

ČESKÝ VÝBOR STROJNICKÉ SPOLEČNOSTI ČSVTS

DŮM TECHNIKY ČSVTS PRAHA



**MATICOVÉ METODY
V PEVNOSTNÍCH VÝPOČTECH**

I. ČÁST

CYRIL HÖSCHL

ÚSTAV TERMOMECHANIKY ČSAV

PRAHA 1973

PŘEDMLUVA

Tento učební text je určen těm, kdo se chtějí seznámit s maticovými metodami řešení úloh ze statiky pružných soustav. Předpokládá se znalost základů nauky o pružnosti a pevnosti. První kapitoly obsahují stručný úvod do maticové algebry a opakování některých poznatků z nauky o pružnosti a pevnosti. V dalším textu se probírá aplikace deformační metody u prutových a rámových konstrukcí. Výklad se omezuje převážně na rovinné případy konstrukcí s jednoduchými konstrukčními prvky. Prostorové konstrukce jsou řešeny ojedinelé. Autor je přesvědčen, že metodu si lze snáze osvojit na jednoduchých úlohách, u nichž můžeme bez velkých obtíží kontrolovat správnost řešení použitím jiných známých metod. Výhoda maticové metody se ovšem plně uplatní teprve při řešení rozsáhlejších úloh s použitím počítačů. Tomu, kdo zvládl aplikaci metody na jednoduchých úlohách, nečiní takové rozšíření výpočtů žádné obtíže. Výpočet složitějších, popřípadě i dynamicky namáhaných konstrukcí a aplikace silové metody se plánují pro pozdější seminární cykly Domu techniky ČVTS Praha.

Výklad je podrobný, vhodný pro samostatné studium, a je doplněn 46 úlohami, k nimž jsou v dodatku připojeny kontrolní výsledky nebo i úplná řešení. Nepředpokládají se žádné předběžné znalosti maticového počtu.

Prof. Ing. Cyril Höschl

Ing. Vladimír Václavík

M A T I C O V É M E T O D Y

V P E V N O S T N Í C H V Ý P O Č T E C H

I. část

Prof. Ing. Cyril Höschl,
Ústav termomechaniky ČSAV, Praha

O b s a h

	Str.
1. Transformace vektorů	11
2. Poznámky k maticové symbolice	15
3. Základní početní úkony s maticemi	18
4. Dělení matice na submatice	30
5. Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice	32
6. Dualita v pojetí úloh z teorie pružnosti	35
7. Příčinkové činitele. Matice tuhosti a poddajnosti	42
8. Pružiny spojené paralelně a sériově	45
9. Řešení rovinných prutových soustav. Základní úvahy	53
10. Transformace celkové matice tuhosti	61
11. Skládání substruktur	63
12. Vliv nerovnoměrného rozdělení teploty. Předpjaté konstrukce	66
13. Prostorové prutové soustavy	70
14. Prizmatický přímý nosník	75
15. Transformace souřadnic při rovinném ohybu	77
16. Výpočet vnitřních statických účinků	78
17. Využití souměrnosti	83
18. Spojitě rozdělené zatížení (přibližné řešení)	85
19. Rámové konstrukce	87
20. Teplotní pnutí a spojitě zatížení nosníků	94
Několik slov závěrem	101
Dodatek (kontrolní výsledky a řešení úloh)	102
Použitá literatura	132

1. TRANSFORMACE VEKTORU

Počátek matematiky tkví v pravidlech o zacházení s přirozenými čísly. Malé děti se poměrně snadno naučí počítat předměty, později je i sčítají a odčítají. Abstrakcí dospívají k pojmu čísla a k pojmu početní operace. Mnohonásobné sečítání téhož čísla se pak nahradí důmyslnějším násobením, odtud se přejde k dělení, k umocňování a odmocňování. Úplnou revoluci v matematice způsobilo zavedení obecných znaků pro čísla, tj. vznik algebry. Pojednou se již nezajímáme o jednotlivá čísla, ale o předpis, co s nimi máme dělat, a tento předpis platí, ať si pod daným znakem myslíme jakékoli číslo. Máme-li např. rovnici

$$2x_1 + 3x_2 = 0, \quad (1.1)$$

víme, že si můžeme za x_1 zvolit libovolné číslo, to pak násobit dvěma a přičíst k němu trojnásobek dalšího čísla x_2 a zjistit, rovná-li se tento součet nule. Algebra nás učí, že libovolně lze volit jen jedno z obou čísel, zatímco druhé je touto volbou již určeno, má-li se součet skutečně rovnat nule. Dokonce jsme schopni z předpisu (1.1) odvodit předpis pro výpočet x_2 , zvolíme-li libovolně x_1 :

$$x_2 = -\frac{2x_1}{3}. \quad (1.2)$$

Dospíváme tak k pojmu funkce, dané obecně předpisem

$$x_2 = f(x_1). \quad (1.3)$$

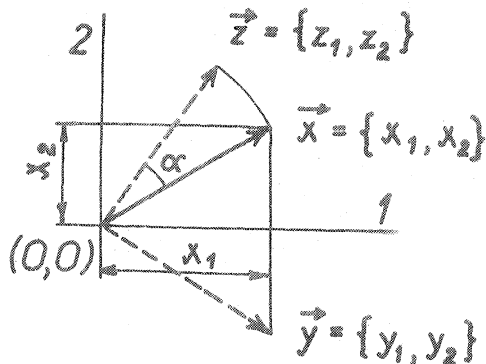
Funkce (1.2) je velmi jednoduchá. Příkladem jiné, složitější funkce, může být třeba $x_2 = \sin x_1$. Důležité je, že volbou x_1 je x_2 jednoznačně určeno. Můžeme také říci, i když to není obvyklé, že číslo x_1 je operátorem f transformováno do čísla x_2 . Číslo si přitom můžeme znázornit na přímce - číselné ose - pomocí nějaké stupnice (nejlépe rovnoměrné). Dvojici čísel (x_1, x_2) lze znázornit bodem v rovině, v níž jsme zavedli vhodné souřadnice. Všechny dvojice (x_1, x_2) , které vyhovují rovnici (1.3), vyplňují v rovině křivku, která je grafem funkce $f(x_1)$. Bodem v rovině lze však znázornit každou dvojici čísel (x_1, x_2) , i když nevyhovuje vztahu (1.3). Ve zvláštním případě může rovnici (1.3) vyhovovat jediná dvojice reálných čísel. Např. rovnici $x_2 = \sqrt{-x_1^2}$ vyhovuje jediné dvojice $x_1 = 0, x_2 = 0$. Grafem takové funkce je pak izolovaný bod.

Zvolme v rovině pravouhlé souřadnice a označme osu úseček číslem 1, osu pořadnic číslem 2; tato čísla souhlasí s indexy příslušných proměnných, které budeme v rovině znázorňovat. Spojením počátku $(0,0)$ s bodem (x_1, x_2) vzniká vektor \vec{x} (obr. 1), jehož složky jsou x_1, x_2 .

^{x/} Na obr. 1 jsou souřadnice značeny čísla. Pak x_1, y_1, z_1 jsou úsečky, x_2, y_2, z_2 pořadnice koncových bodů vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Můžeme tedy psát

$$\vec{x} = \{x_1, x_2\} \quad (1.4)$$



Obr. 1

Vektor v rovině je tedy dán dvojicí reálných čísel, a naopak, každá dvojice reálných čísel představuje vektor.

Pojem funkce čísla můžeme nyní zobecnit i pro vektory. K tomu je nutné předepsat způsob (operaci), jakým jednoznačně přiřadíme vektor \vec{y} ke každému (libovolnému) vektoru \vec{x} . Takovou operací může být např. zrcadlení k ose 1. V tom případě bude vektor \vec{y} souměrný k vektoru \vec{x} podle osy 1. Označíme-li $\vec{x} = \{x_1, x_2\}$, $\vec{y} = \{y_1, y_2\}$, bude před-

pis této operace $\vec{y} = f(\vec{x})$, rozepíšeme-li je do složek, dán těmito rovnici-

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= -x_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Jinou operací je otočení vektoru \vec{x} do polohy $\vec{z} = \{z_1, z_2\}$ o úhel α . Snadno se přesvědčíme, že operace $\vec{z} = g(\vec{x})$ je vyjádřena složkovými rovnicemi

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \\ z_2 &= x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Operace (1.5) a (1.6) jsou příkladem nejjednodušších lineárních transformací v rovině, pro něž obecně platí vztahy

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Zde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ jsou konstanty. Z hlediska algebry značí (1.7) soustavu lineárních rovnic. Je-li x_1, x_2 dáno, můžeme y_1, y_2 vypočítat. Můžeme však také naopak určit x_1, x_2 , je-li dáno y_1, y_2 (pokud je přiřazení vektorů jednoznačné vzájemně).

Tyto úvahy můžeme zobecnit pro větší počet proměnných. Tak v třírozměrném prostoru s pravouhlými osami 1, 2, 3 má vektor $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ souřadnice x_1, x_2, x_3 . Souřadnice transformovaného vektoru označíme y_1, y_2, y_3 . Budeme např. mít

$$\begin{aligned}
 y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \\
 y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3, \\
 y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3.
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Všechny tři rovnice (1.8) by bylo možno napsat najednou, kdybychom užili symbol \sum pro sečítání. Bylo by

$$y_i = \sum_{j=1,2,3} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.9}$$

V polovině minulého století však Cayley navrhl ještě jednodušší způsob zápisu soustavy rovnic (1.8), a to

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}.
 \tag{1.10}$$

Tuto rovnici pak zjednodušil na tvar

$$\{y\} = [A]\{x\} \tag{1.11}$$

zavedením vektorů

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}, \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{1.12}$$

a transformační matice

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Někdy můžeme závorky vynechat a místo (1.11) stručně psát

$$y = Ax. \tag{1.14}$$

Na rozdíl od běžné lineární rovnice značí nyní (1.14) celou soustavu lineárních rovnic (1.8). Je to právě tak převratná změna, jakou bylo zavedení obecných znaků za různá zvláštní čísla v algebře. Zatímco algebraická rovnice říká, jak máme zacházet s celou soustavou zvláštních čísel, maticová rovnice říká, jak máme zacházet s celou soustavou algebraických rovnic. ^{*/}

Na matici $[A]$ (1.13) můžeme nahlížet jako na seskupení devíti čísel a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Zavedení takového pojmu by se mohlo právem zdát zbytečné. Skutečně, pojem matice nabývá smyslu teprve tehdy, víme-li, co s ní máme dělat, abychom uskutečnili nějakou operaci. V tomto smyslu $[A]$ značí operátor, který transformuje vektor $\{x\}$ do vektoru $\{y\}$ podle (1.8)

Matice (1.13) je čtvercová, tj. má stejný počet sloupců jako řádek. Existují však případy, kdy matice $[A]$ je obdélníková. V prostorové analytické geometrii značí např. soustava dvou rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= c_2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

přímku (každá rovnice značí rovinu, přímka je pak průsečnicí obou rovin). Rovnice (1.15) můžeme rovněž napsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}. \quad (1.16)$$

Matice $[A]$ je zde obdélníková 2×3 (má dva řádky a tři sloupce):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Některé z prvků a_{ij} matice mohou být nulové. Jsou-li nulové všechny, je matice nulová. Ve čtvercové matici - např. (1.13) - často platí, že $a_{ij} = a_{ji}$; v tom případě je matice souměrná. Jiným speciálním typem čtvercové matice je matice diagonální; v ní jsou nenulové prvky jen na hlavní úhlopříčce, vedené zleva nahoře vpravo dolů (tj. $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Jsou-li na hlavní úhlopříčce samé jednotky, zatímco ostatní prvky jsou nulové (tj. je-li $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$), jde o matici jednotkovou, kterou budeme označovat I . V maticové algebře má též význam jako 1 v algebře obyčejné. Jednotková matice je zvláštním případem matice diagonální.

^{*/} V tisku se maticové symboly - jako např. (1.14) - sázejí půlťučně. To v psaném textu nemůžeme snadno napodobit. Místo složených a hranatých závorek se též používají závorky oblé nebo dvojité svielé čáry, což je při zápisu velkých matic méně výhodné.

Úloha 1. Přepište operaci (1.5), značící transformaci vektoru $\vec{X} = \{x_1, x_2\}$ do vektoru $\vec{Y} = \{y_1, y_2\}$ zrcadlením k ose úseček, do maticového tvaru.

Úloha 2. Přepište operaci (1.6), značící transformaci vektoru $\vec{X} = \{x_1, x_2\}$ do vektoru $\vec{Z} = \{z_1, z_2\}$ otočením o úhel α (obr. 1), do maticového tvaru.

Poznámka: Pokuste se zpracovat dané úlohy zcela samostatně. Kontrolní výsledky, popř. celá řešení úloh, jsou uvedeny v dodatku na konci učebního textu.

2. POZNÁMKY K MATICOVÉ SYMBOLICE

Pojem matice jsme zavedli nejprve pro koeficienty lineární transformace vektoru. Hlavním smyslem maticového počtu však není řešení geometrických úloh, ale souhrnné zpracování algebraických operací. Potom soustava (1.8), popř. maticová rovnice (1.14), znamená především soustavu tří lineárních algebraických rovnic. Její geometrický výklad je nyní vedlejší. Snadno si můžeme představit, že by těchto rovnic bylo více než tři. V takovém případě bude mít "vektor" \vec{X} více složek než tři, takže si jej už nelze představit jako skutečný vektor v třírozměrném prostoru. To však nebrání tomu, abychom i nadále nepoužívali označení "vektor". Složky vektoru budeme psát do složené závorky pod sebe, takže obecně bude pro vektor X platit ^{*}

$$X = \{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Ve fyzice a v mechanice bývá zvykem uspořádat složky vektoru do řádku spíše než do sloupce. Příkladem je rovnice (1.4). Takovému tvaru zápisu budeme říkat "transponovaný" a budeme jej označovat indexem T vpravo nahoře. Místo (2.1) tedy můžeme psát

$$X^T = \{X\}^T = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\} \quad (2.2)$$

a naopak

$$X = \{X\} = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}^T. \quad (2.3)$$

Na vektor (2.1) můžeme také nahlížet jako na obdélníkovou (jednosloupčovou) matici $n \times 1$. Transponovaný tvar (2.2) je obdélníkovou (jednořádkovou) maticí $1 \times n$. Často mluvíme jen o matici sloupcové, popř. řádkové. Značí-li první index obecného prvku obdélníkové matice řádek a druhý index sloupec, má sloupcová matice obecně prvky a_{j1} a řádková a_{1j} .

^{*} Šipku nad X již nepíšeme, neboť nejde o fyzikální vektor.

Např.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}, [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}] \quad (2.4)$$

Má-li být jedna z matic (2.4) transpozicí druhé, musí být $a_{j1} = a_{1j}$. Index 1, který se u všech prvků opakuje, můžeme vynechat. Dostaneme tak prvky s jedním indexem, jak je to obvyklé u vektorů, např. (2.1) a (2.2).

Pojem transpozice tedy obecně znamená nahradit prvek a_{ij} prvkem a_{ji} (a naopak) pro všechna i, j . Platí to pro matice čtvercové, obdélníkové i pro vektory. Např.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 9 & 5 \end{bmatrix}^T, \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}^T \quad (2.5)$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix} = [1 \ 5 \ 2]^T$$

Je-li matice souměrná, je transponovaná matice stejná jako původní. Totéž platí pro matici diagonální.

Transpozice tedy znamená, stručně řečeno, záměnu řádek a sloupců (j -tý řádek nahradíme j -tým sloupcem a naopak). Dvojitá taková záměna dává matici původní, takže

$$(A^T)^T = A \quad (2.6)$$

Jistě si vzpomeneme na obdobné uspořádání prvků do schématu, které má v algebře zvláštní význam, totiž na determinant. Význam determinantu je však zcela jiný. Determinant je zároveň návodem k svému vyčíslení, kdežto matice nikoli, matice se stává operátorem teprve předpisem příslušné operace. Např. matice (1.13) získává význam teprve v souvislosti s předpisem (1.14), který říká, jak máme z dané matice A sestavit soustavu rovnic (1.8). Zatímco první z matic (2.5) neznámá sama o sobě víc než devět čísel sestavených do čtverce 3×3 , má determinant o stejných prvcích význam zcela konkrétní:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 9 - \\ - 2 \cdot 7 \cdot 3 - 1 \cdot 6 \cdot 9 - 5 \cdot 2 \cdot 5 = 15. \quad (2.7)$$

Použijeme-li matici A podle (1.13) k sestavení soustavy rovnic (1.8) o třech neznámých x_1, x_2, x_3 (je-li y_1, y_2, y_3 dáno), znamená nenulová hodnota determinantu sestaveného z koeficientů a_{ij} , že soustava je jednoznačně řešitelná, že žádná ze tří rovnic nevznikla lineární kombinací druhých dvou. Determinant, sestavený z prvků matice A řádu $n \times n$, budeme značit

$$|A| = \det [A] = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Je-li tento determinant nulový, je jedna nebo více rovnic lineárně závislých na ostatních rovnicích; takové závislé rovnice neposkytují žádnou novou informaci o neznámých, takže neznámé nelze jednoznačně určit. Jindy si mohou rovnice dokonce odporovat, takže soustava nemá žádné řešení. Např. soustavě

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6, \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

přísluší matice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.10)$$

jejíž determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.11)$$

Skutečně, soustava (2.9) nemá jednoznačné řešení, ba nemá dokonce žádné řešení, neboť vyloučením x_3 dostaneme dvě navzájem si odporující rovnice

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Kdyby na pravé straně rovnic (2.9) byly nuly, dostali bychom několika-
značné řešení. Místo (2.12) bychom měli rovnici jedinou, přesněji dvě rov-
nice stejné, totiž $2x_1 + x_2 = 0$. Tato rovnice by byla splněna pro $x_1 = k$,
 $x_2 = -2k$, kde k je libovolná konstanta.

Matice, již přísluší nulový determinant, je degenerovaná (singulární). Existuje-li mezi řádky matice jen jeden lineární vztah, rovná se stupeň de-
generace jedné. Např. v matici (2.10) vznikl druhý řádek sečtením třetího

řádku s dvojnásobkem řádku prvního. Takových vztahů by však obecně mohlo existovat více, např. Δ . Je-li řád čtvercové matice n (tj. matice je tvaru $n \times n$), bude hodnota matice r dána rozdílem $r = n - \Delta$. Hodnota matice (2.10) je tedy 2 ($n = 3, \Delta = 1, r = 2$).

Vynecháme-li v determinantu i -tý řádek a j -tý sloupec, dostaneme subdeterminant, který se nazývá (prvním) minorem M_{ij} příslušným prvku a_{ij} . Např. minorem k prvku 4 v matici (2.10) ($i = 2, j = 1$) je

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

Tento minor je náhodou jednotkovou maticí I druhého řádu (2×2). Obecně můžeme z každého prvního minoru řádu většího než jedna vytvořit další minory (druhé, z druhých třetí apod.).

Pomocí minorů můžeme nyní určit hodnotu matice poněkud jinak. Z determinantu matice $|A|$ sestavíme všechny minory. Je-li alespoň jeden z minorů řádu r nenulový, zatímco všechny minory řádu $r+1$ vymizí, je r hodnota matice. Tuto definici lze rozšířit i na obdélníkové matice $m \times n$, kde r bude vždy menší než menší z obou čísel m, n , nebo se bude rovnat menšímu z obou čísel.

Prvky matice nemusí být nutně jenom čísla; mohou to být zase matice. Příklady takto složených matic uvedeme později (v kap. 4).

Úloha 3. Určete řád a hodnotu matice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 6 & 3 & -3 \\ -6 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Úloha 4. Najděte první minory k prvkům a_{11}, a_{12}, a_{22} ve čtvercové matici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. ZÁKLADNÍ POČETNÍ ÚKONY S MATICEMI

Především je třeba si ozřejmit, kdy se dvě matice rovnají. Toto - dosud nevyřešené - pravidlo jsme již jednou použili, a to v rovnici (2.6). Tehdy jsme mlčky předpokládali, že dvě "stejně" matice se sobě rovnají. To se zdá být přirozený požadavek. Avšak u determinantu (2.7) jsme předpokládali něco jiného, tam se determinant rovnal číslu patnáct. Je zřejmé, že rovnost matic je nutno přesně definovat. Pravíme, že dvě matice se rovnají, rovnají-li se

jejich prvky se stejným umístěním. Např. $[A] = [B]$, je-li $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna i, j . Rovnost je tedy definována jen pro matice stejného typu (tvaru).

Vrátíme se nyní k představě vektorů v rovině (tedy vektorů o dvou složkách či o dvou prvcích v sloupcové matici). Matice $[A]$ nechť transformuje vektor $\{x\}$ do vektoru $\{y\}$ podle (1.7). Matice $[B]$ s prvky b_{ij} ($i, j = 1, 2$) nechť transformuje též vektor $\{x\}$ do vektoru $\{z\}$. Ptáme se, jaký vektor vznikne součtem vektorů $\{y\}$ a $\{z\}$? Zřejmě bude pro tento výsledný vektor $\{v\}$ platit

$$\begin{aligned} v_1 &= y_1 + z_1 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + (b_{11}x_1 + b_{12}x_2) = \\ &= (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= y_2 + z_2 = (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2) = \\ &= (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Rovnice (3.1) a (3.2) můžeme přepsat do maticového tvaru

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

neboli

$$\{v\} = [C]\{x\}, \quad (3.4)$$

označíme-li

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Porovnáme-li (3.3) s původním tvarem rovnic (3.1) a (3.2), totiž s tvarem

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

a v stručném zápisu

$$\{v\} = [A]\{x\} + [B]\{x\}, \quad (3.6)$$

vidíme, že součet matic

$$[C] = [A] + [B] = [B] + [A] \quad (3.7)$$

dostaneme, sečteme-li odpovídající prvky - viz (3.4). Snadno se přesvědčíme, že obdobné pravidlo platí pro odečítání. Odečíst matici $[B]$ od matice $[A]$ je pak totéž jako přičíst matici $[B]$, u níž jsme změnilí znaménka u všech prvků (všechny prvky jsme vynásobili -1). Je tedy

$$- [B] = \begin{bmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

a obdobně, násobíme-li matici $[B]$ konstantou k , bude

$$k [B] = [B] k = \begin{bmatrix} k b_{11} & k b_{12} \\ k b_{21} & k b_{22} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Matici tedy znásobíme, znásobíme-li její všechny prvky. ^{*}

Vzájemné násobení matic vyžaduje větší pozornost. Všimněme si, že součin Ax značí vektor y ; obdobně By nechť značí vektor z . Jde-li o skutečné vektory, lze obě operace psát takto:

$$\vec{y} = f(\vec{x}), \quad \vec{z} = g(\vec{y}) \quad (3.10)$$

Ptáme se tedy, co vznikne, přeměníme-li vektor \vec{x} nejprve ve vektor \vec{y} transformací $[A]\{x\}$ a potom vektor \vec{y} přeměníme ve vektor \vec{z} transformací $[B]\{y\}$. Hledáme tedy složenou transformaci

$$\{z\} = [B]\{y\}, \quad \{y\} = [A]\{x\} \quad (3.11)$$

čili

$$\vec{z} = f(g(\vec{x})). \quad (3.12)$$

V maticovém tvaru můžeme napsat

$$\{z\} = [C]\{x\}, \quad (3.13)$$

kde nyní matice $[C]$ shrnuje obě operace $[A]$ a $[B]$, aplikované za sebou v daném pořadí. Rozepíšeme-li nejprve (3.11), budeme mít

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

^{*} Při násobení determinantu však platí jiné pravidlo. Tam se násobí jediný řádek nebo jediný sloupec.

Vyloučením vektoru $\{y\}$ z těchto rovnic plyne

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

čili

$$\{z\} = [B][A]\{x\} \quad (3.17)$$

Srovnáním s (3.13)

$$[C] = [B][A] \quad (3.18)$$

Rozepíšeme-li podrobně (3.14) a (3.15) a dosadíme z (3.15) jednotlivé složky y_1 , y_2 do (3.14), vyjde

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11} y_1 + b_{12} y_2 = \\ &= b_{11} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + b_{12} (a_{21} x_1 + a_{22} x_2), \\ z_2 &= b_{21} y_1 + b_{22} y_2 = \\ &= b_{21} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) + b_{22} (a_{21} x_1 + a_{22} x_2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Úpravou dostaneme v maticovém tvaru

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} & b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22} \\ b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21} & b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Odtud, porovnáme-li (3.20) a (3.13),

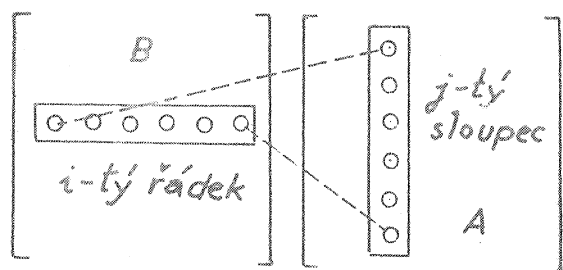
$$\begin{aligned} c_{11} &= b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21}, \\ c_{12} &= b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22}, \\ c_{21} &= b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21}, \\ c_{22} &= b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Složená transformace vektorů (3.13) bude tedy vyjádřena násobením matic (3.17), budeme-li definovat součin matic (3.18) vhodným předpisem (3.21). Tento předpis pro součin matic (3.18) lze obecně shrnout do tvaru

$$c_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj} \quad (3.22)$$

U čtvercových matic $n \times n$ probíhají indexy i, j, k hodnoty $1, 2, \dots, n$. Vztah (3.22) však použijeme i pro obdélníkové matice, u nichž počet sloupců

první matice se rovná počtu řádek druhé matice (není-li tato podmínka splněna, není součin definován).



Obr. 2

K násobení matic velmi dobře poslouží schéma, zakreslené na obr. 2. Prvek c_{ij} matice $[C] = [B][A]$ dostaneme jako součet součinů dvojic koeficientů (prvků) z i -tého řádku matice $[B]$ a j -tého sloupce matice $[A]$ v pořadí vyznačeném u první a poslední dvojice čárkovanou spojnící. Uvedeme příklad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & -9 & -15 \\ 5 & 2 & 9 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

V rovnici (3.23) jsme dostali např. prvek $c_{21} = 3$ takto:

$$c_{21} = (-3) \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 3. \quad (3.24)$$

Obdobně i ostatní prvky. Výpočet se usnadní, napíšeme-li matici A nad maticí B , tedy takto:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = C. \quad (3.25)$$

V tomto případě přímo vidíme, který řádek máme s kterým sloupcem násobit. To vyznačuje prvek c_{ij} svou polohou. Např. c_{21} vznikne postupným násobením prvků z řádku $[-3 \ -2 \ 1]$ se sloupcem

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ a sečtením těchto součinů, což odpovídá schématu na obr. 2, popř. rovnici (3.24).}$$

Prozatím se nám může zdát, že tento předpis je příliš složitý a naše počítání samoučelné. Později však poznáme, že maticový počet je vynikajícím nástrojem k organizaci obsáhlých výpočtů, jež můžeme zvládnout jen díky tomu, že je maticová symbolika shrnuje do velmi přehledných celků. Podrobné početní operace, jež byly časově příliš náročné, převezme nakonec podle vypracovaného programu počítač. K tomu však nejprve musíme sami velmi dobře zvládnout základní početní úkony s maticemi.

Uspořádání výpočtu do schématu (3.25) umožní také jednoduchou kontrolu numerického výpočtu. Přidáme za čárkovanou čarou další sloupec, popř. řádek, do kterého budeme psát příslušné součty řádků, popř. sloupců. Pro součin $[B][A] = [C]$ bude pak platit toto rozšířené schéma:

$$B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Součet } A \\ \\ \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ -3 & -2 & 1 & -21 \\ 2 & 0 & 1 & 16 \\ \hline 0 & -1 & 2 & \Sigma \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Součet } C'' \\ \\ \\ \end{array} \\ \leftarrow \text{Součet } B \quad \leftarrow \text{Součet } C' \end{array} = C \quad (3.25 \text{ a})$$

Výpočet se pak kontroluje takto:

1. Hodnota Σ musí být stejná, ať sčítáme prvky u matice C z pomocného sloupce nebo řádku. Např. $\Sigma = 11 - 21 + 16 = 9 - 3 + 0$.
2. Sloupec "součet C'' " vznikne nejen sečtením prvků v řádcích matice C , ale též násobením matice B sloupcem "součet A "; podobně dostaneme spodní řádek "součet C' " též jako součin řádku "součet B " s maticí A ;

$$B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Součet } A \\ \\ \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ -3 & -2 & 1 & -21 \\ 2 & 0 & 1 & 16 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Součet } C'' \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{array} \right] = A \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 9 \\ 9 & -3 & 0 & \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Součet } B \\ \text{Součet } C' \end{array} \end{array}$$

Kontrolou podle pravidla 2 ihned zjistíme i polohu chybného prvku v matici C , vloudí-li se do výpočtu chyba. Např.:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ -3 & -2 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 16 \\ \hline 0 & -1 & 2 & 36 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{chyba} \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \\ \text{chyba} \end{array} \quad (3.26)$$

Chybu najdeme v druhém řádku a ve třetím sloupci matice C , neboť

$$\begin{aligned} 3 - 9 + 15 &= 9 \neq (-3)5 + (-2)6 + 1.6 = -21, \\ 6 + 15 + 9 &= 30 \neq 0.4 + (-1)2 + 2.1 = 0. \end{aligned}$$

Je tedy chybně vypočteno číslo 15 (správně má být -15).

Stejná pravidla platí i pro násobení obdélníkových matic (s dříve uvedeným omezením pro jejich tvar). Platí pravidlo: násobíme-li matici $m \times n$ s maticí $n \times p$, je výsledná matice $m \times p$. Je-li např. A tvaru 3×3 a B tvaru 3×2 , bude součin $C = AB$ tvaru 3×2 . Ukážeme to na příkladu

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & | & 3 \\ 1 & 4 & | & 5 \end{bmatrix} = B \\ A & = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ \hline 4 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & | & 5 \\ 5 & 23 & | & 28 \\ 2 & 11 & | & 13 \\ \hline 11 & 35 & | & 46 \end{bmatrix} = C. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Je tedy

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 23 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Na rozdíl od běžné algebry není maticový součin obecně komutativní, tj. */

$$AB \neq BA \quad (3.29)$$

Ukážeme to na příkladu matic

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Vyjde

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

*/ Existují však případy, kdy pořadí činitelů lze zaměnit; jsou to však výjimky a nebudeme je nyní probírat.

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Asociativní a distributivní zákon však platí, takže

$$A(BC) = (AB)C = ABC, \quad (3.33)$$

$$A(B+C) = AB + AC. \quad (3.34)$$

Opětovným násobením dospíváme k pojmu mocniny matice. Je-li např. A maticí podle (3.30), je její druhá, popř. třetí mocnina

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$A^3 = A^2A = AA^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

atd. Dává-li součin matice nulovou matici, neplyne odtud, že alespoň jeden z činitelů je nutně nulový. Někdy totiž součin nenulových matic dává nulu; např.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]. \quad (3.37)$$

Násobení jednotkovou maticí matici nemění; přitom je lhostejné, násobíme-li zleva nebo zprava. */ Tedy

$$AI = IA = A, \quad (3.38)$$

např.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Pro transpozici součinu matic platí vzorce

$$\begin{aligned} (AB)^T &= B^T A^T \\ (ABC)^T &= C^T B^T A^T \end{aligned} \quad (3.40)$$

atd. Transponujeme-li např. součin (3.31), dostaneme

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = C^T. \quad (3.41)$$

*/ Jednotková matice je tedy komutativní.

