu = \log N$. Při konečném počtu vzorků bude hodnota $\bar{x} = \overline{\log N}$ pouze odhadem správné hodnoty μ . Jednotlivé vzorky dají $x_i = \log N_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Rozptyl základního souboru o nekonečně velkém počtu vzorků je aritmetickým průměrem čtverců odchylek; označíme jej D^2 . Pro velké n bude

$$D^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2. \quad (1.15)$$

Hodnotu μ neznáme; místo ní máme jen odhad \bar{x} . Ptáme se, jaký by byl rozptyl \bar{D}^2 průměrů opakovaných zkoušek, tedy hodnot

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}. \quad \text{První index u } x_{ij} \text{ znamená vybraný soubor, druhý}$$

značí pořadí vzorku v tomto výběru. Výběrů je celkem k . Bude

$$\begin{aligned} \bar{D}^2 &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} - \mu \right)^2 = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - n\mu \right)^2 = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)^2 = \\ &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k D^2 = \frac{1}{n} D^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

To znamená, že rozptyl aritmetického průměru z n náhodně vybraných hodnot je n -krát menší než rozptyl základního souboru hodnot.

Při odvození (1.16) jsme využili předpokladu, že kladné odchylky jsou stejně časté jako záporné o stejné absolutní velikosti, takže

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - n\mu \right)^2 &= \left[(x_{i1} - \mu) + (x_{i2} - \mu) + \dots + (x_{in} - \mu) \right]^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ j \neq \ell}}^n (x_{ij} - \mu)(x_{i\ell} - \mu) = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \mu)^2 \end{aligned}$$

V podvojném součtu se všechny členy přibližně zruší; to platí tím přesněji, čím je větší n . Lze totiž - při zvoleném j - vždy najít takový pár hodnot $(x_{i\ell_1} - \mu), (x_{i\ell_2} - \mu)$, které se liší jen znaménkem.

Zkusíme dostat do výpočtu součet čtverců odchylek od aritmetického průměru $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$. Podle (1.15)

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{2}{n} (\bar{x} - \mu) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu)^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Za poslední člen dosadíme jeho střední hodnotu \bar{D}^2 podle (1.16), takže

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \bar{x}) + \frac{1}{n} D^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} D^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Kdybychom odhadli rozptyl D^2 jako $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n$, což se zdá logické, bylo by podle (1.18)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = D^2 - \frac{1}{n} D^2 \quad (1.19)$$

To znamená, že odhad by v limitě $n \rightarrow \infty$ dával sice správnou hodnotu D^2 , ale blížil by se k této hodnotě zleva. Šlo by tedy o vychýlený odhad (s výchytkou $-D^2/n$). Nevychýlený (nestranný) odhad D^2 dostaneme, když zvolíme za výběrový rozptyl hodnotu

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.20)$$

Když tuto hodnotu dosadíme na levou stranu rovnice (1.19), bude

$$\frac{n-1}{n} s^2 = \frac{n-1}{n} D^2 \quad (1.21)$$

a tedy $s^2 = D^2$.

Nevychýlený odhad s^2 rozptylu podle rovnice (1.20) pak dosadíme do Gaussova zákona (1.12) místo neznámé "správné" hodnoty D^2 . Tato rovnice bude zřejmě záviset na dvou parametrech \bar{x} a s . Je totiž $\varepsilon = \bar{x} - x$. Gaussovo rozložení je tedy dvouparametrické. Dostaneme je pomocí střední hodnoty \bar{x} a výběrové směrodatné odchylky s (odmocniny z výběrového rozptylu)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(\bar{x} - x)^2}{s^2} \right]. \quad (1.22)$$

Pravděpodobnost, že nějaká hodnota padne do intervalu $(x, x+dx)$, je $p(x) dx$. Pravděpodobnost, že bude $x \leq \xi$, je

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} p(x) dx. \quad (1.23)$$

To je distribuční funkce, pro niž platí ohraničení $0 \leq F(\xi) \leq 1$. Zřejmě

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.24)$$

Rovnice (1.23) a (1.24) jsou navzájem inverzní. Uvedeme nyní příklad, na kterém ukážeme praktický význam dosud odvozených poznatků.

Příklad 1

Při napětí 560 MPa bylo uskutečněno 8 zkoušek na únavu s tímto počtem kmitů do lomu

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$N \cdot 10^{-3}$	763	1532	2845	3322	9411	14713	24023	46296

Hodnoty N zlogaritmuje (použijeme dekadických logaritmů) a vypočítáme aritmetický průměr

$$\overline{\log N} = 54,23075 / 8 = 6,77884, \text{ takže } \overline{N} = 6\ 010\ 000.$$

Vypočítáme výběrový rozptyl

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\log N_i - \overline{\log N})^2 = \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left[n \sum_{i=1}^n (\log N_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \log N_i \right)^2 \right] = \\ &= \frac{8 \cdot 370,28691 - (54,23075)^2}{8 \cdot 7} = 0,38071, \end{aligned}$$

$$s = 0,61702.$$

To znamená, že při dalších zkouškách na téže úrovni namáhání bude mít vždy asi polovina vzorků životnost kratší než 6 010 000 cyklů. Spíše než tato střední hodnota nás bude pro posouzení spolehlivosti konstrukce zajímat nejkratší životnost. Tu lze předpovídat jen do jisté míry. Předpokládáme, že platí Gaussův zákon (1.22) a že chceme znát počet cyklů N_0 , který přežije 95 % všech vzorků. Budeme tedy chtít, aby $F(\xi) = 0,05$. Buď ze statistických tabulek nebo výpočtem na programovatelné kalkulačce (popř. počítači) dostaneme, že

$$\log N_0 = \overline{\log N} - 1,645s.$$

Distribuční funkce normálního rozložení bývá součástí softwaru dokonce i minipočítačů a kapesních kalkulaček (např. TI 58 nebo TI 59).
Dosazením

$$\log N_0 = 6,77884 - 1,645 \cdot 0,61702 = 5,763842,$$

$$\text{takže } N_0 = 580\ 553.$$

Ve skutečnosti neznáme ani střední hodnotu, ani rozptyl spolehlivě, protože jsme je určovali pouze z osmi vzorků. Koefficient 1,645 je proto třeba nahradit jiným a to koefficientem pro jednostrannou toleranční mez

$$l = l(n, P, \gamma),$$

který je tabelován v ČSN 01 0250. Dostaneme

$$\log N_0^* = \overline{\log N} - l \cdot s.$$

S pravděpodobností γ lze pak tvrdit, že levostranný interval $(-\infty, N_0)$ pokryje 100 P % všech vzorků. Kdybychom zvolili $P = \gamma = 0,95$, dostali bychom pro $n = 8$ hodnotu $l = 3,188$.
Vyšlo by

$$\log N_0^* = 6,77884 - 3,188 \cdot 0,61702 = 4,81178,$$

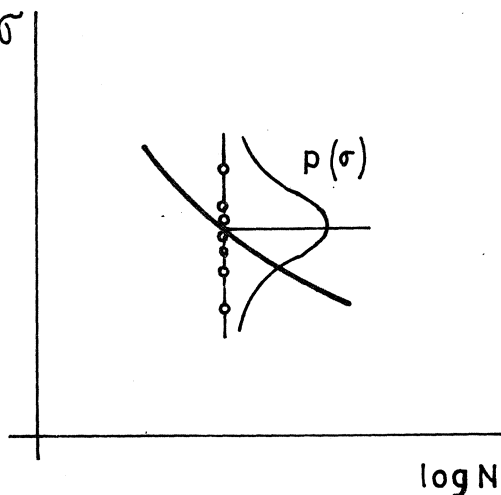
$$N_0^* = 64\,831.$$

To je podstatně méně než N_0 . Zde se ukazuje jak je důležité, aby-
chom zkoušeli dostatečný počet vzorků. *)

Spojením takto vypočtených hodnot ve Wöhlerově diagramu na obr. 1
dostaneme křivku, která představuje mez 95 % přežití.

Poznámka

Wöhlerova křivka znázorňuje funkci $f(\sigma, N)$. Je poněkud nelogic-
ké, že jsme za náhodnou veličinu považovali počet cyklů N a nikoli
časovanou pevnost σ . Při statické zkoušce tahem, jejíž výsledek lze
považovat za krajní bod Wöhlerovy křivky, je totiž $N = 0,5$, považu-
jeme-li namáhání za míjivé (nebo $N = 0,25$ při střídavém namáhání);
dále je $\sigma = \sigma_{Pt}$. Pak N je zcela jasně přesná deterministická hod-
nota, kdežto pevnost σ_{Pt} je zatížená rozptylem plynoucím z metalur-
gických a technologických vlivů, nehledě k chybám vlastního měření;
je to tedy náhodná veličina. Mezi pojetím obou zkoušek je zřejmý roz-
por. Kdybychom měli hodně vzorků, mohli bychom při zkouškách na únavu
vybrat vzorky s určitou zvolenou životností N a statisticky zpraco-
vávat příslušné časované pevnosti σ
jako náhodné veličiny. Ukázalo by se,
že hodnota σ má na rovnoměrné
stupnici přibližně Gaussovo rozděle-
ní (obr. 2). Z praktického důvodu
nelze zkoušky vyhodnocovat při kon-
stantním N , ale je nutné volit
pro N určitý interval a statis-
ticky zpracovávat jednotlivá "hnízda"
bodů v semilogaritmických souřadni-
cích. Takový postup je podrobně po-
psán v literatuře /27/.



Obr. 2

*) Hodnotu 1,645 dostaneme jako $l(\infty, 0,95, \gamma)$. Tato limitní
hodnota nezávisí na γ .

Právě to, že jsme zvolili hodnotu ζ za deterministickou veličinu (kterou můžeme na zkušebním stroji vždy stejně nastavit), způsobilo, že nikoli N , ale teprve $\log N$ má normální rozdělení, někdy však ani to ne. Pak je možné užít Weibullova rozdělení, které je tříparametrické. O něm jsme se zmínili už v předchozím semináři.

2. Deterministické funkce

K výpočtu životnosti potřebujeme znát časový průběh napětí $\zeta = x(t)$ v kritickém místě. Je-li možné předpovědět jednoznačně velikost této hodnoty v každém okamžiku, je funkce $x(t)$ deterministická. Příkladem může být průběh namáhání nějakého pružného členu při ustáleném harmonickém kmitání. V nejjednodušším případě jde o prostou sinusovku

$$x(t) = a \sin(2\pi f_0 t - \vartheta). \quad (2.1)$$

Hodnota f_0 je frekvence (počet kmitů za sekundu), ϑ fázový úhel. Někdy je kmit složen z několika harmonických složek o různých frekvencích. Např. ze dvou složek

$$x(t) = a \sin(2\pi f_1 t - \vartheta_1) + b \sin(2\pi f_2 t - \vartheta_2). \quad (2.2)$$

Je-li f_1/f_2 racionální číslo, je tento pohyb periodický. *) V opačném případě je perioda nekonečně dlouhá, takže pohyb není periodický.

Každou periodickou funkci, která je konečná, spojitá nebo jen s konečným počtem nespojitostí, lze rozvinout ve Fourierovu řadu.

Podmínka periodicity je

$$x(t + nT) = x(t), \quad (2.3)$$

kde n je celé číslo, T perioda. Fourierova řada má tvar

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t), \quad (2.4)$$

kde

$$f_1 = \frac{1}{T},$$

*) Je-li $f_1/f_2 = n/m$ (n, m celá nesoudělná čísla), je perioda $T = m/f_2 = n/f_1$.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\pi n f_1 t \cdot dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\pi n f_1 t \cdot dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Fourierovu řadu (2.4) můžeme přepsat do tvaru

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t - \vartheta_n), \quad (2.5)$$

kde

$$X_0 = \frac{a_0}{2}, \quad X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \vartheta_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}.$$

U lineárních dynamických systémů je odezva na harmonické buzení silami ve tvaru (2.5) dána součtem odezev na jednotlivé harmonické složky.

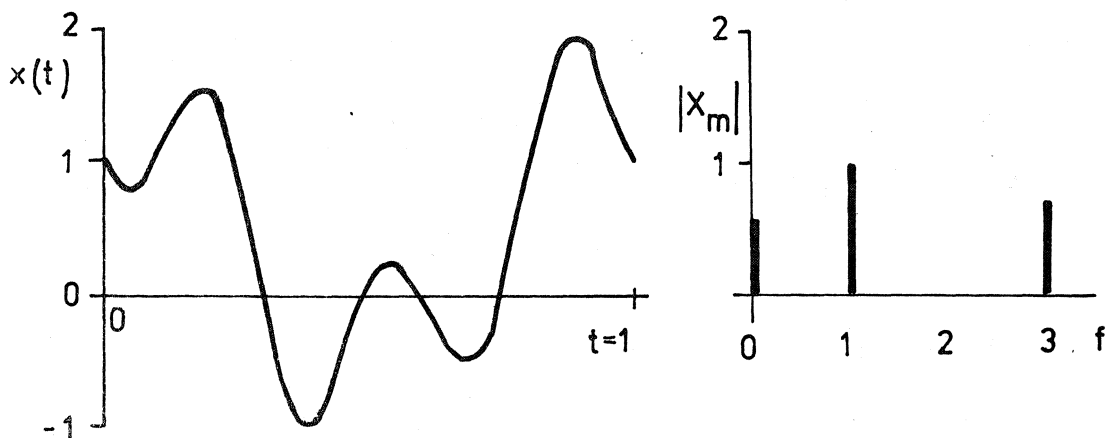
Odezva se zesiluje, když budicí frekvence $f_n = n f_1$ ($n = 1, 2, \dots$) se blíží k některé rezonanční (vlastní) frekvenci soustavy; odezva je pak přibližně úměrná amplitudě budicí síly X_n . Vliv ostatních složek je v blízkosti rezonance n -té složky relativně malý a na jejich vzájemném fázovém posunutí záleží jen málo. Proto považujeme amplitudy $|X_n|$ za důležitější informaci než fázové úhly ϑ_n . Veličiny $|X_n|$, z nichž každá je přiřazena určité frekvenci $f_n = n f_1$, představují spektrum. Zvolíme-li např. *)

$$x(t) = 0,5 + \cos 2\pi t - 0,7 \cos(6\pi t - \frac{\pi}{4}),$$

bude mít $x(t)$ periodu $T = 1$ a spektrum $|X_1| = 1$ pro $f_1 = 1$, $|X_3| = 0,7$ pro $f_3 = 3 f_1 = 3$ (obr. 3). Spektrum tedy neobsahuje žádnou informaci o fázových úhlech. Spektrum periodické funkce je vždy čárové. Takové je však i u neperiodické funkce, lze-li ji vyjádřit součtem harmonických funkcí

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi f_n t - \vartheta_n). \quad (2.6)$$

*) Připustíme-li v rovnici (2.5) záporné hodnoty X_n , musíme vyznačovat absolutní hodnotu.

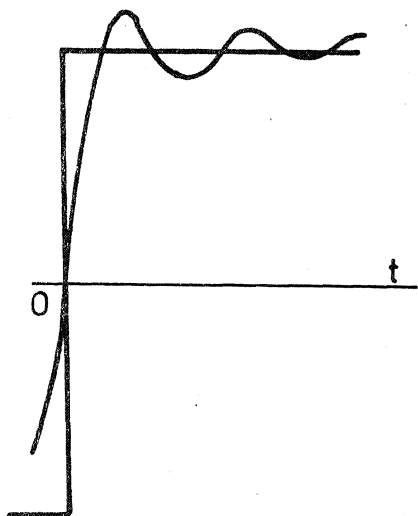


Obr. 3

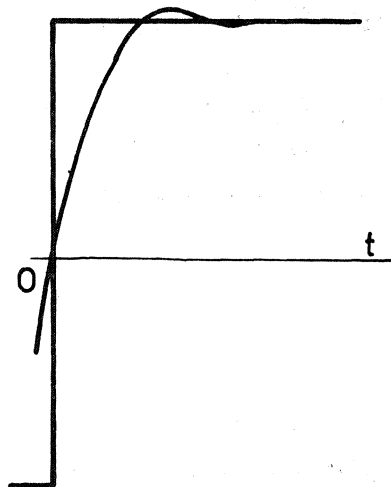
Neperiodičnost je dána jen tím, že podíly frekvencí f_j/f_k ($j \neq k$; $j, k = 1, 2, \dots$) nejsou všechny racionální (na rozdíl od Fourierovy řady).

Z praktických důvodů nemůžeme brát ve Fourierově řadě (2.5) do výpočtu nekonečný počet členů; bude jich jen N . Obsahuje-li funkce $x(t)$ nějakou nespojitost (skok), potom konečný počet členů ve Fourierově řadě způsobí, že funkce (2.5) se v okolí nespojitosti "roz-
kmitá" (obr. 4). To je Gibbsův jev. Lze jej prakticky odstranit tím, že se jednotlivé amplitudy X_n ($n = 1, 2, \dots, N$) násobí váhový-
mi koeficienty

$$q_n = \frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \quad (2.7)$$



Obr. 4



Obr. 5

Příklad průběhu takto vyhlazené funkce z obr. 4 je zakreslen na obr. 5. Podrobný výklad k tomuto způsobu vyhlazení je v literatuře /23/.

Existují ovšem i ryze neperiodické funkce, jejichž spektrum je spojité, protože je nelze vyjádřit jako součet harmonických funkcí, kterých by bylo jen spočetné množství. Např. funkce

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{-at} \cos \omega t, & t \geq 0, \\ x(t) &= 0, & t < 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

představuje tlumené kmitání charakteristické pro přechodové pohybové stavy. Takovou funkci lze považovat za limitní případ periodické funkce s nekonečnou periodou. Fourierova řada, kterou převedeme do komplexního tvaru (užitím Eulerových vzorců) pak v limitě přejde ve Fourierův integrál. Místo amplitud $|X_n|$ dostaneme amplitudy $|X(f)|$, které jsou obecně spojitou funkcí f , přičemž

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (2.9)$$

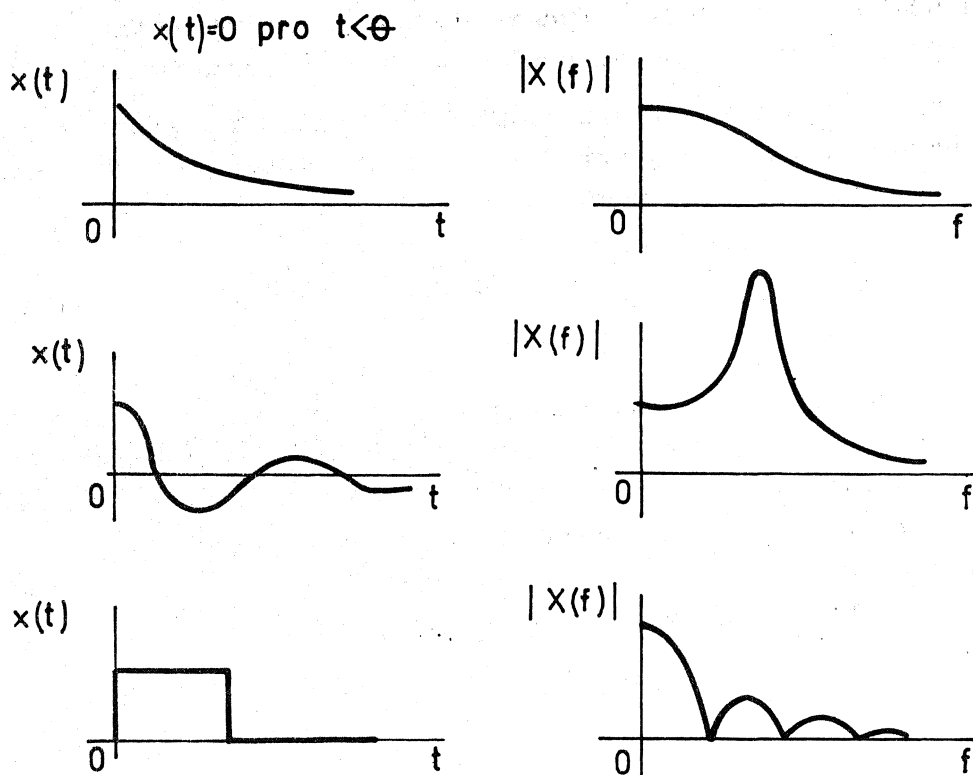
Veličina $X(f)$ je obecně komplexní. Lze ji napsat ve tvaru

$$X(f) = |X(f)| e^{-i\varphi(f)}. \quad (2.10)$$

Funkce $|X(f)|$ tvoří spektrum, v němž není obsažena informace o fázovém úhlu $\varphi(f)$. Komplexní funkce $X(f)$ však obsahuje úplnou informaci, takže zpětnou transformací lze získat původní funkci

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df. \quad (2.11)$$

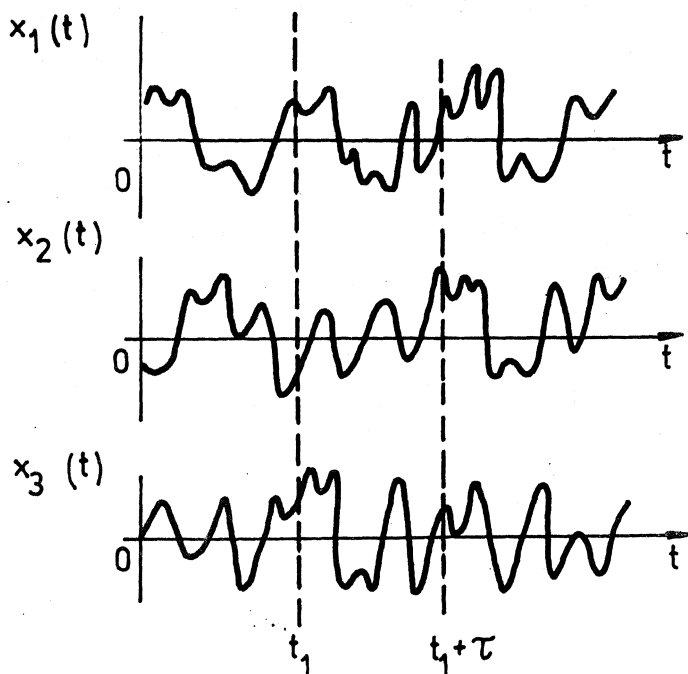
Příklady různých takových funkcí a jejich spekter jsou znázorněny na obr. 6. Na rozdíl od diskrétního čárového spektra $|X_n|$ je spektrum $|X(f)|$ spojitou funkcí frekvence.



Obr. 6

3. Náhodné funkce

Budeme-li proměřovat např. namáhání pružiny vozidla při jízdě po nerovné vozovce, bude se k statickému (klidovému) namáhání přičítat časově proměnná hodnota $x_1(t)$, kterou nebudeme moci předem vypočítat, neboť bude záviset nejen na vlastnostech vozidla, ale i na nerovnostech vozovky, které nejsou nijak pravidelné ani známé. Zopakujeme-li pokus se stejným vozidlem, na stejné vozovce a při stejné rychlosti, dostaneme jinou, i když obdobnou funkci $x_2(t)$. Tak můžeme zopakovat pokus mnohokrát; vždy dostaneme jinou realizaci $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) téhož náhodného procesu $x(t)$. Podobně bychom mohli měřit namáhání najednou na několika vozidlech téže konstrukce. Vozidla by jela těsně vedle sebe po stejné, dostatečně široké vozovce. Ani v tom případě nebudou údaje $x_i(t)$ při stejném t stejné. Budou to pouze současně probíhající realizace téže náhodné funkce $x(t)$ (obr. 7). Tato funkce nemůže být popsána žádným explicitním matematickým výrazem, ale jen svými statistickými charakteristikami.



Obr. 7

Především můžeme stanovit pro každý okamžik $t = t_1$ střední hodnotu

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1). \quad (3.1)$$

Abychom získali názor o časovém průběhu náhodné funkce (kterou můžeme poznávat jenom nepřímo ze souboru realizací), vytvoříme ještě průměrnou hodnotu součinu $x(t_1) \cdot x(t_2)$. Označíme-li $t_2 = t_1 + \tau$, bude

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau). \quad (3.2)$$

Veličina R_x se nazývá autokorelační funkce. Vyjadřuje, do jaké míry jsou hodnoty x_k v okamžiku $t_1 + \tau$ ovlivněny týmiž hodnotami v okamžiku t_1 ; tuto závislost přitom posuzujeme v průměru ze všech realizací.

Jestliže se funkce $\mu_x(t_1)$ a $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ mění v závislosti na t_1 , je funkce $x(t)$ nestacionární. V opačném případě je μ_x konstantní a R_x závisí pouze na τ ; pak je funkce $x(t)$ slabě stacionární. Jsou-li na čase t_1 nezávislé ještě další součty obdobné k výrazu (3.2) (střední hodnoty součinů vyšších stupňů), je funkce $x(t)$ silně stacionární.

V technické praxi se obvykle spokojujeme konstatováním slabé stacionarity a hovoříme pak už jen o stacionární funkci bez další specifikace.

Kdybychom vrhli na stůl najednou např. 600 hracích kostek, asi na šestině z nich by padl zvolený počet ok (například šestka). K stejnému výsledku bychom dospěli, kdybychom házeli jednou kostkou šestsetkrát. To nás přivádí k myšlence, že veškeré informace o náhodném procesu $x(t)$ jsou možná obsaženy v každé jednotlivé realizaci, trvá-li dostatečně dlouho (stacionární proces je teoreticky nekonečný). To může pro daný proces platit, ale neplatí to vždy. Je-li tomu tak, je proces ergodický. Střední hodnota $\mu_x(k)$ pro k -tou realizaci stacionárního procesu se vypočte ze vzorce

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt \quad (3.3)$$

Obdobně vypočteme i autokorelační funkci

$$R_x(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t+\tau) dt \quad (3.4)$$

Pro ergodický proces je $\mu_x(k) = \mu_x$, $R_x(\tau, k) = R_x(\tau)$. Každá jednotlivá realizace ergodického procesu je dostatečně reprezentativní a stačí k určení potřebných statistických charakteristik, které vyjdou stejně, nezávisle na tom, kterou realizaci použijeme k jejich výpočtu podle vzorců (3.3) a (3.4). Tyto charakteristiky se přitom shodují s těmi, které bychom jinak získali průměrováním hodnot podle rovnic (3.1) a (3.2). To platí jen pro ergodické procesy. Ergodičnost je užší pojem než stacionarita. Každý ergodický proces je zároveň stacionární. Opačné tvrzení neplatí.

Poznámka

Za náhodnou funkci lze považovat i sinusovku, jestliže její amplituda popř. fázový úhel jsou náhodná čísla. Při každé realizaci pak máme jinou amplitudu nebo jiný fázový úhel nebo obojí.

4. Typy náhodných procesů a jejich popis

Uvedli jsme již rozdělení náhodných procesů na stacionární a nestacionární. V technické praxi se většinou setkáváme se stacionárními procesy nebo alespoň s takovými, které lze rozdělit na několik procesů a každý z nich považovat za stacionární. Říkáme, že takové procesy jsou stacionární po částech. Ve skutečnosti není toto vyjadřování přesné. Registrujeme-li náhodný proces, je délka záznamu vždy konečná, kdežto stacionární proces je ve skutečnosti nekonečný. Konečnost záznamu omezuje přesnost jeho vyhodnocení. To platí zvláště o ergodických procesech, které zpravidla vyhodnocujeme ze záznamu jediné realizace. Většina náhodných procesů, s kterými se ve strojnictví setkáváme, je přibližně ergodická.

Nadále budeme předpokládat, že jde o ergodický proces $x(t)$, jehož střední hodnota je

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (4.1)$$

a autokorelační funkce

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (4.2)$$

Vzorce (4.1) a (4.2) platí pro kteroukoli realizaci $x_i(t)$; proto jsme index i vynechali. Z poslední rovnice dostaneme moment druhého řádu

$$\Psi_x^2 = R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (4.3)$$

a jeho odmocněním efektivní hodnotu Ψ_x .

Vytvoříme-li podle (4.3) moment druhého řádu nikoli s funkcí $x(t)$, ale s centrovanou funkcí $x(t) - \mu_x$, dostaneme rozptyl

$$D_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt. \quad (4.4)$$

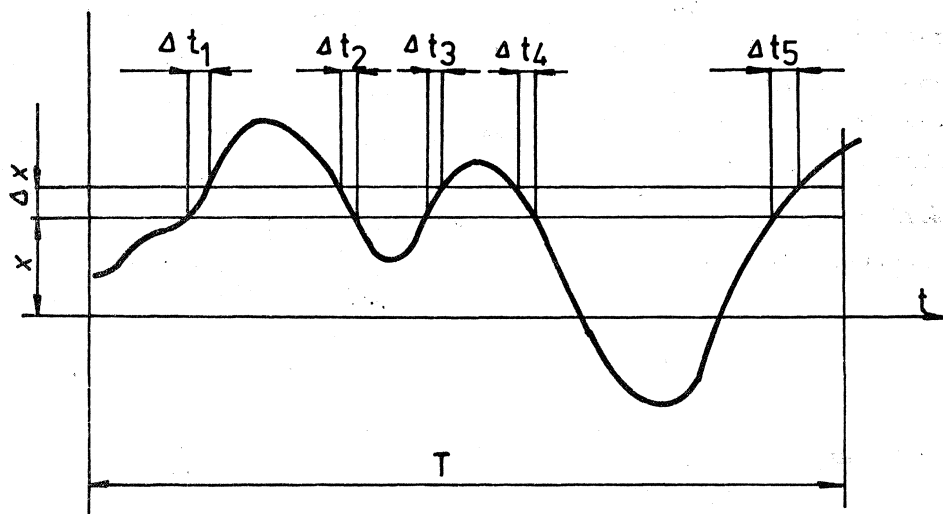
Odmocnina z rozptylu je směrodatná odchylka D_x . Rozepsáním (4.4) dostaneme vztah

$$D_x^2 = \Psi_x^2 - \mu_x^2. \quad (4.5)$$

Položme si otázku, jaká je pravděpodobnost, že funkce $x(t)$ nabude hodnoty v intervalu $\langle x, x + \Delta x \rangle$. Podle obr. 8 vytvoříme součet

$$T_x = \sum_{i=1}^k \Delta t_i \quad (4.6)$$

a podělíme dobou pozorování T (ta musí být dostatečně dlouhá).



Obr. 8

Dostaneme pravděpodobnost

$$P[x \leq x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \quad (4.7)$$

Pro malá Δx bude hodnota T_x úměrná šířce intervalu Δx , takže poslední výraz se bude rovnat součinu $p(x)\Delta x$, kde $p(x)$ je hustota pravděpodobnosti

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \right] \quad (4.8)$$

Distribuční funkce náhodného procesu je pak

$$P[x(t) \leq x] = \int_{-\infty}^x p(\xi) d\xi \quad (4.9)$$

Jinými slovy: bude-li čas pozorování T dostatečně dlouhý, potrvá čas, po který bude $x \leq x(t) \leq x + \Delta x$ celkem $T_x = T p(x) \Delta x$. Tomu bude odpovídat přírůstek v integrálu (4.1)

$$d\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} x T_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} x T p(x) dx = x p(x) dx, \quad (4.10)$$

takže

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \quad (4.11)$$

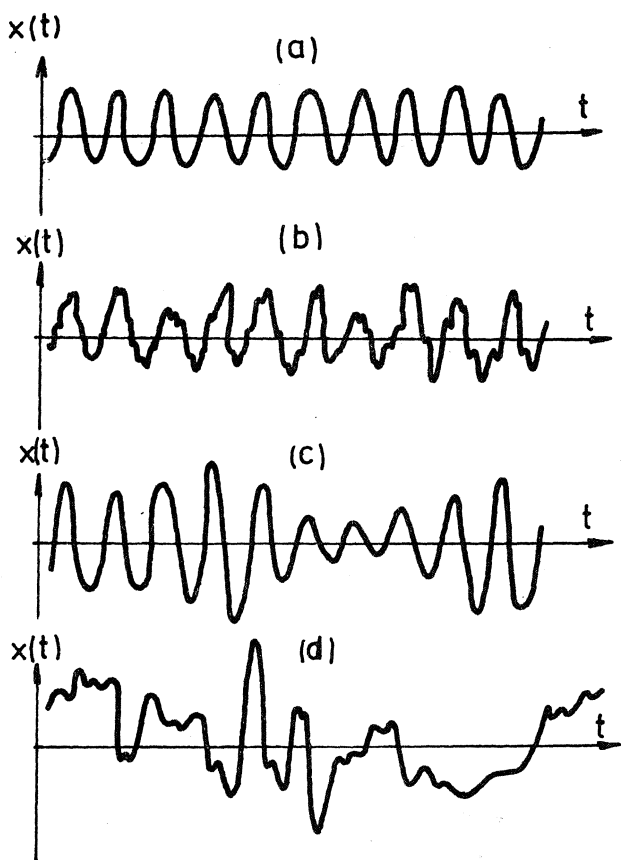
Obdobně můžeme vypočítat z rovnice (4.3) a (4.8)

$$\Psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx. \quad (4.12)$$

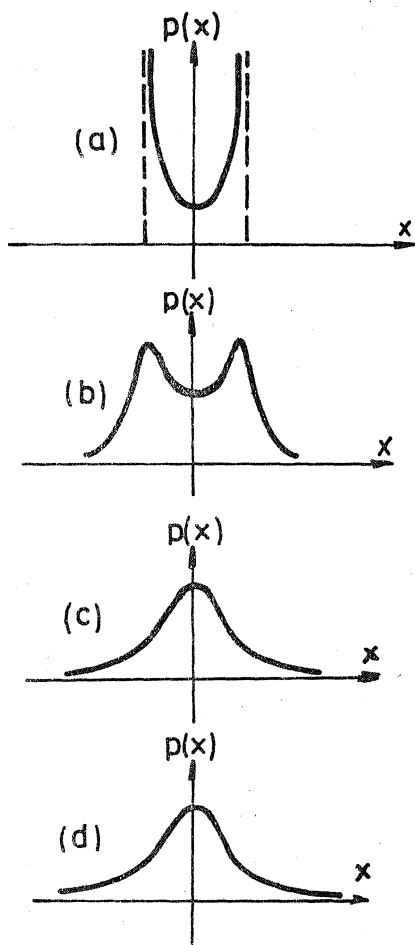
Na obr. 9 jsou zakresleny čtyři typy náhodných funkcí $x(t)$ a to (a) sinusovka, (b) sinusovka se superponovaným šumem, (c) úzkopásmový proces a (d) širokopásmový proces. Příslušné hustoty pravděpodobnosti jsou zakresleny na obr. 10. Autokorelační funkce, vypočtené podle (4.2), jsou uvedeny pro tyto příklady na obr. 11.

Bude-li náprava vozidla, s kterým pojíždíme na nerovné vozovce lineárně tlumená, bude se tlumičem mařit mechanická práce a měnit v teplo. Nechť $x(t)$ značí náhodný časový průběh rychlosti pístu v tlumiči. Potom síla v tlumiči je $F = cx(t)$, kde c je konstanta tlumiče. Předpokládáme, že pracovní charakteristika tlumiče je lineární. Přírůstek dráhy tlumiče za čas dt je $x(t) dt$, takže se vykoná práce $dA = cx^2(t) dt$. Průměrný výkon za dobu T bude

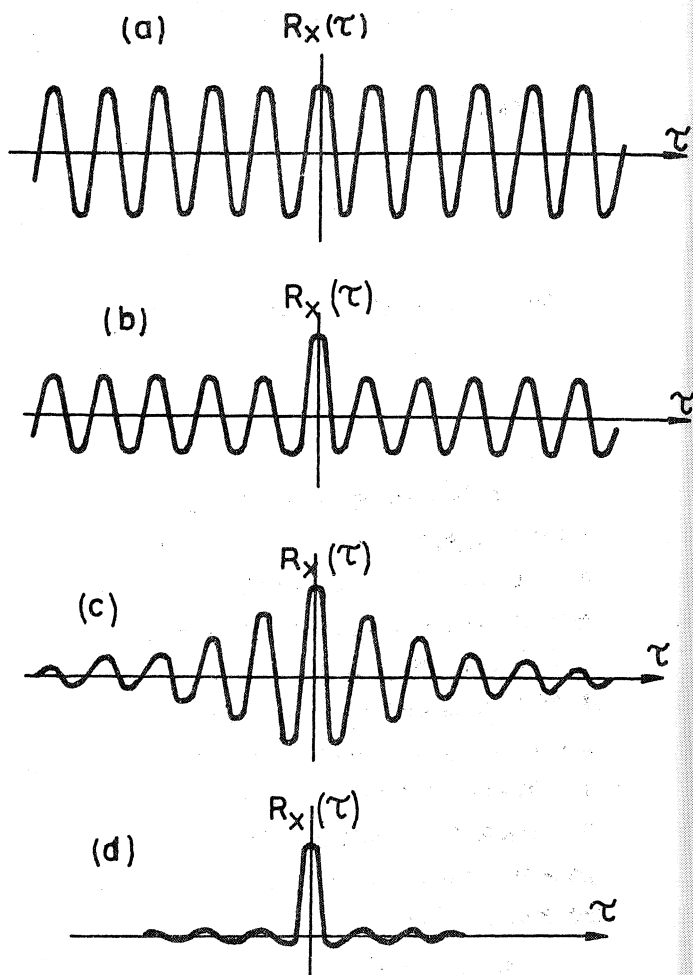
$$P = \frac{c}{T} \int_0^T x^2(t) dt. \quad (4.13)$$



Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11

Pro $\lim T \rightarrow \infty$ bude podle (4.13) a (4.3)

$$\mathcal{P} = c \Psi_x^2 \quad (4.14)$$

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $c = 1 \text{ N m}^{-2}$, takže $\mathcal{P} = \Psi_x^2$. Jde jen o otázku měřítka pro výkon \mathcal{P} . Zajímá nás, jak se na této hodnotě podílejí frekvence spektra $|X(f)|$ daného procesu. Vypočteme část $\Delta \mathcal{P}$ výkonu připadající do frekvenčního intervalu $(f, f + \Delta f)$. Bude $\Delta \mathcal{P} = \Delta \Psi_x^2 \cong G_x(f) \Delta f$, takže v limitě

$$G_x(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\Delta f} = \frac{d\mathcal{P}}{df} = \frac{d\Psi_x^2}{df} \quad (4.15)$$

Hodnotu $\Delta \mathcal{P} / \Delta f \cong G_x(f)$ bychom mohli zjišťovat experimentálně. Stačilo by převést rychlost $x(t)$ na elektrickou veličinu, např. na napětí,

připojit úzkopásmový filtr a na výstupu zjistit moment druhého řádu (kvadrát efektivní hodnoty). Veličina ΔP představuje část výkonu připadající na frekvenční interval $(f, f + \Delta f)$ a poměr $\Delta P / \Delta f$ představuje proto výkonovou spektrální hustotu. Přesněji se veličina $G_x(f)$ nazývá experimentální (resp. jednostranná) výkonová spektrální hustota.

Z rovnice (4.15) dostaneme integraci

$$\Psi_x^2 = \int_0^{\infty} G_x(f) df. \quad (4.16)$$

Název jednostranná výkonová spektrální hustota souvisí s tím, že frekvenci f bereme jako nezáporné číslo. U kmitavého pohybu skutečně nemá smysl hovořit o záporné frekvenci. Jde-li však o kruhový pohyb s úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi f$, je nutné rozlišovat záporné a kladné hodnoty. Proto se definuje ještě dvoustranná výkonová spektrální hustota $S_x(f)$, která je sudou funkcí frekvence, takže $S_x(-f) = S_x(f)$. Potom

$$\Psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = 2 \int_0^{\infty} S_x(f) df \quad (4.17)$$

a ze srovnání s rovnicí (4.16) vyjde

$$G_x(f) = 2 S_x(f) \quad \text{pro } 0 \leq f < \infty, \quad (4.18)$$

$$G_x(f) = 0 \quad \text{pro } f < 0.$$

V odborné literatuře najdeme často ještě jinou definici, vycházející z kruhové frekvence ω . Protože $d\omega = 2\pi df$, dostaneme místo (4.17) vztah

$$\Psi_x^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (4.19)$$

Srovnáním se (4.17) resp. (4.18) dostaneme vztahy

$$\left. \begin{aligned} S_x(f) &= 2\pi S_x(\omega), \\ G_x(f) &= 4\pi S_x(\omega) \quad \text{pro } 0 \leq \omega < \infty, \\ G_x(f) &= 0 \quad \text{pro } \omega < 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Z definice tušíme, že spektrální výkonová hustota musí nějak souviset se spektrem $|X(f)|$. Skutečně, stačí dosadit vztah (2.10) do (4.3). Dostaneme

$$\begin{aligned} \Psi_x^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \cdot dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T x(t) e^{i2\pi ft} dt \cdot \int_0^{\infty} X(f) df = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} X(f)^* \cdot X(f) df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

Hvězdičkou označujeme komplexní sdruženou hodnotu. Srovnáním se (4.16) nahlédneme, že $G_x(t)$ je úměrné $|X(f)|^2$

$$G_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f)|^2 \quad (4.21)$$

Později - v souvislosti s rovnicí (5.6) - ukážeme přesněji, jak rozumět limitnímu přechodu naznačenému v rovnici (4.21).

Existuje ještě jeden důležitý vztah, totiž vztah mezi výkonovou spektrální hustotou a autokorelační funkcí. Abychom to ukázali, vypočítáme Fourierovu transformaci autokorelační funkce (4.2)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t+\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

Integrand rozšíříme činitelem $1 = e^{i2\pi ft} e^{-i2\pi ft}$, čímž se jeho hodnota nezmění; pak dosadíme novou proměnnou $u = t + \tau$. Postupně vyjde

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i2\pi ft} \cdot x(t+\tau) e^{-i2\pi f(t+\tau)} d\tau dt &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{i2\pi ft} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi fu} du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{i2\pi ft} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi fu} du = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X(f)^* X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X(f)|^2.
\end{aligned}
\tag{4.23}$$

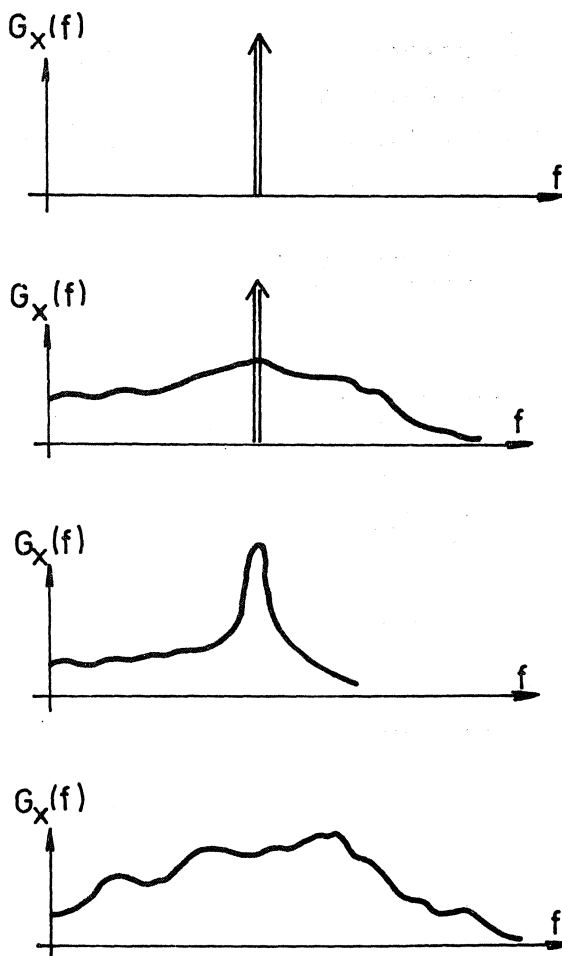
Změnu mezí pro t z intervalu $(0, T)$ na interval $(-T, +T)$ jsme si mohli dovolit, protože jde o stacionární proces, takže autokorelační funkce nezáleží na poloze počátku integrační oblasti. Ze srovnání (4.22), (4.23) a (4.21) najdeme, že

$$G_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = 4 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau
\tag{4.24}$$

Experimentální výkonová spektrální hustota je tedy dvojnásobkem Fourierovy transformace autokorelační funkce. Při úpravě pravé strany rovnice (4.24) jsme využili poznatku, že autokorelační funkce je sudá.

Příklady průběhů experimentálních spektrálních výkonových hustot pro náhodné funkce z obr. 9 jsou zakresleny na obr. 12. Zdvojenou šipkou je vyznačena Diracova delta-funkce.

Kdybychom chtěli využít vztahu (4.24) k výpočtu výkonové spektrální hustoty ze záznamu autokorelační funkce, nemohli bychom z praktických důvodů integrovat na nekonečném intervalu. Zvolili bychom meze $(-T, +T)$. Tím by vzniklo v průběhu $G_x(f)$ zkreslení (rozkmitání) obdobné Gibbsovu efektu. Pak by mohlo $G_x(f)$ nabýt pro některé frekvence dokonce záporných hodnot, což je fyzikálně nemožné. O různých způsobech potlačení tohoto zkreslení pojednává např. /1/, /21/.



Obr. 12

Dosud probírané funkce charakterizují jeden náhodný proces. Vztah mezi dvěma takovými procesy $x(t)$, $y(t)$ charakterizují obdobné funkce, např. vzájemná korelační funkce

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau) dt \quad (4.25)$$

a vzájemná spektrální výkonová hustota

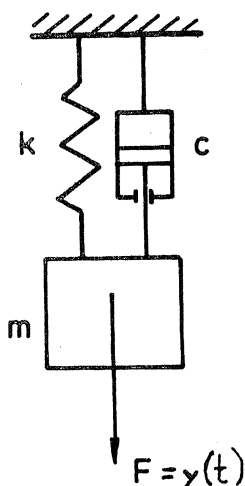
$$G_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau. \quad (4.26)$$

Někdy se hodnota $|G_{xy}|^2$ normuje podělením součinem $G_x(f)G_y(f)$, takže vznikne koherentní funkce

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_x(f)G_y(f)}. \quad (4.27)$$

Lze ukázat, že $0 \leq \gamma_{xy}^2 \leq 1$. Tato hodnota je mírou statistické závislosti obou náhodných procesů při dané frekvenci f . Odmocnina z koherentní funkce je obdobou známého korelačního koeficientu.

5. Odezva náhodně buzené mechanické soustavy



Obr. 13

Přepokládejme, že na hmotu zavěšenou na pružině a tlumiči podle obr. 13 působí síla, jejíž časový průběh je dán náhodnou funkcí $y(t)$. Pak posuv z rovnovážné polohy bude dán jinou náhodnou funkcí $x(t)$ (této funkci bude úměrné i namáhání pružiny, jejíž hmotnost zanedbáváme). Za obvyklých předpokladů je vztah mezi x a y popsán lineární diferenciální rovnicí

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = y. \quad (5.1)$$

Tuto rovnici znásobíme na obou stranách činitelem $e^{-i2\pi ft} dt$ a zintegrujeme v mezích $(-T, T)$; první dva členy přitom upravíme integracemi per partes, takže např.

$$\int_{-T}^T \dot{x}(t) e^{-i2\pi ft} dt = \left[x e^{-i2\pi ft} \right]_{-T}^T + i2\pi f \int_{-T}^T x e^{-i2\pi ft} dt =$$

$$= i2\pi f \int_{-T}^T x e^{-i2\pi ft} dt = i2\pi f X_T(f). \quad (5.2)$$

Člen v hranaté závorce jsme při úpravě (5.2) vynechali, neboť můžeme předpokládat, že na okrajích intervalu $t = \pm T$ bude $x = 0$. Předpísem těchto okrajových hodnot není náhodnost funkce $x(t)$ uvnitř intervalu nijak omezena.

Pro zrychlení $\ddot{x}(t)$ zopakujeme tento postup dvakrát. Z rovnice (5.1) pak dostaneme

$$[k - 4\pi^2 f^2 m + i2\pi fc] X_T(f) = Y_T(f), \quad (5.3)$$

kde $X_T(f)$, $Y_T(f)$ jsou časově omezené Fourierovy transformace (pro $T \rightarrow \infty$ rostou do nekonečna, neboť oba procesy jsou stacionární). Označme

$$H(f) = [k - 4\pi^2 f^2 m + i2\pi fc]^{-1} \quad (5.4)$$

a řekněme tomuto výrazu obrazový přenos [přenos Fourierova obrazu $Y_T(f)$ do obrazu $X_T(f)$]. Je totiž podle (5.3)

$$X_T(f) = H(f) Y_T(f). \quad (5.5)$$

Vytvoříme součin $X_T(f)^* X_T(f) = |X_T(f)|^2$, podělíme na obou stranách T a přejdeme k limitě $T \rightarrow \infty$. Bude

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 = |H(f)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |Y_T(f)|^2 \quad (5.6)$$

S použitím (4.21) odtud dostaneme

$$G_x(f) = |H(f)|^2 G_y(f), \quad (5.7)$$

tedy vztah mezi výkonovou spektrální hustotou na vstupu a na výstupu. Nyní je už snadné získat také autokorelační funkci na výstupu. K tomu stačí, abychom použili ve vztahu (4.24) inverzní Fourierovu transformaci /s přihlédnutím k (4.18)/

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{i2\pi f\tau} df = \int_0^{\infty} G_x(f) \cos(2\pi f\tau) df. \quad (5.8)$$

Vztahy (4.24) a (5.8) vyjadřují Wienerovu-Chinčinovu větu.

Poznámka

Zdálo by se, že stačí určit Fourierovu inverzní transformaci funkce $X(f)$ podle (5.5) (pro dostatečně velké T) a podle (2.10), abychom dostali přímo funkci $x(t)$; víc by nás nemusilo zajímat. Ale to by bylo nepochopení podstatného rysu náhodných procesů. Funkci $x(t)$ nemůžeme obecně získat. Jediné, co můžeme takto určit, jsou jednotlivé realizace $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., odpovídající jednotlivým realizacím $y_1(t)$, $y_2(t)$, V obecnosti je náhodná funkce popsána svými charakteristikami $R_x(\tau)$, $G_x(f)$ atd. Ty jsou společné pro všechny realizace (pokud je proces ergodický).

6. Životnost při normálním úzkopásmovém procesu náhodného namáhání

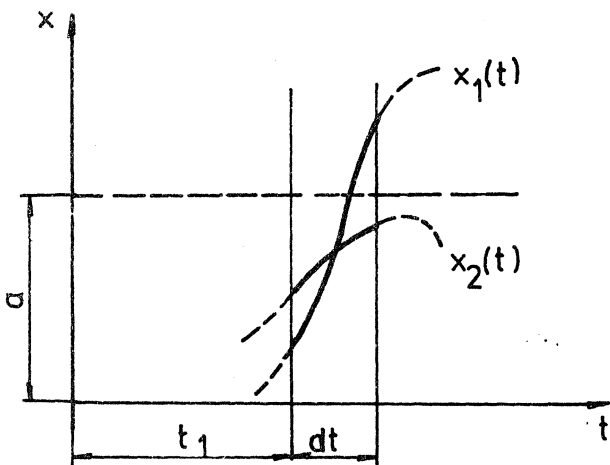
Pro úzkopásmový proces, jehož příklad je zakreslen na obr. 9(c) je charakteristické to, že počet překřížení osy vyznačující střední hodnotu je zároveň (velmi přibližně) dvojnásobkem počtu pozitivních vrcholů (lokálních maxim nad touto osou). Na obr. 9(c) je střední hodnota nulová, takže jde o překřížení osy úseček. Při úzkopásmovém procesu jsou tedy jednotlivé cykly zatížení zřetelné, protože celý proces se podobá sinusovce

$$s(t) = a \sin(\omega t - \psi) \quad (6.1)$$

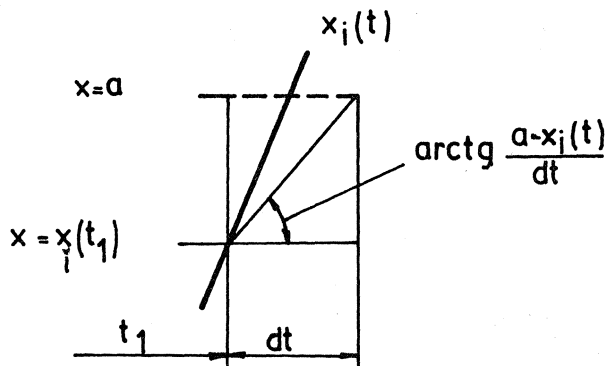
s pomalu se měnící amplitudou $a(t)$ a fázovým úhlem $\psi(t)$. Má-li takový proces známé rozdělení, např. Gaussovo normální rozdělení, lze poměrně snadno analyticky určit očekávané poškození materiálu za určitou dobu. Odtud pak dostaneme - např. užitím Minerova pravidla - životnost. Pojem "očekávaná hodnota" je v kontextu našeho výkladu vhodnější než ekvivalentní označení "matematická naděje".