Existuje skalární součin vektorů $\{x\}$, $\{y\}$ stejného rozměru

$$\{\Delta\} = \{x\}^T \{y\} = \{y\}^T \{x\} = \{\Delta\}^T. \quad (3.42)$$

Výsledkem je jednoprvková matice, tedy skalár (číslo). Proto $\{\Delta\} = \{\Delta\}^T$.
Např.

$$\{\Delta\} = [1 \quad -1 \quad 4] \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} = [1 \quad 3 \quad -1] \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{Bmatrix} = \{-6\}. \quad (3.43)$$

Platí-li dále pro matice

$$C = AB, \quad (3.44)$$

platí pro jejich determinanty

$$|C| = |A| |B|. \quad (3.45)$$

Přesvědčili jsme se, že násobení matic není zcela jednoduché a že má některé zvláštnosti, jež nám zprvu připadají neobvyklé (např. neplatnost komutativního zákona, nulový součin nenulových matic). Nepřekvapí nás proto, že dělení matic není definováno; nahrazujeme je násobením inverzní maticí. Platí-li např. rovnice (3.44), můžeme odtud určit matici B , známe-li matice A a C , násobením zleva inverzní maticí A^{-1} :

$$A^{-1}C = A^{-1}AB = B \quad (3.46)$$

Od inverzní matice A^{-1} budeme požadovat, aby měla vlastnosti obdobné jako inverzní hodnota čísla v elementární algebře

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \quad (3.47)$$

Proto podle (3.46) a (3.38)

$$A^{-1}AB = IB = B = A^{-1}C. \quad (3.48)$$

Zbývá otázka, jak sestavit k matici A její inverzi A^{-1} . Za tím účelem sestavíme ke každému prvku matice a_{ij} jeho doplněk (kofaktor)

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (3.49)$$

kde M_{ij} je první minor, tedy determinant z prvků matice A , v níž vynecháme i -tý řádek a j -tý sloupec. Těmito doplňky nahradíme původní prvky matice, transponujeme a výsledek dělíme determinantem $|A|$ původní matice; ten ovšem nesmí být nulový (k singulární matici tedy neexistuje žádná inverzní matice). */

*/ Pozorný čtenář si jistě povšiml, že tento postup souvisí s Cramerovou metodou řešení soustavy lineárních rovnic pomocí determinantů.

Hledejme tedy např. inverzi matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Nejprve se přesvědčíme, že matice není degenerovaná. Prvky matice pak nahradíme příslušnými minory; dostaneme

$$\begin{bmatrix} -3 & 24 & 22 \\ -6 & 3 & 4 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Nyní změníme některá znaménka minorů násobením $(-1)^{i+j}$. Z minorů se tak stanou doplňky (kofaktory): ^{**/}

$$\begin{bmatrix} -3 & -24 & 22 \\ 6 & 3 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Konečně transponujeme a dělíme determinantem $|A| = 15$:

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -24 & 3 & 6 \\ 22 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Snadno se přesvědčíme, že matice (3.50) a (3.51) splňují vztah (3.47).

Právě popsaný postup sestavení inverzní matice se příliš nehodí pro inverzi velkých matic; spíše se postupuje tak, že se hledá řešení příslušné lineární soustavy rovnic $Ax = y$, totiž $x = A^{-1}y$, pro vhodně volený vektor y . ^{***/} K tomu jsou vypracovány speciální metody (např. Banachiewiczova-Croutova, iterační metoda Gaussova-Seidelova nebo metoda postupné superrelaxace). Pro inverzi matic byly vypracovány ještě jiné postupy (např. Jordanova metoda postupných transformací, metoda Choleského aj.), které lze najít ve speciální literatuře. My se prozatím spokojíme se vzorcem pro inverzi matice druhého řádu

^{*}/ Znaménka se mění "jako na šachovnici".

^{***/} Prvky vektoru $\{y\}$ na pravé straně rovnice jsou nuly s výjimkou i -tého prvku (tj. i -tého řádku), kde je jednička. Řešení soustavy lineárních rovnic pak dává prvky i -tého sloupce matice A^{-1} . Opakuje se pro různá $i = 1, 2, \dots, n$ ($n = \text{řád matice } A$). Většinou však inverzní matici ani nepotřebujeme znát; pak řešíme na počítači přímo danou lineární soustavu rovnic (s určitou pravou stranou), a tak ušetříme strojový čas počítače.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(3.52)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

zatímco pro matice třetího řádu uijeme postup, který jsme ukázali na příkladu matice (3.50), pomocí doplňků. Matice vyššího než třetího řádu budeme invertovat postupně tak, že je rozdělíme na submatice řádu nižšího. To si později ukážeme na příkladech. Na počítači bychom ovšem matici bez zvláštních důvodů nedělili, ale použili rutinní podprogram pro inverzi matic.

Inverze má smysl jen u čtvercové matice. Pro inverzi součinu platí

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (3.53)$$

a dále

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (3.54)$$

Úloha 5. Je dán vektor $X = \{3; 4\}^T$. Určete vektor $y = \{y_1, y_2\}^T$, který vznikne zrcadlením k ose úseček a pak otočením o úhel $\alpha = 60^\circ$. Použijte k tomu výsledky z úloh 1 a 2.

Úloha 6. Řešte předchozí úlohu znovu, avšak s obráceným pořadím operací, nejprve otočte vektor X o 60° a pak najděte jeho zrcadlový obraz $Z = \{z_1, z_2\}^T$ k ose úseček. Obě úlohy 5 a 6 řešte pro kontrolu též graficky. Skutečnost, že se výsledky obou úloh liší, dokazuje nekomutativnost součinu matic.

Úloha 7. V pravouhlých souřadnicích 01, 02, 03 je otočení vektoru kolem osy 03 o úhel φ dáno maticí

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dokažte, že inverzní operací je otočení vektoru o úhel $-\varphi$. To znamená, že platí $A^{-1}(\varphi) = A(-\varphi)$, kde $A(\varphi)$ značí závislost prvků matice na úhlu φ . */

*/ Mohli bychom ji zapsat též takto: $A(\varphi) \equiv [a_{ij}(\varphi)]$

Úloha 8. Je dána diagonální matice s prvky a_{11}, a_{22}, a_{33} . Dokažte, že inverzní matice je opět diagonální a že má na úhlopříčce prvky $a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, a_{33}^{-1}$.

Úloha 9. Je dán vektor napětí $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$ a vektor přetvoření $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$. Napište v maticovém tvaru vzorec pro výpočet měrné energie napjatosti.

Úloha 10. Pomocí vektorů σ a ε z předchozí úlohy lze napsat Hookeův zákon ve tvaru $\varepsilon = \Phi \sigma$. Definujte matici Φ pro izotropické těleso s Youngovým modulem pružnosti E a Poissonovým číslem μ .

Úloha 11. Napište Hookeův zákon ve tvaru $\sigma = \mathcal{X} \varepsilon$ pro izotropické těleso z úlohy 10. Přesvědčte se vynásobením obou matic Φ a \mathcal{X} , že $\mathcal{X} = \Phi^{-1}$.

Úloha 12. Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obdobně k rovnici (3.27) sestavíme nyní schéma pro výpočet součinu ABC . Doplňte v něm chybějící čísla.

Schéma pro výpočet k úloze 12:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & | & \\ \hline & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ABC & | & \\ \hline & & \end{bmatrix}$$

Úloha 13. S maticemi z úlohy 12 proveďte tuto operaci:

$$D = (A^T + B)C$$

Úloha 14. Dokažte, že pro jakoukoli matici A platí, že součin $A^T A$ dává souměrnou matici. Přesvědčte se o tom též číselným výpočtem s maticí A z úlohy 12.

Úloha 15. Přepište do maticového vzoru výraz

$$a = \sum_{j=2}^4 \sum_{i=1}^4 c_{ij} x_i x_j$$

4. DĚLENÍ MATICE NA SUBMATICE

S maticí, jejíž prvky jsou zase matice, zacházíme stejně jako s obyčejnými maticemi. Pouze při transpozici matice musíme ještě - kromě záměny řádek a sloupců složené matice - transponovat jednotlivé prvky. Je-li např.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 7 & 6 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right], \quad (4.1)$$

je transponovaná matice

$$A^T = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^T & A_{21}^T \\ \hline A_{12}^T & A_{22}^T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 9 & 1 \end{array} \right]. \quad (4.2)$$

Dělení matice na submatice je naznačeno čárkovanými příčkami. Toto dělení bývá výhodné, umožňuje-li dílčí řešení problému jednodušším způsobem nebo dovolí-li vyjádřit symbolicky v přehlednější formě rozdělení soustavy rovnic na menší celky, z nichž každý má jiné specifické zvláštnosti (např. jedna podsoustava obsahuje jen veličiny staticky určité, druhá neurčité apod.).

Jako příklad uvedeme řešení soustavy lineárních rovnic, zajímají-li nás jen neznámé x_1, x_2 (ostatní neznámé nepotřebujeme znát). Soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ 4x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

přepíšeme do maticového tvaru $Ax = y$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -1 & 0 & & & & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & 4 & 1 & -1 & & & & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (4.4)$$

v něm lze matice rozdělit, jak naznačeno. Symbolicky

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_{11} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Rovnici (4.5) lze rozepsat (vynásobením) takto:

$$\begin{aligned} A_{11} X_1 + A_{12} X_2 &= Y_1, \\ A_{21} X_1 + A_{22} X_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Z druhé rovnice

$$X_2 = -A_{22}^{-1} A_{21} X_1 \quad (4.7)$$

a z první z rovnic (4.6) postupně

$$A_{11} X_1 - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} X_1 = Y_1, \quad (4.8)$$

$$X_1 = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} Y_1. \quad (4.9)$$

Rovnice (4.9) dává nyní předpis pro celý výpočet, v němž stačí invertovat matice jen druhého řádu. To snadno zvládneme s použitím vzorce (3.52). Dostaneme

$$A_{22}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{22}^{-1} A_{21} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} = B,$$

$$B^{-1} = 2 \frac{1}{-64} \begin{bmatrix} -10 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = B^{-1} Y_1 = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{Bmatrix} 32 \\ -32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}.$$

Pokud by nás zajímalo též X_3 , X_4 , dostali bychom z (4.7)

$$X_2 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -4 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix}.$$

Rozřešili jsme tak soustavu rovnic o čtyřech neznámých a vyhnuli jsme se přitom inverzi matice čtvrtého řádu.

Úloha 16. Ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \\-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 10, \\x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0.\end{aligned}$$

odvoďte vzorec pro výpočet neznámé x_4 (vhodným rozdělením příslušné matice soustavy). Ostatní neznámé nás nezajímají.

Úloha 17. K matici soustavy z předchozí úlohy najděte inverzní matici tak, že ji rozdělíte na čtyři submatice druhého řádu. Napište pak výsledek řešení celé soustavy rovnic v maticovém tvaru.

Úloha 18. Je dána složená matice

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right],$$

v níž A , B , C , D jsou čtvercové submatice. Inverzní matice je pak

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right]$$

Pomocí submatic a , b , c , d sestavte vzorec pro výpočet A^{-1} .

5. VLASTNÍ HODNOTY A VLASTNÍ VEKTORY MATICE

Rovnice $Ax = y$ transformuje vektor x do vektoru y . Za určitých okolností může směr vektoru y splynout se směrem původního vektoru x , takže složky obou vektorů jsou ve stejném poměru. Musí tedy platit, že

$$\{y\} = \lambda \{x\}, \quad (5.1)$$

kde λ je konstantou úměrnosti. Má-li platit (5.1), musí původní rovnice nabývat tvaru

$$[A]\{x\} = \lambda \{x\}. \quad (5.2)$$

Tuto rovnici nemůžeme jednoduše "krátit" $\{x\}$, protože vektor nemá inverzní matici, kterou bychom musili při "krácení" zprava násobit. Není to totiž čtvercová matice. Z rovnice (5.2) však plyne jednoduchou úpravou rovnice

$$([A] - \lambda [I])\{x\} = \{0\} \quad (5.3)$$

neboť $[I]\{x\} = \{x\}$. Řád matice $[I]$ se shoduje s řádem čtvercové matice $[A]$. Z homogenní soustavy rovnic (5.3) lze určit jednak triviální řešení $\{x\} = \{0\}$, jednak netriviální řešení, které je však možné jen tehdy, je-li splněna podmínka

$$\det([A] - \lambda[I]) = |A - \lambda I| = 0 \quad (5.4)$$

Ukážeme to na příkladu matice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Rovnice (5.3) po rozepsání dává:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

čili:

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.7)$$

Determinant matice

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

odkud $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Číslo λ , pro které existuje netriviální řešení, je vlastní hodnotou matice A . Pro $\lambda_1 = 1$ plyne z rovnice (5.7)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

To je v podstatě jen jedna rovnice (druhá je násobkem první). Podmínka (5.4) je totiž podmínkou lineární závislosti rovnic (5.2). Pak ovšem nelze určit x_1 , x_2 , ale jen poměr $x_1 : x_2 = -1$. Zvolíme-li $x_1 = 1$, vyjde $x_2 = -1$. Tak dostaneme vlastní vektor

$$v^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 & -1 \end{Bmatrix}^T \quad (5.8)$$

matice A , příslušný vlastní hodnotě λ_1 . Podobně pro $\lambda_2 = 4$ vyjde z rovnice (5.7)

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 &= 0, \end{aligned}$$

a tedy, zvolíme-li opět $x_1 = 1$,

$$v^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \end{Bmatrix}^T \quad (5.9)$$

Úloha najít netriviální řešení rovnice (5.3) se často vyskytuje při řešení kmitů pružných soustav nebo při řešení vzpěru. Místo (5.3) však někdy dostaneme obecnější tvar

$$([A] - \lambda [B])\{x\} = \{0\} \quad (5.10)$$

Nutnou podmínkou existence netriviálního řešení je v takovém případě

$$|A - \lambda B| = 0 \quad (5.11)$$

Je-li alespoň jedna z obou matic nesingulární, lze rovnici (5.10) převést na tvar (5.3), a to násobením buď A^{-1}/λ nebo B^{-1} . V prvním případě z rovnice (5.10) dostaneme

$$\left(\frac{1}{\lambda} [I] - [A]^{-1} [B]\right)\{x\} = \{0\}$$

S označením $\frac{1}{\lambda} = \Lambda$, $[A]^{-1} [B] = [C]$ odtud vyjde po snadné úpravě

$$([C] - \Lambda [I])\{x\} = \{0\} \quad (5.12)$$

Rovnice (5.12) je zcela obdobná rovnici (5.3). V druhém případě plyne z (5.10)

$$([B]^{-1} [A] - \lambda [I])\{x\} = \{0\}, \quad (5.13)$$

což je rovnice typu (5.3). Je zřejmé, že alespoň jedna z matic A , B nesmí být singulární, abychom mohli alespoň jeden z obou uvedených způsobů použít. Převedení rovnice (5.10) na tvar (5.3) však není nutné, je možné řešit (5.10) přímo, tj. napsat podmínku (5.11).

U velkých matic vede úloha o vlastních hodnotách na algebraické rovnice vyšších stupňů, jež je nutno řešit numericky. Používají se zpravidla iterační metody, jež zde nebudeme probírat.

Jak jsme již uvedli, úlohy o vlastních hodnotách se vyskytují v teorii kmitání, v teorii stability aj. Mají však význam i pro numerickou analýzu. Poměr největší a nejmenší vlastní hodnoty matice charakterizuje totiž vhodnost matice pro inverzi, při níž může nastat větší nebo menší ztráta platných cifer. Tato ztráta vzniká zaokrouhlováním a je větší u matic, které jsou "skoro singulární" (angl. ill - conditioned).

Úloha 19. Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Úloha 20. Najděte vlastní hodnoty a vlastní vektory pro problém

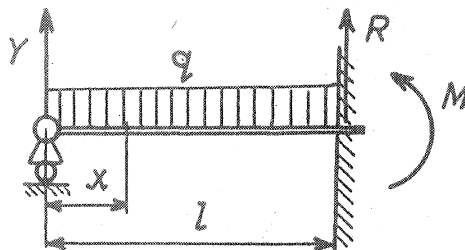
$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Úloha 21. Převedte rovnici z předchozí úlohy na tvar (5.3).

6. DUALITA V POJETÍ ÚLOH Z TEORIE PRUŽNOSTI....

Na některých příkladech ukážeme, že je možný v podstatě dvojitý postup řešení úloh z teorie pružnosti, podle toho, které veličiny považujeme za základní proměnné.

Budeme se nejprve zabývat řešením nosníku na jednom konci vetknutého, na druhém podepřeného podle obr. 3 a zatíženého rovnoměrně silou q [N m^{-1}]. Neznámé složky reakcí jsou Y , R , M . Pro ně platí dvě podmínky rovnováhy



Obr. 3

$$\begin{aligned} Y + R &= ql, \\ Yl - M &= \frac{1}{2} ql^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Tyto podmínky zřejmě nestačí k určení neznámých reakcí (úloha je jednou staticky neurčitá). Musíme proto pro tyto veličiny najít ještě jednu podmínku. Ta vyjadřuje skutečnost, že deformace jsou v souladu s okrajovými podmínkami. Kdybychom nosník vlevo uvolnili, prohnul by se v tomto místě směrem dolů o

$$\delta = \frac{ql^4}{8EJ} - \frac{Yl^3}{3EJ}, \quad (6.2)$$

jak vyplývá z elementární teorie ohybu. Tento průhyb je ve skutečnosti nulový, takže musí být

$$Y = \frac{3}{8} ql. \quad (6.3)$$

Tato rovnice tvoří s rovnicemi (6.1) základní soustavu, z níž můžeme určit všechny neznámé silové veličiny (reakce). Vyjde - kromě (6.3) -

$$R = \frac{5}{8} ql, \quad M = -\frac{1}{8} ql^2. \quad (6.4)$$

Při tomto řešení jsme vycházeli ze soustavy obsahující silové veličiny jako neznámé. Výpočet deformací jsme přitom nepotřebovali, až snad na rovnici

(6.2), tu jsme však mohli nahradit podmínkou-minima (komplementární) potenciální energie napjatosti

$$\begin{aligned}
 U^* &= \frac{1}{2EJ} \int_0^l \left(Yx - \frac{1}{2} qx^2 \right)^2 dx = \\
 &= \frac{Y^3 l^3}{6EJ} - \frac{Yql^4}{8EJ} + \frac{q^2 l^5}{40EJ} \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

totiž rovnicí

$$\frac{\partial U^*}{\partial Y} = \frac{Yl^3}{3EJ} - \frac{ql^4}{8EJ} = 0 \quad (6.6)$$

Tato podmínka, známá též jako Ménabréova věta, je zcela rovnocenná podmínce (6.2) a neobsahuje explicitně žádné průhyby ani jiné deformace; ty zůstávají skrytě v pozadí úlohy. Metoda, kterou jsme právě použili, se proto nazývá silovou metodou.

K této metodě je třeba poznamenat, že je nutné rozlišit stupeň statické neurčitosti úlohy a podle toho doplnit rovnice rovnováhy ještě dalšími rovnicemi, vyjadřujícími kompatibilitu deformací (ty zabezpečují "souhru" deformací). Tyto rovnice zároveň minimalizují komplementární potenciální energii napjatosti U^* , vyjádřenou jako funkci silových veličin. Za silové veličiny (krátce "síly") považujeme nejen síly, ale i silové dvojice (momenty). Energie napjatosti U^* je potenciální, protože je závislá jen na napjatosti tělesa a nikoli na způsobu, jak tato napjatost vznikla (např. na pořadí přikládání sil). Derivace (6.6) má pak význam posuvu δ podle rovnice (6.2). ^{*}

Hovořit o "komplementární" energii napjatosti má význam jen u nelineárně pružných těles. U lineárně pružných těles můžeme toto slovo vynechat. Přesto zde stručně ozřejmíme jeho význam. Potenciální energie napjatosti se totiž získává integrací elementární deformační práce, při níž je nezávisle proměnnou buď veličina silová (v tom případě jde o fiktivní komplementární energii napjatosti) nebo deformační (v tom případě jde o skutečnou deformační práci). Objasníme to na případě jednoosé napjatosti (obr. 4). Budeme předpokládat, že závislost mezi silou F a prodloužením u je obecně nelineární. Deformační práce síly F při posuvu u , je

$$U = \int_0^{u_1} F du \quad (6.7)$$

^{*}/ Obecně plyne derivacemi potencionálního skalárního pole nějaké pole vektorové.

a je dána plochou OAB pracovního diagramu získaného při zkoušce tahem. Je to potenciální energie napjatosti a je to skutečná deformační práce, kterou vykonala síla F . Zato fiktivní (pouze výpočtová, neskutečná) "deformační práce"

$$U^* = \int_0^{F_1} u dF \quad (6.8)$$

je komplementární potenciální energií napjatosti a je dána plochou OBC. Není to ve skutečnosti žádná deformační práce, neboť elementární práce síly F

je $F du$ a nikoli snad $u dF$. Je to doplněk (tj. "komplement"), který musíme ke skutečné deformační práci přičíst, abychom dostali práci, kterou by na dané dráze vykonala síla F , kdyby měla od samého počátku svou konečnou (neměnnou) velikost. Jde-li o těleso lineárně pružné, je čára OB přímá a $u dF = F du$, tedy též $U^* = U$.

Je zřejmé, že v rovnici (6.8) je základní nezávisle proměnnou síla F , zatímco v rovnici (6.7) je to posuv u . Proto jsme v souvislosti se silovou metodou použili komplementární potenciální energii napjatosti. Jinak je tomu u deformační metody, o níž nyní krátce pojednáme.

Druhou metodou řešení nosníku podle obr. 3 je metoda deformační. Pro průhyb $v = v(x)$ platí známá diferenciální rovnice

$$v'' = - \frac{1}{EJ} \left(Yx - \frac{1}{2} q x^2 \right) \quad (6.9)$$

s okrajovými podmínkami

$$v(0) = 0, \quad v'(l) = 0, \quad v(l) = 0. \quad (6.10)$$

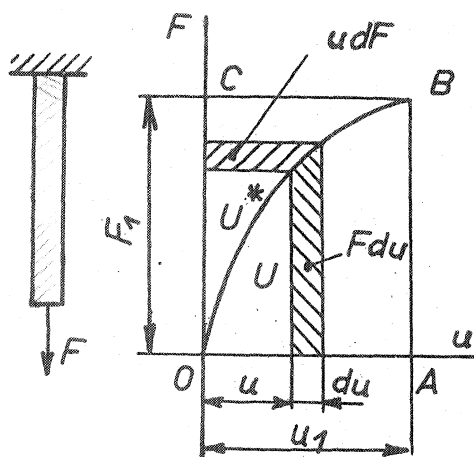
Integrací rovnice (6.9) dostaneme

$$v' = - \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} Y x^2 - \frac{1}{6} q x^3 + C_1 \right), \quad (6.11)$$

$$v = - \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{6} Y x^3 - \frac{1}{24} q x^4 + C_1 x + C_2 \right) \quad (6.12)$$

a z podmínek (6.10)

$$Y = \frac{3}{8} q l, \quad C_1 = - \frac{q l^4}{48}, \quad C_2 = 0. \quad (6.13)$$



Obr. 4

Dosazením (6.13) do (6.12)

$$v = \frac{q x}{48 E J} (l^3 - 3 l x^2 + 2 x^3). \quad (6.14)$$

Zde jsme dostali celou ohybovou čáru, aniž jsme se museli starat o stupeň statické neurčitosti. To je velká výhoda deformační metody. V teorii pružnosti se dokazuje, že ohybová čára (6.14) minimalizuje integrál, kterým počítáme celkovou potenciální energii

$$U = \frac{1}{2} E J \int_0^l [(v'')^2 + \frac{2q}{E J} v] dx. \quad (6.15)$$

Z různých "rozumných" funkcí $v = v(x)$, splňujících okrajové podmínky (6.10), dává právě funkce (6.14) nejmenší hodnotu integrálu (6.15); zároveň pro tuto funkci platí, že silové veličiny z ní odvozené

$$M_0 = -\frac{1}{E J} v'', \quad T = -\frac{1}{E J} v''' \quad (6.16)$$

splňují podmínky rovnováhy. Pro neznámé složky reakcí dostaneme

$$Y = T(0), \quad R = -T(l), \quad M = M_0(l). \quad (6.17)$$

Dualitu obou metod ukážeme dále na případě rovinné napjatosti. Pro napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ platí v soustavě pravouhlých souřadnic x, y tyto podmínky rovnováhy (bez objemových sil):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Kromě toho platí podmínka kompatibility deformací

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.19)$$

a Hookeův zákon

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (6.20)$$

Rovnice (6.18), (6.19) a (6.20) spolu s okrajovými podmínkami postačují k řešení úlohy. ^{x/}

^{x/} Okrajové podmínky jsme nenapsali, protože neřešíme konkrétní zadání; jde nám jen o charakteristické znaky deformační či silové metody.

U silové metody dosadíme z rovnic (6.20) do rovnice (6.19) a dostaneme tak spolu s (6.18) tři rovnice pro neznámé složky napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$. Místo (6.19) nyní bude

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \mu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.21)$$

Tuto rovnici lze kombinovat s derivacemi rovnic (6.18) tak, že vyjde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (6.22)$$

Rovnice (6.18) a (6.22) jsou nyní výchozími rovnicemi pro silovou metodu.

Při deformační metodě použijeme vztahy mezi poměrným přetvořením $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ a posuvy u, v ve směrech souřadnicových os x, y

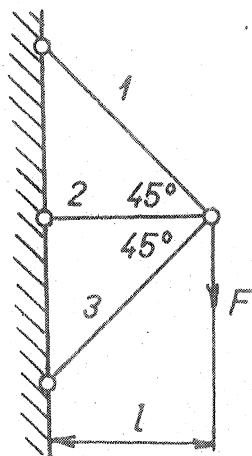
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.23)$$

Dosazením do (6.20) a pak do (6.18) dostaneme dvě rovnice pro neznámé posuvy

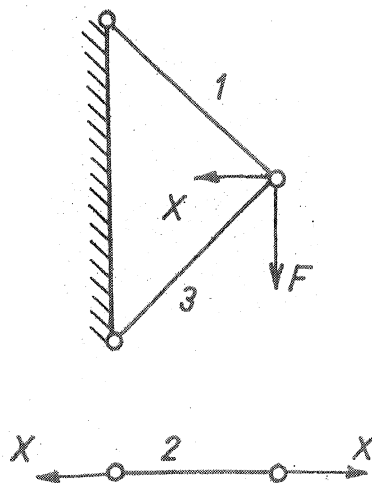
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{1 + \mu}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1 + \mu}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Přítom jsme využili známý vztah $E = 2(1 + \mu)G$. Je zřejmé, že při řešení deformační metodou nepotřebujeme rovnice kompatibility (6.19). ^{*})

Jako poslední příklad uvedeme řešení prutové soustavy podle obr. 5. Pruty mají stejný průřez S a stejný modul pružnosti E . Ve společném kloubu působí síla F . Při postupu podle silové metody označíme staticky neurčitou sílu v prutu 2 znakem X (obr. 6). Bude tedy $P_2 = X$.



Obr. 5



Obr. 6

^{*}) Rovnice (6.23) jsou jim totiž ekvivalentní.

Z podmínek rovnováhy

$$\begin{aligned} (P_1 + P_3) \frac{1}{2} \sqrt{2} + X &= 0, \\ (-P_1 + P_3) \frac{1}{2} \sqrt{2} + F &= 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

nelze ještě síly P_1 , P_3 vypočítat, neboť neznáme X . Musíme proto připojit podmínku kompatibility deformací

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = 0, \quad (6.26)$$

kde komplementární potenciální energie napjatosti je funkcí dané síly F a staticky neurčité síly X . Platí-li Hookeův zákon, je tato energie dána vztahem ^{*/}

$$U^* = \frac{\ell}{2ES} \left[\sqrt{2} (P_1^2 + P_3^2) + P_2^2 \right]. \quad (6.27)$$

Síly P_1 až P_3 musíme nahradit proměnnými X a F pomocí vztahů (6.25), takže

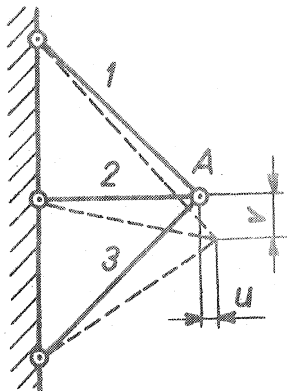
$$U^* = \frac{\ell}{2ES} \left[\sqrt{2} (F^2 + X^2) + X^2 \right]. \quad (6.28)$$

Rovnice (6.26) nyní dává $X = 0$; s tím pak z rovnic (6.25) plyne

$$P_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} F; \quad P_2 = 0; \quad P_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{2} F. \quad (6.29)$$

Derivace $\partial U^* / \partial F$ má podle Castiglianovy věty význam svislého posuvu společného kloubu

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{F \ell \sqrt{2}}{ES}. \quad (6.30)$$



Při deformační metodě se nebudeme starat o statickou neurčitost konstrukce. Jednoduše zvolíme za neznámé obě složky posuvů u , v (obr. 7). Pro síly v prutech dostaneme z Hookeova zákona (s označením $ES/\ell = k$)

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{k}{2} (u + v), \\ P_2 &= k u, \\ P_3 &= \frac{k}{2} (u - v) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Obr. 7

^{*/} v i -tém prutu je tato energie $(P_i^2 \ell_i) / (2ES)$; přitom $\ell_1 = \ell_3 = \ell \sqrt{2}$, $\ell_2 = \ell$.

Dosazením do rovnic rovnováhy

$$\begin{aligned} (P_1 + P_3) \frac{1}{2} \sqrt{2} + P_2 &= 0, \\ (-P_1 + P_3) \frac{1}{2} \sqrt{2} + F &= 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

vyjde soustava rovnic

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} + 1\right) k u &= 0, \\ -\frac{1}{2} \sqrt{2} k v + F &= 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Odtud

$$u = 0, \quad v = \frac{F \sqrt{2}}{k} = \frac{F l \sqrt{2}}{ES} \quad (6.34)$$

Svislý posuv v je však posuvem δ podle (6.30). Srovnáním se lze přesvědčit, že obě metody dávají týž výsledek.

Potenciální energie napjatosti je pro lineárně pružné pruty stejná jako (6.27), je však nutno ji vyjádřit pomocí posuvů (6.31). Vyjde

$$U = \frac{k^2 l \sqrt{2}}{4 ES} [(1 + \sqrt{2}) u^2 + v^2]. \quad (6.35)$$

Derivace $\partial U / \partial v$ dává velikost síly působící ve směru posuvu v . Skutečně, s použitím (6.34) vyjde

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{k^2 l v \sqrt{2}}{2 ES} = \frac{ES v \sqrt{2}}{2 l} = F \quad (6.36)$$

Je zřejmé, že deformační metoda je principiálně jednodušší. Nepotřebujeme při ní žádné podmínky kompatibility. Zůstává stejná, ať jde o konstrukce staticky určité nebo neurčité. Proto se v dalším výkladu výhradně věnujeme této metodě. Silovou metodou se budeme zabývat až v některém z dalších seminářů. Jestliže jsme řekli, že deformační metoda je jednodušší, neznamená to ještě, že je vždy výhodnější. Stává se, že jedna z metod bývá pracnější než druhá, to však není vždy stejné. Otázka výhodnosti závisí také na tom, můžeme-li nebo nemůžeme-li k výpočtu použít samočinný počítač. Přitom se uplatňují ještě jiná hlediska, především požadavek numerické stability soustavy rovnic pro řešení rozsáhlých úloh. Tím se stalo, že silová metoda, která se ve staticce pružných soustav dříve užívala velmi často, ustoupila později zcela do pozadí. V současné době však byly vyvinuty nové numerické způsoby řešení soustav podle silové metody, a tak se i silová metoda dostává znovu do popředí zájmu.

Někdy je účelné řešit týž problém oběma metodami. Nejsme-li totiž schopni podat řešení exaktní (nebo nebylo-li by exaktní řešení ekonomické),

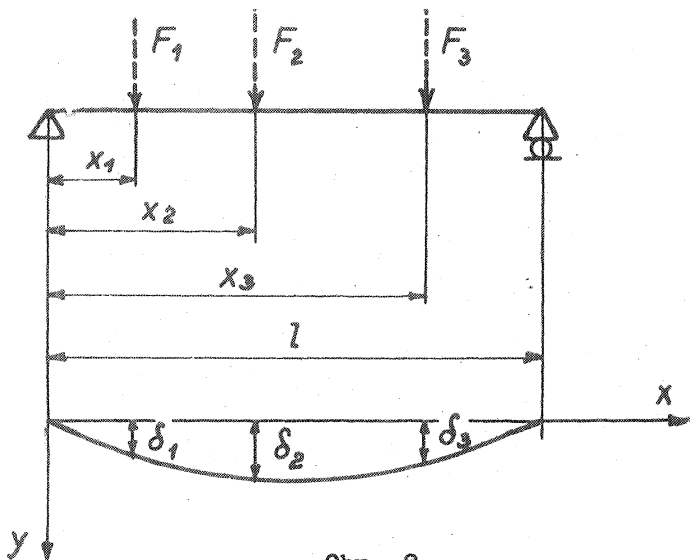
používáme řešení přibližná. Jak později uvidíme, ohraničují výsledky získané deformační a silovou metodou přesné řešení; tím získáme odhad chyby přibližného řešení.