Všechny realizace $x_i(t)$ náhodného procesu $x(t)$ protnou svislici $t = t_1$ (obr. 14), ale jen málo jich protne v intervalu $(t_1, t_1 + dt)$ také vodorovnou přímkou $x = a$ s kladnou směrnici $dx/dt > 0$. K tomu, aby realizace $x_i(t)$ s vlastností $x_i(t_1) < a$ prošla v intervalu $(t_1,$

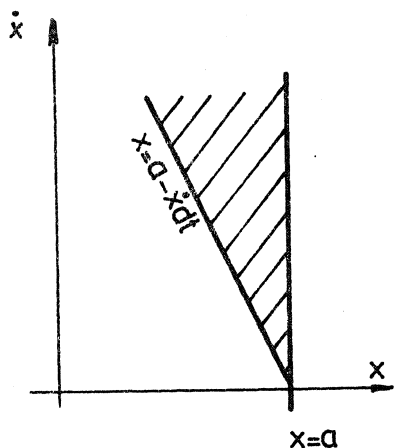
$t_1 + dt$) čáru $x = a$ je nutné, aby měla směrnici větší než $[a - x_i(t_1)] / dt$ (viz obr. 15), aby tedy $a - x_i(t_1) < \dot{x}_i(t_1) dt < \infty$. To tedy také znamená, že $a - \dot{x}_i(t_1) dt < x_i(t_1) < \infty$. Index i nyní pro stručnost vynecháme. Podmínku, kterou jsme právě napsali, lze snadno znázornit v rovině x, \dot{x} (obr. 16). Příznivé případy vyplní čárkovanou plochu.



Obr. 14



Obr. 15



Obr. 16

Pravděpodobnost, že x bude v mezích od x do $x + dx$ a zároveň \dot{x} v mezích od \dot{x} do $\dot{x} + d\dot{x}$ je $p(x, \dot{x}) dx d\dot{x}$. Proto počet očekávaných překřížení čáry $x = a$ za dobu dt bude

$$v_a^+ dt = \int_0^\infty d\dot{x} \int_{a - \dot{x} dt}^a p(x, \dot{x}) dx. \quad (6.2)$$

Protože $dx/dt = \dot{x}$, dá rovnice (6.2) počet očekávaných překřížení za sekundu ve tvaru

$$v_a^+ = \int_0^\infty \dot{x} p(a, \dot{x}) d\dot{x}. \quad (6.3)$$

Použili jsme přitom větu o střední hodnotě integrálu. Protože přepokládáme stacionární normální proces, jsou procesy $x(t)$, $\dot{x}(t)$ statisticky nezávislé. To znamená, že $p(x, \dot{x}) = p(x) \cdot p(\dot{x})$. S použitím Gaussova vzorce (1.12) odtud dostaneme

$$p(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{D_x D_{\dot{x}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{D_x^2} + \frac{\dot{x}^2}{D_{\dot{x}}^2} \right) \right]. \quad (6.4)$$

Tuto hodnotu dosadíme do (6.3) a zintegrujeme. Vyjde

$$v_a^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{D_{\dot{x}}}{D_x} \exp \left(-\frac{a^2}{2D_x^2} \right). \quad (6.5)$$

Rozptyly D_x^2 resp. $D_{\dot{x}}^2$ dostaneme ze vzorců (4.5) a (4.16)

$$D_x^2 = \Psi_x^2 = \int_0^\infty G_x(f) df, \quad (6.6)$$

$$D_{\dot{x}}^2 = \Psi_{\dot{x}}^2 = \int_0^\infty G_{\dot{x}}(f) df = 4\pi^2 \int_0^\infty f^2 G_x(f) df \quad (6.7)$$

popř. podle (4.5) a (4.3)

$$D_x^2 = R_x(0), \quad (6.8)$$

$$D_{\dot{x}}^2 = R_{\dot{x}}(0) = - \left. \frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}. \quad (6.9)$$

Očekávaná (střední) frekvence f_0 úzkopásmového normálního procesu s nulovou střední hodnotou je dána počtem překřížení osy úseček s pozitivní směrnici, takže podle (6.5)

$$f_0 = v_0^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{D_{\dot{x}}}{D_x}. \quad (6.10)$$

Značí-li v_a^+ podle (6.5) počet očekávaných překřížení hodnoty $x = a$ za sekundu (s pozitivní směrnici), bude rozdíl $v_a^+ - v_{a+da}^+$ dávat počet vrcholů v intervalu od $x = a$ do $x = a + da$. Označíme-li příslušnou hustotu pravděpodobnosti $p(a)$, bude ^{*)}

$$p(a) da = \frac{v_a^+ - v_{a+da}^+}{v_0^+} = - \frac{1}{v_0^+} \cdot \frac{\partial v_a^+}{\partial a} da, \quad (6.11)$$

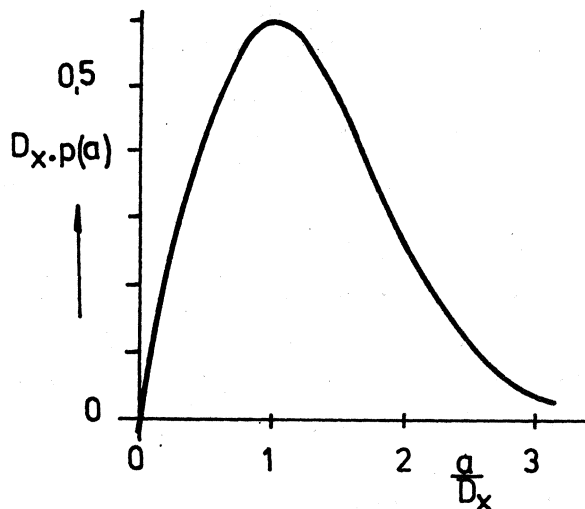
*) Jmenovatel v_0^+ představuje podle (6.10) očekávanou frekvenci, tedy též očekávaný počet všech (pozitivních) vrcholů za sekundu.

takže hustota pravděpodobnosti, s jakou jsou rozděleny vrcholy procesu $x(t)$ v intervalu $< 0, \infty)$, je

$$p(a) = -\frac{1}{v_3^+} \cdot \frac{\partial v_a^+}{\partial a} = \frac{a}{D_x^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2D_x^2}\right). \quad (6.12)$$

To je Rayleighovo rozdělení (obr.17)

Hodnota a v rovnici (6.12) představuje nyní amplitudu napětí σ v kritickém místě konstrukce. Wöhlerova křivka je dána vztahem (1.2). K výpočtu celkového poškození použijeme lineární Minerovy teorie, o které však víme, že nedává příliš spolehlivé výsledky. Důvodem, pro který ji přesto používáme, je jednoduchost výpočtů založených na lineárním zákonu kumulace dílčích poškození. Podle Shanleye /48/ lze zmírnit nesouhlas Minerovy teorie poškození se skutečností tím, že se místo rovnice (1.2) použije jiná, obdobná, v níž se více zdůrazní velké amplitudy napětí; toho se dosáhne zdvojnásobením exponentu, takže za referenční mezní čáru se vezme



Obr. 17

$$N = c \cdot \sigma^{-d}, \quad d = 26. \quad (6.13)$$

Za jednotku času pak vznikne dílčí poškození napětím o amplitudě $\sigma = a$ s počtem cyklů $v_a^+ - v_{a+da}^+ = -(\partial v_a^+ / \partial a) da$ o velikosti

$$-\frac{1}{N} \frac{\partial v_a^+}{\partial a} da = \frac{a^d}{c} f_0 \frac{a}{D_x^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2D_x^2}\right) da. \quad (6.14)$$

Při úpravě tohoto výrazu jsme použili (6.10), (6.12) a (6.13). Celkové očekávané poškození za jednotku času je dáno integrálem výrazu (6.14) v mezích od $a=0$ do $a=\infty$. Počítají se tedy - podle Shanleye - i cykly pod mezí únavy. Doba T životnosti konstrukce je dána podmínkou, že T -násobek poškození vzniklého průměrně za jednotku času dosáhne hodnoty jedna. Bude tedy

$$T = \frac{c D_x^2}{f_0} \left[\int_0^{\infty} a^{d+1} \exp\left(-\frac{a^2}{2D_x^2}\right) da \right]^{-1}. \quad (6.15)$$

V literatuře lze najít zobecnění tohoto výpočtu i pro nestacionární procesy /42/.

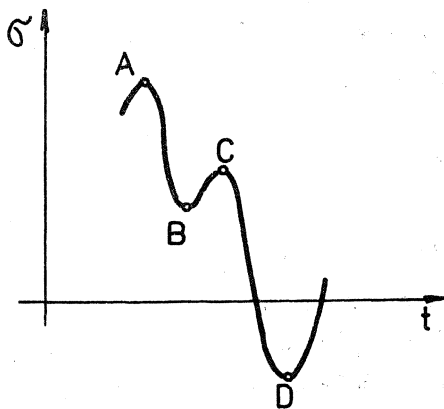
1. poznámka

V první části semináře jsme pro míru poškození použili symbolu D . Ve vzorci (6.15) však D_x^2 značí rozptyl náhodného procesu $x(t) = \sigma(t)$ v souladu s označením v rovnici (4.4). Tyto veličiny se nesmí zaměňovat. Pro rozptyl se často používá symbolu σ_x^2 (místo D_x^2). Zde by zase mohlo dojít k záměně se symbolem σ pro napětí.

2. poznámka

Ukázali jsme, v čem spočívá Shanleyova korekce Minerovy lineární teorie poškození. Takových oprav bylo navrženo mnoho. Jejich přehled obsahují např. práce /10/, /27/, /60/. Výpočty životnosti poskytují odhad, jakousi reprezentativní hodnotu. Nedávají žádnou představu o rozptylu životností skutečných částí (podrobněji se k tomuto problému vrátíme ještě v 9. kapitole). Minerova teorie vede často k výpočtovým hodnotám větším než skutečným. Korigované teorie dávají proto životnost kratší, bližší ke skutečnosti.

7. Způsoby počítání cyklů namáhání



Obr. 18

U širokopásmových náhodných procesů není snadné určit, co je vlastně "cyklus" namáhání, který způsobuje dílčí poškození známé velikosti, závislé na amplitudě a na střední hodnotě cyklu. Je třeba stanovit nějaká pravidla, určit metodický postup. Vezměme si např. část průběhu funkce $\sigma(t)$ podle obr. 18. Spíše než o cyklech zde můžeme hovořit o půlcyklech AB, BC, CD. Ke každému půlcyklu můžeme najít střední hodnotu i amplitudu. Např. pro půlcykus AB

$$\bar{\sigma}_m = \frac{1}{2} (\sigma_A + \sigma_B), \quad \sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_A - \sigma_B). \quad (7.1)$$

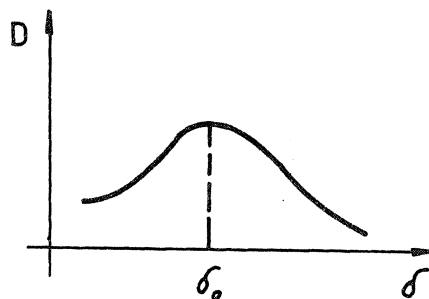
Výsledný počet cyklů pak bude polovinou celkového počtu půlcyklů. Označíme-li počet půlcyklů do lomu P_f , počet cyklů do lomu N_f , bude

$$P_f = 2N_f. \quad (7.2)$$

Zdá se, že jsme tím problém rozřešili. Ale to je jen zdání. Půlcyklus BC nemusí mít prakticky žádný význam, může to být jen mechanický šum pod mezí únavy. Co kdybychom jej tedy vynechali? Potom zůstane jediný půlcyklus AD o značně větší amplitudě. Tento jediný půlcyklus způsobí pravděpodobně značně větší dílčí poškození než dříve uvažované tři půlcykly dohromady. To je důsledkem nelinearity vztahu (1.2) (zatím pomíjíme, že do hry vstupují ještě střední složky napětí).

Proto se popsaná metoda počítání půlcyklů upravuje tak, že se započítávají jen půlcykly, jejichž rozpětí $\Delta\sigma = 2\sigma_a$ překročí zvolenou hodnotu δ (projdou "vstupní branou"). Je ovšem otázka, jak tuto "bránu" volit. Pro daný proces bychom mohli vyzkoušet, jak závisí míra poškození $D = \sum n_i/N_i$ na volbě hodnoty

δ . Příklad takové závislosti je na obr. 19. Abychom počítali co nejbezpečněji, zvolíme takové $\delta = \delta_0$, při němž vzniká největší poškození. To ovšem znamená opakovat sečítání cyklů a dílčích poškození mnohokrát.



Obr. 19

Existují ještě jiné způsoby počítání cyklů resp. půlcyklů /22/.

Nebudeme je všechny probírat.

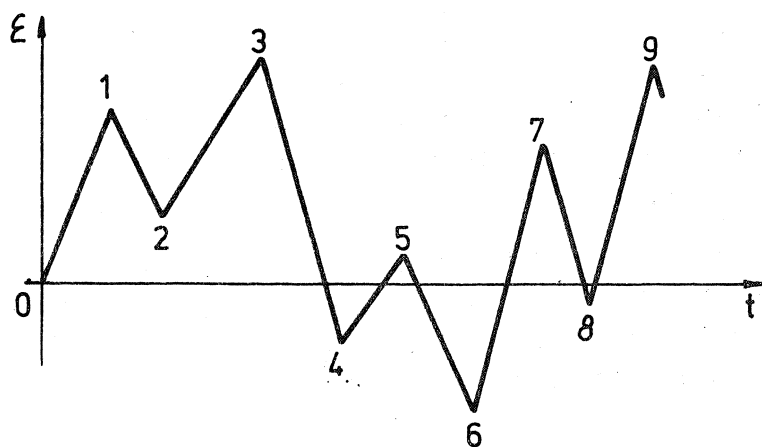
V poslední době byly totiž nahrazeny

tzv. metodou stékání deště (jinak též metodou japonské pagody) /30/.

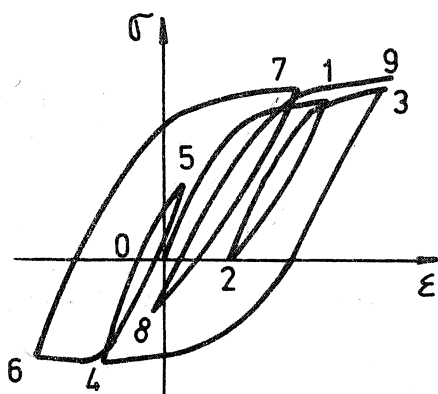
Tato metoda přihlíží k historii zatěžování během únavového procesu a přibližně postihuje chování skutečného materiálu v plastické oblasti namáhání, takže je blízká fyzikální skutečnosti. Žádné cykly přitom nevynechává, ale započítává je tak, aby to co nejlépe odpovídalo skutečné kumulaci poškození s přihlédnutím k tvorbě hysterezních smyček. Tvar těchto smyček se odvozuje z cyklické křivky napětí - přetvoření.

Metodu stékání deště vysvětlíme na příkladu z obr. 20, kde je schematicky zakreslen průběh poměrného přetvoření v kořeni vrubu v závislosti na čase, tedy funkce $\tilde{\epsilon} = \epsilon(t)$. Pro zjednodušení zde spojujeme jednotlivé vrcholy (lokální extrémy) úsečkami, takže kreslíme lomenou čáru, ačkoli skutečný průběh je hladký. Bereme zde poměrné přetvoření místo napětí, protože se dá přímo měřit a může být východiskem pevnostního výpočtu, jak ještě ukážeme. Už v předchozím semináři jsme ostatně

poukázali na to, že konstantní amplitudě zatěžující síly odpovídá v kořeni vrubu spíše konstantní amplituda poměrného přetvoření než konstantní amplituda napětí, která se vlivem cyklické plastické deformace změní. Únavový proces ve vrubu je tedy přesněji určován historií $\varepsilon(t)$ než historií $\sigma(t)$.



Obr. 20



Obr. 21

Vlivem cyklické plastické deformace vznikne v diagramu $\sigma - \varepsilon$ hystereze zakreslená na obr. 21.

Z obrázku je zřejmé, které cykly a jak máme započítat. Jsou to cykly, které tvoří uzavřenou hysterezní smyčku

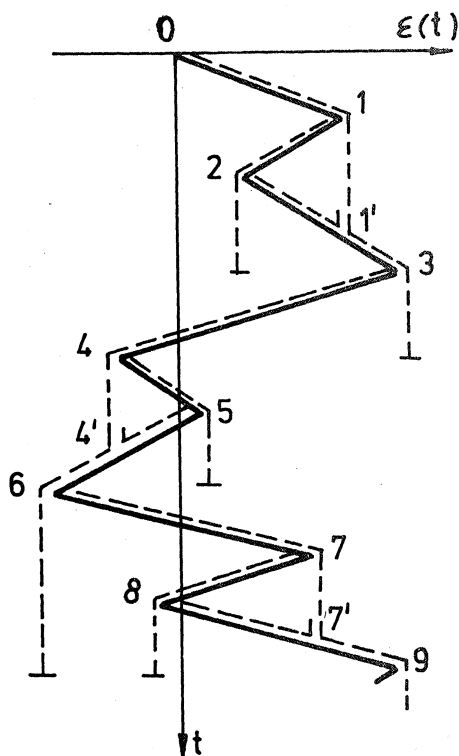
1 - 2 - 1, 4 - 5 - 4, 7 - 8 - 7.

Zbývají ještě půlcykly

0 - 1 - 3, 3 - 4 - 6, 6 - 7 - 9.

Kdyby bod 3 splynul s bodem 9, daly by poslední dva půlcykly jeden uzavřený cyklus 3 - 4 - 6 - 7 - 3.

Ke stejnému výsledku dojdeme, otočíme-li průběh na obr. 20 o 90° a představíme si jej jako skládanou střechu, po které stéká déšť (obr. 22). Proud vody, který začíná v bodě 0, padá se střechy 01 na střechu 23 a pak dolů z bodu 3; zastaví se až proti bodu 4, neboť to je lokální minimum, které je menší než to, v němž proud začal. Konec proudu označíme zarážkou. Proud, který začne na střeše 12 v bodě 1, stéká podobně jen do místa proti bodu 3, protože toto maximum je větší než maximum v bodě 1, kde proud začal. Proud začínající v bodě 2 skončí v okamžiku, kdy narazí na proud padající se střechy 01. Z bodu 3 pooteče proud až na úroveň bodu 9. Podobně i ostatní proudy. Proud začíná na každé střeše a končí tam, kde se dostane na úroveň většího extrému než ze kterého vznikl nebo tam, kde narazí na proud stékající s výše položené střechy.

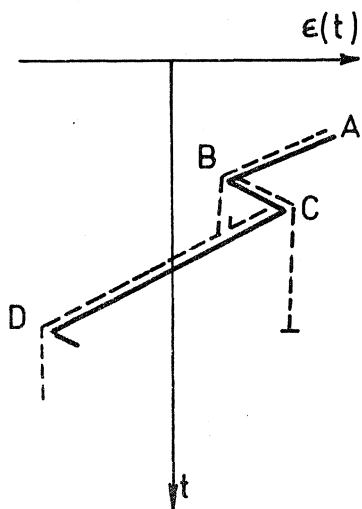


Obr. 22

Na obr. 22 vidíme, že půlcykly 1-2, 2-1' dávají dohromady jeden cyklus 1 - 2 - 1'. Podobně budeme mít uzavřené cykly 4 - 5 - 4' a 7 - 8 - 7', tedy stejné jako dříve. Dále máme půlcykly 0 - 1 - 3, 3 - 4 - 6 a 6 - 7 - 9. Dostaneme tedy tytéž hodnoty jako ze smyček na obr. 21, ale nepotřebujeme žádné smyčky kreslit ani sledovat. Postup, který jsme ukázali, se dá naprogramovat. Počítač projde ovzorkovaný záznam (v digitálním zápisu), podle kritérií popsané metody určí půlcykly, tj. určí jejich počet n_{ij} pro každou zvolenou třídu (ϵ_{ai} , ϵ_{mj}). Tak se získá četnost cyklů v diskrétním maticovém tvaru, vhodném pro výpočet životnosti /12/.

Metoda stékajícího deště zodpovídá otázku, jak správně počítat cykly na obr. 18, takto: brát jeden půlcyklus AD a ještě jeden celý cyklus B - C - B (obr. 23).

Metoda stékajícího deště není jediným návodem k algoritmizaci zápočtů hysterezních smyček. Ve 12. kapitole uvedeme jinou metodu, která to umožňuje. Protože obě metody započítávají stejné hysterezní smyčky, jsou si navzájem ekvivalentní.



Obr. 23

Jestliže známe amplitudy a střední hodnoty cyklů resp. půlcyklů poměrného přetvoření (poměrného prodloužení nebo zkosu), můžeme k výpočtu kumulace životnosti vycházet z Mansonovy-Coffinovy křivky, která popisuje počet cyklů do lomu (resp. do vzniku trhliny) v závislosti na amplitudě poměrného přetvoření při dané střední hodnotě). O této křivce pojednáme podrobněji v 10. kapitole. Jsou však případy, že známe spíše historii napětí $\sigma(t)$ než přetvoření $\epsilon(t)$ (např. u hladké tyče staticky určité namáhané vnější silou známé historie $F(t)$). Pak je zřejmě výhodnější vycházet z Wöhlerovy křivky životnosti.

Vztah mezi napětím a přetvořením se v průběhu cyklického zatížení mění. Obvykle se po krátké době ustálí a v této ustálené etapě namáhání je popsán cyklickou křivkou napětí - přetvoření. Zpravidla zanedbáváme neustálený stav a předpokládáme, že cyklická křivka určuje vztah mezi napětím a přetvořením po celou první etapu únavového procesu, tj. po dobu iniciace trhliny. Tento vztah není lineární a není ani jednoznačný, neboť se uplatňuje ještě historie zatěžování ("paměť" materiálu). K podrobnému výpočtu je třeba sledovat hysteretzní smyčky. K tomu se ještě podrobněji vrátíme ve 12. kapitole. Hysteretzní smyčky slouží nejen k tomu, abychom získali vzájemné přiřazení časových průběhů napětí a přetvoření, ale také k tomu, abychom správně započítávali amplitudy a střední hodnoty jednotlivých půlcyklů do výsledného poškození materiálu. Vycházíme přitom z předpokladu, že poškození vzniká plastickými deformacemi. Existují metody, které se snaží určovat poškození podle celkové disipované energie a podle jejího spektrálního rozdělení /40/, /60/, jimi se však nebudeme zabývat.

8. Simulace náhodného procesu s danou výkonovou spektrální hustotou

Známe-li experimentální výkonovou spektrální hustotu $G_x(f)$, můžeme napodobit realizaci náhodného procesu na počítači. To nám umožní podrobněji sledovat vlastnosti náhodného procesu, aniž musíme znovu opakovat měření. Průběhy, které takto získáme, mají stejnou efektivní hodnotu, ale nejsou věrnými napodobeninami daného náhodného procesu, asi jako aproximace nějaké obecné periodické funkce Fourierovou řadou s konečným počtem členů nedá přesný průběh.

Výchozím vztahem je rovnice (4.16). Podle ní vyjde moment druhého řádu procesu $x(t)$, což je čtverec efektivní hodnoty, jako nevlastní integrál

$$\Psi_x^2 = \int_0^\infty G_x(f) df \quad (8.1)$$

Integrační obor omezíme hodnotou f_n a rozdělíme na intervaly různých délek $\Delta f_k = f_k - f_{k-1}$, tj.

$$(0, f_1), (f_1, f_2), (f_2, f_3), \dots, (f_{n-1}, f_n).$$

Integraci nahradíme součtem (podle obdélníkového pravidla)

$$\int_0^\infty G_x(f) df \doteq \sum_{k=1}^n G_x(f_k) \Delta f_k = \sum_{k=1}^n \Delta \Psi_k^2 \quad (8.2)$$

a pro každý z těchto sčítanců najdeme harmonickou funkci

$$y_k = a_k \cos(2\pi f_k t - \vartheta_k) \quad (8.3)$$

takovou, aby měla stejnou efektivní hodnotu, tj. aby

$$\frac{a_k}{\sqrt{2}} = \Delta \Psi_k = \sqrt{G_x(f_k) \Delta f_k} \quad (8.4)$$

Odtud můžeme vypočítat amplitudu a_k . Součet funkcí y_k pak bude simulovat daný proces. Bude tedy

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^n \sqrt{2 G_x(f_k) \Delta f_k} \cdot \cos(2\pi f_k t - \vartheta_k) \quad (8.5)$$

Fázový úhel ϑ_k volíme podle náhodných čísel rovnoměrně rozdělených na intervalu $(0, 2\pi)$. Přírůstky $\Delta f_k = f_k - f_{k-1}$ volíme nestejně (např. zvolíme f_k náhodně rozdělené), aby se předešlo vzniku periodicity, kterou náhodná funkce $x(t)$ ve skutečnosti nemá. Počet n je účelné volit asi 20 až 120.

Podle vzorce (8.5) si můžeme "vyrobit" na počítači různé realizace náhodného procesu s danou výkonovou spektrální hustotou. Přibližnost spočívá v tom, že spektrum daného procesu je spojité, ale spektrum realizace podle (8.5) je čárové; podobně je nahrazena i původně spojitá výkonová spektrální hustota $G_x(f)$ procesu $x(t)$ diskrétními (oddělenými) hodnotami $G_x(f_k)$ pro frekvence f_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Taková náhrada spojitých funkcí soustavou diskrétních hodnot není ovšem nic neobvyklého; vzpomeňme např. na vzorkování analogových záznamů při

zpracování na digitálních počítačích. Ostatně každá tabelovaná spojitá funkce je pouhou sestavou diskrétních hodnot; takové jsou třeba logaritmické tabulky.