7. PŘÍČINKOVÉ ČINITELE. MATICE TUHOSTI A PODDAJNOSTI

Z elementární teorie ohybu nosníků je znám pojem příčinkového činitele C_{jk} . Je to průhyb v místě j způsobený jednotkovou silou působící v místě k . U nosníku na obr. 8 je $j, k = 1, 2, 3$ a pro příčinkové činitele - za předpokladu, že ohybová tuhost EJ je stálá - platí vztahy

$$C_{jk} = \frac{1}{6lEJ} x_j (l - x_k) (2lx_k - x_j^2 - x_k^2) \text{ pro } x_k \geq x_j \quad (7.1)$$

$$C_{kj} = C_{jk}$$



Obr. 8

Tyto činitele můžeme sestavit do souměrné matice

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Abychom měli určitou představu o číselných hodnotách, zvolme $x_1 = 0,2l$, $x_2 = 0,5l$, $x_3 = 0,7l$. Výpočtem podle (7.1) vyjde okrouhle

$$C = \frac{l^3}{10^5 EJ} \begin{bmatrix} 860 & 1183 & 870 \\ 1183 & 2083 & 1650 \\ 870 & 1650 & 1470 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Z definice příčinkových činitelů C_{jk} a z principu superpozice dostáváme ihned hodnoty průhybů δ_j ($j = 1, 2, 3$) působí sil F_j

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

Tuto rovnici lze psát zkráceně

$$\{\delta\} = [C]\{F\} \quad (7.5)$$

Jak jsme již uvedli, můžeme závorky v rovnici (7.5) vynechat, nevzniká-li nebezpečí omylu záměnou matic za obyčejné proměnné.

Kdyby např. na nosník působila podle obr. 8 pouze síla F uprostřed, bylo by $F_1 = 0$, $F_2 = F$, $F_3 = 0$. Podle (7.3) a (7.5)

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \frac{\ell^3}{10^5 EJ} \begin{bmatrix} 860 & 1183 & 870 \\ 1183 & 2083 & 1650 \\ 870 & 1650 & 1470 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

Vzhledem k nulám v prvním a ve třetím řádku vektoru $\{F\}$ můžeme první a třetí sloupec matice $[C]$ škrtnout; zbývá

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \frac{\ell^3}{10^5 EJ} \begin{Bmatrix} 1183 \\ 2083 \\ 1650 \end{Bmatrix} F \quad (7.7)$$

Průhyb uprostřed by tedy byl

$$\delta_2 = \frac{F \ell^3}{10^5 EJ} 2083 = \frac{F \ell^3}{48 EJ} \quad (7.8)$$

Matici $[C]$ v rovnici (7.5) bychom mohli nazývat maticí příčinkových činitelů. Budeme jí však kratčeji říkat "matice poddajnosti". Jde-li o ohýbaný nosník, mohli bychom též použít název "matice ohebnosti". Není to singulární matice, proto lze najít její inverzi $[K] = [C]^{-1}$, kterou budeme nazývat "maticí tuhosti". Místo (7.5) dostaneme

$$\{F\} = [C]^{-1}\{\delta\} = [K]\{\delta\} \quad (7.9)$$

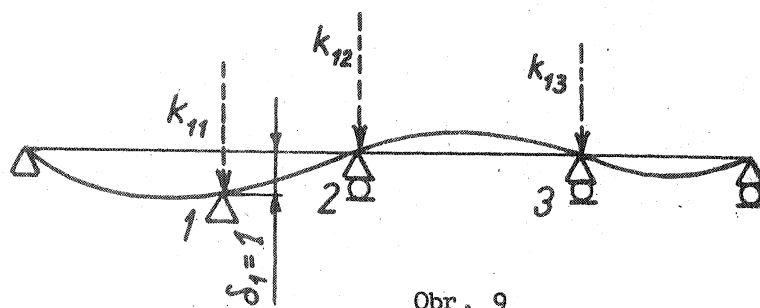
V této rovnici bude zřejmé (v našem případě)

$$[K] = [C]^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Rozepíšeme-li (7.9), dostaneme

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

Odtud je zřejmý význam činitelů k_{ij} . Zvolíme-li třeba $\delta_1 = 1$ délková jednotka, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$, bude mít činitel k_{i1} význam síly vzniklé v i -té podpoře při zvolených deformacích (obr. 9). * / Matice $[K]$ vznikla inverzí souměrné matice, proto je sama rovněž souměrná.



Obr. 9

V našem zvláštním případě vyjde přibližně

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 591 & -528 & 243 \\ -528 & 883 & -679 \\ 243 & -679 & 682 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad (7.12)$$

Rovnice (7.4) a (7.11) mají společné to, že se týkají jen deformací a sil v bodech 1, 2, 3 (obr. 8 a 9). První z nich umožňuje výpočet deformací, jsou-li dány síly, druhá výpočet sil, potřebných k dosažení daných deformací. Příčinkové činitele se často používaly ve staticce i v dynamice pružných těles. My však je budeme nyní užívat poněkud jinak. Kromě matice tuhosti a matice poddajnosti, jež se týkají celé konstrukce (to byl

* / Z názoru je zřejmé, že k_{12} bude záporné, což není podstatné. V soustavě SI je jednotkou délky metr. Stěží si ovšem dovedeme představit průhyb nosníku 1 m, alespoň nikoli u nosníku obvyklé velikosti. Proto zde pojmenování délkové jednotky ani neuvádíme. Délkovou jednotku však můžeme volit libovolně malou, pamatujeme-li, že s průhybem se ve stejném poměru zmenšují i činitele k_{ij} .

prozatím náš případ), zavedeme ještě tyto matice pro jednotlivé části, tj. pro "prvky" či "elementy" konstrukce. Bude-li třeba, rozlišíme oba druhy matic názvy "celková" a "elementární" matice. Z elementárních matic se pak naučíme skládat celkové matice a s jejich pomocí odvozovat vztahy platné pro celou konstrukci. Takovými konstrukčními prvky či elementy by mohly v našem případě být čtyři nosníky o délkách $0,2 \ell$, $0,3 \ell$, $0,2 \ell$ a $0,3 \ell$, na něž lze daný nosník v místech 1, 2, 3 rozdělit. Protože se prozatím omezíme na deformační metodu, budou základní soustavu neznámých veličin tvořit deformace (průhyby, sklony, posuvy). Silové veličiny pak dostaneme z rovnic typu (7.9). K tomu budeme potřebovat matice tuhosti (nikoli matice poddajnosti). S nimi tedy začneme. Nebudeme však probírat hned nosníky, ale zvolíme pro začátek jednodušší prvky - pružiny. Později se k otázce nosníků znovu vrátíme.

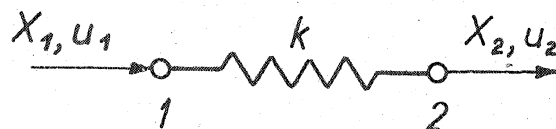
Úloha 22. Na struně předpjaté konstantní silou Q jsou ve stejných vzdálenostech umístěny tři stejné osamělé hmoty (hmotné body) m . Vlastní hmotu struny zanedbáváme, rovněž tak i změnu předpětí vlivem výchylek. Pomocí příčinkových činitelů určete vlastní kruhovou frekvenci volného kmitání této soustavy (při malých výchylkách).

Úloha 23. Pro strunu z předchozí úlohy stanovte matici tuhosti $[K]$.

8. PRUŽINY SPOJENÉ PARALELNĚ A SÉRIOVĚ

Jak jsme již uvedli, pokusíme se nyní sestavit matici tuhosti pro celou soustavu pomocí elementárních matic tuhosti pro jednotlivé pružiny. Tyto dva druhy matic nesmíme zaměňovat. Nejprve se tedy budeme zabývat jednou pružinou.

Pro pružinu na obr. 10 zavedeme kladné posuvy u_i a kladné síly X_i ve směru zleva doprava ($i = 1, 2$). Obdobně k rovnici (7.11) můžeme psát



Obr. 10

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

Co znamená např. součinitel k_{11} ? Zvolíme-li $u_2 = 0$, vyjde z rovnice (8.1)

$$X_1 = k_{11} u_1; \quad X_2 = k_{21} u_1 \quad (8.2)$$

To znamená, že k_{11} se rovná poměru X_1/u_1 při $u_2 = 0$. Podobně k_{21} se rovná poměru X_2/u_1 . Je-li k pružinová konstanta (méně vhodně též "tuhost") pružiny, bude zřejmě $k_{11} = k$, $k_{21} = -k$. V tomto druhém případě je znaménko záporné, protože posuv kloubu 1 o u_1 způsobí v kloubu 2 tlakovou reakci; zatímco síla $+X_2$ je tahová (na rozdíl od X_1).

Zvolíme-li naopak $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$, vyjde obdobně

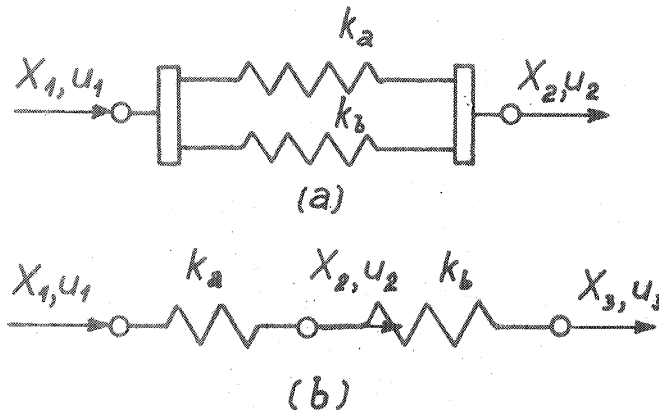
$$k_{12} = X_1/u_2 = -k; \quad k_{22} = X_2/u_2 = k. \quad (8.3)$$

Shrneme-li tyto výsledky, dostaneme matici tuhosti

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

Kdyby šlo o dvě pružiny spojené paralelně (obr. 11 a), sečetly by se síly vzniklé při posuvech u_1 , u_2 v jednotlivých pružinách; s použitím (8.4)

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (8.5)$$



Obr. 11 (a, b)

Zkráceně můžeme tuto rovnici napsat takto:

$$\{X\} = [K_a]\{u\} + [K_b]\{u\}$$

čili

$$\{X\} = [K]\{u\}, \quad (8.6)$$

kde

$$[K] = [K_a] + [K_b] \quad (8.7)$$

Poněkud složitější je případ pružin řazených sériově (obr. 11 b). Opět bude platit, že

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (8.8)$$

čili

$$\{X\} = [K] \{u\} \quad (8.9)$$

Zvolíme-li $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, vyjde z (8.8)

$$k_{11} = X_1/u_1 = k_a; \quad k_{21} = X_2/u_1 = -k_a; \quad k_{31} = X_3/u_1 = 0.$$

Nyní zvolíme $u_1 = 0$, $u_3 = 0$; dostaneme

$$k_{12} = X_1/u_2 = -k_a; \quad k_{22} = X_2/u_2 = k_a + k_b; \quad k_{32} = X_3/u_2 = -k_b.$$

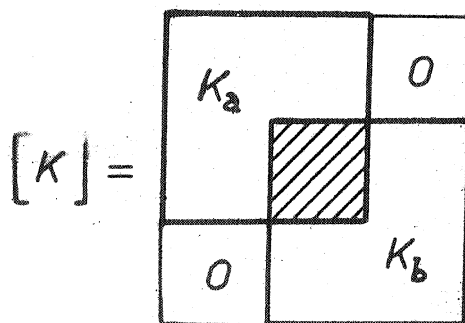
Konečně pro $u_1 = 0$, $u_2 = 0$

$$k_{13} = X_1/u_3 = 0; \quad k_{23} = X_2/u_3 = -k_b; \quad k_{33} = X_3/u_3 = k_b.$$

Celkem tedy bude

$$[K] = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Při výpočtu jsme postupovali stejně jako u jednotlivé pružiny, jen při výpočtu činitele k_{22} se uplatnily obě pružiny zároveň. Matici $[K]$ jsme mohli sestavit, zdá se, superpozicí matic (8.4) platných pro jednotlivé pružiny podle schématu na obr. 12. Stačí doplnit řád matice na 3 (což je počet "stupňů volnosti", tj. počet posuvů vstupujících do rovnice (8.8)) a do této zvětšené matice začlenit submatice $[K_a]$ a $[K_b]$ sestavené podle (8.4) tak, aby se na diagonále překrývaly. Tam, kde se překrývají, se jednotlivé prvky matic sečítají. Nepokrytá pole matice 3 x 3 se doplní nulami. Tak se tedy z elementárních matic $[K_a]$, $[K_b]$ složí celková matice.



Obr. 12

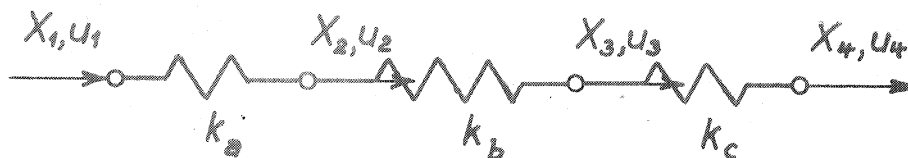
Také bychom mohli postupovat tak, že bychom nejprve doplnili řád elementárních matic na 3 x 3 a pak je jednoduše sečetli, ovšem s přihlédnutím k pořadí prvků, jež musí u všech matic odpovídat pořadí posuvů. Rovnici (8.10) bychom mohli zapsat např. takto:

$$[K] = [K_a] + [K_b], \quad (8.11)$$

kde

$$[K_a] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [K_b] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

Obdobně bychom mohli postupovat i při větším počtu pružin. Určitou pomocí při sestavování celkové matice je, označíme-li si sloupce zvětšených matic, jak se k nim přiřazují posuvy. Např. pro tři pružiny za sebou podle obr. 13 bude třeba matice zvětšit na řád 4 x 4.



Obr. 13

Bude tedy

$$[K_a] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ k_a & -k_a & 0 & 0 \\ -k_a & k_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [K_b] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b & 0 \\ 0 & -k_b & k_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[K_c] = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_c & -k_c \\ 0 & 0 & -k_c & k_c \end{bmatrix}; \quad [K] = [K_a] + [K_b] + [K_c]. \quad (8.13)$$

Je-li např. pružina s konstantou k_c připevněna v kloubech 3, 4, vzniká síla v této pružině jenom vlivem posuvů u_3 , u_4 . Proto submatice $[K_c]$ musí mít nenulové prvky jenom ve třetím a čtvrtém sloupci, popř. řádku. Tato metoda skládání matic tuhosti je velmi užitečná a jednoduchá.

Pro soustavu na obr. 13 bude tedy platit rovnice

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ k_a & -k_a & 0 & 0 \\ -k_a & k_a+k_b & -k_b & 0 \\ 0 & -k_b & k_b+k_c & -k_c \\ 0 & 0 & -k_c & k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (8.14)$$

Poznáváme v ní opět tvar (8.9).

Všechny celkové matice tuhosti $[K]$, odvozené v tomto odstavci, mají tyto vlastnosti:

1. Matice $[K]$ jsou souměrné.
2. Součet prvků matice $[K]$ v každém řádku (a tedy i v každém sloupci) je nulový. Je to důsledek rovnováhy dané pružiny nebo soustavy pružin.
3. Determinant $|K| = 0$, matice $[K]$ je tedy singulární; inverzní matice neexistuje. Je to tím, že nejsou předepsány okrajové podmínky, jde o volnou soustavu těles (na rozdíl od matic tuhosti v kap. 7, kde nosník byl na koncích podepřen). Posuvy nejsou proto jednoznačně dány.
4. Matice $[K]$ má na hlavní diagonále (vedené zleva nahoře vpravo dolů) vždy kladné prvky ($k_{ii} > 0$). Je to tím, že síla, působící na pružné těleso nebo soustavu těles, nikdy nevyvolá posuv svého působíště proti smyslu svého působení.

Shledáme-li, že matice $[K]$ je singulární, vždy to znamená, že těleso (nebo soustava těles) není dostatečně podepřené nebo že má výjimečnou polohu, nepřipouštějící jednoznačné určení posuvů. Tak je tomu třeba u matice $[K]$ v rovnici (8.10). Stačí však jeden z posuvů předepsat a situace se ihned změní. Zvolíme např. $u_3 = 0$. Soustava (8.10) pro dvě pružiny podle obr. 11b pak dává

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a+k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3=0 \end{Bmatrix} \quad (8.15)$$

Nyní X_1 , X_2 jsou vnější síly, X_3 je reakce. Rovnici (8.15) lze rozepsat

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a+k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8.16)$$

$$\{X_3\} = \begin{bmatrix} 0 & -k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8.17)$$

Matice v (8.16) již není singulární (přísluší soustavě upevněné v klou-
bu 3 a nikoli volné soustavě, pohyb není již bez deformací pružin možný),
takže lze najít její inverzi, a tím i řešení

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b} & \frac{1}{k_b} \\ \frac{1}{k_b} & \frac{1}{k_b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (8.18)$$

Dosazením do (8.17) najdeme reakci

$$\{X_3\} = [0 \quad -k_b] \begin{bmatrix} \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b} & \frac{1}{k_b} \\ \frac{1}{k_b} & \frac{1}{k_b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (8.19)$$

Po vynásobení odtud plyne

$$X_3 = -X_1 - X_2. \quad (8.20)$$

Nyní ještě určíme síly v jednotlivých pružinách. Zřejmě je

$$P_a = k_a (u_2 - u_1) = -X_1, \quad (8.21)$$

$$P_b = k_b (u_3 - u_2) = -k_b u_2 = -X_1 - X_2.$$

Výpočtový postup, který jsme použili, má obecně tuto strukturu:

$$\begin{Bmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{Bmatrix}. \quad (8.22)$$

Submatice mají tento význam:

X_α - dané síly,

X_β - neznámé reakce,

u_α - neznámé posuvy,

u_β - předepsané posuvy (okrajové podmínky).

Rozepsáním plyne z (8.22)

$$X_\alpha = K_{\alpha\alpha} u_\alpha + K_{\alpha\beta} u_\beta, \quad (8.23)$$

$$X_\beta = K_{\beta\alpha} u_\alpha + K_{\beta\beta} u_\beta.$$

Z první rovnice

$$u_\alpha = K_{\alpha\alpha}^{-1} (X_\alpha - K_{\alpha\beta} u_\beta) \quad (8.24)$$

a z druhé

$$X_B = K_{B\alpha} K_{\alpha\alpha}^{-1} X_\alpha - (K_{B\alpha} K_{\alpha\alpha}^{-1} K_{\alpha\beta} - K_{B\beta}) u_B. \quad (8.25)$$

Je-li ve zvláštním případě $u_B = 0$, vyjde */

$$u_\alpha = K_{\alpha\alpha}^{-1} X_\alpha, \quad (8.24 \text{ a})$$

$$X_\beta = K_{B\alpha} K_{\alpha\alpha}^{-1} X_\alpha. \quad (8.25 \text{ a})$$

Chceme-li dostat soustavu (8.22), musíme někdy prvky přeskupit. Kdybychom např. chtěli řešit rovnici (8.14) s podmínkou $u_3 = 0$, museli bychom pořadí prvků 1 2 3 4 změnit na 1 2 4 3:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_4 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_4 & u_3 \\ k_a & -k_a & 0 & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & 0 & -k_b \\ 0 & 0 & k_c & -k_c \\ \hline 0 & -k_b & -k_c & k_b + k_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (8.26)$$

Pořadí prvků se sice změnilo, avšak k síle X_i a k posuvu u_j patří též prvek k_{ij} jako prve. Např. k síle X_4 a k posuvu u_3 patří prvek $k_{43} = -k_c$, a to stejně v rovnici (8.14) jako v rovnici (8.26). **/ Vlastnosti celkové matice tuhosti $[K]$ se přeskupením prvků nezměnily. Rovnice (8.26) však již odpovídá svou strukturou rovnici (8.22). Rovnice (8.22) až (8.25) popisují postup výpočtů posuvů a reakcí. Právě tak lze schematicky naznačit postup výpočtu vnitřních sil (v obecnějším případě to mohou být i napětí). K posuvům, které jsme vypočetli podle (8.24), určíme nyní vnitřní síly vnášené v uzlech do jednotlivých prvků a označíme je $\{X^e\}$ (index vpravo nahoře e = element, prvek). Dostaneme

$$\{X^e\} = [K^e] \{u\}, \quad (8.27)$$

kde $[K^e]$ značí matici tuhosti jednoho prvku a $\{u\}$ vektor skutečných posuvů. Matice $[K^e]$ jsou např. jednotlivé matice (8.12). Místo nich však můžeme uvažovat příslušné submatice typu (8.4), ponecháme-li ve vektoru $\{u\}$ jen ty prvky, které znamenají posuvy kloubů příslušného prvku (pružiny). Jsou-li např. u pružiny α klouby i a j , platí podle (8.27)

*/ To jsou právě rovnice (8.18) a (8.19).

**/ V rovnici (8.26) není však číslování sloupců a řádků postupné (např. třetí řádek má číslo 4).

$$\begin{Bmatrix} X_i^e \\ X_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\alpha & -k_\alpha \\ -k_\alpha & k_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (8.28)$$

odkud

$$\begin{aligned} \{X_i^e\} &= [k_\alpha \quad -k_\alpha] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = -\{X_j^e\}, \\ \{P_\alpha\} &= \{X_j^e\} = [-k_\alpha \quad k_\alpha] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Rovnici (8.29) zkráceně zapíšeme takto:

$$\{P_\alpha\} = [S_\alpha] \{u^\alpha\} \quad (8.30)$$

Zde $[S_\alpha] = [k_\alpha \quad k_\alpha]$ značí matici, která u prvku α transformuje vektor posuvů na vektor vnitřních sil. Protože se obecněji počítají přímo napětí uvnitř prvků, nazývá se $[S_\alpha]$ "napěťovou maticí" (stress matrix).

Pro případ dvou pružin spojených sériově můžeme tedy obě rovnice (8.21) napsat najednou ve tvaru

$$\{P_\alpha\} = [-k_\alpha \quad k_\alpha] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (8.31)$$

kde $\alpha = a, b$

$$i = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = a, \\ 2 & \text{pro } \alpha = b, \end{cases}$$

$$j = i + 1.$$

Úloha 24. Soustavu tří pružin na obr. 13 upevníme v kloubech 1 a 4. Dané síly působí v kloubech 2 a 3. Určete posuvy, reakce a vnitřní síly v pružinách.

Úloha 25. U soustavy tří pružin na obr. 14a upevníme uzly 1 a 4. Kloubu 2 udělíme jednotkový posuv $u_2 = 1$. Určete posuv u_3 , sílu X_2 a neznámé reakce.

Úloha 26. Pružiny z úlohy 25 budou navíc zatíženy vnější silou X_3 . Jak se řešení změní?

Úloha 27. ^{x)} Dokažte, že u soustavy tří pružin podle obr. 13 lze činitele k_{ij} odvodit derivováním potenciální energie napjatosti U podle vztahu

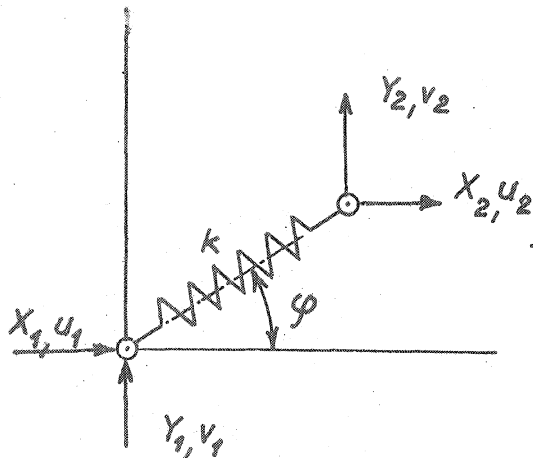
$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j}.$$

x) Je-li energie napjatosti vyjádřena pomocí deformačních veličin, nazývá se obvykle deformační energie. U lineárně elastických těles se obě energie sobě rovnají.

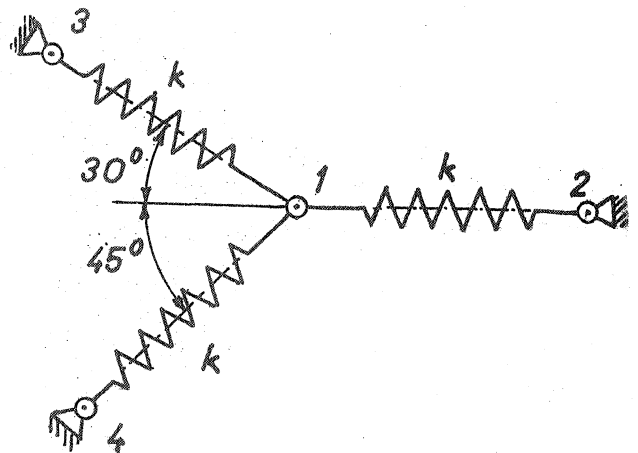
Úloha 28. Odvoďte matici tuhosti pro pružinu v rovině podle obr. 14a.

(Bude ovšem čtvrtého řádu).

Úloha 29. Sestavte matici tuhosti pro soustavu tří pružin podle obr. 14b. Dokažte, že submatici $K_{\alpha\alpha}$ dostaneme z celkové matice tuhosti K škrtnutím sloupců a řádků, pro něž jsou přiřazené posuvy nulové.



Obr. 14a



Obr. 14b

9. ŘEŠENÍ ROVINNÝCH PRUTOVÝCH SOUSTAV. ZÁKLADNÍ ÚVAHY

Místo pružin budeme nyní uvažovat pruty o tuhosti

$$k = \frac{ES}{l} \quad (9.1)$$

kde E značí Youngův modul pružnosti,
 S průřez prutu,
 l délku prutu.

Kdyby prut ležel v ose X a byl v této ose také zatížen, platil by (v mezích lineární teorie pružnosti) vztah (8.1) a (8.4). Avšak obecně tomu tak není, prut je umístěn v rovině X, Y nějak šikmo, takže jeho matice tuhosti K bude čtvrtého a nikoli druhého řádu. V úloze 28 jsme se již zabývali elementárním odvozením takové matice a v úloze 29 jsme dokonce tuto větší matici využili k řešení úlohy. Takový postup je však zdoluhavý a pro praxi nevhodný. Chtěli bychom, aby bylo možno ze znalosti elementární matice (8.4) ve výhodné lokální souřadnicové soustavě (v které osa X spadá do osy prutu) nějakým algoritmem odvodit víceméně "mechanicky" matici v obecné souřadnicové soustavě, v níž si znázorníme všechny pruty soustavy. Budeme tedy rozlišovat lokální souřadnicový systém \bar{x}, \bar{y} , zavedený zvlášť

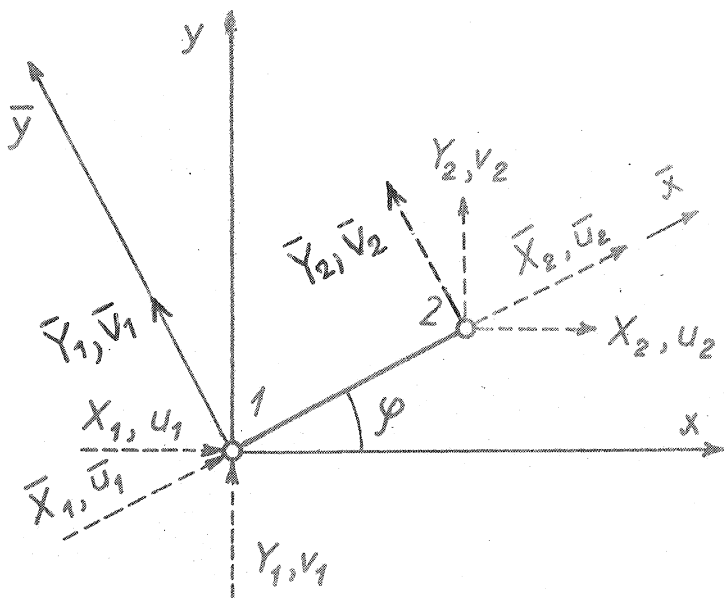
pro každý prut, a globální souřadný systém X, Y , platný pro celou soustavu. Transformaci mezi oběma systémy vyjádříme v maticovém tvaru, vhodném pro pozdější programování výpočtu.

Pro pružný prut podle obr. 15 v lokálních souřadnicích \bar{X}, \bar{Y} platí známé rovnice

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}, \quad (9.2)$$

kde k je dáno vztahem (9.1). Ve skutečnosti by měla být matice tuhosti čtvrtého řádu a vektory by měly obsahovat též prvky $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2$, jež jsou však nulové (proto jsme je zatím nepsali). Mělo by tedy v úplnosti být

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}. \quad (9.3)$$



Obr. 15

Tato rovnice, jež má opět tvar $X = k u$, je obsahově zcela totožná s rovnicí (9.2). Formálně je však přizpůsobena tvaru, jaký bude odpovídat obecné poloze prutu v globální soustavě souřadnic. Na obr. 15 jsou složky sil v lokální souřadné soustavě označeny pruhem, v globální soustavě bez pruhu. Mezi oběma soustavami platí podmínky statické ekvivalence, takže např. pro kloub 2 můžeme psát

$$\begin{aligned} \bar{X}_2 &= X_2 \cos \varphi + Y_2 \sin \varphi, \\ \bar{Y}_2 &= -X_2 \sin \varphi + Y_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Obdobné dvě rovnice platí i pro kloub 1. Pro zkrácení zápisu označme

$$\lambda \equiv \cos \varphi, \quad \mu \equiv \sin \varphi \quad (9.5)$$

Podmínky statické ekvivalence lze pak napsat jako transformaci vektoru $\{X\}$ na vektor $\{\bar{X}\}$

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} \quad (9.6)$$

čili zkráceně

$$\{\bar{X}\} = [T]\{X\} \quad (9.7)$$

Matici $[T]$ nazveme transformační maticí. V daném případě je to čtvercová matice v rovnici (9.6). Z rovnice (9.7) plyne naopak

$$\{X\} = [T]^{-1}\{\bar{X}\} \quad (9.8)$$

Pro transformační matici je typické, že

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (9.9)$$

Tato vlastnost velmi usnadňuje výpočty. ^{*}/ Rovnici (9.8) pak můžeme přepsat do tvaru

$$\{X\} = [T]^T\{\bar{X}\} \quad (9.10)$$

Vztah (9.9), a tedy ani (9.10), neplatí jen ve výjimečných případech (při neortogonálních transformacích). Posuvy se transformují stejně jako síly (jsou to rovněž vektory). Proto

$$\bar{u} = T u, \quad u = T^T \bar{u} \quad (9.11)$$

V maticových rovnicích (9.11) jsme vynechali závorky. Ty můžeme vynechat, nevzniká-li nebezpečí omylu.