9. Životnost částí při širokopásmovém procesu náhodného namáhání

Má-li proces $x(t)$ široké frekvenční spektrum nelze už tvrdit, že počet překřížení ν_0^+ osy $x = \mu_x$ (střední hodnoty) s kladnou směrnici udává zároveň počet ν_p pozitivních vrcholů. Průběh funkce $x(t)$ je natolik nepravidelný, že je dokonce obtížné určit počet cyklů nebo půlcyklů zatěžování, který potřebujeme znát pro započítávání dílčích poškození, jak jsme se o tom podrobněji zmínili v 7. kapitole.

Označíme stručněji počet všech překřížení střední hodnoty znakem ν_0 (zřejmě $\nu_0 = 2\nu_0^+$) a počet všech vrcholů ν_v (pozitivních i negativních, tj. $\nu_v = 2\nu_p$). Počítáme přitom průměr za jednotku času.

Poměr

$$\alpha = \frac{\nu_0}{\nu_v} \quad (9.1)$$

je tzv. činitel nepravidelnosti. Platí pro něj ohraničení $0 < \alpha \leq 1$. Je-li proces úzkopásmový, je $\alpha = 1$ nebo je to hodnota velmi blízká jedné.

Wirsching a Shehata /59/ navrhli způsob výpočtu takto namáhaných částí, v němž považují činitel nepravidelnosti za základní charakteristiku procesu. To lze ovšem jen přibližně a jen za jistých předpokladů.

Předpokládá se, že amplituda y_a vnější síly je náhodná veličina s Weibullovou distribuční funkcí

$$F(y) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{y_a}{\delta} \right)^\xi \right], \quad (9.2)$$

kde δ , ξ jsou parametry rozdělení. Weibullovo rozdělení je obecně tříparametrické. Třetí parametr je zvolen nulový, takže jej rovnice (9.2) neobsahuje.

Dále se předpokládá, že amplituda napětí je úměrná nějaké mocnině silové veličiny podle vzorce

$$\sigma_a = c \cdot y_a^\phi \quad (9.3)$$

Je-li namáhání v mezích lineární pružnosti, je $\Phi = 1$. Namáhání se předpokládá pružné, tj. předpokládá se vysokocyklová únava. Referenční Wöhlerova křivka má tvar, který lze popsat rovnicí (1.2). Zvolíme poněkud pozměněné označení, takže bude

$$N = \frac{k}{\sigma_a^m} \quad (9.4)$$

Pro míru poškození pak vychází vzorec, který uvedeme bez odvození

$$D = \frac{n}{k} \delta^{m\phi} \cdot c^m \cdot \Gamma\left(1 + \frac{m\phi}{\xi}\right) \quad (9.5)$$

Zde n značí počet cyklů, symbol Γ gamma-funkci. Pro celá čísla platí, že $\Gamma(n) = (n-1)!$. Je to tedy "zobecněný faktoriál".

Autoři citované práce pak simulovali procesy $G(t)$ způsobem popsaným v předchozí kapitole pro různé výkonové spektrální hustoty a počítali cykly metodou stékání deště. Zjišťovali závislost různých charakteristik na činiteli nepravidelnosti α a došli k závěru, že za uvedených předpokladů tento činitel dostatečně charakterizuje daný proces. Pro poškození pak dostali upravený vzorec

$$D = Q(\alpha, m) \cdot \frac{n}{k'} \cdot \delta^{m\phi} \cdot c^m \cdot \Gamma\left(1 + \frac{m\phi}{\xi}\right), \quad (9.6)$$

kde $Q(\alpha, m)$ koriguje předpoklad Weibullova rozdělení. Vliv středního napětí je zahrnut do korekce

$$k' = k \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_f}\right), \quad (9.7)$$

kde σ_m je střední napětí, σ_f kohezivní pevnost (skutečná pevnost při lomu). Parametry ξ , δ se najdou z obr. 24, přičemž Δ_y je směrodatná odchylka síly $y(t)$. Činitel $Q(\alpha, m)$ se odečte z obr. 25.

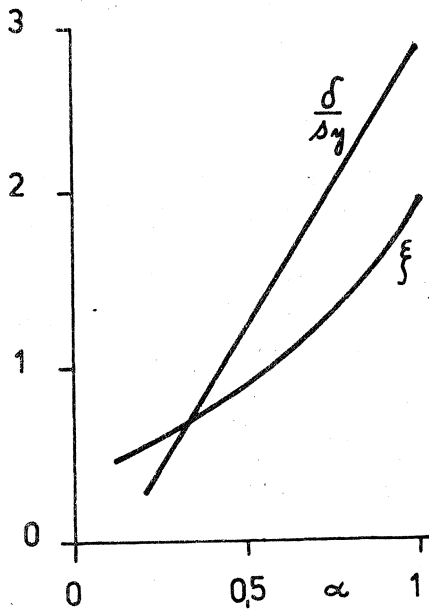
Hodnotu poškození D v okamžiku lomu označíme Δ . Budeme předpokládat, že Δ má lognormální rozdělení (tj. že $\log \Delta$ má normální rozdělení) se střední hodnotou μ_Δ a směrodatnou odchylkou $\Delta_\Delta = 1$. Pravděpodobnost, že dojde k lomu je

$$P_{lom} = P(D \geq \Delta). \quad (9.8)$$

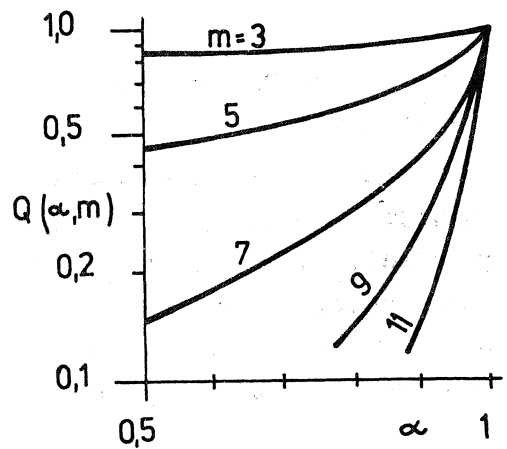
Při výpočtu D dosazujeme do vzorce (9.6) střední hodnoty všech veličin; hodnotu D nedostáváme přesně, ale se směrodatnou odchylkou Δ_D . Normalizovanou poměrnou směrodatnou odchylkou

$$C_D = \frac{A_D}{D} \quad (9.9)$$

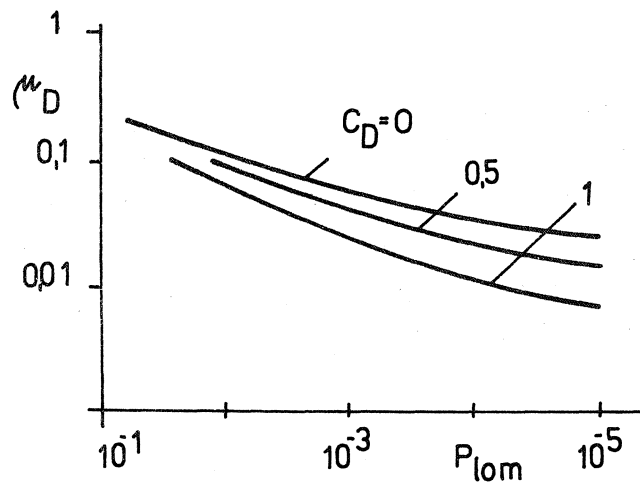
nazveme variační součinitel. Zvolíme-li dostatečně malou pravděpodobnost P_{lom} , dostaneme při známém nebo odhadnutém variačním součiniteli střední hodnotu poškození μ_D , kterou nesmíme překročit, nemáme-li vzrůst pravděpodobnost únavového lomu nad hodnotu P_{lom} (obr. 26). V podrobnostech odkazujeme na citovanou práci /59/.



Obr. 24



Obr. 25



Obr. 26

Příklad 2

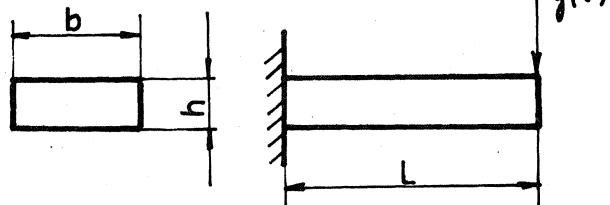
Vetknutý nosník obdélníkového průřezu podle obr. 27 je zatížen náhodnou silou

$y(t)$ o střední hodnotě

$\mu_y = 150$ N. Směrodatná odchylka této síly je $\Delta_y =$

$= 209$ N. Délka nosníku $L =$
 $= 500$ mm, šířka $b = 40$ mm;

tloušťku h nosníku chceme navrhnout tak, aby s pravděpodobností 0,999 byla životnost nejméně $n = 5 \cdot 10^6$ cyklů. Činitel nepravidelnosti je $\alpha = 0,840$. Materiál má mez kluzu $\sigma_{kt} = 290$ MPa, mez pevnosti $\sigma_{pt} = 470$ MPa. Referenční čára Wöhlerova diagramu má rovnici (9.4) s hodnotami $k = 1,84 \cdot 10^{17}$ (MPa)^m, $m = 4,895$. Kohezivní pevnost je $\sigma_f = 815$ MPa.



Obr. 27

Z obr. 24 odečteme $\xi = 1,53$, $\delta/\Delta_y = 2,30$, takže $\delta = 2,30 \cdot 209 = 481$ N. Podle obr. 25 vyjde $Q(0,840, 4,895) = 0,68$. Pro $P_{com} = 1 - 0,999 = 0,001$, $C_D = 0,5$ najdeme z obr. 26 $\mu_D = 0,04$.

Dále vypočteme konstanty v rovnici (9.3). Protože jde o lineární případ, je $\phi = 1$. Z teorie ohybu nosníku $c = 6L/bh^2 = 6 \cdot 500/40 h^2 = 75/h^2$ mm⁻². Střední napětí vyjde $\sigma_m = c \mu_y = 75 \cdot 150/h^2$ MPa (h v milimetrech).

Z rovnice (9.6) dostaneme

$$0,04 = \frac{0,68 \cdot 5 \cdot 10^6}{1,84 \cdot 10^{17}} \cdot 0,481^{4,895} \cdot \left[\frac{75/h^2}{1 - \frac{75 \cdot 150/h^2}{815}} \right]^{4,895} \quad (4,199)$$

Numerickým řešením této rovnice vyjde $h \doteq 26,4$ mm.

10. Vztah mezi cyklickou křivkou a křivkou životnosti

V první části semináře /16/ jsme podrobně vysvětlili, jak se při cyklickém namáhání mění plastické vlastnosti materiálu, až se - většinou po nepřilíš velkém počtu cyklů zatížení - ustálí hysterezní smyčka. Ta se pak už nemění, i když namáhání pokračuje až do vzniku trhliny a pak až do lomu. Závislost mezi amplitudou napětí a amplitudou plastické deformace ustálených hysterezních smyček tvoří cyklickou křivku

$\sigma - \epsilon$ (přesněji $\sigma_a - \epsilon_{ap}$). Ta rozhoduje po většinu doby životnosti o amplitudách namáhání v kritických místech. Bývá popsána rovnicí

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f'} = \left(\frac{\varepsilon_{ap}}{\varepsilon_f'} \right)^{n'} \quad (10.1)$$

kde σ_f' je součinitel únavové pevnosti,
 ε_f' - součinitel únavové tažnosti,
 n' - součinitel (exponent) únavového zpevnění. *)

Celková amplituda deformace ε_a má kromě plastické části ε_{ap} ještě elastickou část $\varepsilon_{ae} = \sigma_a / E$. Po malé úpravě dostaneme z rovnice $\varepsilon_a = \varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ap}$ pomocí (10.1) cyklickou deformační charakteristiku materiálu ve tvaru

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (10.2)$$

kde

$$K' = \frac{\sigma_f'}{(\varepsilon_f')^{n'}} \quad (10.3)$$

Exponent n' bývá v mezích od 0,1 do 0,2. Plastické vlastnosti popsané rovnicí (10.2) mohou být vzaty za základ numerického řešení napjatosti a přetvoření, z něhož dostaneme hodnoty σ_a , ε_a v kritických místech konstrukce /54/. Rovnici (10.2) nelze bez podstatného zkreslení nahradit předpokladem ideálního pružno-plastického materiálu, tím méně pak výpočtem podle Hookeova zákona. Jde-li o součást s vruby, u které lze definovat jmenovité napětí a jmenovité přetvoření, můžeme vyjít z výpočtu podle teorie pružnosti, tj. z hodnoty tvarového činitele α definovaného pro dokonale elastický materiál a užít Neuberovy korekce, podle které velmi přibližně platí, že

$$\alpha^2 = \frac{\sigma_a}{\sigma_{an}} \cdot \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{an}} \quad (10.4)$$

Platí-li pro jmenovité hodnoty Hookeův zákon, je

$$\sigma_a \cdot \varepsilon_a = \frac{1}{E} \alpha^2 \sigma_{an}^2 \quad (10.5)$$

*) V odborné literatuře bývá zvykem označovat tyto hodnoty čárkou, aby se rozlišily od stejně označených hodnot získaných při tahové zkoušce (σ_f - skutečná pevnost a ε_f - skutečné poměrné prodloužení při lomu).

Na levé straně je tzv. Neuberův součin (součin amplitud napětí a poměrného přetvoření v kořeni vrubu), na pravé straně máme hodnoty, které lze získat z teorie pružnosti. Řešením rovnic (10.2) a (10.5) lze $\bar{\sigma}_a$, ϵ_a vypočítat.

Pro výpočet životnosti byla upravena Mansonova universální křivka /28/ do tvaru vhodného pro náhodná namáhání. Především byly do vzorce zavedeny počty půlcyklů $2N_f$ místo počtu cyklů do lomu N_f (srovnej s rovnicí (7.2)). Dále byly nalezeny empirické vztahy mezi součiniteli charakterizujícími cyklickou křivku a křivku životnosti. Upravená Mansonova rovnice má tvar

$$\epsilon_a = \frac{\bar{\sigma}_f'}{E} (2N_f)^b + \epsilon_f' (2N_f)^c \quad (10.6)$$

V této rovnici je

$$c = \frac{1}{-5n' - 1}, \quad b = \frac{n'}{-5n' - 1}, \quad \text{takže } n' = \frac{b}{c} \quad (10.7)$$

První člen na pravé straně (10.6) vyjadřuje podíl elastické deformace, druhý člen podíl plastické deformace. Protože elastická deformace se řídí Hookeovým zákonem, je

$$\bar{\sigma}_a = E \epsilon_{ae} = \bar{\sigma}_f' (2N_f)^b \quad (10.8)$$

Je to formálně jinak upravená rovnice Wöhlerovy křivky (1.2) resp. (9.4) (s nulovým středním napětím). Upravená Mansonova křivka (10.6) se v literatuře často označuje jako Mansonova-Coffinova nebo Coffinova-Mansonova.*) Za hodnotu $\bar{\sigma}_f'$ lze dosadit $\bar{\sigma}_f$, tj. skutečné napětí při lomu. Při vyšetření cyklické křivky se získá ϵ_f' , n' a podle (10.7) i exponenty b , c . Tím je křivka (10.6) určena a nemusíme ji zvlášť experimentálně vyšetřovat. Rovnice (10.7) vyjadřují vztah mezi cyklickou křivkou (10.1) a křivkou životnosti (10.6) a platí jen přibližně; větší odchylky mohou vzniknout zejména v oblasti vysokocyklové únavy.

Máme-li životnost popsánu Wöhlerovou křivkou, můžeme pro cyklické namáhání s amplitudou $\bar{\sigma}_a$ a střední hodnotou $\bar{\sigma}_m$ odečíst počet $2N_f$ půlcyklů do lomu. Poškození jedním půlcyklem je tedy

$$\Delta D = \frac{1}{2N_f} \quad (10.9)$$

*) Nezaměňuj S. S. Mansona a W. P. Masona.

Sečtením těchto poškození pro všechny půlcykly za danou dobu T dostaneme celkové poškození $D = \sum \Delta D$. Je-li $D = 1$, měl by podle Minerovy teorie nastat lom.

V poslední době se však dává přednost vyhodnocování procesu poškození materiálu podle historie poměrného prodloužení $\varepsilon(t)$. Pak dostáváme půlcykly s amplitudou poměrného prodloužení ε_a a střední hodnotou ε_m . Mansonova-Coffinova rovnice (10.6) dává životnost v počtu půlcyklů $2N_f$ pro $\varepsilon_m = 0$. O tom, jak se započítávají střední hodnoty σ_m resp. ε_m se ještě podrobněji zmíníme v následující kapitole. Zde si ukážeme, jak lze vypočítat dílčí poškození způsobené jedním půlcyklem s amplitudou poměrného prodloužení ε_a a se střední hodnotou $\varepsilon_m = 0$.

Rovnice (10.6) je nelineární. Abychom si usnadnili výpočet, zavedeme tranzitní počet půlcyklů $2N_t$, při němž je podíl elastické a plastické poměrné deformace stejně velký, tj. oba členy na pravé straně rovnice (10.6) se sobě rovnají. Tedy

$$\varepsilon_f' (2N_t)^c = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_t)^b$$

Odtud vyjde

$$(2N_t)^{b-c} = \frac{E \varepsilon_f'}{\sigma_f'} \quad (10.10)$$

Rovnici (10.6) upravíme na tvar

$$\frac{E \varepsilon_a}{\sigma_f'} \cdot \frac{1}{(2N_f)^b} = \frac{E \varepsilon_f'}{\sigma_f'} (2N_f)^{c-b} + 1 \quad (10.11)$$

Dosažením (10.10) do (10.11) dostaneme

$$\frac{E \varepsilon_a}{\sigma_f'} \cdot \frac{1}{(2N_f)^b} = \left(\frac{2N_f}{2N_t} \right)^{c-b} + 1 \quad (10.12)$$

Na levé straně rovnice (10.12) máme poměr celkové amplitudy poměrného prodloužení ε_a k elastické složce

$$\varepsilon_{ae} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b, \quad (10.13)$$

takže

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{ae}} = \left(\frac{2N_f}{2N_t} \right)^{c-b} + 1 \quad (10.14)$$

Protože celková deformace je součtem deformace elastické a plastické, bude

$$\frac{\varepsilon_{ae} + \varepsilon_{ap}}{\varepsilon_{ae}} = \left(\frac{2N_f}{2N_t} \right)^{c-b} + 1 \quad (10.15)$$

Odtud

$$\frac{\varepsilon_{ap}}{\varepsilon_{ae}} = \left(\frac{2N_f}{2N_t} \right)^{c-b} \quad (10.16)$$

Dílčí poškození jedním půlcyklem s amplitudou plastického přetvoření ε_{ap} a elastického přetvoření ε_{ae} vyjde

$$\Delta D = \frac{1}{2N_f} = \frac{1}{2N_t} \left(\frac{\varepsilon_{ap}}{\varepsilon_{ae}} \right)^{\frac{1}{b-c}} \quad (10.17)$$

Stačí tedy předem z rovnice (10.10) vypočítat

$$\frac{1}{2N_t} = \left(\frac{\sigma_f'}{E \varepsilon_f'} \right)^{\frac{1}{b-c}} \quad (10.18)$$

a pak dosazovat za každý půlcyklus hodnoty ε_{ap} , ε_{ae} do rovnice (10.17). Elastickou složku amplitudy přetvoření přitom vypočteme jako amplitudu napětí podělenou modulem pružnosti.

Podle Minerovy teorie nastane lom, když $D = \sum \Delta D = 1$. Ve skutečnosti ovšem, jak jsme se o tom už několikrát zmínili, bude při lomu $D \neq 1$, neboť Minerova teorie přesně neplatí.

Shrneme důvody, pro které se dává přednost historii $\varepsilon(t)$ před historií $\sigma(t)$ při výpočtu životnosti. Mansonově-Coffinově křivce životnosti dáváme pak přednost před Wöhlerovou křivkou a metodě stékaní deště přednost před jinými metodami započítávání půlcyklů náhodného procesu. Většina strojních dílů, u nichž počítáme životnost, má složitý tvar s koncentracemi napětí v různých vrubech. Ve vrubech je únavový proces určen spíše historií $\varepsilon(t)$ než $\sigma(t)$. Započítávání půlcyklů metodou stékaní deště odpovídá tvorbě hysterezních smyček a předpokladu, že amplituda plastického přetvoření je rozhodující veličinou při vzniku poškození materiálu. Mansonova-Coffinova křivka má proti Wöhlerově křivce velkou výhodu v tom, že v oblasti nízkocyklové únavy monotónně klesá s logaritmem počtu cyklů do lomu. Wöhlerova křivka má proti tomu v oblasti statické pevnosti větev téměř rovnoběžnou s osou úseček, čímž se zvětšuje chyba při odečítání životnosti odpovídající velkým amplitudám namáhání. Výhoda aplikace Mansonovy-Coffinovy křivky je proto zvláště zřejmá při nízkocyklové únavě materiálu. Ve prospěch Mansonovy-Coffinovy křivky svědčí také to, že parametry křivky lze

zhruba odhadnout podle cyklické křivky a naopak (přestože vztahy, které mezi nimi platí, je nutné posuzovat s rezervou).

11. Vliv středního napětí resp. středního přetvoření

Cyklus napětí je určen střední hodnotou σ_m a amplitudou σ_a . Pro deformační cyklus máme obdobně střední poměrné prodloužení ϵ_m a jeho amplitudu ϵ_a . Je-li křivka životnosti (9.4) resp. (10.6) vyšetřena pro střídavé napětí resp. přetvoření, při němž $\sigma_m = 0$ resp.

$\epsilon_m = 0$, vzniká otázka, jak tyto rovnice korigovat, je-li střední hodnota cyklu různá od nuly.

Ukázali jsme už, že křivku (9.4) můžeme korigovat tak, že konstantu k nahradíme konstantou k' podle (9.7). Jiný způsob spočívá v tom, že nesouměrný cyklus nahradíme ekvivalentním souměrným cyklem. Pro cyklus na mezi únavy se předpokládá podle /32/ závislost

$$\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_f}\right)^n = 1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_c} \quad (11.1)$$

kde $n = 1$ až 2 . Pro dva cykly $(\sigma_{a1}, \sigma_{m1})$, $(\sigma_{a2}, \sigma_{m2})$ odtud dostaneme (vyloučením meze únavy σ_c)

$$\frac{\sigma_f^n - \sigma_{m1}^n}{\sigma_f^n - \sigma_{m2}^n} = \frac{\sigma_{a1}}{\sigma_{a2}} \quad (11.2)$$

Tento vztah byl navržen pro mez únavy na hranici trvalé pevnosti, bylo by jej možné používat i pro oblast časované pevnosti. Hanke /12/ používá obdobný vztah

$$\frac{\sigma_f - \sigma_{m1}}{\sigma_f - \sigma_{m2}} = \left(\frac{\sigma_{a1}}{\sigma_{a2}}\right)^m \quad (11.3)$$

Pro ekvivalentní amplitudu střídavého napětí odtud vyjde

$$\sigma_{aekv}^m = \sigma_a^m \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_f}} \quad (11.4)$$

Stačí, abychom položili $\sigma_{a1} = \sigma_{aekv}$, $\sigma_{m1} = 0$, dále $\sigma_{a2} = \sigma_a$, $\sigma_{m2} = \sigma_m$. Stejný vztah však dostaneme i podle (9.4) a (9.7); je totiž

$$\frac{k}{\sigma_{aekv}^m} = \frac{k \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_f}\right)}{\sigma_a^m} \quad (11.5)$$

Odtud vypočteme

$$\sigma_{aekv}^m = \sigma_a^m \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_f}} \quad (11.6)$$

Vztah (11.3) je tedy ekvivalentní s korekcí (9.4) podle (9.7).

Rovnici (9.4) lze rovněž upravit tak, aby se v ní uplatnil počet půlcyklů $2N_f$ místo počtu cyklů do lomu N_f . Vyjde ^{*})

$$\sigma_a = \sigma_f' \cdot (2N_f)^b \quad (11.7)$$

U ocelí je $b = -0,06$ až $-0,12$, dále $\sigma_f' = (0,92 \text{ až } 1,15) \sigma_f$. Přitom σ_f je kohezivní pevnost, tj. skutečné napětí při lomu. Podle Landgrafa /24/ lze do výpočtu zahrnout střední napětí úpravou vzorce (11.7) na tvar

$$\sigma_a = (\sigma_f' - \sigma_m) \cdot (2N_f)^b \quad (11.8)$$

Odtud dostaneme

$$\sigma_{aekv} = \sigma_a \frac{1}{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_f'}} \quad (11.9)$$

Vztahy (11.6) a (11.9) se ztotožní, je-li exponent $m = 1$. To však obecně nemusí platit; potom je vztah (11.8) resp. (11.9) méně přesný.

Mansonovu-Coffinovu křivku (10.6) lze s použitím (11.8) upravit na tvar /41/

$$\varepsilon_a = \varepsilon_f' (2N_f)^c + \frac{\sigma_f' - \sigma_m}{E} (2N_f)^b \quad (11.10)$$

Exponent c je u kovových materiálů v mezích od $-0,5$ do $-0,8$. Součinitel únavové tažnosti ε_f' lze pro nízkocyklovou oblast odhadnout ze vzorce $\varepsilon_f' = 0,002 (\sigma_f / \sigma_{0,002})^{1/n'}$. Úpravou obdobnou k rovnicím (10.11) až (10.18) dostaneme místo rovnice (10.17) vztah pro dílčí poškození jedním půlcyklem

$$\Delta D = \frac{1}{2N_f} = \frac{1}{2N_t} \left[\left(\frac{\varepsilon_{ap}}{\varepsilon_{ae}} \right) \left(\frac{\sigma_f'}{\sigma_f' - \sigma_m} \right) \right]^{\frac{1}{b-c}} \quad (11.11)$$

^{*}) Srovnej s rovnicemi (10.8) a (10.13).

Pro $G_m = 0$ přejde tento vztah do tvaru (10.17). Reciproká hodnota $1/2N_f$ tranzitního počtu půlcyklů se vypočte podle (10.18), tedy stejně jako dříve.