Jak se nyní bude transformovat matice tuhosti \bar{K} do tvaru K ?
Napišeme definující rovnici v lokálních souřadnicích

$$\bar{X} = \bar{K} \bar{u} \quad (9.12)$$

^{*}/ O platnosti (9.9) se lze přesvědčit součinem $[T]^T [T]$. Vyjde vskutku jednotková matice $[I]$. Vztah platí pro ortogonální transformace (při nichž se zachovává pravý úhel a nemění se velikost vektorů).

a dosadíme do ní z rovnic (9.7) a (9.11). Nejprve vyjde

$$T X = \bar{K} T u$$

a pak - vynásobením maticí T^T zleva -

$$X = T^T \bar{K} T u. \quad (9.13)$$

Porovnáním se vztahem $X = K u$ získáme vzorec

$$K = T^T \bar{K} T. \quad (9.14)$$

Dosadíme-li na pravou stranu poslední rovnice matici

$$\bar{K} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

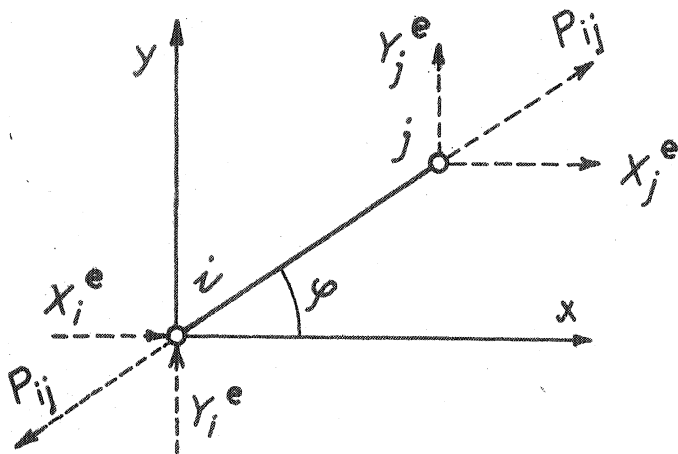
a matici T podle (9.6), vyjde

$$K = k \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

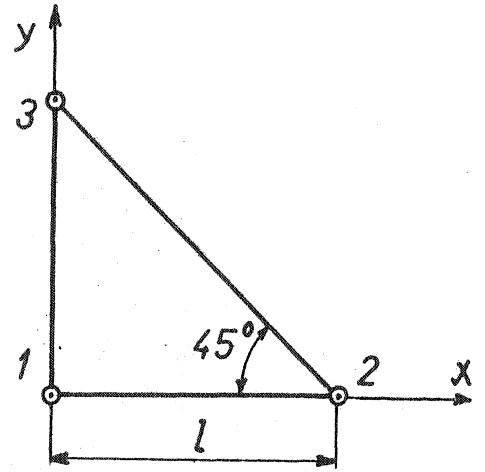
Tuto matici již známe z úlohy 28. U prutů ji lze odvodit snadno přímo. U složitějších prvků se však rozhodně vyplatí napsat matici tuhosti \bar{K} nejprve v lokálních souřadnicích a pak ponechat počítači, aby spočítal součin (9.14) a sestavil tak pro další výpočet matici $[K]$ v globálních souřadnicích. Chceme-li, můžeme tyto matice tuhosti, psané pro jednotlivé elementy konstrukce (v našem případě pro jednotlivé pruty), označit $[K^e]$ na rozdíl od celkové matice tuhosti $[K]$ platné pro celou soustavu (v našem případě pro celou prutovou soustavu). Celková matice tuhosti vzniká složením z elementárních matic tuhosti a je, jak jsme již uvedli, singulární. Předepsáním okrajových podmínek (tj. volbou uložení soustavy, jež může, ale nemusí být staticky určité) získáme nesingulární zmenšenou matici $[K_{\alpha\alpha}]$ a z rovnice (8.24) všechny neznámé posuvy.

Pokud bychom chtěli znát i vnitřní síly v prutech, napsali bychom pro určitý prut α v globálních souřadnicích (obr. 16)

$$\{X_{\alpha}^e\} = [K_{\alpha}^e] \{u^e\}. \quad (9.17)$$



Obr. 16



Obr. 17

Indexem e vpravo nahoře vyznačujeme, že do rovnice vstupují jen veličiny příslušné zkoumanému prvku (elementu) konstrukce. Matice $[K_\alpha^e]$ je dána rovnicí (9.16). Pro síly vnášené do prutu α v kloubu j dostaneme z rovnice (9.17) (pro $k = k_\alpha$)

$$\begin{aligned} X_j^e &= k_\alpha [(u_j - u_i) \lambda_\alpha^2 + (v_j - v_i) \lambda_\alpha \mu_\alpha], \\ Y_j^e &= k_\alpha [(u_j - u_i) \lambda_\alpha \mu_\alpha + (v_j - v_i) \mu_\alpha^2]. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Pro sílu P_α v prutu spojujícím klouby i, j pak z podmínky statické ekvivalence plyne

$$P_\alpha = X_j^e \lambda_\alpha + Y_j^e \mu_\alpha \quad (9.19)$$

a dosazením z (9.18)

$$\{P_\alpha\} = k_\alpha [\lambda_\alpha \mu_\alpha] \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \quad (9.20)$$

Platí ovšem, že $\lambda_\alpha^2 + \mu_\alpha^2 = 1$, jak plyne z definice (9.5). Matice

$$[S_\alpha] = k_\alpha [\lambda_\alpha \mu_\alpha] \quad (9.21)$$

je tedy napěťovou maticí - srovnej se vztahem (8.30).

Jako příklad uvedeme výpočet soustavy tří prutů podle obr. 17. Pruty nechtě mají stejný průřez a stejný modul pružnosti. Tuhost prutu 2 - 3 však bude jiná než u prutů 1 - 2, a 3 - 1. To souvisí s odlišnou délkou. Označíme-li $k = ES/l$, bude ^{*}

$$k_{1-2} = k, \quad k_{2-3} = k/\sqrt{2}, \quad k_{3-1} = k. \quad (9.22)$$

^{*} Index α nyní nahrazujeme přímým označením prutů čísel uzlů $i - j$

Úhly jednotlivých prutů a příslušné hodnoty kosinů λ , sinů μ a odpovídající kvadráty těchto hodnot jsou spolu s tuhostmi (9.22) uvedeny v tabulce:

Prut	Tuhost	Úhel φ	λ	μ	λ^2	μ^2	$\lambda\mu$
1-2	k	0°	1	0	1	0	0
2-3	$\frac{k}{\sqrt{2}}$	135°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
3-1	k	-90°	0	-1	0	1	0

Prutová soustava má šest složek posuvů kloubů 1, 2, 3. Výsledná matice tuhosti $[K]$ bude proto řádu 6×6 . Pro jednotlivé prvky budeme mít tyto matice:

$$K_{1-2} = \begin{matrix} & u_1 & u_2 \\ X_1 & \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9.23)$$

$$K_{2-3} = \begin{matrix} & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ X_2 & \begin{bmatrix} \frac{k\sqrt{2}}{4} & -\frac{k\sqrt{2}}{4} & -\frac{k\sqrt{2}}{4} & \frac{k\sqrt{2}}{4} \\ \frac{k\sqrt{2}}{4} & \frac{k\sqrt{2}}{4} & \frac{k\sqrt{2}}{4} & -\frac{k\sqrt{2}}{4} \\ \frac{k\sqrt{2}}{4} & \frac{k\sqrt{2}}{4} & \frac{k\sqrt{2}}{4} & -\frac{k\sqrt{2}}{4} \\ \frac{k\sqrt{2}}{4} & -\frac{k\sqrt{2}}{4} & -\frac{k\sqrt{2}}{4} & \frac{k\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \\ Y_2 & & & & \\ X_3 & & & & \\ Y_3 & & & & \end{matrix} \quad (9.24)$$

$$K_{3-1} = \begin{matrix} & v_3 & v_1 \\ Y_3 & \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \\ Y_1 & \end{matrix} \quad (9.25)$$

Tyto matice nyní sestavíme do výsledné matice tuhosti K , přičemž sečteme prvky přiřazené stejné síle a stejnému posuvu. Např. síle Y_3 a posuvu v_3 odpovídá z matice (9.23) nula (matice tyto prvky neobsahuje), z matice (9.24) $\frac{k\sqrt{2}}{4}$ a z matice (9.25) k . Celkem tedy bude činit součet těchto hodnot $\frac{k}{4}(4+\sqrt{2})$. Tento součet pak napíšeme do sloupce označeného v celkové matici tuhosti K posuvem v_3 a do řádku označeného silou Y_3 (tedy do šestého sloupce a do šestého řádku). Obdobně postupujeme u ostatních prvků.

Mohli bychom postupovat také tak, že bychom matice (9.23) až (9.25) nejprve doplnili nulovými prvky na řád 6 x 6 a pak jednoduše sečetli. Pro matici K_{1-2} bychom např. dostali

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ k & 0 & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.23 \text{ a})$$

Celková matice by tak vznikla jako prostý součet tří dílčích matic příslušných jednotlivým prutům, $K = K_{1-2} + K_{2-3} + K_{3-1}$.

Výsledná matice je

$$K = \begin{matrix} & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 4+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4+\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \frac{k}{4} \quad (9.26)$$

Tato matice je singulární. Nyní předepíšeme okrajové podmínky. Je-li např. kloub 1 a 3 nepohyblivý, bude $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $u_3 = 0$, $v_3 = 0$. (Jedna z těchto podmínek je "přebytečná", ke staticky určitému uložení by stačilo anulovat tři posuvy, např. u_1, v_1, u_3 . Použitá metoda se však nemění, ani když uložení je staticky neurčité). Matici (9.26) přeskupíme tak, aby ji bylo možno rozdělit na submatice podle (8.22).

Dostaneme

$$\left\{ \begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \\ Y_3 \end{matrix} \right\} = \frac{k}{4} \left[\begin{array}{cc|cccc} 4+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \hline -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -4 & -\sqrt{2} & 4+\sqrt{2} \end{array} \right] \left\{ \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{matrix} \right\} \quad (9.27)$$

Je zřejmé, že prvky přiřazené k určitému posuvu a určité síle jsou v obou maticích (9.26) i (9.27) stejné. Přeskupením se tedy nezměnila soustava rovnic, vyjádřená maticovým zápisem, jen se změnilo pořadí "neznámých".

I přeskupená matice (9.27) tedy musí mít kladné prvky na hlavní diagonále, musí mít nulové součty sloupců i řádek a musí být souměrná.

Z rovnice (9.27)

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (9.28)$$

Poznámka: Čtvercovou matici $K_{\alpha\alpha}$ na pravé straně poslední rovnice bychom mohli dostat též přímo (bez přeskupování) vynecháním všech řádků a sloupců z matice (9.26) s výjimkou třetího a čtvrtého, neboť jediné posuvy u_2 a v_2 jsou od nuly různé.

Pomocí inverzní matice $K_{\alpha\alpha}^{-1}$ vyjde z rovnice (9.28)

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} \quad (9.29)$$

Síly X_2, Y_2 jsou složky vnějšího zatížení kloubu 2. Pro reakce pak z (9.27) dostaneme

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -X_2 & -Y_2 \\ 0 \\ Y_2 \\ -Y_2 \end{Bmatrix} \quad (9.30) \end{aligned}$$

Vnitřní síly v prutech vypočteme podle (9.20); pro prut 2 - 3 vyjde např.

$$\begin{aligned} \{P_{2-3}\} &= \frac{k}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{Bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \\ &= -\sqrt{2} \{Y_2\} \quad (9.31) \end{aligned}$$

a tedy

$$P_{2-3} = -\sqrt{2} Y_2. \quad (9.31 a)$$

Tímto způsobem lze výpočty dělat do značné míry "mechanicky". Maticová algebra dává jednoduchý předpis pro výpočet, který je v podstatě stejný pro všechny prutové soustavy. Může se nám ovšem zdát, že ve srovnání s klasickými metodami popíšeme příliš mnoho papíru a že přitom počítáme i mnoho neznámých veličin, na nichž nemáme buď vůbec žádný nebo jen druhořadý zájem (posuvy všech kloubů). Nesmíme však zapomínat, že tyto metody nejsou určeny pro ruční počítání (ač i přitom jistě oceníme jejich velkou obecnost a přehlednost i snadnou možnost kontroly). Číslicový počítač nakonec převezme úlohu sestavit matice (ovšem podle vložených dat) a udělat početní operace.

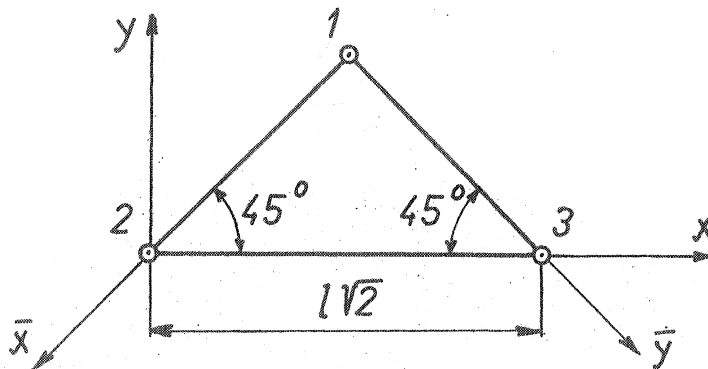
Úloha 30. Řešte prutovou soustavu podle obr. 17 za předpokladu, že kloub 1 je uložen nepohyblivě, zatímco kloubu 3 je znemožněn pouze vodorovný posuv. Kloub 2 je zatížen svislou silou F směřující dolů (proti smyslu osy y).

10. TRANSFORMACE CELKOVÉ MATICE TUHOSTI

U velkých konstrukcí se stává, že se určitá seskupení prvků (prutů) na různých místech opakují, zaujímají však jinou polohu ke globální soustavě souřadnic. V takovém případě lze pro toto seskupení sestavit dílčí souhrnnou matici tuhosti K , a pro stejná seskupení v jiných polohách získat příslušné matice pouhou transformací, tedy bez toho, že bychom matice vždy znovu sestavovali. Použili jsme označení "souhrnná matice", neboť název "celková matice" tuhosti ponecháváme matici platné skutečně pro celou konstrukci. A tak, jako z jednotlivých elementárních matic skládáme matice pro jednotlivá seskupení těchto elementů, sestavíme ze souhrnných matic pro tato seskupení, popř. z dalších elementárních matic výslednou celkovou matici tuhosti. Ta pak platí pro celou konstrukci, popsanou ve společné globální soustavě souřadnic.

Uvedeme nyní příklad transformace matice $[K]$ pro tříprutovou soustavu na obr. 17, kterou otočíme vzhledem k souřadnicím x, y do polohy vyznačené na obr. 18. Proti poloze na obr. 17 je soustava nyní otočena proti hodinovému ručičkám o úhel 135° . Jaký tomu odpovídá úhel ψ podle obr. 15? Je to úhel mezi osami x a \bar{x} , tedy

$$\psi = 225^\circ. \text{ Potom } \lambda = \cos 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu = \sin 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



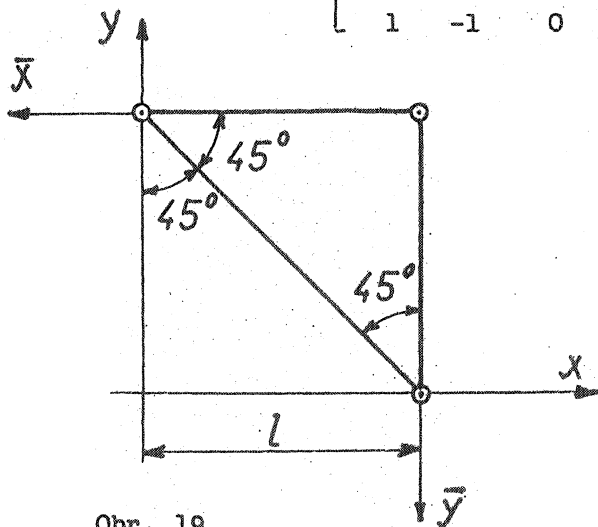
Obr. 18

Transformační matice $[T]$ musí být šestého řádu , neboť její řád musí souhlasit s řádem matice tuhosti $[K]$. V souladu s rovnicí (9.6) nyní dostaneme

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

Nuly v poslední matici značí nulové submatice druhého řádu . Matici (9.26) označíme \bar{K} , neboť se vztahuje k lokálním souřadnicím \bar{x} , \bar{y} . Transformací (9.14) s použitím (9.26) a (10.1) dostaneme

$$[K] = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$



Obr. 19

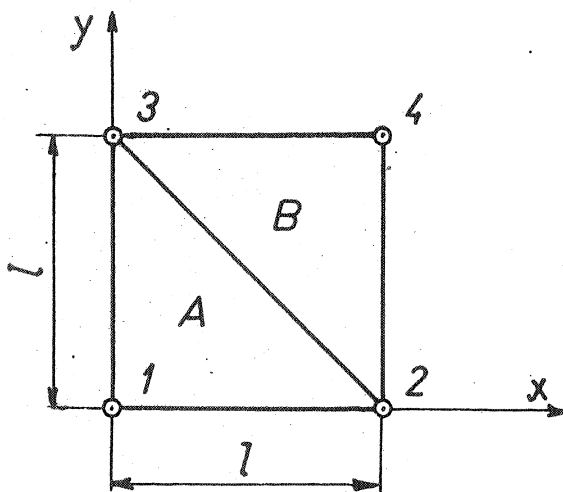
Úloha 31. Odvoďte matici (10.2) přímo v souřadnicích x , y .

Úloha 32. Odvoďte matici K pro tříprutovou soustavu podle obr. 19 ze známé matice \bar{K} (9.26).

11. SKLÁDÁNÍ SUBSTRUKTUR

Jak jsme již uvedli v minulé kapitole, bývá někdy výhodné rozdělit celou konstrukci (prutovou soustavu) na substrukturní seskupení prvků, z nichž se pak složí výsledná konstrukce. Způsob, jak se skládají matice tuhosti těchto substruktur, tj. dílčích konstrukcí, ukážeme na příkladu. Budeme sestavovat matici tuhosti pro pětiprutovou soustavu na obr. 20.

Protože již známe matice pro tříprutové soustavy A (obr. 17) a B (obr. 19), můžeme z nich výslednou matici rovnou složit. Jediné, čeho je zatím třeba, je změnit číslování kloubů. Zatímco u substrukтуры A se označení shoduje s maticí (9.26), je třeba pro substrukтуру B nahradit označení sloupců $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ označením $u_4, v_4, u_3, v_3, u_2, v_2$. Poté se obě matice superponují způsobem popsáním v kap. 9. Dostaneme



Obr. 20

$$[K_I] = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -2 \\ 0 & -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

Matice (11.1) však odpovídá případu, kdy na diagonále 2 - 3 konstrukce na obr. 20 jsou dva pruty místo jednoho (což je totéž jako jeden prut s dvojnásobným průřezem). Musíme proto udělat korekci odečtením matice příslušné jednomu prutu 2 - 3

$$[K_{2-3}] = \frac{k}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

Matici (11.2) jsme dostali ze základní matice \overline{K}_{2-3} podle (9.14) pomocí transformační matice T řádu 4×4 - viz např. (9.6) - pro $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Výsledek odpovídá rovnici (9.16), dosadíme-li $k/\sqrt{2}$ místo k (neboť délka prutu 2 - 3 je $l\sqrt{2}$). Konečně tedy dostaneme ^{x/}

$$[K] = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 4+\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4+\sqrt{2} & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

Princip superpozice matic tuhosti lze využít i k opravě celkové matice tuhosti při konstrukčních změnách. To je velmi důležité, neboť často se ukáže teprve na základě výpočtu, že některá část konstrukce je chybně dimenzována. Není tedy třeba při malé konstrukční změně přepočítávat celou matici. Je možné ji pouze opravit. Na některém z příštích seminářů ukážeme ještě jiný postup, vhodnější pro velké konstrukce.

Při dodatečných konstrukčních úpravách se však může snadno stát, že omylem uvolníme více vzájemných vazeb mezi jednotlivými prvky konstrukce, než je z hlediska statické určitosti přípustné, nebo že přehlédneme, že některé prvky jsou ve výjimečné poloze (tedy že jde z hlediska statiky o výjimečný případ). Matice tuhosti má však jednu důležitou vlastnost: stará se o tyto otázky za nás. Jakmile předepíšeme pro konstrukci okrajové podmínky, musí vzniknout z matice K nesingulární matice $K_{\alpha\alpha}$. Je-li však $K_{\alpha\alpha}$ také singulární, nelze udělat její inverzi a výpočet nemůže pokračovat. Tato skutečnost tedy ihned signalizuje, že něco není v pořádku. Ukážeme to nyní na jednom příkladu.

Představme si, že bychom omylem odečetli dvojnásobek matice K_{2-3} (11.2) (tedy oba prvky 2 - 3). Prut 2 - 3 by tedy z konstrukce zcela "vypadl". Matice by nyní měla tvar ^{**/}

^{x/} Je to výsledek operace $K = K_I - K_{2-3}$

^{**/} Odpovídá vztahu $K_{II} = K - K_{2-3} = K_I - 2K_{2-3}$

$$[K_{\mathbb{I}}] = k \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

Jsou-li klouby 1 a 2 upevněny nepohyblivě, je $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $u_2 = 0$, $v_2 = 0$. Vynecháním prvních čtyř sloupců a řádků (neboť ty přísluší nulovým posuvům) vznikne zmenšená matice tuhosti

$$K_{\alpha\alpha} = k \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

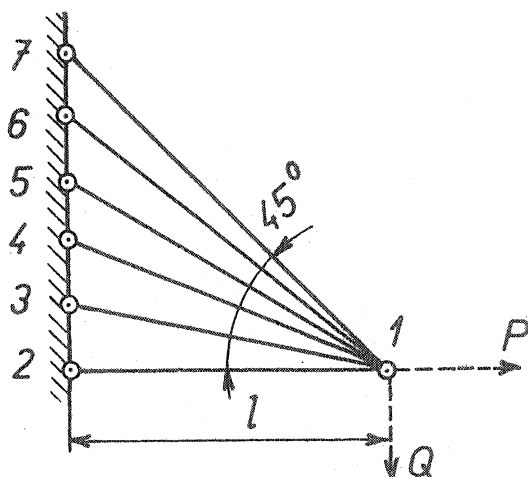
Lze se snadno přesvědčit, že determinant $|K_{\alpha\alpha}| = 0$, tj. že inverzní matice $K_{\alpha\alpha}^{-1}$ neexistuje. Tím jsme upozorněni na to, že naším zásahem (odečtením prutu 2 - 3) se konstrukce stala tvarově neurčitou; skutečně se stala pohyblivým čtyřkloubovým mechanismem.

Velkou konstrukci je někdy nutno rozdělit na substrukтуры i z toho důvodu, že celkovou maticí tuhosti nelze na počítači invertovat pro nedostatek místa v paměti. Rozdělíme-li vhodně konstrukci, vystačíme s inverzemi matic menších řádů. Touto otázkou se detailně budeme zabývat rovněž na některém z příštích seminářů.

Úloha 33. K soustavě na obr. 20, pro níž platí matice (11.3), přidejte prut 1 - 4 téhož průřezu a modulu pružnosti. Jak se změní matice tuhosti?

Úloha 34. U prutové soustavy z úlohy 33 předpokládejte nepohyblivost kloubů 1 a 2. Kloub 3 není zatížen, zatímco kloub 4 je zatížen vodorovnou silou F . Určete posuvy a reakce.

Úloha 35. Vypočtete posuv společného kloubu a síly v prutech u prutové soustavy podle obr. 21. Průřez a modul pružnosti je u všech prutů týž, klouby 2 až 7 jsou ve stejných vzdálenostech.



Obr. 21

12. VLIV NEROVNOUOMĚRNÉHO ROZDĚLENÍ TEPLoty. PŘEDPJATÉ KONSTRUKCE

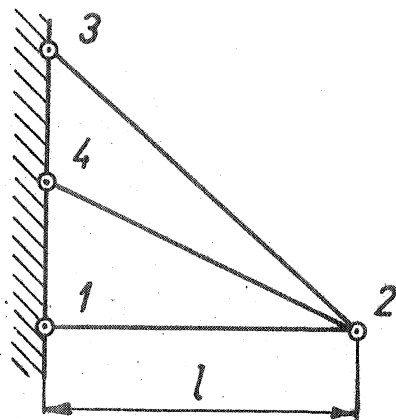
Budeme se nyní zabývat konstrukcemi s vlastním pnutím, tj. s pnutím, které v konstrukci existuje bez působení vnějších sil. Může vzniknout při výrobě vlivem technologie nebo při montáži násilným spojováním členů konstrukce. Buď jde o členy vyrobené chybně s rozměrovými úchytkami, nebo jde o členy vyrobené s těmito úchytkami záměrně (za takové považujeme lisované spoje nebo spoje sestavené za tepla, u nichž se spojení dosahuje smrštěním po vyrovnání teplot). Konečně může vlastní pnutí vzniknout i nerovnoměrným rozdělením teploty. To však není ještě postačující podmínkou; jsou-li teplotní dilatace kompatibilní (tj. navzájem si "nepřekážejí"), teplotní pnutí nevzniká. V této kapitole se budeme zabývat vlastním pnutím v prutových soustavách, které vzniklo buď tím, že délky některých prutů byly vyrobeny buď větší nebo menší než odpovídá ideálním rozměrům, nebo tím, že se některé pruty ohřejí více nebo méně než pruty ostatní. Přitom budeme předpokládat, že teplota je vždy v celém prutu konstantní; není-li tomu tak, můžeme proměnnou teplotu v prutu nahradit konstantní střední hodnotou, které by ve volném prutu příslušela stejná teplotní dilatace. Omezíme se přitom jen na jednoduché případy konstrukcí, aby vynikl postup výpočtu. Osvojíme-li si její jednu, snadno zvládneme i složité případy, neboť základní myšlenka metody - a dokonce i maticová symbolika - zůstává stejná.

Postup výpočtu ukážeme na příkladu tříprutové soustavy (obr. 22). Předpokládejme, že konstrukce byla smontována bez vlastních pnutí za normální teploty. Potom však vzroste teplota prutu 1 - 2 o Δt °C. Jaké tím vznikne teplotní pnutí?

Rozpojením kloubu 2 uvolníme všechny pruty. Prut 1 - 2 se nyní prodlouží o $l\alpha\Delta t$, je-li α součinitel teplotní roztažnosti. Abychom obnovili souvislost konstrukce, vrátíme kloub 2 na jeho původní místo a pruty opět spojíme. K tomu však musíme použít "násilí", tj. musíme prut

1 - 2 stlačit silou $P_{1-2}^{(1)} = -ES\alpha\Delta t$.
 Stejný stav napjatosti by ovšem vznikl, kdybychom konstrukci nerozebírali, ale prostě kloub 2 podrželi na jeho původním místě. V prutech jsou tedy nyní - po dokončeném ohřevu - tyto síly:

$$\begin{aligned} P_{1-2}^{(1)} &= -ES\alpha\Delta t ; \\ P_{4-2}^{(1)} &= 0 ; \\ P_{3-2}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (12.1)$$



Obr. 22

Tento stav napjatosti však můžeme udržet jen působením vnější síly $X_2^{(1)} = P_{1-2}^{(1)}$. Stlačuje prut 1 - 2 a působí v kloubu 2. Posuvy jsou zatím nulové. Abychom získali výsledné deformace a prutí v nezátížené konstrukci, odečteme deformace a napjatost vzniklé účinkem vnějšího zatížení, tj. přičteme účinek opačného zatížení silou $X_2^{(2)} = -X_2^{(1)} = ES\alpha\Delta t$. Tím vzniknou síly v prutech

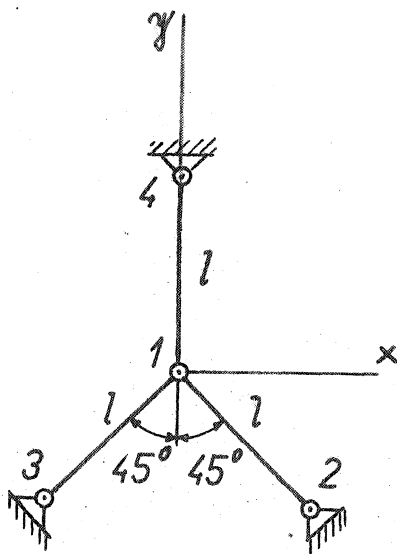
$$P_{1-2}^{(2)}, P_{4-2}^{(2)}, P_{3-2}^{(2)}$$

a jejich přičtením k silám (12.1) dostaneme výsledné síly v prutech v nezátížené konstrukci

$$\begin{aligned} P_{1-2} &= P_{1-2}^{(1)} + P_{1-2}^{(2)} , \\ P_{4-2} &= P_{4-2}^{(1)} + P_{4-2}^{(2)} , \\ P_{3-2} &= P_{3-2}^{(1)} + P_{3-2}^{(2)} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Kdybychom měli sice rovnoměrně rozdělenou teplotu, ale zato nepřesně vyrobené pruty (např. prut 1 - 2 by byl o Δl delší než kolik je správná míra), bylo by nutno připojit takové síly v prutech $P_{i-j}^{(1)}$, které by tyto výrobní nepřesnosti kompenzovaly (např. v prutu 1 - 2 bychom připojili sílu $P_{1-2}^{(1)} = -ES\Delta l/l$). Tyto síly by vznikly působením vnějších sil, jejichž účinek by pak bylo nutno nakonec odečíst.

Pro větší názornost uvedeme ještě jeden příklad, tentokrát s podrobným výpočtem. Předpokládejme, že se v konstrukci na obr. 23 ohřeje prut 1 - 2 o teplotu Δt °C, nebo že jeho délka bude o Δl větší než je ideální míra. Předpokládáme stejné délky, průřezy i moduly pružnosti u všech prutů. Pro síly v prutech příslušné stavu (1) najdeme, že



Obr. 23

$$P_{1-3}^{(1)} = 0, \quad P_{1-4}^{(1)} = 0, \quad (12.3)$$

$$P_{1-2}^{(1)} = -ES\alpha\Delta t, \text{ popř. } -ES\Delta l/l.$$

Tomu odpovídají vnější síly

$$X_1^{(1)} = ES\varepsilon_0/\sqrt{2} \quad (12.4)$$

$$Y_1^{(1)} = -ES\varepsilon_0/\sqrt{2}$$

kde $\varepsilon_0 = \alpha\Delta t$, popř. $\Delta l/l$.

Nyní přistoupíme k výpočtu sil v prutech příslušných stavu (2).

Nejprve sestavíme matici tuhosti. Pro jednotlivé pruty platí hodnoty uvedené v tabulce:

Prut	Úhel φ	λ	μ	λ^2	μ^2	$\lambda\mu$
1 - 2	-45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1 - 3	225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1 - 4	90°	0	1	0	1	0

Sestavíme rovnou matici $K_{\alpha\alpha}$ (obdobně jako v úloze 35); nakonec dostaneme

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}, \quad (12.5)$$

odkud

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \frac{l}{ES} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} \quad (12.6)$$

Nyní víme, že pro stav (2) platí

$$X_1 = X_1^{(2)} = -X_1^{(1)}, \quad Y_1 = Y_1^{(2)} = -Y_1^{(1)}. \quad (12.7)$$

Dosazením z (12.4) do (12.7) a pak do (12.6)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} &= \frac{l}{ES} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -ES \varepsilon_0 / \sqrt{2} \\ ES \varepsilon_0 / \sqrt{2} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -l \varepsilon_0 / \sqrt{2} \\ 0,5 l \varepsilon_0 / \sqrt{2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12.8)$$

Pro síly v prutech máme

$$\begin{aligned} P_{1-2}^{(2)} &= \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{3}{4} ES \varepsilon_0, \\ P_{1-3}^{(2)} &= \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{4} ES \varepsilon_0, \\ P_{1-4}^{(2)} &= \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 - u_1 \\ v_4 - v_1 \end{Bmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{4} ES \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Součtem (12.3) a (12.9) najdeme výsledné síly v prutech nezátížené konstrukce

$$\begin{aligned} P_{1-2} &= -ES \varepsilon_0 + \frac{3}{4} ES \varepsilon_0 = -\frac{1}{4} ES \varepsilon_0 \\ P_{1-3} &= -\frac{1}{4} ES \varepsilon_0, \\ P_{1-4} &= -\frac{\sqrt{2}}{4} ES \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Jak se změní řešení, budou-li zároveň působit vnější síly $\{X\}$? Podle principu superpozice bude nutno od vnějších sil $\{X\}$ odečíst síly $\{X^{(1)}\}$, takže bude platit

$$\{X\} - \{X^{(1)}\} = [K]\{u\}. \quad (12.11)$$

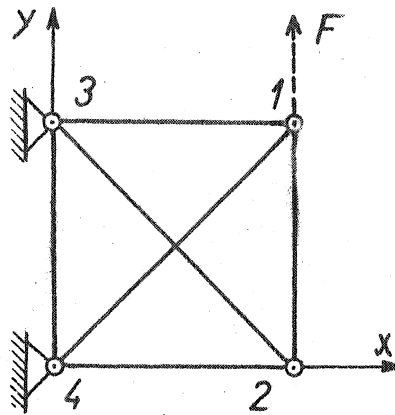
Častěji se tato rovnice píše v úpravě

$$\{X\} = [K]\{u\} + \{X^{(1)}\}. \quad (12.12)$$

Ihned je zřejmé, že poslední člen v rovnici (12.12) značí vnější síly působící v uzlech při nulových posuvech těchto uzlů; jsou to teplotní pnutí v nedeformované konstrukci. Rovnice (12.12) je tedy základním vztahem pro výpočet konstrukcí zatížených zároveň vnějšími silami i teplotním pnutím. Nevzniká-li teplotní pnutí, je poslední člen v této rovnici nulový a vztah (12.12) přejde do tvaru (8.6).

Úloha 36. Najděte výsledné posuvy uzlů konstrukce vyznačené na obr. 24, zatížená v kloubu 1 svislou silou F [N]. Pruty mají též modul pružnosti

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN m}^{-2}$, průřezy a délky jsou uvedeny v tabulce. Konstrukce byla v nezatíženém stavu a za rovnoměrné teploty bez napětí. Pak však byla zatížena silou F a zároveň teplota prutu 1 - 2 stoupla o Δt °C. Teplota ostatních částí konstrukce se nezměnila.



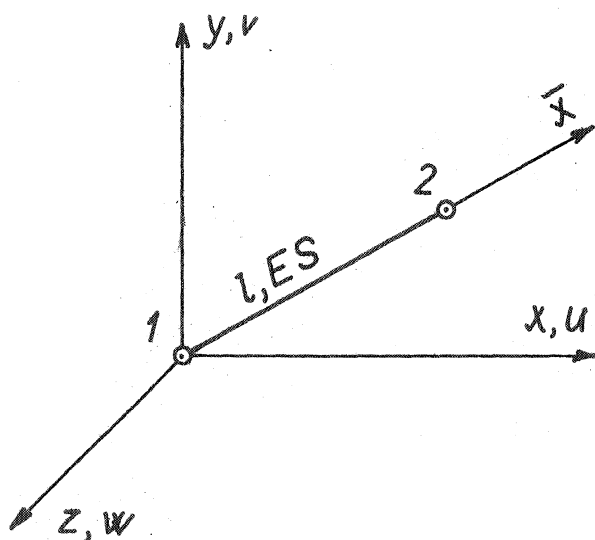
Obr. 24

Prut	Průřez	Délka	φ	λ	μ	λ^2	μ^2	$\lambda\mu$
	mm ²	mm						
3 - 1	200	200	0°	1	0	1	0	0
4 - 1	$100\sqrt{2}$	$200\sqrt{2}$	45°	$0,5\sqrt{2}$	$0,5\sqrt{2}$	0,5	0,5	0,5
1 - 2	200	200	-90°	0	-1	0	1	0
3 - 2	$100\sqrt{2}$	$200\sqrt{2}$	-45°	$0,5\sqrt{2}$	$-0,5\sqrt{2}$	0,5	0,5	-0,5
4 - 2	200	200	0°	1	0	1	0	0
3 - 4	200	200	-90°	0	-1	0	1	0

Poznámka: počítáme-li v soustavě SI, můžeme použít pro délky rozměr mm, pro průřezy mm² a pro síly N. Napětí pak vyjdou v MN m⁻². V této jednotce jsme také uvedli hodnotu modulu pružnosti v tahu či tlaku.

13. PROSTOROVÉ PRUTOVÉ SOUSTAVY

Až dosud jsme probírali rovinné prutové soustavy. Jediným důvodem k tomu byla větší přehlednost, kterou ocení zvláště začátečníci, a úspora místa. Avšak sama metoda ani její přepis do symbolů maticové algebry se nezmění, přejdeme-li nyní k prostorovým konstrukcím. Zvětší se pouze řád použitých matic. Pro prut 1 - 2 v kartézské soustavě souřadnic x, y, z (obr. 25) je matice tuhosti \underline{K} šestého řádu. K jejímu odvození použijeme lokální souřadnice $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ a transformační matici \underline{T} . Úhel mezi osami x a \bar{x} označíme $\varphi_{x\bar{x}}$, mezi osami x a \bar{y} pak $\varphi_{x\bar{y}}$ apod.



Obr. 25

Pro transformaci libovolného vektoru bude platit

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= X \cos \varphi_{x\bar{x}} + Y \cos \varphi_{y\bar{x}} + Z \cos \varphi_{z\bar{x}} , \\
 \bar{Y} &= X \cos \varphi_{x\bar{y}} + Y \cos \varphi_{y\bar{y}} + Z \cos \varphi_{z\bar{y}} , \\
 \bar{Z} &= X \cos \varphi_{x\bar{z}} + Y \cos \varphi_{y\bar{z}} + Z \cos \varphi_{z\bar{z}} .
 \end{aligned}
 \tag{13.1}$$

S označením směrových kosinů

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\bar{x}} &= \cos \varphi_{x\bar{x}} , \quad \lambda_{\bar{y}} = \cos \varphi_{y\bar{x}} , \quad \lambda_{\bar{z}} = \cos \varphi_{z\bar{x}} , \\
 \mu_{\bar{x}} &= \cos \varphi_{y\bar{x}} , \quad \mu_{\bar{y}} = \cos \varphi_{y\bar{y}} , \quad \mu_{\bar{z}} = \cos \varphi_{y\bar{z}} , \\
 \nu_{\bar{x}} &= \cos \varphi_{z\bar{x}} , \quad \nu_{\bar{y}} = \cos \varphi_{z\bar{y}} , \quad \nu_{\bar{z}} = \cos \varphi_{z\bar{z}} ,
 \end{aligned}
 \tag{13.2}$$

lze transformaci (13.1) zapsat jednodušeji

$$\begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} \\ \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} \\ \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}
 \tag{13.3}$$

Symboly λ , μ , ν tedy značí směrové kosiny některé osy souřadnic z lokální soustavy souřadnic (osy v této soustavě jsou označeny pruhem, v základní globální soustavě souřadnic bez pruhu). O jakou osu jde, to je zřejmé z indexu.

Jde-li o prut 1 - 2 , má vektor sil $\{X\}$ šest prvků (po třech složkách v každém uzlu). Pro ně pak platí

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{Z}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \\ \bar{Z}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} & & & \\ & \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} & & \\ & & \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} \\ & & & & \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} \\ & & & & & \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{Bmatrix} \quad (13.4)$$

Tuto rovnici lze zapsat zkráceně

$$\{\bar{X}\} = [\Gamma] \{X\} \quad (13.4 a)$$

kde

$$[\Gamma] = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & 0 \\ \hline 0 & \Lambda \end{array} \right] \quad (13.5)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} \\ \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} \\ \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (13.6)$$

Transformační matice (13.5) je šestého řádu, takže ji lze užít přímo též k transformaci matice \bar{K} . V lokálních souřadnicích

$$\bar{K} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{v}_1 & \bar{w}_1 & \bar{u}_2 & \bar{v}_2 & \bar{w}_2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13.7)$$

Po transformaci

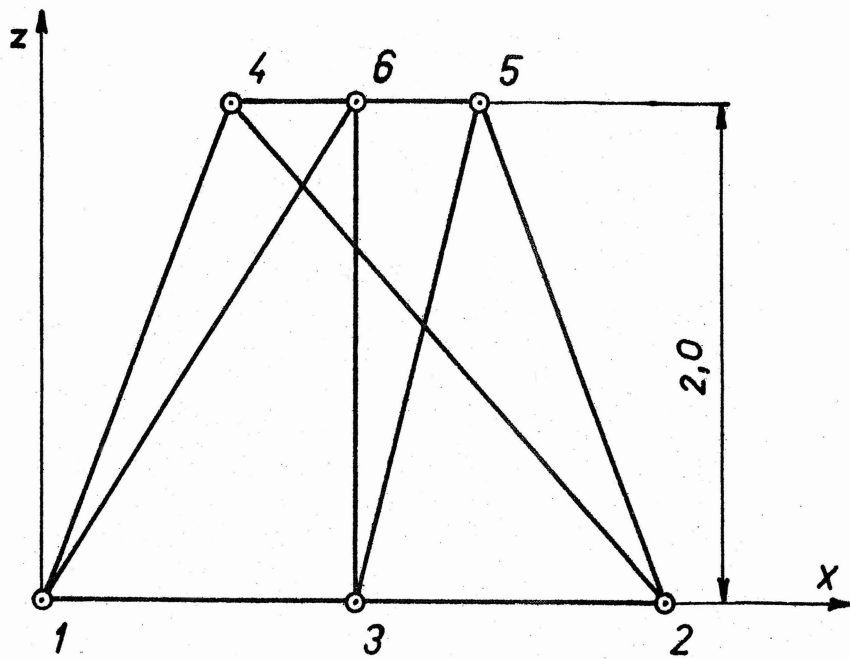
$$K = T^T \bar{K} T = \frac{ES}{\ell} \begin{array}{c|ccc|ccc} & u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 \\ \hline & \lambda_{\bar{x}}^2 & & & & & \\ & \lambda_{\bar{x}} \mu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}^2 & & & & \\ & \lambda_{\bar{x}} \nu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} \nu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}}^2 & & & \\ \hline & -\lambda_{\bar{x}}^2 & -\lambda_{\bar{x}} \mu_{\bar{x}} & -\lambda_{\bar{x}} \nu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}^2 & & \\ & -\lambda_{\bar{x}} \mu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}}^2 & -\mu_{\bar{x}} \nu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}} \mu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}^2 & \\ & -\lambda_{\bar{x}} \nu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}} \nu_{\bar{x}} & -\nu_{\bar{x}}^2 & \lambda_{\bar{x}} \nu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} \nu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}}^2 \end{array} \quad (13.8)$$

V matici (13.8) se vyskytují jen směrové kosiny osy \bar{X} (v soustavě X, Y, Z), takže indexy „ \bar{X} “ by bylo možno popřípadě vynechat. Pro stručnost a větší přehlednost nebyly tentokrát vypisovány všechny prvky matice; vzhledem k souměrnosti lze chybějící prvky snadno doplnit.

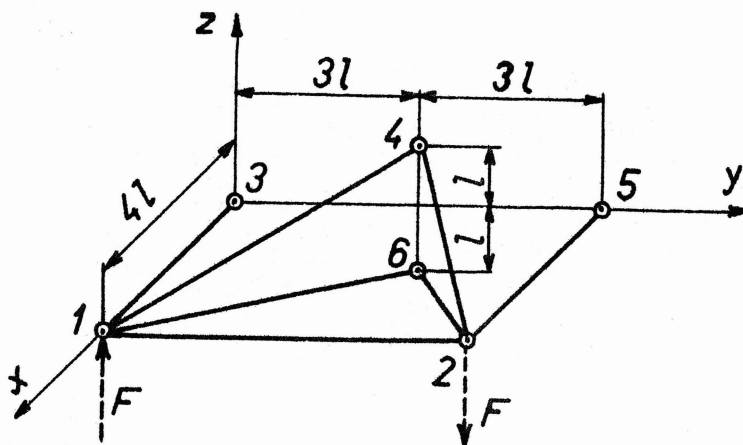
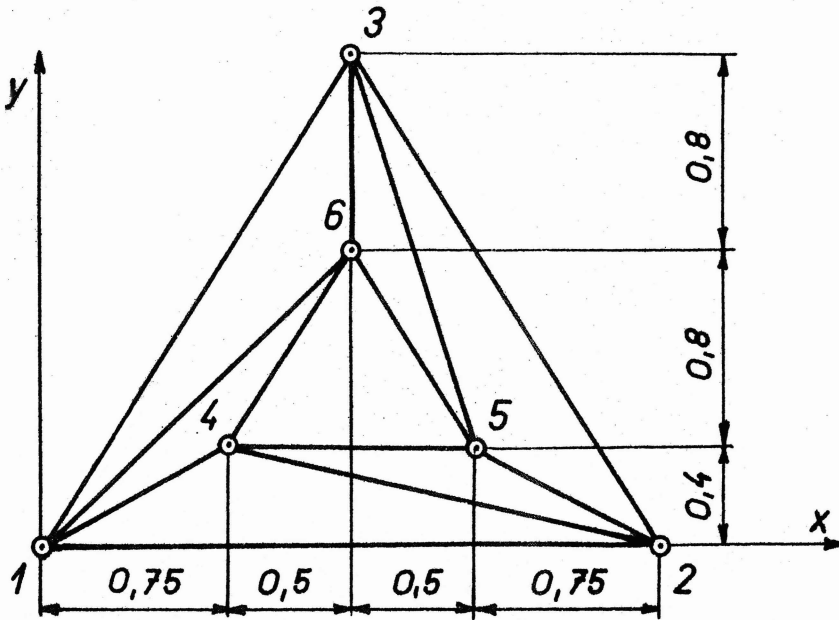
Příklad aplikace ani nebudeme uvádět, neboť postup je stejný jako u rovinných úloh. Uvedeme však některé úlohy k procvičení.

Úloha 37. Sestavte celkovou matici tuhosti pro tzv. Schwedlerovu kopuli (obr. 26). Míry na obrázku jsou udány v metrech. Průřezy a moduly pružnosti jsou u všech prutů stejné.

Úloha 38. Klouby 3, 4, 5 a 6 konstrukce na obr. 27 jsou pevně zakotveny v rovině Y, Z . Stanovte posuvy kloubů 1, 2 a síly v prutech. Všechny pruty mají týž průřez a týž modul pružnosti.



Obr. 26



Obr. 27

14. PRIZMATICKÝ PŘÍMÝ NOSNÍK

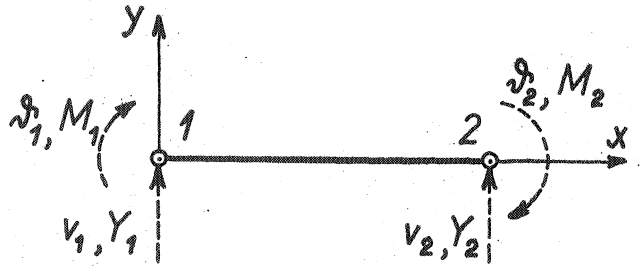
U svařovaných prutových a zejména u rámových konstrukcí již nevystačíme s představou, podle které se každým prvkem konstrukce - prutem - přenáší jen osová síla. Dříve vyložené metody zobecníme pro složitější případy prvků namáhaných nejen tahem či tlakem, ale i ohybem, krutem a smykem. Začneme však s jednoduchým případem nosníku namáhaného rovinným ohybem. Budeme předpokládat, že zatížení se do nosníku vnáší jen na jeho koncích. Je to obdobný předpoklad jako u prutů. Později však ukážeme, jak lze do výpočtu zahrnout i rovnoměrné příčné zatížení. Budou-li na nosník působit osamělé síly, zvolíme v jejich působištích

"uzlové body", tj. myšlené dělicí roviny, kterými nosník rozdělíme na části zatížené toliko na koncích. Schéma nosníku je na obr. 28.

Jako dříve, tak i nyní bude matice $[K]$ transformovat vektor posuvů $\{u\}$ na vektor vnějších sil $\{X\}$. Základní rovnice $\{X\} = [K]\{u\}$

bude mít - s přihlédnutím k obr. 28

- tvar



Obr. 28

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \end{Bmatrix} \quad (14.1)$$

Jednotlivé submatice $K_{11}, K_{12} = K_{21}^T$, K_{22} odvodíme nyní přímo. Nejprve zvolíme $v_2 = 0$, $v_2' = 0$. Z rovnice (14.1) vyjde

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \end{Bmatrix} \quad (14.2)$$

To znamená, že jsme nosník na pravém konci vetkli, zatímco na volném levém konci působí "síly" Y_1, M_1 . Podle elementární teorie pružnosti

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{Y_1 l^3}{3EJ} + \frac{M_1 l^2}{2EJ} \\ v_1' &= \frac{Y_1 l^2}{2EJ} + \frac{M_1 l}{EJ} \end{aligned} \quad (14.3)$$

Tyto rovnice řešíme podle Y_1, M_1 , a uvedeme na tvar (14.2).

Vyjde

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \end{Bmatrix} \quad (14.4)$$

Je tedy submatice tuhosti

$$K_{11} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (14.5)$$

Z rovnic rovnováhy

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 &= 0, \\ Y_1 l + M_1 + M_2 &= 0 \end{aligned} \quad (14.6)$$

vypočteme reakce. Vyjde

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -l & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (14.7)$$

Čtvercovou maticí v této rovnici jsme zkráceně označili A . Transformuje vektor vnějších sil na vektor reakcí. Za reakce považujeme síly působící na pravém konci nosníku, neboť tam jsme zvolili nulové posuvy. Nyní dosadíme (14.4) do (14.7). Vyjde

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [A][K_{11}] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 6l \\ -6l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} \quad (14.8)$$

Protože však ze vztahu (14.1) dostaneme - při $v_2 = 0$, $\vartheta_2 = 0$ -

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = [K_{21}] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix}, \quad (14.9)$$

plyne srovnáním (14.8) a (14.9) hodnota submatice

$$[K_{21}] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 6l \\ -6l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (14.10)$$

Nyní volíme $v_1 = 0$, $\vartheta_1 = 0$. Vetkneme tedy nosník na levém konci a pravý konec uvolníme. Výpočet je zcela obdobný, změní se jen některá znaménka. Vyjde

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix}, \quad (14.11)$$

a tedy

$$[K_{22}] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (14.12)$$

Celkem tedy dostaneme matici tuhosti pro nosník na obr. 28 v tomto tvaru:

$$[K] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (14.13)$$

Někdy je výhodné upravit matici K tak, aby všechny prvky v ní měly týž fyzikální rozměr. Toho dosáhneme, budou-li i vektory sil a vektory posuvů rozměrově homogenní

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1/l \\ Y_2 \\ M_2/l \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 l \\ v_2 \\ \vartheta_2 l \end{Bmatrix} \quad (14.14)$$

Poznámka: Do matice tuhosti by bylo možno zahrnout i vliv posouvající síly na deformaci nosníku, který lze u štíhlých nosníků zanedbat. Svěříme-li však výpočet samočinnému počítači, není úloha o mnoho složitější, zpřesňují se jen jednotlivé prvky matice, ale další výpočet zůstává týž. Zanedbání vlivu posouvající síly neznamena pak již žádnou zvláštní úsporu výpočtové práce. My se však - pro větší přehlednost - spokojíme s tvarem matice tuhosti (14.13) nebo (14.14), v nichž je vliv posouvající síly zanedbán.

15. TRANSFORMACE SOUŘADNIC PŘI ROVINNÉM OHYBU

Přejdeme-li od lokálních souřadnic \bar{X} , \bar{Y} k souřadnicím globálním X , Y , musíme řád matice \bar{K} zvětšit na 6×6 . Nyní jsou totiž na každém konci tři složky posuvů: dva skutečné posuvy u , v a úhel otočení ϑ , který rovněž zahrnujeme do vektoru "posuvů". Bude tedy - po rozšíření matice (14.14) -

$$[\bar{K}] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \vartheta_1 l & u_2 & v_2 & \vartheta_2 l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (15.1)$$

Posuvy u , v se transformují stejně jako vektory, zatímco úhly \bar{v} se nezmění. Rozšířená transformační matice tedy bude

$$[T] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & \mu & 0 & & & \\ -\mu & \lambda & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & \lambda & \mu & 0 \\ & & & -\mu & \lambda & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (15.2)$$

Zde $\lambda = \cos \varphi$, $\mu = \sin \varphi$, φ je úhel mezi osami \bar{x} , x (srov. obr. 15). Ze známé rovnice $K = T^T \bar{K} T$ pak roznásobením matic dostaneme

$$K = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \bar{v}_1 l & u_2 & v_2 & \bar{v}_2 l \\ 12\mu^2 & -12\lambda\mu & 6\mu & -12\mu^2 & 12\lambda\mu & 6\mu \\ -12\lambda\mu & 12\lambda^2 & -6\lambda & 12\lambda\mu & -12\lambda^2 & -6\lambda \\ 6\mu & -6\lambda & 4 & -6\mu & 6\lambda & 2 \\ -12\mu^2 & 12\lambda\mu & -6\mu & 12\mu^2 & -12\lambda\mu & 6\mu \\ 12\lambda\mu & -12\lambda^2 & 6\lambda & -12\lambda\mu & 12\lambda^2 & 6\lambda \\ 6\mu & -6\lambda & 2 & 6\mu & 6\lambda & 4\lambda \end{bmatrix} \quad (15.3)$$

16. VÝPOČET VNITŘNÍCH STATICKÝCH ÚČINKŮ

Z celé konstrukce se zaměříme na určitý nosník, v němž stanovíme posouvající sílu a ohybový moment pomocí posuvů (za posuvy ovšem považujeme obecně i úhly pootočení na koncích nosníku, jak bylo vysvětleno v předchozí kapitole). Konce nosníku - uzlové body - označme i , j . Snadno se přesvědčíme, že pro ekvivalentní "síly" v uzlech Y_i^e , M_i^e , jež způsobí v uvolněném nosníku stejné posouvající síly a ohybové momenty (a tedy i stejné deformace), jaké existují v daném nosníku zabudovaném uvnitř soustavy, platí

$$Y_i^e = \frac{EJ}{l^3} (12v_i - 6\bar{v}_i l - 12v_j - 6\bar{v}_j l), \quad (16.1)$$

$$M_i^e = \frac{EJ}{l^3} (-6v_i + 4\bar{v}_i l + 6v_j + 2\bar{v}_j l).$$

To plyne z rovnice (14.14), kterou napíšeme pro daný konstrukční element (nosník). O správnosti těchto rovnic se přesvědčíme také tak, že na pravé straně ponecháme vždy jeden člen a za zbyvající tři zvolíme nulu. Zvolíme-li např. $v_i = 0$, $\bar{v}_i = 0$, $v_j = 0$, $\bar{v}_j \neq 0$, dostaneme případ nosníku

vlevo vetknutého, vpravo kloubově podepřeného. Pro ohybovou čáru platí diferenciální rovnice $d^4v/dx^4 = 0$, tedy

$$v = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \quad (16.2)$$

a okrajové podmínky

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad v'(l) = \vartheta_j. \quad (16.3)$$

Vyjde

$$v = v(x) = \vartheta_j \frac{x^3}{l^2} - \vartheta_j \frac{x^2}{l} \quad (16.4)$$

a z rovnic

$$Y_i^e = -EJ v'''(0), \quad M_i^e = -EJ v''(0), \quad (16.5)$$

známých z elementární teorie pružnosti, plyne

$$Y_i^e = -\frac{6EJ\vartheta_j}{l^2}, \quad M_i^e = \frac{2EJ\vartheta_j}{l}. \quad (16.6)$$

Tyto výsledky se shodují s rovnicemi (16.1).

Nyní dostaneme posouvající sílu v nosníku α s uzly i, j

$$V_\alpha = Y_i^e \quad (16.7)$$

a ohybový moment

$$M_\alpha = Y_i^e x + M_i^e. \quad (16.8)$$

Dosazením ze (16.1) a úpravou vyjde

$$\begin{Bmatrix} V_\alpha \\ M_\alpha \end{Bmatrix} = [S_\alpha] \begin{Bmatrix} v_i \\ \vartheta_i \\ v_j \\ \vartheta_j \end{Bmatrix}, \quad (16.9)$$

kde S_α je napěťová matice 2×4

$$[S_\alpha] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ (12x-6l) & (-6lx+4l^2) & (-12x+6l) & (-6lx+2l^2) \end{bmatrix}. \quad (16.10)$$

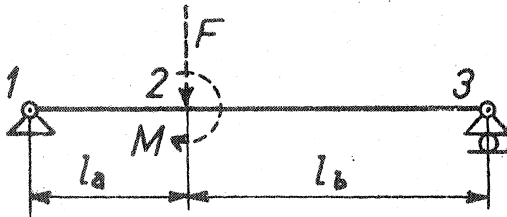
Rovnici (16.9) můžeme upravit též do tvaru rozměrově homogenního

$$\begin{Bmatrix} V_\alpha \\ \frac{M_\alpha}{l} \end{Bmatrix} = [S_\alpha] \begin{Bmatrix} v_i \\ \vartheta_i l \\ v_j \\ \vartheta_j l \end{Bmatrix} \quad (16.11)$$

v němž

$$[S_\alpha] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ (12 \frac{x}{l} - 6) & (-6 \frac{x}{l} + 4) & (-12 \frac{x}{l} + 6) & (-6 \frac{x}{l} + 2) \end{bmatrix} \quad (16.12)$$

Probereme nyní příklad nosníku prostě podepřeného, zatíženého v bodě 2 osamělou silou F a dvojicí M (nezaměňuj s ohybovým momentem M_α působícím uvnitř nosníku). Nosník je znázorněn na obr. 29. V tomto případě máme:



$$\begin{aligned} v_1 &= 0, & Y_2 &= -F, \\ v_3 &= 0, & M_2 &= M. \end{aligned}$$

Obr. 29

Dále je dáno $l_a = l$, $l_b = 2l$, ohybová tuhost je konstantní. Sestavíme celkovou matici tuhosti složením dvou matic typu (14.6), z nichž první bude platit pro prvek 1 - 2 a druhá pro prvek 2 - 3. Matice se překrývají stejně jako na obr. 12. Vyjde

$$K_{1-2} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} v_1 & \dot{v}_1 & v_2 & \dot{v}_2 \\ 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (16.13)$$

$$K_{2-3} = \frac{EJ}{8l^3} \begin{bmatrix} v_2 & \dot{v}_2 & v_3 & \dot{v}_3 \\ 12 & -12l & -12 & -12l \\ -12l & 16l^2 & 12l & 8l^2 \\ -12 & 12l & 12 & 12l \\ -12l & 8l^2 & 12l & 16l^2 \end{bmatrix} \quad (16.14)$$

$$K = \frac{EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} v_1 & \dot{v}_1 & v_2 & \dot{v}_2 & v_3 & \dot{v}_3 \\ 24 & -12l & -24 & -12l & 0 & 0 \\ -12l & 8l^2 & 12l & 4l^2 & 0 & 0 \\ -24 & 12l & 27 & 9l & -3 & -3l \\ -12l & 4l^2 & 9l & 12l^2 & 3l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -3 & 3l & 3 & 3l \\ 0 & 0 & -3l & 2l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (16.15)$$

Stojí za povšimnutí, že u těchto matic již není nulový součet sloupců ani řádků. Je to tím, že podmínky rovnováhy jsou složitější. Podle (14.6) lze soudit, že bude nulový součet lichých prvků, příslušných silám Y . Pro ostatní prvky platí komplikovanější podmínky; např. v maticích (16.13) a (16.4) je nulový součet l_{α} -násobku prvku prvního s prvky na druhém a čtvrtém místě ($l_{\alpha} = l_{\alpha}$, popř. l_{α}). Ostatní vlastnosti matice tuhosti zůstávají nezměněny (kladné prvky na hlavní diagonále, souměrnost).

Matice (16.15) je singulární. Matici $K_{\alpha\alpha}$ z ní dostaneme vynecháním prvního a pátého sloupce a prvního a pátého řádku (neboť $v_1 = 0$, $v_3 = 0$). Bude tedy

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_2 & v_3 \\ 8l^2 & 12l & 4l^2 & 0 \\ 12l & 27 & 9l & -3l \\ 4l^2 & 9l & 12l^2 & 2l^2 \\ 0 & -3l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (16.16)$$

Protože vnější síly působí jen v bodě 2, přeskupíme matici (16.16) tak, aby první dva sloupce (a tedy i první dva řádky) odpovídaly deformacím v_2 , v_2 . Bude pak platit

$$\begin{Bmatrix} Y_2 = -F \\ M_2 = M \\ M_1 = 0 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{2l^3} \left[\begin{array}{cc|cc} v_2 & v_2 & v_1 & v_3 \\ 27 & 9l & 12l & -3l \\ 9l & 12l^2 & 4l^2 & 2l^2 \\ \hline 12l & 4l^2 & 8l^2 & 0 \\ -3l & 2l^2 & 0 & 4l^2 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_2 \\ v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (16.17)$$

Toto přeskupení a rozdělení na submatice by nebylo nijak výhodné, kdybychom výpočet dělali na samočinném počítači; tu by bylo možno invertovat přímo matici tuhosti (16.16). Při "ručním" výpočtu je však lépe, můžeme-li se inverzi matic vyšších řádů vyhnout. Soustava (16.17) se rozpadá na dvě rovnice

$$\begin{Bmatrix} -F \\ M \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{2l^3} \left(\begin{bmatrix} 27 & 9l \\ 9l & 12l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12l & -3l \\ 4l^2 & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix} \right) \quad (16.18)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{2l^3} \left(\begin{bmatrix} 12l & 4l^2 \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8l^2 & 0 \\ 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix} \right) \quad (16.19)$$

Z rovnice (16.19) vypočteme */

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\ell} \begin{bmatrix} -6 & -2\ell \\ 3 & -2\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (16.20)$$

a dosadíme do (16.18); po úpravě vyjde

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{9EJ} \begin{bmatrix} 4\ell^2 & -2\ell \\ -2\ell & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -F \\ M \end{Bmatrix} \quad (16.21)$$

Tak se podařilo najít řešení pomocí inverzí dvou matic 2×2 místo inverze jedné matice 4×4 . Výpočet byl usnadněn tím, že $M_1 = 0$, $M_3 = 0$. Z rovnic (16.21) a (16.20) nyní plynou všechny neznámé posuvy

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{4}{9} \frac{F\ell^3}{EJ} - \frac{2}{9} \frac{M\ell^2}{EJ} , \\ v_1 &= \frac{5}{9} \frac{F\ell^2}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{M\ell}{EJ} , \\ v_2 &= \frac{2}{9} \frac{F\ell^2}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{M\ell}{EJ} , \\ v_3 &= -\frac{4}{9} \frac{F\ell^2}{EJ} - \frac{1}{3} \frac{M\ell}{EJ} . \end{aligned} \quad (16.22)$$

Přitom ℓ značí třetinu celkové délky nosníku, který jsme pro výpočet nahradili dvěma prvky (dvěma nosníky). Z rovnice (16.9) vyjde posouvající síla a ohybový moment v jednotlivých prvcích; např.

$$\begin{aligned} V_\alpha \equiv V_{1-2} &= EJ \left(\frac{12}{\ell^3} v_1 - \frac{6}{\ell^2} v_1 - \frac{12}{\ell^3} v_2 - \frac{6}{\ell^2} v_2 \right) = \\ &= \frac{2}{3} F - \frac{1}{3} \frac{M}{\ell} , \end{aligned} \quad (16.23)$$

$$\begin{aligned} M_\alpha \equiv M_{1-2} &= EJ \left[\left(\frac{12}{\ell^3} x - \frac{6}{\ell^2} \right) v_1 + \left(-\frac{6}{\ell^2} x + \frac{4}{\ell} \right) v_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{12}{\ell^3} x + \frac{6}{\ell^2} \right) v_2 + \left(-\frac{6}{\ell^2} x + \frac{2}{\ell} \right) v_2 \right] = \\ &= \left(\frac{2}{3} F - \frac{1}{3} \frac{M}{\ell} \right) x . \end{aligned} \quad (16.24)$$

Lze se snadno přesvědčit přímým výpočtem (metodou myšleného řezu), že tyto výsledky jsou správné.

*/ Násobením zleva maticí

$$\begin{bmatrix} 8\ell^2 & 0 \\ 0 & 4\ell^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8\ell^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\ell^2} \end{bmatrix}$$

Reakce dostaneme buď tak, že se vrátíme k celkové matici tuhosti (16.15), přeskupíme ji a rozdělíme na submatice podle schématu (8.22), nebo tak, že vypočteme ekvivalentní síly (16.1), z nichž lze určit reakce přímou úvahou. Tyto ekvivalentní síly představují působení okolní konstrukce na daný prvek (element); označovali jsme je indexem "e" vpravo nahoře. Tak např. reakce Y_1 se rovná Y_1^e , reakce Y_3 se rovná síle Y_3^e . Prostřednictvím ekvivalentních sil je popsána "hra sil" v jistém uzlu. Např. v druhém uzlu platí pro první nosník

$$Y_{2a}^e = -Y_{1a}^e = -\frac{2}{3}F + \frac{1}{3}\frac{M}{l}, \quad (16.25)$$

zatímco pro druhý nosník a týž uzel vyjde z rovnice (16.1) ^{*}/

$$Y_{2b}^e = -\frac{1}{3}F - \frac{1}{3}\frac{M}{l}. \quad (16.26)$$

To znamená, že z vnější síly Y_2 se do prvního nosníku přenesou Y_{2a}^e a do druhého Y_{2b}^e . Celkem je pak

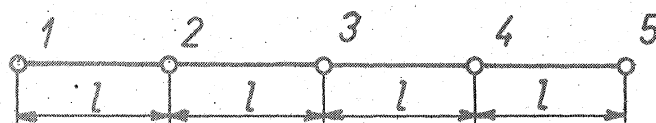
$$Y_2 = -F = Y_{2a}^e + Y_{2b}^e \quad (16.27)$$

Rovnice (16.27) popisuje, jak se vnější síla F rozdělí mezi obě části nosníku (mezi oba prvky a a b).