Nesouměrnost cyklu lze do výpočtu zahrnout také tak, že se vyjde z křivky životnosti v log-log souřadnicích, která znázorňuje závislost parametru Δ na počtu cyklů do lomu. Řídicí parametr je definován vztahem /20/, /49/

$$\Delta = \sqrt{E \sigma_{max} \cdot \epsilon_a} \quad (11.12)$$

Zde σ_{max} je horní skutečné napětí, ϵ_a amplituda skutečného celkového přetvoření, E modul pružnosti. Vztah $\Delta = \Delta(N_f)$ prakticky nezávisí na nesouměrnosti cyklu, alespoň pokud jde o ocel a hliníkové slitiny. Podle /43/ lze takto stanovit i závislost parametru Δ na počtu N_f cyklů do vzniku trhliny.

Vyjdeme-li z předpokladu, že Mansonova-Coffinova křivka (10.6) musí plynout ze vztahu (11.12) jako zvláštní případ (pro souměrný cyklus), dostaneme vztah

$$\Delta = \sqrt{E \sigma_a \epsilon_a} \quad (11.13)$$

a odtud - dosazením z rovnic (10.8) a (10.6) -

$$E \sigma_{max} \epsilon_a = (\sigma_f')^2 (2N_f)^{2b} + E \epsilon_f' \sigma_f' (2N_f)^{b+c} \quad (11.14)$$

Z této rovnice již můžeme počítat dílčí poškození $1/2N_f$ pro každý nesouměrný i souměrný půlcyklus. Výpočet není obtížný, protože křivka životnosti je monotónní a řešení např. Newtonovou-Raphsonovou metodou dobře a rychle konverguje.

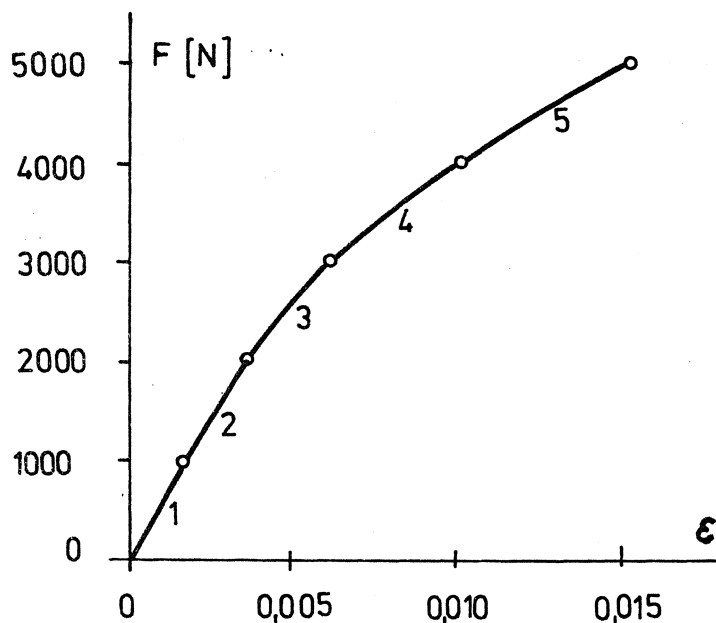
12. Metoda přípustných úseků

Jde o úpravu metody stékání deště do algoritmu vhodného k programování na počítačích. Pochází od Welzela /58/. Podrobnosti lze nalézt také v literatuře /50/, /57/. Na rozdíl od metody stékání deště sleduje tato metoda přímo hysterezní smyčky. Ty však nejsou kresleny, ale započítávány pomocí "matice úseků" a "matice přípustnosti úseků".

Postup vyložíme na příkladu. Nejprve nalezneme závislost přetvoření ve vrubu ϵ na zatížení F za předpokladu, že materiál má plastické vlastnosti popsané cyklickou křivkou, že tedy platí rovnice

(10.2). Je-li účelné definovat jmenovité napětí, lze mu přisoudit i jmenovité přetvoření (užitím cyklické křivky). Napětí ve vrubu lze pak počítat pomocí Neuberova vztahu (10.4). Je-li jmenovité napětí malé, lze předpokládat platnost Hookeova zákona a vyjít z řešení podle teorie pružnosti; to pak přepočítat užitím Neuberova vztahu (10.5) a rovnice cyklické křivky (10.2) na hodnoty skutečného napětí a přetvoření ve vrubu. Křivku $\epsilon(F)$ zjišťujeme pro monotónní zatěžování; historie zatížení $F(t)$ je dána (jde-li o náhodné procesy, je $F(t)$ jedna reprezentativní realizace).

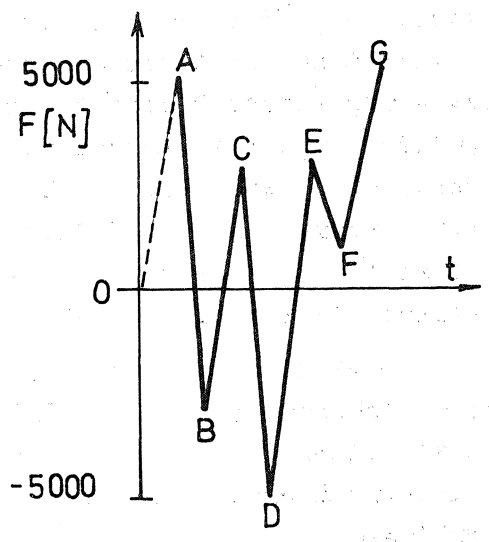
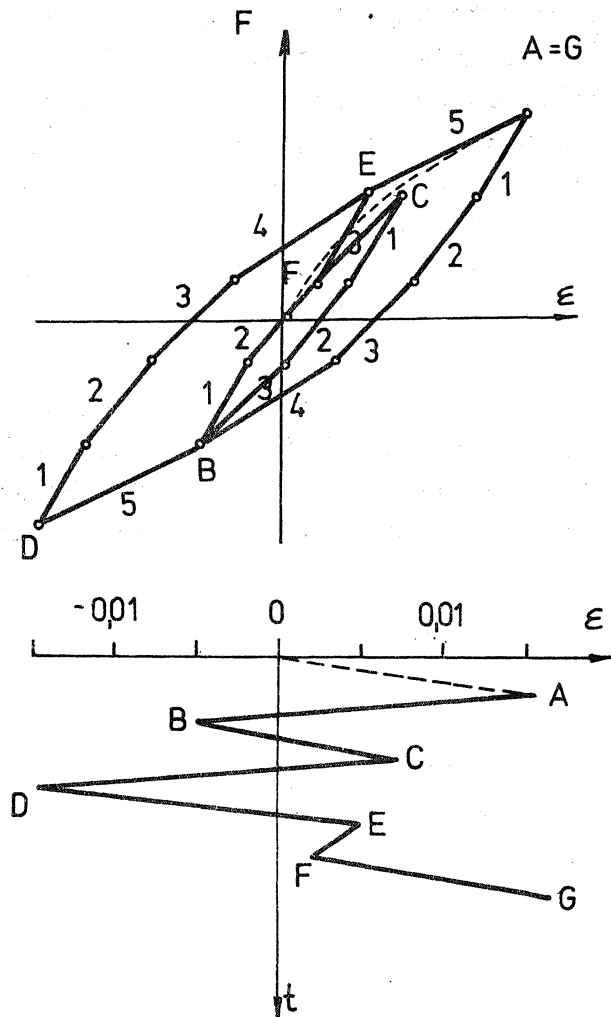
Křivku $\epsilon(F)$ rozdělíme asi na 50 až 100 úseků; pro přehlednost jsme jich na obr. 28 zvolili jen pět. Jim odpovídá (pro zvolený příklad) "matice úseků" v tab. 1. První dva sloupce obsahují počáteční hodnoty síly a přetvoření, druhé dva sloupce rozpětí těchto hodnot v příslušném úseku.



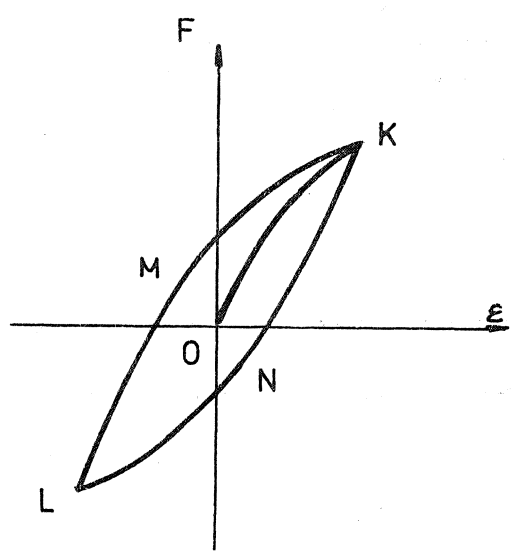
Obr. 28

Tab. 1 Matice úseků

Úsek	Síla F	Přetvoření ε	ΔF	$\Delta \epsilon$
1	0	0	1000	0,0015
2	1000	0,0015	1000	0,0020
3	2000	0,0035	1000	0,0025
4	3000	0,0060	1000	0,0040
5	4000	0,0100	1000	0,0050
6	5000	0,0150	-	-



Obr. 29



Obr. 30

ÚSEK	OA	AB	BC	CD	DE	EF	FG
1	+	-	+	-	+	-	+
2	+	-	+	-	+	+	⊕
3	+	-	+	-	+	+	⊕
4	+	-	-	⊖	+	+	⊕
5	+	+	+	-	-	-	+
6	+	+	+	+	+	+	⊕

Obr. 31

Historie zatížení $F(t)$ je znázorněna na obr. 29. Zároveň je tam naznačen přepočten na hodnoty $\varepsilon(t)$. Čárkovaná čára odpovídá monotónnímu zatěžování OA. Hysterezní smyčky jsou sestrojeny pomocí Massingovy hypotézy, podle které oblouk LMK smyčky na obr. 30 má stejný tvar jako oblouk OK, ale je dvakrát zvětšený /29/. Úsek KNL je s úsekem LMK středově souměrný. To znamená, že při konstrukci hysterezních smyček násobíme přírůstky ΔF , $\Delta \varepsilon$ z matice úseků dvěma. Postup sestavování hysterezních smyček budeme zároveň sledovat v matici přípustnosti úseků na obr. 31. Vyhodnocování procesu se vždy začíná s extrémní hodnotou, v tomto případě s bodem A, kterému odpovídá síla $F_A = 5000$ N a poměrné prodloužení $\varepsilon_A = 0,015$. Dosáhli bychom jej po cestě OA kladným zatěžováním ($\varepsilon_A > 0$), proto všechny prvky ve sloupci OA budou mít hodnotu +1 (na obr. 31 vyznačujeme jen znaménko). Zatěžování začíná druhým sloupcem, větví AB. Protože jde o záporné přírůstky $\Delta \varepsilon$, změni se hodnota použitých úseků na -1. Přitom lze započítat (použít) jen takové úseky, jejichž znaménko bylo předtím opačné. Bodu B dosáhneme použitím čtyř úseků, neboť $F_B = F_A - 4 \cdot 2000 = 5000 - 8000 = -3000$ N. Pak $\varepsilon_B = \varepsilon_A - 2 \cdot 0,0100 = 0,0150 - 0,0200 = -0,0050$. Následuje větev BC. Zde vystačíme se třemi úseky (1 - 2 - 3), neboť $F_C = F_B + 3 \cdot 2000 = +3000$ N. Proto $\varepsilon_C = \varepsilon_B + 2 \cdot 0,0060 = +0,0070$. Při zpáteční cestě CD se třemi úseky nevystačíme, potřebujeme čtyři. Čtvrtý úsek však musíme přeskočit, neboť jeho znaménko není ve sloupci BC kladné. Znaménko ponecháváme a zakroužkováním vyznačujeme přeskočení čtvrtého úseku. Větev CD tedy sestavíme z úseků 1 - 2 - 3 - 5. Proto bude $F_D = F_C - 4 \cdot 2000 = 3000 - 8000 = -5000$ N, $\varepsilon_D = \varepsilon_C - 0,0030 - 0,0040 - 0,0050 - 0,0100 = -0,015$. Větev DE se skládá z úseků 1 - 2 - 3 - 4, $F_E = 3000$ N, $\varepsilon_E = 0,0050$. Větev EF obsahuje jen první úsek, $F_F = 1000$ N, $\varepsilon_F = 0,0050 - 0,0030 = 0,0020$; větev FG se skládá z úseků 1 a 5 (úseky 2, 3 a 4 se přeskakují, jsou zakroužkovány).

Kdybychom použili metodu stékání deště, dostali bychom pro případ na obr. 29 půlcykly AD, BC, CB, DG, EF, FE. Ty odpovídají uzavřeným smyčkám ADG, BCB, EFE. Stejně smyčky se započítávají i užitím matice přípustnosti úseků na obr. 31. Počet uzavřených smyček je dán počtem sloupců, v nichž se přeskakuje jedna nebo několik hodnot. Výjimku tvoří velká smyčka ADG, která se uzavírá, jestliže $G \equiv A$. Započtení cyklu této smyčky jsme vyznačili zakroužkováním v šestém řádku.

Předpokládejme, že $\varepsilon(t)$ jsou jmenovité hodnoty; budeme je na příště označovat $\varepsilon_n(t)$. K historii $\varepsilon_n(t)$ najdeme historii $\zeta_n(t)$ přepočtem podle cyklické křivky napětí-přetvoření (10.2). Nechť je např. $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $K' = 1200$ MPa, $n' = 0,2$. Pak pro daná ε_n

vypočteme amplitudy jmenovitých napětí σ_n uvedené v tab. 2. Hodnoty v této tabulce se vztahují ke koncovým bodům vyznačených úseky.

Tab. 2 Výpočet napětí pro zvolené úseky

Úsek	Jmenovité hodnoty		Hodnoty ve vrubu	
	ϵ_n	σ_n	ϵ	σ
1	0,0015	238	0,0026	307
2	0,0035	339	0,0066	408
3	0,0060	398	0,0115	469
4	0,0100	454	0,0193	529
5	0,0150	500	0,0291	579

Bude-li počáteční jmenovité napětí $\sigma_A = 500$ MPa, bude $\sigma_B = 500 - 2 \cdot 454 = -408$ MPa. Podobně $\sigma_C = -408 + 2 \cdot 398 = 388$ MPa, $\sigma_D = 388 - 2 \cdot 339 - 2 \cdot (500 - 454) = -500$ MPa, $\sigma_E = -500 + 2 \cdot 454 = 408$ MPa, $\sigma_F = 408 - 2 \cdot 238 = -68$ MPa, $\sigma_G = -68 + 2 \cdot 238 + 2 \cdot (500 - 454) = 500$ MPa. Tato napětí popisují historii $\sigma_n(t)$. Dostáváme ji pomocí přírůstků odpovídajících posloupnostem úseků 1, 1-2, 1-2-3 atd., které vypočteme pro celý vyhodnocovací proces jen jednou.

Nyní budeme předpokládat, že pro vrub známe tvarový činitel např. $\alpha = 1,5$. Amplitudy napětí a přetvoření ve vrubu musí splňovat jednak Neuberův vztah (10.4), jednak rovnici cyklické křivky (10.2). Musí tedy v daném případě být (s označením podle tab. 2)

$$\sigma \epsilon = \alpha^2 \sigma_n \cdot \epsilon_n \quad (12.1)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (12.2)$$

Řešením dostaneme hodnoty σ , ϵ uvedené rovněž v tab. 2. Platí pro kořen vrubu. Tím je dána i historie napětí a poměrného prodloužení ve vrubu, uvedená v tab. 3. Pro jednotlivé cykly dostaneme střední hodnoty a amplitudy napětí a přetvoření ve vrubu podle tab. 4. Porovnáme-li je s jmenovitými hodnotami podle tab. 5 zjistíme, že zdaleka nejsou v poměru daném tvarovým činitelem. Je proto vždy nutné vyšetřovat skutečné hodnoty napětí a přetvoření v kritickém místě s přihlédnutím k cyklické deformační charakteristice. Jinak se můžeme dopustit velkých chyb.

Tab. 3 Hodnoty napětí a přetvoření ve vrubu

Bod	A	B	C	D	E	F
Napětí [MPa]	579	-479	459	-579	479	135
Přetvoření	0,0291	-0,0095	0,0135	-0,0291	0,0095	0,0043

Tab. 4 Střední hodnoty a amplitudy ve vrubu

Smyčka	ϵ_m	ϵ_a	σ_m	σ_a
ADA	0	0,0291	0	579
BCB	0,0020	0,0115	-10	469
EFE	0,0059	0,0026	172	307

Tab. 5 Jmenovité střední hodnoty a amplitudy

Smyčka	ϵ_m	ϵ_a	σ_m	σ_a
ADA	0	0,0150	0	500
BCB	0,0010	0,0070	-10	378
EFE	0,0035	0,0015	170	238

Metoda, kterou jsme vyložili, je ovšem také jen přibližná. Předpokládá se ustálená cyklická křivka po celý únavový proces a poněkud stylizovaný způsob vytváření hysterezních smyček. Určitá nepřesnost se do výpočtu vnáší také konečným počtem úseků; volíme-li jejich počet, jak bylo uvedeno, je tato chyba zanedbatelná. Postupem, který jsme ukázali dosáhneme toho, že každá smyčka je uzavřena nepřetržitou posloupností úseků, kterou lze odečíst z příslušného sloupce matice na obr. 31 nad zakroužkovaným prvkem. Tak např. smyčka BCB má jmenovité rozpětí $\Delta \epsilon_{BC} = 0,0060$, které pro tři úseky odečteme z tab. 1 jako $\epsilon_4 = \Delta \epsilon_1 + \Delta \epsilon_2 + \Delta \epsilon_3$. Tomu odpovídá v tabulce přípustnosti úseků na obr. 31 zakroužkovaný prvek ve čtvrtém řádku sloupce CD.

Algoritmus výpočtu je upraven tak, že z matice na obr. 31 se v paměti počítače ukládá vždy jen jeden sloupec, který se v průběhu vyhodnocování historie únavového procesu modifikuje. Kdykoli se v něm vyskytne jeden nebo několik přeskočených prvků, započte se jeden uzavřený cyklus. Přitom se postupně načítají i hodnoty napětí a přetvoření, a to pomocí přírůstků vypočtených předem (tab. 2). Pro každý cyklus tak dostaneme střední hodnotu i amplitudu, a to pro napětí i pro přetvoření. Nyní už nic nebrání tomu, abychom pro každý cyklus určili míru poškození $1/N_f$ (nebo pro každý půlcyklus $1/(2N_f)$) a tato dílčí poškození sčítali. Můžeme k tomu použít kterékoli rovnice popisující křivku životnosti při obecně nesouměrných cyklech namáhání, např. rovnice (11.10) nebo (11.14). Probrali jsme je podrobně v předchozí kapitole.

Programy pro výpočet životnosti založené na metodě přípustných úseků obsahují práce /50/, /57/.

Poznámka

Výpočet napětí a poměrného přetvoření ve vrubu užitím Neuberova vztahu (10.4) resp. (10.5) se někdy upravuje tak, že místo tvarového činitele α se použije vrubový činitel β . Tím se respektuje gradient napětí ve vrubu a dosáhne se lepší shody se skutečností.

13. Matematický popis nelineární deformační charakteristiky

Cyklická křivka napětí-přetvoření představuje vztah mezi ustálenou amplitudou napětí a odpovídající amplitudou plastického poměrného přetvoření při cyklickém namáhání. Má rovnici

$$\varepsilon_{ap} = \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (13.1)$$

Přičteme-li k tomuto plastickému přetvoření ještě elastickou část

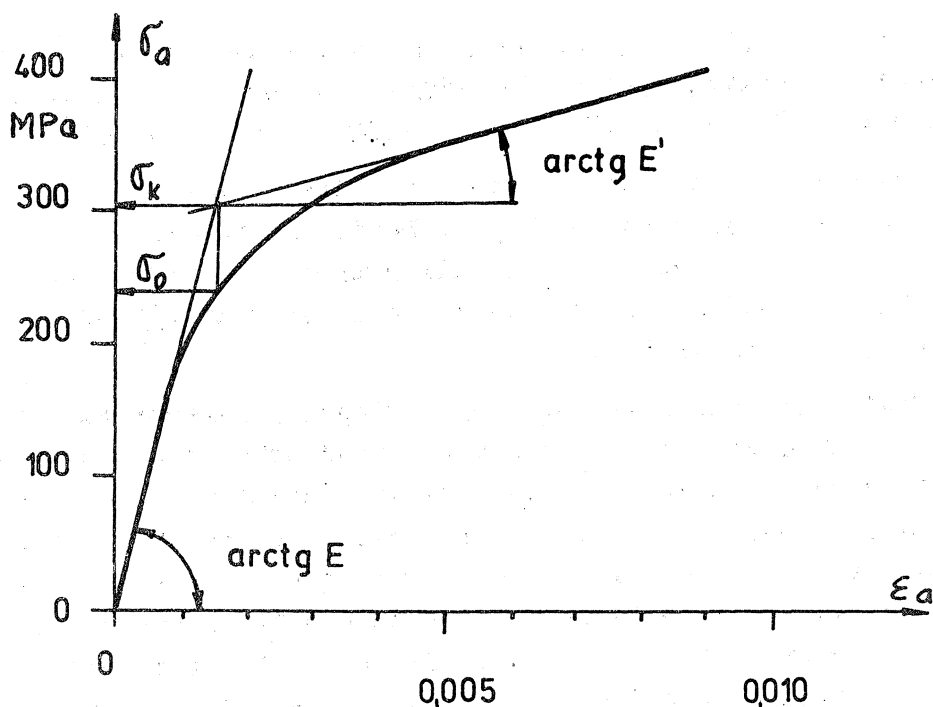
$$\varepsilon_{ae} = \frac{\sigma_a}{E} \quad (13.2)$$

dostaneme rovnici pro celkovou amplitudu poměrného přetvoření

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (13.3)$$

Poměrným přetvořením rozumíme - ostatně v celém tomto textu - poměrné prodloužení nebo - v případě součástí namáhaných krutem - zkos. Mohli bychom uvažovat i vliv dvojosé napjatosti v kořeni vrubu tím, že bychom do výpočtu brali výpočtovou hodnotu "redukovanou" na případ jednoosého namáhání v tahu či tlaku.

Rovnice (13.3) je totožná s rovnicí (12.2) (až na indexy, které jsme tam pro stručnost vynechali). Jde o příklad nelineární deformační charakteristiky $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$, kterou lze popsat v uvedeném mocninném tvaru. Zvolíme-li např. $E = 200\,000\text{ MPa}$, $K' = 1056,8\text{ MPa}$, $n' = 0,12$, dostaneme křivku podle obr. 32.



Obr. 32

Chceme-li z rovnice (13.3) určit amplitudu napětí σ_a při dané amplitudě poměrného přetvoření ε_a , potřebujeme inverzní vztah $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Vzhledem k nelinearitě rovnice (13.3) jej však nemůžeme získat v uzavřeném tvaru. K řešení proto musíme použít některé numerické metody (např. Newtonovy-Raphsonovy). Opakování takového postupu zdržuje výpočet. Proto je výhodné použít přibližného inverzního vztahu, který dává amplitudu napětí v explicitním tvaru. Tím odpadají iterace a výpočet se zrychlí.

Podle Chenga a Hsu /4/ lze použít vzorce

$$\sigma_a = \frac{E \varepsilon_a}{\left\{ 1 + \left[\frac{E \varepsilon_a}{(1 - \frac{E'}{E}) \sigma_k + E' \varepsilon_a} \right]^q \right\}^{1/q}} \quad (13.4)$$

v němž E značí modul pružnosti v tahu-tlaku,

E' tečný modul zpevnění,

σ_k , σ_0 napětí podle obr. 32,

$$q = \frac{\log 2}{\log \frac{\sigma_k}{\sigma_0}}$$

Modul E resp. E' je určen tečnou v počátečním resp. koncovém bodě deformační charakteristiky. Pro křivku na obr. 32 odečteme $\sigma_k = 306$ MPa, $\sigma_0 = 240$ MPa, $q \approx 2,8531$, $E' = 14\,000$ MPa.

Podle rovnice (13.4) potom dostaneme křivku, která je prakticky shodná s křivkou vypočtenou podle (13.3). Maximální rozdíl je asi 2 %, což je asi chyba, s jakou jsme odečetli potřebné hodnoty z obrázku 32. Je rozhodně menší než chyba vlastního experimentu, kterým zjišťujeme parametry cyklické křivky.

Touto informací, kterou ocení zvláště programátoři výpočtů životnosti, končí část semináře věnovaná únavě náhodně namáhaných částí strojů. V dalším textu se budeme zabývat základními poznatky o únavě svařovaných konstrukcí. Omezíme se přitom na ocelové konstrukce, protože svařování lehkých kovů je méně obvyklé a jeho úspěch příliš závislý na materiálu, použité technologii a dovednosti svařeče. Problémem se budeme zabývat z hlediska pevnostních výpočtů a pomíneme otázky materiálové a technologické nebo se jich dotkneme jenom v nejnútnejší míře. Uvedeme spíše hlavní zásady, kterými se má řídit konstruktér při navrhování svařovaných konstrukcí namáhaných v únavě.

14. Svařování a řezání plamenem

Až dosud jsme se zabývali únavou kovových, většinou ocelových částí vyrobených vcelku. U nich se předpokládaly stejné vlastnosti materiálu v celém objemu, nanejvýš s výjimkou povrchové vrstvy. U svařovaných konstrukcí je situace složitější, neboť svar vnáší do konstrukce nejen větší nebo menší koncentraci napětí vlivem tvaru, ale

také strukturní nehomogenitu, skryté vady, znečištění materiálu např. zanášením vodíku apod. Vznikají oblasti ovlivněné teplem, které mají poněkud jiné vlastnosti než původní materiál a než svarový kov ve švu. Povrch svaru není hladký, bývá chemicky ovlivněn asi jako okuje. V konstrukci vzniká vlastní pnutí následkem nerovnoměrného ohřevu a chladnutí.