17. VYUŽITÍ SOUMĚRNOSTI

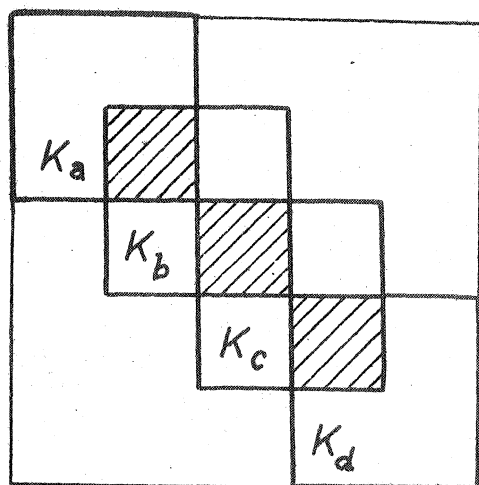
S poměrně jednoduchými maticemi (14.13), (14.14), popř. (15.3) vystačíme na řešení mnoha praktických úloh. Neprizmatické nosníky nebo i křivé pruhy můžeme přitom rozdělit na soustavu náhradních prizmatických nosníků. Náhrada bude dávat tím věrnější výsledky, čím více náhradních prvků volíme (tj. čím bude dělení jemnější). Zároveň s tím se však zvyšuje řád matice, což je krajně nevýhodné, nemáme-li k dispozici samočinný počítač. Je proto jen přirozené, napadne-li nás, zda by nebylo možné snížit řád matice využitím souměrnosti, pokud ovšem daná konstrukce je souměrná. To jistě lze, jak ukážeme na příkladu.

Pro jednoduchost zvolíme čtyři stejné prvky podle obr. 30. Ohybová tuhost je tedy konstantní a také délky jsou stejné. Body 2, 3, 4 ovšem neznamenaají klouby;



Obr. 30

^{*}/ Délku l ovšem nutno zaměnit délkou $l_e = 2l$; kromě toho $i = 2, j = 3$.



Obr. 31

jde o označení myšlených řezů, nenarušujících skutečnou souvislost nosníku o délce $4l$. Jsou to "uzly" spojující jednotlivé prvky, jež jsme zvolili jako základní strukturu pro další výpočet. Superpozicí matic (14.7), psaných pro jednotlivé prvky, dostaneme celkovou matici tuhosti desátého řádu. Sestavení matic pro prvky $a \equiv 1-2$, $b \equiv 2-3$, ..., $d \equiv 4-5$ je naznačeno na obr. 31. Překrývající se části polí jednotlivých submatic jsou šrafovány; na nich se příslušné prvky sčítají. Výsledkem je základní rovnice tvaru

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1/l \\ Y_2 \\ M_2/l \\ Y_3 \\ M_3/l \\ Y_4 \\ M_4/l \\ Y_5 \\ M_5/l \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 l \\ v_2 \\ \vartheta_2 l \\ v_3 \\ \vartheta_3 l \\ v_4 \\ \vartheta_4 l \\ v_5 \\ \vartheta_5 l \end{Bmatrix} \quad (17.1)$$

Je-li zatížení souměrné, platí tyto vztahy:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_5, & v_2 &= v_4, \\ \vartheta_1 &= -\vartheta_5, & \vartheta_2 &= -\vartheta_4, & \vartheta_3 &= 0. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Rozepsáním (17.1) získáme rovnice

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{EJ}{l^3} (12 v_1 - 6 \vartheta_1 l - 12 v_2 - 6 \vartheta_2 l), \\ \frac{M_1}{l} &= \frac{EJ}{l^3} (-6 v_1 + 4 \vartheta_1 l + 6 v_2 + 2 \vartheta_2 l), \\ Y_2 &= \frac{EJ}{l^3} (-12 v_1 + 6 \vartheta_1 l + 24 v_2 - 12 v_3 - 6 \vartheta_3 l), \\ \frac{M_2}{l} &= \frac{EJ}{l^3} (-6 v_1 + 2 \vartheta_1 l + 8 \vartheta_2 l + 6 v_3 + 2 \vartheta_3 l), \\ Y_3 &= \frac{EJ}{l^3} (-12 v_2 + 6 \vartheta_2 l + 24 v_3 - 12 v_4 - 6 \vartheta_4 l), \\ \frac{M_3}{l} &= \frac{EJ}{l^3} (-6 v_2 + 2 \vartheta_2 l + 8 \vartheta_3 l + 6 v_4 + 2 \vartheta_4 l). \end{aligned} \quad (17.3)$$

Protože $Y_4 = Y_2$, $M_4 = -M_2$, nemusíme zbývající rovnice psát. Nyní dosadíme (17.2) do (17.3). První dvě rovnice se nezmění, zatímco další dávají

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{EJ}{l^3} (-12 v_1 + 6 \vartheta_1 l + 24 v_2 - 12 v_3), \\ \frac{M_2}{l} &= \frac{EJ}{l^3} (-6 v_1 + 2 \vartheta_1 l + 8 \vartheta_2 l + 6 v_3), \\ Y_3 &= \frac{EJ}{l^3} (-24 v_2 + 12 \vartheta_2 l + 24 v_3), \\ \frac{M_3}{l} &= 0. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Pak lze tedy (17.1) přepsat takto:

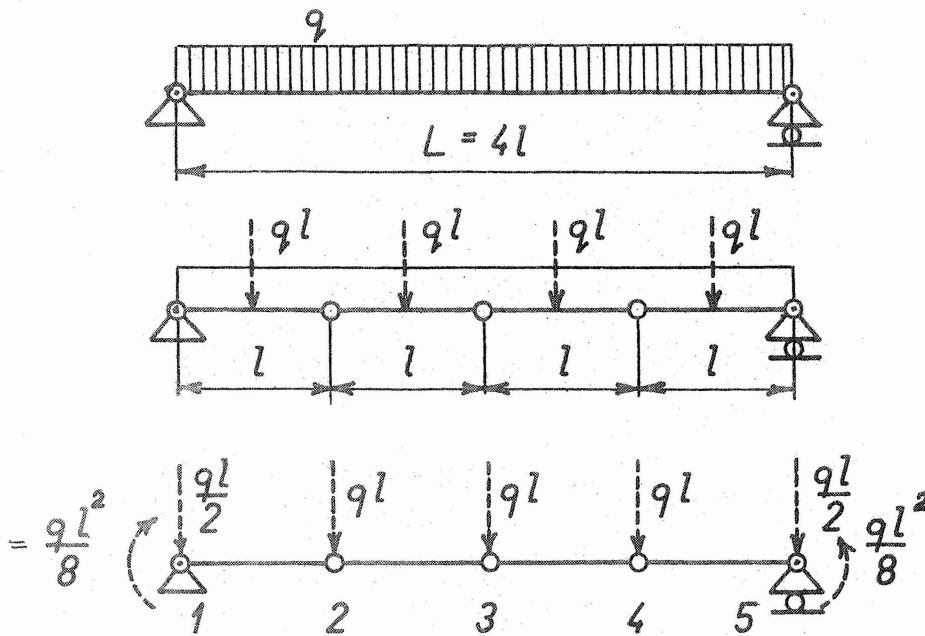
$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1/l \\ Y_2 \\ M_2/l \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -24 & 12 & 24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 l \\ v_2 \\ \vartheta_2 l \\ v_3 \end{Bmatrix}. \quad (17.5)$$

Matice tuhosti v rovnici (17.5) je pátého řádu, zatímco původní matice tuhosti v rovnici (17.1) byla desátého řádu. Za tuto výhodu, kterou jsme získali díky souměrnosti, ztrácíme však výhody jiné. Matice tuhosti takto upravená již není souměrná a součet lichých prvků (přiřazených silám Y) již nedává nulu. Ztrácí se tak možnost snadné a rychlé kontroly. Mimoto početní operace se souměrnými maticemi jsou méně náročné než s obecnými maticemi. Proto tyto úpravy nikdy neděláme, řeší-li se úloha na počítači. Nic bychom tím nezískali, naopak, zvětšila by se pravděpodobnost, že se při úpravách dopustíme chyby.

18. SPOJITĚ ROZDĚLENÉ ZATÍŽENÍ (PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ)

Výhodou řešení soustav prvků, zatížených toliko v uzlových bodech, je jednoduchost. Řešení lze ovšem snadno zobecnit i pro prvky spojitě zatížené, nahradíme-li spojitě zatížení osamělými silami soustředěnými do uzlových bodů. K této náhradě však potřebujeme kritérium, podle něhož bychom rozdělili spojitě zatížení do uzlových bodů. Jistě nás nejprve napadne, že vhodným kritériem by mohla být statická ekvivalence: spojitě zatížení nahradíme soustavou staticky ekvivalentních osamělých sil (a silových dvojic), působících v uzlových bodech. Způsob náhrady je zřejmý z obr. 32. Zde jsme zvolili jako příklad rovnoměrně zatížený nosník rozdělený na čtyři prvky. Jak se později ukáže, není taková náhrada staticky ekvivalentní soustavou

nejvhodnější^{x)} Řešení však limituje k správným výsledkům platným pro spojité zatížení, zvětšujeme-li počet prvků (zjemňujeme-li dělení nosníku).



Obr. 32

Abychom se přesvědčili o přesnosti výpočtu, jaké dosáhneme popsanou přibližnou náhradou, uděláme celý výpočet až do konce. Matici tuhosti již máme, je to (17.5). Protože $v_1 = 0$, vynecháme první sloupec i řádek. Po inverzi dostaneme

$$\begin{Bmatrix} v_1 l \\ v_2 \\ v_2 l \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{l^3}{12EJ} \begin{bmatrix} 24 & -18 & 6 & -12 \\ -18 & 16 & 0 & 11 \\ 12 & -12 & 0 & -9 \\ -24 & 22 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1/l \\ Y_2 \\ M_2/l \\ Y_3 \end{Bmatrix} \quad (18.1)$$

Přitom podle obr. 32

$$M_1 = \frac{ql^2}{8}, \quad Y_2 = -ql, \quad M_2 = 0, \quad Y_3 = -ql \quad (18.2)$$

Dosazením (18.2) do (18.1) vyjde

$$v_1 = \frac{11}{4} \frac{ql^3}{EJ} = \frac{11}{256} \frac{qL^3}{EJ},$$

^{x)} Zatížení ql každého prvku rozdělíme na poloviny $ql/2$ působící ve vzdálenostech $l/4$ od konců prvku. Ty pak rovnoběžně posuneme o délku $l/4$ do těchto konců a připojíme tomu příslušné momenty $ql^2/8$. Ve vnitřních uzlech se tyto momenty ruší (jsou navzájem opačně orientované), v podpěrách zůstávají (obr. 32).

$$\begin{aligned}
v_2 &= -\frac{39}{16} \frac{q l^4}{EJ} = -\frac{3,65625}{384} \frac{q L^4}{EJ} , \\
v_2' &= \frac{15}{8} \frac{q l^3}{EJ} = \frac{7,5}{256} \frac{q L^3}{EJ} , \\
v_3 &= -\frac{41}{12} \frac{q l^4}{EJ} = -\frac{5,125}{384} \frac{q L^4}{EJ} .
\end{aligned}
\tag{18.3}$$

Elementární výpočet, jak známo, dává pro spojitě zatížení přesné hodnoty

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{q L^3}{24 EJ} = \frac{10,6667}{256} \frac{q L^3}{EJ} , \\
v_3 &= -\frac{5}{384} \frac{q L^4}{EJ}
\end{aligned}
\tag{18.4}$$

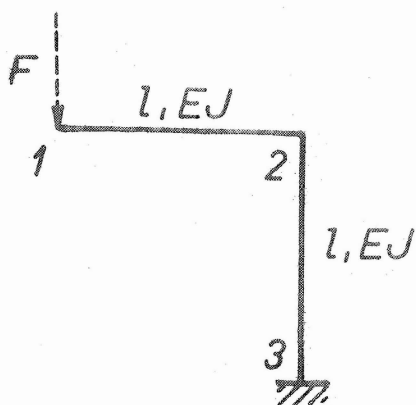
Úhel je tedy vypočten - při nosníku rozděleném na čtyři prvky podle obr. 32 - s chybou 3 %, maximální průhyb s chybou 2,5 %. To je velmi malá chyba, uvážíme-li, jak hrubé dělení jsme použili. V kapitole 20 se k této problematice ještě vrátíme. Dokážeme, že staticky ekvivalentní náhrada spojitěho zatížení osamělými silami a dvojicemi sil není ekvivalentní elasticky. Požadavku elastické ekvivalence vyhovíme, nahradíme-li moment $q l^2/8$ na koncích nosníku momentem $q l^2/12$. Taková náhrada však zase není ekvivalentní staticky.

19. RÁMOVÉ KONSTRUKCE

Prvky rámové konstrukce jsou zatíženy nejen ohybem, ale obecně i tahem-tlakem a popř. krutem. * / Prozatím jsme se nezabývali prvky s takto kombinovaným namáháním (to ponecháváme pro některý z dalších seminářů). Chceme jen využít teorii nosníků pro případy rovinných rámových konstrukcí, což lze učinit, jsou-li prvky dostatečně štíhlé. To znamená, že zanedbáváme účinek osové (i posouvající) síly na deformace nosníků, z nichž se rámová konstrukce skládá. Zde však budeme překvapeni, že to nepůjde vždy bez dalších zásahů do výpočtu. Vzpomeneme-li, jak jsme řešili rámové konstrukce klasickými metodami, bude tato zkušenost pro nás nová. ** / Ukážeme to na příkladu pravouhlého rámu podle obr. 33.

* / Samozřejmě i smykem vlivem posouvající síly, jejíž účinek jsme však zanedbali.

** / Klasická řešení se totiž většinou zakládají na silové metodě.



Obr. 33

Pro nosník 1 - 2 podle (14.7) máme

$$K_{1-2} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} v_1 & \vartheta_1 l & v_2 & \vartheta_2 l \\ 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (19.1)$$

Pro nosník 2 - 3 vyjde z rovnice (15.3) pro $\lambda = 0$, $\mu = -1$ (s vynecháním sloupců a řádků příslušných nulovým posuvům v_2 a v_3)

$$K_{2-3} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} u_2 & \vartheta_2 l & u_3 & \vartheta_3 l \\ 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & -6 \\ -6 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad (19.2)$$

Z matic (19.1) a (19.2) lze sestavit matici celkovou

$$K = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \vartheta_1 l & u_2 & v_2 & \vartheta_2 l & u_3 & v_3 & \vartheta_3 l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -6 & 6 & 8 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19.3)$$

Nyní předepíšeme okrajové podmínky

$$u_3 = 0, \quad v_3 = 0, \quad \vartheta_3 = 0 \quad (19.4)$$

Z matice tuhosti K tedy vynecháme poslední tři sloupce a poslední tři řádky a dostaneme

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1/l \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2/l \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & -6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_1 l \\ u_2 \\ v_2 \\ v_2 l \end{Bmatrix} \quad (19.5)$$

Podle dosavadních zkušeností bychom očekávali, že zmenšená matice tuhosti v rovnici (19.5) už nebude singulární a že budeme moci určit neznámé posuvy po inverzi této matice. S překvapením však zjistíme, že determinant matice v rovnici (19.5) je nulový, zmenšená matice tuhosti je stále ještě singulární a další výpočet je tedy nemožný. ^{*}/ Přitom na první pohled nejde o žádný výjimečný případ. Kde je tedy příčina?

Je třeba si uvědomit význam nul v prvním řádku a sloupci matice tuhosti. Vznikly z nul v matici tuhosti (15.1). Nepředpokládali jsme totiž možnost přenosu osové síly prutem 1 - 2. Proto jsme prutu 1 - 2 přisoudili nulovou osovou tuhost, což se nyní vymstilo. Posuv u_1 může být nyní zřejmě jakýkoli a vektor sil na levé straně (19.5) se nezmění, což není fyzikálně možné. Náš výpočtový model nezobrazuje proto správně fyzikální skutečnost. Můžeme to ještě napravit, předepíšeme-li samozřejmou rovnost $u_1 = u_2$. Potom místo (19.5) - vynecháním prvního sloupce a řádku ^{**}/ - vyjde

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1/l \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2/l \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -6 \\ -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & -6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1 l \\ u_2 \\ v_2 \\ v_2 l \end{Bmatrix} \quad (19.6)$$

Výpočtem se lze přesvědčit, že matice v rovnici (19.6) je ještě stále singulární. To proto, že jsme dosud neuvažovali, že ani prut 2 - 3 není schopen přenášet osovou sílu. Pomocí je zde opět předepsání podmínky $v_1 = v_3$ (a tedy $u_2 = 0$). Tím zabráníme "zhroucení" prutu 2 - 3 které by nastalo v důsledku předpokládané nulové osové tuhosti. Vynecháme tedy ještě čtvrtý řádek a čtvrtý sloupec a dostaneme

^{*}/ Jsou-li v některém řádku (nebo sloupci) determinantu jen nuly, je tento determinant nulový. Opačná věta ovšem neplatí.

^{**}/ Kromě $u_1 = u_2$ samozřejmě platí, že $X_1 = 0$. Tento výsledek i (19.6) dostaneme též tak, že matici 6 x 6 v rovnici (19.5) rozdělíme na submatice 1 x 1, 1 x 5, 5 x 1, 5 x 5 a vynásobíme.

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1/l \\ X_2 \\ M_2/l \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & 0 & -6 \\ -6 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -6 \\ -6 & 2 & -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_{1l} \\ u_2 \\ v_{2l} \end{Bmatrix} \quad (19.7)$$

K této matici lze konečně najít inverzní matici. Uvážíme-li, že $Y_1 = -F$, $M_1 = 0$, $X_2 = 0$, $M_2 = 0$, rozdělíme (19.7) na submatice takto:

$$\begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 12 & -6 & 0 & -6 & & \\ -6 & 4 & 0 & 2 & & \\ \hline 0 & 0 & 12 & -6 & & \\ -6 & 2 & -6 & 8 & & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_{1l} \\ u_2 \\ v_{2l} \end{Bmatrix} \quad (19.8)$$

Odtud

$$\{-F\} = \frac{EJ}{l^3} (12 \{v_1\} - [6 \ 0 \ 6] \begin{Bmatrix} v_{1l} \\ u_2 \\ v_{2l} \end{Bmatrix}), \quad (19.9)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \left(\begin{Bmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{Bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & -6 \\ 2 & -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1l} \\ u_2 \\ v_{2l} \end{Bmatrix} \right) \quad (19.10)$$

Z poslední rovnice

$$\begin{Bmatrix} v_{1l} \\ u_2 \\ v_{2l} \end{Bmatrix} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 15 & -3 & -6 \\ -3 & 7 & 6 \\ -6 & 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix} v_1 = \frac{3v_1}{8} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (19.11)$$

Dosazením do (19.9)

$$-F = \frac{EJ}{l^3} \left(12 v_1 - \frac{45}{4} v_1 \right) = \frac{EJ}{l^3} \frac{3}{4} v_1$$

a odtud

$$v_1 = - \frac{4Fl^3}{3EJ} \quad (19.12)$$

Z rovnice (19.11) pak vyjde

$$\begin{Bmatrix} v_{1l} \\ u_2 \\ v_{2l} \end{Bmatrix} = - \frac{Fl^3}{2EJ} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (19.13)$$

Uvedené nesnáze vznikly tím, že jsme neuvažovali žádnou osovou tuhost jednotlivých prvků. Domnívali jsme se, že to není třeba, chceme-li zanedbat vliv osových sil na deformaci konstrukce. Zatím však jsme vlastně přidali každému prvku (nosníku) jeden stupeň volnosti, a to smrštění nebo prodloužení v osovém směru. Tím se stala matice tuhosti i po předepsání okrajových podmínek singulární a bylo třeba předepsat ještě další podmínky, vyjadřující neprodloužitelnost nosníků. Všem těmto nesnázím se lze vyhnout, zahrneme-li do výpočtu též osovou tuhost. V tom případě nabývá matice tuhosti (15.1)

tvary

$$\bar{K} = \begin{matrix} & u_1 & v_1 & \psi_1 & u_2 & v_2 & \psi_2 \\ \left[\begin{array}{cccccc} \frac{ES}{l} & 0 & 0 & -\frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{ES}{l} & 0 & 0 & \frac{ES}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{array} \right. & \end{matrix} \quad (19.14)$$

a matice (15.3) nabývá tvaru (19.15). S značí v těchto maticích průřez nosníku.

Nechceme-li, aby výsledek byl ovlivněn osovou tuhostí (to může být, chceme-li řešení porovnat s jinou metodou, která osovou tuhost neuvažuje, nebo chceme-li zjistit velikost tohoto vlivu), dosadíme do matice (19.14), popř. (19.15) za průřez S nějaké přehnaně veliké číslo. ^{*}/ Vidíme, že dosazením nul do prvního řádku a sloupce matice (19.14) jsme volili právě opačný postup!

V těchto úvahách a zobecněním bychom mohli pokračovat. Bylo by možné (a poměrně snadné) např. přejít k prostorovému ohybu kombinovanému s krutem, k složitějším konstrukčním prvkům ap. Tyto úvahy však odložíme až na některý z příštích seminářů. Místo toho připojíme ještě některé úlohy k procvičení látky. Úlohy jsou úmyslně jednoduché, aby k řešení nebylo třeba užít počítač. Proto se snad může zdát, že řešení je proti klasickým metodám zdlouhavé.

^{*}/ Počítáme-li na samočinném počítači, nemůžeme dosadit $S \rightarrow \infty$. Místo toho volíme za S libovolné číslo, avšak tak veliké, aby jeho převrácená hodnota byla zanedbatelná ve srovnání s převrácenými hodnotami ostatních prvků matice (19.15).

(19.15)

$$\begin{bmatrix}
 S\lambda^2 + \frac{12J}{l^2}\mu^2 & (S - \frac{12J}{l^2})\lambda\mu & \frac{6J}{l}\mu & -(S\lambda^2 + \frac{12J}{l^2}\mu^2) & -(S - \frac{12J}{l^2})\lambda\mu & \frac{6J}{l}\mu \\
 (S - \frac{12J}{l^2})\lambda\mu & S\mu^2 + \frac{12J}{l^2}\lambda^2 & -\frac{6J}{l}\lambda & -(S - \frac{12J}{l^2})\lambda\mu & -(S\mu^2 + \frac{12J}{l^2}\lambda^2) & -\frac{6J}{l}\lambda \\
 \frac{6J}{l}\mu & -\frac{6J}{l}\lambda & 4J & -\frac{6J}{l}\mu & \frac{6J}{l}\lambda & 2J \\
 -(S\lambda^2 + \frac{12J}{l^2}\mu^2) & -(S - \frac{12J}{l^2})\lambda\mu & -\frac{6J}{l}\mu & S\lambda^2 + \frac{12J}{l^2}\mu^2 & S - \frac{12J}{l^2}\lambda\mu & -\frac{6J}{l}\mu \\
 -(S - \frac{12J}{l^2})\lambda\mu & -(S\mu^2 + \frac{12J}{l^2}\lambda^2) & \frac{6J}{l}\lambda & S - \frac{12J}{l^2}\lambda\mu & S\mu^2 + \frac{12J}{l^2}\lambda^2 & \frac{6J}{l}\lambda \\
 \frac{6J}{l}\mu & -\frac{6J}{l}\lambda & 2J & -\frac{6J}{l}\mu & \frac{6J}{l}\lambda & 4J
 \end{bmatrix}$$

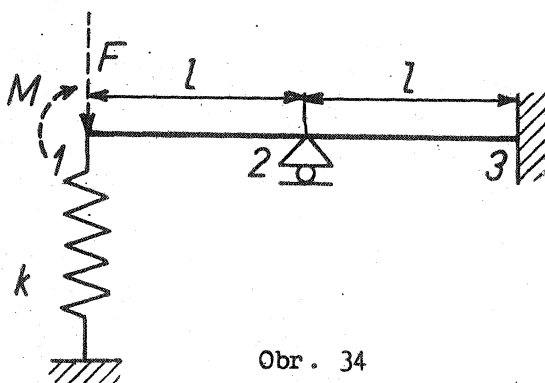
$$K = \frac{E}{l}$$

Zdlouhavost je však vyvážena větším množstvím informací, které z výpočtu vyplynou v přehledné formě. Kromě toho je třeba mít neustále na zřeteli, že maticové metody jsou jedinečné a nenahraditelné teprve u rozsáhlých úloh řešených s použitím samočinných počítačů. Maticová forma zápisu je velmi vhodná pro programování takových úloh. Zdlouhavost řešení je pak překonána velkou rychlostí početních operací na počítači.

Účelem tohoto semináře bylo především obeznámení se základními principy metody, která umožňuje řešit s použitím stejného způsobu nejrozmanitější úlohy. Základním problémem je přitom sestavit celkovou matici tuhosti, kterou složíme ze submatic platných pro jednotlivé prvky. Skládání probíhá jako hra se stavebnicí. Uvedené submatice zase získáme transformací matic převzatých z katalogu, kde jsou zapsány ve tvaru zvlášť výhodném, vztaženém k účelně volené "lokální" soustavě souřadnic.

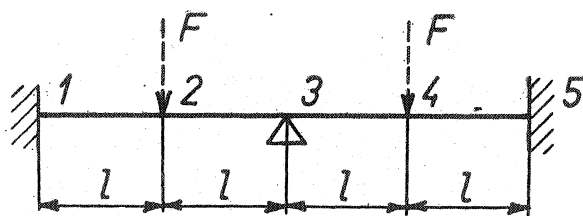
V některém z příštích seminářů také ukážeme, jak lze tuto metodu použít pro složitější prvky konstrukcí a jak souvisí s tzv. metodou konečných prvků, jež se od šedesátých let velmi rozšířila a používá se nyní v nejrůznějších odvětvích mechaniky kontinua.

Úloha 39. Nosník 1 - 2 - 3 je v bodě 1 uložen na pružině s konstantou k [$N m^{-1}$] (obr. 34). Určete deformace nosníku v bodech 1 a 2.



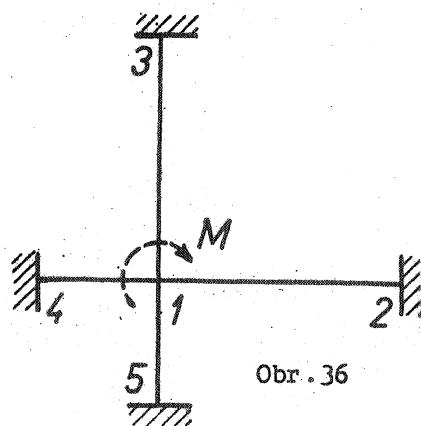
Obr. 34

Úloha 40. Nosník na obou koncích ve-tknutý a uprostřed podepřený je zatížen dvěma stejnými silami podle obr. 35. Určete průhyb a sklon v působiš-ti první síly.



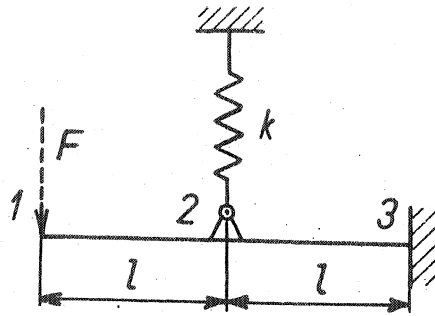
Obr. 35

Úloha 41. Vypočtete posuvy a úhel otočení uzlu 1 v rámové konstrukci na obr. 36 a všechny složky reakcí. Délka nosníků 1 - 2, 1 - 3 je dvojnásobná ($2l$) proti nosníkům 1 - 5, 1 - 4 (l). Ohybová tuhost EJ je stejná. Spojení nosníků v uzlu 1 je tuhé.



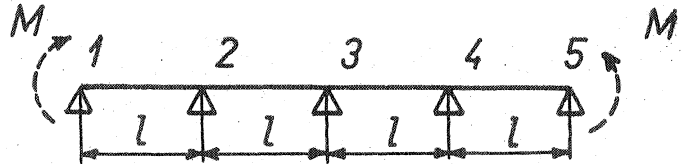
Obr. 36

Úloha 42. Najděte průhyby nosníku uloženého podle obr. 37. Ohybová tuhost je konstantní.



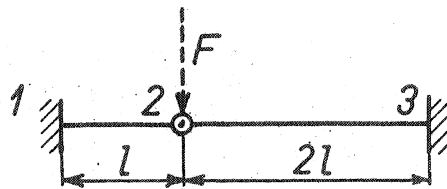
Obr. 37

Úloha 43. Najděte reakce u nosníku uloženého na pěti podporách podle obr. 38.



Obr. 38

Úloha 44. Dva nosníky jsou spojeny kloubem v bodě 2 a zatíženy silou $Y_2 = -F$ (obr. 39). Ohybová tuhost obou nosníků je táž. Určete posuvy v kloubu 2.



Obr. 39

Úloha 45. Najděte průhyb a sklon na konci nosníku na jednom konci vetknutého, na druhém volného, rovnoměrně zatíženého. Nosník rozdělte na dva prvky.

20. TEPLITNÍ PNUTÍ A SPOJITÉ ZATÍŽENÍ U NOSNÍKŮ

Úloha o teplotním pnutí vede obecně k ekvivalentní úloze o vlivu spojitého zatížení. Ve zvláštních případech však vystačíme se soustavou osamělých sil, připojených v uzlech. Takový případ nastává, nemění-li se teplota po délce nosníku, ale jen v jeho příčném směru. Omezíme se na rovinný ohyb, a proto budeme předpokládat, že se teplota mění jen ve směru kolmém k neutrální ose.

Jak jsme postupovali u prutů a prutových soustav? Zopakujme si hlavní body postupu:

1. Vypočítali jsme síly vznikající v prutech změnou teploty při znemožněných (a tedy nulových) posuvech.
2. Našli jsme vektor vnějších sil $\{X^{(1)}\}$, které by vyvodily v konstrukci stejnou napjatost jako nerovnoměrné rozdělení teploty při nulových posuvech.
3. Od vnějšího zatížení (od daných vnějších sil a momentů) $\{X\}$ jsme odečetli zatížení $\{X^{(1)}\}$, neboť toto druhé zatížení ve skutečnosti nepůsobí. Pro zatížení $\{X\} - \{X^{(1)}\}$ jsme vypočetli posuvy podle (12.11).

4. Vnitřní statické účinky jsou dány superpozicí teplotního pnutí podle bodu 1 (při nulových posuvech) a pnutí vzniklého účinkem zatížení $\{X\} - \{X^{(1)}\}$. Toto druhé pnutí se určí z příslušných posuvů pomocí ekvivalentních sil přenášených na jednotlivé elementy nebo pomocí napěťové matice.

Pokusíme se nyní postupovat obdobně i u nosníků. Obdobně k (12.12) bude platit rovnice

$$\{X\} = [K] \{u\} + \{X^{(1)}\} \quad (20.1)$$

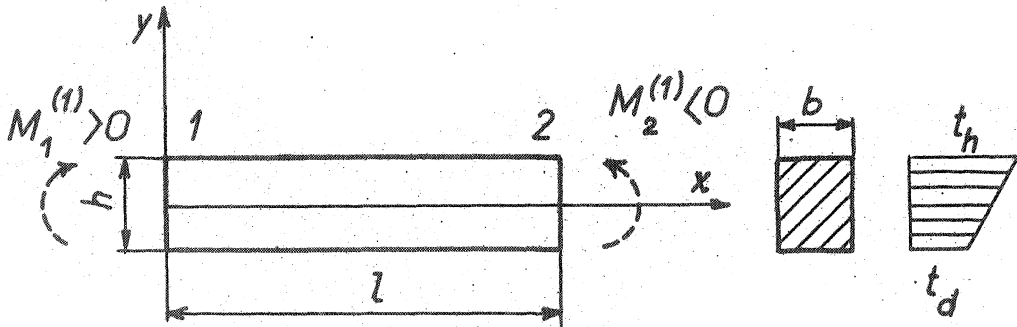
Zde $\{X\}$ je vektor daných vnějších sil, působících v uzlech,

$[K]$ je celková matice tuhosti,

$\{u\}$ je vektor výsledných posuvů

$\{X^{(1)}\}$ je vektor sil v uzlech, nutných k udržení nulových posuvů při zatížení konstrukce teplotními rozdíly.