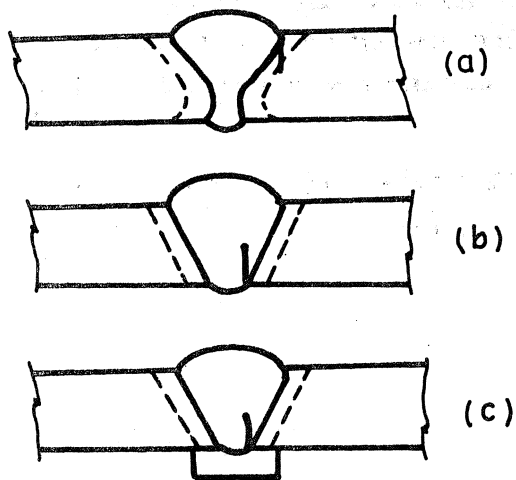
Pokud jde o únavu svarových spojů, uplatňují se tyto hlavní vlivy:

- (1) složení a vlastnosti původního materiálu,
- (2) velikost a tvar částí,
- (3) typ svaru a způsob jeho přípravy,
- (4) způsob svařování a druh elektrod,
- (5) poloha a přístupnost svaru,
- (6) tvar svaru,
- (7) případné opracování svaru,
- (8) změna vlastností teplem a tepelným zpracováním,
- (9) vlastní pnutí.

Je zřejmé, že únavu svařovaných konstrukcí je složitým jevem. Budeme se zabývat jen základními poznatky, uvedeme orientační hodnoty a příklady spíše než systematický výklad, protože to rozsah dnešního semináře ani jinak neumožňuje.

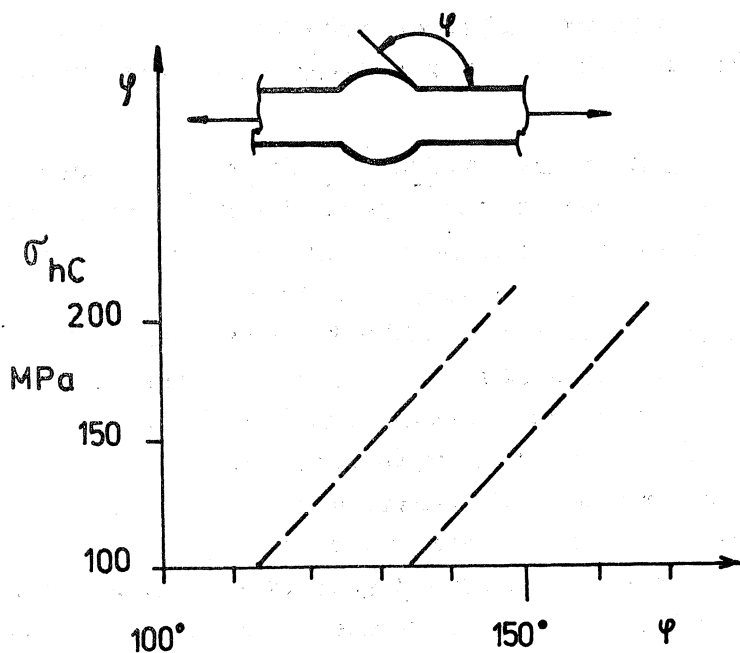
Nejprve si všimneme, jak se projeví řezání plamenem. Při něm vzniká zdrenělý, jakoby drážkovaný povrch, jehož kvalita značně závisí na dovednosti dělníka. Vysoce kvalitní řezy s hladkým povrchem nevedou k podstatnému snížení meze únavy; odpovídají hrubovanému povrchu. U konstrukčních a stavebních ocelí běžné jakosti je mez únavy takto řezaných částí jen asi o 30 % nižší než u vzorků s dokonale opracovaným povrchem. Únavová trhlinka vzniká zpravidla na hraně, která byla nejbližší k hořáku. Jestliže tyto hrany srazíme, vzroste při tahovém kmitovém namáhání amplituda na mezi únavy asi o 8 až 12 %. Dalšího zvýšení dosáhneme opracováním boků vzorku. Např. pouhým opískováním povrchu lze zvýšit mez únavy až asi o 5 %. Mez únavy podstatně závisí na kvalitě řezu; špatná kvalita snižuje mez únavy téměř na polovinu hodnoty odpovídající vysoce kvalitnímu řezu. Kvalitní řez plamenem lze srovnat s okujemi na povrchu kovaných částí. U ocelí střední a nižší pevnosti dává povrch s okujemi asi o třetinu nižší mez únavy než dokonale opracovaný povrch. Špatně provedený řez plamenem může snížit mez únavy nikoli na dvě třetiny, ale dokonce až na 40 % hodnoty příslušné dokonale opracovanému povrchu. Tyto údaje se vztahují k svařitelným ocelím běžné jakosti.

15. Mez únavy tupých příčných svarů



Obr. 33

V dalším textu probereme vlastnosti typických svařovaných spojů z hlediska únavy. Začneme tupými příčnými svary. Příklady vzniku trhlin v těchto svarech jsou na obr. 33. Jde o schematický obrázek, na němž jsou patrné průřezy švu a tepelně ovlivněných vrstev. Zároveň jsou zakresleny počáteční trhliny. Na obrázku (a) vznikla trhlina z paty svaru a prochází tepelně ovlivněným materiálem. Na obrázcích (b) a (c) vznikla trhlina u kořene svaru a prochází švem.



Obr. 34

Pokud trhlina vzniká v patě svaru záleží na tom, jak přechází povrch švu do okolního materiálu. Určitým měřítkem tohoto vlivu může být úhel v patě svaru.

Na obr. 34 je zakreslen průběh meze únavy při míjivém tahu σ_{hc} na tomto úhlu (u tupých příčných svarů ocelových pásů). Zdálo by se, že opracováním svaru na plochu dojde podle obr. 34 k velkému zvýšení meze únavy. Skutečnost je bohužel méně příznivá. Opraco-

váním se sice odstraní vrubový účinek v patě svaru, ale zároveň se na povrch švu dostanou drobné vady, které se až dosud nemohly uplatnit, neboť byly v zesílené části, v návaru, který jsme opracováním odstranili. Jedině u zcela bezvadného svaru lze docílit toho, že mez únavy hladkého obrobeného svaru je stejná jako u původního "rodičovského" materiálu. Obrušování svaru má význam především tehdy, brousí-li se

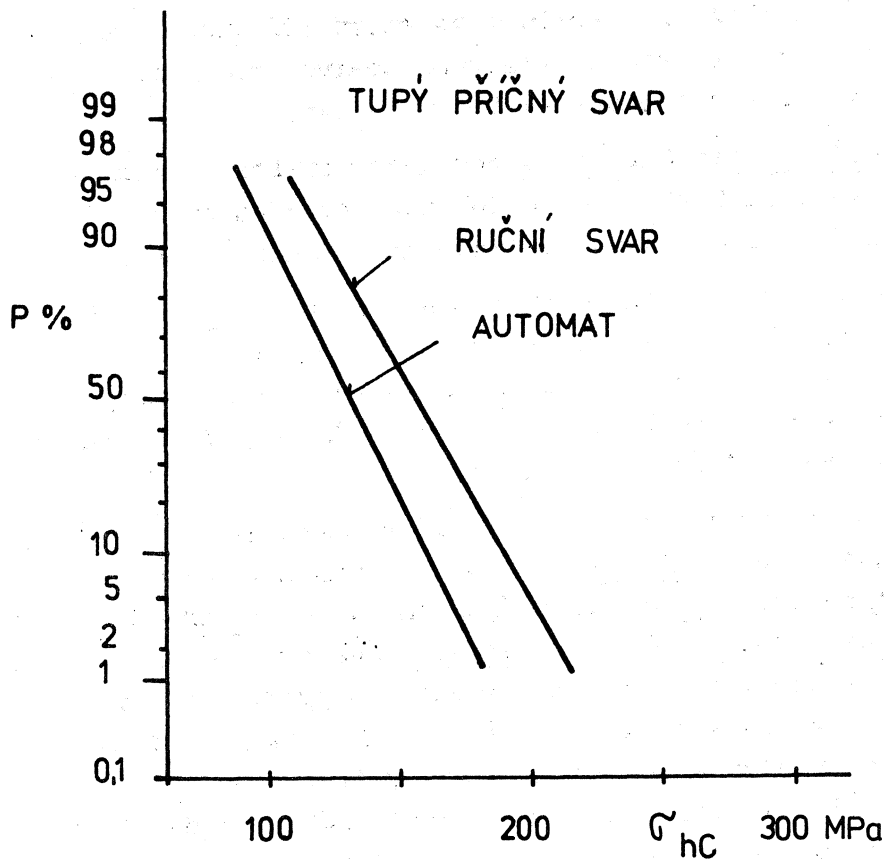
do hladka a škrábance směřují ve směru silového toku. Když se přebrousí pouze "čepice" svaru, ale tvar zůstane zachován, zůstane i vrub v patě svaru a mez únavy se téměř nezmění.

Teplem ovlivněné pásmo mez únavy prakticky nemění. K tomuto závěru nás vede zkušenost, že u dokonale vyrobených svarů lze jejich opracováním do hladka dosáhnout meze únavy jako u základního materiálu.

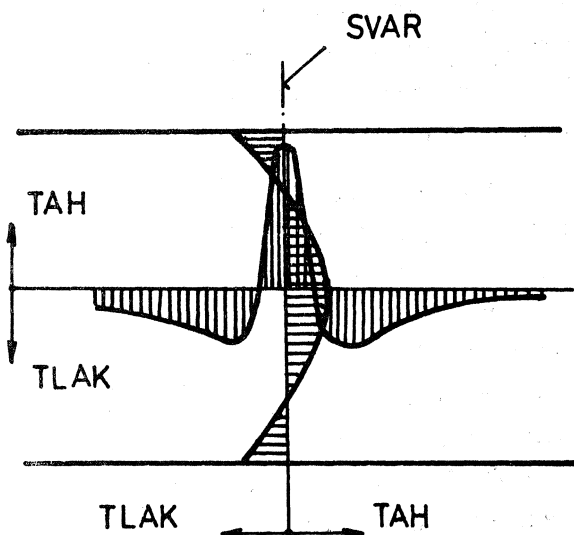
Na mez únavy tupého svaru má vliv také způsob přípravy svaru. Při mechanickém opracování bývá mez únavy až asi o 15 % vyšší než při přípravě svaru plamenem. Je to způsobeno patrně tím, že při řezání plamenem vzniká větší množství drobných vad, které pak mohou usnadňovat iniciaci trhlin.

Dva poznatky jsou z praktického hlediska obzvlášť důležité. Za prvé standardní ruční svary mají v průměru o něco vyšší mez únavy než svary vyrobené na automatu. Za druhé tato mez únavy prakticky nezávisí na pevnosti rodičovského materiálu. Oba tyto poznatky se mohou jevit jako paradoxní. Lze je však uspokojivě vysvětlit. Při automatickém svařování se zpravidla používá větších příkonů a tlustších elektrod, což má za následek poměrně nevýhodný tvar svaru. Metalurgické rozdíly ani rozdíly ve vlastním pnutí nehrají žádnou podstatnou roli. To se prokázalo při opracování svarů na plocho; v takovém případě mizí rozdíl mezi ručním a automatovým svarem. Poznamenejme, že uvedené tvrzení o nižší mezi únavy u svarů zhotovených na automatu se týká tupých svarů. U koutových svarů je tomu naopak, neboť tam převažuje příznivý vliv hlubšího provaření kořene svaru na automatu. Nezávislost meze únavy na pevnosti rodičovského materiálu je dána z největší části tím, že pevnější materiály se hůře svařují, vzniká v nich více defektů, přičemž vrubová citlivost je relativně vysoká.

Na obr. 35 je znázorněno rozložení meze únavy σ_{hc} při míjivém tahu u tupého příčného svaru standardního provedení /9/. Mez únavy byla zjišťována při základně $2 \cdot 10^6$ cyklů na ocelových vzorcích o tloušťce 12 až 16 mm. U tlustších vzorků je mez únavy nižší, jak ještě ukážeme. Střední hodnota meze únavy při míjivém tahu odpovídá pravděpodobnosti $P = 50\%$ a je u ručních svarů asi 150 MPa, u automaticky vyrobených asi 130 MPa. Asi 80 % ručně vyrobených svarů má mez únavy při míjivém tahu v mezích od 120 do 180 MPa. U automaticky vyrobených svarů je tento interval zhruba 100 až 160 MPa. Jde o příčné tupé svary a o horní napětí na mezi míjivého tahového cyklu.



Obr. 35



Obr. 36

Při svařování vzniká výrazně nestacionární teplotní pole. Střed svaru se ochlazuje nejpomaleji, smršťuje se ještě v době, kdy ostatní části jsou již relativně chladnější. Tím vzniká ve střední části příčného tupého svaru oblast tahových napětí (obr. 36). Protože tato zbylá (reziiduální) napětí nejsou vyvolávána žádnou vnější silou, musí být ve vzdálenějších místech vyvážena tahovým namáháním. Tvoří tedy soustavu tzv. vlastních pnutí, jež existuje i v nezatíženém tělese. Tuto soustavu zbylých pnutí můžeme téměř úplně odstranit vyžiháním. Zdálo by se, že se tím zmenší střední složka napětí a že tedy mez únavy

vyžíhaného vzorku bude vyšší. Skutečnost je složitější. Špičky napětí se totiž zčásti eliminují plastickými deformacemi, jak jsme už mnohokrát ukázali, takže zisk z vyžíhání se tím částečně anebo úplně ztrácí. Podle zkušeností má žihání smysl tehdy, je-li jmenovité napětí alespoň po část cyklu tlakové. To souvisí s tím, že iniciované trhliny se při tlakovém namáhání uzavírají, což má příznivý vliv na napjatost v jejich kořeni. Tahová zbylá napětí by v takovém případě posunula celý cyklus do tahové oblasti, takže by k uzavření trhliny buď vůbec nedošlo nebo by se - v méně nepříznivém případě - čas uzavření trhliny zkrátil. Tím by poklesla amplituda napětí na mezi únavy. Proto je lépe v takovém případě zbylá pnutí vyžíháním odstranit. Nesprávným vyžíháním však můžeme dosáhnout opačného účinku. Obvykle se žihá na odstranění vlastních pnutí při teplotě 650 °C po dobu asi jedné hodiny na každých 25 mm tloušťky. Např. část o tloušťce 38 mm se žihá zhruba půldruhé hodiny. Trvá-li žihání dlouho, vzniká oduhličení v povrchové vrstvě a tím i snížení meze únavy. Může činit podle okolností až asi 15 %.

Jak jsme se již zmínili, závisí mez únavy také na velikosti vzorku. Např. u vzorku 200 mm širokého s příčným tupým svarem byla zjištěna mez únavy ve střídavém ohybu $\sigma_{0,C}$ při základně $2 \cdot 10^6$ cyklů závisle na tloušťce plechu takto:

Tloušťka	[mm]	16	26	46
$\sigma_{0,C}$	[MPa]	90	68	65

Vliv velikosti souvisí jednak s gradientem ohybového napětí, jednak s různou technologií, částečně také s různou úrovní vlastních reziduálních pnutí. Při ohybu užších vzorků je proto - při stejné jejich tloušťce - mez únavy vyšší. Např. u vzorku o tloušťce 26 mm byla mez únavy ve střídavém ohybu 68 MPa při šířce vzorku 200 mm, avšak 80 MPa při šířce 85 mm. Zvětšování šířky vzorku nad 200 mm nevedlo ke změně meze únavy. Tam, kde nelze předpokládat výrazný gradient napětí, např. při tahovém namáhání, se vliv velikosti projeví méně zřetelně; záleží už jenom na technologii a na vlastním pnutí.

Zmíníme se ještě, jaká bude časovaná pevnost $\sigma_{n,C}$ příčného tupého svaru při namáhání míjivým tahem, jestliže zvolíme základnu $N = 10^5$ cyklů. Ve srovnání s mezí únavy při základně $N = 2 \cdot 10^6$ bude

$$\frac{\sigma_{nc} (N = 10^5)}{\sigma_{nc} (N = 2 \cdot 10^6)} = 1,44 \text{ až } 2,42 \text{ (střední hodnota } 1,85).$$

K posouzení vlivu nesouměrnosti cyklu uvedeme pro základnu $N = 2 \cdot 10^6$ cyklů tyto poměry pro výpočet amplitud $\sigma_{a,c}$ na mezi únavy:

$$\frac{\sigma_{a,c} (R = 0,5)}{\sigma_{a,c} (R = 0)} = 0,368 \text{ až } 0,448 \text{ (střední hodnota } 0,408),$$

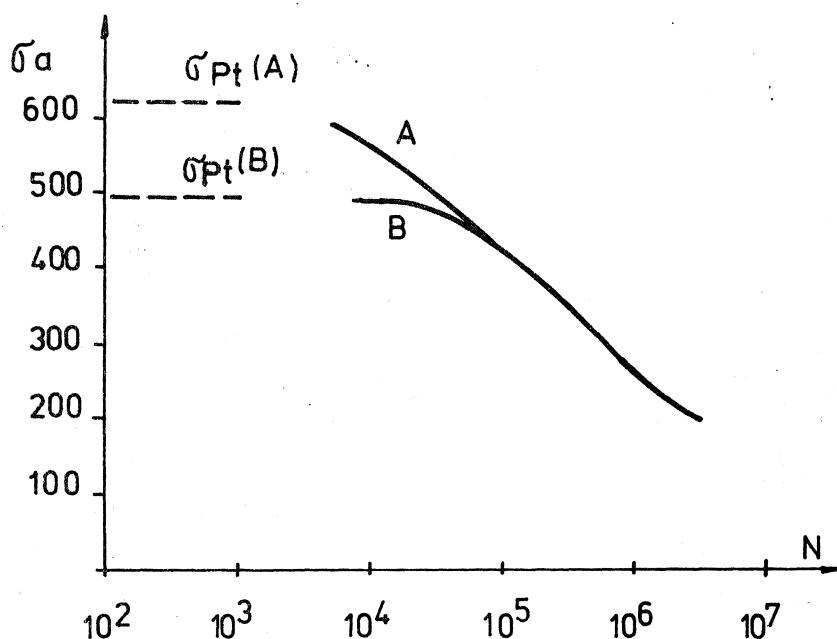
$$\frac{\sigma_{a,c} (R = -1)}{\sigma_{a,c} (R = 0)} = 0,523 \text{ až } 0,713 \text{ (střední hodnota } 0,618).$$

Měřené hodnoty spadají do uvedených intervalů s pravděpodobností 95 %. To znamená, že střední velikost amplitudy na mezi únavy ručně vyrobeného příčného tupého svaru je při střídavém tahu asi 93 MPa, při pulsuujícím tahu 75 MPa a při nesouměrnosti cyklu $R = 0,5$ ($\sigma_{max} = 2 \sigma_{min}$) asi 61 MPa.

Připojme ještě dvě poznámky. První se týká vlivu tvaru svarového švu. Ukázali jsme, že je výrazný. Proto podložení svaru podle obr. 33(c) má škodlivý vliv na mez únavy (amplituda klesne asi o třetinu). Druhá poznámka se týká svarování oceli o vysoké pevnosti. Tyto oceli se dříve nesvarovaly, říkalo se, že jsou nesvařitelné.* V současné době se však běžně svařují oceli až do pevnosti asi 850 MPa. Je to důsledek pokroku v metalurgii a v technologii. Uvedli jsme však, že mez únavy tupého příčného svaru se nijak významně s pevností materiálu nemění. Má tedy smysl používat pro svařované konstrukce ocel o vyšší pevnosti? Odpověď na tuto otázku není jednoznačná. Smysl to má i nemá, podle okolností. Jde-li o konstrukce namáhané střídavě nebo s malou střední hodnotou napětí, je únava svarů limitujícím faktorem a použití oceli o vysoké pevnosti je zbytečné a nevhodné. Jde-li však o oblast nízkocyklové únavy nebo o konstrukce zatížené převážně staticky, je omezujícím faktorem spíše statická pevnost; oceli o vysoké pevnosti

*) Avšak náš známý odborník člen korespondent ČSAV profesor F. Faltus prohlašoval už před více než třiceti lety: "Svařovat se dá všechno, ale musí se to umět".

jsou v takovém případě zcela na místě, neboť mohou vést k podstatným materiálovým úsporám. Kromě vysoké pevnosti však musí mít i potřebnou lomovou houževnatost, aby se vyloučila možnost vzniku náhlých "křehkých" lomů, ke kterým jsou náchylné zvláště rozměrné svařované konstrukce. Vysoká lomová houževnatost se dosahuje čistotou struktury a tedy náročnou metalurgií. Ekonomická rozvaha ukáže, zda je použití ocelí o vysoké pevnosti skutečně vhodné. Uvedli jsme, že užití ocelí o vysoké pevnosti přichází u svařovaných konstrukcí v úvahu jen tehdy, je-li konstrukce namáhána v oblasti nízkocyklové nebo statické pevnosti. Abychom toto tvrzení dokumentovali, uvádíme na obr. 37 příklad Wöhlerových diagramů vzorků s příčným tupým svarem dvou ocelí o pevnosti 620 MPa resp. 490 MPa. Je zřejmé, že se obě křivky liší pouze v oblasti statické a nízkocyklové únavy /5/.

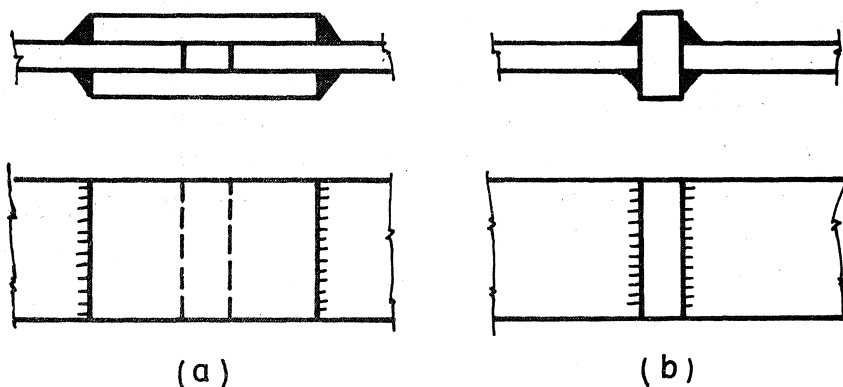


Obr. 37

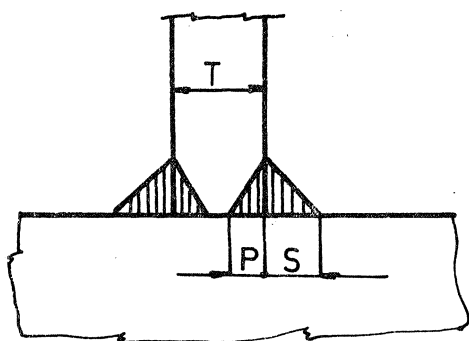
16. Únava koutových svarů

Na obr. 38 jsou znázorněny dva typy svařenců spojených koutovými svary. První je přeplátovaný spoj (a), druhý křížový spoj (b). Jsou-li tyto spoje zatíženy tahem, probíhá "silový tok" mnohem nerovnoměrněji než u tupého svaru. Lze proto očekávat, že vznikne mnohem větší koncentrace napětí a mez únavy bude podstatně menší. Z hlediska tvarové pevnosti jsou koutové svary skutečně velmi nevýhodné. Jsou také citlivější na kvalitu provedení než tupé svary, takže zkoušky jsou zatíženy

větším rozptylem. Např. křížový spoj dává při základně $2 \cdot 10^6$ cyklů běžně mez únavy σ_{nc} (horní napětí míjivého cyklu při tahovém namáhání) 70 až 150 MPa. Týž spoj v provedení s K-svarem dává 100 až 130 MPa. K-svar má tedy menší rozptyl a poněkud vyšší střední hodnotu meze únavy.



Obr. 38

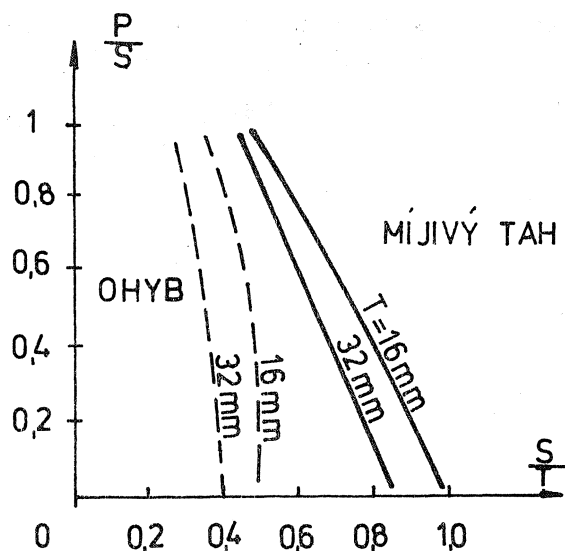


Obr. 39

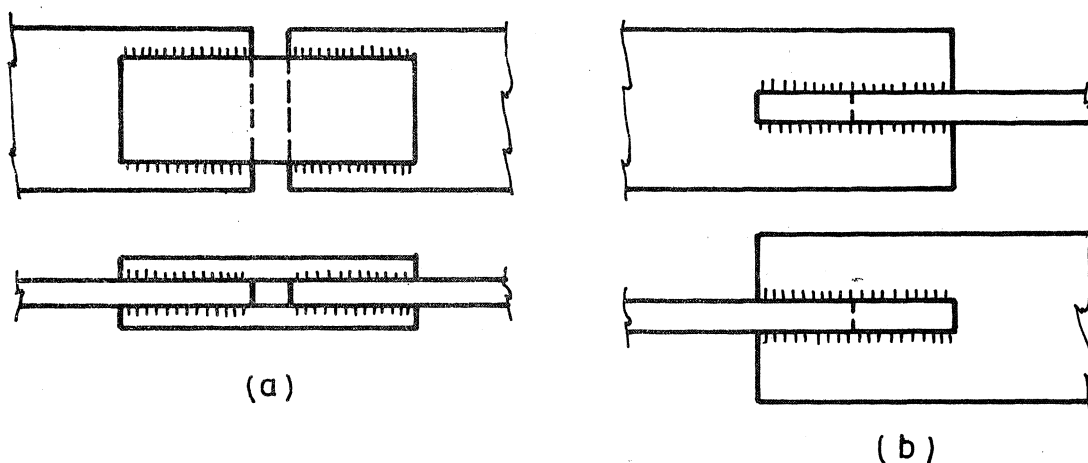
Geometrie svaru je znázorněna na obr. 39. Je-li provaření $P = 0$, jde o typický koutový svar s pravoúhlým průřezem švu. Místo, kde vzniká trhlina, záleží na velikosti svaru, především na poměru S/T . Je-li svar malý, vychází lom z kořene svaru a probíhá svarem. Je-li svar velký, vzniká trhlina v patě svaru a probíhá plechem (deskou). Nejvýhodnější velikost svaru bude tedy taková, při které bude stejná

pravděpodobnost vzniku trhliny v kořenu i v patě svaru. Příslušné optimální poměry P/S resp. S/T lze odečíst z obr. 40. ^{*)}

^{*)} OUCHIDA, H. - NISHIOKA, A., Schweisstechnik (Berlin) 16 (1966), 4:150-157. Citováno podle /9/.



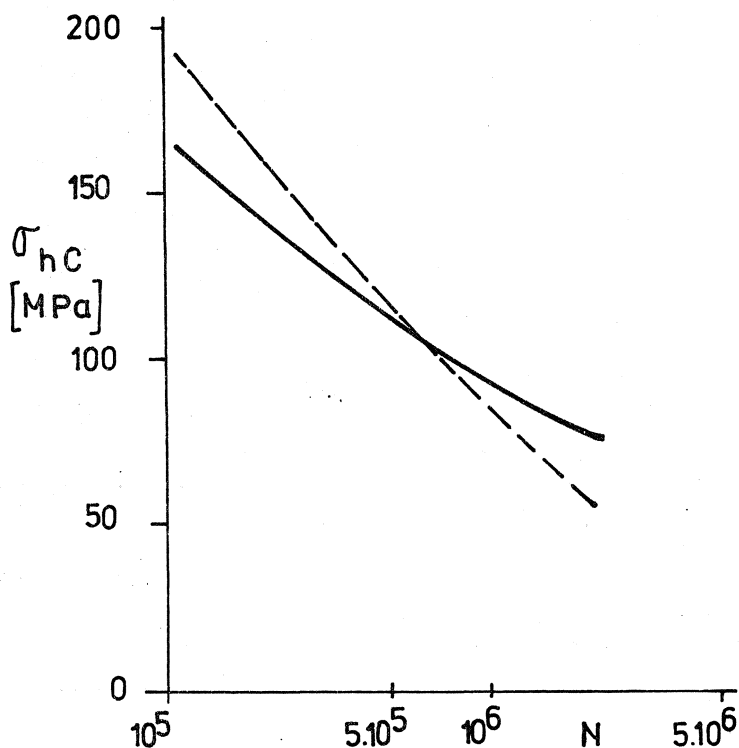
Obr. 40



Obr. 41

Existují ještě jiné, často užívané spoje s koutovými svary. Na obr. 41 je zakreslen spoj s přepletováním (a), avšak s podélnými svary. V pravé polovině obrázku je rovněž použito podélných svarů, avšak bez přepletování (b). Spojované pásy jsou opatřeny zářezy a vzájemně otočeny o 90° kolem osy prutu. Na tomto příkladu chceme ukázat, že tzv. srovnávací zkoušky únavy materiálu (při nichž se zjišťuje, která konstrukční alternativa má při dané úrovni napětí větší životnost) mohou vést k nesprávným závěrům. Vzorky vyrobené podle obr. 41(a) s průřezem hlavních pásů 114×13 mm a s přepletováním pásy o průřezu 90×10 mm dávají Wöhlerovu křivku zakreslenou na obr. 42 plnou čarou. Horní napětí σ_{hc} při míjivém tahu je přitom počítáno v hlavních pásech. Délka svaru je na každé straně 170 mm.

Čárkovaně je zakreslena Wöhlerova křivka spoje podle obr. 41(b) odpovídající velikosti. Je zřejmé, že v oblasti nízkocyklové únavy je tato druhá konstrukce výhodnější. Tento závěr však nemůžeme zobecnit pro vysokocyklovou oblast pro $N > 5 \cdot 10^5$, neboť tam je naopak výhodnější spoj podle obr. 41(a).



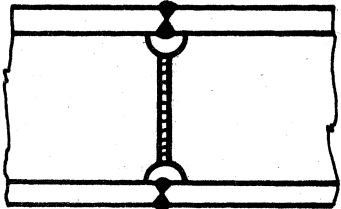
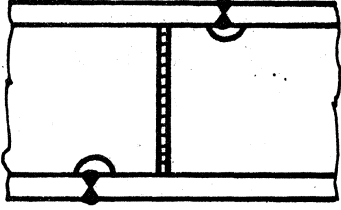
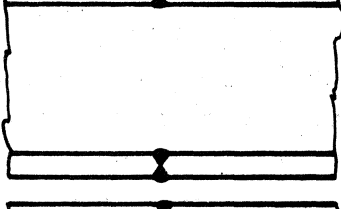
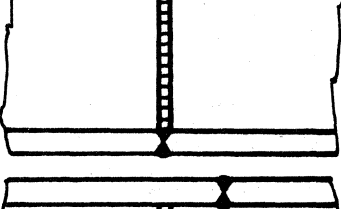
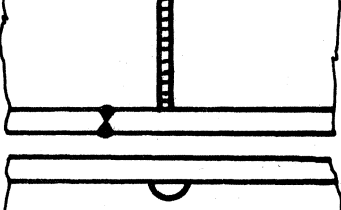
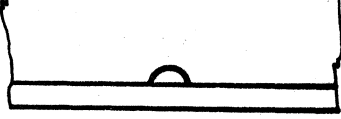
Obr. 42

17. Únava různých typů svařovaných spojů

Na obr. 43 jsou uvedena maximální ohybová napětí při míjivém ohybu ($R = 0$). Jde o časovanou pevnost resp. o mez únavy při základně $N = 10^5$ resp. $N = 2 \cdot 10^6$ cyklů za ohybu různých typů svařovaných spojů dvou stejných I-profilů ("nastavované nosníky"). Případy A, B, D a E se v praxi užívají, kdežto případy C a F byly uměle vytvořeny, aby se oddělily jednotlivé vlivy, na nichž závisí životnost spoje. Jde o informativní hodnoty získané srovnáním a zprůměrováním výsledků zkoušek několika autorů.

Případy A a D se liší od uspořádání B a E tím, že svary ve stojině i v přírubách jsou v téže rovině. Ve spoji D dochází ke střetnutí těchto svarů, kdežto ve spoji A je ve stojině na obou stranách "odlehčující" půlkruhový výřez. Je zajímavé, že tento výřez má

škodlivý vliv a to jak v oblasti časované, tak i trvalé pevnosti.
Ke stejnému závěru dospějeme i ze srovnání typů B a E.

MÍJIVÝ OHYB SPOJ I - PROFILŮ	$\sigma_{0,hC}$ [MPa] $N=10^5$ $N=2 \cdot 10^6$	
 <p>A</p>	235	120
 <p>B</p>	213	145
 <p>C</p>	-	178
 <p>D</p>	277	135
 <p>E</p>	220	160
 <p>F</p>	-	160

Obr. 43

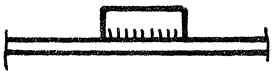
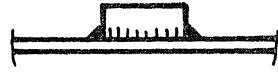
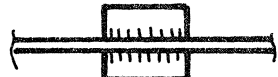




Srovnáme-li spoj C, u něhož je tupý příčný svar pouze v přírubách, s alternativou F, u níž jde o nosník z jednoho kusu, nesvařovaný pouze s "odlehčujícími" otvory je vidět, že tyto otvory zhoršují svým vrubovým účinkem (ostrými kouty na okrajích výřezů) mez únavy více než příčný tupý svar. Z uvedeného poznatku je zřejmé, že předcházet "hromadění svarů" v jednom místě má smysl jenom tehdy, jestliže odděleným uspořádáním svarů nevzniknou nežádoucí koncentrace napětí, jak tomu bylo v případech podle obr. 43 A resp. B.

Velmi poučné je srovnání časované a trvalé pevnosti u případů A a B (resp. D a E). Ukazuje se, že časovaná pevnost spojů se svary v jedné rovině je vyšší než když jsou svary "přesazené", kdežto v oblasti trvalé pevnosti je tomu naopak, tam jsou výhodnější přesazené svary. Opět se tedy potvrzuje, o čem jsme se zmínili už v minulé kapitole, že totiž tzv. srovnávací zkoušky na únavu mohou dát při nízkocyklové únavě opačný výsledek než při únavě vysokocyklové. Je proto velmi důležité, aby se takové zkoušky konaly za režimů blízkých provozním. Jinak můžeme dospět k chybným závěrům.

Na obr. 44 jsou tzv. nezatížené podélné a příčné svary. K nim je uvedena typická hodnota amplitudy na mezi únavy při tahu (resp. tahu-tlaku) v závislosti na nesouměrnosti cyklu R . Říkáme-li, že jde o nezatížený svar, máme tím na mysli jen to, že zrušením svaru se neznemožní přenos síly. Jinak ovšem tyto svary zatíženy jsou, působí dokonce značnou koncentraci napětí a proto také snižují více nebo méně mez únavy. Uvedené informativní hodnoty se vztahují k základně $N = 2 \cdot 10^6$ cyklů.

Porovnáme-li příslušné případy v každém oddílu na obr. 44 vidíme, že přivařením jednostranné výztuhy snížíme mez únavy méně než při symetrickém uspořádání výztuh. To lze vysvětlit tím, že při jednostranném vyztužení prutu nejde už v kritickém místě o čistý tah resp. tlak, ale o kombinaci tahu resp. tlaku s ohybem. Tím vzniká ve svarech příznivější napjatost.

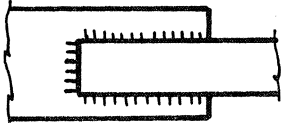
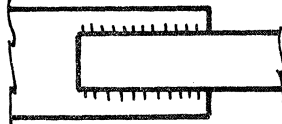
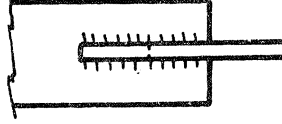
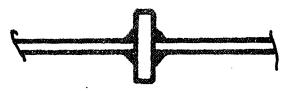
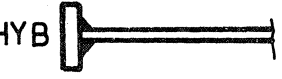

Velmi významný je rozdíl meze únavy u jednostranné příčné výztuhy připevněné dvěma koutovými svary nebo jen jedním svarem. Amplituda na mezi únavy poklesne v tomto druhém případě asi na polovinu. Tento rozdíl souvisí jednak s tím, že při dvoustranném přivaření se větší měrou projeví přídavný ohyb, o němž jsme hovořili v minulém odstavci, jednak s tím, že sousední koutové svary se navzájem "odlehčují", tj. jejich výsledný vrubový účinek je menší.

SVAR	MEZ ÚNAVY PŘI $N=2 \cdot 10^6$	AMPLITUDA [MPa]		
		R=-1	R=0	R=0,5
PODÉLNÝ		63	54	43
		110	76	56
		42	40	39
PŘÍČNÝ		143	110	-
		90	66	-
		70	56	46
		93	70	54

Obr. 44

Na obr. 45 jsou typické hodnoty meze únavy při základně $N = 2 \cdot 10^6$ cyklů u zatížených spojů, tj. takových, u nichž by přerušením svaru došlo i k přerušení silového přenosu. Jde opět o podélné a příčné svary a o zatížení cyklickým tahem resp. tahem-tlakem. Pouze v jednom případě jde o ohyb v rovině nákresny, což je v obrázku zvlášť vyznačeno.

Ze srovnání prvních dvou alternativ na obr. 45 je zřejmé, že svary mají být pokud možno souvislé; svar na čelní straně užšího pásu zvýší amplitudu na mezi únavy asi o 10 % při míjivém tahu a až asi o 25 % při střídavém namáhání. Přitom by se mohlo zdát, že tento svar nemůže příliš ovlivnit napjatost v kritickém místě, tj. na konci svaru u čela širšího pásu. Ve skutečnosti je tento vliv významný.

SVAR	MEZ ÚNAVY PŘI $N = 2 \cdot 10^6$	AMPLITUDA [MPa]		
		R=-1	R=0	R=0,5
PODÉLNÝ		39	33	28
		31	30	-
		34	27	-
PŘÍČNÝ		68	53	-
	OHYB 	128	116	-
		59	48	42

Obr. 45

Hodnoty uvedené na obr. 43 až 45 se vztahují k běžným rozměrům, tj. k tloušťkám asi 10 mm. U rozměrných konstrukcí je třeba počítat s menšími hodnotami, nezapomínat na vliv velikosti.

18. Vliv vad ve svaru na mez únavy

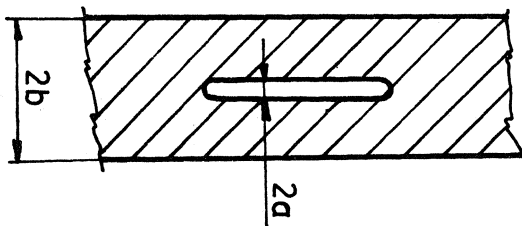
Z vad, které se v praxi vyskytují nejčastěji, uvedeme nedostatečné provaření, které způsobuje nespojitosti na způsob trhlin, dále porozitu svaru, která vzniká strháváním plynů, vměstky, což jsou nekovové nečistoty (zpravidla zavařené částičky z obalu elektrod) a trhliny způsobené teplotním pnutím ve zkřehlých oblastech během svařování a chladnutí. Tyto trhlinky bývají drobné a vycházejí obvykle z povrchu,

kdežto diskontinuity vznikající nedostatečným provařením bývají větší a často skryty uvnitř svaru.

Je třeba poznamenat, že s dokonalou, bezvadnou strukturou svaru nemůžeme vůbec počítat. Ve výrobě nelze dosáhnout stejné kvality svarů jako v laboratorních podmínkách se zvláště zkušenými svařeči. Jde však o to, aby svary vyhověly z hlediska požadavků kladených na životnost konstrukce, tj. aby vady ve svaru nepřekročily přípustnou mez. Důležité svary musí být proto defektoskopicky kontrolovány. Mají být navrženy tak, aby k nim měl svařeč dobrý přístup a mohl je svařovat pokud možno shora. Konstrukce by měla být tak navržena, aby všechny důležité svary byly vyrobeny v dílně, nikoli při montáži na staveništi.

O přípustnosti vad ve svaru rozhodujeme podle toho, jak umíme odhadnout míru zmenšení meze únavy, jak známe skutečné provozní namáhání a také podle následků, které může mít případná porucha. Někdy můžeme tolerovat i větší vady, jsou-li umístěny v místech, z nichž se trhlina bude šířit do kritické velikosti jen pomalu, takže periodickými prohlídkami lze poruchu včas zjistit a katastrofálnímu lomu předjet. Všechna taková rozhodnutí jsou velmi odpovědná a vyžadují dobrou znalost zákonů o vzniku a šíření únavového lomu.

Na obr. 46 je znázorněna neprovařená část v tupém příčném svaru o šířce $2a$. Tloušťka svaru popř. stěny je $2b$. Mez únavy tupého příčného svaru s takovou vadou lze posoudit podle zásad lomové mechaniky tak, že se vypočte hodnota /3/

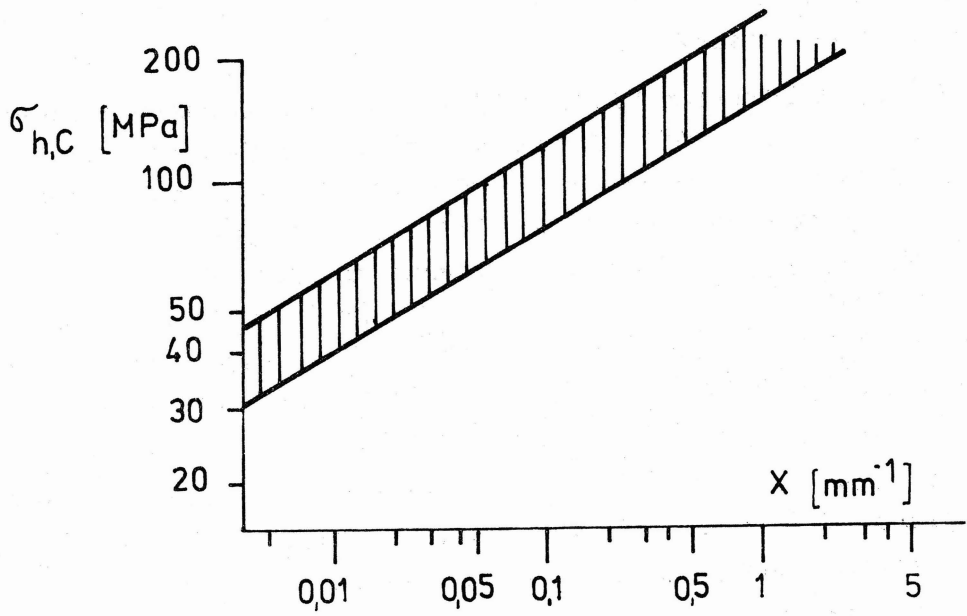


Obr. 46

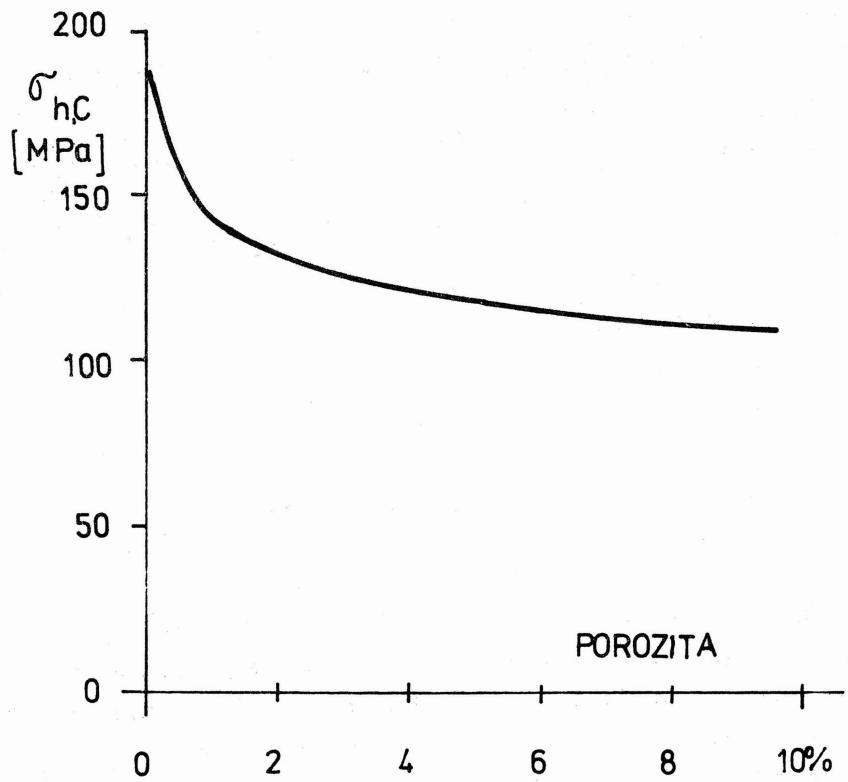
$$\chi = \frac{1}{2b} \left[\cotg \frac{\pi a}{2b} - \cotg \frac{\pi a_{kr}}{2b} - \frac{\pi}{2b} (a_{kr} - a) \right], \quad (18.1)$$

kde $2a_{kr}$ je kritická šířka trhliny, vypočtená jako mez stability trhliny, po jejímž překročení se staticky zatížená trhlina náhle rozšíří přes celou tloušťku stěny. Z obr. 47 lze pak odečíst mez únavy při míjivém tahu (horní napětí cyklu). Při praktických výpočtech se ukazuje, že výsledek většinou jen málo závisí na hodnotě a_{kr} , takže lze - např. u tlakových nádob - přibližně dosadit $a_{kr} \approx b$.

Na obr. 48 je zakreslen vliv porozity na horní napětí na mezi únavy při míjivém tahu v příčném tupém svaru. Porozitou se zde rozumí procentuální podíl vakantních míst v řezu svaru /15/. Mez únavy zprvu s porozitou prudce klesá, pak se však pokles zmírňuje.



Obr. 47



Obr. 48

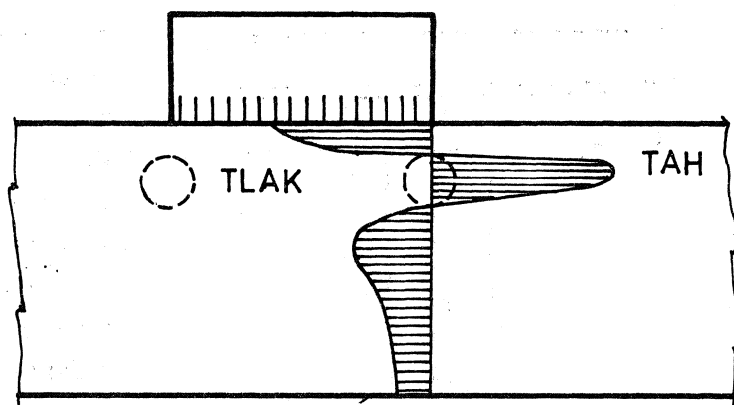
19. Úpravy zvyšující mez únavy svařovaných konstrukcí

Jedním ze způsobů, jak zvýšit mez únavy v místech s velkou koncentrací napětí na koncích nespojitých svarů, je vytvoření tlakového reziduálního pnutí v kritickém místě. Lze toho dosáhnout plastickým tvářením nebo jednodušeji podle prof. O. Puchnera, člena korespondenta ČSAV, vhodným lokálním ohřevem /37/. Např. u konců jednostranně připojené výztuhy s podélným svarem na obr. 49 vzniká nadměrná koncentrace napětí na koncích svarů.

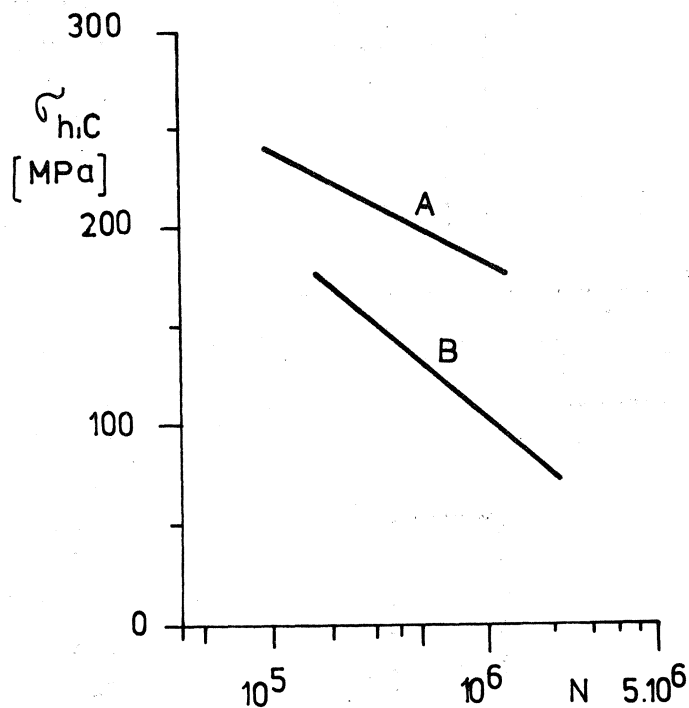
V místech označených kroužky zahřejeme materiál rychle až do červeného žáru. Protože okolní materiál se ještě nestačil ohřát, brání tepelné dilataci a způsobuje plastickou kompresi materiálu, jehož mez kluzu je ohřevem snížena.

Po vyrovnání teplot a celkovém ochlazení se materiál v této oblasti smršťuje více než v okolí, takže sám je namáhán tahem, ale okolí tlakem. Vzniká tak reziduální pnutí, které je na obr. 49 vyznačeno. Kritické místo svaru se tím dostává do oblasti velkého tlakového předpětí, což má za následek změnu Wöhlerovy křivky na obr. 50 z původní polohy B na polohu A. Mez únavy se tedy podstatně zvýší.

Vznikly spory o to, do jaké míry lze na reziduální pnutí spoléhat. Vlivem cyklického namáhání dochází totiž k jejich

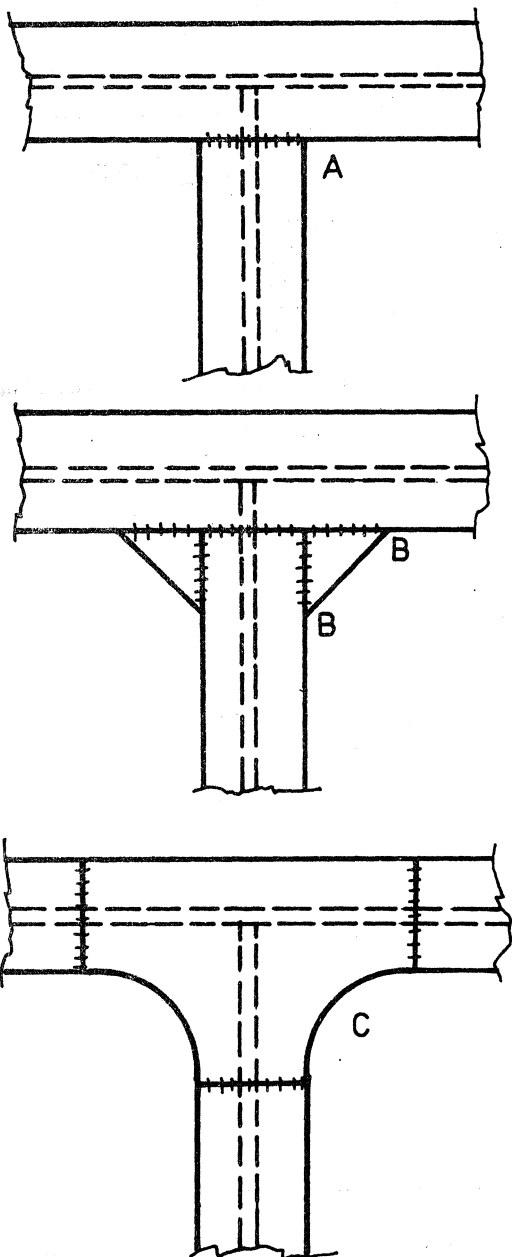


Obr. 49



Obr. 50

částečné relaxaci, takže mez únavy časem opět klesne. Odpověď poskytuje do určité míry obr. 50. Je z něho patrné, že příznivý vliv vlastního pnutí se projevuje především v oblasti vysokocyklové únavy. Čím kratší je životnost, tj. čím je namáhání více nad mezí únavy, tím menší je jejich vliv. Jinými slovy, úprava lokálním ohřevem mění sklon Wöhlerovy křivky. Zhruba lze říci, že čáry A a B na obr. 50 se protínají asi na mezí kluzu; tehdy už nemá lokální ohřev vůbec žádný smysl.