Postup ukážeme na příkladu nosníku, v němž se teplota lineárně mění po výšce profilu, avšak po délce nosníku zůstává konstantní (obr. 40).



Obr. 40

Bude tedy

$$t = t(y) = t_0 + \frac{y}{h} \Delta t, \quad (20.2)$$

kde

$$t_0 = \frac{t_h - t_d}{2}, \quad \Delta t = t_h - t_d.$$

Předpokládejme dále, že nic nebrání osovému posuvu nebo že konstrukce byla smontována bez pnutí při rovnoměrné teplotě t_0 . Zbývá tedy uvážit vliv rozdílu teplot Δt . V tomto případě je osová síla nosníku nulová, a tedy i $X_1 = 0$, popř. $X_2 = 0$.^{*} Zato ohybový moment vyjde

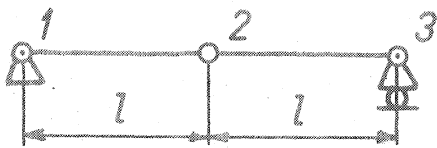
^{*} Kdyby vlastní pnutí vymizelo místo toho např. při nulové teplotě, bylo by nutné do výpočtu zahrnout vliv osové síly $P_{1-2}^{(1)} = -E\alpha t_0 S$ obdobně jako v kapitole 12.

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha}^{(1)} &= M_{1-2}^{(1)} = E\alpha b \int_{-h/2}^{+h/2} y t(y) dy = \\
 &= E\alpha \Delta t \frac{b}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \frac{1}{12} E\alpha \Delta t b h^2 = \frac{EJ\alpha \Delta t}{h}
 \end{aligned} \quad (20.3)$$

Zde $J = \frac{1}{12} b h^3$ značí moment setrvačnosti plochy průřezu k neutrální ose.

Je tedy podle obr. 40

$$\{X^{(1)}\} = \left\{ \begin{matrix} v_1 & \vartheta_1 & v_2 & \vartheta_2 \\ 0 & \frac{EJ\alpha \Delta t}{h} & 0 & -\frac{EJ\alpha \Delta t}{h} \end{matrix} \right\}^T \quad (20.4)$$



Obr. 41

Představme si nyní, že by nosník měl délku $2l$ (na rozdíl od obr. 40) a že by byl na koncích kloubově uložen (obr. 41). Abychom mohli vypočítat deformace uprostřed jeho rozpětí, rozdělíme jej na dvě poloviny (na dva prvky). Rozdělení teploty bude popsáno rovnicí (20.2). Budou platit tyto okrajové podmínky:

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0. \quad (20.5)$$

Dále využijeme souměrnost, abychom snížili řád matice (vzhledem k tomu, že počítáme ručně)

$$\vartheta_1 = -\vartheta_3, \quad \vartheta_2 = 0. \quad (20.6)$$

Podle (20.1) bude

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ M_1/l \\ Y_2 \\ M_2/l \\ Y_3 \\ M_3/l \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_1 l \\ v_2 \\ \vartheta_2 l \\ v_3 \\ \vartheta_3 l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta \end{Bmatrix} \quad (20.7)$$

Za ohybové momenty jsme do vektoru $\{X^{(1)}\}$ dosadili součty příslušných momentů M_{α} ($\alpha = a$ pro nosník 1 - 2, b pro nosník 2 - 3).

Vyšlo

$$\begin{aligned}
 \frac{M_1^{(1)}}{l} &= \frac{M_{1a}^{(1)}}{l} = \frac{EJ\alpha \Delta t}{lh} = \beta; \quad \frac{M_3^{(1)}}{l} = \frac{M_{3b}^{(1)}}{l} = -\beta; \\
 \frac{M_2^{(1)}}{l} &= \frac{M_{2a}^{(1)}}{l} + \frac{M_{2b}^{(1)}}{l} = -\beta + \beta = 0.
 \end{aligned} \quad (20.8)$$

V tomto vektoru jsou nenulové pouze uvedené silové dvojice v uzlech 1 a 3; síly jsou vesměs nulové. Nepůsobí-li vnější síly, je na levé straně (20.7) nulový vektor.

Vynecháním prvního, čtvrtého a pátého řádku (a sloupce) - vzhledem k (20.5) a (20.6) - dostaneme matici tuhosti třetího řádu

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 24 & -6 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 l \\ v_2 \\ v_3 l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta \\ 0 \\ -\beta \end{Bmatrix} \quad (20.9)$$

S využitím souměrnosti $v_1 = -v_3$ vyjde z poslední rovnice

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 l \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.10)$$

Řešením

$$\begin{Bmatrix} v_1 l \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{l^3}{12EJ} \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.11)$$

a odtud

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{l}{h} \alpha \Delta t, \\ v_2 &= \frac{l^2}{2h} \alpha \Delta t. \end{aligned} \quad (20.12)$$

Pomocí elementárních matic tuhosti pro jednotlivé prvky určíme příslušné ekvivalentní síly a silové dvojice (momenty). Pro prut 1 - 2 ($i = 1$, $j = 2$) vyjde

$$\begin{Bmatrix} Y_{1a}^e \\ M_{1a}^e/l \\ Y_{2a}^e \\ M_{2a}^e/l \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1 l \\ v_2 \\ v_2 l \end{Bmatrix} \quad (20.13)$$

a odtud

$$\begin{aligned} Y_{1a}^e &= 0, & Y_{2a}^e &= 0, \\ M_{1a}^e &= -\beta l, & M_{2a}^e &= \beta l. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Pro nosník 2 - 3 vyjde obdobně

$$\begin{aligned} Y_{2b}^e &= 0, & Y_{3b}^e &= 0, \\ M_{2b}^e &= -\beta l, & M_{3b}^e &= \beta l. \end{aligned} \quad (20.15)$$

V uzlu 2 tedy celkem zvenku působí

$$Y_2^e = Y_{2a}^e + Y_{2b}^e = 0, \quad M_2^e = M_{2a}^e + M_{2b}^e = 0. \quad (20.16)$$

Nenulové jsou tedy jen ohybové momenty v uzlech 1 a 3, totiž

$$M_1^e = M_{1a}^e = -\beta l, \quad M_3^e = M_{3b}^e = \beta l. \quad (20.17)$$

Tyto momenty by samy o sobě způsobily deformaci (20.12). Síly a momenty podle (20.16) a (20.17) představují tedy ekvivalentní zatížení $\{X^e\} = \{X\} - \{X^{(1)}\}$. Skutečně působící vnější síly dostaneme pak jako součet $\{X^e\} + \{X^{(1)}\} = \{X\}$. Ekvivalentní síly představují jednu část, kterou musíme použít k výpočtu posouvajících sil a ohybových momentů. Druhá část, jejíž účinek musíme připočíst, jsou teplotní pnutí při nulových posuvách podle (20.8). V kloubech 1 a 3 máme

$$\begin{aligned} Y_1^{(1)} &= 0, & Y_3^{(1)} &= 0, \\ M_1^{(1)} &= \beta l, & M_3^{(1)} &= -\beta l. \end{aligned} \quad (20.8a)$$

Vyjde nakonec

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1^e + Y_1^{(1)} = 0, & Y_3 &= Y_3^e + Y_3^{(1)} = 0, \\ M_1 &= M_1^e + M_1^{(1)} = 0, & M_3 &= M_3^e + M_3^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (20.18)$$

Výsledné reakce (a tedy i posouvající síly a ohybové momenty) jsou nulové.

Situace se změní, bude-li nosník na koncích 1 a 3 vetknutý. Pak

$$v_1 = 0; \quad \dot{v}_1 = 0; \quad v_3 = 0; \quad \dot{v}_3 = 0. \quad (20.19)$$

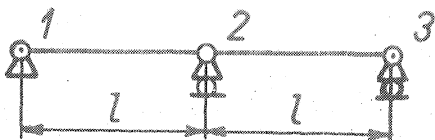
Jediná neznámá je posuv v_2 . Pro něj dostaneme

$$\{Y_2\} = \frac{EJ}{l^3} [24] \{v_2\} + \{Y_2^{(1)}\} \quad (20.20)$$

Protože $Y_2^{(1)} = 0$, $Y_2 = 0$, vyjde též $v_2 = 0$. Při nulovém průhybu jsou však nulové i ekvivalentní síly a momenty, takže k posouvajícím silám a ohybovým momentům přispívá jen $M_1^{(1)}$ a $M_3^{(1)}$

$$V = 0, \quad (20.21)$$

$$M = M_1^{(1)} = \beta l = \text{konst.}$$



Obr. 42

Vyšetříme nyní teplotní pnutí a posuvy u nosníku podepřeného podle obr. 42, bude-li se rozdíl teplot v nosníku 1 - 2 rovnat Δt_a a v nosníku 2 - 3 rovnat Δt_b . V tom případě bude

$$\begin{aligned}
 M_1^{(1)} &= \beta_a l = EJ \frac{\alpha \Delta t_a}{h}, \\
 M_3^{(1)} &= -\beta_b l = -EJ \frac{\alpha \Delta t_b}{h}, \\
 M_2^{(1)} &= -\beta_a l + \beta_b l.
 \end{aligned}
 \tag{20.22}$$

Okrajové podmínky jsou

$$v_1 = 0; \quad v_2 = 0; \quad v_3 = 0. \tag{20.23}$$

Z rovnice (20.7) dostaneme

$$\begin{Bmatrix} M_1/l = 0 \\ M_2/l = 0 \\ M_3/l = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 l \\ v_2 l \\ v_3 l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_1^{(1)}/l \\ M_2^{(1)}/l \\ M_3^{(1)}/l \end{Bmatrix}. \tag{20.24}$$

Odtud

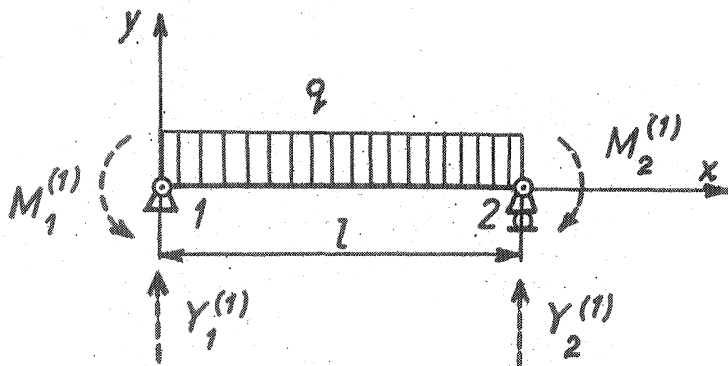
$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{l^2}{24 EJ} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \end{Bmatrix}. \tag{20.25}$$

Dosazením (20.22) do (20.25)

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -\frac{\alpha l}{8h} (3 \Delta t_a - \Delta t_b), \\
 v_2 &= -\frac{\alpha l}{4h} (\Delta t_b - \Delta t_a), \\
 v_3 &= \frac{\alpha l}{8h} (3 \Delta t_b - \Delta t_a).
 \end{aligned}
 \tag{20.26}$$

Pro výpočet ekvivalentních sil v nosníku (a) použijeme opět (20.13), kam dosadíme $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ a úhly v_1 a v_2 podle (20.26). Obdobný je výpočet i pro nosník (b). Další výpočet ponecháváme čtenáři.

Obdobně můžeme postupovat, chceme-li do výpočtu přesně zahrnout i spojitě zatížení (obr. 43). K udržení nulových posuvů v uzlech 1, 2 musíme připojit vnější síly a momenty, které sestavíme do vektoru sil $\{X^{(1)}\}$ o složkách



Obr. 43

$$\begin{aligned}
 Y_1^{(1)} &= \frac{1}{2} q l, & Y_2^{(1)} &= \frac{1}{2} q l, \\
 M_1^{(1)} &= -\frac{1}{12} q l^2, & M_2^{(1)} &= \frac{1}{12} q l^2.
 \end{aligned}
 \tag{20.27}$$

Podle (20.1) vyjde

$$\begin{Bmatrix} Y_1=0 \\ M_1/l=0 \\ Y_2=0 \\ M_2/l=0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1 l \\ v_2 \\ v_2 l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} q l \\ -\frac{1}{12} q l^2 \\ \frac{1}{2} q l \\ \frac{1}{12} q l^2 \end{Bmatrix}
 \tag{20.28}$$

S využitím podmínek

$$v_1 = 0; \quad v_2 = 0 \tag{20.29}$$

odtud plyne

$$0 = \frac{EJ}{l^3} (4v_1 l + 2v_2 l) - \frac{1}{12} q l, \tag{20.30}$$

a tedy

$$v_1 = \frac{q l^3}{24 EJ} \tag{20.31}$$

Dále vyjdou ekvivalentní síly

$$\begin{aligned}
 Y_1^e &= 0, & Y_2^e &= 0, \\
 M_1^e &= \frac{1}{12} q l^2, & M_2^e &= -\frac{1}{12} q l^2.
 \end{aligned}
 \tag{20.32}$$

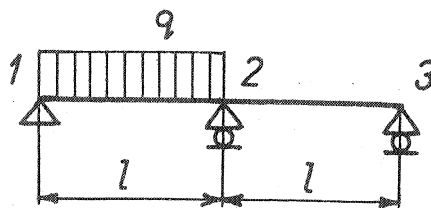
Vektor $\{X^e\}$ o složkách (20.32) složíme s vektorem $\{X^{(1)}\}$ o složkách (20.27) ve výsledné vnější síly (reakce) v uzlech; vyjde

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \frac{1}{2} q l, & Y_2 &= \frac{1}{2} q l, \\
 M_1 &= 0, & M_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{20.33}$$

V čem je rozdíl tohoto postupu proti kapitole 18? Tehdy jsme spojité zatížení rozdělili na staticky ekvivalentní osamělé síly (a nestarali jsme se přitom o deformace). To ovšem přísně vzato nelze, neboť deformace tělesa, působené různými, byť staticky ekvivalentními silovými soustavami, jsou různé. V druhém případě jsme na to šli z opačného konce: zvolili jsme náhradní silovou soustavu tak, aby byly přesně splněny deformační podmínky v uzlech. Tato náhradní soustava však není staticky ekvivalentní se spojitým zatížením. To nás nemusí překvapovat. Vzpomeneme-li na případ svise

zavěšeného prizmatického prutu, zatíženého vlastní vahou, víme, že jeho prodloužení je takové, jako kdybychom vlastní váhu zanedbali a místo toho připojili v koncovém průřezu osamělou sílu rovnající se polovině tíhy celého prutu. Posuv koncového průřezu vyjde v obou těchto případech přesně stejný, ačkoli osamělá síla je jen polovinou síly spojitě rozdělené, a tedy s ní není staticky ekvivalentní.

Úloha 46. Určete deformace a reakce u nosníku na třech podporách podle obr. 44. Ohybová tuhost je konstantní.



Obr. 44

NĚKOLIK SLOV ZÁVĚREM

V tomto učebním textu, určeném především začátečníkům, jsme se snažili navázat na známé metody a tradiční způsoby výpočtů z oboru pružnosti a pevnosti. Vyhnuli jsme se proto příliš radikálním změnám v označování veličin, omezili jsme se na obor reálné proměnné a vynechali jsme některé důkazy matematických vět. Z maticové algebry jsme probrali jen tolik, kolik jsme potřebovali k dalším aplikacím. Omlouváme se proto náročnějším čtenářům, kteří snad očekávali více, a odkazujeme je na literaturu, jejíž seznam připojujeme.

Vzhledem ke způsobu, jakým je tento text reprodukován, a ke krátkým lhůtám pro jeho zpracování a výrobu není zcela vyloučeno, že v textu zůstaly některé přepisy nebo drobná přehlédnutí, a to přes veškerou snahu autora i vydavatele. Prosíme proto, aby nám čtenář tyto nedostatky laskavě promínil. Autor bude dále vděčen za sdělení jakéhokoli názoru, týkajícího se náročnosti a způsobu výkladu. Získané zkušenosti budou podnětem k zlepšení práce při přípravě dalších seminářů. Pořadatelé se snaží, aby semináře přinášely účastníkům co největší užitek, a to nejen těm, kteří mohou uvedené metody přímo uplatnit, ale i těm, kteří se s nimi potřebují seznámit proto, aby byli schopni sledovat odbornou literaturu s větším porozuměním pro současný trend ve výpočtových metodách.

Kontrolní výsledky úloh:

$$1. \quad \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}.$$

$$2. \quad \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}.$$

3. Jde o degenerovanou matici čtvrtého řádu, hodnotí jedna.

$$4. \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

5. Podle 1. a 2. úlohy platí $y = BAx$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Znásobením matic dostaneme BA ; odtud

$$\begin{aligned} \{y\} &= \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 3 + 4\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} - 4 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 4,96 \\ 0,598 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

6. Postup je obdobný jako v úloze 5, nyní však $z = ABx$

$$\begin{aligned} \{z\} &= \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 3 - 4\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} - 4 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} -1,96 \\ -4,60 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Ze srovnání 5. a 6. úlohy je názorně zřejmé, proč pro součin matic neplatí komutativní zákon. Najdeme-li nejprve zrcadlový obraz vektoru a pak jej pootočíme o daný úhel, není to totéž, jako když vektor nejprve pootočíme a teprve pak najdeme jeho zrcadlový obraz. Záměna těchto operací však odpovídá záměně pořadí činitelů v součinu dvou matic.

$$7. \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad |A| = 1.$$

8. Je možno dokázat buď odvozením inverzní matice s použitím doplňků, nebo tak, že danou matici s její předpokládanou inverzní maticí vynásobíme. Výsledkem je jednotkový vektor. Postupujeme-li prvním způsobem, napíšeme místo daných prvků příslušné minory, znaménka změním podle šachovnicového pravidla a transponujeme; transpozice je však u souměrné matice zbytečná.

9. Víme, že

$$\Lambda = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}).$$

Proto

$$\Lambda = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}.$$

Oba způsoby jsou možné.

$$10. \quad \Phi = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}.$$

$$11. \quad \kappa = \Phi^{-1} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & -\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

$$12. \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 19 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad ABC = \begin{bmatrix} 19 & 38 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

13.

$$D = \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 8 & 11 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

14. Matice B je souměrná, platí-li $B^T = B$. Dokážeme to o součinu $B = A^T A$. Je totiž ^{*/}

$$B^T = (A^T A)^T = A^T A = B.$$

Speciálně pro matici A z úlohy 12 vyjde

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Je-li

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix},$$

je též

$$a = X^T C X.$$

16. Soustavu prepíšeme takto:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & Q \\ A_{21} & A_{22} & 0 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q \\ 0 \end{Bmatrix},$$

kde

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = [1 \quad -1 \quad -1], \quad A_{22} = [-1],$$

$$Q = \begin{Bmatrix} 10 \\ 2 \\ 10 \end{Bmatrix}, \quad X_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad X_2 = \{x_4\}.$$

^{*/} Viz (3.41).

Z rovnic

$$\begin{aligned} A_{11} X_1 + A_{12} X_2 &= Q, \\ A_{21} X_1 + A_{22} X_2 &= 0 \end{aligned}$$

vyloučíme X_1 a vypočteme X_2 . Musíme začít s první rovnicí, neboť A_{21} nemá inverzi (není to čtvercová matice). Z první rovnice

$$X_1 = A_{11}^{-1} Q - A_{11}^{-1} A_{12} X_2.$$

Dosazením do druhé

$$A_{21} A_{11}^{-1} Q - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} X_2 + A_{22} X_2 = 0,$$

odkud

$$X_2 = (A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} - A_{22})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} Q.$$

Matice minorů pro A_{11} je

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Po změně znamének, transpozici, dělení determinantem $|A_{11}| = -4$ a po další změně znamének (v činiteli před maticí a zároveň v maticí) vyjde

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Pro násobení součinu $A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$ platí schéma

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & \\ 1 & -1 & -1 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -10 & 4 & -8 \\ -2 & -10 & 4 & -8 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c|c} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{array} \right] \times \frac{1}{4} = [1]. \end{aligned}$$

Zde pozbývá numerická kontrola přidanými sloupci a řádky částečně smyslu, neboť kontrolní početní úkony se zčásti shodují s úkony kontrolovanými. Dále vypočteme

$$A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} - A_{22} = [1] - [-1] = [2] = 2;$$

z předchozího schématu odečteme

$$A_{21} A_{11}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -10 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \end{bmatrix},$$

takže

$$\{X_2\} = \{x_4\} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix} = [0] = 0.$$

Je tedy $x_4 = 0$.

Můžeme se dosazením přesvědčit, že řešení dané soustavy vskutku je

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 0.$$

17. Tentokrát bude

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Označíme-li danou matici

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

a inverzní matici

$$A^{-1} = B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right],$$

musí platit

$$\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

Vynásobením

$$\begin{aligned} B_{11} A_{11} + B_{12} A_{21} &= I, \\ B_{11} A_{12} + B_{12} A_{22} &= 0, \\ B_{21} A_{11} + B_{22} A_{21} &= 0, \\ B_{21} A_{12} + B_{22} A_{22} &= I. \end{aligned} \tag{a}$$

Z této soustavy je třeba vypočítat B_{ij} ($i, j = 1, 2$). Přitom je třeba dbát i o správné pořadí činitelů: Chceme-li např. z druhé rovnice určit B_{12} , musí být

$$B_{12} A_{22} = -B_{11} A_{12} \quad (b)$$

$$B_{12} = -B_{11} A_{12} A_{22}^{-1}$$

(První z těchto rovnic jsme násobili inverzní maticí zprava, nikoli zleva). Dosazením do první z rovnic (a)

$$B_{11} A_{11} - B_{11} A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = I$$

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} \quad (c)$$

Vyloučíme-li obdobně z první rovnice (b) submatici B_{11} , vyjde první z rovnic (a)

$$B_{12} = (-A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} + A_{21})^{-1} \quad (d)$$

Rovnici (d) můžeme získat také dosazením (c) do (b); v tom případě - se zřetelem k (3.53) a (3.54) -

$$\begin{aligned} B_{12} &= -(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} = \\ &= [(A_{22} A_{12}^{-1})(-A_{11} + A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})]^{-1} = \\ &= (-A_{22} A_{21}^{-1} A_{11} + A_{22} A_{12}^{-1} A_{21})^{-1} = \\ &= (-A_{22} A_{12}^{-1} A_{11} + A_{21})^{-1} \end{aligned}$$

Z třetí a čtvrté rovnice (a) vyjde obdobně

$$B_{22} = (-A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} + A_{22})^{-1} \quad (e)$$

$$B_{21} = (A_{12} - A_{11} A_{21}^{-1} A_{22})^{-1} \quad (f)$$

V rovnicích (c) až (f) se vyskytnou inverze matic nejvýše druhého řádu. Postupnými výpočty vyjde

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A_{12}^{-1}, \quad A_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Pro výpočet součinu např. $A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$ si nakreslíme schéma

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ -1 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 & | & -5 \\ 1 & -3 & | & -2 \\ \hline 0 & -7 & | & -7 \\ 2 & 1 & | & 3 \\ \hline 2 & -6 & | & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 4 \\ 1 & 1 & | & 0 \\ \hline -7 & 7 & | & 0 \\ -1 & 3 & | & 2 \\ \hline -8 & 10 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Vyjde

$$A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -7 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \frac{7}{2} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Obdobně vyjde

$$B_{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; B_{21} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}; B_{22} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Výsledné řešení v maticovém tvaru

$$X = A^{-1}P = BP,$$

v němž P značí vektor pravé strany dané soustavy, vyjde

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 10 \\ 3 & 7 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 10 \\ -1 & -5 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

O správnosti výsledku se lze přesvědčit dosazením hodnot X_1 , X_2 , X_3 , X_4 do původní soustavy. Je jasné, že řešení soustavy rovnic pomocí maticové inverze je příliš pracné. Má však význam tehdy, řešíme-li touž soustavu několikrát, vždy však s různými pravými stranami P_1 , P_2 , P_3 atd. Pak stačí pouze násobit inverzní maticí B příslušným vektorem P_i zprava, což je velmi snadný úkon. Tak např. pro soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

můžeme psát přímo výsledek

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -5 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

18. Z rovnice

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

plyne po rozepsání a úpravě

$$A^{-1} = a - b d^{-1} c$$

19. Determinant (5.4) dává

$$\begin{vmatrix} 11 - \lambda & -6 & 2 \\ -6 & 10 - \lambda & -4 \\ 2 & -4 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 180\lambda - 324 = 0$$

Tuto rovnici můžeme označit $f(\lambda) = 0$. Protože $f(0) = 324 > 0$ a součinitel u mocniny λ^3 je záporný, musí se pro dostatečně velké λ změnit znaménko polynomu $f(\lambda)$. Nejméně jeden kořen tedy bude kladný, tj. $\lambda_1 > 0$. Skutečně, zkusmo najdeme $\lambda_1 = 3$. Dělením polynomu $f(\lambda)$ kořenovým činitelem $(\lambda - 3)$ dostaneme polynom druhého stupně, který položíme rovným nule

$$-\lambda^2 + 24\lambda - 108 = 0,$$

odkud

$$\lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 18.$$

Dosazením $\lambda_1 = 3$ do rovnice (5.3) vyjde soustava rovnic

$$\begin{aligned} 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ -6x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Další rovnici není třeba psát, neboť je na těchto dvou rovnicích lineárně závislá. Zvolíme-li $x_1 = 1$, vyjde $x_2 = 2$, $x_3 = 2$. Je tedy první vlastní vektor

$$v^{(1)} = \{ 1 \quad 2 \quad 2 \}^T.$$

Obdobně vyjdou

$$v^{(2)} = \{ 2 \quad 1 \quad -2 \}^T, \quad v^{(3)} = \{ 2 \quad -2 \quad 1 \}^T.$$

20. Charakteristická rovnice $3\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$ má kořeny

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{5}{3}.$$

Jim přísluší vlastní vektory

$$v^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

21. Vyjde inverzní matice

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Násobení rovnice činitelem B^{-1} zleva dává

$$\left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a odtud

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Odtud plyne stejná charakteristická rovnice jako v úloze 19.

22. Místa, kde jsou umístěny hmoty, označíme postupně 1, 2, 3. Rozdělují celou strunu na čtvrtiny. Působí-li v bodě 1 síla 1 N, vzniknou průhyby

$$\delta_1 = c_{11}, \quad \delta_2 = c_{21} = \frac{2}{3} \delta_1, \quad \delta_3 = c_{31} = \frac{1}{3} \delta_1.$$

(neboť část struny 1 - 2 - 3 je při zatížení silou působící jenom v bodě 1 přímá). Úhly, které svírají jednotlivé části struny se spojnicí obou závěsů, jsou

$$\alpha = \arctg \frac{4\delta_1}{l} \approx \frac{4\delta_1}{l}, \quad \beta = \arctg \frac{4\delta_1}{3l} \approx \frac{4\delta_1}{3l}$$

Vzhledem k tomu, že deformace jsou malé, je $\alpha \doteq \sin \alpha \doteq \arctg \alpha$, $\beta \doteq \sin \beta \doteq \arctg \beta$. Z podmínky rovnováhy

$$F = Q \sin \alpha + Q \sin \beta \quad (\text{a})$$

čili

$$1 = Q \left(\frac{4\delta_1}{l} + \frac{4\delta_1}{3l} \right) = \frac{16\delta_1}{3l} Q \quad (\text{b})$$

plyne

$$\delta_1 = \frac{3l}{16Q} \quad (\text{c})$$

Odtud

$$c_{11} = \frac{3l}{16Q} \quad ; \quad c_{21} = \frac{2l}{16Q} \quad ; \quad c_{31} = \frac{l}{16Q} \quad (\text{d})$$

Nyní zatřííme strunu silou 1 N uprostřed (v místě 2). Dostaneme

$$\alpha = \beta = \frac{2\delta_2}{l} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{l}{4Q} \quad (\text{e})$$

$$c_{22} = \frac{l}{4Q} \quad ; \quad c_{12} = c_{32} = \frac{l}{8Q} \quad (\text{f})$$

Celá matice poddajnosti je pak

$$c = \frac{l}{16Q} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{g})$$

Jde-li o volné kmitání, působí v místech $i = 1, 2, 3$ amplitudy setrvačných sil $\omega^2 m \delta_i$, kde ω je kruhová frekvence volného kmitání. Pro amplitudy průhybů tedy bude platit

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \frac{l}{16Q} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \omega^2 m \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{h})$$

Pro zkrácení zavedeme označení

$$\lambda = \frac{16Q}{\omega^2 m l} \quad (\text{i})$$

a z rovnice (h) dostaneme (převedením všech členů na levou stranu)

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (j)$$

To je rovnice typu (5.3). Pro vlastní hodnoty λ plyne

$$(3-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) + 4 + 4 - (4-\lambda) - 4(3-\lambda) - 4(3-\lambda) = 0,$$

čili

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0. \quad (k)$$

Jeden kořen je zřejmě $\lambda_1 = 2$. Dělíme-li rovnici (k) kořenovým činitelem $(\lambda - 2)$, dostaneme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - 8\lambda + 8 = 0, \quad (l)$$

odkud

$$\lambda_1 = 2(2 + \sqrt{2}), \quad \lambda_3 = 2(2 - \sqrt{2}). \quad (m)$$

Z rovnice (l) plynou kvadráty hledaných kruhových frekvencí

$$\omega_1^2 = \frac{4(2 - \sqrt{2})Q}{ml}, \quad \omega_2^2 = \frac{8Q}{ml}, \quad \omega_3^2 = \frac{4(2 + \sqrt{2})Q}{ml}. \quad (n)$$

23. Inverzí matice (g) z úlohy 22 nebo z definice k_{ij} plyne

$$K = \frac{4Q}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

24.

$$X_\alpha = \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix},$$

$$X_\beta = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_4 \end{Bmatrix},$$

$$K_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} k_a k_b & -k_b \\ -k_b & k_b + k_c \end{bmatrix},$$

$$K_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -k_a & 0 \\ 0 & k_a \end{bmatrix},$$

$$K_{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} -k_a & 0 \\ 0 & -k_c \end{bmatrix},$$

$$K_{\beta\beta} = \begin{bmatrix} k_a & 0 \\ 0 & k_c \end{bmatrix},$$

$$u_\alpha = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix},$$

$$u_\beta = \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix}.$$

Podle (8.24 a)

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} k_b + k_c & k_b \\ k_b & k_a + k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

$$D = k_a k_b + k_b k_c + k_c k_a.$$

Podle (8.25 a)

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} -(k_a k_b + k_a k_c) & -k_a k_b \\ -k_b k_c & -(k_b k_c + k_c k_a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

25.

$$u_3 = \frac{k_b}{k_b + k_c} ; \quad X_2 = \frac{k_a k_b + k_b k_c + k_c k_a}{k_b + k_c}.$$

26.

$$u_3 = \frac{k_b + X_3}{k_b + k_c} ; \quad X_2 = k_a + k_b (1 - u_3).$$

27.

$$U = \frac{1}{2} k_a (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_b (u_3 - u_2)^2 + \frac{1}{2} k_c (u_4 - u_3)^2.$$

Nyní

$$k_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} = k_a ; \quad k_{12} = k_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial u_2} = -k_a ;$$

$$k_{13} = k_{31} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial u_3} = 0 ; \quad k_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_2^2} = k_a + k_b$$

atd.

28. Z rovnice

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

vyplývají prvky matice K , zvolíme-li všechna posunutí nulová až na jedno (postupně u_1 , v_1 , u_2 , v_2). Je-li např. $u_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 0, \quad u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \text{vyjde} \quad k_{11} = X_1/u_1 = k \cos^2 \varphi; \\
 k_{21} &= Y_1/u_1 = k \sin \varphi \cos \varphi, \quad k_{31} = X_2/u_1 = -k \cos^2 \varphi, \\
 k_{41} &= Y_2/u_1 = -k \sin \varphi \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Celkem vyjde

$$K = k \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi \\ -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

29. Pro pružinu 1 - 2 je $\varphi = 0^\circ$, takže $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = 0$.
 Pro pružinu 1 - 3 je $\varphi = 150^\circ$, takže $\cos \varphi = -\sqrt{3}/2$,
 $\sin \varphi = 1/2$. Pro pružinu 1 - 4 je $\varphi = 225^\circ$, takže
 $\cos \varphi = -\sqrt{2}/2$, $\sin \varphi = -\sqrt{2}/2$. Celková matice tuhosti bude osmého
 řádu, jednotlivé submatice budou čtvrtého, popř. druhého řádu. Napišeme
 je nejprve zvlášť. S využitím řešení úlohy 28 máme:

Pružina 1 - 2

$$K_{1-2} = \begin{matrix} & u_1 & u_2 \\ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pružina 1 - 3

$$[K_{1-3}] = \begin{matrix} & u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \\ \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \\ Y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{3}{4}k & -\frac{\sqrt{3}}{4}k & -\frac{3}{4}k & \frac{\sqrt{3}}{4}k \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}k & \frac{1}{4}k & \frac{\sqrt{3}}{4}k & -\frac{1}{4}k \\ -\frac{3}{4}k & \frac{\sqrt{3}}{4}k & \frac{3}{4}k & -\frac{\sqrt{3}}{4}k \\ \frac{\sqrt{3}}{4}k & -\frac{1}{4}k & -\frac{\sqrt{3}}{4}k & \frac{1}{4}k \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fružina 1 - 4

$$[K_{1-4}] = \begin{matrix} & u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_4 \\ Y_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k \\ \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k \\ -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k \\ -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Složením vznikne výsledná matice tuhosti řádu 8 x 8. Jednotlivé prvky vzniknou sečtením příslušných prvků z uvedených submatic; tato "příslušnost" je zřejmá z pomocného označení sloupců a řádků. Vznikne tak

$$[K] = \begin{matrix} & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{9}{4}k & \frac{2-\sqrt{3}}{4}k & -k & 0 & -\frac{3}{4}k & \frac{\sqrt{3}}{4}k & -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4}k & \frac{3}{4}k & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4}k & -\frac{1}{4}k & -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k \\ -k & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4}k & \frac{\sqrt{3}}{4}k & 0 & 0 & \frac{3}{4}k & -\frac{\sqrt{3}}{4}k & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}k & -\frac{1}{4}k & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4}k & \frac{1}{4}k & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k \\ -\frac{1}{2}k & -\frac{1}{2}k & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}k & \frac{1}{2}k \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Tato matice je singulární. Vynecháním všech sloupců a řádků s výjimkou prvních dvou (jak odpovídá okrajovým podmínkám) dostaneme

$$[K_{\alpha\alpha}] = \begin{bmatrix} \frac{9}{4}k & \frac{2-\sqrt{3}}{4}k \\ \frac{2-\sqrt{3}}{4}k & \frac{3}{4}k \end{bmatrix}$$

takže

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}k \begin{bmatrix} 9 & 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

Snadno se lze přesvědčit přímým výpočtem, že tato rovnice vskutku platí. Z poslední rovnice dále plyne, že

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{5+\sqrt{3}} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 3 & -(2-\sqrt{3}) \\ -(2-\sqrt{3}) & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix}$$

Všechny reakce plynou naráz z rovnice (8.25 a)

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \\ -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{5 + \sqrt{3}} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 3 & -(2 - \sqrt{3}) \\ -(2 - \sqrt{3}) & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix}$$

Po vynásobení

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2(5 + \sqrt{3})} \begin{bmatrix} -6 & 2(2 - \sqrt{3}) \\ 0 & 0 \\ -(3 + \sqrt{3}) & 3(1 + \sqrt{3}) \\ (1 + \sqrt{3}) & -(3 + \sqrt{3}) \\ -(1 + \sqrt{3}) & -(7 + \sqrt{3}) \\ -(1 + \sqrt{3}) & -(7 + \sqrt{3}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix}$$

Kontrolou správnosti může být splnění podmínek rovnováhy

$$\begin{aligned} X_2 + X_3 + X_4 &= -X_1, \\ Y_2 + Y_3 + Y_4 &= -Y_1. \end{aligned}$$

30. V tomto případě $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $u_3 = 0$. Dále $X_2 = 0$,
 $Y_2 = -F$, $Y_3 = 0$. Z matice (9.26)

$$\begin{Bmatrix} X_2 = 0 \\ Y_2 = -F \\ Y_3 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{k\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 4 + 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= -\frac{F}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 4 + 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

32. Úhel $\varphi = 180^\circ$, $\lambda = -1$, $\mu = 0$. Transformační matice je tedy záporně vzatou jednotkovou maticí řádu 6×6 . Platí

$$K = T^T \bar{K} T = (-I) \bar{K} (-I) = \bar{K}.$$

Matice tuhosti se nezmění.

33. K matici (11.3) je nutno přičíst

$$K_{1-4} = \frac{k}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledek je dán maticí

$$K = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 4 + \sqrt{2} & \sqrt{2} & -4 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 + \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -4 & 0 & 4 + \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 4 + \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -4 \\ \hline 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 + \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 & 0 \\ 0 & -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 + \sqrt{2} & -4 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 + \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -4 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 4 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

34. Rozdělení na submatice odpovídá vztahu (8.22). Pro vektor posuvů $\{\bar{u}_\alpha\}$ dostaneme podle (8.24 a)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} &= \frac{4}{k} \begin{bmatrix} 4 + \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 & 0 \\ -\sqrt{2} & 4 + \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 + \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 4 + \sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{3 + 4\sqrt{2}} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 2(5 + 3\sqrt{2}) & 2(1 + \sqrt{2}) & 9 + 4\sqrt{2} & -(1 + 2\sqrt{2}) \\ 2(1 + \sqrt{2}) & 2(1 + 2\sqrt{2}) & 1 + 2\sqrt{2} & -1 \\ 9 + 4\sqrt{2} & 1 + 2\sqrt{2} & 2(5 + 3\sqrt{2}) & -2(1 + \sqrt{2}) \\ -(1 + 2\sqrt{2}) & -1 & -2(1 + \sqrt{2}) & 2(1 + 2\sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Nyní dosadíme $X_3 = 0$, $Y_3 = 0$, $X_4 = F$, $Y_4 = 0$. Vyjde

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3 + 4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{k} \begin{Bmatrix} 9 + 4\sqrt{2} \\ 1 + 2\sqrt{2} \\ 2(5 + 3\sqrt{2}) \\ -2(1 + \sqrt{2}) \end{Bmatrix} \cdot F.$$

Reakce vyjdou podle (8.25 a)

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = K_{\alpha\alpha} K_{\alpha\alpha}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{F}{3 + 4\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -2 - 2\sqrt{2} \\ -3 - 4\sqrt{2} \\ -1 - 2\sqrt{2} \\ 3 + 4\sqrt{2} \end{Bmatrix}.$$

Tyto reakce splňují podmínky rovnováhy $Y_1 = -Y_2$, $X_1 + X_2 = F$.
Nyní určíme síly v prutech. Např. pro prut 2 - 3 platí, že
 $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, délka prutu = $\ell\sqrt{2}$. Vyjde

$$P_{2-3} = \frac{k}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{Bmatrix} = -\frac{4 + \sqrt{2}}{3 + 4\sqrt{2}} F.$$

35. Celková matice tuhosti je čtrnáctého řádu. K výpočtu posuvů a sil v prutech však potřebujeme jen zmenšenou matici $K_{\alpha\alpha}$, která je druhého řádu. Napíšeme proto tuto zmenšenou matici přímo.
Bude platit vztah

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = [K_{\alpha\alpha}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}.$$

Podle (9.16)

$$k_{11} = \sum_{i=1}^{i=7} \frac{ES}{l_i} \lambda_i^2,$$

$$k_{12} = k_{21} = \sum_{i=1}^{i=7} \frac{ES}{l_i} \lambda_i \mu_i,$$

$$k_{22} = \sum_{i=1}^{i=7} \frac{ES}{l_i} \mu_i^2.$$

Přitom $\mu_i/\lambda_i = \operatorname{tg} \varphi_i = -\frac{1}{2}(i-1)$, jak je zřejmé z obr. 21, označíme-li znakem φ_i úheli i -tého prutu, spojujícího kloub $i+1$ s kloubem 1, s vodorovnou osou; $i = 1, 2, \dots, 6$.

Vyjde

$$k_{11} = 4,2 \frac{ES}{l},$$

$$k_{12} = k_{21} = -1,05 \frac{ES}{l},$$

$$k_{22} = 1,62 \frac{ES}{l},$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \frac{l}{ES} \frac{1}{5,70} \begin{bmatrix} 1,62 & 1,05 \\ 1,05 & 4,20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ -Q \end{Bmatrix}$$

Síly v prutech plynou z rovnice (9.20).

36. Výsledná matice tuhosti vyjde v jednotkách $MN m^{-2} \cdot mm = 10^3 N m^{-1}$:

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot 5 \cdot 10^4.$$

Nyní je $u_3 = 0$, $v_3 = 0$, $u_4 = 0$, $v_4 = 0$. Dále

$$\{X^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ Y_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 200 \propto \Delta t.$$

Výsledek je v jednotkách $MN m^{-2} \cdot mm^2 = N$, síly jsou tedy v newtonech. Platí totiž, že $N mm^{-2} = MN m^{-2}$. V jednotce pro napětí dáváme přednost násobkům základní jednotky $N m^{-2}$ před jinými, často zbytečně a uměle vytvořenými jednotkami (např. $daN cm^{-2}$ ap.). Podle rovnice (12.11)

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7 \alpha \Delta t = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot 5 \cdot 10^4 \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Odtud

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{5}{11} \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 10 & -6 & -1 & -5 \\ -6 & 30 & 5 & 25 \\ -1 & 5 & 10 & 6 \\ -5 & 25 & 6 & 30 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot 4 \cdot 10^7 \alpha \Delta t \right)$$

Sílu F dosazujeme v N, posuvy vyjdou v mm, součin $\alpha \Delta t$ je bezrozměrný.

37. Pro jednotlivé pruty platí tabulka:

Prut	x	y	z	l	λ	μ	ν
1 - 2	2,5	0	0	2,50	1,000	0,000	0,000
1 - 3	1,25	2	0	2,36	0,530	0,848	0,000
1 - 4	0,75	0,4	2	2,17	0,345	0,184	0,920
1 - 6	1,25	1,2	2	2,65	0,471	0,452	0,753
2 - 3	-1,25	2	0	2,36	-0,530	0,848	0,000
2 - 4	-1,75	0,4	2	2,69	-0,650	0,149	0,743
2 - 5	-0,75	0,4	2	2,17	-0,345	0,184	0,920
3 - 5	0,5	-1,6	2	2,61	0,192	-0,613	0,765
3 - 6	0	-0,8	2	2,15	0,000	-0,372	0,930
4 - 5	1	0	0	1,00	1,000	0,000	0,000
4 - 6	0,5	0,8	0	0,943	0,531	0,848	0,000
5 - 6	-0,5	0,8	0	0,943	-0,531	0,848	0,000

Dále vypočteme čtverce λ^2, μ^2, ν^2 a součiny $\lambda\mu, \mu\nu, \lambda\nu$ a zapíšeme do tabulky. Pomocí těchto výrazů dostaneme matice tuhosti pro jednotlivé pruty. Např. pro prut 1 - 4 bude elementární matice tuhosti

$$K_{1-4} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_4 & v_4 & w_4 \\ 0,119 & 0,064 & 0,318 & -0,119 & -0,064 & -0,318 \\ 0,064 & 0,034 & 0,170 & -0,064 & -0,034 & -0,170 \\ 0,318 & 0,170 & 0,847 & -0,318 & -0,170 & -0,847 \\ -0,119 & -0,064 & -0,318 & 0,119 & 0,064 & 0,318 \\ -0,064 & -0,034 & -0,170 & 0,064 & 0,034 & 0,170 \\ -0,318 & -0,170 & -0,847 & 0,318 & 0,170 & 0,847 \end{bmatrix} \frac{ES}{l}$$

Tyto dílčí matice pak složíme ve výslednou matici, která je osmnáctého řádu. Můžeme ji rozdělit na submatice devátého řádu (ty se snáze vejdu na papír); symbolicky

$$K = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right],$$

přičemž $K_{21} = K_{12}^T$ (vzhledem k souměrnosti matice K). Pro úsporu místa zde uvedeme výsledek výpočtu jen pro submatici K_{11} :

$$K_{11} = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & u_3 & v_3 & w_3 \\ 1,622 & 0,726 & 0,672 & -1,000 & 0,000 & 0,000 & -0,281 & -0,450 & 0,000 \\ 0,726 & 0,958 & 0,511 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & -0,450 & -0,720 & 0,000 \\ 0,672 & 0,511 & 1,414 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ -1,000 & 0,000 & 0,000 & 1,822 & -0,611 & -0,801 & -0,281 & 0,450 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & -0,611 & 0,776 & 0,281 & 0,450 & -0,720 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & -0,801 & 0,281 & 1,399 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ -0,281 & -0,450 & 0,000 & -0,281 & 0,450 & 0,000 & 0,599 & -0,118 & 0,147 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,450 & -0,720 & 0,000 & -0,118 & 1,954 & -0,816 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,147 & -0,816 & 1,450 \end{bmatrix}$$

Tato Schwedlerova konstrukce je zajímavá tím, že při určitém způsobu zatížení a uložení může ztratit tvarovou určitost, vznikne výjimečný případ. O tom pojednává monografie WILBUR, J.B. - NORRIS, C.H.: Elementary Structural Analysis, McGraw-Hill, New York 1948, str. 229. Maticová metoda výpočtu takový případ sama signalizuje; matice $K_{\alpha\alpha}$ se stane singulární a její inverze je nemožná.

$$38. \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = -w_2 = 13 \sqrt{26} \frac{Fl}{ES},$$

$$P_{1-2} = 0, \quad P_{1-3} = 0, \quad P_{1-4} = -P_{1-6} = 1 \frac{1}{2} \sqrt{26} F.$$

39. Jsou tedy předepsány tyto okrajové podmínky

$$v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad \overset{\circ}{v}_3 = 0$$

a toto působící zatížení

$$Y_1 = -F, \quad M_1 = M.$$

Ohybová tuhost je konstantní. Jednotlivé matice tuhosti jsou:

$$K_{1-2} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} v_1 & \overset{\circ}{v}_1 & \overset{\circ}{v}_2 \\ 12 & -6l & -6l \\ -6l & 4l^2 & 2l^2 \\ -6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix},$$

$$K_{2-3} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{v}_2 \\ 4l^2 \end{bmatrix},$$

$$K_p = \begin{bmatrix} v_1 \\ k \end{bmatrix}$$

Sloupce a řádky, které obsahovaly samé nuly, jsme vynechali, neboť se při skládání matic neuplatní. Výsledná matice $K_{\alpha\alpha}$ bude obsahovat jen prvky přiřazené posuvům v_1 , $\overset{\circ}{v}_1$, $\overset{\circ}{v}_2$. Napíšeme ji proto přímo.

Pro stručnost použijeme označení

$$\beta = \frac{kl^3}{EJ}$$

Zmenšená matice tuhosti pak vyjde

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} v_1 & \overset{\circ}{v}_1 & \overset{\circ}{v}_2 \\ 12 + \beta & -6l & -6l \\ -6l & 4l^2 & 2l^2 \\ -6l & 2l^2 & 8l^2 \end{bmatrix}$$

Při řešení využijeme to, že $M_2 = 0$, a matici $K_{\alpha\alpha}$ rozdělíme na submatice

$$\begin{Bmatrix} Y_1 = -F \\ M_1 = M \\ \hline M_2 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 + \beta & -6l & -6l \\ -6l & 4l^2 & 2l^2 \\ \hline -6l & 2l^2 & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2' \end{Bmatrix}$$

Tato rovnice se rozpadá na dvě

$$\begin{Bmatrix} -F \\ M \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \left(\begin{bmatrix} 12 + \beta & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6l \\ 2l^2 \end{Bmatrix} \{v_2'\} \right),$$

$$\{0\} = \frac{EJ}{l^3} \left([-6l \quad 2l^2] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \end{Bmatrix} + [8l^2] \{v_2'\} \right)$$

Podle druhé z nich určíme $\{v_2'\}$ a dosadíme do první. Vyjde

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \end{Bmatrix} = \frac{2l^4}{12EJ + 7kl^3} \begin{bmatrix} \frac{7}{2l} & \frac{9}{2l^2} \\ \frac{9}{2l^2} & \frac{15}{2l^3} + \frac{k}{EJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -F \\ M \end{Bmatrix},$$

$$\{v_2'\} = -\frac{l}{8} \left[-\frac{6}{l^2} \quad \frac{2}{l} \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \end{Bmatrix}.$$

40. Lze využít matici (17.1), popř. (17.5). Okrajové podmínky jsou

$$v_1 = 0, \quad v_1' = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_5 = 0, \quad v_5' = 0$$

a ze souměrnosti plyne

$$v_2 = v_4, \quad v_2' = -v_4', \quad v_3' = 0.$$

Zatížení působí v bodech 2 a 4, tedy

$$Y_2 = -F, \quad Y_4 = -F.$$

Nakonec vyjde

$$\begin{Bmatrix} Y_2 = -F \\ M_2 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^2} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_2' l \end{Bmatrix}$$

a odtud

$$v_2 = -\frac{Fl^3}{24 EJ} \quad v_2' = 0$$

41. Celková matice tuhosti by byla patnáctého řádu. Proto sestavíme přímo jen zmenšenou matici $K_{\alpha\alpha}$, jejíž prvky budou přiřazeny nenulovým deformacím u_1, v_1, v_1' . Bude tedy třetího řádu. K výpočtu reakcí pak uijeme elementární matice tuhosti pro jednotlivé prvky; reakce vypočteme pomocí ekvivalentních sil. Jednotlivé matice sestavíme podle (19.15)

$$K_{1-2} = \frac{EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & v_1' \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3l \\ 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Veličina $\beta = \frac{S}{J} l^2$ zahrnuje do výpočtu osovou tuhost.

$$K_{1-3} = \frac{EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & v_1' \\ 3 & 0 & 3l \\ 0 & \beta & 0 \\ 3l & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{1-4} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & v_1' \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{1-5} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & v_1' \\ 12 & 0 & -6l \\ 0 & \beta & 0 \\ -6l & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Výsledná matice

$$K_{\text{kol}} = \frac{EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \vartheta_1 \\ 3\beta + 27 & 0 & -9l \\ 0 & 3\beta + 27 & 9l \\ -9l & 9l & 24l^2 \end{bmatrix}$$

Bude tedy

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = 0 \\ M_1 = M \end{cases} = \frac{EJ}{2l^3} \left[\begin{array}{cc|c} 3\beta + 27 & 0 & -9l \\ 0 & 3\beta + 27 & 9l \\ \hline -9l & 9l & 24l^2 \end{array} \right] \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ \vartheta_1 \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{bmatrix} 3\beta + 27 & 0 \\ 0 & 3\beta + 27 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \end{cases} + \begin{bmatrix} -9l \\ 9l \end{bmatrix} \vartheta_1 = \{0\},$$

$$\{M\} = \frac{EJ}{2l^3} \left(\begin{bmatrix} -9l & 9l \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \end{cases} + 24l^2 \vartheta_1 \right).$$

Z první z těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \end{cases} &= -9l\vartheta_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{3\beta + 27} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3\beta + 27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= 3l\vartheta_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta + 9} \\ \frac{1}{\beta + 9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a pak z druhé

$$\{M\} = \frac{EJ}{2l^3} \left(9l \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} 3lv_1 \begin{Bmatrix} \frac{1}{\beta+9} \\ -\frac{1}{\beta+9} \end{Bmatrix} + 24l^2 \{v_1\} \right) =$$

$$= \frac{EJ}{l} \left(-\frac{27}{\beta+9} + 12 \right) \{v_1\} = \frac{12\beta + 81}{\beta + 9} \frac{EJ}{l} \{v_1\}$$

Odtud

$$v_1 = \frac{\beta + 9}{12\beta + 81} \frac{Ml}{EJ}; \quad u_1 = -v_1 = \frac{Ml^2}{(4\beta + 27)EJ}$$

Lze-li zanedbat vliv osové tuhosti, je $\beta \rightarrow \infty$, takže

$$v_1 = \frac{Ml}{12EJ}, \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0.$$

Výpočet reakcí uvedeme už jen pro tento případ. Pro nosník 4 - 1 podle (16.1) dostaneme

$$Y_{4(4-1)}^e = -\frac{6EJ}{l^2} v_1 = -\frac{1}{2} \frac{M}{l},$$

$$M_{4(4-1)}^e = \frac{EJ}{l} 2v_1 = \frac{1}{6} M.$$

Pro nosník 1 - 2

$$Y_{1(1-2)}^e = \frac{EJ}{8l^3} (-12v_1) = -\frac{1}{8} \frac{M}{l},$$

$$M_{1(1-2)}^e = \frac{EJ}{4l^2} \cdot 8v_1 = \frac{1}{6} M.$$

V uzlu 2 tedy bude podle (16.7) a (16.8)

$$Y_2 = -V_{1-2} = -Y_{1(1-2)}^e = \frac{1}{8} \frac{M}{l},$$

$$M_2 = -M_{1-2}|_{x=2l} = -(Y_{1(1-2)}^e 2l - M_{1(1-2)}^e) =$$

$$= -\left(-\frac{1}{8} \frac{M}{l} 2l + \frac{1}{6} M\right) = \frac{1}{12} M$$

Součet svislých reakcí

$$Y_4 + Y_2 = -\frac{1}{2} \frac{M}{l} + \frac{1}{8} \frac{M}{l} = -\frac{3}{8} \frac{M}{l}$$

bude v rovnováze s reakcemi Y_3 a Y_5 . Ty musí být v obráceném poměru než osové tuhosti nosníků 1 - 3 a 1 - 5. Celkem tedy bude:

$$\begin{aligned} X_2 &= -\frac{2}{8} \frac{M}{l}, & Y_2 &= \frac{1}{8} \frac{M}{l}, & M_2 &= \frac{1}{12} M, \\ X_3 &= -\frac{1}{8} \frac{M}{l}, & Y_3 &= \frac{1}{8} \frac{M}{l}, & M_3 &= \frac{1}{12} M, \\ X_4 &= -\frac{1}{8} \frac{M}{l}, & Y_4 &= -\frac{1}{2} \frac{M}{l}, & M_4 &= \frac{1}{6} M, \\ X_5 &= \frac{1}{2} \frac{M}{l}, & Y_5 &= \frac{2}{8} \frac{M}{l}, & M_5 &= \frac{1}{6} M. \end{aligned}$$

Přesvědčte se, že jsou splněny podmínky rovnováhy.

42.

$$v_1 = -\frac{7kl^3 + 96EJ}{12(kl^3 + 3EJ)} \frac{Fl^3}{EJ}$$

$$v_2 = -\frac{5kl^3}{2(kl^3 + 3EJ)} \frac{F}{k}$$

43.

$$Y_1 = Y_5 = -\frac{9}{7} \frac{M}{l}; \quad Y_3 = \frac{6}{7} \frac{M}{l};$$

$$Y_2 = Y_4 = \frac{12}{7} \frac{M}{l}$$

44. Zde je třeba uvážit, co znamená kloub mezi oběma nosníky. V kloubu - 2 mají oba nosníky společný posuv, nemají však již společný úhel.

Matice $K_{\alpha\alpha}$ tedy bude třetího řádu a bude mít prvky přiřazené k deformacím v_2 , v_{2-} , v_{2+} . Jednotlivé matice jsou

$$K_{1-2} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} v_2 & v_{2-} \\ 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{2-3} = \frac{EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} v_2 & v_{2+} \\ 3 & -3l \\ -3l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Bude tedy

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_2 = -F \\ M_{2-} = 0 \\ M_{2+} = 0 \end{array} \right\} = \frac{EJ}{2l^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 27 & & & -12l & & -3l \\ \hline -12l & & & 8l^2 & & 0 \\ \hline -3l & & & 0 & & 4l^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} v_2 \\ \psi_{2-} \\ \psi_{2+} \end{array} \right\}.$$

Odtud obvyklým postupem dostaneme

$$v_2 = - \frac{8 Fl^3}{27 EJ},$$

$$\psi_{2-} = \frac{4 Fl^2}{9 EJ},$$

$$\psi_{2+} = - \frac{2 Fl^2}{9 EJ}.$$

45. Předpokládáme vetknutí v uzlu 3, takže okrajové podmínky jsou

$$v_3 = 0, \quad \psi_3 = 0. \quad (a)$$

Dané zatížení (při celkové délce nosníku $L = 2l$) je

$$Y_1 = - \frac{ql}{2}, \quad M_1 = \frac{ql^2}{8}, \quad Y_2 = ql, \quad M_2 = 0. \quad (b)$$

Dále vyjde

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = - \frac{ql}{2} \\ \frac{M_1}{l} = \frac{ql}{8} \\ Y_2 = -ql \\ \frac{M_2}{l} = 0 \end{array} \right\} = \frac{EJ}{l^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 12 & -6 & -12 & -6 \\ \hline -6 & 4 & 6 & 2 \\ \hline -12 & 6 & 24 & 0 \\ \hline -6 & 2 & 0 & 8 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} v_1 \\ \psi_{1l} \\ v_2 \\ \psi_{2l} \end{array} \right\}. \quad (c)$$

Tuto rovnici rozepíšeme na dvě rovnice

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{ql}{2} \\ \frac{ql}{8} \\ -ql \end{array} \right\} = \frac{EJ}{l^3} \left(\left[\begin{array}{ccc} 12 & -6 & -12 \\ -6 & 4 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} v_1 \\ \psi_{1l} \\ v_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} -6 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \psi_{2l} \right\} \right), \quad (d)$$

$$\{0\} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_{1l} \\ v_2 \end{Bmatrix} + 8 \{v_{2l}\} \quad (e)$$

Vyloučením jednoprvkové matice $\{v_{2l}\}$ dostaneme ^{*}/

$$\begin{Bmatrix} -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql}{6} \\ -ql \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{2l^3} \left(\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 \\ -6 & 4 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \begin{Bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_{1l} \\ v_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} 15 & -9 & -24 \\ -9 & 7 & 12 \\ -24 & 12 & 48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_{1l} \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Násobením zleva inverzní maticí vyjde po úpravě

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_{1l} \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 16 & 12 & 5 \\ 12 & 12 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,5 \\ 0,125 \\ -1,0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{ql^4}{48 EJ} \begin{Bmatrix} -92 \\ -60 \\ -33 \end{Bmatrix} = \frac{qL^4}{768 EJ} \begin{Bmatrix} -92 \\ -60 \\ -33 \end{Bmatrix}$$

Přesné hodnoty, plynoucí ze spojitého řešení, jsou

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_{1l} \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{qL^4}{768 EJ} \begin{Bmatrix} -96 \\ -64 \\ -34 \end{Bmatrix}$$

^{*}/ Uvážíme-li že $\{v_{2l}\} = v_{2l}$, mohli bychom v druhém členu oblé závorky (d) zaměnit pořadí činitelů. Pak by se nám však nepodařilo vytknout vektor posuvů a výpočet by nemohl pokračovat.

Chyba ve výpočtu maximálního průhybu je tedy asi 4,2 %, ve výpočtu maximálního sklonu 6,25 %. To není mnoho, uvážíme-li, že jsme spojité zatížení nahradili zatížením soustředěným jen do tří uzlových bodů, a to podle zásady statické ekvivalence, což u pružných těles nemůže být dokonalou náhradou.

46. Okrajové podmínky jsou

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

Základní rovnice

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{a})$$

Protože v podporách nepůsobí vnější momenty, je

$$M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0.$$

Pro nosník $a \equiv 1-2$, $b \equiv 2-3$ dostaneme tyto složky vektoru $\{X_i^{(1)}\}$:

$$Y_1^{(1)} = Y_{2a}^{(1)} = \frac{ql}{2},$$

$$Y_2^{(1)} = Y_{2a}^{(1)} + Y_{2b}^{(1)} = \frac{1}{2}ql + 0 = \frac{1}{2}ql,$$

$$Y_3^{(1)} = Y_{3b}^{(1)} = 0,$$

$$M_1^{(1)} = M_{1a}^{(1)} = -\frac{1}{12}ql^2,$$

$$M_2^{(1)} = M_{2a}^{(1)} + M_{2b}^{(1)} = \frac{1}{12}ql^2 + 0 = \frac{1}{12}ql^2,$$

$$M_3^{(1)} = M_{3b}^{(1)} = 0.$$

Řešením rovnice (a) podle známých pravidel vyjde

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{l}{24EJ} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

a odtud

$$v_1 = \frac{ql^3}{32EJ}, \quad v_2 = -\frac{ql^3}{48EJ}, \quad v_3 = \frac{ql^3}{96EJ}.$$

Ekvivalentní síly, jež by způsobily stejnou deformaci jednotlivých prvků, jsou :

$$Y_1^e = -\frac{ql}{16} ,$$

$$Y_2^e = Y_{2a}^e + Y_{2b}^e = \frac{ql}{16} + \frac{ql}{16} = \frac{ql}{8} ,$$

$$Y_3^e = -\frac{ql}{16} ,$$

$$M_1^e = M_{1a}^e = \frac{ql^2}{12} ,$$

$$M_2^e = M_{2a}^e + M_{2b}^e = -\frac{ql^2}{48} - \frac{ql^2}{16} = -\frac{ql^2}{12} ,$$

$$M_3^e = M_{3b}^e = 0 .$$

Tyto síly dostaneme z rovnice (4.17), napíšeme-li ji postupně pro oba prvky (a , b). Celkem tedy působí tyto reakce :

$$Y_1 = Y_1^{(1)} + Y_1^e = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{16} = \frac{7}{16} ql ,$$

$$Y_2 = Y_2^{(1)} + Y_2^e = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{8} = \frac{5}{8} ql ,$$

$$Y_3 = Y_3^{(1)} + Y_3^e = -\frac{1}{16} ql ,$$

$$M_1 = M_1^{(1)} + M_1^e = -\frac{1}{12} ql^2 + \frac{1}{12} ql^2 = 0 ,$$

$$M_2 = M_2^{(1)} + M_2^e = \frac{1}{12} ql^2 - \frac{1}{12} ql^2 = 0 ,$$

$$M_3 = M_3^{(1)} + M_3^e = 0$$

P o u ž i t á l i t e r a t u r a

- ANGOT, A.: Užitá matematika pro elektrotechnické
inženýry. Praha, SNTL 1960
(překlad z francouzského originálu)
- BYDŽOVSKÝ, B.: Úvod do teorie determinantů a matic
a jejich užití. Praha, JČMF 1947.
- FADDĚJEV, D.K. - FADDĚJEVA, V.N.: Vyčíslitelnyje metody
linějnój algebry.
Moskva, Fizmatgiz 1960.
- FRAZER, R.A. - DUNCAN, W.J. - COLLAR, A.R.:
Základy maticového počtu, jeho aplikace
v dynamice a v diferenciálních rovnicích.
Praha, SNTL 1958
(překlad z anglického originálu).
- GANTMACHER, F.R.: Teorija matic.
Moskva, Gostěchizdat 1953.
- MARTIN, H.C.: Matrix Methods of Structural Analysis.
New York, McGraw-Hill 1966.
- PESTEL, E.C. - LECKIE, F.A.: Matrix Methods in Elastomechanics.
New York, McGraw-Hill 1963.
- PRZEMIENIECKI, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis.
New York, McGraw-Hill 1968.

Název publikace: MATICOVÉ METODY V PEVNOSTNÍCH
VÝPOČTECH
I. část
STAVBA STROJŮ XXI

Autor: Prof. Ing. Cyril Höschl

Počet stran: 133

Formát: A 4

Náklad: 200 výtisků

Číslo publikace: 60/554/73 (667)

Vydal: Dům techniky ČVTS Praha,
Gorkého nám. 23, Praha 1

Rozmnožil: Ústav pro výzkum motorových vozidel
Lihovarská 12, Praha 9

Datum vydání: Únor 1973