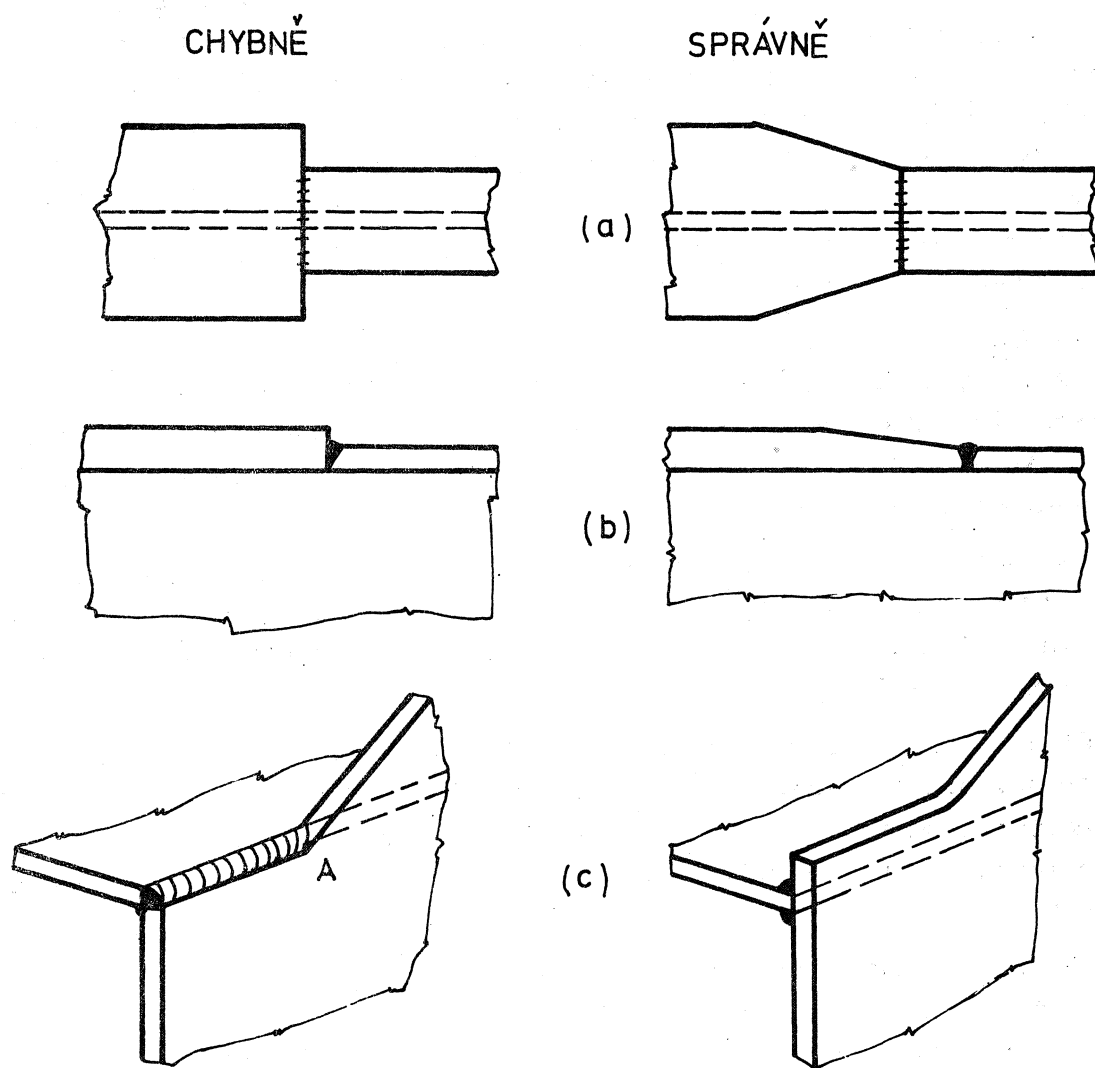


Obr. 51

U konstrukcí, u nichž se vyskytne únavový lom, se konstruktéři často rozhodnou čelit dalším poruchám zesílením spoje v kritickém místě (přidáním žeber, krycích plechů apod.). To však nebývá vždy úspěšné opatření. Předpokládejme např., že lom vzniká v místě A na obr. 51. Snad by tomu bylo možné úplně předejít lokálním ohřevem podle právě vyloženého postupu. Rozhodne-li se konstruktér postupovat zdánlivě bezpečnější cestou přivařením trojúhelníkových výztuh BB, zpravidla zjistí, že lom se pouze "přestěhoval" z místa A do některého z míst B. Teprve radikální úprava podle C přinese nápravu.

Na obr. 52 jsou zakresleny tři příklady chybných a správných konstrukčních spojů. V případě (a) a (b) je třeba vyloučit náhlou nespojitost tvaru vytvořením plynulého přechodu. V případě (c) může dojít - je-li spoj vytvořen podle levého obrázku - k "podpálení" v místě A a následnou koncentrací napětí. Ta může způsobit vznik trhliny. Při uspořádání konstrukce podle pravé části obrázku máme tvar přechodu v tomto místě zcela pod kontrolou. Kromě toho jsme dosáhli toho, že koncentrace napětí ve svislé stěně je nyní vzdálena od obou koutových svarů. Dva koutové

svary mají přitom vyšší mez únavy než jeden, jak je zřejmé v jiné souvislosti z obr. 44 (první a třetí případ příčných koutových svarů v dolní části obrázku).



Obr. 52

Podle Gurnaye /9/ lze shrnout zásady úspěšného konstruování svařových spojů namáhaných v únavě asi takto:

- (1) Navrhovat konstrukci tak, aby silový tok byl co nejplynulejší. To znamená vyhnout se nespojitostem a dbát o plynulé změny průřezů. Nešetřit materiálem v místech, kde působí koncentrované síly, avšak dbát o to, aby změna tuhosti nebyla náhlá.
- (2) Vybírat typ svaru tak, aby se zajistil co nejplynulejší silový tok. Například používat, kde to jde, tupé svary spíše než koutové. Jestliže

to není možné, umístit koutové svary co nejvýhodněji a dimenzovat je tak, aby nedocházelo k lomům ve svarovém švu.

(3) Je třeba co nejvíce omezit vrubový účinek svaru a zmenšit počet kritických míst. Protože každý konec svaru je takovým místem, doporučuje se používat souvislé průběžné svary spíše než přerušované. Dalším zdrojem koncentrace napětí je přechod návaru do okolního materiálu ("pata" svaru). Je proto třeba dbát, aby svar neporušoval zbytečně hladkost povrchu. Důležité svary musí být proto dobře přístupné, mají se svařovat pokud možno shora a spíše v dílně než při montáži. Metoda sváření má být volena tak, aby usnadňovala vytvoření hladkého, tvarově výhodného povrchu svaru.

(4) Kde je to možné, je třeba umístit svarové spoje do málo namáhaných míst. Například spojitě nosníky mají být nastavovány svařováním v místech, kde nastává inflexe (kde je minimální ohybový moment). Také různá oka a závěsy mají být přivařovány jen v místech málo namáhaných (v okolí neutrální osy apod.).

(5) Je třeba se vyvarovat toho, abychom excentrickým umístěním vnášeli do svarových spojů nepříznivá ohybová napětí. Také zbytečné vibrace je nutno vyloučit (např. samobuzené kmity působené Kármánovými víry při obtékání štíhlých prutů).

(6) Je-li konstrukce namáhána v oblasti meze únavy s relativně malou střední složkou, není vhodné používat drahých ocelí o vysoké pevnosti, neboť mez únavy svarových spojů se tím příliš neovlivní. Postačí proto houževnatá ocel, která se mimo to lépe svařuje. Obdobné doporučení se týká i svařovaných konstrukcí z lehkých kovů.

(7) Žíhání na odstranění vlastních pnutí má smysl tam, kde cyklické napětí je převážně tlakové. Pokud tomu tak není, je zvýšení meze únavy nevýrazné a žíhání je pak pouhým vyhazováním peněz. Výjimkou jsou případy, při nichž má žíhání jiný účel než ovlivnit mez únavy. Např. u konstrukcí, u nichž hrozí vznik náhlého ("křehkého") lomu nebo u součástí, u nichž chceme zvýšit tvarovou a rozměrovou stálost při následujícím obrábění.

(8) Opracováním svarů na hladko, povrchovým zpevněním nebo lokálním ohřevem podle Puchnera lze zvýšit mez únavy. Tyto úpravy lze doporučit jen u konstrukčně dobře vyřešeného svarového spoje. Neměly by se takovými operacemi zastírat konstrukční chyby.

(9) Technolog a konstruktér by měli úzce spolupracovat; konstruktér by měl umět vysvětlit a obhájit své požadavky na kvalitu a způsob provedení důležitých detailů. To platí zvláště tehdy, mohou-li být tyto detaily v jiném provedení zdrojem poruch.

20. Životnost částí a její rozptyl

Jak jsme již uvedli, životnost měříme buď počtem cyklů zatížení do poruchy (zpravidla do lomu) nebo dobou, po kterou je konstrukce schopna odolávat danému procesu namáhání. Zpravidla tento proces považujeme za stacionární nebo alespoň "po částech stacionární" se známou následností a trváním jednotlivých etap.

Počet cyklů charakterizuje životnost zejména u periodického nebo náhodného úzkopásmového procesu (s úzkým frekvenčním spektrem). Tento počet cyklů můžeme snadno přepočítat na dobu služby stroje podle frekvence zatěžovacích cyklů, u náhodných procesů podle střední (očekávané) frekvence.

Budeme-li měřit životnost série výrobků nebo zkušebních vzorků při stejném, daném namáhání, bude se u jednotlivých vzorků velmi lišit. Např. ocelové hladké vzorky podle /26/ daly při střídavém ohybu (za rotace) s amplitudou 330 MPa poměr $N_{max} / N_{min} = 4,71$ a při amplitudě 280 MPa dokonce 8,86. U hliníkových slitin bývá rozptyl ještě větší. Většina výsledků se přitom hromadí u spodní meze rozptylového pásma. Proto nelze hovořit o normálním rozdělení, které je souměrné kolem střední hodnoty. Většinou však lze předpokládat, že takové rozdělení má logaritmus počtu cyklů do lomu, tedy $\log N$. Střední životnost je pak taková, jejíž logaritmus je aritmetickým průměrem logaritmů počtu cyklů jednotlivých vzorků. K tomuto normálnímu rozdělení logaritmu počtu cyklů do lomu není žádný logický důvod; jde o poznatek čistě empirický.

Druhým důležitým poznatkem je, že rozptyl životnosti je menší při větším namáhání. Je tedy menší v oblasti nízkocyklové únavy než vysokocyklové. Největší rozptyl životnosti je v blízkosti meze únavy; pokud tato mez existuje, je na ní poměr $N_{max} / N_{min} \rightarrow \infty$. Některé vzorky, namáhané nepatrně nad mezí únavy, se totiž poruší, jiné se neporuší vůbec. Pod mezí únavy se vzorky neporuší ani při nekonečném počtu cyklů zatížení. Zmínili jsme se však již v dřívějším výkladu o tom, že mez únavy je pojem odvozený idealizací složité skutečnosti.

Porovnáme-li rozptyl životnosti u hladkých částí a u částí s vrubem, pak zjistíme, že čím je vrub ostřejší, tím je menší rozptyl životnosti.

Tyto poznatky lze jednotně vysvětlit jestliže si uvědomíme, že rozptyl životnosti je spjat převážně s prvním vývojovým stadiem únavového lomu, s iniciací trhliny. Druhé stadium, tj. šíření trhliny, je dáno poměrně přesně platnými zákony lomové mechaniky, takže doba resp.

počet cyklů pro šíření trhliny má jen malý rozptyl. Zato nukleace trhliny závisí na mnoha faktorech úzce lokálního charakteru a doba nukleace je proto zatížena velkým rozptylem. A právě tato doba převažuje v celkové životnosti, je-li tyč hladká a málo namáhaná. Naopak vrub nebo zatížení vysoko nad mezí únavy zkracují nukleární stadium, takže podíl iniciace na celkové životnosti klesá. Tím klesá i rozptyl životnosti.

Posoudíme-li svarové spoje podle toho, co zde bylo řečeno, dojdeme k závěru, že se budou chovat podobně jako vruby. Tupý svar představuje mírný strukturální vrub, koutový svar ostrý vrub. Proto lze očekávat, že svarové spoje budou mít menší rozptyl životnosti než hladké vzorky, nejmenší rozptyl bude u koutových svarů. To se skutečně potvrzuje, jak ukázali Neumann a Müller /34/. Na čtrnácti vzorcích s tupým příčným svarem zjistili při namáhání $\sigma_{nc} = 178$ MPa střední životnost 417 000 cyklů a na vzorcích různých typů zjistili tyto poměry maximální a minimální životnosti ^{*)}

Vzorek	N_{min}	N_{max}	N_{max} / N_{min}
Plný materiál	150 000	1 100 000	7,3
Tupý svar	225 000	720 000	3,2
Koutový svar nezatížený	300 000	600 000	2,0

Jde-li o svařovanou konstrukci, bude rozptyl životností za určitých okolností ještě menší. Lze-li totiž zaručit standardní výrobní podmínky, představuje svařovaná konstrukce komplex svarů s mnoha nebezpečnými místy, v nichž lze očekávat vznik únavových trhlin s nepříliš různou pravděpodobností. Tuto vlastnost má každá správně dimenzovaná konstrukce, jejíž materiál je rovnoměrně a účelně využit. Trhlina vznikne vždy v nejslabším místě konstrukce, které však není u všech výrobků stejné. Uplatní se statistika výběrů minimálních hodnot, což zpravidla dá menší rozptyl životnosti. Je to stejné jako bychom zkoušeli svařované vzorky po skupinách a z každé skupiny vzali do úvahy jen vzorek s nejmenší časovanou pevností. Rozptyl životnosti takto vybraných vzorků bude menší než rozptyl uvnitř každé skupiny a také menší než rozptyl náhodně vybraného souboru o stejném počtu vzorků.

*) Malý rozptyl je jen u koutových svarů shodně vyrobených. Technologickou nekázni se rozptyl zvětšuje, jak jsme uvedli v 16. kapitole.

Literatura

- /1/ BENDAT, J.S. - PIERSOL, A.G.: Random data; analysis and measurement procedures. John Wiley, New York 1971.
- /2/ BÍLÝ, M. - ČAČKO, J.: Nestacionární náhodné procesy - současný stav a perspektivy jejich klasifikace, zpracování a simulace. "Strojnícky časopis" 32 (1981), 2: 139-153.
- /3/ BURDEKIN, T.M. - HARRISON, J.D. - YOUNG, J.G.: The effect of weld defects with special reference to B.W.R.A. research. Institut of Welding Non-Destructive Testing Conference, London, Feb. 1967.
- /4/ CHENG, S.Y. - HSU, T.R.: On an elasto-plastic stress-strain relationship for multi-axial stress states. "International Journal for Numerical Methods in Engineering" 12 (1978), 10.
- /5/ FROST, N.E. - DENTON, K.: The fatigue strength of butt welded joints in low alloy structural steels. "British Welding Journal" 14 (1967), No. 4.
- /6/ GAJDOŠ, L.: Zhodnocení postupů pro výpočet částí při nízkocyklové únavě. "Strojírenství" 29 (1979), 7: 423-428.
- /7/ GAJDOŠ, L.: Porovnání sovětské normy s předpisy ASME pro výpočet životnosti v nízkocyklové únavě. "Strojírenství" 30 (1980), 4: 237-244.
- /8/ GAJDOŠ, L. - AUŘEDNÍK, B.: Nízkocyklová únava, tabulky čs. ocelí. Přílohy časopisu "Strojírenství" 30 (1980).
- /9/ GURNAY, T.R.: Fatigue of welded structures. Cambridge University Press, Cambridge 1968.
- /10/ HANKE, M.: Výpočet únavové životnosti při zatížení s proměnlivou amplitudou. "Strojírenství" 16 (1966), 2: 95-98, 88.
- /11/ HANKE, M.: Abschätzung der Form des Klassen-Betriebslastkollektive nach der ÚVMV-Methode. "IfL Mitteilungen" 14 (1975), 1/2 : 49-58.

- /12/ HANKE, M.: Využití parametrického vyjádření některých charakteristik v problematice únavy automobilových dílů. "Strojnícky časopis" 32 (1981), 3: 359-365.
- /13/ HASHIN, Z.: A reinterpretation of the Palmgren-Miner rule for fatigue life prediction. "ASME Journal of Applied Mechanics" 47 (1980) : 324-328.
Diskuse k témuž ve svazku 48 (1981) : 446-448.
- /14/ HERTEL, H.: Ermüdungsfestigkeit der Konstruktionen. Springer-Verlag, Berlin 1969.
- /15/ HOMES, G.A.: Relation between endurance limit and porosity of arc welds in mild steels. "Arcos" 15 (1938), 89: 1951-1957.
- /16/ HÖSCHL, C.: Únava materiálu při periodickém zatěžování. Dům techniky ČSVTS Praha, Praha 1981.
- /17/ JELÍNEK, E.: Podklady o deformačním chování materiálu pro metodiku stanovení a výpočtu životnosti. Zpráva SVÚM č. Z-77-3813, Praha 1978.
- /18/ JINICH, J.: Komplexní výpočetní systém pro hodnocení životnosti strojních dílů za daných provozních podmínek. Zpráva SVÚSS č. 80-01011, Praha-Běchovice 1980.
- /19/ KERMES, J. - PROŠKOVEC, J. - VOJTÍŠEK, J.: Únavová pevnost konstrukčních ocelí při náhodném způsobu namáhání. "Strojnícky časopis" 32 (1981), 3: 301-314.
- /20/ KLESNÍL, M. - LUKÁŠ, P.: Únava kovových materiálů při mechanickém namáhání. Academia, Praha 1975.
- /21/ KROPÁČ, O.: Numerické vyhodnocování charakteristik náhodného procesu z jedné jeho realizace. "Zpravodaj VZLÚ" (1971), 1 (85) : 3-44.
- /22/ KROPÁČ, O.: Náhodné procesy v pevnostních a spolehlivostních úlohách. "Strojírenství" 31 (1981), 11: 635-642.
- /23/ LANCZOS, C.: Applied analysis. Pitman, London 1957.

- /24/ LANDGRAF, R.W.: The resistance of metals to cyclic deformation. Spec. Techn. Publ. 467, ASTM 1970.
- /25/ LANDGRAF, R.W. - WETZEL, R.M.: Cyclic deformation and fatigue damage. In: Proceedings of the International Conference on Mechanical Behavior of Materials, vol. II, Fatigue of Metals. Kyoto, Aug. 1971, pp. 410-419.
- /26/ LEVY, J.C.: Cumulative damage in fatigue. "Engineering" 179 (1955), p. 724.
- /27/ MADAYAG, A.F.: Metal fatigue. Theory and Design. John Wiley, New York 1969.
- /28/ MANSON, S.J.: Fatigue: a complex subject - some simple approximations. "Experimental Mechanics" 5 (1965), 7: 193-226.
- /29/ MASSING, G.: Proceedings of the Second International Congress of Applied Mechanics, Zürich 1926, pp. 332-335.
- /30/ MATSUISKI, M. - ENDO, T.: Fatigue of metals subjected to varying stress. Paper presented at Kyushu District meeting of JSME (March 1968).
- /31/ NĚMEC, J.: Tuhost a pevnost ocelových částí. Akademia, Praha 1963.
- /32/ NĚMEC, J. - PUCHNER, O.: Tvarová pevnost kovových těles. SNTL, Praha 1971.
- /33/ NĚMEC, J. - SEDLÁČEK, J. a kol.: Spolehlivost strojních zařízení. SNTL - ALFA, Praha 1979.
- /34/ NEUMANN, A. - MÜLLER, G.: Die Dauerfestigkeit von CO₂ schutzgasgeschweissten Stumpfnähten. "Schweisstechnik" 2 (1959), 43-44.
- /35/ POSPÍŠIL, B.: Zobecnění Neuberova principu směrodatné deformace k výpočtům v oblasti střídavé plastické deformace. "Strojírnoství" 25 (1975) 2: 74-78.
- /36/ PUCHNER, O.: Hospodárné navrhování svařovaných strojních konstrukcí. Strojnický sborník č. 11, s. 125-136. SNTL, Praha 1955.

- /37/ PUCHNER, O.: Schwellfestigkeit geschweisster Knotenblechanschlüsse und ihre Erhöhung durch örtliche Glühung. "Schweisstechnik" 6 (1956) : 109-114.
- /38/ PUCHNER, O.: K únavě svařených spojů z ocelí vyšší pevnosti. "Strojírenství" 7 (1957) : 581-585.
- /39/ PUCHNER, O.: Pokroky ve zkoušení a výpočtu tvarové pevnosti strojních částí. In: Zásady novodobé konstrukce strojů. NČSAV, Praha 1959, s. 55-91.
- /40/ RAJCHER, V.L.: Gipotéza spektralnogo summirovaniya i jejo primeneniya dlja opredeleniya ustalostnoj dolgovečnosti pri dějstviji slučajnyh nagruzok. Trudy CAGI 1134, Moskva 1969.
- /41/ RASHE, D. - MORROW, J.: Mechanics of materials in low cycle fatigue testing. In: Manual on Low Cycle Fatigue Testing. ASTM STP 465 (1969).
- /42/ ROBERTS, J.B.: Structural fatigue under non-stationary random loading. "The Journal of Mechanical Engineering Science" 8 (1966), 4: 392-405.
- /43/ ROLFE, S.T. - BARSOM, J.M.: Fracture and fatigue control in structures. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.
- /44/ RUDNICKIJ, N.M.: K oceňke vlijanija ostatočnyh naprjaženij i upročněníja pověrchnostnogo sloja na ustalostnuju pročnost dětalej. "Problemy pročnosti" (1981), 10: 27-34.
- /45/ SCHUSTER, K. - WIRTHGEN, G.: Aufbau und Anwendung des DDR-Standards TGL 19 340 (Neufassung). Maschinenbauteile, Dauerschwingfestigkeit "IfL Mitteilungen" 14 (1975), 1/2 : 3-29.
- /46/ SEDLÁČEK, J.: Metodika výpočtu spolehlivosti mechanických soustav porušovaných stochastickým provozním namáháním. Výzkumná zpráva FJFI-ČVUT, Praha 1974.
- /47/ SERENSEN, S.V.: Malocyklová únava kovů a pevnost strojních součástí. "Strojírenství" 17 (1967), 8: 592.

- /48/ SHANLEY, F.R.: A theory of fatigue based on unloading during reversed slip. Rand Corporation Report, P 350, Nov. 11, 1952.
- /49/ SMITH, K.N. - WATSON, P. - TOPPER, T.H.: A stress-strain function for the fatigue of metals. "Journal of Materials" 5 (1970), 4: 767.
- /50/ SOCIE, D.F.: Fatigue life prediction using local stress-strain concepts. "Experimental Mechanics" 17 (1977), 2: 50-56.
- /51/ SUBRAMANYAN, S.: A cumulative damage rule based on the knee point of the S-N curve. "ASME Journal of Engineering Materials and Technology" 98 (1976) : 316-321.
- /52/ TROŠČENKO, V.T.: Dĕmfirovaniĕ i razrušeniĕ metallov pri mnogociklovom nagraženiji. Naukova Dumka, Kijev 1981.
- /53/ TROŠČENKO, V.T. - CHAMAZA, L.A.: Issledovanija někatorych enĕrgetičeskich kritĕriev ustalostnogo razrušeniĕ metallov. "Problemy pročnosti" (1969), 4 : 3-8.
- /54/ UDOGUCHI, T. - ASADA, Y. - NOZUE, Y.: An approach to investigate notch effect on low-cycle fatigue with finite elements. 2nd. Int. Conf. Pressure Vessel Technology, II - 57, San Antonio 1973.
- /55/ Únavová pevnost a životnost strojních částí. Cyklus "Stavba strojů XXXV", DT ČSVTS Praha, Praha 1975.
- /56/ VOJTÍŠEK, J. - KERMES, J. - PROŠKOVEC, J.: Výpočty životnosti strojních částí pomocí lineárních hypotéz kumulace únavového poškození. "Strojírenství" 30 (1980), 3 : 179-187.
- /57/ VYKUTIL, J. - VAŠÁTKO, J. - KŘUPKA, V.: K predikci únavové životnosti při proměnných amplitudách zatěžování. "Strojírenství" 30 (1980), 4 : 245-248.

- /58/ WETZEL, R.: A method of fatigue damage analysis.
PhD. Thesis. Dept. of Civil Engineering.
University of Waterloo, Ontario, Canada 1971.
- /59/ WIRSCHING, P.H. - SHEHATA, A.M.: Fatigue under wide band random
stress using the rain-flow method.
"ASME Journal of Engineering Materials and
Technology" 99 (1977), 3 : 205-211.
- /60/ Zpracování experimentálních dat na počítači. Kolektiv autorů.
Dům techniky ČSVTS Praha, Praha 1982.

Druh publikace:	Sborník
Název:	Stavba strojů 84 ÚNAVA MATERIÁLU PŘI NÁHODNÉM ZATĚŽOVÁNÍ
Autor:	Prof. Ing. Cyril Höschl
Počet stran:	87
Náklad:	180 výtisků
Formát:	A4
Číslo publikace:	60 - 638 - 82 (2330)
Vydal a rozmnožil:	Dům techniky ČSVTS Praha Praha 1, Gorkého náměstí 23
Rok vydání:	1982 DT 01 - 515/82

Tato publikace nebyla jazykově upravena.